

ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA ESCALAR PERTURBATIVA Y NO PERTURBATIVA

Yajaira Concha Sánchez

Asesor de Tesis: Dr. Adnan Bashir

octubre de 2005

A mis Padres ...

Agradecimientos

Al Dr. Adnan Bashir, por darme la oportunidad de trabajar con él, por atender siempre a todas mis dudas y motivarme a seguir en éste maravilloso mundo de la ciencia.

Al Director del Instituto de Física y Matemáticas el Dr. Francisco Astorga Sáenz por su apoyo directo durante todo éste tiempo.

A mis Padres, quienes me han apoyado incondicionalmente en todas las decisiones que he tomado, al apoyo moral que siempre me han brindado.

A mis hermanos quienes son personas muy importantes para mí y siempre han estado presentes en los detalles importantes de mi vida.

A mis amigos, por sus consejos y comentarios de los cuales siempre aprendo.

A mis profesores, que me enseñaron las bases fundamentales para mi formación académica, en especial al Dr. Thomas Zannias y al Dr. Luca Tessieri por el tiempo incondicional que me han brindado y a todos aquellos que me estimularon a continuar adelante.

Al personal Administrativo y de la biblioteca del Instituto de Física y Matemáticas por su cordialidad y eficiencia en el servicio.

Contenido

Introducción	1
1. Escalares	4
1.1. La Ecuación de Klein-Gordon	4
1.2. La Densidad de Lagrange	5
1.2.1. Las Ecuaciones de Euler-Lagrange para Sistemas Relativistas	5
1.2.2. La Densidad de Lagrange para la Ecuación de Klein-Gordon	6
1.3. Transformaciones Globales $U(1)$	7
1.3.1. El Teorema de Noether	7
1.3.2. Conservación del Cuadrivector de Corriente	8
1.4. Propagador de un Escalar	9
2. Fotones	12
2.1. Las Ecuaciones de Maxwell	12
2.2. Invariancia de Norma	13
2.3. Fotones. Vectores de Polarización	14
2.4. La Densidad de Lagrange para un Fotón Libre	16
2.5. Propagador Fotónico	18
3. Electrodinámica Cuántica Escalar	20
3.1. La Interacción de una Partícula de Espín Cero con un Campo Electromagnético	20
3.2. La Densidad de Lagrange para una Partícula de Klein-Gordon en un Campo Electromagnético	21
3.3. Invariancia de Norma Local $U(1)$	22
3.4. Probabilidad y Amplitud de Transición	24
3.4.1. Teoría de Perturbación No Relativista	24
3.4.2. Escalar Cargado en un Campo Electromagnético	25
3.5. Diagramas y Reglas de Feynman	26
3.5.1. Diagramas de Feynman	27
3.5.2. Reglas de Feynman	29

4. Divergencias y Regularización	34
4.1. Divergencias	34
4.2. Regularización	36
4.2.1. Un Ejemplo. El Potencial Eléctrico	36
4.2.2. Un Ejemplo. Teoría Cuántica de Campos	39
5. Propagador Escalar	44
5.1. Introducción	44
5.2. Propagador Escalar a un Lazo	46
5.2.1. Norma de Feynman	46
5.2.2. Norma Arbitraria	49
5.2.3. Propagador Escalar en 3 Dimensiones	52
5.2.4. Regularización	53
5.3. Transformación de Landau-Khalatnikov-Fradkin	54
5.3.1. Propagador Escalar No Perturbativo	55
6. Propagador Fotónico	57
6.1. Introducción	57
6.2. Propagador Fotónico a un Lazo	58
6.2.1. El Propagador Fotónico en 3 Dimensiones	60
6.2.2. Regularización	62
6.3. Método Alternativo	63
6.4. Identidad de Ward	67
6.5. Propagador Fotónico No Perturbativo	67
7. Vértices	71
7.1. Introducción	71
7.2. El Vértice de 3-Puntos a un Lazo	72
7.2.1. Regularización	72
7.3. Identidad de Ward-Green-Takahashi	79
7.4. El Vértice Completo de 3-Puntos a un Lazo	80
7.4.1. El Vértice Λ_1^μ a un Lazo	80
7.4.2. El Vértice Λ_2^μ a un Lazo	85
7.5. El Vértice de 4-Puntos a un Lazo	87
7.6. Sobre el Vértice No Perturbativo de 3-Puntos	88
8. Discusión y Conclusiones	91
A. Parametrización de Feynman	93
A.1. Algunas Integrales Estándar	93
A.2. Parametrización de Feynman	94
A.3. La Función Gamma	95

B. Cálculo de Algunas Integrales del Vértice **97**
B.1. Cálculo de la Integral $J^{(0)}$ en $D = 3$ 97
B.2. Cálculo de la Integral $K^{(0)}$ en D Dimensiones 101

Bibliografía **103**

Introducción

Podemos dividir a las partículas fundamentales en dos categorías, fermiones y bosones. Los fermiones son partículas que obedecen el principio de exclusión de Pauli y poseen espín semientero $s = n + \frac{1}{2}$, en donde $n = 0, 1, 2, \dots$, es decir, n es un número entero. El caso más común entre los fermiones es el de espín $\frac{1}{2}$ ya que los fermiones elementales (quarks y leptones) que se conocen tienen espín $\frac{1}{2}$. Los bariones y mesones son partículas compuestas de quarks. Un barión tiene tres quarks y un mesón consiste de un quark y un anti-quark. Los protones y neutrones son los bariones más conocidos y tienen espín $\frac{1}{2}$. Otros bariones como $\{\Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega^-\}$ tienen espín $\frac{3}{2}$. Además de los fermiones, tenemos también los bosones los cuales no obedecen el principio de exclusión de Pauli y poseen un espín entero $s = 0, 1, 2, \dots$. Los bosones elementales son fotones, gluones, bosones débiles y gravitones: $\{\gamma, g, W^\pm, Z^0, \text{gravitón}\}$. Los fotones, gluones, W^\pm y Z tienen espín $s = 1$ y para los gravitones tenemos $s = 2$. Los mesones son bosones, y en particular, los piones son bosones que tienen espín $s = 0$.

El *Módulo Estándar* describe las interacciones entre estas partículas elementales que son llevadas a cabo por medio del intercambio de otras partículas mediadoras. Existen cuatro fuerzas básicas que describen todas las interacciones hasta ahora observadas entre las partículas: la fuerte, la débil, la electromagnética y la gravitacional. Los bosones elementales mencionados anteriormente son los mediadores de estas interacciones.

La *fuerza gravitacional* y la *fuerza electromagnética* son experimentadas comúnmente en la vida diaria, ya que actúan a largas distancias entre partículas con masa y con carga eléctrica, respectivamente. Sus mediadores son los gravitones y fotones, respectivamente. Las partículas elementales que poseen carga electromagnética son los leptones $\{e, \mu, \tau\}$ además de los quarks $\{d, u, s, c, b, t\}$. El resto de los leptones $\{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau\}$ no tienen carga. Las fuerzas *débil* y *fuerte* son experimentadas únicamente a distancias subatómicas. La fuerza fuerte está generada por un intercambio de gluones, actúa entre los quarks y les permite formar partículas compuestas. La fuerza débil, generada por los bosones W^\pm y Z , actúa entre leptones y quarks, y es responsable de la desintegración radiactiva de los núcleos que, por ejemplo, es causa de que el Sol brille y dé calor. La interacción que tratamos en esta tesis es la electromagnética. El formalismo que describe esta interacción a nivel microscópico recibe el nombre de Electrodinámica Cuántica (QED). En particular trataremos con Electrodinámica Cuántica Escalar (SQED). La Electrodinámica Cuántica Escalar, es el tema de esta tesis, la cual trata a las partículas escalares cargadas interactuando con los fotones. Algunas de las razones de estudiar esta teoría son las siguientes.

El Modelo Estándar de partículas elementales es la teoría de la interacción electrodébil (la cual describe las interacciones débil y electromagnética). El Modelo Estándar fue propuesto en 1967 por Salam, Weinberg y Glashow. Desde entonces hasta la fecha, este modelo ha sobrevivido todos los retos experimentales. Conjuntamente con Cromodinámica Cuántica, el Modelo Estándar juega un papel central en la física de partículas elementales. Los bosones en el Modelo Estándar son los mencionados anteriormente además de los bosones de Higgs, que inducen el rompimiento espontáneo de simetría de norma de grupos y son los responsables de la existencia de la masa inercial. El bosón de Higgs es el único bosón en la teoría que no es un bosón de norma y es una partícula escalar sin carga. Aunque el Modelo Estándar ha tenido gran éxito en los resultados experimentales, éste no ha sido aceptado como una teoría completa en la física de partículas. Entre otras razones, porque tiene los siguientes defectos:

1. El modelo contiene 19 parámetros libres, tales como partículas con masa, que necesitan ser determinadas experimentalmente. Estos parámetros no pueden ser calculados dentro del modelo.
2. El modelo no describe la interacción gravitacional.

Se han hecho muchos esfuerzos para dirigir estos problemas y completar el Modelo Estándar. Una futura extensión del Modelo Estándar puede ser encontrada en la teoría de supersimetría, donde encontramos partículas escalares cargadas también. Otras extensiones del Modelo Estándar también cuentan con partículas escalares cargadas.

- Debido a la ausencia de las matrices de gamma de la Electrodinámica Cuántica espinorial, la estructura de la teoría es matemáticamente más simple aunque la interacción de 4 puntos es adicional. Por ser una de las teorías de norma más simples, es un buen punto de partida para aprender los cálculos perturbativos.
- Cálculos de un lazo en SQED nos dan una preparación introductiva en cálculos de lazos. La meta es ir a dos lazos teorías de norma más complejas como QED espinorial y QCD.
- La Electrodinámica Cuántica Escalar nos da una plataforma simple para estudiar las propiedades no perturbativas de una teoría de campos de norma como la Identidad de Ward-Green-Takahashi (WGTI) y las transformaciones de Laudau-Khalatnikov-Fradkin (LKFT).
- Esperamos que éste trabajo también nos proporcionará una simple plataforma para buscar truncaciones seguras de las ecuaciones de Schwinger-Dyson. En particular, creemos que la construcción del vértice no perturbativo será más fácil y también estudiar la dependencia de norma de la generación dinámica del propagador del fermión a través de las ecuaciones de Schwinger-Dyson.

En el Capítulo 1 estudiamos las partículas escalares, las cuales son descritas por la ecuación de Klein-Gordon. Veremos cual es la densidad de Lagrange para estas partículas escalares, así como el propagador escalar, ingrediente importante para la teoría de dispersión correspondiente.

En el Capítulo 2 estudiamos los fotones, es decir, las ecuaciones de Maxwell. También discutimos la invariancia de norma, el Lagrangiano y el propagador fotónico en norma arbitraria.

En el Capítulo 3 estudiamos las interacciones entre partículas escalares y fotones, es decir, la electrodinámica cuántica escalar. Partiendo con el lagrangiano de interacción, veremos la invariancia de norma local que nos conduce a los vértices de 4-puntos. A partir del formalismo de la mecánica cuántica relativista motivamos los diagramas y reglas de Feynman.

En el Capítulo 4 estudiamos las divergencias generadas por los lazos en los diagramas de Feynman y la manera de como regularizar estas divergencias. Estudiaremos solamente dos métodos de regularización el método de corte y el método de regularización dimensional.

En el Capítulo 5 calculamos la corrección al propagador escalar a un lazo en una norma arbitraria y dimensión arbitraria. Tomamos los casos $D = 3$ y $D = 4 - 2\epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$. Además estudiaremos las Transformaciones de Landau-Khalatnikov-Frankin para el propagador del escalar. A partir de estas transformaciones obtendremos el propagador escalar no perturbativo en $D = 3$.

En el Capítulo 6 calculamos la corrección al propagador fotónico a un lazo por dos métodos alternativos en D arbitrario. Tomamos los casos $D = 3$ y $D = 4 - 2\epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$. Verificaremos la identidad de Ward para el propagador fotónico. Además obtendremos una expresión para el propagador no perturbativo en $D = 3$ y $m = 0$.

En el Capítulo 7 calculamos la corrección al vértice de 3-puntos en $D = 4 - 2\epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$ en la norma de Feynman. Para la norma arbitraria daremos únicamente los resultados de [11]. También calcularemos el vértice de 4-puntos en una norma arbitraria. Además verificamos la Identidad de Ward-Green-Takahashi para el vértice de 3-puntos y el propagador escalar. Hablaremos acerca de como podemos obtener el vértice no perturbativo a un lazo. Y por último daremos las conclusiones de esta tesis.

Capítulo 1

Escalares

1.1. La Ecuación de Klein-Gordon

De los elementos de mecánica cuántica conocemos la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right] \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

correspondiente a la relación de energía no relativista en forma de operador,

$$\hat{E} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \text{donde} \quad (1.2)$$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla \quad (1.3)$$

son los operadores de energía y momento, respectivamente. Para obtener una ecuación de onda relativista comenzamos considerando partículas libres con la relación relativista (en unidades naturales $c = 1$ y $\hbar = 1$)

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m^2. \quad (1.4)$$

Ahora reemplazamos el cuadrimomento p^μ por el operador de cuadrimomento

$$\begin{aligned} \hat{p}^\mu = i \frac{\partial}{\partial x_\mu} &= i \left\{ \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right\} \\ &= i \left\{ \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right\} = \{ \hat{p}_0, \hat{\mathbf{p}} \}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Así obtenemos la ecuación de *Klein-Gordon* para partículas libres,

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \varphi = m^2 \varphi, \quad (1.6)$$

donde m es la masa de la partícula. Esta ecuación la podemos escribir de la siguiente forma:

$$(\square^2 + m^2)\varphi = 0 . \quad (1.7)$$

Aquí hemos usado la siguiente notación para abreviar

$$\begin{aligned} \partial^\mu &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) , \\ \partial_\mu \partial^\mu &\equiv \square^2 . \end{aligned} \quad (1.8)$$

Inmediatamente podemos verificar la covariancia de Lorentz para la ecuación de Klein-Gordon, como $\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu$ es invariante de Lorentz. Las soluciones libres son de la forma

$$\varphi = \exp(-ip_\mu x^\mu) = \exp[+i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)] . \quad (1.9)$$

Estas soluciones admiten el principio de superposición. Insertando (1.9) en (1.6) nos conduce a la condición

$$\begin{aligned} \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \varphi = m^2 \varphi &\rightarrow p^\mu p_\mu \exp(-ip_\mu x^\mu) = m^2 \exp(-ip_\mu x^\mu) \\ &\rightarrow p^\mu p_\mu = m^2 \quad \text{o} \quad E^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m^2 , \end{aligned} \quad (1.10)$$

la cual resulta ser

$$E = \pm \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} . \quad (1.11)$$

Así, existen ambas soluciones para $E = +(m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$ positiva como para $E = -(m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$ negativa respectivamente. Las energías negativas están asociadas físicamente con las antipartículas. Puesto que las antipartículas se han observado podemos decir que tenemos una extensión de la teoría no relativista.

1.2. La Densidad de Lagrange

En ésta sección veremos una revisión de la teoría clásica de campos en la formulación Lagrangiana y luego aplicaremos esta teoría a la ecuación de Klein-Gordon como un caso particular.

1.2.1. Las Ecuaciones de Euler-Lagrange para Sistemas Relativistas

La cantidad fundamental de la mecánica clásica es la acción, S la integral de tiempo del Lagrangiano, L . En la teoría de campos local el Lagrangiano puede ser escrito como una integral espacial de la densidad lagrangiana, denotada por \mathcal{L} , la cual es una función de uno o más campos $\varphi(x)$ y sus derivadas $\partial_\mu \varphi$. Así tenemos

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) d^4 x . \quad (1.12)$$

El principio de mínima acción establece que cuando un sistema evoluciona de una configuración dada a otra entre los tiempos t_1 y t_2 , lo hace a lo largo de una “trayectoria” en el espacio de configuraciones para la cual S es un extremo (normalmente un mínimo). Podemos escribir esta condición como

$$\begin{aligned}
0 &= \delta S \\
&= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \delta \varphi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right) \right\}. \tag{1.13}
\end{aligned}$$

El último término puede ser convertido en una integral de superficie sobre la frontera de una región de integración de espacio y tiempo cuadrimensional. Ya que el campo de configuraciones inicial y final son dados, $\delta \varphi$ es cero en la parte temporal al comienzo y al término de esta región. Si restringimos nuestras consideraciones a deformaciones de $\delta \varphi$ tal que desaparezcan en la frontera espacial de una región bien conocida, entonces el término de superficie es cero. Factorizando afuera $\delta \varphi$ en los primeros dos términos, notemos que, ya que la integral necesita desaparecer para un $\delta \varphi$ arbitrario, la cantidad que multiplica $\delta \varphi$ necesita desaparecer en todos los puntos. Así llegamos a las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para un campo,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0. \tag{1.14}$$

Si el lagrangiano contiene más de un campo, hay una ecuación para cada uno de ellos.

1.2.2. La Densidad de Lagrange para la Ecuación de Klein-Gordon

La densidad básica de Lagrange para un campo escalar relativista es la función escalar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x). \tag{1.15}$$

\mathcal{L} es conocida como la densidad Lagrangiana de Klein-Gordon, y el campo $\varphi(x)$ como el campo de Klein-Gordon. $\varphi(x)$ tiene dimensiones de (energía/longitud)^{1/2}. Una generalización natural para un campo complejo es

$$\mathcal{L} \left(\varphi, \varphi^*, \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}, \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^\nu} \right) = \partial_\mu \varphi^*(x) \partial^\mu \varphi(x) - m^2 \varphi^*(x) \varphi(x). \tag{1.16}$$

Siguiendo el procedimiento usual, es decir, sustituyendo (1.16) en (1.14) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= -m^2 \varphi^*(x), \\
\partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi)} \right) &= \square^2 \varphi^*. \tag{1.17}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\varphi^* = 0 \quad \text{o} \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\varphi^* = 0. \quad (1.18)$$

Similarmente para el campo φ^*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} - \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi^*)} \right) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\varphi = 0 \quad \text{o} \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\varphi = 0, \quad (1.19)$$

que son efectivamente la ecuación de Klein-Gordon (una para el campo φ y otra para el campo φ^*). Los campos complejos corresponden a partículas cargadas. Si φ representa a una partícula con carga $+e$, φ^* representa a su antipartícula con carga $-e$.

1.3. Transformaciones Globales $U(1)$

La invariancia bajo translaciones, desplazamientos de tiempo y rotaciones nos dan la conservación del momento, energía, y momento angular respectivamente. Para cada simetría continua, existe una conservación de la densidad de corriente y carga por medio del teorema de Noether que estudiaremos enseguida.

1.3.1. El Teorema de Noether

Vamos a discutir la relación entre simetrías y leyes de conservación en la teoría clásica de campos, resumida en el *teorema de Noether*. Este teorema tiene que ver con transformaciones continuas en los campos φ , que en forma infinitesimal puede ser escrita

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) + \alpha \Delta \varphi(x), \quad (1.20)$$

donde α es un parámetro infinitesimal y $\Delta \varphi$ es alguna deformación de la configuración del campo. Podemos llamar a esta transformación una simetría si ésta deja las ecuaciones de movimiento invariantes. Así aseguramos la invariancia de la acción bajo (1.20). Más generalmente, podemos permitir a la acción cambiar por un término de superficie, ya que la presencia de tal término no debería afectar nuestra derivación de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.14). El Lagrangiano, por lo tanto necesita cambiar de la siguiente manera bajo (1.20), es decir,

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x), \quad (1.21)$$

para alguna \mathcal{J}^μ , la cual desaparece cuando $x \rightarrow \infty$. Vamos a comparar esta expectativa para $\Delta\mathcal{L}$ en el resultado obtenido por la variación de los campos:

$$\begin{aligned}\alpha\Delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}(\alpha\Delta\varphi)\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\partial_\mu(\alpha\Delta\varphi) \\ &= \alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\Delta\varphi\right) + \alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\right]\Delta\varphi.\end{aligned}\quad (1.22)$$

El segundo término desaparece por las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.14). Quedándonos con el término igual a $\alpha\partial_\mu\mathcal{J}^\mu$ tenemos

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad \text{para} \quad j^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\Delta\varphi - \mathcal{J}^\mu. \quad (1.23)$$

(Si la simetría involucra más de un campo, el primer término de esta expresión para $j^\mu(x)$ deberá ser reemplazada por una suma de tales términos, uno para cada campo.) Este resultado establece que la corriente $j^\mu(x)$ es conservada. Para cada simetría continua de \mathcal{L} , tenemos tal ley de conservación. La ley de conservación puede ser expresada diciendo que la carga

$$Q \equiv \int_{\text{todo el espacio}} j^0 d^3x \quad (1.24)$$

es una constante en el tiempo. Un ejemplo simple de tal ley de conservación viene del Lagrangiano con el término cinético solamente: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2$. La transformación $\varphi \rightarrow \varphi + \alpha$, donde α es una constante, nos deja \mathcal{L} , sin cambios, concluimos que la corriente $j^\mu = \partial^\mu\varphi$ es conservada. El teorema de Noether puede también ser aplicado a transformaciones de espacio y tiempo tales como las translaciones y las rotaciones.

1.3.2. Conservación del Cuadrivector de Corriente

La densidad de Lagrange ecuación (1.16) es, invariante bajo la siguiente transformación:

$$\varphi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\varphi(x), \quad \varphi^*(x) \rightarrow e^{-i\alpha}\varphi^*(x), \quad (1.25)$$

(donde α es una constante real) y cuya forma infinitesimal es especificada por

$$\delta\varphi(x) = i\alpha\varphi(x), \quad \delta\varphi^*(x) = -i\alpha\varphi^*(x), \quad \delta x^\mu = 0. \quad (1.26)$$

Como α es independiente de las coordenadas, la transformación es llamada *transformación global*, porque esta es la misma para cada punto en el espacio y tiempo. La familia de transformaciones de fase $U(\alpha) \equiv e^{i\alpha}$, donde α es sólo un parámetro que corre continuamente sobre los números reales, forman un grupo Abelian unitario conocido como el *grupo* $U(1)$. Abelian porque satisface la propiedad de conmutatividad en la multiplicación:

$$U(\alpha_1)U(\alpha_2) = U(\alpha_2)U(\alpha_1), \quad (1.27)$$

y unitario porque

$$U^\dagger(\alpha)U(\alpha) = 1 . \quad (1.28)$$

El teorema de Noether implica la existencia de una corriente conservada. Para ver esto es suficiente estudiar la invariancia de \mathcal{L} bajo una transformación infinitesimal $U(1)$,

$$\varphi \rightarrow (1 + i\alpha)\varphi \quad (1.29)$$

La invariancia requiere que el Lagrangiano no cambie, esto es,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\right)\delta\varphi + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\partial_\mu(\delta\varphi) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*}\right)\delta\varphi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\partial_\mu(\delta\varphi^*) \\ &= (-m^2\varphi^*)(i\alpha\varphi) + (\partial^\mu\varphi^*)(i\alpha)(\partial_\mu\varphi) + (-m^2\varphi)(-i\alpha\varphi^*) + (\partial^\mu\varphi)(-i\alpha)(\partial_\mu\varphi^*) \\ &= i\alpha[(\partial^\mu\varphi^*)(\partial_\mu\varphi) - (\partial^\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi^*) - m^2\varphi^*\varphi + m^2\varphi^*\varphi] = 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Haciendo uso de (1.23) con $\mathcal{J}^\mu = 0$ para los campos φ y φ^* tenemos

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\Delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\Delta\varphi^* . \quad (1.31)$$

Sustituyendo \mathcal{L} dado por la ecuación (1.16) obtenemos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = \partial^\mu\varphi^* \quad \text{y} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)} = \partial^\mu\varphi . \quad (1.32)$$

Además considerando que

$$\Delta\varphi = i\varphi , \quad \Delta\varphi^* = -i\varphi^* , \quad (1.33)$$

tenemos que el cuadvivector de corriente es:

$$j^\mu = (\partial^\mu\varphi^*)(i\varphi) + (\partial^\mu\varphi)(-i\varphi^*) = ie[\varphi(\partial^\mu\varphi^*) - \varphi^*(\partial^\mu\varphi)] \quad (1.34)$$

donde hemos considerado la normalización adecuada. Esta carga j^μ es conservada, es decir, $\partial_\mu j^\mu = 0$. La carga conservada correspondientemente es

$$Q = ie \int d^3x (\varphi\partial^0\varphi^* - \varphi^*\partial^0\varphi) \quad (1.35)$$

Más generalmente, el teorema de Noether demuestra que para alguna simetría continua resulta en una corriente y carga conservadas.

1.4. Propagador de un Escalar

La interacción de una partícula escalar con el campo electromagnético es introducida usualmente por la prescripción de *mínimo acoplamiento*

$$\hat{p}_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu - eA_\mu .$$

La ecuación de Klein-Gordon en presencia de un campo electromagnético nos conduce a

$$[(\hat{p}^\mu - eA^\mu)(\hat{p}_\mu - eA_\mu) - m_0^2]\varphi(x) = 0 \quad (1.36)$$

ó

$$[\partial^\mu \partial_\mu + m_0^2]\varphi(x) = -\hat{V}\varphi(x) . \quad (1.37)$$

Aquí hemos formalmente introducido el operador del potencial \hat{V} , explícitamente dado como

$$\hat{V}\varphi = ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu)\varphi - e^2 A^\mu A_\mu \varphi . \quad (1.38)$$

El signo de \hat{V} en (1.38) es elegido de manera que esté de acuerdo con el signo relativo de la energía cinética y potencial de la ecuación de Schrödinger. El potencial, (1.38), es caracterizado por el parámetro e , el cual (en unidades naturales) está relacionado con la constante de la estructura fina α por

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137} , \quad (1.39)$$

La pequeñez de la constante de acoplamiento nos permite hacer una expansión perturbativa de V en potencias de α . Si queremos resolver (1.37) para φ , es conveniente resolver primero la siguiente ecuación

$$[\square^2 + m^2]G(x, y) = \delta^4(x - y) \quad (1.40)$$

y escribir la solución para $\varphi(x)$ de la siguiente manera

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) - \int d^4y G(x, y)V(y)\varphi(y) , \quad (1.41)$$

donde $\varphi_0(x)$ satisface $(\square^2 + m^2)\varphi_0(x)$. Ahora verifiquemos si esta solución satisface la ecuación (1.37)

$$[\square^2 + m^2][\varphi(x) = \varphi_0(x) - \int d^4y G(x, y)V(y)\varphi(y)] . \quad (1.42)$$

Usando el hecho de que

$$[\square^2 + m^2]\varphi_0(x) = 0 , \quad (1.43)$$

tenemos

$$\begin{aligned} [\square^2 + m^2]\varphi(x) &= - \int d^4y (\square^2 + m^2)G(x, y)V(y)\varphi(y) \\ &= - \int d^4y \delta^4(x - y)V(y)\varphi(y) \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$= -V(x)\varphi(x) . \quad (1.45)$$

Por lo tanto (1.41) es una solución. Ahora tomamos la transformada de Fourier $G(x, y)$ en el espacio de momentos y conseguimos

$$G(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p S(p) \exp[-ip(x - y)] . \quad (1.46)$$

$S(p)$ es llamado *el propagador de la partícula* en el espacio de momentos.

$$[\square^2 + m^2][G(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p S(p) \exp(-ip(x - y))] = \delta^4(x - y) ,$$

entonces

$$\delta^4(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p S(p)(p^2 - m^2) \exp[-ip(x - y)] . \quad (1.47)$$

Esta ecuación se satisface si escogemos:

$$S(p) = \frac{1}{(p^2 - m^2)} .$$

Más adelante, en la teoría de dispersiones para partículas escalares, usaremos con frecuencia esta expresión para el propagador escalar. En éste capítulo, hemos estudiado la densidad de Lagrange y las ecuaciones de movimiento para partículas escalares cargadas pero libres. En el próximo capítulo, estudiaremos a los fotones que son partículas con espín uno, es decir, partículas vectoriales.

Capítulo 2

Fotones

2.1. Las Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica clásica en el vacío son

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \rho(\mathbf{x}, t), \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{j}(\mathbf{x}, t).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Las cuales relacionan el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ y el campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ con la densidad de carga $\rho(\mathbf{x}, t)$ y la corriente electromagnética $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$. Las ecuaciones de Maxwell constituyen un sistema de ecuaciones simultáneamente en derivadas parciales de primer orden entre las componentes de los campos eléctrico y magnético. Tal como están pueden ser resueltas directamente en algunos casos sencillos. Pero a menudo nos conviene introducir los potenciales con objeto de obtener un número menor de ecuaciones de segundo orden que satisfagan idénticamente alguna de las ecuaciones de Maxwell. Podemos introducir el potencial escalar $\varphi(\mathbf{x}, t)$ y el potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, de la manera usual, escribiendo $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \varphi(\mathbf{x}, t),\tag{2.2}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t).\tag{2.3}$$

Las expresiones de $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ en función de los potenciales $\varphi(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, esto es la (2.2) y la (2.3), satisfacen idénticamente las dos ecuaciones homogéneas de Maxwell. El comportamiento dinámico de $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ y $\varphi(\mathbf{x}, t)$ se determinará mediante las otras dos ecuaciones de (2.1) no homogéneas. Así, pues, las ecuaciones no homogéneas de (2.1)

pueden escribirse en función de los potenciales del siguiente modo:

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) = -\rho(\mathbf{x}, t), \quad (2.4)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}) = -\mathbf{j}(\mathbf{x}, t). \quad (2.5)$$

Escribimos estas dos ecuaciones en forma covariante, para ello introducimos los cuadri-vectores $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ y $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ tal que:

$$\square^2 A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = j^\mu. \quad (2.6)$$

Los campos se expresan en función de los potenciales de acuerdo a (2.2) y (2.3). Las componentes según x de \mathbf{E} y \mathbf{B} son, explícitamente,

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0), \\ B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Estas ecuaciones implican que los campos eléctrico y magnético tienen seis componentes en total, son los elementos de un tensor de *segundo orden, el tensor antisimétrico, intensidad de campo*,

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.8)$$

Las ecuaciones de Maxwell no homogéneas de (2.1) en forma covariante toman la forma:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (2.9)$$

A continuación veremos que las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante una transformación de norma, es decir, *la teoría electromagnética es una teoría de norma*.

2.2. Invariancia de Norma

Como el campo magnético \mathbf{B} se relaciona con \mathbf{A} a través de (2.3), el potencial vector es arbitrario en el sentido de podersele sumar el gradiente de una función escalar χ cualquiera. \mathbf{B} no se altera en la transformación:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi. \quad (2.10)$$

Si queremos que también el campo eléctrico permanezca inalterado, debemos transformar simultáneamente el potencial escalar:

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Así, sustituyendo (2.10) y (2.11) para el campo eléctrico tenemos:

$$\mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla \varphi' = -\frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{A} + \nabla \chi] - \nabla \left[\varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right] = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi .$$

Similarmente para el campo magnético:

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times [\mathbf{A} + \nabla \chi] = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \chi = \nabla \times \mathbf{A} .$$

La transformación definida por (2.10) y (2.11) se denomina *transformación de norma*, y la invariancia de los campos en estas transformaciones, *invariancia de norma*. Las ecuaciones (2.10) y (2.11) se pueden combinar como:

$$A'^{\mu} = A^{\mu} + \partial^{\mu} \chi , \quad (2.12)$$

$F^{\mu\nu}$ es invariante ante las transformaciones de norma:

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} \longrightarrow \partial^{\mu} (A^{\nu} + \partial^{\nu} \chi) - \partial^{\nu} (A^{\mu} + \partial^{\mu} \chi) = F^{\mu\nu} .$$

Por el hecho de que las transformaciones en la ecuación (2.12) dejan los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} invariantes, es recomendable deshacerse de la arbitrariedad en A^{μ} . A éste proceso se le llama *fijación de la norma*. Una de las maneras de hacerlo es elegir $\partial_{\mu} A'^{\mu} = 0$, a ésta condición se le llama *condición de Lorentz* e implica que:

$$\partial_{\mu} A'^{\mu} = 0 = \partial_{\mu} \partial^{\mu} \chi + \partial_{\mu} A^{\mu} .$$

Así, pues, basta hallar una función de norma χ que satisfaga:

$$\square^2 \chi = -\partial_{\mu} A^{\mu} . \quad (2.13)$$

para que los nuevos potenciales \mathbf{A}' , φ' satisfagan la condición de Lorentz. De ahora en adelante usaremos la notación A^{μ} en vez de A'^{μ} . Tenemos que

$$\square^2 A^{\mu} = j^{\mu} . \quad (2.14)$$

2.3. Fotones. Vectores de Polarización

Consideremos la ecuación (2.14) para un fotón libre, es decir,

$$\square^2 A^{\mu} = 0 , \quad (2.15)$$

la cual tiene soluciones

$$A^{\mu} = \varepsilon^{\mu}(\mathbf{q}) e^{-iq \cdot x} . \quad (2.16)$$

El cuadrivector ε^{μ} es llamado el vector de polarización del fotón. Sustituyendo en la ecuación (2.15) tenemos

$$\square^2 A^{\mu} = \varepsilon^{\mu}(\mathbf{q}) \square^2 e^{-iq \cdot x} = q^2 \varepsilon^{\mu}(\mathbf{q}) = 0 \quad (2.17)$$

la cual implica que

$$q^2 = 0, \quad q_0^2 - \mathbf{q}^2 = m^2, \quad \text{esto es,} \quad m_\gamma = 0, \quad (2.18)$$

es decir, el fotón es una partícula sin masa. El vector de polarización todavía tiene cuatro componentes y describe una partícula de espín 1. Primero, la condición de Lorentz, $\partial_\mu A^\mu = 0$, nos conduce

$$q_\mu \varepsilon^\mu = 0, \quad (2.19)$$

y esto reduce el número de componentes independientes de ε^μ a solamente tres. Además, tenemos que explorar las consecuencias del adicional grado de libertad de la norma (2.12). Elegimos la función χ como

$$\chi = ia e^{-iq \cdot x} \quad (2.20)$$

con a constante así que (2.13) es satisfecha (tomando en cuenta la condición de Lorentz). Sustituyendo esto, junto con (2.16), en (2.12) la física deberá permanecer sin cambios con el reemplazamiento

$$\varepsilon_\mu \rightarrow \varepsilon'_\mu = \varepsilon_\mu + a q_\mu, \quad (2.21)$$

es decir,

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad (\varepsilon_\mu + a q_\mu) q^\mu = \varepsilon_\mu q^\mu + a m_\gamma^2 = 0 \quad (2.22)$$

pero recurriendo a (2.18) y (2.19) tenemos que los dos vectores de polarización ($\varepsilon_\mu, \varepsilon'_\mu$) los cuales difieren por un múltiplo de q_μ describen el mismo fotón. Podemos usar esta libertad para asegurar que la componente del tiempo de ε^μ desaparece. Sea que elegimos $\varepsilon^0 = -a q_0$ entonces,

$$\varepsilon'_0 = \varepsilon_0 + a q_0 = -a q_0 + a q_0 = 0. \quad (2.23)$$

Por lo tanto,

$$\varepsilon'_0 = 0 \quad (2.24)$$

y entonces la condición de Lorentz (2.19) se reduce a

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{q} = 0. \quad (2.25)$$

Esta elección (no covariante) de norma es conocida como *norma de Coulomb*. De (2.25), vemos que hay únicamente *dos* vectores de polarización independientes y que ambos son transversos a el momento del fotón. Recordando la ecuación (2.2) y sustituyendo la solución de fotón libre (2.16) en ésta tenemos

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\varepsilon} e^{-iq \cdot x}) = i q^0 \boldsymbol{\varepsilon} e^{-iq \cdot x}. \quad (2.26)$$

Por lo tanto \mathbf{E} es directamente proporcional a $\boldsymbol{\varepsilon}$. \mathbf{E} es perpendicular a la dirección de movimiento del fotón $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{q} = 0$, es decir,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{q} = 0. \quad (2.27)$$

De la misma manera para la ecuación (2.3),

$$\mathbf{B} = \nabla \times [\boldsymbol{\varepsilon} e^{-iq \cdot x}] = -i[\mathbf{q} \times \boldsymbol{\varepsilon}] e^{-iq \cdot x} . \quad (2.28)$$

Así, \mathbf{B} es perpendicular a ambas direcciones de movimiento del fotón y del campo eléctrico \mathbf{E} . Por ejemplo, para un fotón que viaja a lo largo del eje z , podemos tomar

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0) , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0) . \quad (2.29)$$

Así, un fotón libre es descrito por su momento q y dos vectores de polarización $\boldsymbol{\varepsilon}_i$. Ya que $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ transforma como un vector, anticipamos que éste es asociado a una partícula de espín 1.

2.4. La Densidad de Lagrange para un Fotón Libre

Así, como todas las ecuaciones de movimiento, las ecuaciones de Maxwell se pueden derivar mediante el formalismo de Lagrange. La densidad de Lagrange para un fotón libre es:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} . \quad (2.30)$$

Sustituyendo (2.30) en (1.14), donde el campo escalar φ ahora es reemplazado por el campo vctorial A_α , obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = 0 , \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = -F^{\beta\alpha} . \quad (2.32)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento son:

$$\partial_\beta F^{\beta\alpha} = 0 . \quad (2.33)$$

Estas ecuaciones de movimiento son equivalentes a (2.9) con $j^\alpha = 0$, puesto que no tenemos interacciones. Observemos que $F^{00} = -F^{00}$ lo que implica que $F^{00} = 0$. Por lo tanto éste lagrangiano no tiene términos de la forma \dot{A}^0 . Definamos:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} , \quad (2.34)$$

donde π^μ es el momento conjugado del campo A^μ . Las ecuaciones (2.30) y (2.34) implican que:

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 , \quad (2.35)$$

puesto que en el lagrangiano no aparecen términos del tipo \dot{A}^0 , una situación poco deseable porque no nos permite aplicar el formalismo canónico¹ de la teoría cuántica de campos. En éste formalismo las relaciones de conmutación

$$[\hat{x}, \hat{x}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0 \quad y \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} , \quad (2.36)$$

se traducen como las siguientes relaciones de conmutación para los campos $A^\mu(\mathbf{x}, t)$ y $\pi^\mu(\mathbf{x}, t)$:

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] = [\pi^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = 0 , \quad (2.37)$$

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = -ig^{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \quad (2.38)$$

$\pi^0 = 0$ para la densidad de Lagrange en la ecuación (2.30). Por lo tanto,

$$[A^0(\mathbf{x}, t), \pi^0(\mathbf{x}', t)] = 0 , \quad (2.39)$$

la cual, está en contradicción con la relación (2.38). Por esta situación incómoda, debemos agregar un término que contenga la derivada con respecto al tiempo en A^0 al lagrangiano de tal manera que la teoría no se altere. Una manera conveniente es agregando el término $-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu)$, donde ξ recibe el nombre de parámetro de norma covariante y puede ser cualquier número real finito. Dos elecciones bien conocidas son $\xi = 1$ que es la *norma de Feynman*, y $\xi = 0$ la *norma de Landau*. Éste término adicional se puede considerar como una constricción. La teoría queda invariante después de imponer la condición de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Estas normas son muy convenientes para el estudio de procesos de dispersión de altas energías donde deseamos mantener la invarianza de Lorentz, y usando el método de Gupta y Bleuler ya es posible cuantizar A^μ . Es importante resaltar que la física no es afectada por el valor de ξ . Cualquier ξ puede ser usada. Los pasos intermedios pueden ser diferentes para diferentes elecciones de ξ , pero el resultado final para cualquier observable físico es independiente de la ξ escogida. Así, la densidad de Lagrange final para un fotón libre es:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) . \quad (2.40)$$

La presencia de una corriente j^μ modifica la densidad de Lagrange como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) - j^\mu A^\mu . \quad (2.41)$$

Correspondientemente las ecuaciones de Maxwell son:

$$\square^2 A^\nu - (1 - \frac{1}{\xi})\partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu . \quad (2.42)$$

A continuación vamos a discutir el propagador fotónico.

¹Nosotros no hemos desarrollado la Teoría Cuántica de Campos formalmente hemos tomado únicamente estos resultados. Para más detalles ver la referencia [8].

2.5. Propagador Fotónico

Para definir el propagador del fotón empezaremos con la ecuación (2.42). Queremos encontrar A^μ que satisfaga esta ecuación. Para esto consideremos dos casos:

Caso I: El procedimiento es un poco más sencillo si empezamos con la norma de Feynman $\xi = 1$. En este caso,

$$\square^2 A^\mu = j^\mu .$$

Resolveremos esta ecuación usando el método de Green para el cual hay que encontrar la solución de la siguiente ecuación:

$$g^{\alpha\mu} \square_x^2 G_{\mu\beta}(x, y) = g^\alpha{}_\beta \delta^4(x - y) , \quad (2.43)$$

donde $G^{\mu\beta}(x, y)$ es la función de Green de dos puntos para el fotón o propagador del fotón en el espacio de posiciones. Ahora proponemos la siguiente solución para $A^\mu(x)$:

$$A^\mu(x) = A_0^\mu + \int d^4y G^{\mu\beta}(x, y) j_\beta(y) , \quad (2.44)$$

donde A_0^μ es el campo en ausencia de corrientes. Para verificar que sí es solución, aplicamos $g^\alpha{}_\mu \square_x^2$ a la ecuación (2.44) y usando (2.43) conseguimos:

$$\begin{aligned} g^\alpha{}_\mu \square_x^2 A^\mu(x) &= g^\alpha{}_\mu \square_x^2 A_0^\mu + \int d^4y g^\alpha{}_\mu \square_x^2 G^{\mu\beta}(x, y) j_\beta(y) \\ &= \int g^{\alpha\beta} \delta^4(x - y) j_\beta(y) = j^\alpha(x) , \end{aligned}$$

$$\square_x^2 A^\alpha = j^\alpha(x) .$$

Para resolver la ecuación (2.43) usamos la transformada de Fourier $G^{\mu\beta}(x, y)$ en el espacio de momentos:

$$G^{\mu\beta}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \Delta^{\mu\beta}(q) e^{-iq(x-y)} d^4q . \quad (2.45)$$

Aplicamos $g_{\alpha\mu} \square_x^2$ a $G^{\mu\beta}(x, y)$ y usando la ecuación (2.43) obtenemos que:

$$g^\beta{}_\alpha \delta^4(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \Delta^{\mu\beta}(q) g_{\alpha\mu}(-q^2) e^{-iq(x-y)} d^4q .$$

Por lo tanto,

$$\Delta^{\mu\beta}(q) = -\frac{1}{q^2} g^{\mu\beta} . \quad (2.46)$$

$\Delta^{\mu\beta}$ es el *propagador del fotón*.

Caso II: Resolvemos (2.42) completa

$$\square^2 A^\nu - (1 - \frac{1}{\xi}) \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu .$$

Para encontrar A^ν resolvemos primero la siguiente ecuación:

$$[g^{\nu\lambda} \square_x^2 - (1 - \frac{1}{\xi}) \partial^\nu \partial^\lambda] G_{\lambda\alpha}(x, y) = g^\nu{}_\alpha \delta^4(x - y) , \quad (2.47)$$

y proponemos la siguiente solución para $A_\lambda(x)$

$$A_\lambda(x) = A_\lambda^0 + \int G_{\lambda\alpha}(x, y) j^\alpha(y) d^4 y . \quad (2.48)$$

Procedemos de manera similar como en el *Caso I*, de manera que el propagador del fotón resulta ser:

$$\Delta_{\lambda\alpha}(q) = [-\frac{g_{\lambda\alpha}}{q^2} + (1 - \xi) \frac{q_\lambda q_\alpha}{q^4}] .$$

Como mencionamos anteriormente, el propagador del fotón juega un papel importante en la teoría de dispersión cuando los fotones interactúan con partículas cargadas. A continuación estudiaremos la interacciones de partículas cargadas escalares con un campo electromagnético.

Capítulo 3

Electrodinámica Cuántica Escalar

3.1. La Interacción de una Partícula de Espín Cero con un Campo Electromagnético

El campo electromagnético es descrito por el cuadrivector (definido ya anteriormente)

$$\begin{aligned} A^\mu &= \{A_0, \mathbf{A}\} = g^{\mu\nu} A_\nu, \\ A_\mu &= g_{\mu\nu} A^\nu = \{A_0, -\mathbf{A}\}. \end{aligned}$$

En el caso de mecánica cuántica no relativista especificamos el mínimo acoplamiento del campo electromagnético,

$$\hat{E} \Rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} - e\varphi, \quad \hat{\mathbf{p}} \Rightarrow -i\nabla - e\mathbf{A}, \quad (3.1)$$

el cual puede ser comprimido a la forma cuádr dimensional como

$$\hat{p}^\mu \Rightarrow \hat{p}^\mu - eA^\mu \quad \text{ó} \quad \hat{p}_\mu \Rightarrow \hat{p}_\mu - eA_\mu. \quad (3.2)$$

Con el mismo mínimo acoplamiento, la ecuación libre de Klein-Gordon (1.7) es transformada en la ecuación de Klein-Gordon con un campo electromagnético,

$$(\hat{p}^\mu - eA^\mu)(\hat{p}_\mu - eA_\mu)\varphi = m^2\varphi \quad (3.3)$$

ó

$$\left[g^{\mu\nu} \left(i\frac{\partial}{\partial x^\nu} - eA_\nu \right) \left(i\frac{\partial}{\partial x^\mu} - eA_\mu \right) \right] \varphi = m^2\varphi, \quad (3.4)$$

y, explícitamente,

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right)^2 \varphi &= \left(\sum_{i=1}^3 \left(+i\frac{\partial}{\partial x^i} + eA_i \right)^2 + m^2 \right) \varphi \\ &= \left((+i\nabla + e\mathbf{A})^2 + m^2 \right) \varphi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para examinar la densidad de carga y corriente, comenzamos con (3.4), multiplicando con φ^* el lado izquierdo y restando el complejo conjugado. Estas operaciones pueden ser simbolizadas por $\varphi^*(xx) - \varphi(xx)^*$, donde (xx) denota (3.4), y éstas resultan

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi^* \left[-g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + ieA_\nu \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + ieA_\mu \right) \right] \varphi \\
&\quad - \varphi \left[-g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - ieA_\nu \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu \right) \right] \varphi^* \\
&= g^{\mu\nu} \left[\varphi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi^* - \varphi^* \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi - \varphi^* \frac{\partial}{\partial x^\nu} ieA_\mu \varphi \right. \\
&\quad \left. - \varphi \frac{\partial}{\partial x^\nu} ieA_\mu \varphi^* - \varphi^* ieA_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi - \varphi ieA_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi^* \right] \\
&= g^{\mu\nu} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \varphi^* - \varphi^* \frac{\partial}{\partial x^\nu} \varphi \right) - 2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\varphi ieA_\nu \varphi^* \right) \right]. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Llamamos

$$j_\nu = ie \left(\varphi^* \frac{\partial}{\partial x^\nu} \varphi - \varphi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \varphi^* \right) - 2e^2 A_\nu \varphi \varphi^* = \{\rho, -\mathbf{j}\} \tag{3.7}$$

la densidad de cuadricorriente en el campo electromagnético A_ν . Obviamente, la siguiente relación es válida:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} j_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu = \partial_\mu j^\mu = 0 \tag{3.8}$$

Esta es una ecuación de conservación de la densidad de cuadricorriente. Y nos conduce a la conservación de la carga correspondientemente. Notemos que (3.7) es idéntico al resultado previo, (1.34), si excluimos el término proporcional a A_ν . Explícitamente escribimos:

$$\rho = ie \left(\varphi^* \frac{\partial}{\partial t} \varphi - \varphi \frac{\partial}{\partial t} \varphi^* \right) - 2e^2 A_0 \varphi \varphi^* \tag{3.9}$$

y

$$\mathbf{j} = -ie(\varphi^* \nabla \varphi - \varphi \nabla \varphi^*) - 2e^2 \mathbf{A} \varphi \varphi^* \tag{3.10}$$

A continuación veremos la densidad de Lagrange para la ecuación de Klein-Gordon en presencia de un campo electromagnético.

3.2. La Densidad de Lagrange para una Partícula de Klein-Gordon en un Campo Electromagnético

La densidad de Lagrange para el sistema acoplado de las ecuaciones de Maxwell y el campo de Klein-Gordon es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (i\partial_\mu - eA_\mu) \varphi^* (-i\partial^\mu - eA^\mu) \varphi - m^2 \varphi^* \varphi, \\
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

La variación de $S = \int \mathcal{L} d^4x$ con respecto a φ^* nos conduce a la ecuación de Klein-Gordon para un campo φ , acoplada mínimamente al campo electromagnético, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \varphi^*} &= 0 \\ \Rightarrow \int \{ \delta (i\partial_\mu \varphi^* - eA_\mu \varphi^*) (-i\partial^\mu - eA^\mu) \varphi - m^2 \varphi \delta \varphi^* \} d^4x &= 0 . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Usando $\delta \partial_\mu \varphi^* = \partial_\mu \delta \varphi^*$ e integrando parcialmente el primer término, obtenemos bajo la asunción de que $\delta \varphi^*$ desaparece en las fronteras de integración,

$$\int \{ -i\partial_\mu - eA_\mu \} (-i\partial^\mu - eA^\mu) \varphi - m^2 \varphi \} \delta \varphi^* d^4x = 0 . \quad (3.13)$$

Dada la libertad de elección de $\delta \varphi^*$, esto nos conduce a la ecuación de Klein-Gordon

$$(\hat{p}^\mu - eA^\mu)(\hat{p}_\mu - eA_\mu)\varphi = m^2\varphi . \quad (3.14)$$

La variación de S con respecto a A_μ nos permite escribir las ecuaciones de Maxwell en una manera análoga

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu = ie \{ \varphi^* (\partial_\nu + ieA_\nu) \varphi - \varphi (\partial_\nu - ieA_\nu) \varphi^* \} . \quad (3.15)$$

Por lo tanto, la densidad de Lagrange (3.11) nos reproduce las ecuaciones de movimiento apropiadamente tanto para el campo de Klein-Gordon como para el cuadvivector A_μ . La forma explícita de la corriente depende del espín de la partícula que se acopla con el fotón.

3.3. Invariancia de Norma Local $U(1)$

Hemos visto que la teoría electrodinámica es invariante bajo transformaciones globales $U(1)$ de norma. Además, por medio del teorema de Noether hemos probado la conservación del cuadvivector de corriente, bajo una transformación global. Ahora veremos que la teoría electrodinámica es invariante también bajo transformaciones locales. Así mismo que la densidad de cuadricorriente para la interacción de una partícula escalar con un campo electromagnético es conservada bajo una transformación local. Primeramente generalizamos (1.25) a la transformación

$$\varphi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \varphi(x) , \quad (3.16)$$

donde $\alpha(x)$ ahora depende del espacio y del tiempo en una manera completamente arbitraria. Estas transformaciones se llaman *transformaciones $U(1)$ locales de norma*. La densidad de Lagrange, (1.16),

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^*(x) \partial^\mu \varphi(x) - m^2 \varphi^*(x) \varphi(x) , \quad (3.17)$$

no es invariante bajo tal transformación de fase local. El último término de \mathcal{L} es invariante; sin embargo, la derivada de φ no lo es. Puesto que,

$$\partial_\mu \varphi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \varphi + ie^{i\alpha(x)} \varphi \partial_\mu \alpha \quad (3.18)$$

y el término $\partial_\mu \alpha$ rompe la invariancia de \mathcal{L} . Sí, insistimos en imponer invariancia del Lagangiano bajo transformaciones de norma local, necesitamos buscar una derivada modificada, D_μ , que transforme covariantemente bajo una transformación de fase, esto es,

$$D_\mu \varphi \rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\mu \varphi . \quad (3.19)$$

Para formar la “derivada covariante” D_μ , necesitamos introducir un campo vectorial A_μ con propiedades de transformación tal que el término que no queremos en (3.18) sea cancelado. Una hábil construcción puede ser

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu \quad (3.20)$$

donde A_μ transforma como

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha . \quad (3.21)$$

Es fácil verificar que D_μ satisface (3.19). La invariancia de la densidad de Lagrange (1.16) consiste en reemplazar ∂_μ por D_μ que nos conduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (D_\mu^* \varphi^*)(D^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi , \\ D_\mu &= i\partial_\mu - eA_\mu , \\ D_\mu^* &= -i\partial_\mu - eA_\mu . \end{aligned} \quad (3.22)$$

ó

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi - ie(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*) A_\mu + 2e^2 \varphi^* A^\mu \varphi A_\mu , \quad (3.23)$$

donde los primeros dos términos corresponden a la densidad de Lagrange para una partícula escalar y los dos últimos corresponden a la interacción que podemos escribir como $-j^\mu A_\mu$, donde j^μ es la densidad de cuadricorriente [ver ecuación (3.7)] la cual es conservada. Como podemos ver, si demandamos invariancia de fase local, necesariamente tenemos que introducir un vector de campo A_μ , llamado el *campo de norma*, el cual acopla a la partícula escalar. Si añadimos la densidad Lagrangiana de un fotón libre (2.40) entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 + (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi \\ &\quad - ie(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*) A_\mu + 2e^2 \varphi^* A^\mu \varphi A_\mu , \end{aligned} \quad (3.24)$$

la misma densidad de Lagrange que (3.11).

3.4. Probabilidad y Amplitud de Transición

Una vez que sabemos cual es el lagrangiano podemos proceder a estudiar procesos de dispersión entre fotones y partículas escalares cargadas. Sin embargo, primero necesitamos desarrollar teoría de dispersión relativista. En principio el camino formal es la teoría cuántica de campos, derivando las reglas de Feynman y aplicandolas a procesos de dispersión. Pero nos vamos a restringir solamente a mecánica cuántica relativista motivando la teoría de dispersión relativista basada en la teoría cuántica no relativista y así identificando las reglas de Feynman [9].

3.4.1. Teoría de Perturbación No Relativista

Supongamos que conocemos las soluciones para la partícula libre de la ecuación de Schrödinger

$$H_0\varphi_n = E_n\varphi_n \quad \text{con} \quad \int_V \varphi_m^*\varphi_n d^3x = \delta_{mn} \quad (3.25)$$

donde H_0 , el Hamiltoniano, es independiente del tiempo. Por simplicidad, hemos normalizado las soluciones a una partícula en una caja de volumen V . Ahora queremos resolver la ecuación de Schrödinger

$$(H_0 + V(\mathbf{x}, t))\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (3.26)$$

para una partícula moviéndose en la presencia de un potencial $V(\mathbf{x}, t)$. Una solución de (3.26) puede ser expresada en la forma

$$\psi = \sum_n a_n(t)\varphi_n(\mathbf{x})e^{-iE_n t}, \quad (3.27)$$

dado que φ_n nos da una base completa. Ahora, para encontrar los coeficientes desconocidos $a_n(t)$, sustituimos (3.27) en (3.26) y obtenemos

$$i \sum_n \frac{da_n}{dt} \varphi_n(\mathbf{x})e^{-iE_n t} = \sum_n V(\mathbf{x}, t)a_n\varphi_n(\mathbf{x})e^{-iE_n t}, \quad (3.28)$$

Multiplicando por φ_f^* , integrando sobre el volumen, y usando la relación de ortonormalidad (3.25) nos conduce a las siguientes ecuaciones diferenciales lineales acopladas para los coeficientes a_n :

$$\frac{da_f}{dt} = -i \sum_n a_n(t) \int_V d^3x \varphi_f^* V \varphi_n e^{i(E_f - E_n)t}. \quad (3.29)$$

Suponemos que antes de que el potencial $V(\mathbf{x}, t)$ empiece a actuar sobre la partícula, está en uno de los eigenestados i del Hamiltoniano no perturbado, esto es, en el tiempo $t = -T/2$:

$$\begin{aligned} a_i(-T/2) &= 1, \\ a_n(-T/2) &= 0 \quad \text{para } n \neq i, \end{aligned} \quad (3.30)$$

y

$$\frac{da_f}{dt} = -i \int d^3x \varphi_f^* V \varphi_i e^{i(E_f - E_i)t} \Big|_{t=-T/2} . \quad (3.31)$$

Ahora, con la condición de que el potencial es pequeño y transitorio, podemos, como primera aproximación, asumir que sus condiciones iniciales permanecen válidas en todos los tiempos. Entonces, integrando (3.30), obtenemos

$$a_f(t) = -i \int_{-T/2}^t dt' \int d^3x \varphi_f^* V \varphi_i e^{i(E_f - E_i)t'} , \quad (3.32)$$

donde hemos usado la suposición de que $f \neq i$. En particular, en el tiempo $t = +T/2$ después de que la interacción ha cesado,

$$T_{fi} \equiv a_f(T/2) = -i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int d^3x [\varphi_f(\mathbf{x}) e^{-iE_f t}]^* V(\mathbf{x}, t) [\varphi_i(\mathbf{x}) e^{-iE_i t}] \quad (3.33)$$

la cual podemos escribir en forma covariante

$$T_{fi} = -i \int d^4x \varphi_f^*(x) V(x) \varphi_i(x) . \quad (3.34)$$

Por supuesto, la expresión para $a_f(t)$ es únicamente válida si $a_f(t) \ll 1$, como hemos asumido para llegar a éste resultado. Interpretamos $|T_{fi}|^2$ como la probabilidad de que la partícula realice una transición del estado inicial i al estado final f al sufrir el potencial V . La contraparte relativista de la ecuación de Schödinger es la ecuación de Klein-Gordon. Si asumimos que la ecuación (3.34) es relativísticamente correcta, podemos considerar el problema de dispersión para partículas de espín cero.

3.4.2. Escalar Cargado en un Campo Electromagnético

La amplitud (3.34), para la transición de una partícula de espín cero del estado φ_i al estado φ_f en presencia del potencial electromagnético A_μ , donde V está dado por la ecuación (1.38), es

$$T_{fi} = -i \int \varphi_f^*(x) V(x) \varphi_i(x) d^4x \quad (3.35)$$

$$= -i \int \varphi_f^* [-ie(A^\mu \partial_\mu + \partial_\mu A^\mu) - e^2 A^\mu A_\mu] \varphi_i d^4x , \quad (3.36)$$

o en forma equivalente,

$$\begin{aligned} T_{fi} = & -e \int d^4x [\varphi_f^*(x) \partial^\mu \varphi_i(x) - \partial^\mu \varphi_f^*(x) \varphi_i(x)] A_\mu(x) \\ & + ie^2 \int d^4x \varphi_f^*(x) A^\mu(x) \varphi_i(x) A_\mu(x) . \end{aligned} \quad (3.37)$$

Los primeros dos términos se pueden representar mediante el siguiente diagrama:

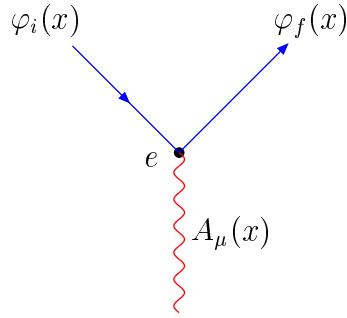


Figura 3.1: Representación esquemática de los primeros dos términos de (3.37).

La interpretación es la siguiente: Una partícula que se encuentra en el estado φ_i interactúa con el término eA_μ del potencial V y se dispersa en un estado final φ_f . El tercer término de (3.37) se puede representar por medio del siguiente diagrama

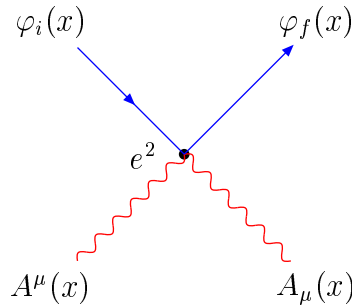


Figura 3.2: Representación esquemática del tercer término de (3.37).

La interpretación física es: Una partícula en el estado φ_i interactúa con el término $e^2 A_\mu A^\mu$ del potencial y se dispersa en el estado final φ_f . Esto es una forma preliminar de los diagramas de Feynman.

3.5. Diagramas y Reglas de Feynman

La amplitud de transición T_{fi} se puede interpretar en términos de los llamados diagramas de Feynman. La ventaja es la enorme simplicidad que se consigue en el cálculo de los procesos de dispersión y decaimiento como explicaremos más adelante.

3.5.1. Diagramas de Feynman

Ahora regresamos a la ecuación (3.37), solamente vamos a considerar el primer término debido a que en el diagrama que vamos a estudiar en seguida el término $e^2 A^2$ no contribuye. La amplitud de transición se reduce a

$$T_{fi} = i \int \varphi_f^*(x) i e (A^\mu \partial_\mu + \partial_\mu A^\mu) \varphi_i d^4 x . \quad (3.38)$$

La derivada, en el segundo término, el cual actúa en ambos A^μ y φ_i , puede ser convertida a actuar únicamente en φ_f^* después de una integración por partes, es decir,

$$\int \varphi_f^* \partial_\mu (A^\mu \varphi_i) d^4 x = \varphi_f^* A^\mu \varphi_i |_{\text{frontera}} - \int \partial_\mu (\varphi_f^*) A^\mu \varphi_i d^4 x . \quad (3.39)$$

El primer término es cero debido a que hemos considerado que el potencial desaparece en $|\mathbf{x}|$, cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Podemos por lo tanto escribir la amplitud T_{fi} como

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4 x , \quad (3.40)$$

donde

$$j_\mu^{fi}(x) \equiv -ie(\varphi_f^*(\partial_\mu \varphi_i) - (\partial_\mu \varphi_f^*)\varphi_i) , \quad (3.41)$$

la cual, comparando con (1.34), puede ser considerada como la transición de la corriente electromagnética de la partícula escalar $i \rightarrow f$. Esquemáticamente representamos esta transición en la figura 3.3. Si la partícula entrante tiene un cuadrimomento p_i , tenemos

$$\varphi_i(x) = N_i e^{-ip_i \cdot x} , \quad (3.42)$$

donde N_i es una constante de normalización. Usando una expresión similar para φ_f , esto nos conduce a

$$j_\mu^{fi}(x) = -e N_i N_f (p_i + p_f)_\mu e^{i(p_f - p_i) \cdot x} . \quad (3.43)$$

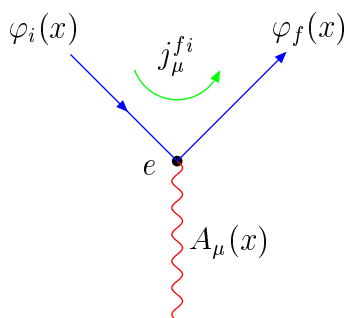


Figura 3.3: Una partícula escalar interactuando con A_μ .

Ahora nos planteamos la siguiente pregunta: ¿De dónde viene el fotón que dispersa la partícula bajo estudio? En otras palabras ¿cuál es el origen del potencial electromagnético? Sabemos que cualquier partícula cargada produce un potencial electromagnético. En muchos de los problemas de la física de partículas elementales, estudiamos interacción de partículas fundamentales entre sí. Para explicar el origen de las reglas de Feynman, consideramos un ejemplo simple en donde un electrón (sin espín) se dispersa con un muón (sin espín). Estamos considerando diferentes partículas para evitar complicaciones extras asociadas con partículas idénticas. Identificamos el muón como la fuente del potencial electromagnético A^μ que aparece en (3.40). Por lo tanto la figura 3.3 se puede extender a la siguiente figura

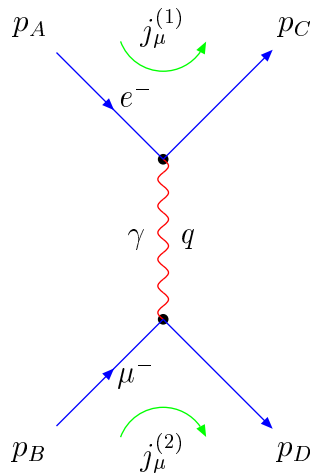


Figura 3.4: Dispersión electrón-muón.

que representa el proceso de dispersión $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$. Por lo tanto el fotón A^μ debe satisfacer la siguiente ecuación de Maxwell

$$\square^2 A^\mu = j_{(2)}^\mu \quad (3.44)$$

Esta ecuación determina el campo electromagnético A^μ asociado con la corriente $j_{(2)}^\mu$ del muón. Notemos que hemos cambiado la notación j_μ^{fi} a $j_\mu^{(1)}$. Como el electrón y el muón son partículas fundamentales, las tratamos al mismo nivel. Por lo tanto, imaginamos al electrón dispersándose en un potencial electromagnético creado por el muón o equivalentemente al muón dispersándose en un potencial creado por el electrón. La corriente asociada para un muón y un electrón sin espín tiene la misma forma como para la de una partícula escalar, la cual es dada por (3.43). Así, tenemos

$$j_{(1)}^\mu = -e N_A N_C (p_C + p_A)^\mu e^{i(p_C - p_A) \cdot x} , \quad (3.45)$$

$$j_{(2)}^\mu = -e N_B N_D (p_D + p_B)^\mu e^{i(p_D - p_B) \cdot x} . \quad (3.46)$$

Ya que

$$\square^2 e^{iq \cdot x} = -q^2 e^{iq \cdot x} , \quad (3.47)$$

la solución de (3.44) es

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j_{(2)}^\mu \quad \text{con} \quad q = p_D - p_B . \quad (3.48)$$

Insertando éste campo dado por el muón en (3.40), encontramos que la amplitud al orden más bajo para la dispersión del electrón-muón es

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{(1)}(x) \left(-\frac{1}{q^2} \right) j_{(2)}^\mu(x) d^4x . \quad (3.49)$$

Insertando (3.45) y (3.46) e integrando con respecto a x , encontramos

$$T_{fi} = -i N_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_D + p_C - p_B - p_A) \mathcal{M} \quad (3.50)$$

con

$$-i\mathcal{M} = (ie(p_A + p_C)^\mu) \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) (ie(p_B + p_D)^\nu) . \quad (3.51)$$

\mathcal{M} , es conocida como la *amplitud invariante*. La función delta en (3.50) expresa la conservación de momento en tal proceso. Ahora estamos en posición de hablar de las reglas de Feynman. Las cuales trataremos en la siguiente subsección.

3.5.2. Reglas de Feynman

La amplitud \mathcal{M} se puede considerar como la multiplicación de varios factores que podemos asociar con varias partes del diagrama 3.4, el llamado diagrama de Feynman. Estos factores se muestran en la figura 3.5. Éste diagrama de Feynman es al orden más bajo (orden árbol). El fotón es el intercambio entre los leptones, y el factor asociado al fotón $-ig_{\mu\nu}/q^2$ es llamado el *propagador fotónico*; éste lleva dos índices de Lorentz porque el fotón es una partícula con espín 1. El cuadrimomento q del fotón es determinado por la conservación del cuadrimomento en los vértices. Puesto que $q^2 \neq 0$, decimos que el fotón es “virtual”. Para cada uno de los vértices asociamos el factor mostrado. Cada *factor del vértice* contiene el acoplamiento electromagnético e y un índice de cuadvectores para conectar con el índice del fotón. El signo particular menos en la distribución y los factores de i son dados para obtener el resultado correcto a ordenes mayores. Notemos que la multiplicación de los tres factores nos da $-i\mathcal{M}$. La amplitud invariante \mathcal{M} es obtenida por dibujar todos los diagramas (topológicamente distintos y conectados) de Feynman para los procesos y asignando los factores multiplicativos para los diversos elementos de cada diagrama. Las reglas las resumimos en la tabla 3.1. Para la interacción de un fotón con una partícula de espín cero, existe también un vértice de cuatro puntos; ver la figura 3.6. Éste origina del término $e^2 A^2$ en (3.37), el cual no existe para el proceso correspondiente a la dispersión electrón-muón al nivel más bajo en e .

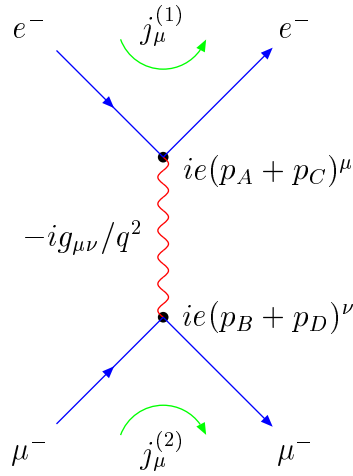


Figura 3.5: Factores del vértice y del propagador para la dispersión electrón-muón “sin espín”.

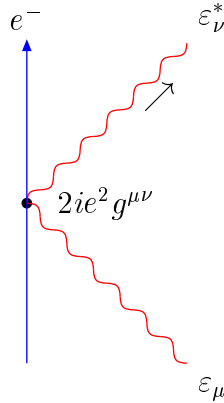


Figura 3.6: Diagrama para $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$, con electrones sin espín.

Hasta ahora hemos considerado únicamente los diagramas de Feynman al orden más bajo. Las reglas se pueden generalizar a diagramas de un orden mayor. Los diagramas a los siguientes ordenes contienen lazos cerrados de partículas intermedias (ver por ejemplo la figura 3.7). La conservación del cuadrímomento permanece en cada vértice. Uno tiene que integrar sobre todas las variables de momento p que no pueden ser fijadas (lazos internos):

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

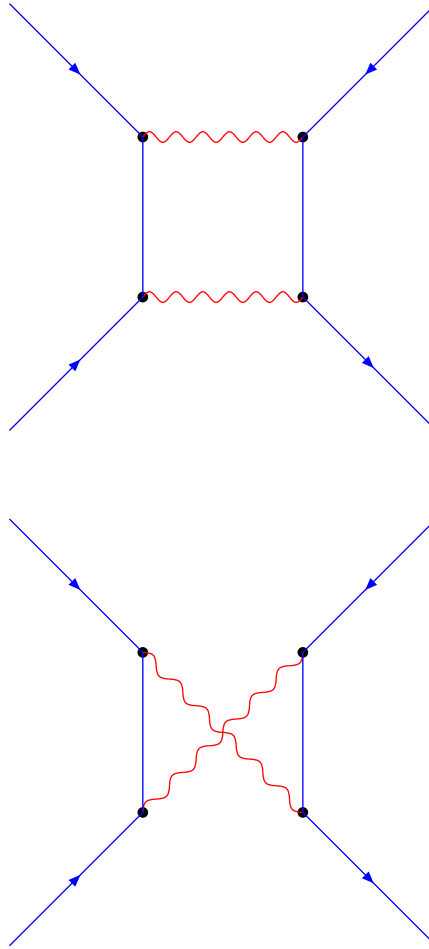
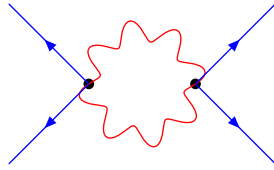


Figura 3.7: Algunos diagramas de orden mayor para $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$.

Agregamos los siguientes comentarios:

- No hay factores extras de -1. Es evidente porque el cambio de la línea de un bosón siempre nos da un factor de +1 de acuerdo a la estadística de Bose-Einstein.
- En el orden n -ésimo de teoría de perturbaciones tenemos que dibujar todos los posibles distintos diagramas de Feynman topológicamente con n vértices que tienen el número de partículas prescrito en el estado inicial y final (líneas externas).
- Para la construcción de los diagramas de Feynman, solamente la estructura topológica es importante. Ya que la teoría está formulada en una manera relativísticamente covariante, todos los posibles ordenes son automáticamente tomados en cuenta. Las gráficas pueden ser arbitrariamente deformadas sin cambiar su significado.

- Para cada lazo de un fotón asignamos un factor de $1/2$.



Desafortunadamente, las integraciones de lazos a menudo nos dan divergencias. Sin embargo, en teorías renormalizables todos los infinitos pueden ser removidos mediante técnicas ya establecidas permaneciendo la predictibilidad de la teoría.

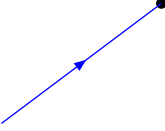
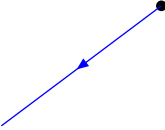
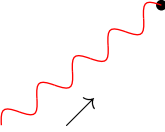
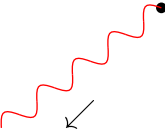
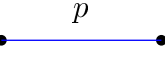
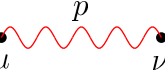
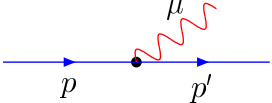
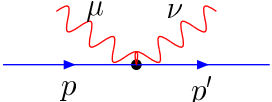
Líneas externas		Factor Multiplicativo
bosón entrante		1
bosón saliente		1
fotón entrante		ε_μ
fotón saliente		ε_μ^*
Líneas internas		
bosón de espín cero		$iS(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}$
fotón de espín 1		$i\Delta^{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{p^2}g^{\mu\nu} + i(1 - \xi)\frac{p^\mu p^\nu}{p^4}$
Factores del vértice		
vértice de un fotón		$-ie\Gamma_\mu = -ie(p'_\mu + p_\mu)$
vértice de dos fotones		$2ie^2 g_{\mu\nu}$

Tabla 3.1: Reglas de Feynman para la Electrodinámica Cuántica Escalar.

Capítulo 4

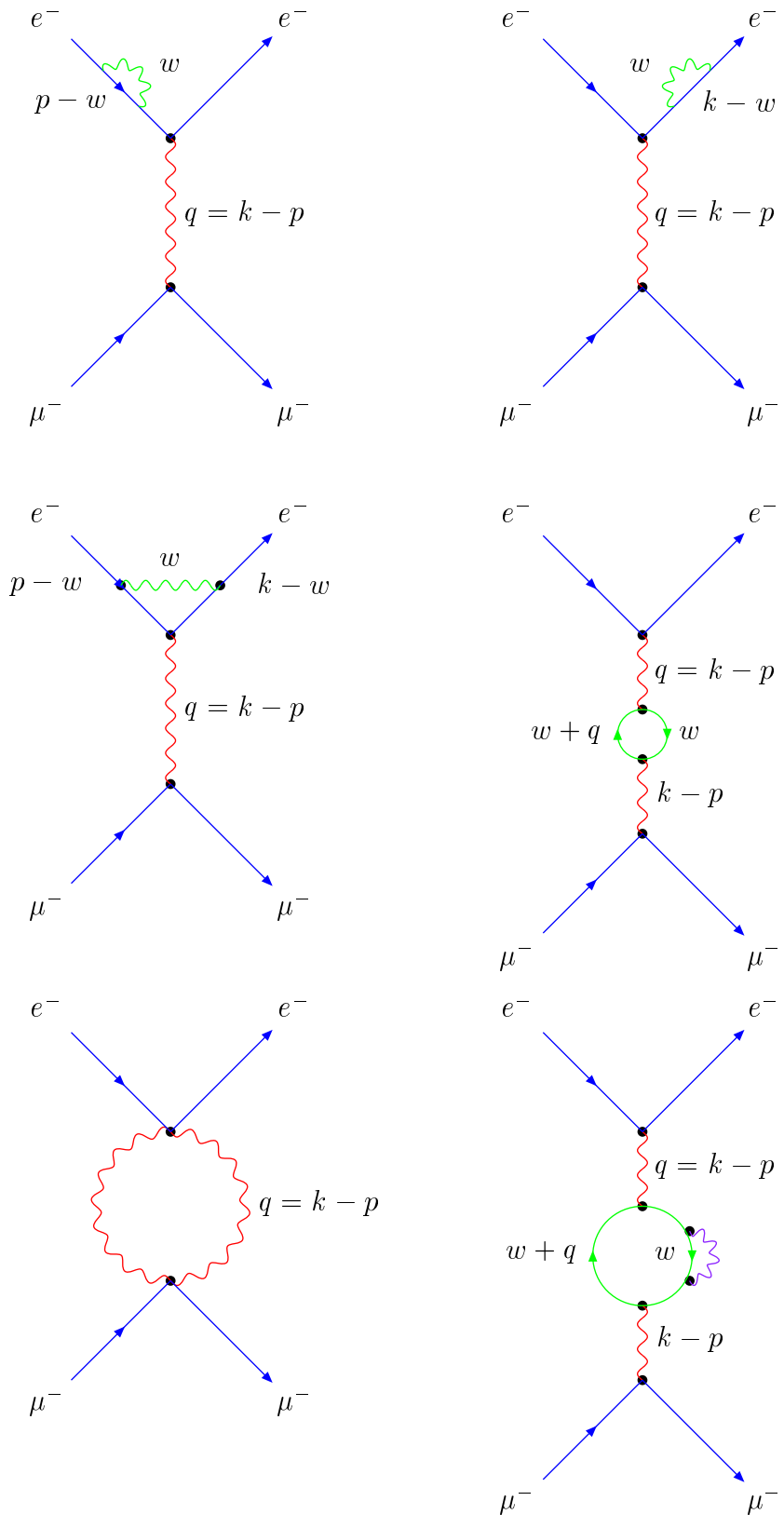
Divergencias y Regularización

4.1. Divergencias

En el Capítulo anterior tratamos únicamente con procesos a orden árbol, en donde el cuadrimomento de una partícula interna (o virtual) es fijado no ambiguamente por la conservación de la energía y el momento. Un ejemplo de un diagrama árbol es la figura 3.5 que corresponde a la contribución más baja en α para la dispersión electrón-muón. Pero los diagramas de Feynman a ordenes mayores contienen *lazos*. Los lazos cerrados son tales que el momento de todos los lazos internos *no es fijo* por el cuadrimomento de las partículas externas. Para cada lazo hay un cuadrimomento completamente no especificado. Las reglas de Feynman nos dicen que debemos integrar sobre todos los posibles valores del cuadrimomento interno. La evaluación de los diagramas de lazos por lo tanto requiere que las integrales de lazos sean llevadas a cabo con mucha dificultad. Las correcciones a ordenes mayores son conocidas como *correcciones radiativas*. Los diagramas de Feynman que representan las correcciones radiativas en un proceso contienen vértices adicionales, comparados con los diagramas que describen un proceso a ordenes más bajos en la teoría de perturbaciones, los cuales corresponden a la emisión y absorción de partículas virtuales. Para ilustrar estas ideas consideremos el proceso de dispersión electrón-muón sin espines. Al orden árbol hemos obtenido que la amplitud de probabilidad \mathcal{M} es

$$-i\mathcal{M} = (ie(p_A + p_C)^\mu) \left(-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) (ie(p_B + p_D)^\nu), \quad (4.1)$$

correspondiente al diagrama de Feynman de la figura 3.5. Al siguiente orden en teoría de perturbaciones (orden e^4), encontramos, es decir, los diagramas mostrados en la página 35. Los dos primeros diagramas representan la *corrección a las líneas externas*, el tercero es la *corrección al vértice* y el cuarto es la *corrección al propagador fotónico*. Para mostrar la *corrección al propagador escalar* consideramos el último diagrama, al orden e^6 . En principio las integrales de lazos son integrales divergentes debido a que tenemos que integrar sobre todos los posibles valores del cuadrimomento interno. La forma explícita de estas integrales y los cálculos de estas correcciones lo haremos en los siguientes capítulos. Antes,



Contribuciones radiativas a ordenes mayores.

para introducir la maquinaria requerida, veremos algunos de los métodos estándar para la evaluación de lazos.

4.2. Regularización

En la sección anterior mencionamos que el cálculo de integrales de lazos nos da divergencias. Estas divergencias son removidas por regularización, es decir, una modificación de estas integrales que nos permite separar las partes finitas e infinitas de una manera conveniente. El siguiente paso es eliminar los términos divergentes de tal manera que la predictibilidad de la teoría permanezca. Este proceso se llama *renormalización*. La renormalización de la teoría no siempre es posible. Por lo tanto algunas teorías son renormalizables y otras no lo son. En teorías renormalizables, después de la renormalización, los resultados finales permanecen finitos y la predictibilidad de la teoría también. Existen varios formalismos de regularización y renormalización. Los pasos intermedios dependen del formalismo empleado. Sin embargo, en el límite en el cual la teoría original es válida, las predicciones físicas son independientes del método usado. Por esta razón, los diferentes métodos han sido usados, dependiendo del problema. Históricamente el procedimiento más antiguo es el método de corte (cut-off). Éste tiene la ventaja de relacionar el comportamiento de las divergencias a distancias y por lo tanto a energías extremas. Por lo tanto, existen dos tipos de cortes, los cortes ultravioletas e infrarrojos. El empleo del método de corte puede generar los siguientes problemas:

1. Pérdida de la invariancia translacional.
2. Es difícil asegurar la invariancia de norma y la validez de la identidad de Ward tanto en teoría de perturbaciones como en tratamientos no perturbativos.

Un método alternativo, conocido como *regularización dimensional*, es libre de estos problemas. En la siguiente subsección estudiaremos un ejemplo clásico simple para ilustrar la existencia de divergencias y los procesos de regularización y renormalización.

4.2.1. Un Ejemplo. El Potencial Eléctrico

Corte Ultravioleta

Calcularemos el potencial eléctrico de una densidad de carga lineal e infinita λ tal como se muestra en la figura 4.1 [4]. Supongamos que $\lambda = \text{const.}$ y hágase que la distribución de carga coincida con el eje x . Se toma el origen de manera tal que el punto p donde medimos el potencial, quede por conveniencia sobre el plano yz ; así se tiene que

$$V(r) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} dx \equiv \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} U(r), \quad (4.2)$$

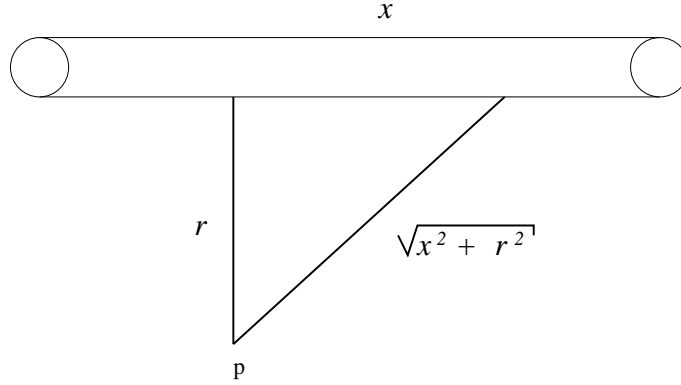


Figura 4.1: Cálculo del potencial escalar debido a una línea infinita de carga uniforme.

Notemos que la integral

$$U(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} dx \quad (4.3)$$

no tiene dimensiones. Para cualquier función $f(r)$ que no tenga dimensiones, hay tres posibilidades

$$f(r) = c \rightarrow \text{una constante finita} , \quad (4.4)$$

$$f(r) = \infty \rightarrow \text{una constante infinita} , \quad (4.5)$$

$$f(r) = f(r/L) , \quad (4.6)$$

donde L es alguna escala relevante de longitud. La función dada en (4.3) $U(r)$ tiene la propiedad de ser invariante de escala, es decir,

$$U(kr) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + (kr)^2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2 + r^2}} = U(r) . \quad (4.7)$$

Lo cual implica que $U(r_1) = U(r_2)$ después del rescalamiento: $x = ky$. Además $U(r)$ es divergente. Por lo tanto $U(r)$ pertenece a la familia (4.5) de funciones sin dimensiones. Como la intensidad eléctrica que corresponde a (4.2) es finita, es posible hacer que $V(r)$ sea finita, es decir, lo podemos regularizar. Una manera de hacerlo es introducir un corte infrarojo L de tal manera que $V(r) \rightarrow V(r/L)$. Así, perdemos invariancia de escala y $V(r/L)$ ya pertenece a la familia de (4.6)

$$V_{reg}(L) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^{+L} \frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} dx = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \left(\frac{L + \sqrt{L^2 + r^2}}{-L + \sqrt{L^2 + r^2}} \right) . \quad (4.8)$$

Hemos logrado eliminar la divergencia de ésta integral solamente que ahora tenemos otro problema, $V_{reg}(r)$ depende del regulador artificial L , pero no podemos remover el regulador. Pero estamos interesados en la medición de cantidades físicas, como el campo

eléctrico y la diferencia de potencial las cuales sí son independientes del regulador. Para el campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V_{reg}(r)}{\partial r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}}, \quad (4.9)$$

cuando tomamos el límite $L \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (4.10)$$

Similarmente, para la energía potencial que también es observable,

$$\Delta V_{reg} = V(r_1) - V(r_2) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r_2^2}{r_1^2}\right). \quad (4.11)$$

Hemos solucionado el problema de la divergencia en $V(r)$ pero rompimos la simetría translacional a lo largo eje cargado. $V(r)$ cambiará dependiendo de donde coloquemos la densidad de carga lineal de tamaño $2L$. También perdemos la invariancia de escala con un factor de escala extra L .

Regularización Dimensional

Vamos a estudiar el mismo problema solamente que ahora lo resolvemos usando regularización dimensional. Éste método consiste en modificar la dimensionalidad con la finalidad de obtener una integral finita. Entonces calculamos $V(r)$ en D -dimensiones

$$d^D x = d\Omega_D x^{D-1} dx, \quad (4.12)$$

$$d\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}. \quad (4.13)$$

Necesitamos introducir μ^{D-1} para asegurarnos de que $V(r)$ tenga la dimensión correcta:

$$V(r) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \int d\Omega_D \frac{x^{D-1}}{\mu^{D-1}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + r^2}}. \quad (4.14)$$

Usamos la siguiente integral definida [1]:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1} dx}{(p + qx^\nu)^{n+1}} = \frac{1}{\nu p^{n+1}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} \frac{\Gamma(\frac{\mu}{\nu})\Gamma(1+n-\frac{\mu}{\nu})}{\Gamma(1+n)} \quad [0 < \frac{\mu}{\nu} < n+1], \quad (4.15)$$

con $D = 1 - 2\epsilon$, después de integrar obtenemos

$$V(r) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Gamma(\frac{1-D}{2})}{\left(\frac{r}{\mu}\sqrt{\pi}\right)^{1-D}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mu^{2\epsilon}}{\pi^\epsilon r^{2\epsilon}} \Gamma(\epsilon)\right). \quad (4.16)$$

El problema que ahora tenemos es que $V(r)$ depende del regulador artificial μ , el cual no podemos remover cuando tomamos el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Pero como ya dijimos anteriormente

nos interesan las cantidades físicas y estas sí son independientes del regulador. Puesto que para el campo eléctrico tenemos

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2\epsilon\mu^{2\epsilon}\Gamma(\epsilon)}{\pi^\epsilon r^{1+2\epsilon}} \right), \quad (4.17)$$

en el límite $\epsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (4.18)$$

Para la energía potencial

$$\Delta V = V(r_1) - V(r_2) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \left(\frac{r_2^2}{r_1^2} \right). \quad (4.19)$$

Los mismos resultados que obtuvimos anteriormente. Aquí el problema se resuelve introduciendo un factor de escala extra μ . A diferencia del método de regularización de corte es que ahora la simetría bajo invariancia translacional se preserva. La regularización dimensional respeta las simetrías.

4.2.2. Un Ejemplo. Teoría Cuántica de Campos

Regularización de Corte

Veamos un ejemplo más, consideremos la siguiente integral típica a un lazo en teorías de campo en el espacio de Minkowski

$$I_n^A(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 w}{(2\pi)^4} \frac{1}{(w^2 - s)^n}, \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z}^+. \quad (4.20)$$

En el espacio de Minkowski $w^2 = w_0^2 - w_1^2 - w_2^2 - w_3^2$ y $d^4 w = dw_0 dw_1 dw_2 dw_3$. No es difícil evaluar la integral w_0 como una integral de contorno, entonces pasamos las integrales espaciales a coordenadas esféricas. Para esto, hacemos una *rotación de Wick* (WR). Notemos que si no tuvieramos el signo menos en la métrica de Minkowski, podríamos realizar la integral cuadrimensional completa en coordenadas esféricas cuadrimensionales. Para remover el signo menos, consideramos el contorno de integración en el plano w_0 (ver figura 4.2). La localización de los polos, y el hecho de que la integral cae lo suficientemente rápido a lo largo de $|w_0|$, nos permite rotar el contorno 90° en contra de las manecillas del reloj. Definimos la variable w_E como el cuadrimomento Euclidino:

$$\begin{aligned} \text{espacio de Minkowski} &\rightarrow \text{espacio de Euclides} \\ w_0 &\rightarrow iw_0^E, \\ w^2 &\rightarrow -w_0^2 - w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 \\ &\quad -[w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2] = -w^E, \\ d^4 w &\rightarrow id^4 w^E. \end{aligned} \quad (4.21)$$

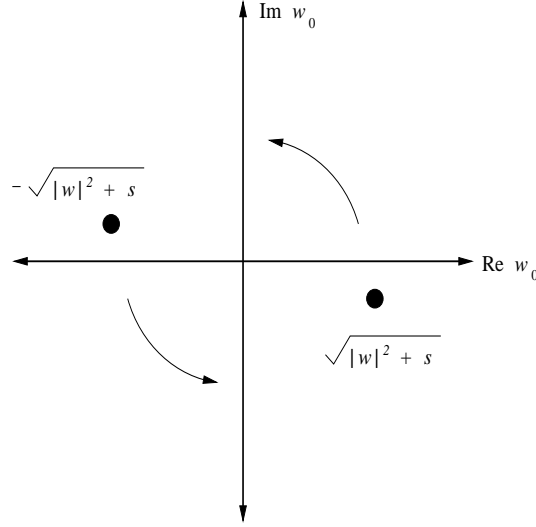


Figura 4.2: El contorno de la integración w_0 puede ser rotada como se muestra.

Así, la integral (4.20) toma la forma

$$I_n^4(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{id^4 w^E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(-1)^n (w_E^2 + s)^n} . \quad (4.22)$$

En coordenadas polares la medida es

$$d^4 w^E = d\Omega_4 w_E^3 dw^E = 2\pi^2 w_E^3 dw^E , \quad (4.23)$$

entonces la integral será

$$I_n^4(s) = \frac{i(-1)^n}{(2\pi)^4} \int d\Omega_4 \int_0^{\infty} dw^E \frac{w_E^3}{(w_E^2 + s)^n} \quad (4.24)$$

$$= \frac{i(-1)^n (2\pi^2)}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} dw^E \frac{w_E^3}{(w_E^2 + s)^n} . \quad (4.25)$$

Esta integral aún es divergente cuando $w^E \rightarrow \infty$. Hacemos el cambio de variable $x = w_E^2$

$$I_n^4(s) = \frac{i(-1)^n (\pi^2)}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} dx \frac{x}{(x + s)^n} . \quad (4.26)$$

Usamos la siguiente integral definida¹

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1}}{(1 + \beta x)^\nu} = \beta^{-\mu} B(\mu, \nu - \mu) , \quad [|\arg \beta| < \pi ; \nu > \mu > 0 ; \nu, \mu \in \mathfrak{R}] . \quad (4.27)$$

¹Tomamos esta integral de la referencia [1].

Por lo tanto,

$$I_n^4(s) = \frac{i(-1)^n(\pi^2)}{(2\pi)^4} \frac{1}{(n-1)(n-2)s^{n-2}} \quad (4.28)$$

la cual es singular para $n = 1$ y $n = 2$. Evaluamos la integral (4.26) para $n = 2$

$$I_2^4(s) = \frac{i(-1)^2(\pi^2)}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dx \frac{x}{(x+s)^2} . \quad (4.29)$$

Introducimos un corte con el regulador Λ :

$$I_2^4(s, \Lambda) = \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\Lambda dx \frac{x}{(x+s)^2} \quad (4.30)$$

entonces,

$$-i(4\pi)^2 I_2^4(s, \Lambda) = \ln \left(\frac{\Lambda + s}{s} \right) - \frac{\Lambda}{\Lambda + s} . \quad (4.31)$$

Notemos que logramos separar en partes finita e infinita. El primer término diverge logarítmicamente y el segundo término es convergente en el límite cuando $\Lambda \rightarrow \infty$. Como en el ejemplo anterior, perdimos la invariancia translacional de la integral inicial.

Regularización Dimensional

La regularización dimensional consiste en modificar la dimensionalidad de estas integrales para convertirlas en finitas. En primer lugar, generalizemos la cuadridimensionalidad a un espacio D -dimensional donde D es un entero positivo. El tensor métrico $g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ esta definido por

$$\begin{aligned} g^{00} &= -g^{ii} = 1, & i &= 1, 2, \dots, D-1, \\ g^{\alpha\beta} &= 0, & \alpha &\neq \beta. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Correspondientemente, un cuadvivector w^α es remplazado por un vector con D componentes

$$w^\alpha \equiv (w^0, w^1, \dots, w^{D-1}), \quad (4.33)$$

y

$$w^2 = w_\alpha w^\alpha = (w^0)^2 - \sum_{i=1}^{D-1} (w^i)^2 . \quad (4.34)$$

Las integrales de lazos ahora se convierten en integrales en D dimensiones con un elemento de volumen $d^D w = dw^0 dw^1 \dots dw^{D-1}$. Por ejemplo, la ecuación (4.24) se generaliza a

$$I_n^D(s) = \frac{i(-1)^n}{(2\pi)^D} \int d\Omega_D \int_0^\infty dw^E \frac{w_E^{D-1}}{(w_E^2 + s)^n} . \quad (4.35)$$

Para integrar sobre el momento del lazo w^E usamos $x = \frac{s}{w_E^2 + s}$

$$I_n^D(s) = \frac{i(-1)^n}{2(2\pi)^D} s^{D/2-n} \int d\Omega_D \int_0^1 dx x^{n-1-D/2} (1-x)^{D/2-1}. \quad (4.36)$$

Primero integramos una esfera D -dimensional ó integramos sobre el ángulo sólido. Conocemos que

$$\pi^{1/2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2}, \quad (4.37)$$

entonces

$$\pi^{D/2} = \prod_i^D \int_{-\infty}^{\infty} dx_i e^{-x_i^2} = \int_{-\infty}^{\infty} d^D x \exp\left(-\sum_i x_i^2\right). \quad (4.38)$$

Usando coordenadas polares en el lado derecho

$$\pi^{D/2} = \int d\Omega_D \int_0^{\infty} dr r^{D-1} e^{-r^2}. \quad (4.39)$$

Finalmente, hacemos un cambio de variable $r^2 = y$ y usamos la siguiente definición de función Gamma:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}, \quad (4.40)$$

para tener

$$\pi^{D/2} = \int d\Omega_D \times \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dy y^{\frac{D-2}{2}} e^{-y} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \int d\Omega_D. \quad (4.41)$$

Entonces para la integración sobre el ángulo sólido

$$\int d\Omega_D = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})}. \quad (4.42)$$

En la tabla 4.1 se muestran algunos valores de ángulo sólido. La definición de la función Beta es

$$B(a, b) = \int_0^1 dt t^{a-1} (1-t)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (4.43)$$

D	$\Gamma(D/2)$	$\int d\Omega_D$
1	$\sqrt{\pi}$	2
2	1	2π
3	$\sqrt{\pi}/2$	4π
4	1	$2\pi^2$

Tabla 4.1: Algunos valores de Gamma y $\int d\Omega_D$.

Con esta definición y el valor de ángulo sólido para D dimensiones, la integral de (4.36) se convierte en

$$I_n^D(s) = \frac{i(-1)^n \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(n - \frac{D}{2})}{(2\pi)^D \Gamma(n)} \left(\frac{1}{s}\right)^{n - \frac{D}{2}}. \quad (4.44)$$

Para $n = D/2$ (es decir, para $n = 2$ cuando $D = 4$), es singular para el polo de $\Gamma(z)$ en $z = 0$. Sin embargo, para valores no enteros de D , el lado derecho de la ecuación (4.44) es perfectamente bien definida y finita. Por lo tanto, podemos usar esto para hacer una generalización de la integral en el lado derecho de (4.44) a D dimensiones para valores no enteros de D . En particular, tomemos $D = 4 - 2\epsilon$ donde ϵ es un parámetro pequeño positivo y $n = 2$

$$\begin{aligned} -i(4\pi)^2 I_2^{D=4-2\epsilon}(s) &= (4\pi)^\epsilon \frac{\Gamma(2 - \frac{4-2\epsilon}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{s}\right)^{2 - \frac{4-2\epsilon}{2}} \\ &= (4\pi)^\epsilon \Gamma(\epsilon) s^{-\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

En el límite $\epsilon \rightarrow 0$ obtenemos

$$-i(4\pi)^2 I_2^{D=4-2\epsilon}(s) = \frac{1}{\epsilon} - \ln(s) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (4.46)$$

donde $\gamma=0.5772 \dots$ es la constante de Euler. Comparamos este resultado con (4.31)

$$\begin{aligned} -i(4\pi)^2 I_2^4(s, \Lambda) &= \ln\left(\frac{\Lambda + s}{s}\right) - \frac{\Lambda}{\Lambda + s} \\ &\xrightarrow{\Lambda \gg s} \ln(\Lambda) - \ln(s) + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Como podemos observar con el método de regularización de corte la divergencia es logarítmica $\ln(\Lambda)$ cuando $\Lambda \rightarrow \infty$ mientras que con el método de regularización dimensional la divergencia es de la forma $1/\epsilon$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. En general, las divergencias explícitas son de la forma $1/\epsilon^n$ donde $n = 1, 2, 3, \dots$. Con el método de regularización dimensional el tratamiento de las integrales divergentes a todos los órdenes en teoría de perturbaciones preserva las simetrías en QED. En los próximos capítulos aplicaremos el método de la regularización dimensional para realizar cálculos de propagadores y vértices en SQED a un lazo.

Capítulo 5

Propagador Escalar

5.1. Introducción

En éste capítulo vamos a estudiar el propagador escalar a un lazo y su comportamiento bajo las transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin. En la siguiente figura mostramos las correcciones del propagador escalar a primer orden:

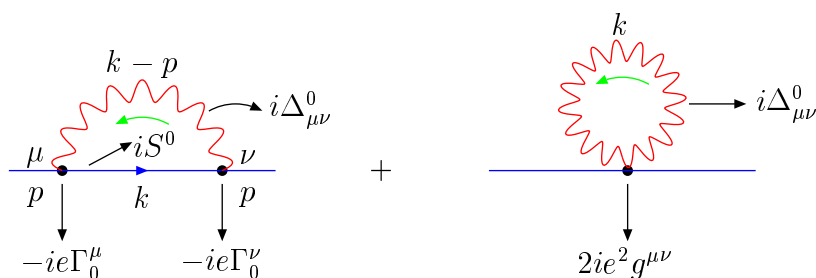


Figura 5.1: Correcciones a primer orden en el propagador escalar.

El índice cero denota cantidades desnudas. El segundo diagrama no contribuye en nuestros cálculos puesto que aplicando las reglas de Feynman (ver tabla 3.1) tenemos:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (2ie^2 g^{\mu\nu}) i \left[-\frac{g_{\mu\nu}}{k^2} + (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \right] = \frac{2e^2}{(2\pi)^D} [D-1+\xi] \int \frac{d^D k}{k^2} = 0. \quad (5.1)$$

En la figura 5.2, el círculo del primer diagrama representa la suma de todas las correcciones de lazos. Llamaremos a esta suma iS . En principio debemos incluir una serie infinita de diagramas de Feynman, pero nos vamos a restringir a calcular correcciones a nivel de un lazo para el propagador escalar.

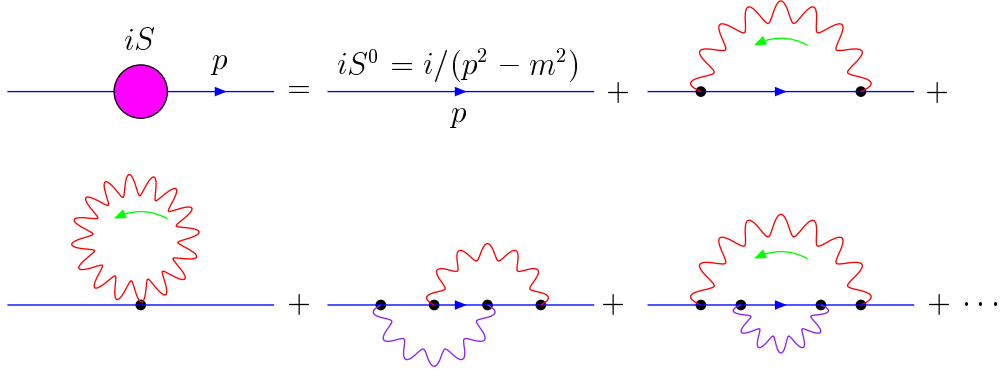


Figura 5.2: Correcciones del propagador escalar a ordenes mayores.

Observemos que hemos incluido diagramas de Feynman que estan de acuerdo con (3.24), nuestro Lagrangiano de interacción en Electrodinámica Cuántica Escalar:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SQED} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - m^2\varphi^*\varphi \\ & -ie(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*)A_\mu + 2e^2\varphi^*A^\mu\varphi A_\mu. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Es importante mencionar que se requiere introducir un término de interacción escalar de cuatro puntos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SQED} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - m^2\varphi^*\varphi \\ & -ie(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*)A_\mu + 2e^2\varphi^*A^\mu\varphi A_\mu - \frac{\lambda}{4}(\varphi^*\varphi)^2, \end{aligned} \quad (5.3)$$

por las cuestiones de renormalizabilidad para cancelar las divergencias que surgen en la dispersión coulombica escalar [18]. Sin embargo, como nosotros no entramos en los asuntos de renormalización, no consideraremos este término adicional. Si queremos calcular $-iS^{-1}$ a primer orden los diagramas a considerar obviamente son:

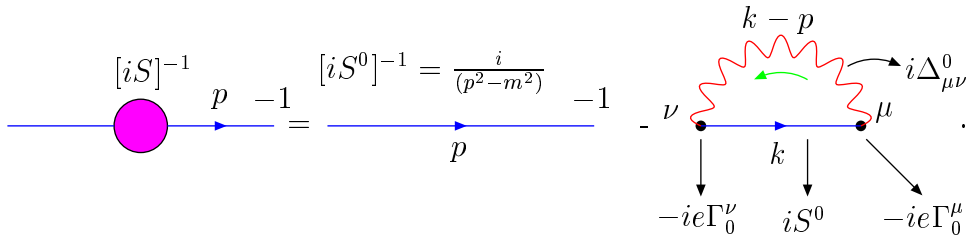


Figura 5.3: Correcciones a un lazo para $-iS^{-1}$.

Aplicando las reglas de Feynman obtenemos que $-iS^{-1}$ es:

$$-iS^{-1} = -i[S^0]^{-1} - \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [-ie\Gamma_0^\nu][iS^0][-ie\Gamma_0^\mu][i\Delta_{\mu\nu}^0], \quad (5.4)$$

multiplicando por i :

$$S^{-1} = [S^0]^{-1} - ie^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \Gamma_0^\nu S^0 \Gamma_0^\mu \Delta_{\mu\nu}^0. \quad (5.5)$$

La forma explícita de (5.5) es

$$S^{-1} = [S^0]^{-1} + ie^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (k+p)^\nu \frac{1}{k^2 - m^2} (k+p)^\mu \frac{1}{q^2} \left[g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right], \quad (5.6)$$

donde $q = k - p$ y ξ es el parámetro covariante de norma. El valor de $\xi = 0$ corresponde a la norma de Landau y el valor de $\xi = 1$ a la norma de Feynman.

5.2. Propagador Escalar a un Lazo

5.2.1. Norma de Feynman

Procedemos a resolver la integral (5.5) en la norma de Feynman ($\xi = 1$),

$$S_{Feynman}^{-1} = [S^0]^{-1} + ie^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k+p)^\nu (k+p)^\mu g_{\mu\nu}}{k^2 - m^2} \frac{1}{q^2}. \quad (5.7)$$

Del hecho que

$$A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} = A \cdot B \quad \text{y} \quad (k+p) \cdot (k+p) = (k+p)^2, \quad (5.8)$$

$$S_{Feynman}^{-1} = [S^0]^{-1} + ie^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k+p)^2}{(k^2 - m^2)q^2}. \quad (5.9)$$

La integral de (5.9) es divergente para valores de k muy grandes. Por ejemplo, para $D = 4$, la integral de (5.9) en coordenadas esféricas polares es:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k+p)^2}{(k^2 - m^2)q^2} = \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dk \frac{k^3 (k+p)^2}{(k^2 - m^2)(k-p)^2}. \quad (5.10)$$

Por lo tanto, en el límite $k \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^3 k^2}{k^2 k^2} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty dk k = \infty. \quad (5.11)$$

Por esta razón queremos integrar sobre D dimensiones directamente puesto que vamos a aplicar el método de regularización dimensional. Sea entonces

$$J = \int d^D k \frac{(k+p)^2}{(k^2 - m^2)q^2} = \int d^D k \frac{k^2 + p^2 + 2k \cdot p}{(k^2 - m^2)q^2}. \quad (5.12)$$

La definición del momento q^2 es

$$q^2 = (k-p)^2 = k^2 + p^2 - 2k \cdot p, \quad (5.13)$$

entonces

$$2k \cdot p = -q^2 + k^2 + p^2. \quad (5.14)$$

Sustituyendo (5.14) en (5.12) tenemos que

$$J = \int d^D k \frac{2k^2 + 2p^2 - q^2}{(k^2 - m^2)q^2}. \quad (5.15)$$

Por lo tanto, sumando y restando $2m^2$ obtenemos

$$J = 2 \underbrace{\int d^D k \frac{1}{q^2}}_{J_{10}} + 2(m^2 + p^2) \underbrace{\int d^D k \frac{1}{(k^2 - m^2)q^2}}_{J_{11}} - \underbrace{\int d^D k \frac{1}{k^2 - m^2}}_{J_{01}}. \quad (5.16)$$

La primera integral es cero debido a que es de la forma

$$\int d^D w f(w) = 0 \quad (5.17)$$

puesto que $q = k - p$ y $d^D q = d^D k$. La tercera integral es de la forma (A.8) con $s = m^2$ y $n = 1$, así

$$J_{01} = \int d^D k \frac{1}{k^2 - m^2} = -i\pi^{D/2} \Gamma(1 - D/2) (m^2)^{D/2-1}. \quad (5.18)$$

Para solucionar la segunda integral de (5.16) usamos parametrización de Feynman en particular la forma (A.15) donde

$$a = q^2 = (k-p)^2 \quad \text{y} \quad b = k^2 - m^2, \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} J_{11} &= \int d^D k \int_0^1 dx \frac{1}{[x(k-p)^2 + (1-x)(k^2 - m^2)]^2} \\ &= \int_0^1 dx \int d^D k \frac{1}{[x(k-p)^2 + (1-x)(k^2 - m^2)]^2}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Transformemos el denominador de esta integral a una forma conveniente para poder integrar. Llamemos

$$\begin{aligned} D &= x(k-p)^2 + (1-x)(k^2 - m^2) \\ &= x[k^2 + p^2 - 2k \cdot p] + (1-x)k^2 - m^2(1-x) \\ &= k^2 - 2k \cdot px + p^2x - m^2(1-x) . \end{aligned} \quad (5.21)$$

Sea

$$w = k - px , \quad \Rightarrow \quad k = w + px . \quad (5.22)$$

Sustituyendo (5.22) en (5.21) obtenemos

$$\begin{aligned} D &= (w + px)^2 - 2(w + px) \cdot px + p^2x - m^2(1-x) \\ &= w^2 + p^2x(1-x) - m^2(1-x) . \end{aligned} \quad (5.23)$$

Así

$$J_{11} = \int_0^1 dx \int d^D w \frac{1}{[w^2 + p^2x(1-x) - m^2(1-x)]^2} . \quad (5.24)$$

La integración sobre w la podemos llevar a cabo pues esta integral es de la forma (A.8) donde $n = 2$ y $s = -p^2x(1-x) + m^2(1-x)$. Entonces

$$J_{11} = i\pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2) \int_0^1 dx [(1-x)(m^2 - p^2x)]^{D/2-2} . \quad (5.25)$$

La integral

$$\int_0^1 dx [(1-x)(m^2 - p^2x)]^{D/2-2} = (m^2)^{\frac{D}{2}-2} \int_0^1 (1-x)^{\frac{D}{2}-2} \left(1 - \frac{p^2}{m^2}x\right)^{\frac{D}{2}-2} dx \quad (5.26)$$

la resolvemos usando la siguiente integral estándar, [1].

$$\int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x)^{\mu-1} (1-\beta x)^{-\nu} dx = B(\lambda, \mu) {}_2F_1(\nu, \lambda; \lambda + \mu; \beta) , \quad (5.27)$$

donde $\lambda = 1$, $\mu = \frac{D}{2} - 1$, $\beta = \frac{p^2}{m^2}$ y $-\nu = \frac{D}{2} - 2$. Tal que,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x)^{\frac{D}{2}-2} \left(1 - \frac{p^2}{m^2}x\right)^{\frac{D}{2}-2} dx &= B\left(1, \frac{D}{2} - 1\right) {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) . \end{aligned} \quad (5.28)$$

Así,

$$J_{11} = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(2 - D/2)\Gamma(D/2 - 1)}{\Gamma(D/2)} (m^2)^{\frac{D}{2}-2} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) . \quad (5.29)$$

Por lo tanto,

$$J = 2i\pi^{D/2}(m^2 + p^2)(m^2)^{\frac{D}{2}-2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) + i\pi^{D/2}\Gamma(1 - D/2)(m^2)^{D/2-1}. \quad (5.30)$$

Finalmente, el inverso del propagador escalar en D dimensiones en la norma de Feynman es:

$$S_{Feynman}^{-1} = p^2 - m^2 - \frac{e^2}{(2\pi)^D} \left[2\pi^{D/2}(m^2 + p^2)(m^2)^{\frac{D}{2}-2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} \times {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) + \pi^{D/2}\Gamma(1 - D/2)(m^2)^{D/2-1} \right]. \quad (5.31)$$

5.2.2. Norma Arbitraria

Ahora solucionamos (5.6) en la norma arbitraria ξ

$$S^{-1} = [S^0]^{-1} + ie^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k+p)^\nu (k+p)^\mu g_{\mu\nu}}{k^2 - m^2} \frac{1}{q^2} - i(1 - \xi)e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k+p)^\nu (k+p)^\mu q_\mu q_\nu}{(k^2 - m^2)q^4} \quad (5.32)$$

donde solamente nos resta resolver la última integral

$$\begin{aligned} \mathbb{J} &= \int d^D k \frac{(k+p)^\nu (k+p)^\mu q_\mu q_\nu}{(k^2 - m^2)q^4} = \int d^D k \frac{[(k+p) \cdot (k-p)][(k+p) \cdot (k-p)]}{(k^2 - m^2)q^4} \\ &= \int d^D k \frac{(k^2 - p^2)^2}{(k^2 - m^2)q^4} = \int d^D k \frac{k^4 + p^4 - 2k^2 p^2}{(k^2 - m^2)q^4}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Sumamos y restamos m^2 dos veces, tal que,

$$\begin{aligned} \mathbb{J} &= \int d^D k \frac{k^2(k^2 - m^2 + m^2)}{(k^2 - m^2)q^4} + p^4 \underbrace{\int d^D k \frac{1}{(k^2 - m^2)q^4}}_{J_{21}} \\ &\quad - 2p^2 \int d^D k \frac{k^2 - m^2 + m^2}{(k^2 - m^2)q^4}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Simplificando algunas operaciones algebraicas y usando (5.17) obtenemos

$$\mathbb{J} = (m^2 - p^2)^2 J_{21}. \quad (5.35)$$

Ahora aplicamos parametración de Feynman a esta integral. Pero resolvemos la siguiente integral más general por conveniencia del cálculo de otras integrales a futuro (la cual hemos solucionado para $n = 1$ y $p = 1$)

$$J_{np} = \int d^D k \frac{1}{\underbrace{(q^2)^n}_A \underbrace{(k^2 - m^2)^p}_B}. \quad (5.36)$$

Transformamos el denominador usando la siguiente integral de Feynman

$$\frac{1}{A^n B^p} = \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(p)} \int_0^1 dx \frac{x^{n-1}(1-x)^{p-1}}{[xA + (1-x)B]^{n+p}} \quad (5.37)$$

entonces

$$J_{np} = \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(p)} \int_0^1 dx \int d^D k \frac{x^{n-1}(1-x)^{p-1}}{[x(k-p)^2 + (1-x)(k^2 - m^2)]^{n+p}}, \quad (5.38)$$

el término dentro del corchete cuadrado en el denominador tiene la misma forma que (5.21) el cual transformamos a la forma (5.23). Usando nuevamente (A.8) y simplificando tenemos

$$J_{np} = \frac{(-1)^{n+p} i \pi^{D/2} \Gamma(n+p - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)\Gamma(p)} \int_0^1 dx [-p^2 x(1-x) + m^2(1-x)]^{\frac{D}{2}-n-p} \times x^{n-1}(1-x)^{p-1}. \quad (5.39)$$

La integral

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx [-p^2 x(1-x) + m^2(1-x)]^{\frac{D}{2}-n-p} x^{n-1}(1-x)^{p-1} = \\ & = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{p-1} (1-x)^{\frac{D}{2}-n-p} (-p^2 x + m^2)^{\frac{D}{2}-n-p} dx \\ & = (m^2)^{\frac{D}{2}-n-p} \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{\frac{D}{2}-n-1} \left(1 - \frac{p^2}{m^2} x\right)^{\frac{D}{2}-n-p} dx \end{aligned} \quad (5.40)$$

la podemos resolver usando la integral (5.27) donde $\lambda = n$, $\mu = \frac{D}{2} - n$, $\beta = \frac{p^2}{m^2}$ y $-\nu = \frac{D}{2} - n - p$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{\frac{D}{2}-n-1} \left(1 - \frac{p^2}{m^2} x\right)^{\frac{D}{2}-n-p} dx = \\ & = B\left(n, \frac{D}{2} - n\right) {}_2F_1\left(-\frac{D}{2} + n + p, n; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \\ & = \frac{\Gamma(n)\Gamma(\frac{D}{2} - n)}{\Gamma(\frac{D}{2})} {}_2F_1\left(-\frac{D}{2} + n + p, n; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Entonces

$$J_{np} = (-1)^{n+p} i\pi^{D/2} (m^2)^{\frac{D}{2}-n-p} \frac{\Gamma(n+p-\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2}-n)}{\Gamma(p)\Gamma(\frac{D}{2})} \times {}_2F_1\left(-\frac{D}{2}+n+p, n; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right). \quad (5.42)$$

Para $n = 2$ y $p = 1$ tenemos

$$J_{21} = -i\pi^{D/2} (m^2)^{\frac{D}{2}-3} \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2}-2)}{\Gamma(\frac{D}{2})} {}_2F_1\left(-\frac{D}{2}+3, 2; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \quad (5.43)$$

Por lo tanto, el inverso del propagador escalar en D dimensiones en la norma arbitraria es:

$$S^{-1} = p^2 - m^2 - \frac{e^2}{(2\pi)^D} \left[2\pi^{D/2} (m^2 + p^2) (m^2)^{\frac{D}{2}-2} \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2}-1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} \times {}_2F_1\left(2-\frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) + \pi^{D/2} \Gamma(1-D/2) (m^2)^{D/2-1} \right] - \frac{e^2(1-\xi)}{(2\pi)^D} (m^2 - p^2)^2 \pi^{D/2} (m^2)^{\frac{D}{2}-3} \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2}-2)}{\Gamma(\frac{D}{2})} \times {}_2F_1\left(-\frac{D}{2}+3, 2; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right). \quad (5.44)$$

Simplificando términos, el propagador escalar en el espacio de Minkowski a un lazo en SQED en norma y dimensiones arbitrarias es:

$$S^{-1}(p) = p^2 - m^2 - \frac{e^2}{(2\pi)^D} \pi^{D/2} (m^2)^{\frac{D}{2}-1} \left\{ \Gamma(1-D/2) + 2(m^2 + p^2)(m^2)^{-1} \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2}-1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} {}_2F_1\left(2-\frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) + (1-\xi)(m^2 - p^2)^2 (m^2)^{-2} \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2}-2)}{\Gamma(\frac{D}{2})} \times {}_2F_1\left(3-\frac{D}{2}, 2; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \right\}. \quad (5.45)$$

5.2.3. Propagador Escalar en 3 Dimensiones

Para $D = 3$ el propagador escalar a nivel de un lazo es:

$$S^{-1} = p^2 - m^2 - \frac{e^2}{(2\pi)^3} \pi^{3/2} (m^2)^{1/2} \left\{ \Gamma(-1/2) + 2(m^2 + p^2)(m^2)^{-1} \times \right. \\ \left. \frac{[\Gamma(1/2)]^2}{\Gamma(3/2)} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) + (1 - \xi)(m^2 - p^2)^2 (m^2)^{-2} \times \right. \\ \left. \Gamma(-1/2) {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, 2; \frac{3}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \right\}. \quad (5.46)$$

Usando los siguientes resultados

$${}_2F_1\left(\frac{3}{2}, 2; \frac{3}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) = \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right)^{-2}, \quad {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) = \frac{\tanh^{-1} \sqrt{p^2/m^2}}{\sqrt{p^2/m^2}}, \quad (5.47)$$

$$\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \quad (5.48)$$

Y después de simplificar (5.46) obtenemos que el propagador escalar en el espacio de Minkowski en tres dimensiones y norma arbitraria es

$$S^{-1} = p^2 - m^2 + \frac{e^2}{4\pi} \left[m - \frac{2(m^2 + p^2)}{m} \sqrt{\frac{m^2}{p^2}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{p^2}{m^2}} + (1 - \xi)m \right]. \quad (5.49)$$

Notamos que para $D = 3$, no hay divergencias. Por otro lado, para $D = 4$, las funciones de Gamma $\Gamma(2 - D/2)$ y $\Gamma(D/2 - 2)$ son divergentes y necesitamos regular S^{-1} en la ecuación (5.45). En el espacio Euclideo esta expresión es

$$S^{-1} = -p^2 - m^2 + \frac{e^2}{4\pi} \left[m - \frac{2(m^2 - p^2)}{p} \tan^{-1} \left(\frac{p}{m}\right) + (1 - \xi)m \right]. \quad (5.50)$$

Para $m = 0$, tenemos

$$S(p) = \frac{1}{p^2 + \alpha\pi p} \quad (5.51)$$

en el espacio de Minkowski, usando la notación $p = \sqrt{-p^2}$. Esta expresión es muy similar a la que se encuentra para el propagador del fotón en QED3 espinorial en tres dimensiones en la aproximación $1/N$, [15, 16]. A momentos pequeños, el propagador escalar se suaviza de $1/p^2$ a $1/p$.

5.2.4. Regularización

Regresando a la expresión (5.45) del propagador escalar en el espacio de Minkowski a un lazo en SQED en norma y dimensiones arbitrarias:

$$\begin{aligned}
S^{-1}(p) = & p^2 - m^2 - \frac{e^2}{(2\pi)^D} \pi^{D/2} (m^2)^{\frac{D}{2}-1} \left\{ \Gamma(1 - D/2) \right. \\
& + 2(m^2 + p^2)(m^2)^{-1} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \\
& + (1 - \xi)(m^2 - p^2)^2 (m^2)^{-2} \frac{\Gamma(3 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} - 2)}{\Gamma(\frac{D}{2})} \times \\
& \left. {}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, 2; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \right\}. \tag{5.52}
\end{aligned}$$

Observemos que la función Γ es divergente para $D = 4$. Vamos a tratar de separar la parte divergente de esta expresión:

$${}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}, 1; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) = {}_2F_1\left(0, 1; 2; \frac{p^2}{m^2}\right) = 1, \tag{5.53}$$

$${}_2F_1\left(3 - \frac{D}{2}, 2; \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) = {}_2F_1\left(1, 2; 2; \frac{p^2}{m^2}\right) = \frac{m^2}{m^2 + p^2}, \tag{5.54}$$

$$\Gamma(D/2 - 1) = \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3 - D/2) = \Gamma(3 - 2) = 1, \quad \Gamma(D/2) = 1. \tag{5.55}$$

Sustituimos $D = 4 - 2\epsilon$ en las siguientes funciones de Gamma:

$$\Gamma(2 - D/2) = \Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} + \text{cantidad finita}, \tag{5.56}$$

$$\Gamma(D/2 - 2) = \Gamma(-\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon} + \text{cantidad finita}, \tag{5.57}$$

$$\Gamma(1 - D/2) = \Gamma(-1 + \epsilon) = -\frac{1}{1 - \epsilon} \Gamma(\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon} + \dots. \tag{5.58}$$

Entonces,

$$S^{-1}(p) = p^2 - m^2 - \frac{e^2}{16\pi^2} m^2 \left[-\frac{1}{\epsilon} + 2\left(1 + \frac{p^2}{m^2}\right) \frac{1}{\epsilon} - (1 - \xi) \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) \frac{1}{\epsilon} \right]. \tag{5.59}$$

Por lo tanto el *inverso del propagador en la norma arbitraria* en $D = 4 - 2\epsilon$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ es:

$$S^{-1}(p) = p^2 - m^2 - \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \left[m^2 + 2p^2 - (1 - \xi)(m^2 - p^2) \right] + \text{cantidad finita}. \tag{5.60}$$

Esta expresión separa la parte divergente de la parte finita en la expresión del propagador escalar a un lazo.

5.3. Transformación de Landau-Khalatnikov-Fradkin

Si conocemos una función de Green para un valor de ξ , la podemos deducir para cualquier otro valor de ξ por medio de la transformación de Landau-Khalatnikov-Fradkin (LKFT). Para el propagador escalar, esta transformación en el espacio Euclideo es:

$$S(x; \xi) = S(x; 0)e^{-i[\Delta_D(0) - \Delta_D(x)]} , \quad (5.61)$$

donde

$$\Delta_D(x) = -i\xi e^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi^D)} \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^4} . \quad (5.62)$$

Consideramos el caso simple de $D = 3$ únicamente para ver que información nos proporcionan la LKFT. En este caso

$$\Delta_3(x) = i\xi e^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi^3)} \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^4} . \quad (5.63)$$

Entonces

$$\Delta_3(0) - \Delta_3(x) = -i\xi e^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1 - e^{-ip \cdot x}}{p^4} \right] . \quad (5.64)$$

Para integrar hacemos un cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas polares, tal que, $d^3 p = 2\pi dp p^2 d\theta \sin \theta$. Así,

$$\begin{aligned} \Delta_3(0) - \Delta_3(x) &= -\frac{i\xi e^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dp}{p^2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta [1 - e^{-ipx \cos \theta}] \\ &= -\frac{i\xi e^2}{2\pi^2 x} \int_0^\infty \frac{dp}{p^3} [px - \text{sen } px] . \end{aligned} \quad (5.65)$$

Ahora integrando por partes sobre la variable p obtenemos:

$$\int_0^\infty \frac{dp}{p^3} [px - \text{sen } px] = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dp}{p^2} [x - x \cos px] = \frac{x^2}{2} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\text{sen } px}{p} dp}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} x^2 . \quad (5.66)$$

Entonces,

$$\Delta_3(0) - \Delta_3(x) = -i\xi \frac{e^2}{8\pi} = -i \frac{\alpha \xi}{2} = -iax . \quad (5.67)$$

Por lo tanto, para $D = 3$, la transformación de Landau-Khalatnikov-Fradkin es

$$S(x; \xi) = S(x; 0)e^{-ax} . \quad (5.68)$$

5.3.1. Propagador Escalar No Perturbativo

En el espacio de momentos conocemos que el propagador escalar a nivel árbol es:

$$S(p; 0) = -\frac{1}{p^2 + m^2} \quad (5.69)$$

en el espacio de Euclides. Consideramos la trasformada de Fourier, tal que,

$$S(x; 0) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-p \cdot x} S(p; 0) . \quad (5.70)$$

Entonces,

$$S(x; 0) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{p^2 + m^2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-ipx \cos \theta} \quad (5.71)$$

donde

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-ipx \cos \theta} = \frac{2 \sin px}{px} . \quad (5.72)$$

Así,

$$S(x; 0) = -\frac{1}{2\pi^2 x} \int_0^\infty dp \frac{p}{p^2 + m^2} \sin px , \quad (5.73)$$

tal que,

$$\int_0^\infty dp \frac{p}{p^2 + m^2} \sin px = \frac{\pi}{2} e^{-mx} . \quad (5.74)$$

Por lo tanto,

$$S(x; 0) = -\frac{1}{4\pi x} e^{-mx} . \quad (5.75)$$

En una norma arbitraria en el espacio de posiciones usando (5.68) el propagador escalar en tres dimensiones es:

$$S(x; \xi) = -\frac{1}{4\pi x} e^{-(m+a)x} . \quad (5.76)$$

Si calculamos la transformada inversa de Fourier de (5.76) obtenemos

$$S(p; \xi) = \int d^3 x e^{ip \cdot x} S(x; \xi) = \int d^3 x e^{ip \cdot x} \left[-\frac{1}{4\pi x} e^{-(m+a)x} \right] . \quad (5.77)$$

Hacemos una transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas polares de la misma manera como lo hemos hecho anteriormente. Simplificando tenemos que

$$S(p; \xi) = -\frac{1}{p} \int_0^\infty dx e^{-(m+a)x} \sin px \quad (5.78)$$

usamos la siguiente integral de [1]:

$$\int_0^\infty x^n e^{-\beta x} \sin bx dx = n! \left(\frac{\beta}{\beta^2 + b^2} \right)^{n+1} \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \frac{\partial^n}{\partial \beta^n} \left(\frac{b}{b^2 + \beta^2} \right), \quad [\beta, b > 0 \in \Re] .$$

en nuestro caso $n = 0$, $\beta = m + a$ y $b = p$. Entonces,

$$\int_0^\infty dx e^{-(m+a)x} \operatorname{sen} px = \frac{p}{[p^2 + (m+a)^2]} . \quad (5.79)$$

Por lo tanto,

$$S(p; \xi) = -\frac{1}{p^2 + \left(m + \frac{\alpha\xi}{2}\right)^2} . \quad (5.80)$$

Esta es una expresión *no perturbativa para el propagador del escalar*. El inverso del propagador escalar es igual a:

$$S^{-1} = -\left[\left(m + \frac{\alpha\xi}{2}\right)^2\right] + p^2 = -\left[m^2 + p^2 + m\alpha\xi + \frac{\alpha^2\xi^2}{4}\right] \quad (5.81)$$

A través de un cálculo directo, hemos obtenido que el propagador inverso en tres dimensiones en norma arbitraria es:

$$S^{-1} = -p^2 - m^2 + \frac{e^2}{4\pi} \left[m - \frac{2(m^2 - p^2)}{p} \tan^{-1} \left(\frac{p}{m} \right) + (1 - \xi)m \right] . \quad (5.82)$$

Comparando los dos resultados tenemos que el propagador a orden árbol y el término $m\alpha\xi$ son iguales. En general, si hacemos una expansión en serie de potencias en α para el inverso del propagador tenemos:

$$S = a_0\alpha^0 + (a_1\xi + b_1)\alpha + (a_2\xi^2 + b_2\xi + c_2)\alpha^2 \cdots . \quad (5.83)$$

Si conocemos S a nivel árbol en la norma de Landau, es decir, conocemos a_0 , la transformación de LKF nos proporciona términos del tipo $(\alpha\xi)^n$ correctamente para cualquier valor de n .

Capítulo 6

Propagador Fotónico

6.1. Introducción

En este capítulo, vamos a calcular las correcciones al propagador fotónico a primer orden. Además, en $D = 3$, sumaremos diagramas con burbujas para evaluar el propagador modificado. Las correcciones en el propagador fotónico a primer orden vienen de la presencia de un *lazo* adicional al propagador fotónico desnudo como se muestra en los siguientes diagramas:

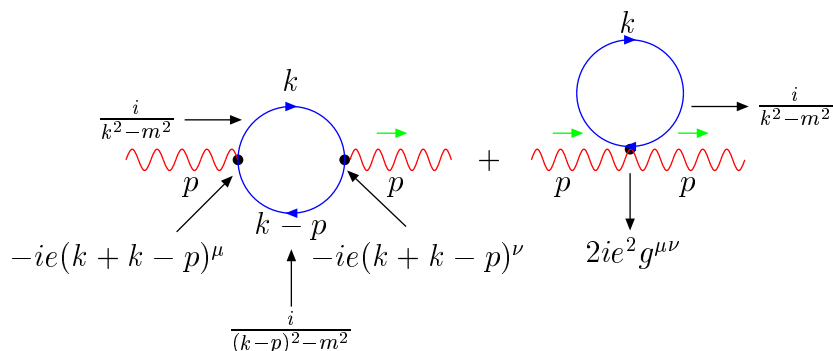


Figura 6.1: Correcciones del propagador fotónico a primer orden.

El propagador fotónico se representa bajo los siguientes diagramas de Feynman:

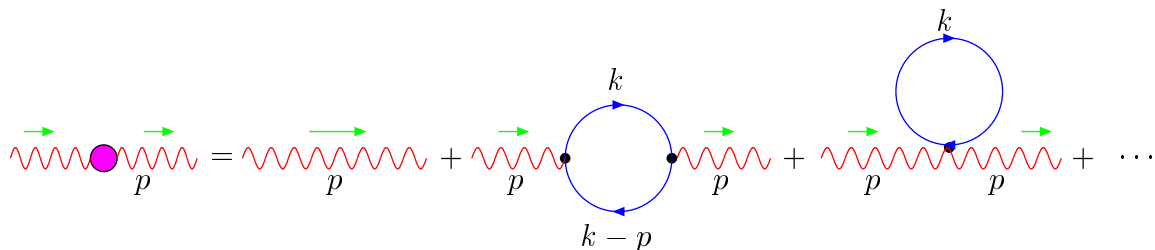


Figura 6.2: Correcciones al propagador fotónico.

donde el círculo en el primer diagrama representa todas las correcciones del propagador fotónico. Aplicando las reglas de Feynman a las correcciones de primer orden obtenemos

$$i\pi^{\mu\nu} \equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[(-ie(2k-p)^\mu)(-ie(2k-p)^\nu) \left(\frac{i}{k^2-m^2} \right) \left(\frac{i}{(k-p)^2-m^2} \right) \right] + \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i}{(k^2-m^2)} 2ie^2 g^{\mu\nu}. \quad (6.1)$$

6.2. Propagador Fotónico a un Lazo

En esta sección vamos a calcular la corrección al propagador fotónico a primer orden, ec. (6.1). Una de estas es esencialmente la misma que como procedimos al cálculo de las correcciones del propagador escalar con unas pequeñas variaciones en los cálculos. Comenzamos simplificando (6.1) tal que

$$i\pi^{\mu\nu} = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^2 \left[\frac{(2k-p)^\mu(2k-p)^\nu}{(k^2-m^2)[(k-p)^2-m^2]} - \frac{2g^{\mu\nu}}{k^2-m^2} \right]. \quad (6.2)$$

Del hecho que $(k-p)^2 = k^2 - 2k \cdot p + p^2$ y $(2k-p)^\mu = 2k^\mu - p^\mu$ obtenemos

$$\begin{aligned} i\pi^{\mu\nu} &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^2 \left[\frac{-2g^{\mu\nu}[(k-p)^2-m^2] + (2k-p)^\mu(2k-p)^\nu}{(k^2-m^2)[(k-p)^2-m^2]} \right] \\ &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^2 \left[\frac{-2g^{\mu\nu}[k^2-2k \cdot p+p^2-m^2] + 4k^\mu k^\nu - 2k^\mu p^\nu - 2k^\nu p^\mu + p^\mu p^\nu}{(k^2-m^2)[(k-p)^2-m^2]} \right]. \end{aligned}$$

Las integrales a calcular son de la forma:

$$J_0 = \int \frac{d^d k}{(k^2-m^2)[(k-p)^2-m^2]}, \quad (6.3)$$

$$J_1^\nu = \int \frac{d^d k k^\nu}{(k^2-m^2)[(k-p)^2-m^2]}, \quad (6.4)$$

$$J_2^{\mu\nu} = \int \frac{d^d k k^\mu k^\nu}{(k^2-m^2)[(k-p)^2-m^2]}, \quad (6.5)$$

$$J_3 = \int \frac{d^d k k^2}{(k^2-m^2)[(k-p)^2-m^2]}, \quad (6.6)$$

Para calcular la integral J_0 usamos (A.15). Entonces

$$J_0 = \int_0^1 dx \int d^d k \frac{1}{[x[(k-p)^2-m^2] + (1-x)(k^2-m^2)]^2}. \quad (6.7)$$

Definamos

$$\begin{aligned}
D &= x[(k-p)^2 - m^2] + (1-x)(k^2 - m^2) \\
&= x[k^2 - 2k \cdot p + p^2 - m^2] + (1-x)k^2 - m^2(1-x) \\
&= k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - m^2 .
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Sea $w = k - px$ entonces $k = w + px$. Sustituyendo éste cambio de variable en (6.8) y posteriormente en (6.7) obtenemos

$$J_0 = \int_0^1 dx \int d^D w \frac{1}{[w^2 + p^2 x(1-x) - m^2]^2} . \tag{6.9}$$

Esta integral tiene la forma de (A.8) con $n = 2$ y $s = -p^2 x(1-x) + m^2$. Entonces

$$J_0 = i\pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2) \int_0^1 dx [-p^2 x(1-x) + m^2]^{D/2-2} . \tag{6.10}$$

Para calcular las integrales restantes transformamos el denominador a la forma (6.8). Por ejemplo, para calcular J_1^ν transformamos el denominador y usamos la integral de Feynman (A.15) de manera que

$$J_1^\nu = \int_0^1 dx \int d^D k \frac{k^\nu}{[k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - m^2]^2} . \tag{6.11}$$

Consideremos la siguiente integral [10]

$$\int d^D p \frac{p_\mu}{(p^2 + 2p \cdot q - t^2)^n} = -\frac{i\pi^{D/2} \Gamma(n - D/2) q_\mu}{\Gamma(n) (-q^2 - t^2)^{n-D/2}} \tag{6.12}$$

que es la generalización en D dimensiones de (A.5), la cual aplicamos a J_1^ν con $n = 2$:

$$J_1^\nu = i\pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2) p^\nu \int_0^1 dx \frac{x}{(-x^2 p^2 + xp^2 - m^2)^{2-D/2}} . \tag{6.13}$$

Para calcular $J_2^{\mu\nu}$ usamos la siguiente integral [10]

$$\begin{aligned}
\int d^D p \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 + 2p \cdot q - t^2)^n} &= \frac{i\pi^{D/2}}{\Gamma(n) (-q^2 - t^2)^{n-D/2}} \left[q_\mu q_\nu \Gamma(n - D/2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (-q^2 - t^2) \Gamma(n - 1 - D/2) \right]
\end{aligned} \tag{6.14}$$

que es la generalización en D dimensiones de (A.6) con $n = 2$. Entonces:

$$\begin{aligned}
J_2^{\mu\nu} &= i\pi^{D/2} p^\mu p^\nu \Gamma(2 - D/2) \int_0^1 dx x^2 (-p^2 x^2 - m^2 + xp^2)^{D/2-2} \\
&\quad + \frac{i}{2} \pi^{D/2} g^{\mu\nu} \Gamma(1 - D/2) \int_0^1 dx (-p^2 x^2 - m^2 + xp^2)^{D/2-1} .
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Hacemos una contracción con $g^{\mu\nu}$ en la integral (6.14), tal que,

$$\int d^D p \frac{p^2}{(p^2 + 2p \cdot q - t^2)^n} = \frac{i\pi^{D/2}}{\Gamma(n)(-q^2 - t^2)^{n-D/2}} \left[q^2 \Gamma(n - D/2) + \frac{D}{2} (-q^2 - t^2) \Gamma(n - 1 - D/2) \right], \quad (6.16)$$

la cual aplicamos a J_3 con $n = 2$:

$$J_3 = i\pi^{D/2} p^2 \Gamma(2 - D/2) \int_0^1 dx x^2 (-p^2 x^2 - m^2 + xp^2)^{D/2-2} + \frac{iD}{2} \pi^{D/2} \Gamma(1 - D/2) \int_0^1 dx (-p^2 x^2 - m^2 + xp^2)^{D/2-1}. \quad (6.17)$$

Después de simplificar y realizar algunas operaciones algebraicas obtenemos que *el propagador fotónico* a primer orden en D dimensiones es:

$$i\pi^{\mu\nu} = \frac{e^2 i\pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \Gamma(2 - D/2) p^2 \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - g^{\mu\nu} \right) \int_0^1 \frac{(4x^2 - 4x + 1) dx}{(-p^2 x(1-x) + m^2)^{2-D/2}}. \quad (6.18)$$

Solo falta una integral por calcularse.

6.2.1. El Propagador Fotónico en 3 Dimensiones

Ahora vamos a calcular (6.18) en $D = 3$:

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{e^2 \pi^2}{(2\pi)^3} p^2 \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - g^{\mu\nu} \right) \int_0^1 \frac{(4x^2 - 4x + 1) dx}{(-p^2 x(1-x) + m^2)^{1/2}} \quad (6.19)$$

Para resolver las integrales en la variable x usamos las siguientes integrales¹

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{R}} &= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(2\sqrt{cR} + 2cx + b) \quad [c > 0] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{senh}^{-1} \left(\frac{2cx + b}{\sqrt{\Delta}} \right) \quad [c > 0, \Delta > 0] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(2cx + b) \quad [c > 0, \Delta = 0] \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{2cx + b}{\sqrt{-\Delta}} \right) \quad [c < 0, \Delta < 0]
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{R}} = \frac{\sqrt{R}}{c} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{\sqrt{R}} \tag{6.21}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} = \left(\frac{x}{2c} - \frac{3b}{4c^2} \right) \sqrt{R} + \left(\frac{3b^2}{8c^2} - \frac{a}{2c} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{R}} \tag{6.22}$$

donde $R = a + bx + cx^2$ y $\Delta = 4ac - b^2$. Así, tenemos que

$$\int_0^1 \frac{dx}{(m^2 - p^2x + p^2x^2)^{1/2}} = \frac{2}{p} \operatorname{senh}^{-1} \left(\frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right), \tag{6.23}$$

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(m^2 - p^2x + p^2x^2)^{1/2}} = \frac{1}{p} \operatorname{senh}^{-1} \left(\frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right), \tag{6.24}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(m^2 - p^2x + p^2x^2)^{1/2}} = \frac{m}{2p^2} + \left(\frac{3}{4p} - \frac{m^2}{p^3} \right) \operatorname{senh}^{-1} \left(\frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right).$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{(4x^2 - 4x + 1)dx}{(-p^2x(1-x) + m^2)^{1/2}} = \frac{2m}{p^2} + \frac{p^2 - 4m^2}{p^3} \operatorname{senh}^{-1} \left(\frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right). \tag{6.25}$$

Ahora usamos las siguientes identidades para transformar (6.25):

$$\tanh^{-1} x = \operatorname{senh}^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{6.26}$$

$$\tanh^{-1} \left(\frac{p}{2m} \right) = \frac{1}{i} \operatorname{arctan} \left(\frac{ip}{2m} \right). \tag{6.27}$$

¹Estas integrales las tomamos de la referencia [1].

Entonces

$$\int_0^1 \frac{(4x^2 - 4x + 1)dx}{(-p^2x(1-x) + m^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{-p^2}} \left[\frac{m^2 - p^2/4}{-p^2/4} \arctan \sqrt{-\frac{p^2}{4m^2}} + \sqrt{\frac{4m^2}{-p^2}} \right]. \quad (6.28)$$

Finalmente, el propagador fotónico a primer orden en $D = 3$ es:

$$i\pi^{\mu\nu} = \frac{i\alpha}{2} [p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2] \frac{1}{\sqrt{-p^2}} \left[\frac{m^2 - p^2/4}{-p^2/4} \arctan \sqrt{-\frac{p^2}{4m^2}} + \sqrt{\frac{4m^2}{-p^2}} \right] \quad (6.29)$$

donde $\alpha = e^2/4\pi$ es la constante de la estructura fina. Cuando $m = 0$ tenemos:

$$i\pi^{\mu\nu} = \frac{\pi\alpha}{4} [p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2] \frac{1}{\sqrt{-p^2}}. \quad (6.30)$$

6.2.2. Regularización

Calculamos (6.18) en $D = 4 - 2\epsilon$. En sí queremos separar esta integral en una parte finita y una parte infinita como lo hicimos en el capítulo anterior para el propagador escalar. Comenzamos con

$$i\pi^{\mu\nu} = \frac{i\epsilon^2 \pi^{D/2}}{(2\pi)^D} \Gamma(2 - D/2) p^2 \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - g^{\mu\nu} \right) \int_0^1 \frac{(4x^2 - 4x + 1)dx}{(-p^2x(1-x) + m^2)^{2-D/2}}. \quad (6.31)$$

Sustituyendo $D = 4 - 2\epsilon$ tenemos:

$$i\pi^{\mu\nu} = \frac{i\epsilon^2}{16(2)^{-2\epsilon} \pi^2 \pi^{-\epsilon}} \Gamma(\epsilon) (p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) \int_0^1 \frac{(4x^2 - 4x + 1)dx}{(-p^2x(1-x) + m^2)^\epsilon}. \quad (6.32)$$

Usamos la expansión de la función Gamma (A.23) tal que

$$i\pi^{\mu\nu} = \frac{i\epsilon^2}{16\pi^2} [1 + \epsilon \ln 4] [1 + \epsilon \ln \pi] \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right] (p^{\mu\nu} - p^2 g^{\mu\nu}) \times \int_0^1 (4x^2 - 4x + 1) (1 - \epsilon \ln(m^2 - p^2 x(1-x))) dx. \quad (6.33)$$

Despreciamos términos mayores del orden $\mathcal{O}(\epsilon)$. Obtenemos:

$$i\pi^{\mu\nu} = \frac{i\epsilon^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{3\epsilon} - \frac{\gamma}{3} - [p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}] \int_0^1 (4x^2 - 4x + 1) \ln(m^2 - p^2 x(1-x)) dx \right]$$

Entonces

$$i\pi^{\mu\nu} = \frac{i\epsilon^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{3\epsilon} \right) [p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}] + \text{cantidad finita}. \quad (6.34)$$

Hemos logrado separar la integral inicial en una parte finita y una parte infinita.

6.3. Método Alternativo

Ahora vamos a calcular nuevamente el propagador fotónico en D dimensiones pero de otra manera. Regresamos a la ecuación (6.1) la cual escribimos de la siguiente manera:

$$i\pi^{\mu\nu} = e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{[4k^\mu k^\nu - 2k^\mu p^\nu - 2k^\nu p^\mu + p^\mu p^\nu]}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} - 2e^2 g^{\mu\nu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} i\pi^{\mu\nu} = & 4e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} - 2e^2 p^\nu \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \\ & - 2e^2 p^\mu \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\nu}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} - 2e^2 g^{\mu\nu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\ & + e^2 p^\mu p^\nu \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} . \end{aligned} \quad (6.36)$$

Primero evaluamos

$$J^{\mu\nu} = \int d^D k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} . \quad (6.37)$$

Dado que $J^{\mu\nu}$ solo puede depender de $p^\mu p^\nu$ y $g^{\mu\nu}$, y como es simétrico bajo el intercambio $\mu \leftrightarrow \nu$, la podemos escribir de la siguiente manera general.

$$J^{\mu\nu} = \int d^D k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \equiv a \left[\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - \frac{1}{D} g^{\mu\nu} \right] + b g^{\mu\nu} \quad (6.38)$$

donde tenemos que determinar a y b que serán funciones de k y m . Multiplicamos por $g_{\mu\nu}$ en ambos lados de la ecuación, (6.38):

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} J^{\mu\nu} &= \int d^D k \frac{k^2}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} = \int d^D k \frac{k^2 - m^2 + m^2}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \\ &= \int \frac{d^D k}{(k-p)^2 - m^2} + m^2 \int \frac{d^D k}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} . \end{aligned} \quad (6.39)$$

También:

$$g_{\mu\nu} J^{\mu\nu} = b g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = b D . \quad (6.40)$$

Entonces

$$b = \frac{1}{D} \int \frac{d^D k}{(k-p)^2 - m^2} + \frac{m^2}{D} \int \frac{d^D k}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} . \quad (6.41)$$

Ahora multiplicamos la ecuación (6.38) por $p_\mu p_\nu$ en ambos lados de la ecuación:

$$p_\mu p_\nu J^{\mu\nu} = \int d^D k \frac{(k \cdot p)(k \cdot p)}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned}
p_\mu p_\nu J^{\mu\nu} &= = \frac{1}{2} \int d^D k \frac{(k \cdot p)[k^2 + p^2 - (k-p)^2]}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} = \frac{1}{2} \int d^D k \frac{k \cdot p}{[(k-p)^2 - m^2]} \\
&+ \frac{p^2}{2} \int d^D k \frac{k \cdot p}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} - \frac{1}{2} \int d^D k \frac{k \cdot p}{(k^2 - m^2)}. \quad (6.43)
\end{aligned}$$

La última integral es cero porque es una integral impar:

$$\int d^D k \frac{k \cdot p}{(k^2 - m^2)} = p^\mu \int d^D k \frac{k^\mu}{(k^2 - m^2)} = 0. \quad (6.44)$$

Hacemos el cambio de variable $w = k - p$ en la primer integral de (6.43), tal que,

$$\int d^D k \frac{k \cdot p}{[(k-p)^2 - m^2]} = \int d^D w \frac{(p+w) \cdot p}{w^2 - m^2} = p^2 \int d^D w \frac{1}{w^2 - m^2}. \quad (6.45)$$

La segunda integral es equivalente a

$$\int d^D k \frac{k \cdot p}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} = \frac{1}{2} \int d^D k \frac{k^2 + p^2 - (k-p)^2}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]}.$$

Después de sumar y restar m^2 y simplificar obtenemos:

$$\int d^D k \frac{k \cdot p}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} = \frac{p^2}{2} \int d^D k \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]}.$$

Entonces la ecuación (6.43) la podemos escribir como:

$$p_\mu p_\nu J^{\mu\nu} = \frac{p^2}{2} \int d^D k \frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{p^4}{4} \int d^D k \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]}. \quad (6.46)$$

Por otro lado, también tenemos que

$$p_\mu p_\nu J^{\mu\nu} = a \left[p^2 - \frac{p^2}{D} \right] + b p^2 = a p^2 \left(1 - \frac{1}{D} \right) + b p^2. \quad (6.47)$$

Por lo tanto,

$$a = \frac{D-2}{2(D-1)} \int d^D k \frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{p^2 D - 4m^2}{4(D-1)} \int d^D k \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]}. \quad (6.48)$$

La ecuación (6.47) ha sido determinada en términos de a y b que a su vez estas están dadas en términos de integrales las cuales vamos a calcular más adelante. Antes consideremos la integral

$$\int d^D k \frac{k^\mu}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]}. \quad (6.49)$$

Por el hecho de que esta integral depende únicamente de p^μ , la podemos escribir como

$$\int d^D k \frac{k^\mu}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} \equiv c p^\mu . \quad (6.50)$$

Para encontrar c multiplicamos por p_μ ambos lados de la ecuación (6.50):

$$c p^2 = \int d^D k \frac{k \cdot p}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} . \quad (6.51)$$

Entonces

$$c = \frac{1}{2p^2} \int d^D k \frac{k^2 + p^2 - (k - p)^2}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} = \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} . \quad (6.52)$$

Así

$$\int d^D k \frac{k^\mu}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} = \frac{1}{2} \int d^D k \frac{p^\mu}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} , \quad (6.53)$$

$$\int d^D k \frac{k^\nu}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} = \frac{1}{2} \int d^D k \frac{p^\nu}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} . \quad (6.54)$$

Así, la corrección al propagador fotónico a nivel de un lazo ecuación (6.36) la podemos escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} i\pi^{\mu\nu} = & \frac{4e^2}{(2\pi)^D} \left\{ \left[\frac{D-2}{2(D-1)} J(1, 0; m, m) + \frac{1}{D-1} \left(\frac{p^2 D - 4m^2}{4} \right) J(1, 1; m, m) \right] \times \right. \\ & \left. \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - \frac{1}{D} g^{\mu\nu} \right) + \frac{g^{\mu\nu}}{D} J(1, 0; m, m) + \frac{m^2 g^{\mu\nu}}{D} J(1, 1; m, m) \right\} \\ & - \frac{e^2}{(2\pi)^D} p^\mu p^\nu J(1, 1; m, m) - \frac{2e^2}{(2\pi)^D} g^{\mu\nu} J(1, 0; m, m) , \end{aligned} \quad (6.55)$$

donde hemos usado la notación

$$J(\nu_1, \nu_2; m_1, m_2) = \int \frac{d^D k}{(k^2 - m_1^2)^{\nu_1} [(k - p)^2 - m_2^2]^{\nu_2}} . \quad (6.56)$$

Después de simplificar y realizar algunas operaciones algebraicas llegamos a que

$$\begin{aligned} i\pi^{\mu\nu} = & \frac{e^2}{(2\pi)^D} \frac{1}{D-1} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - g^{\mu\nu} \right) \left[2(D-2) J(1, 0; m, m) \right. \\ & \left. + (p^2 - 4m^2) J(1, 1; m, m) \right] . \end{aligned} \quad (6.57)$$

donde [17],

$$\begin{aligned}
J(1, 1; m, m) &= i\pi D/2 (-p^2)^{D/2-2} \left[\frac{\Gamma(\frac{D}{2}-1)\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(\frac{D}{2})} \lambda^{D-3} \right. \\
&\quad \left. -\Gamma(1-D/2)(1-\lambda) \left(-\frac{m^2}{p^2}\right)^{\frac{D}{2}-2} {}_2F_1\left(1, 2-\frac{D}{2}; \frac{D}{2}; \frac{(1-\lambda)^2}{4m^2/p^2}\right) \right] \\
J(1, 0; m, m) &= -i\pi^{D/2} \Gamma(1-D/2) (m^2)^{\frac{D}{2}-1} \tag{6.58}
\end{aligned}$$

con $\lambda = \sqrt{\frac{4m^2-p^2}{-p^2}}$. Para el caso $D = 3$ la ecuación (6.57) se reduce a:

$$\begin{aligned}
i\pi^{\mu\nu} &= \frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{3-1} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - g^{\mu\nu} \right) \left[2J(1, 0; m, m) + (p^2 - 4m^2)J(1, 1; m, m) \right] \\
&= \frac{e^2}{(2\pi)^3} \left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - g^{\mu\nu} \right) \left[J(1, 0; m, m) + \frac{p^2 - 4m^2}{2} J(1, 1; m, m) \right], \tag{6.59}
\end{aligned}$$

donde $J(1, 1; m, m) = J_0$ solo que ahora en 3 dimensiones:

$$\begin{aligned}
J(1, 1; m, m) &= \int \frac{d^3 k}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \\
&= i\pi^{3/2} \Gamma(2-3/2) \int_0^1 dx [-p^2 x(1-x) + m^2] \\
&= \frac{2i\pi^2}{\sqrt{-p^2}} \arctan \left(\sqrt{-\frac{p^2}{4m^2}} \right), \tag{6.60}
\end{aligned}$$

y

$$J(1, 0; m, m) = \int \frac{d^3 k}{(k^2 - m^2)} = (-1)i\pi^{3/2} \Gamma(1-3/2) (m^2)^{\frac{3}{2}-1} = 2i\pi^2 m. \tag{6.61}$$

Por lo tanto,

$$i\pi^{\mu\nu} = \frac{i\alpha}{2} (p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2) \frac{1}{\sqrt{-p^2}} \left[\sqrt{\frac{4m^2}{-p^2}} + \frac{m^2 - p^2/4}{-p^2/4} \sqrt{\frac{-p^2}{4m^2}} \right]. \tag{6.62}$$

Este resultado coincide con el de la ecuación (6.29).

6.4. Identidad de Ward

La Identidad de Ward para el propagador fotónico nos permite escribir el propagador de la siguiente manera:

$$\Delta_{\mu\nu}(p^2) = \underbrace{\Delta_{\mu\nu}^T \pi(p^2)}_{\pi_{\mu\nu}} - \xi \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \quad (6.63)$$

donde

$$\Delta_{\mu\nu}^T = [g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu] \quad \text{y} \quad \pi(p^2) \sim \alpha^0 + \alpha^1 + \alpha^2 + \dots \quad (6.64)$$

Que nos quiere decir que la parte longitudinal no tiene contribuciones de ningún orden en la teoría de perturbaciones. Como una consecuencia de esta identidad $i\pi^{\mu\nu} \propto (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu)$, es decir, $\pi^{\mu\nu}$ es transversal $p_\mu (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) = p^\nu p^2 - p^2 p^\nu = 0$, a todos los ordenes en teorías de perturbaciones. Esto es lo que hemos logrado a nivel de un lazo [ver ec. (6.57)]. Es importante notar que la interacción de 4-puntos es crucial para obtener la estructura tensorial requerida de $i\pi^{\mu\nu}$. En otras palabras, esta interacción es necesaria para obtener la invariancia de norma.

6.5. Propagador Fotónico No Perturbativo

En esta sección nos interesa saber la forma no perturbativa del propagador del fotón para $D = 3$ cuando sumamos todos los diagramas con burbujas. Hemos obtenido que el propagador fotónico a un lazo en $D = 3$ cuando $m = 0$ es:

$$i\pi^{\mu\nu} = \frac{i\pi\alpha}{4} \left[p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2 \right] \frac{1}{\sqrt{-p^2}} \quad (6.65)$$

o equivalentemente,

$$i\pi^{\mu\nu} = i \left[g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right] \frac{\pi\alpha}{4} \sqrt{-p^2}, \quad (6.66)$$

que corresponde al diagrama representado en la figura 6.1. En Electrodinámica Cuántica Escalar el propagador del fotón a dos lazos es (tomando en cuenta solo burbujas de escalares),

$$i\Delta^\mu = i\Delta_0^{\mu\nu} + i\Delta_{0\alpha}^\mu (i\pi^{\alpha\beta}) i\Delta_{0\beta}^\nu, \quad (6.67)$$

donde

$$i\Delta_0^{\mu\nu} = -\frac{i}{p^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right). \quad (6.68)$$

Esquemáticamente representamos esta corrección en la figura 6.3. Hemos visto anteriormente que la parte que es proporcional a ξ no se modifica en la teoría de perturbación.

Por lo tanto, no consideramos el término proporcional a ξ . Entonces,

$$\begin{aligned}
i\Delta^{\mu\nu} &= i \left[-\frac{1}{p^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) + \frac{i}{p^2} \left(g_\alpha^\mu - \frac{p^\mu p_\alpha}{p^2} \right) i \left(g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{p^2} \right) \frac{\pi\alpha\sqrt{-p^2}}{4} \times \right. \\
&\quad \left. \left(-\frac{1}{p^2} \right) \left(g_\beta^\nu - \frac{p_\beta p^\nu}{p^2} \right) \right] \\
&= i \left[-\frac{1}{p^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) + \frac{1}{p^4} \frac{\pi\alpha\sqrt{-p^2}}{4} \left(g_\alpha^\mu - \frac{p^\mu p_\alpha}{p^2} \right) \left(g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{p^2} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \left(g_\beta^\nu - \frac{p_\beta p^\nu}{p^2} \right) \right]. \tag{6.69}
\end{aligned}$$

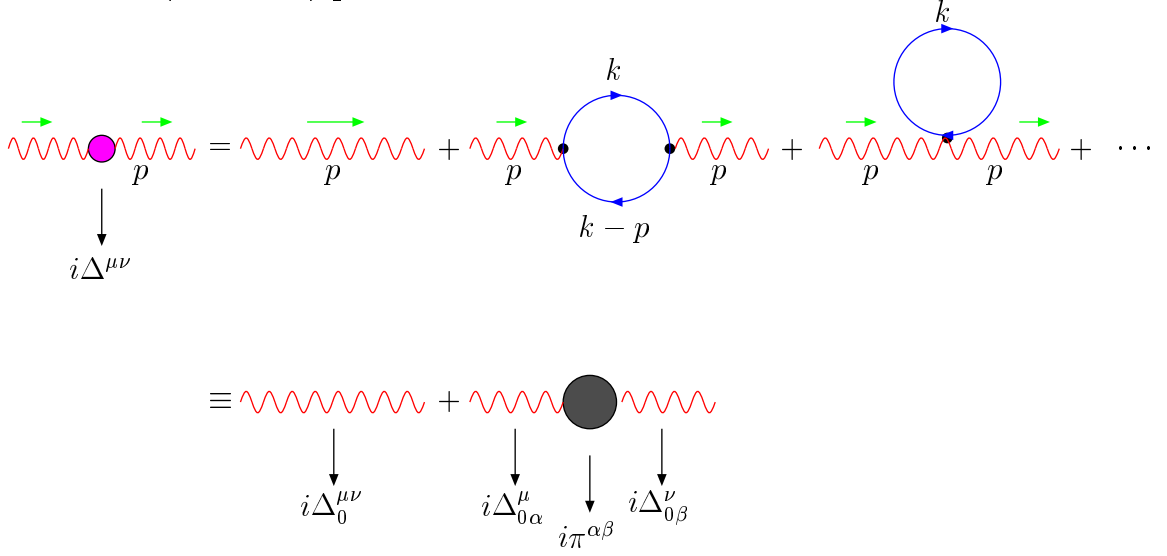


Figura 6.3: Corrección a segundo orden del propagador fotónico.

El producto de los dos últimos términos es igual a:

$$\left(g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{p^2} \right) \left(g_\beta^\nu - \frac{p_\beta p^\nu}{p^2} \right) = g^{\alpha\nu} - \frac{p^\alpha p^\nu}{p^2} - \frac{p^\alpha p^\nu}{p^2} + \frac{p^2 p^\alpha p^\nu}{p^4} = g^{\alpha\nu} - \frac{p^\alpha p^\nu}{p^2}. \tag{6.70}$$

Entonces,

$$i\Delta^{\mu\nu} = i \left[-\frac{1}{p^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) + \frac{1}{p^4} \frac{\pi\alpha\sqrt{-p^2}}{4} \left(g_\alpha^\mu - \frac{p^\mu p_\alpha}{p^2} \right) \left(g^{\alpha\nu} - \frac{p^\alpha p^\nu}{p^2} \right) \right]. \tag{6.71}$$

De manera semejante el producto de los dos últimos términos es:

$$\left(g_\alpha^\mu - \frac{p^\mu p_\alpha}{p^2} \right) \left(g^{\alpha\nu} - \frac{p^\alpha p^\nu}{p^2} \right) = g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}. \tag{6.72}$$

Así,

$$i\Delta^{\mu\nu} = i \left[-\frac{1}{p^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) + \frac{1}{p^4} \frac{\pi\alpha\sqrt{-p^2}}{4} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) \right]. \quad (6.73)$$

Por lo tanto,

$$i\Delta^{\mu\nu} = -\frac{i}{p^2} \left[g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right] \left[1 + \frac{\pi}{4} \frac{\alpha}{\sqrt{-p^2}} \right]. \quad (6.74)$$

Si consideramos ordenes mayores tenemos que el propagador tomará la forma:

$$i\Delta^{\mu\nu} = i \left[\Delta_0^{\mu\nu} + i\Delta_{0\alpha}^\mu i\pi^{\alpha\beta} \Delta_{0\beta}^\nu + i\Delta_{0\alpha}^\mu i\pi^{\alpha\beta} i\Delta_{0\beta}^\gamma i\pi^{\gamma\delta} \Delta_{0\delta}^\nu + \dots \right] \quad (6.75)$$

Se puede verificar fácilmente que:

$$i\Delta^{\mu\nu} = -\frac{i}{p^2} \left[g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right] \left[1 + \frac{\pi}{4} \frac{\alpha}{\sqrt{-p^2}} + \left(\frac{\pi\alpha}{4\sqrt{-p^2}} \right)^2 + \dots \right]. \quad (6.76)$$

Que representamos esquematicamente en la figura 6.4.

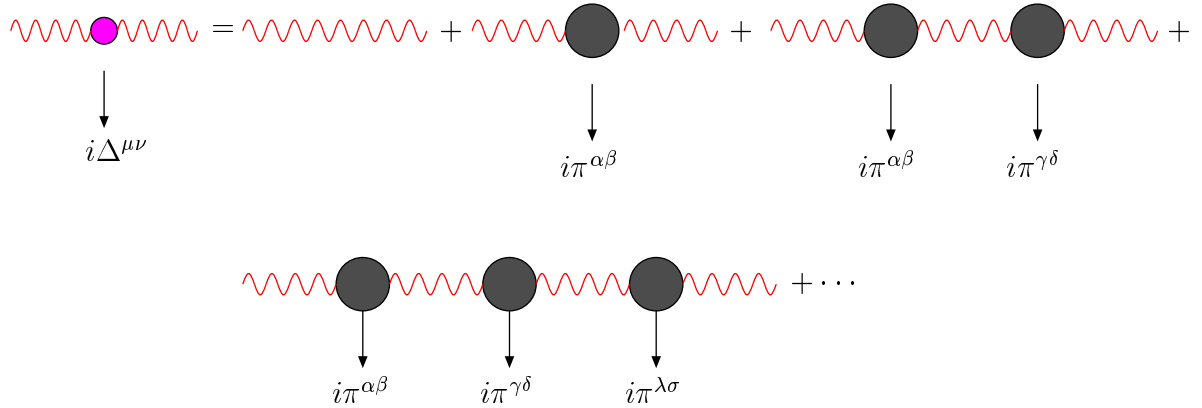


Figura 6.4: El propagador fotónico con burbujas sumadas.

Definamos $x = \frac{\pi}{4} \frac{\alpha}{\sqrt{-p^2}}$. Entonces, tomando en cuenta todos los ordenes, efectivamente lo que pasa es que

$$p^2 \rightarrow \frac{p^2}{[1 + x + x^2 + x^3 + \dots]} = p^2(1 - x). \quad (6.77)$$

Por lo tanto,

$$p^2 \rightarrow p^2 + \frac{1}{4} \pi\alpha\sqrt{-p^2}. \quad (6.78)$$

Usando la notación $p = \sqrt{-p^2}$,

$$i\Delta^{\mu\nu} = - \left[g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right] \frac{i}{p^2 + \frac{\pi\alpha}{4}p}. \quad (6.79)$$

Este es un comportamiento parecido al del fotón en QED espinorial en $D = 3$, [15, 16]. Para las ecuaciones de Schwinger-Dyson, este comportamiento ayuda a suavizar divergencias infrarojas para el propagador fermiónico en $D = 3$.

Capítulo 7

Vértices

7.1. Introducción

En éste capítulo vamos a calcular las correcciones los vértices de tres y cuatro puntos a primer orden, es decir, a un lazo. Las correcciones al vértice de 3-puntos vienen de la presencia de un fotón *virtual* adicional a los diagramas de Feynman como los que se muestran a continuación:

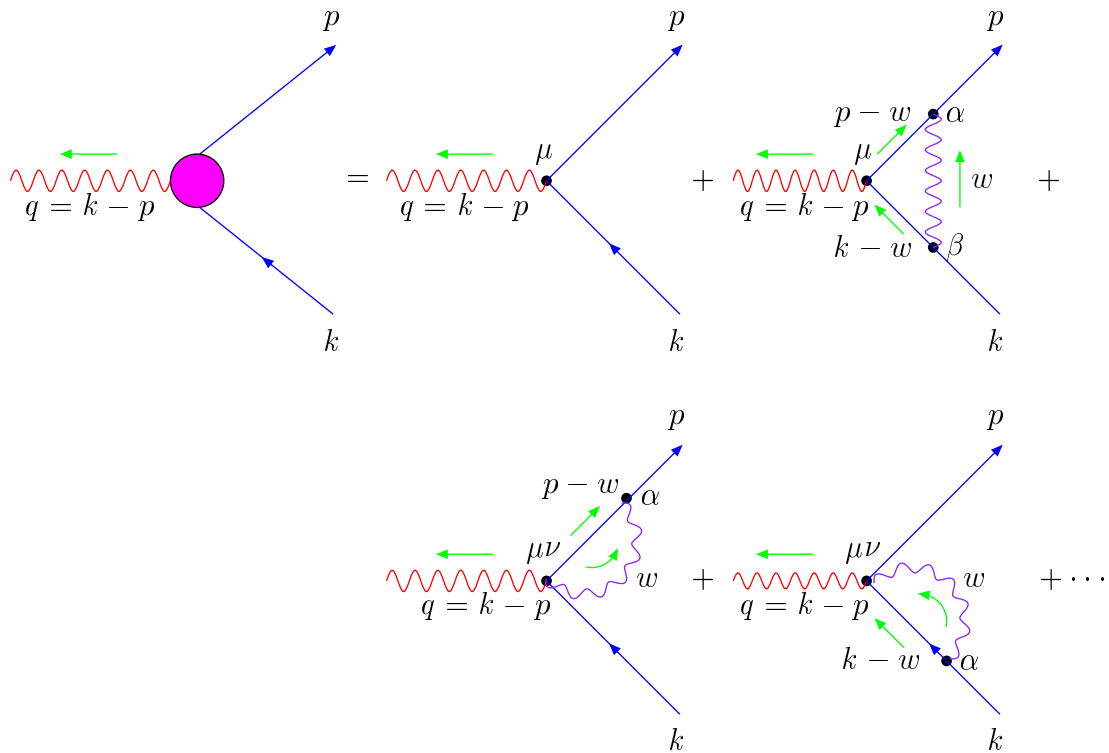


Figura 7.1: Correcciones al vértice de 3-puntos.

Si aplicamos las reglas de Feynman a los diagramas de la figura 7.1 tenemos que la *corrección al vértice de 3-puntos* a primer orden es:

$$\Lambda^\mu = \Lambda_1^\mu + \Lambda_2^\mu + \Lambda_3^\mu, \quad (7.1)$$

donde

$$-ie\Lambda_1^\mu = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [ie\Gamma^\alpha][iS(p-w)][-ie\Gamma^\mu][iS(k-w)][-ie\Gamma^\beta][i\Delta_{\alpha\beta}(w)], \quad (7.2)$$

$$-ie\Lambda_2^\mu = \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} [-ie\Gamma^\alpha(p-w, p)][iS(p-w)][i\Delta_{\alpha\nu}(w)][2ie^2 g^{\mu\nu}], \quad (7.3)$$

$$-ie\Lambda_3^\mu = \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} [-ie\Gamma^\alpha(k, k-w)][iS(k-w)][i\Delta_{\alpha\nu}(w)][2ie^2 g^{\mu\nu}]. \quad (7.4)$$

La corrección al vértice de 4-puntos se muestra a continuación

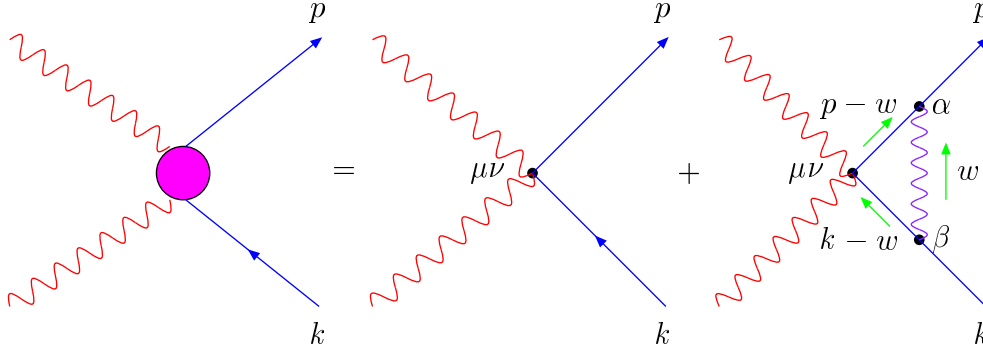


Figura 7.2: Correcciones al vértice de 4-puntos.

Aplicando las reglas de Feynman tenemos que la *corrección al vértice de 4-puntos* a primer orden es:

$$2ie^2\Gamma^{\mu\nu} = \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} (-ie\Gamma^\alpha)[iS(p-w)](2ie^2 g^{\mu\nu})[iS(k-w)](-ie\Gamma^\beta)i\Delta_{\alpha\beta}(w). \quad (7.5)$$

En las siguientes secciones vamos a calcular estas integrales explícitamente.

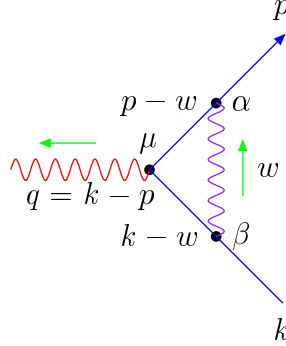
7.2. El Vértice de 3-Puntos a un Lazo

7.2.1. Regularización

En esta sección vamos a calcular el vértice de 3-puntos en la norma de Feynman en $D = 4 - 2\epsilon$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Primer Diagrama

Primero vamos a resolver la integral correspondiente al diagrama:



$$-ie\Lambda_1^\mu = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [ie\Gamma^\alpha][iS(p-w)][-ie\Gamma^\mu][iS(k-w)][-ie\Gamma^\beta][i\Delta_{\alpha\beta}(w)] , \quad (7.6)$$

Sustituyendo los valores de S , Γ^μ y $\Delta_{\alpha\beta}$, tenemos,

$$\begin{aligned} -i\Lambda_1^\mu &= -e^2 \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} (p+p-w)^\alpha \frac{1}{(p-w)^2 - m^2} (k-w+p-w)^\mu \frac{1}{(k-w)^2 - m^2} \times \\ &\quad (k+k-w)^\beta \frac{1}{w^4} [w^2 g_{\alpha\beta} + (1-\xi)w_\alpha w_\beta] . \end{aligned} \quad (7.7)$$

Podemos escribir esta expresión como:

$$\Lambda_1^\mu = -ie^2 \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{(2p-w)^\alpha (k+p-2w)^\mu (2k-w)^\beta}{w^4 [(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} [w^2 g_{\alpha\beta} + (1-\xi)w_\alpha w_\beta] . \quad (7.8)$$

Sea que tomamos $\xi = 1$ (Norma de Feynman):

$$\Lambda_1^\mu = -ie^2 \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{(2p-w)^\alpha (k+p-2w)^\mu (2k-w)^\beta}{w^2 [(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} g_{\alpha\beta} . \quad (7.9)$$

El numerador lo podemos escribir como:

$$\begin{aligned} &(2p-w)^\alpha (k+p-2w)^\mu (2k-w)^\beta g_{\alpha\beta} \\ &= (2p-w) \cdot (2k-w) (k+p-2w)^\mu \\ &= [4k \cdot p - 2(k+p) \cdot w + w^2][(k+p)^\mu - 2w^\mu] \\ &= 4k \cdot p (k+p)^\mu + [-8k \cdot p g^{\mu\nu} + 2(k+p)^\mu (k+p)^\nu] w_\nu + 4(k+p)_\nu w^\mu w^\nu \\ &\quad + (k+p)^\mu w^2 - 2w^2 w^\mu . \end{aligned} \quad (7.10)$$

Entonces

$$\begin{aligned}\Lambda_1^\mu &= -\frac{ie^2}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{4k \cdot p(k+p)^\mu + [2(k+p)^\mu(k+p)^\nu - 8k \cdot pg^{\mu\nu}]w_\nu}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} \\ &\quad - \frac{ie^2}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{4(k+p)_\nu w^\mu w^\nu + (k+p)^\mu w^2 - 2w^2 w^\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]}.\end{aligned}\quad (7.11)$$

Usaremos la integral de Feynman (A.16) con $a = w^2$, $b = (k-w)^2 - m^2$ y $c = (p-w)^2 - m^2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} = \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{\{w^2(1-x-y) + [(k-w)^2 - m^2]x + [(p-w)^2 - m^2]y\}^3}.\end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned}D &= w^2(1-x-y) + [(k-w)^2 - m^2]x + [(p-w)^2 - m^2]y \\ &= w^2 - m^2(x+y) - 2w \cdot (kx + py) + k^2x + p^2y.\end{aligned}\quad (7.12)$$

Sea que $w' = w - kx - py$ entonces $w = w' + py + kx$. Así, la ecuación (7.12) nos queda como:

$$\begin{aligned}D &= [w' + py + kx]^2 - m^2(x+y) - 2(w' + py + kx) \cdot (kx + py) + k^2x + p^2y \\ &= w'^2 - m^2(x+y) - (py + kx)^2 + k^2x + p^2y \\ &= w'^2 - m^2(x+y) + p^2y(1-y) + k^2x(1-x) - 2xyp \cdot k.\end{aligned}\quad (7.13)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} = \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[w'^2 - m^2(x+y) + p^2y(1-y) + k^2x(1-x) - 2xyp \cdot k]^3}.\end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (7.11) obtenemos:

$$\begin{aligned}\Lambda_1^\mu &= -\frac{2ie^2}{(2\pi)^D} \times \\ &\left\{ \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^D w' \frac{4k \cdot p(k+p)^\mu + [2(k+p)^\mu(k+p)^\nu - 8k \cdot pg^{\mu\nu}]w_\nu}{[w'^2 - m^2(x+y) + p^2y(1-y) + k^2x(1-x) - 2xyp \cdot k]^3} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^D w \frac{4(k+p)_\nu w^\mu w^\nu + (k+p)^\mu w^2 - 2w^2 w^\mu}{[w'^2 - m^2(x+y) + p^2y(1-y) + k^2x(1-x) - 2xyp \cdot k]^3} \right\}.\end{aligned}$$

Las diferentes integrales a calcular son de la forma:

$$J_0 = \int d^D w' \frac{1}{[w'^2 - m^2(x+y) + p^2y(1-y) + k^2x(1-x) - 2xyp \cdot k]^3}, \quad (7.14)$$

$$J_1^{\nu\mu} = \int d^D w' \frac{w'^{\nu} w'^{\mu}}{[w'^2 - m^2(x+y) + p^2y(1-y) + k^2x(1-x) - 2xyp \cdot k]^3}, \quad (7.15)$$

$$J_2 = \int d^D w' \frac{w'^2}{[w'^2 - m^2(x+y) + p^2y(1-y) + k^2x(1-x) - 2xyp \cdot k]^3}. \quad (7.16)$$

Usaremos las fórmulas (A.8) y (6.14) con $n = 3$ para la primera y la segunda integral respectivamente. Para la tercera integral observemos que

$$\begin{aligned} \int d^D w \frac{w^2}{(w^2 - s)^n} &= \int d^D w \frac{w^2 - s + s}{(w^2 - s)^n} = \int d^D w \frac{1}{(w^2 - s)^{n-1}} \\ &+ s \int d^D w \frac{1}{(w^2 - s)^n}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Para nuestro caso, $n = 3$ y $s = m^2(x+y) - p^2y(1-y) - k^2x(1-x) + 2xyp \cdot k$. Entonces

$$\begin{aligned} J_0 &= -i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \left[m^2(x+y) - p^2y(1-y) - k^2x(1-x) + 2xyp \cdot k \right]^{\frac{D}{2}-3}, \\ J_1^{\nu\mu} &= \frac{i\pi^{D/2}}{4} g^{\nu\mu} \Gamma(2 - D/2) \frac{1}{[m^2(x+y) - p^2y(1-y) - k^2x(1-x) + 2xyp \cdot k]^{2-\frac{D}{2}}}, \\ J_2 &= i\pi^{D/2} \left[m^2(x+y) - p^2y(1-y) - k^2x(1-x) + 2xyp \cdot k \right]^{\frac{D}{2}-n+1} \times \\ &\left[(-1)^{n-1} \frac{\Gamma(n-1-\frac{D}{2})}{\Gamma(n-1)} + (-1)^n \frac{\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)} \right]. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Después de simplificar y realizar algunas operaciones algebraicas obtenemos que la corrección al vértice Λ_1^μ en la norma de Feynman es:

$$\begin{aligned} \Lambda_1^\mu &= \text{cantidad finita} + \frac{2e^2}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [k^\mu(2-3x) + p^\mu(2-3y)] \times \\ &\left\{ \frac{\pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2)}{[m^2(x+y) - p^2y(1-y) - k^2x(1-x) + 2xyp \cdot k]^{2-\frac{D}{2}}} \right\}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

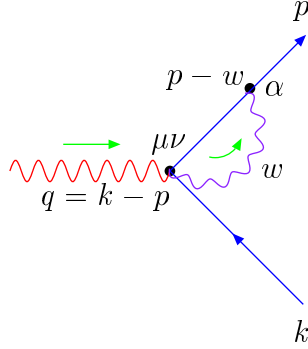
Aclaremos que cuando hablamos de las partes finitas e infinitas, tenemos en mente de que al final tomaremos el límite de $D \rightarrow 4$.

Segundo Diagrama

Ahora vamos a calcular la integral Λ_2^μ :

$$\begin{aligned} -ie\Lambda_2^\mu &= \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} [-ie\Gamma^\alpha(p-w, p)][iS(p-w)][i\Delta_{\alpha\nu}(w)][2ie^2 g^{\mu\nu}] \\ &= \frac{2e^3}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(2p-w)_\alpha}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} \left[g^{\alpha\mu} - (1-\xi)\frac{w^\alpha w^\mu}{w^2} \right], \end{aligned} \quad (7.20)$$

correspondiente al diagrama:



Tomamos $\xi = 1$:

$$-ie\Lambda_2^\mu = \frac{2e^3}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(2p-w)^\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2]}. \quad (7.21)$$

Sea que $w \rightarrow p-w$ entonces

$$\begin{aligned} -ie\Lambda_2^\mu &= \frac{2e^3}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(2p-p+w)^\mu}{(p-w)^2[(p-p+w)^2 - m^2]} \\ &= \frac{2e^3}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(p+w)^\mu}{(w-p)^2[w^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Aplicando parametrización de Feynman obtenemos:

$$-ie\Lambda_2^\mu = \int_0^1 dx \int d^D w \frac{(2p-p+w)^\mu}{[x(w-p)^2 + (1-x)(w^2 - m^2)]^2}. \quad (7.23)$$

Hacemos el cambio de variable $w' = w - px$ entonces $w = w' + px$. Así,

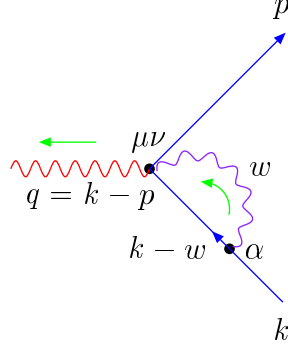
$$\begin{aligned} -ie\Lambda_2^\mu &= \frac{2e^3}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \int d^D w' \frac{(1-x)p^\mu + w'^\mu}{[w'^2 + p^2 x(1-x) - m^2(1-x)]^2} \\ &= \frac{2e^3}{(2\pi)^D} p^\mu \int_0^1 dx (1+x) \int d^D w \frac{1}{[w^2 + p^2 x(1-x) - m^2(1-x)]^2} \\ &= \frac{2ie^3 \pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2)}{(2\pi)^D} p^\mu \int_0^1 dx (1+x) [-p^2 x(1-x) + m^2(1-x)]^{\frac{D}{2}-2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la corrección al vértice Λ_2^μ en la norma de Feynman es:

$$\Lambda_2^\mu = -\frac{2e^2\pi^{D/2}\Gamma(2-D/2)}{(2\pi)^D}p^\mu \int_0^1 dx(1+x)[-p^2x(1-x) + m^2(1-x)]^{\frac{D}{2}-2}. \quad (7.24)$$

Tercer Diagrama

Por último vamos a calcular la corrección correspondiente al diagrama:



$$\begin{aligned} -ie\Lambda_3^\mu &= \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} [-ie\Gamma^\alpha(k, k-w)][iS(k-w)][i\Delta_{\alpha\nu}(w)][2ie^2 g^{\mu\nu}] \\ &= \frac{2e^3}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(2k-w)_\alpha}{w^2[(k-w)^2 - m^2]} \left[g^{\alpha\mu} - (1-\xi)\frac{w^\alpha w^\mu}{w^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Tomamos $\xi = 1$:

$$-ie\Lambda_3^\mu = \frac{2e^3}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(2k-w)^\mu}{w^2[(k-w)^2 - m^2]}. \quad (7.26)$$

Debido a la simetría de esta integral con Λ_2^μ tenemos que la corrección al vértice para Λ_3^μ en la norma de Feynman es:

$$\Lambda_3^\mu = -\frac{2e^2\pi^{D/2}\Gamma(2-D/2)}{(2\pi)^D}k^\mu \int_0^1 dx(1+x)[-p^2x(1-x) + m^2(1-x)]^{\frac{D}{2}-2}. \quad (7.27)$$

Por lo tanto, la *corrección al vértice* a primer orden es:

$$\Lambda^\mu = \Lambda_1^\mu + \Lambda_2^\mu + \Lambda_3^\mu, \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned}
\Lambda^\mu &= \text{cantidad finita} + \frac{2e^2}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [k^\mu(2-3x) + p^\mu(2-3y)] \times \\
&\quad \left\{ \frac{\pi^{D/2} \Gamma(2-D/2)}{[m^2(x+y) - p^2 y(1-y) - k^2 x(1-x) + 2xyp \cdot k]^{2-\frac{D}{2}}} \right\} \\
&\quad - \frac{2e^2 \pi^{D/2} \Gamma(2-D/2)}{(2\pi)^D} (p^\mu + k^\mu) \int_0^1 dx (1+x) [-p^2 x(1-x) \\
&\quad + m^2(1-x)]^{\frac{D}{2}-2}. \tag{7.29}
\end{aligned}$$

Ahora vamos a poner $D = 4 - 2\epsilon$ en Λ_1^μ , Λ_2^μ y Λ_3^μ . Para Λ_1^μ tenemos:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^\mu &= \text{cantidad finita} + \frac{2e^2}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [k^\mu(2-3x) + p^\mu(2-3y)] \times \\
&\quad \left\{ \frac{\pi^{(4-2\epsilon)/2} \Gamma(2-(4-2\epsilon)/2) \mu^{4-D}}{[m^2(x+y) - p^2 y(1-y) - k^2 x(1-x) + 2xyp \cdot k]^{2-\frac{4-2\epsilon}{2}}} \right\} \\
&= \text{cantidad finita} + \frac{2e^2}{16(2)^{-2\epsilon} \pi^2 \pi^{-\epsilon}} \Gamma(\epsilon) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [k^\mu(2-3x) + p^\mu(2-3y)] \times \\
&\quad \left[\frac{m^2(x+y) - p^2 y(1-y) - k^2 x(1-x) + 2xyp \cdot k}{\mu^2} \right]^{-\epsilon} \tag{7.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^\mu &= \text{cantidad finita} + \frac{e^2}{8\pi^2} [1 - \epsilon \ln 4 + \dots] [1 + \epsilon \ln \pi + \dots] \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \dots \right] \times \\
&\quad \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [k^\mu(2-3x) + p^\mu(2-3y)] \times \\
&\quad \left\{ 1 - \epsilon \ln \left[\frac{m^2(x+y) - p^2 y(1-y) - k^2 x(1-x) + 2xyp \cdot k}{\mu^2} \right] \right\}. \tag{7.31}
\end{aligned}$$

Las integrales involucradas son simples de evaluar:

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (2-3x) = \int_0^1 dx (2-3x)(1-x) = \frac{1}{2}, \tag{7.32}$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (2-2y) = \int_0^1 dx \left[2(1-x) - \frac{3}{2}(1-x)^2 \right] = \frac{1}{2}. \tag{7.33}$$

Sustituyendo estos resultados en (7.31) y simplificando, además de despreciar términos mayores del orden $\mathcal{O}(\epsilon)$ obtenemos:

$$\Lambda_1^\mu = \text{cantidad finita} - \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon} (k+p)^\mu. \tag{7.34}$$

De manera similar tenemos que:

$$\begin{aligned}\Lambda_2^\mu &= -\frac{e^2}{8\pi^2} \frac{p^\mu}{\epsilon} \int_0^1 dx(1-x) \left\{ 1 - \epsilon \ln \left[\frac{-p^2 x(1-x) + m^2(1-x)}{\mu^2} \right] \right\} \\ &= \text{cantidad finita} - \frac{e^2}{8\pi^2} \frac{p^\mu}{\epsilon} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \text{cantidad finita} - \frac{3e^2 p^\mu}{16\pi^2 \epsilon}\end{aligned}\quad (7.35)$$

y

$$\Lambda_3^\mu = \text{cantidad finita} - \frac{3e^2 k^\mu}{16\pi^2 \epsilon} . \quad (7.36)$$

Por lo tanto, la corrección al vértice a primer orden en $D = 4 - 2\epsilon$ es:

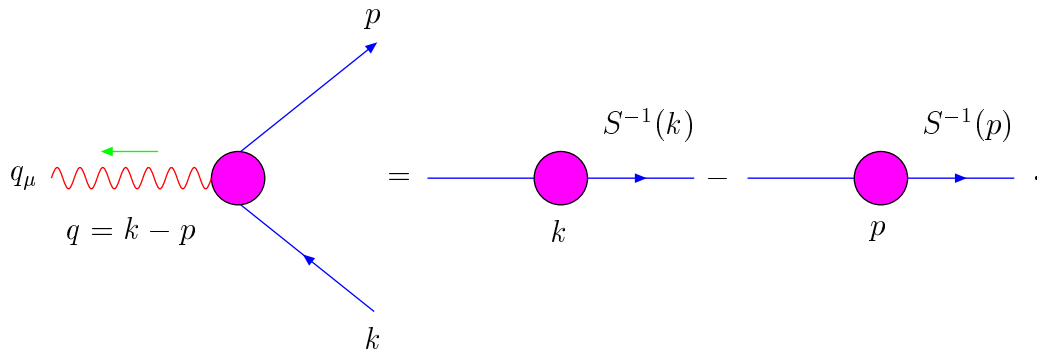
$$\Lambda^\mu = \text{cantidad finita} + \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon} (k+p)^\mu - \frac{3e^2}{16\pi^2 \epsilon} (k+p)^\mu \quad (7.37)$$

$$\Lambda^\mu = -\frac{e^2}{8\pi^2 \epsilon} (k+p)^\mu + \text{cantidad finita} . \quad (7.38)$$

En esta sección, hemos logrado la regularización del vértice de tres puntos, es decir, hemos separado la parte finita de la parte infinita. En la próxima sección, confirmaremos que esta división respeta la covarianza de norma.

7.3. Identidad de Ward-Green-Takahashi

A continuación vamos a verificar la identidad de Ward-Green-Takahashi que relaciona el propagador escalar con el vértice de 3-puntos. La cual nos dice que $S^{-1}(k) - S^{-1}(p)$ es igual a $q_\mu \Gamma^\mu$, es decir,



Como la regularización dimensional preserva la simetría de norma, esperamos que las partes finitas e infinitas satisfagan la identidad de Ward-Green-Takahashi individualmente.

Como hemos evaluado explícitamente solo la parte divergente, la verificamos para esta parte.

$$\begin{aligned} S^{-1}(k) &= -\frac{e^2}{16\pi^2} \frac{m^2 + 2k^2}{\epsilon} + \text{cantidad finita} , \\ S^{-1}(p) &= -\frac{e^2}{16\pi^2} \frac{m^2 + 2p^2}{\epsilon} + \text{cantidad finita} \end{aligned} \quad (7.39)$$

entonces

$$\begin{aligned} S^{-1}(k) - S^{-1}(p) &= -\frac{e^2}{16\pi^2} \frac{m^2 + 2k^2 - m^2 - 2p^2}{\epsilon} + \text{cantidad finita} \\ &= -\frac{e^2}{8\pi^2} \frac{k^2 - p^2}{\epsilon} + \text{cantidad finita} . \end{aligned} \quad (7.40)$$

Y

$$\begin{aligned} q_\mu \Gamma^\mu &= -\frac{e^2}{8\pi^2} \frac{(k_\mu - p_\mu)(k^\mu + p^\mu)}{\epsilon} + \text{cantidad finita} \\ &= -\frac{e^2}{8\pi^2} \frac{k^2 - p^2}{\epsilon} + \text{cantidad finita} . \end{aligned} \quad (7.41)$$

Por lo tanto se satisface la identidad de Ward para la parte divergente. Vamos a agregar los siguientes comentarios:

- La identidad de Ward-Green-Takahashi que relaciona el propagador del escalar con el vértice de tres puntos es satisfecha para la parte divergente en la norma de Feynman.
- Aunque no lo hemos mostrado, pero así debe de ser para el caso de la norma arbitraria y para la parte convergente también.

7.4. El Vértice Completo de 3-Puntos a un Lazo

Hemos calculado la corrección del vértice en la norma de Feynman. Además evaluamos únicamente la parte divergente. Ahora vamos a evaluar Λ_1^μ completo en una norma arbitraria.

7.4.1. El Vértice Λ_1^μ a un Lazo

Regresamos a la expresión de la ecuación (7.8):

$$\begin{aligned} \Lambda_1^\mu &= -ie^2 \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} \frac{(2p-w)^\alpha (k+p-2w)^\mu (2k-w)^\beta}{w^4 [(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} \times \\ &\quad [w^2 g_{\alpha\beta} + (1-\xi)w_\alpha w_\beta] . \end{aligned} \quad (7.42)$$

El primer término en el numerador toma la forma de (7.10) y el segundo término lo transformamos como:

$$\begin{aligned}
& (2p-w)^\alpha(k+p-2w)^\mu(2k-w)^\beta w_\alpha w_\beta \\
&= (2p^\alpha-w^\alpha)[(k+p)^\mu-2w^\mu][2k^\beta w_\alpha w_\beta-w^2 w_\alpha] \\
&= 4(k+p)^\mu p^\alpha k^\beta w_\alpha w_\beta-2(k+p)^\mu(k+p)^\alpha w^2 w_\alpha-8p^\alpha k^\beta w^\mu w_\alpha w_\beta \\
&\quad +4(k+p)^\alpha w^2 w^\mu w_\alpha+(k+p)^\mu w^4-2w^4 w^\mu
\end{aligned} \tag{7.43}$$

Las diferentes integrales independientes a calcular son de la forma:

$$K^{(0)} = \int d^D w \frac{1}{[(p-w)^2-m^2][(k-w)^2-m^2]} \tag{7.44}$$

$$K_\mu^{(1)} = \int d^D w \frac{w_\mu}{[(p-w)^2-m^2][(k-w)^2-m^2]} \tag{7.45}$$

$$J^{(0)} = \int d^D w \frac{1}{w^2[(p-w)^2-m^2][(k-w)^2-m^2]} \tag{7.46}$$

$$J_\nu^{(1)} = \int d^D w \frac{w_\nu}{w^2[(p-w)^2-m^2][(k-w)^2-m^2]} \tag{7.47}$$

$$J_{\mu\nu}^{(2)} = \int d^D w \frac{w^\mu w^\nu}{w^2[(p-w)^2-m^2][(k-w)^2-m^2]} \tag{7.48}$$

$$I_{\alpha\beta}^{(2)} = \int d^D w \frac{w_\alpha w_\beta}{w^4[(p-w)^2-m^2][(k-w)^2-m^2]} \tag{7.49}$$

$$I_{\mu\alpha\beta}^{(3)} = \int d^D w \frac{w^\mu w_\alpha w_\beta}{w^4[(p-w)^2-m^2][(k-w)^2-m^2]} \tag{7.50}$$

Las integrales (7.44 - 7.49) ya han sido calculadas en [11], [13], [14]. En el Apéndice B calculamos $J^{(0)}$ y $K^{(0)}$ explícitamente para $D = 3$ y D arbitrario respectivamente. Los resultados para las integrales (7.44 - 7.49) en $D = 4 + \epsilon$ son [14]. Primero vemos

$$K^{(0)} = \int d^D w \frac{1}{[(p-w)^2-m^2][(k-w)^2-m^2]} = i\pi^2[C+2-2S], \tag{7.51}$$

$$\begin{aligned}
K_\mu^{(1)} &= \int d^D w \frac{w_\mu}{[(p-w)^2-m^2][(k-w)^2-m^2]} \\
&= \frac{i\pi^2}{2}(p_\mu+k_\mu)[C+2-2S],
\end{aligned} \tag{7.52}$$

donde

$$C = -\frac{2}{\epsilon} - \gamma - \ln(\pi) - \ln m^2, \tag{7.53}$$

$$S = \frac{1}{2} \left(1 - 4\frac{m^2}{q^2}\right)^{1/2} \ln \frac{[(1 - 4m^2/q^2)^{1/2} + 1]}{[(1 - 4m^2/q^2)^{1/2} - 1]}. \tag{7.54}$$

Ahora

$$J^{(0)} = \int d^D w \frac{1}{w^2 [(p-w)^2 - m^2] [(k-w)^2 - m^2]} \quad (7.55)$$

es expresada en términos de la función de Spence $Sp(x)$,

$$Sp(x) = - \int_0^x dy \frac{\ln(1-y)}{y}, \quad (7.56)$$

así que

$$\begin{aligned} J^{(0)} = & \frac{i\pi^2}{-2\Delta} \left\{ Sp\left(\frac{y_1}{y_1-1}\right) + Sp\left(\frac{y_1}{y_1-\frac{m^2}{p^2}}\right) - Sp\left(\frac{y_1-1}{y_1-\frac{m^2}{p^2}}\right) \right. \\ & - Sp\left(\frac{y_2}{y_2-1}\right) - Sp\left(\frac{y_2}{y_2-\frac{m^2}{k^2}}\right) + Sp\left(\frac{y_2-1}{y_2-\frac{m^2}{k^2}}\right) \\ & \left. + Sp\left(\frac{y_3}{y_3-q_1}\right) - Sp\left(\frac{y_3-1}{y_3-q_1}\right) + Sp\left(\frac{y_3}{y_3-q_2}\right) - Sp\left(\frac{y_3-1}{y_3-q_2}\right) \right\}, \quad (7.57) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \frac{-(k \cdot p) + \Delta}{p^2}, \quad y_1 = y_0 + \alpha, \quad y_2 = \frac{y_0}{(1-\alpha)}, \quad y_3 = -\frac{y_0}{\alpha}, \\ y_0 &= \frac{1}{2p^2\Delta} [k^2 p^2 - 2(k \cdot p)^2 + 2(k \cdot p)\Delta - p^2\Delta + p^2(k \cdot p) - m^2(k \cdot p - \Delta)], \\ q_1 &= \frac{1 + \sqrt{1 - 4m^2/q^2}}{2}, \quad q_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m^2/q^2}}{2}, \quad \Delta^2 = (k \cdot p)^2 - k^2 p^2. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$J_\mu^{(1)} = \int d^D w \frac{w_\mu}{w^2 [(p-w)^2 - m^2] [(k-w)^2 - m^2]} \quad (7.58)$$

la podemos escribir como

$$J_\mu^{(1)} = \frac{i\pi^2}{2} [k_\mu J_A(k, p) + p_\mu J_B(k, p)], \quad (7.59)$$

donde J_A, J_B necesitan ser funciones escalares de k y p . Tal que

$$J_A(k, p) = \frac{1}{\Delta^2} \left\{ \frac{J_0}{2} (-m^2 p \cdot q - p^2 k \cdot q) + k \cdot p L' - p^2 L - 2p \cdot q S \right\}, \quad (7.60)$$

$$J_B(k, p) = J_A(p, k), \quad (7.61)$$

donde

$$J^{(0)} = \frac{i\pi^2}{2} J_0, \quad L = \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right), \quad L' = L(p \leftrightarrow k). \quad (7.62)$$

En una manera análoga tenemos que la integral tensorial

$$J_{\mu\nu}^{(2)} = \int d^D w \frac{w^\mu w^\nu}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} \quad (7.63)$$

explícitamente es

$$J_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{i\pi^2}{2} \left\{ \frac{g_{\mu\nu}}{D} K_0 + \left(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} \frac{k^2}{D} \right) J_C + \left(p_\mu k_\nu + k_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} \frac{2(k \cdot p)}{D} \right) J_D + \left(p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} \frac{p^2}{D} \right) J_E \right\}, \quad (7.64)$$

donde

$$K_0(k, p) = \frac{2}{i\pi^2} K^{(0)}, \quad (7.65)$$

$$J_C(k, p) = \frac{1}{4\Delta^2} \left\{ \left(2p^2 + 2k \cdot p \frac{m^2}{k^2} \right) - 4k \cdot p S + 2k \cdot p \left(1 - \frac{m^2}{k^2} \right) L' + [2k \cdot p(p^2 - m^2) + 3p^2(m^2 - k^2)] J_A + p^2(m^2 - p^2) J_B \right\}, \quad (7.66)$$

$$J_D(k, p) = \frac{1}{4\Delta^2} \left\{ 2k \cdot p[(k^2 - m^2) J_A + (p^2 - m^2) J_B - 1] - k^2 \left[2 \frac{m^2}{k^2} - 2S + \left(1 - \frac{m^2}{k^2} \right) L' + (p^2 - m^2) J_A \right] - p^2 \left[-2S + \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) L + (k^2 - m^2) J_B \right] \right\}, \quad (7.67)$$

$$J_E(k, p) = J_C(p, k). \quad (7.68)$$

Finalmente,

$$I_{\alpha\beta}^{(2)} = \int d^D w \frac{w_\alpha w_\beta}{w^4[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} = \frac{i\pi^2}{2} \left\{ \frac{g_{\alpha\beta}}{D} J_0 + \left(k_\alpha k_\beta - g_{\alpha\beta} \frac{k^2}{D} \right) I_C + \left(p_\alpha k_\beta + k_\alpha p_\beta - g_{\alpha\beta} \frac{2(k \cdot p)}{D} \right) I_D + \left(p_\alpha p_\beta - g_{\alpha\beta} \frac{p^2}{D} \right) I_E \right\}, \quad (7.69)$$

donde

$$I_A(k, p) = \frac{1}{\Delta^2} \left\{ -\frac{k \cdot q}{2} J_0 - \frac{2q^2}{\chi} \{ (m^2 - k^2) k^2 - (m^2 - k^2) k \cdot p \} S + \frac{1}{(m^2 - p^2)} \left[p^2 - k \cdot p + \frac{p^2 q^2}{\chi} (k^2 - m^2)(m^2 + k \cdot p) \right] L + \frac{k^2 q^2}{\chi} (m^2 + k \cdot p) L' \right\} \quad (7.70)$$

y

$$I_B(k, p) = I_A(p, k) , \quad (7.71)$$

con el denominador

$$\begin{aligned} \chi &= (q^2 - 2m^2)(p^2 - m^2)(k^2 - m^2) + m^2(p^2 - m^2)^2 + m^2(k^2 - m^2)^2 \\ &= p^2 k^2 q^2 + 2[(p^2 + k^2)k \cdot p - 2p^2 k^2]m^2 + m^4 q^2 , \end{aligned} \quad (7.72)$$

$$\begin{aligned} I_C(k, p) &= \frac{1}{4\Delta^2} \left\{ 2p^2 J_0 - 4 \frac{k \cdot p}{k^2} \left(1 + \frac{m^2}{(k^2 - m^2)} L' \right) + \{2k \cdot p - 3p^2\} J_A - p^2 J_B \right. \\ &\quad \left. + \{-2k \cdot p(m^2 - p^2) + 3p^2(m^2 - k^2)\} I_A + p^2(m^2 - p^2) I_B \right\} , \end{aligned} \quad (7.73)$$

$$\begin{aligned} I_D(k, p) &= \frac{1}{4\Delta^2} \left\{ -2(k \cdot p) J_0 + 2 \left(1 + \frac{m^2}{(k^2 - m^2)} L' \right) + 2 \left(1 + \frac{m^2}{(k^2 - m^2)} L \right) \right. \\ &\quad + (2k \cdot p - k^2) J_A + (2k \cdot p - p^2) J_B + [k^2(m^2 - p^2) - 2k \cdot p(m^2 - k^2)] I_A \\ &\quad \left. + [p^2(m^2 - k^2) - 2k \cdot p(m^2 - p^2)] I_B \right\} , \end{aligned} \quad (7.74)$$

$$I_E(k, p) = I_C(p, k) . \quad (7.75)$$

La integral que nos resta calcular es (7.50) la cual no es necesario calcular puesto que esta la podemos escribir en términos de algunas de las integrales anteriores.

$$I_{\mu\alpha\beta}^{(3)} = \int d^D w \frac{w^\mu w_\alpha w_\beta}{w^4 [(p-w)^2 - m^2] [(k-w)^2 - m^2]} , \quad (7.76)$$

donde

$$(k-w)^2 = k^2 + w^2 - 2k \cdot w . \quad (7.77)$$

De la ecuación (7.43) tenemos que el factor multiplicativo de esta integral es $-8p^\alpha k^\beta$, sea entonces que calculamos

$$\begin{aligned} I_{\mu\alpha} &= \int d^D w \frac{w_\mu w_\alpha k \cdot w}{w^4 [(p-w)^2 - m^2] [(k-w)^2 - m^2]} \\ &= \frac{1}{2} \left[(k^2 - m^2) \int d^D w \frac{w_\mu w_\alpha}{w^4 [(p-w)^2 - m^2] [(k-w)^2 - m^2]} \right. \\ &\quad + \int d^D w \frac{w_\mu w_\alpha}{w^2 [(p-w)^2 - m^2] [(k-w)^2 - m^2]} \\ &\quad \left. - \int d^D w \frac{w_\mu w_\alpha}{w^4 [(p-w)^2 - m^2]} \right] . \end{aligned} \quad (7.78)$$

Hemos dado los resultados para las dos primeras integrales. La tercer integral la multiplicamos ahora por p^α , entonces

$$Q_\mu = \int d^D w \frac{w_\mu w \cdot p}{w^4[(p-w)^2 - m^2]}. \quad (7.79)$$

Usando $(p-w)^2 = p^2 + w^2 - 2p \cdot w$, podemos escribir

$$Q_\mu = \frac{1}{2} \left[(p^2 - m^2) \int d^D w \frac{w_\mu}{w^4[(p-w)^2 - m^2]} + \int d^D w \frac{w_\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} - \int d^D w \frac{w_\mu}{w^4} \right]. \quad (7.80)$$

La última integral es cero y las dos primeras están en [11]:

$$\int d^D w \frac{w_\mu}{w^4[(p-w)^2 - m^2]} = i\pi^2 \frac{p_\mu}{p^2} \left[1 + \frac{m^2}{p^2} \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right], \quad (7.81)$$

$$\int d^D w \frac{w_\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} = \frac{i\pi^2}{2} p_\mu \left\{ C + 2 - \frac{m^2}{p^2} - \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right\}. \quad (7.82)$$

Así, tenemos los resultados completos de las integrales independientes para el vértice Λ_1^μ en una norma arbitraria en $D = 4 + \epsilon$.

7.4.2. El Vértice Λ_2^μ a un Lazo

Regresando a la expresión (7.20) tenemos que

$$\begin{aligned} \Lambda_2^\mu &= \frac{2e^3}{(2\pi)^D} \int d^D w \frac{(2p-w)_\alpha}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} \left[g^{\alpha\mu} - (1-\xi) \frac{w^\alpha w^\mu}{w^2} \right] \\ &= \frac{2e^3}{(2\pi)^D} \left[\int d^D w \frac{(2p-w)^\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} - (1-\xi) \int d^D w \frac{(2p-w)_\alpha w^\alpha w^\mu}{w^4[(p-w)^2 - m^2]} \right] \\ &= \frac{2e^3}{(2\pi)^D} \left\{ 2p^\mu \int d^D w \frac{1}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} - \int d^D w \frac{w^\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} \right. \\ &\quad \left. - (1-\xi) \left[2p_\alpha \int d^D w \frac{w^\alpha w^\mu}{w^4[(p-w)^2 - m^2]} - \int d^D w \frac{w^\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Las integrales independientes a calcular son:

$$J_0 = \int d^D w \frac{1}{w^2[(p-w)^2 - m^2]}, \quad (7.83)$$

$$J_1^\mu = \int d^D w \frac{w^\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2]}, \quad (7.84)$$

$$J_2^{\alpha\mu} = \int d^D w \frac{w^\alpha w^\mu}{w^4[(p-w)^2 - m^2]}. \quad (7.85)$$

Hacemos el cambio de variable $p - w = w'$ en la integral (7.83), tal que,

$$J_0 = \int d^D w' \frac{1}{(w'^2 - m^2)(p - w')^2}, \quad (7.86)$$

la cual hemos calculado [ver (5.29), (5.16)]. Entonces

$$J_0 = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{D}{2})} (m^2)^{\frac{D}{2} - 2} {}_2F_1\left(2 - \frac{D}{2}; 1, \frac{D}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right). \quad (7.87)$$

La integral (7.84) la escribimos de la siguiente manera:

$$J_1^\mu = \int d^D w \frac{w^\mu}{w^2[(p - w)^2 - m^2]} = ap^\mu. \quad (7.88)$$

Entonces,

$$a = \frac{1}{p^2} \int d^D w \frac{w \cdot p}{w^2[(p - w)^2 - m^2]}. \quad (7.89)$$

Del hecho que $w \cdot p = \frac{1}{2}[p^2 + w^2 - (w - p)^2]$, además de sumar y restar m^2 en el numerador de la integral obtenemos:

$$a = \frac{1}{2p^2} \left[\int d^D w \frac{1}{w^2 - m^2} + (p^2 - m^2) \int d^D w \frac{1}{w^2[(p - w)^2 - m^2]} \right]. \quad (7.90)$$

Por lo tanto,

$$J_1^\mu = \frac{p^\mu}{2p^2} \left[\int d^D w \frac{1}{w^2 - m^2} + (p^2 - m^2) \int d^D w \frac{1}{w^2[(p - w)^2 - m^2]} \right]. \quad (7.91)$$

Estas integrales ya las hemos calculado en el capítulo 5 (ver para la primer integral (5.18) y (5.29), (5.16) para la segunda integral). Finalmente, sea que escribimos $J_2^{\mu\nu}$ de la siguiente manera:

$$J_2^{\alpha\mu} = \int d^D w \frac{w^\alpha w^\mu}{w^4[(p - w)^2 - m^2]} = a \left[\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - \frac{1}{D} g^{\mu\nu} \right] + bg^{\mu\nu}. \quad (7.92)$$

Si multiplicamos por $g_{\mu\nu}$ esta integral obtenemos:

$$b = \frac{1}{D} \int d^D w \frac{1}{w^2[(p - w)^2 - m^2]} = J_0. \quad (7.93)$$

Ahora multiplicamos (7.92) por $p_\mu p_\nu$, tal que,

$$\int d^D w \frac{(p \cdot w)^2}{w^4[(p - w)^2 - m^2]} = p^2 \left[\frac{a(D - 1)}{a} + b \right], \quad (7.94)$$

donde

$$(p \cdot w)^2 = \frac{1}{4}[p^4 + w^4 + (w - p)^4 + 2p^2 w^2 - 2w^2(w - p)^2 - 2p^2(w - p)^2]. \quad (7.95)$$

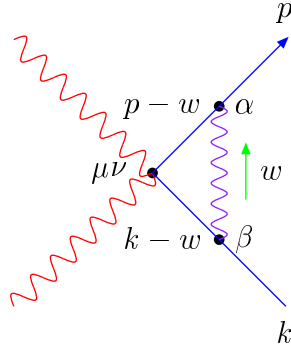
Después de hacer algunas operaciones algebraicas y simplificando tenemos

$$\begin{aligned} & \int d^D w \frac{(p \cdot w)^2}{w^4[(p-w)^2 - m^2]} = \\ & = \frac{1}{4}(p^2 - m^2) \int d^D w \frac{1}{w^4[(p-w)^2 - m^2]} + \frac{1}{4} \int d^D w \frac{1}{w^2 - m^2} \\ & + \frac{1}{2}(p^2 - m^2) \int d^D w \frac{1}{w^2[(p-w)^2 - m^2]} . \end{aligned} \quad (7.96)$$

Todas estas integrales ya las hemos calculado (ver (5.34), (5.43) para la primer integral, (5.18) para la segunda integral y (5.16), (5.29) para la tercera integral). Por lo tanto, conocemos que es Λ_2^μ a un lazo en una *norma y dimensión arbitraria* lo mismo ocurre para Λ_3^μ puesto que $\Lambda_3^\mu = \Lambda_2^\mu(k \leftrightarrow p)$. De esta manera conocemos el vértice de 3-puntos Λ^μ a un lazo.

7.5. El Vértice de 4-Puntos a un Lazo

Ahora vamos a calcular el vértice de 4 puntos. El diagrama correspondiente es el siguiente:



Entonces

$$2ie^2\Gamma^{\mu\nu} = \int \frac{d^D w}{(2\pi)^D} (-ie\Gamma^\alpha)[iS(p-w)](2ie^2 g^{\mu\nu})[iS(k-w)](-ie\Gamma^\beta)i\Delta_{\alpha\beta}(w) . \quad (7.97)$$

Sustituyendo los correspondientes valores para S , Γ y $\Delta_{\alpha\beta}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu\nu} & = -\frac{ie^2}{(2\pi)^D} g^{\mu\nu} \int d^D w \frac{(2p-w)^\alpha (2k-w)^\beta}{w^4[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} \times \\ & [w^2 g_{\alpha\beta} + (\xi - 1)w_\alpha w_\beta] . \end{aligned} \quad (7.98)$$

Sea

$$\begin{aligned} N & = (2p-w)^\alpha (2k-w)^\beta [w^2 g_{\alpha\beta} + (\xi - 1)w_\alpha w_\beta] \\ & = w^2 (2p-w) \cdot (2k-w) + (\xi - 1)w \cdot (2p-w)w \cdot (2k-w) \\ & = w^2 [4k \cdot p - 2p \cdot w - 2k \cdot w + w^2] + (\xi - 1)[2p \cdot w - w^2][2k \cdot w - w^2] \\ & = [w^4 - 2w^2(k+p)_\mu w^\mu + 4k \cdot pw^2] + (\xi - 1)[w^4 - 2w^2(k+p)_\mu w^\mu + 4k_\mu p_\nu w^\mu w^\nu] . \end{aligned}$$

Así, las integrales independientes a resolver son

$$K^{(0)} = \int d^D w \frac{1}{[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]}, \quad (7.99)$$

$$J^{(0)} = \int d^D w \frac{1}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]}, \quad (7.100)$$

$$J_\mu^{(1)} = \int d^D w \frac{w_\mu}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]}, \quad (7.101)$$

$$J_{\alpha\beta}^{(2)} = \int d^D w \frac{w_\alpha w_\beta}{w^4[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]}. \quad (7.102)$$

Por lo tanto, no tenemos nuevas integrales a resolver. Estas tienen la misma forma que las integrales de tres puntos.

7.6. Sobre el Vértice No Perturbativo de 3-Puntos

La identidad de Ward-Green-Takahashi relaciona el vértice con el propagador escalar de la siguiente manera:

$$q^\mu \Gamma_\mu(k, p) = S^{-1}(k) - S^{-1}(p), \quad (7.103)$$

la cual, hemos verificado explícitamente para la parte divergente del vértice a un lazo. Esta identidad indica que el vértice completo contiene información del propagador escalar. ¿De qué manera podemos extraer esta información?. Para ver esto, podemos empezar con la identidad de Ward que es la forma límite ($k \rightarrow p$) de la identidad 7.103:

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} S^{-1}(p) = \Gamma^\mu(p, p). \quad (7.104)$$

Podemos verificar esta identidad para el inverso del propagador escalar a orden árbol, $S^{-1}(p) = p^2 - m^2$:

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} [S^{-1}(p)] = \frac{\partial}{\partial p_\mu} [p^2] = 2p^\mu. \quad (7.105)$$

Por otra parte, $\Gamma^\mu(p, p) = 2p^\mu$. Por lo tanto, la identidad de Ward obviamente se satisface al orden árbol. La ecuación (7.103) nos permite dividir Γ_μ en dos partes,

$$\Gamma_\mu(k, p) \equiv \Gamma_\mu^L(k, p) + \Gamma_\mu^T(k, p), \quad (7.106)$$

donde $\Gamma_\mu^T(k, p)$ es llamado *el vértice transversal* y $\Gamma_\mu^L(k, p)$ es llamado *el vértice longitudinal*. El vértice transversal, por definición, satisface las siguientes propiedades:

$$q^\mu \Gamma_\mu^T(k, p) = 0 \quad \text{y} \quad \Gamma_\mu^T(p, p) = 0. \quad (7.107)$$

Entonces,

$$q^\mu \Gamma_\mu^L(k, p) = S^{-1}(k) - S^{-1}(p). \quad (7.108)$$

De esta manera $\Gamma_\mu^T(k, p)$ queda completamente indeterminado. Usando estas propiedades tenemos que:

$$\Gamma_\mu^L(p, p) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} S^{-1}(p) . \quad (7.109)$$

Empleando la regla de la cadena obtenemos

$$\Gamma_\mu^L(p, p) = \frac{\partial p^2}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial p^2} S^{-1}(p) = 2p_\mu \frac{\partial}{\partial p^2} S^{-1}(p) . \quad (7.110)$$

El vértice longitudinal satisface la propiedad de ser simétrico bajo el intercambio del momento k y p , es decir, $\Gamma_L^\mu(k, p) = \Gamma_L^\mu(p, k)$. Uno de los procedimientos más usados para determinar el vértice longitudinal para momentos arbitrarios es

$$p^\mu \rightarrow \frac{1}{2}(k^\mu + p^\mu) \quad \text{y} \quad \frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p^2} \rightarrow \frac{S^{-1}(k) - S^{-1}(p)}{k^2 - p^2} \quad (7.111)$$

cuando $k \neq p$. Entonces

$$\Gamma_L^\mu(k, p) = (k^\mu + p^\mu) \frac{S^{-1}(k) - S^{-1}(p)}{k^2 - p^2} \quad (7.112)$$

Por lo tanto,

$$\Gamma^\mu(k, p) = (k^\mu + p^\mu) \frac{S^{-1}(k) - S^{-1}(p)}{k^2 - p^2} + \Gamma_T^\mu(k, p) . \quad (7.113)$$

Sabemos que $\Gamma^\mu(k, p)$ se puede escribir únicamente en términos de k^μ y p^μ . Por lo tanto, la expresión más general se puede escribir como

$$\Gamma^\mu(k, p) = f k^\mu + g p^\mu \quad (7.114)$$

o alguna combinación lineal de vectores k^μ y p^μ . La ecuación (7.112) nos sugiere escoger una de estas como $k^\mu + p^\mu$. Por lo tanto Γ_T^μ necesita solo un vector para expandirse. Podemos escribir

$$\Gamma_\mu^T(k, p) = \tau(k^2, p^2, q^2) T_\mu(k, p) . \quad (7.115)$$

Siguiendo [19], escogemos

$$T_\mu(k, p) = k \cdot q p^\mu - p \cdot q k^\mu \quad (7.116)$$

Es fácil verificar que

$$q_\mu T^\mu(k, p) = 0 \quad \text{y} \quad T^\mu(k, p) = 0 . \quad (7.117)$$

Por lo tanto

$$\Gamma^\mu(k, p) = (k^\mu + p^\mu) \frac{S^{-1}(k) - S^{-1}(p)}{k^2 - p^2} + \tau(k^2, p^2, q^2) [k \cdot q p^\mu + p \cdot q k^\mu] . \quad (7.118)$$

La única función que nos queda indeterminada es la función τ . Si conocemos esta función podemos saber todo sobre el vértice no perturbativo. Para el vértice a orden árbol la función $\tau_0 = 0$, puesto que,

$$\Gamma_0^\mu(k, p) = k^\mu + p^\mu, \quad \Gamma_{0L}^\mu(k, p) = k^\mu + p^\mu, \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{0T}^\mu(k, p) = 0. \quad (7.119)$$

El conocimiento de τ a un lazo nos puede guiar a sus posibles estructuras no perturbativas. Esto se obtiene de la siguiente manera:

$$\tau_{1-lazo}[k \cdot qp^\mu - p \cdot qk^\mu] = \Gamma_\mu^{1-lazo} - \frac{S_{1-lazo}^{-1}(k) - S_{1-lazo}^{-1}(p)}{k^2 - p^2} (k^\mu + p^\mu). \quad (7.120)$$

Ya que conocemos S_{1-lazo}^{-1} y Γ_μ^{1-lazo} , podemos calcular τ_{1-lazo} . Este trabajo esta en proceso.

Capítulo 8

Discusión y Conclusiones

Hemos estudiado Electrodinámica Cuántica Escalar a nivel de un lazo en la teoría de perturbaciones y algunos aspectos no perturbativos de la misma. Vamos a resaltar los resultados más importantes que hemos desarrollado a lo largo de la tesis:

■ *PROPAGADOR ESCALAR*

- Hemos calculado el propagador escalar a un lazo en dimensión y norma arbitraria. Como casos particulares tomamos $D = 3$ y $D = 4 - 2\epsilon$ en el límite $\epsilon \rightarrow 0$.
- Basandonos en las transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin obtuvimos una expresión no perturbativa para el propagador escalar (sin masa) con el conocimiento del mismo a nivel árbol en $D = 3$.

■ *PROPAGADOR FOTÓNICO*

- Calculamos el propagador fotónico a un lazo en dimensión arbitraria considerando los casos $D = 3$ y $D = 4 - 2\epsilon$ en el límite $\epsilon \rightarrow 0$.
- Como una verificación de nuestros resultados, la identidad de Ward es satisfecha puesto que la estructura tensorial es transversa.
- Así mismo calculamos el propagador fotónico sumando las burbujas en $D = 3$ en el caso en que $m = 0$. Donde pudimos observar que este tiene un comportamiento similar al propagador del fotón espinorial en $D = 3$.

■ *EL VÉRTICE DE TRES PUNTOS*

- Calculamos el vértice a un lazo en la norma de Feynman en $D = 4 - 2\epsilon$ en el límite $\epsilon \rightarrow 0$.
- Verificamos la identidad de Ward-Green-Takahashi que relaciona el propagador escalar con el vértice de 3-puntos para la parte divergente del vértice la cual se satisface.

- Hemos comentado sobre la estructura no perturbativa del vértice de 3-puntos, así la información de un lazo nos puede guiar a posibles formas no perturbativas del mismo.

A futuro deseamos llevar a cabo las siguientes tareas:

- El cálculo de algunas integrales explícitas del vértice en $D = 4 - 2\epsilon$ que no hemos desarrollado completamente en norma arbitraria.
- Determinar la función τ_{1-lazo} y obtener una posible expresión para el vértice no perturbativo.
- Consideraremos el Lagrangiano más general que incluye el término $-\frac{\lambda}{4}(\varphi^*\varphi)^2$.
- Calcular las funciones de Green a dos lazos, específicamente del vértice de tres puntos.
- Verificar la identidad de Ward para los vértices de tres y cuatro puntos.
- Estudiar las ecuaciones de Schwinger-Dyson.
- Renormalización en Electrodinámica Cuántica Escalar a un lazo.

También los cálculos realizados en esta tesis sirven como una preparación para los cálculos de lazos en QED espinorial y QCD.

Apéndice A

Parametrización de Feynman

A.1. Algunas Integrales Estándar

Primero listamos las integrales estándar que más frecuentemente encontramos en la evaluación de integrales de lazos.

$$\int \frac{d^4 w}{(w^2 + s)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-2}}, \quad n \geq 3, \quad (\text{A.1})$$

$$\int d^4 w \frac{w^\mu}{(w^2 + s)^n} = 0, \quad n \geq 3, \quad (\text{A.2})$$

$$\int d^4 w \frac{w^\mu w^\nu}{(w^2 + s)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-3)}{2\Gamma(n)} \frac{g^{\mu\nu}}{s^{n-3}}, \quad n \geq 4, \quad (\text{A.3})$$

$$\int \frac{d^4 p}{(p^2 + 2pq + t)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(t - q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 3, \quad (\text{A.4})$$

$$\int d^4 p \frac{p^\mu}{(p^2 + 2pq + t)^n} = -i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{q^\mu}{(t - q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 3, \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} & \int d^4 p \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 + 2pq + t)^n} \\ &= i\pi^2 \frac{\Gamma((n-3))}{2\Gamma(n)} \frac{[2(n-3)q^\mu q^\nu + (t - q^2)g^{\mu\nu}]}{(t - q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 4. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

La fórmula (A.1) la hemos derivado anteriormente en la sección 4.2.2 realizando la integración sobre el contorno de integración de w^0 y la subsecuente la integración con respecto a \mathbf{w} usando coordenadas polares.¹La ecuación (A.2) es obviamente de simetría. Las ecuaciones (A.4) y (A.5) se siguen de (A.1) y (A.2) respectivamente por un cambio de variables de w y s a

$$p = w - q, \quad t = q^2 + s. \quad (\text{A.7})$$

¹Para más detalles ver la referencia [2].

Diferenciando la ecuación (A.5) con respecto a q_ν nos conduce a la ecuación (A.6), y tomando $q = 0$ en la ecuación (A.6) obtenemos la ecuación (A.3). Podemos generalizar las fórmulas (A.1)-(A.6) a un espacio D -dimensional

$$\int \frac{d^D w}{(w^2 + s)^n} = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}D)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}}, \quad n > D/2, \quad (\text{A.8})$$

$$\int d^D w \frac{w^\mu}{(w^2 + s)^n} = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\int d^D w \frac{w^\mu w^\nu}{(w^2 + s)^n} = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}D - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{g^{\mu\nu}}{s^{n-D/2-1}}, \quad (\text{A.10})$$

$$\int d^D w \frac{w^2}{(w^2 + s)^n} = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}D - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{D}{s^{n-D/2-1}}, \quad (\text{A.11})$$

donde la ecuación (A.11) se sigue de la ecuación (A.10), ya que

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = D. \quad (\text{A.12})$$

Las ecuaciones (A.8)-(A.11), son en primer lugar derivadas para valores enteros de D . Para valores no enteros, las integrales son definidas por las expresiones de los lados derechos de estas ecuaciones. Podemos escribir $D = 4 - 2\epsilon$ y luego requerimos tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$, es decir $D \rightarrow 4$. Otras integrales involucran tensores más complicados en el numerador de la integral son fáciles de obtener de las fórmulas de arriba por diferenciación y cambios de variables, pero para nuestro proposito con las anteriores es suficiente.

A.2. Parametrización de Feynman

Las integrales (A.1)-(A.6) contienen un sólo factor cuadrático, elevado a la potencia n , en los denominadores, usualmente nosotros tratamos con integrales que contienen un producto de varios factores cuadráticos diferentes en el denominador. Estos resultados más generales son reducidos a la forma deseada usando una técnica ingeniosa dada por Feynman. Para el producto de dos factores cuadráticos a y b , comenzamos con la identidad

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dt}{t^2}. \quad (\text{A.13})$$

Definiendo el *parámetro de Feynman* z como

$$t = b + (a-b)z, \quad (\text{A.14})$$

La ecuación (A.13) puede ser escrita

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[b + (a-b)z]^2}. \quad (\text{A.15})$$

Vemos que introduciendo el parámetro de Feynman z hemos expresado $1/ab$ en términos de un sólo factor elevado a la potencia 2. Aunque la integral (A.15) tenga la apariencia de ser más complicada, veremos que la parametrización de Feynman nos permite evaluar todas las integrales directamente. El método anterior se puede extender fácilmente. Para tres factores, el resultado alternativo es

$$\begin{aligned}\frac{1}{abc} &= 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{[a + (b-a)x + (c-b)y]^3} \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{1}{[a + (b-a)x + (c-a)z]^3}\end{aligned}\quad (\text{A.16})$$

las cuales se pueden probar integrando con respecto a y y z respectivamente y usando la ecuación (A.15). La ecuación (A.16) se puede generalizar a un número arbitrario de factores, y el resultado es

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_0 a_1 a_2 \cdots a_n} &= \Gamma(n+1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \\ &\quad \times \frac{1}{[a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z_n]^{n+1}}\end{aligned}\quad (\text{A.17})$$

la cual es establecida por inducción. Otros resultados útiles son obtenidos por diferenciación con respecto a uno o más parámetros. Por ejemplo, diferenciando la ecuación (A.15) con respecto a a obtenemos

$$\frac{1}{a^2 b} = 2 \int_0^1 dz \frac{z}{[b + (a-b)z]^3}.\quad (\text{A.18})$$

En la misma manera podemos obtener otras expresiones más complicadas.

A.3. La Función Gamma

De las identidades de la Función Gamma tenemos que

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \Gamma(1 + \epsilon)\quad (\text{A.19})$$

por una expansión de Taylor ($\epsilon \ll 1$)

$$\begin{aligned}\Gamma(1 + \epsilon) &= \Gamma(1) + \epsilon \Gamma'(1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= 1 + \epsilon \Gamma(1) \psi_1(1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= 1 - \epsilon \gamma + \mathcal{O}(\epsilon^2)\end{aligned}\quad (\text{A.20})$$

$$\psi_1(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+z} \right)\quad (\text{A.21})$$

Cuando $z = n = \text{entero}$

$$\psi_1(n) = -\gamma + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r}; \quad \psi_1(1) = -\gamma. \quad (\text{A.22})$$

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}(1 - \epsilon\gamma + \mathcal{O}(\epsilon^2)) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \Gamma(-1 + \epsilon) &= -\frac{1}{1 - \epsilon}\Gamma(\epsilon) = -(1 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \\ &= -\left[\frac{1}{\epsilon} + 1 - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0,5772157 \quad (\text{A.25})$$

donde γ es la constante de Euler.

Apéndice B

Cálculo de Algunas Integrales del Vértice

B.1. Cálculo de la Integral $J^{(0)}$ en $D = 3$

Vamos a calcular:

$$J^{(0)} = \int d^D w \frac{1}{w^2[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]} \quad (\text{B.1})$$

Empleamos parametrización de Feynman,

$$J^{(0)} = \Gamma(3) \int d^D w \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \int_0^1 d\alpha_3 \times \frac{\delta(\alpha_s - 1)}{[\alpha_1[(k-w)^2 - m^2] + \alpha_2[(p-w)^2 - m^2] + \alpha_3 w^2]^3} \quad (\text{B.2})$$

con $\alpha_s = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Definimos D como

$$\begin{aligned} D &= \alpha_1[(k-w)^2 - m^2] + \alpha_2[(p-w)^2 - m^2] + \alpha_3 w^2 \\ &= \alpha_s w^2 - 2(\alpha_1 k \cdot w + \alpha_2 p \cdot w) + \alpha_1(k^2 - m^2) + \alpha_2(p^2 - m^2) \\ &= \alpha_s \left[\left(w - \frac{\alpha_1 k + \alpha_2 p}{\alpha_s} \right)^2 + \frac{1}{\alpha_s^2} \left\{ \alpha_s [\alpha_1(k^2 - m^2) + \alpha_2(p^2 - m^2)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\alpha_1 k + \alpha_2 p)^2 \right\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Sea

$$w - \frac{\alpha_1 k + \alpha_2 p}{\alpha_s} \rightarrow w. \quad (\text{B.4})$$

Entonces,

$$J^{(0)} = 2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \int_0^1 d\alpha_3 \frac{\delta(\alpha_s - 1)}{\alpha_s^3} \times \int \frac{d^D w}{[w^2 + \alpha_s^{-2} \{ \alpha_s [\alpha_1 (k^2 - m^2) + \alpha_2 (p^2 - m^2)] - (\alpha_1 k + \alpha_2 p)^2 \}]^3} \quad (\text{B.5})$$

Hacemos uso de la siguiente fórmula:

$$\int \frac{d^D w}{(w^2 - s)^n} = (-1)^n i \pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} s^{\frac{D}{2} - n}, \quad (\text{B.6})$$

podemos escribir

$$J^{(0)} = -i \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(3 - D/2) \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \int_0^1 d\alpha_3 \times \frac{\delta(\alpha_s - 1)}{\alpha_s^{D-3} \{ -\alpha_s [\alpha_1 (k^2 - p^2) + \alpha_2 (p^2 - m^2)] + (\alpha_1 k + \alpha_2 p)^2 \}^{3-D/2}} \quad (\text{B.7})$$

Ahora empleamos el Teorema de Cheng-Wu¹, el cual nos dice que si

$$I = \int_0^1 \prod_{i=1}^n d\alpha_i \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i\right) F(\alpha), \quad (\text{B.8})$$

entonces podemos escribir

$$I = \int_0^\infty \overset{\prime}{\prod} d\alpha_i \int_0^1 \overset{\prime\prime}{\prod} \delta\left(1 - \sum \alpha_i\right) F(\alpha), \quad (\text{B.9})$$

donde el conjunto de los α ha sido dividido en dos conjuntos no vacíos

$$\{\alpha'\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}, \quad \{\alpha''\} = \{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}. \quad (\text{B.10})$$

Haciendo uso de éste teorema,

$$J^{(0)} = -i \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \int_0^\infty d\alpha_3 \int_0^\infty d\alpha_2 \int_0^1 d\alpha_1 \times \frac{\delta(\alpha_1 - 1)}{\alpha_s^{D-3} \{ -\alpha_s [\alpha_1 (k^2 - p^2) + \alpha_2 (p^2 - m^2)] + (\alpha_1 k + \alpha_2 p)^2 \}^{3-D/2}} \quad (\text{B.11})$$

Después de una integración trivial sobre α_1 , obtenemos

$$D = (1 + \alpha_2 + \alpha_3)^{D-3} [m^2 (1 + \alpha_2 + \alpha_3) (1 + \alpha_2) - k^2 (1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1) - p^2 (1 + \alpha_2 + \alpha_3) \alpha_2 + \alpha_2^2 p^2 + 2\alpha_2 k \cdot p]^{3-\frac{D}{2}} \quad (\text{B.12})$$

¹Para más detalles ver la referencia [12].

Usando $-2k \cdot p = q^2 - k^2 - p^2$

$$D = (1 + \alpha_2 + \alpha_3)^{D-2} [m^2(1 + \alpha_2 + \alpha_3)(1 + \alpha_2) - \alpha_3 k^2 - \alpha_2 \alpha_3 p^2 - \alpha_2 q^2]^{3-\frac{D}{2}} \quad (\text{B.13})$$

Por lo tanto,

$$J^{(0)} = -i\pi^{D/2} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \int_0^\infty d\alpha_3 \int_0^\infty \frac{d\alpha_2}{(1 + \alpha_2 + \alpha_3)^{D-3}} \times \frac{1}{[m^2(1 + \alpha_2 + \alpha_3)(1 + \alpha_2) - \alpha_3 k^2 - \alpha_2 \alpha_3 p^2 - \alpha_2 q^2]^{3-\frac{D}{2}}} \quad (\text{B.14})$$

En el caso de tres dimensiones

$$\begin{aligned} J^{(0)} &= -i\pi^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \int_0^\infty d\alpha_3 \int_0^\infty \frac{d\alpha_2}{(1 + \alpha_2 + \alpha_3)^0} \times \\ &\quad \frac{1}{[m^2(1 + \alpha_2 + \alpha_3)(1 + \alpha_2) - \alpha_3 k^2 - \alpha_2 \alpha_3 p^2 - \alpha_2 q^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{i\pi^2}{2} \int_0^\infty d\alpha_3 \int_0^\infty \frac{d\alpha_2}{[m^2(1 + \alpha_2 + \alpha_3)(1 + \alpha_2) - \alpha_3 k^2 - \alpha_2 \alpha_3 p^2 - \alpha_2 q^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad \frac{i\pi^2}{2} J_0 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

donde

$$J_0 = - \int_0^\infty d\alpha_3 \int_0^\infty \frac{d\alpha_2}{[m^2(1 + \alpha_2 + \alpha_3)(1 + \alpha_2) - \alpha_3 k^2 - \alpha_2 \alpha_3 p^2 - \alpha_2 q^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{B.16})$$

Vamos a integrar sobre α_3 primeramente, tomamos

$$\begin{aligned} D &= m^2(1 + \alpha_2 + \alpha_3)(1 + \alpha_2) - \alpha_3 k^2 - \alpha_2 \alpha_3 p^2 - \alpha_2 q^2]^{\frac{3}{2}} \\ &= \alpha_3 [\alpha_2(m^2 - p^2) + (m^2 - k^2)] + m^2(1 + \alpha_2)^2 - \alpha_2 q^2. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Por lo tanto,

$$J_0 = - \int_0^\infty d\alpha_2 \int_0^\infty \frac{d\alpha_3}{\alpha_3 [\alpha_2(m^2 - p^2) + (m^2 - k^2)] + m^2(1 + \alpha_2)^2 - \alpha_2 q^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{B.18})$$

Ahora, usamos [1]:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^m dx}{(a + bx)^{n+\frac{1}{2}}} &= 2^{m+1} m! \frac{(2n - 2m - 3)!!}{(2n - 1)!!} \frac{a^{m-n+\frac{1}{2}}}{b^{m+1}}, \\ &[m < n - \frac{1}{2}, a > 0, b > 0] \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

donde $m = 0$, $n = 1$, $a = m^2(1 + \alpha_2)^2 - \alpha_2 q^2$, $b = \alpha_2(m^2 - p^2) + (m^2 - k^2)$. Entonces

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{d\alpha_3}{\alpha_3[\alpha_2(m^2 - p^2) + (m^2 - k^2)] + m^2(1 + \alpha_2)^2 - \alpha_2 q^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2[m^2(1 + \alpha_2)^2 - \alpha_2 q^2]^{-\frac{1}{2}}}{\alpha_2(m^2 - p^2) + m^2 - k^2} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Así,

$$\begin{aligned} J_0 &= -2 \int_0^\infty \frac{d\alpha_2}{[m^2(1 + \alpha_2)^2 - \alpha_2 q^2]^{\frac{1}{2}}[\alpha_2(m^2 - p^2) + m^2 - k^2]} \\ &= -\frac{2}{m^2 - p^2} \int_0^\infty \frac{d\alpha_2}{\left[\alpha_2 + \frac{m^2 - k^2}{m^2 - p^2}\right][m^2 \alpha_2^2 + \alpha_2(2m^2 - q^2) + m^2]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Sea

$$\alpha_2 + \frac{m^2 - k^2}{m^2 - p^2} = z \quad \Rightarrow \quad d\alpha_2 = dz \quad (\text{B.22})$$

Los límites de integración se transforman de la siguiente manera:

$$\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{m^2 - k^2}{m^2 - p^2} \quad \text{y} \quad \alpha_2 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad z \rightarrow \infty. \quad (\text{B.23})$$

Ahora reescribimos el integrando como:

$$\begin{aligned} & m^2(1 + \alpha_2)^2 - \alpha_2 q^2 \\ &= m^2 \left(1 + z - \frac{m^2 - k^2}{m^2 - p^2}\right)^2 - \left[z - \frac{m^2 - k^2}{m^2 - p^2}\right] q^2 \\ &= m^2 z^2 + z \left[2m^2 \left(\frac{k^2 - p^2}{m^2 - p^2}\right) - q^2\right] + m^2 \left(\frac{k^2 - p^2}{m^2 - p^2}\right)^2 + \frac{m^2 - k^2}{m^2 - p^2} q^2 \\ &= m^2 z^2 + z \left[\frac{2m^2(k^2 - p^2) - q^2(m^2 - p^2)}{m^2 - p^2}\right] + \frac{m^2(k^2 - p^2)^2 + q^2(m^2 - k^2)(m^2 - p^2)}{(m^2 - p^2)^2} \\ &= cz^2 + bz + a = R \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

donde

$$\begin{aligned} c = m^2, \quad b &= \frac{2m^2(k^2 - p^2) - q^2(m^2 - p^2)}{m^2 - p^2}, \quad a = \frac{m^2(k^2 - p^2)^2 + q^2(m^2 - k^2)(m^2 - p^2)}{(m^2 - p^2)^2} \\ &= -\frac{\chi}{(m^2 - p^2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Entonces

$$J_0 = -\frac{2}{m^2 - p^2} \int_{\frac{m^2 - k^2}{m^2 - p^2}}^\infty \frac{dz}{z \sqrt{R}} = -\frac{2}{m^2 - p^2} \frac{1}{\sqrt{-a}} \arctan \left(\frac{2a + bz}{2\sqrt{-a}\sqrt{R}} \right) \Bigg|_{\frac{m^2 - k^2}{m^2 - p^2}}^\infty \quad (\text{B.26})$$

Consideramos

1. Evaluación en el límite superior

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2a + bz}{2\sqrt{-a}\sqrt{R}} &= \frac{b}{2\sqrt{-a}\sqrt{c}} = \frac{2m^2(k^2 - p^2) - q^2(m^2 - p^2)}{2m\sqrt{\chi}} \\ &= \frac{m^2(k^2 - p^2)(2m^2 - k^2 - p^2) + \chi}{2m\sqrt{\chi}(m^2 - k^2)} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

2. Evaluación en el límite inferior

$$\left. \frac{2a + bz}{2\sqrt{-a}\sqrt{R}} \right|_{z = \frac{m^2 - k^2}{m^2 - p^2}} = \frac{m^2(k^2 - p^2)(2m^2 - k^2 - p^2) - \chi}{2m\sqrt{\chi}(m^2 - p^2)} \quad (\text{B.28})$$

Entonces,

$$\begin{aligned} J_0 &= -\frac{2}{\sqrt{\chi}} \left\{ \arctan \left[\frac{m^2(k^2 - p^2)(2m^2 - k^2 - p^2) + \chi}{2m\sqrt{\chi}(m^2 - k^2)} \right] \right. \\ &\quad \left. - \arctan \left[\frac{m^2(k^2 - p^2)(2m^2 - k^2 - p^2) - \chi}{2m\sqrt{\chi}(m^2 - p^2)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} J^{(0)} &= -\frac{i\pi^2}{\sqrt{\chi}} \left\{ \arctan \left[\frac{m^2(k^2 - p^2)(2m^2 - k^2 - p^2) + \chi}{2m\sqrt{\chi}(m^2 - k^2)} \right] \right. \\ &\quad \left. - \arctan \left[\frac{m^2(k^2 - p^2)(2m^2 - k^2 - p^2) - \chi}{2m\sqrt{\chi}(m^2 - p^2)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

B.2. Cálculo de la Integral $K^{(0)}$ en D Dimensiones

Tenemos,

$$K^{(0)} = \int \frac{d^D w}{[(p-w)^2 - m^2][(k-w)^2 - m^2]}. \quad (\text{B.31})$$

Empleamos parametrización de Feynman:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[az + b(1-z)]^2} \quad (\text{B.32})$$

Tomamos

$$a = [(p-w)^2 - m^2], \quad b = [(k-w)^2 - m^2]. \quad (\text{B.33})$$

Ahora definimos

$$\begin{aligned} D &= z[(p-w)^2 - m^2] + (1+z)[(k-w)^2 - m^2] \\ &= z[p^2 - 2p \cdot w + w^2 - m^2] + (1-z)[k^2 - 2k \cdot w + w^2 - m^2] \\ &= z(p^2 - 2p \cdot w) + (1-z)(k^2 - 2k \cdot w) + w^2 - m^2 \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Ahora hacemos el siguiente cambio de variable

$$w \rightarrow w' = w - k(1 - z) . \quad (\text{B.35})$$

Entonces, obtenemos

$$\begin{aligned} D &= zp^2 - 2p \cdot (w' + k(1 - z))z + (1 - z)(k^2 - 2k \cdot (w' + k(1 - z))) + (w' + k(1 - z))^2 \\ -m^2 &= zp^2 - 2zp \cdot w' - 2z(1 - z)p \cdot k + k^2z(1 - z) + w'^2 - m^2 \end{aligned}$$

Un segundo cambio de variable

$$w' \rightarrow w = w' - zp , \quad (\text{B.36})$$

implica

$$D = z(1 - z)(p - k)^2 + w^2 - m^2 = z(1 - z)q^2 + w^2 - m^2 . \quad (\text{B.37})$$

Por lo tanto,

$$K^{(0)} = \int_0^1 dz \int d^D w \frac{1}{[w^2 + q^2(1 - z)z - m^2]^2} \quad (\text{B.38})$$

Usando (B.6) llegamos a

$$K^0 = i\pi^{D/2}\Gamma(2 - D/2) \int_0^1 dz [m^2 - q^2z(1 - z)]^{\frac{D}{2}-2} \quad (\text{B.39})$$

ahora tomamos el resultado de esta integral en D dimensiones de [13]:

$$K^{(0)} = i\pi^{2-\epsilon}m^{-2\epsilon}\Gamma(1 + \epsilon) \left[\frac{1}{\epsilon} + 2 - 2f\left(\frac{q^2}{q^2 - 4m^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] , \quad (\text{B.40})$$

donde

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2z} \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} , & z > 0 , \\ \frac{1}{\sqrt{-z}} \arctan \sqrt{-z} , & z < 0 . \end{cases} \quad (\text{B.41})$$

En el caso $D = 3$ la ecuación (B.39) se reduce a

$$K^{(0)} = i\pi^2 \int_0^1 dz [m^2 - q^2z(1 - z)]^{-\frac{1}{2}} = \frac{2i\pi^2}{\sqrt{-q^2}} \arctan \sqrt{-\frac{q^2}{4m^2}} . \quad (\text{B.42})$$

Bibliografía

- [1] I. S. Grandshteyn and I. M. Ryzhik, “*Table of Integrals, Series and Products*”, cuarta edición, Academic Press, New York, (1965).
- [2] J. J. Sakurai, “*Advanced Quantum Mechanics*”, Addison-Wesley, (1967).
- [3] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “*An Introduction to Quantum Field Theory*”, Westview Press, (1995).
- [4] M. Hans, “*An electrostatic example to illustrate dimensional regularization and renormalization group technique*” Am.J.Phys. **51**, 694 (1983).
- [5] M. Abramowitz and I.A. Stegun (eds.), “*Handbook of Mathematical Functions*”, Dover Publications, (1965).
- [6] J. D. Jackson, “*Classical Electrodynamics*”, segunda edición, John Wiley & Sons, New York, (1975).
- [7] F. Gross, “*Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*”, John Wiley & Sons, New York, (1999).
- [8] F. Mandl and G. Shaw, “*Quantum Field Theory*”, John Wiley & Sons, (1984).
- [9] F. Halzen and A. D. Martin, “*Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*”, John Wiley & Sons, New York, (1984).
- [10] L. H. Ryder, “*Quantum Field Theory*”, Cambridge University Press, (1985).
- [11] A. Kizilersü, M. Reenders and M. R. Pennington “*One-loop QED vertex in any covariant gauge: Its complete analytic form*”, Phys. Rev. D **52**, 1242 (1995).
- [12] H. Cheng and T.T. Wu, *Expanding Protons: Scattering at High Energies*. MIT Press. USA. (1987); K. S. Bjorkvoll, G. Fäldt and P. Oslan, Nucl. Phys. **B386** 303 (1992).
- [13] A. I. Davydychev, P. Oslan and L. Saks *Quark-gluon vertex in arbitrary gauge and dimension*, Phys. Rev. D **63**, 014922 (2000).
- [14] A. Raya, *Gauge Invariance and Construction of the Fermion-Boson Vertex in QED3*. Tesis de Doctorado. Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH (2003).

- [15] T. Appelquist and R. Pisarski, Phys. Rev. **D23** (1981) 2305.
- [16] T. Appelquist and U. Heinz, Phys. Rev. **D24** (1981) 2169.
- [17] F. A. Berends, A.I. Davydychev and V. A. Smimn, Nucl. Phys. **B478** (1996) 59-89.
- [18] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. **D7**, 1888 (1973).
- [19] J. S. Ball and T. W. Chiu, Phys. Rev. **D22**, 2542 (1980).