



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

“Constricciones de modelos de energía oscura con viscosidad
a partir de observaciones de Supernovas tipo Ia”

Tesis presentada al

Instituto de Física y Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Maestro en Ciencias en el Área de Física

por

Arturo Avelino Huerta

asesorado por

Dr. Ulises Nucamendi Gómez
(IFM-UMSNH)

Morelia, Michoacán, México
Febrero del 2006

Resumen

En el presente trabajo de tesis, proponemos un modelo de fluido con viscosidad para las componentes de materia bariónica y energía oscura del Universo.

Luego, analizamos la factibilidad de nuestro modelo a través de comparar las predicciones teóricas que obtenemos del modelo, contra los datos observacionales de supernovas tipo Ia (SNe Ia). En particular, analizamos estadísticamente que tanto nuestro modelo se ajusta al diagrama de Hubble de las supernovas, y para qué valores de los parámetros libres de nuestra teoría, logramos el mejor ajuste a los datos, lo cual nos permite calcular dichos parámetros a través de las SNe Ia, mediante la prueba estadística χ^2 .

La motivación del trabajo surge en 1998, un grupo de investigadores encabezados por Adam G. Riess lograron reunir suficientes mediciones (≈ 50) de la luminosidad de supernovas tipo Ia. Al hacer el estudio de ellos, encontraron que los datos sugerían una posible *presente expansión acelerada del universo*.

En el 2004, se lograron obtener una mayor cantidad de datos (≈ 157) sobre la luminosidad de otras más supernovas, sobre todo a alto redshift ($z \approx 1$), y el estudio de ellas confirmó la evidencia de la expansión acelerada, con una notable confiabilidad estadística.

Diferentes grupos de investigación han generado sus propios datos, y han hecho sus propios análisis, y las conclusiones a las que llegan son semejantes.

Los datos de las supernovas pueden graficarse en un diagrama de Hubble de *redshift* « z » vs *distancia modular* « $\mu(z)$ ». Si solo se toman en cuenta las componentes de materia hasta antes conocidas (materia bariónica, oscura y radiación) más la curvatura del espacio, NO se logra reproducir teóricamente (mediante la cosmología «estándar») la curva de los datos del diagrama de Hubble. Pero si se incluye una componente extra de materia desconocida, actualmente llamada **energía oscura**, se logra tener un ajuste bastante bueno a los datos.

Hoy en día la energía oscura, o bien, la presente expansión acelerada, son un misterio. Se están haciendo esfuerzos, desde diversos enfoques, por tratar de explicarla pero no se ha logrado establecer algo claro para su explicación.

Nosotros proponemos dos modelos para poder explicar teóricamente el fenómeno.

El primero modelo es considerar el contenido de materia del universo como materia bariónica, más materia oscura solamente (i.e., sin energía oscura), y modelada a través de un fluido con viscosidad, con la idea de poder explicar los datos a través de la viscosidad del fluido.

El segundo modelo consiste en tomar en cuenta también a la energía oscura y a ella modelarla como un fluido con viscosidad, la cual nos da muy buenos resultados.

Los resultados a estos modelos se discuten en el capítulo 4.

Índice general

Resumen	III
1. Cosmología	1
1.1. ¿Qué es la cosmología?	1
1.2. Principio cosmológico	1
1.3. Formulación matemática	2
1.3.1. Modelos de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)	2
1.3.2. La métrica de FRW	3
1.3.3. Factor de escala $a(t)$	4
1.4. Fluidos perfectos	4
1.4.1. Algunos elementos de utilidad	5
2. Energía Oscura	7
2.1. ¿Qué es la Energía Oscura?	7
2.2. Constitución del Universo	7
2.3. Geometría del universo	8
2.4. Ecuación de conservación de la materia	9
2.5. Ecuaciones de estado	10
2.6. La ecuación de Friedmann	10
2.6.1. Parámetro de desaceleración	13
3. Datos de supernovas y su estadística	15
3.1. Las Supernovas	15
3.1.1. Redshift	16
3.1.2. Redshift <i>vs</i> Distancia Modular	16
3.2. Los datos	17
3.3. Estadística Paramétrica	18
3.3.1. Teoremas de probabilidad	18
3.4. Prueba χ^2	20
3.5. Teoría <i>vs</i> Datos	23
3.5.1. χ^2 como medida de calidad de ajuste	23
3.5.2. El “Modelo de concordancia”	23
3.5.3. Otros modelos	24
3.5.4. Estimación de H_0	25
3.6. ¿Cómo sabemos que el universo se expande <i>aceleradamente</i> hoy? Análisis de q_0	25

3.6.1. ¿Hubo una transición <i>desaceleración-aceleración</i> ?	27
3.7. Análisis del contenido de materia en el universo ($\Omega_M^0, \Omega_\Lambda^0$).	27
4. Modelos Cosmológicos con fluidos viscosos	31
4.1. Modelo cosmológico dominado por materia viscosa	32
4.2. Análisis del caso de materia con viscosidad	33
4.2.1. Conclusiones del Modelo 1	34
4.3. Modelo cosmológico dominado por energía oscura viscosa y por materia no viscosa (bariónica y oscura)	34
4.4. Análisis de modelo de energía oscura con viscosidad	37
4.4.1. Conclusiones del Modelo 2	37

Índice de figuras

3.1.	Diagrama de Hubble. Se grafican los datos $zvs\mu(z)$ de las supernovas tipo Ia. Esta gráfica es generada con la <i>muestra de oro</i> de los datos de Riess et al. 2004 [7], que consta de 157 SNe Ia.	17
3.2.	Diagrama de Hubble de los datos de las SNE Ia y su comparación con algunos modelos sobre el contenido materia en el universo. Nótese cómo el modelo de concordancia logra ajustar mejor los datos, que los otros dos.	24
3.3.	Diagrama de Hubble de las SNE Ia en escala logarítmica.	24
3.4.	Intervalos de confianza para los parámetros $(q_0, (dq/dz) _{z=0})$. Obsérvese como los datos favorecen a un universo acelerado en su expansión, con un nivel de confianza del 99.99 %, y con una pasada desaceleración con aproximadamente 97 % de confianza, a partir de la muestra de oro de SNe Ia. Nota: en la gráfica, el símbolo $Q_0=(dq/dz) _{z=0}$	26
3.5.	Función de distribución de probabilidad para el redshift de transición z_t	27
3.6.	Intervalos de confianza para los parámetros $\Omega_M^0, \Omega_\Lambda^0$. El punto azul indica el valor de los parámetros en la mejor estimación, que resulta ser para el caso cerrado. El punto rojo indica el lugar donde está ubicado el modelo de concordancia. Las demás líneas muestran el comportamiento teórico del universo, según sean los valores de $\Omega_M^0, \Omega_\Lambda^0$	29
4.1.	Comparación del primer modelo con los datos. En la gráfica prácticamente quedan superpuestas las curvas para los dos últimos modelos, es decir, para $\xi = \tilde{\xi}_m = 9,073, H_0 = 0,548$ con el de $\xi = \tilde{\xi}_m = 0,333, H_0 = 15,677$. Esto era de esperarse ya que ambos tienen un valor en su calidad de ajuste (χ^2) muy cercano entre ellos. Para los otros dos, tienen un valor de χ^2 más grande, lo que implica una calidad de ajuste a los datos no tan buena. Esto puede apreciarse en la figura. Nota: en la gráfica $\xi = \tilde{\xi}_m$ del texto	35
4.2.	Comparación del primer modelo con los datos. El eje z está en escala logarítmica. Nota: en la gráfica $\xi = \tilde{\xi}_m$ del texto	35
4.3.	Comparación del segundo modelo con los datos. Nótese la excelente calidad de ajuste del modelo a los datos.	38
4.4.	Comparación del segundo modelo con los datos. El eje z está en escala logarítmica. Nota: en la gráfica $\zeta_X = \tilde{\epsilon}_X$	38
4.5.	Intervalos de confianza de los parámetros $\tilde{\epsilon}_X$ vs w_X . Nota: en la gráfica $\zeta_X = \tilde{\epsilon}_X$	39

Capítulo 1

Cosmología

1.1. ¿Qué es la cosmología?

¿Cómo y cuándo nació el Universo?, ¿De qué tamaño es?, ¿Cuándo se acabará?, éstas y otras preguntas son tal vez algunas de las que cualquier persona se ha hecho en algún momento de su vida y en cualquier época de la historia desde que el hombre existe. Estos son ejemplos de las primeras observaciones cosmológicas que de manera natural nos podemos plantearnos aún sin tener que ser estudiosos de la cosmología.

La cosmología podríamos definirla como la ciencia que se encarga del estudio del **Universo**, su estructura, forma, evolución, y de las leyes que la gobiernan en grandes escalas de espacio y tiempo. A diferencia de la astronomía, la cosmología estudia la estructura *global* del universo. Toma en cuenta a las estructuras locales que la componen (tales como las galaxias, estrellas, nebulosas, agujeros negros, planetas, etc., que son los elementos de estudio de la astronomía y la astrofísica) pero las ve tan solo como las “*partículas*” que constituyen al universo como un todo, y que al tomar su comportamiento global, logra determinar características del universo.

En estas escalas, la gravedad es la interacción más importante que gobierna la dinámica del universo, de aquí que la *Teoría General de la Relatividad* sea la herramienta fundamental de la cosmología. De hecho, la cosmología es una de las aplicaciones más importantes de la Teoría General de la Relatividad.

1.2. Principio cosmológico

La cosmología se basa en un principio que nace de la intuición y de las observaciones astronómicas que se han podido obtener del universo con los aparatos modernos, éste se enuncia:

“El universo es homogéneo e isotrópico espacialmente en una escala cosmológica.”

Isotropía espacial significa que el espacio tiene el mismo aspecto en todas direcciones que observamos alrededor de un punto del espacio-tiempo. *Homogeneidad espacial* se refiere a que el espacio tiene las mismas características, sin importar el lugar en el universo en el que estamos.

A pesar de su sencillez, éste principio tiene importantes implicaciones e impone restricciones muy fuertes a cualquier teoría que pretenda estudiar al universo.

Por mencionar algunas consecuencias, el principio cosmológico implica que no podemos definir un “centro” u “orillas” al universo y que no ocupamos ningún lugar privilegiado dentro de él.

Una de las observaciones que sustentan fuertemente al principio cosmológico es el **fondo de radiación de microondas cósmico (FRMC)** que permea todo el espacio hasta ahora observado. Esta radiación de fondo, vista por los observadores fundamentales, es asombrosamente isotrópica. Actualmente esta radiación tiene asociada una temperatura de ≈ 2.7 K y se piensa que es un remanente del *Big-Bang*.

1.3. Formulación matemática

En el contexto de la teoría de la Relatividad General, al universo (y en general, al mundo físico en el que vivimos) se le describe como un **espacio-tiempo 4-dimensional**. Tres dimensiones corresponden a la parte espacial y una a la temporal.

Desde un punto de vista matemático, este espacio-tiempo es una **variedad diferencial M** de dimensión 4, conexa (¡¡ya que no tenemos conocimiento de alguna componente desconexa!), C^∞ , Hausdorff y paracompacta, y con una **métrica g** Lorentziana asociada de “signature” +2, que describe la geometría de la variedad M . Usualmente se representa como (M, g) . Esta definición corresponde a nuestras ideas intuitivas de la continuidad del espacio-tiempo.

1.3.1. Modelos de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

En particular, la métrica asociada al universo a nivel cosmológico es la **métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)** la cual es la métrica natural que surge de tomar en cuenta el principio cosmológico, i.e., esta métrica satisface el principio cosmológico.

En la variedad (M, g) , las condiciones de isotropía y homogeneidad se establecen a través de la métrica g . La métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), por lo tanto, es una geometría que incorpora naturalmente las simetrías de isotropía y homogeneidad en el espacio-tiempo M , que suponemos satisface el universo en gran escala.

La isotropía se introduce a través de la condición de que las ecuaciones de la teoría deben ser *invariantes ante rotaciones espaciales*, es decir, que si nos situamos en algún punto p en la variedad M (algún punto en el universo) en donde establecemos una *carta coordenada* (un sistema de referencia), podemos rotar en cualquier dirección y no habrá ningún cambio en las ecuaciones. De hecho, las ecuaciones no dependen de ninguna dirección preferida (ya que ésta dirección “preferida” no se ha observado hasta ahora en el universo en gran escala).

La homogeneidad la establecemos como la *invarianza ante translaciones espaciales*, es decir, que si nos situamos en un punto p de la variedad M y luego nos desplazamos a otro punto arbitrario q manteniendo el tiempo cósmico fijo, las ecuaciones no cambiarán su forma; las ecuaciones no tendrán ninguna dependencia del punto en el que estemos situados con tiempo fijo, o en la dirección en la que observemos.

Matemáticamente decimos que el espacio-tiempo (M, g) es invariante bajo un grupo uni-paramétrico si se satisface:

$$\mathcal{L}_\varepsilon g = 0 \quad (1.1)$$

es decir, la derivada de Lie de la métrica con respecto al campo vectorial ε es cero. Aquí el grupo uni-paramétrico es generado por el campo vectorial ε llamado un campo vectorial de Killing de la métrica.

Invariancia bajo un grupo tres paramétrico de rotaciones espaciales (isotropía) implica la existencia de un espacio-vectorial de vectores de Killing de dimensión tres de la métrica de FRW expresada en (1.9), los cuales se expresan como:

$$\varepsilon_1 = \cos(\phi)\partial_\theta - \cot(\theta)\sin(\phi)\partial_\phi \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_2 = \sin(\phi)\partial_\theta + \cot(\theta)\cos(\phi)\partial_\phi \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_3 = \partial_\phi \quad (1.4)$$

Invariancia bajo un grupo tres paramétrico de traslaciones espaciales (homogeneidad) implica la existencia de otro espacio-vectorial de vectores de Killing de dimensión tres de la métrica de FRW, dada por la expresión (1.9), los cuales se expresan como:

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{f(r)} \left[\sin(\theta)\cos(\phi)\partial_r + \frac{\cos(\theta)\cos(\phi)}{r}\partial_\theta - \frac{\sin(\phi)}{r\sin(\theta)}\partial_\phi \right] \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_5 = \frac{1}{f(r)} \left[\sin(\theta)\sin(\phi)\partial_r + \frac{\cos(\theta)\sin(\phi)}{r}\partial_\theta + \frac{\cos(\phi)}{r\sin(\theta)}\partial_\phi \right] \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_6 = \frac{1}{f(r)} \left[\cos(\theta)\partial_r - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial_\theta \right] \quad (1.7)$$

donde la función $f(r)$ es:

$$f(r) = \frac{1}{1 - kr^2} \quad (1.8)$$

1.3.2. La métrica de FRW

Tradicionalmente, se representa a alguna métrica g , o más propiamente dicho, a algún **tensor métrico dos veces covariante** $g_{\mu\nu}$, a través del *segmento diferencial de línea* ds^2 que genera.

Para el tensor métrico de FRW, en coordenadas esféricas $(x^\mu = (t, r, \theta, \phi))$, su segmento diferencial de línea ds^2 tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{Sen}^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.9)$$

Esto es, escribiendo explícitamente las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ de la métrica de FRW, en forma matricial tenemos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2r^2 \text{Sen}^2\theta \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Finalmente tenemos el determinante de $g_{\mu\nu}$:

$$g \equiv \det g_{\mu\nu} = \frac{a^6 r^4 \text{Sen}^2 \theta}{-1 + kr^2} \quad (1.11)$$

1.3.3. Factor de escala $a(t)$

Un elemento muy relevante que aparece en la métrica de FRW (ver ecuaciones (1.9) y (1.10)) es el llamado **factor de escala** $a(t)$.

Este factor depende del tiempo. Nos sirve para establecer en nuestra teoría la evolución temporal del universo (de ahí su importancia). A través de él podemos tomar en cuenta la expansión del universo, así como la velocidad y aceleración de la expansión.

1.4. Fluidos perfectos

Uno de las mejores maneras de modelar el contenido material del universo es considerar *fluido perfectos*, por ejemplo, todas las estructuras que conocemos tales como las galaxias, cúmulos de galaxias (y todo lo que ellas contienen), nebulosas, agujeros negros, etc., pueden considerarse *partículas* de un fluido perfecto.

Un fluido perfecto se define como un fluido sin viscosidad y en el cual la presión del fluido, no depende de la dirección en la que es medida por los observadores fundamentales (observadores que ven el universo isotrópico y homogéneo en gran escala). Es el modelo más simple de fluido que podemos idear.

Las observaciones que hasta ahora se tienen del universo apoyan este modelo de fluido para el universo.

El tensor de energía-momento del fluido perfecto es:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}$$

donde

ρ = densidad del fluido medida por observadores con velocidad U^μ

P = presión del fluido medida por observadores con velocidad U^μ

U_μ = cuadrivelocidad de un observador que se mueve junto con el fluido

$g_{\mu\nu}$ = tensor métrico

usando coordenadas *comoving* (las coordenadas del observador moviéndose con el fluido) normalizadas ($U^\nu U_\nu = -1$) tenemos:

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0), U_\nu = (-1, 0, 0, 0)$$

las componentes del tensor $T_{\mu\nu}$ (en este sistema coordenado) pueden escribirse en la siguiente forma matricial:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{rr}P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta}P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\phi\phi}P \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

ahora, subimos uno de sus índices a través del tensor métrico:

$$T_{\nu}^{\mu} = g^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

de aquí vemos que la traza T de T_{ν}^{μ} es:

$$T = \text{Tr}(T_{\nu}^{\mu}) = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = T_{\mu}^{\mu} = -\rho + 3P$$

1.4.1. Algunos elementos de utilidad

Los símbolos de Christoffel distintos de cero son los siguientes trece términos:

$$\Gamma_{r*r}^t = \frac{a\dot{a}}{1 - k*r^2} \quad \Gamma_{r*r}^r = \frac{k*r}{1 - k*r^2} \quad (1.14)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = a\dot{a}r^2 \quad \Gamma_{\phi\phi}^t = a\dot{a}r^2 \text{Sen}^2\theta \quad (1.15)$$

$$\Gamma_{t*r}^r = \Gamma_{t\theta}^{\theta} = \Gamma_{t\phi}^{\phi} = \frac{\dot{a}}{a} \quad (1.16)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1 - k*r^2) \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r*\text{Sen}^2\theta(1 - k*r^2) \quad (1.17)$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{r} \quad (1.18)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\text{Sen}\theta\text{Cos}\theta \quad \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \text{Cot}\theta. \quad (1.19)$$

Del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, los únicos términos distintos de cero son los siguientes:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{rr} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \\ R_{\theta\theta} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \\ R_{\phi\phi} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \text{Sen}^2\theta. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}(= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)$, los únicos términos distintos de cero son los siguientes:

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k) \\ G_{rr} &= \frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{-1 + kr^2} \\ G_{\theta\theta} &= -r^2(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) \\ G_{\phi\phi} &= -r^2(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) \text{Sen}^2\theta. \end{aligned} \quad (1.21)$$

El escalar de Curvatura R es escrito como:

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]$$

CAPÍTULO 1. COSMOLOGÍA
1.4. FLUIDOS PERFECTOS

Capítulo 2

Energía Oscura

2.1. ¿Qué es la Energía Oscura?

En 1998 un grupo de astrónomos encabezados por Adam G. Riess¹ publicaron un artículo² [7] que indicaba la posible evidencia de que el Universo se está expandiendo *aceleradamente*, hoy en día. Este grupo analizó los datos sobre la luminosidad y corrimiento al rojo (*redshift*) de supernovas tipo Ia (SNe Ia) y de este análisis concluyeron que había cierta evidencia de una presente expansión acelerada del universo.

A partir de este estudio, hubo otros grupos que realizaron sus propios análisis sobre las SNe Ia, llegando a la misma conclusión.

Se han propuesto diversas teorías para explicar esta aceleración pero aún se está lejos de lograr una comprensión profunda del fenómeno.

Una de estas teorías postula la existencia de algún tipo de energía capaz de acelerar al universo en su expansión. A esta energía se le ha llamado *Energía Oscura*.

Se tiene la idea de que la energía oscura está relacionada, o bien, es la *constante cosmológica*, que algún tiempo atrás Einstein había introducido en sus ecuaciones para lograr tener un universo estático. El análisis de los datos de SNe Ia parecen apoyar esta hipótesis con cierto nivel de confianza.

Actualmente se ha logrado reunir una mayor cantidad de datos de supernovas de las que se tenían en 1998, y los estudios recientes siguen haciendo más evidente la conclusión de que el universo se expande aceleradamente actualmente, y además nos ha permitido tener cotas más precisas sobre algunas cantidades relevantes en el estudio de este fenómeno, y que a largo de la tesis las iré discutiendo con más precisión.

2.2. Constitución del Universo

En base a las observaciones, actualmente se considera que el universo está constituido por los siguientes tipos de materia (la densidad crítica en el presente es $1,16 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3$):

Materia bariónica O también llamada *materia luminosa*. Dícese de la materia ordinaria que constituye la mayor parte de las cosas que comúnmente conocemos. Es la materia

¹Departamento de Astronomía, Universidad de California en Berkeley

²Riess, A. G. et al, 1998, *The Astrophysical Journal*, 116, 1009-1038

CAPÍTULO 2. ENERGÍA OSCURA

2.3. GEOMETRÍA DEL UNIVERSO

brillosa en el Universo. La cantidad de esta materia en el universo es de apenas $\approx 2\%$ de la densidad crítica (densidad total del universo) en el presente.

Materia oscura Esta materia solo se ha podido medir a través de sus efectos gravitacionales en las galaxias y cúmulos de galaxias, por ejemplo, usando las *curvas de rotación* galácticas. Se desconoce aún mucho sobre la naturaleza de este tipo de materia, no se sabe de qué está constituida, cómo surgió, por qué solo interactúa mediante la interacción gravitacional, etc. Hoy en día sigue siendo un problema abierto. Las estimaciones actuales de la abundancia de esta cantidad de materia en el universo nos llevan a $\approx 26\%$ de la densidad crítica (densidad total del universo) en el presente.

Radiación Esta radiación permea a todo el universo, principalmente a través de la *radiación cósmica de fondo*. Su abundancia es muy pequeña, de apenas $\approx 0.005\%$ de la densidad crítica (densidad total del universo) en el presente.

Energía oscura A semejanza a la *materia oscura*, la naturaleza de la *energía oscura* es un total enigma hoy en día. Como se mencionó al principio del capítulo, se establece la existencia de la energía oscura a raíz del hecho de la enigmática aceleración presente en la expansión del universo. En el cual, postulamos se postula la existencia de algún tipo de energía, como responsable de tal aceleración. La teoría y diversos tipos de observaciones astronómicas nos sugieren notablemente que su abundancia en el universo, ¡es del $\approx 72\%$! de la densidad crítica (densidad total del universo) en el presente.

Hasta ahora, los estudios nos han conducido a que los mejores valores para el contenido de materia en el universo que mejor ajustan la teoría con observaciones son (porcentajes de la densidad crítica en el presente):

$$\text{bariónica} + \text{oscura} = 27\%$$

$$\text{radiación} \approx 0\%$$

$$\text{Energía oscura} = 73\%$$

A estas cantidades en conjunto se les llama el **Modelo de concordancia**

2.3. Geometría del universo

Hay 3 posibilidades en la geometría *espacial* del universo denominadas: *cerrado*, *abierto* y *plano*. Ésto queda determinado en base al factor de curvatura k de la métrica de FRW que describe la geometría del universo (cf. (1.9) y (2.15)).

Si el universo tiene una curvatura positiva ($k > 0$) entonces decimos que el universo es *cerrado*. Si tiene una curvatura igual a cero ($k = 0$) tenemos un universo *plano*, y si $k < 0$ entonces es *abierto*.

Actualmente es todavía un problema abierto el saber cuál es la geometría del universo, sin embargo, las observaciones favorecen la idea de que el universo es plano.

El valor del factor k es quien determina la curvatura (geometría) espacial del universo. Una característica importante de este factor es que la teoría establece que es constante en

el tiempo³, es decir, esta fijo y no ha cambiado desde el origen del universo hasta nuestros días, y tampoco cambiará en el futuro. Por tanto, una vez establecido el valor de k en el tiempo presente, habremos podido determinar la curvatura del universo desde sus orígenes. Como se mencionó, las observaciones indican que el universo tiene un valor $k = 0$.

La geometría del universo (el valor de k) queda determinada a través del contenido de materia del Universo presente, es decir, de la abundancia de cada una de las distintas materias lo componen.

Para determinar cuál es el valor de k , o al menos si es positivo, negativo o cero, para un universo dominado por polvo (materia sin presión) y una constante cosmológica podemos utilizar la ecuación de Friedman. En particular, nos interesa el valor que toma $\Omega_k^0 \equiv -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}$, ya que si el universo es:

$$\text{Cerrado } k > 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_k^0 < 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_m^0 + \Omega_\Lambda^0 > 0$$

$$\text{Plano } k = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_k^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_m^0 + \Omega_\Lambda^0 = 0$$

$$\text{Abierto } k < 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_k^0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_m^0 + \Omega_\Lambda^0 < 0$$

Por tanto, logrando determinar, o al menos estimar, los valores de Ω_m^0 y Ω_Λ^0 podemos determinar la geometría del Universo.

2.4. Ecuación de conservación de la materia

Tomemos las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

De la identidad de Bianchi sabemos que, para el tensor de Einstein G_ν^μ :

$$\nabla_\mu G_\nu^\mu = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla_\mu T_\nu^\mu = 0 \quad (2.1)$$

Ahora, tomando en particular el caso en que $\nu = t$, donde t es la componente temporal, i.e., las componentes T_t^μ (la primer columna de la matriz T_ν^μ) y sustituyendo en (2.1) obtenemos:

$$\nabla_\mu T_t^\mu = 0$$

expresamos explícitamente esta derivada covariante como:

$$\partial_\mu T_t^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_t^\lambda - \Gamma_{\mu t}^\lambda T_\lambda^\mu = 0 \quad (2.2)$$

pero el tensor T_ν^μ de un fluido perfecto es diagonal, por tanto, los únicos términos diferentes de cero son los elementos de la diagonal. La ecuación (2.2) se vuelve:

$$\partial_t T_t^t + \Gamma_{\mu t}^\mu T_t^\mu - \Gamma_{rt}^r T_r^r - \Gamma_{\theta t}^\theta T_\theta^\theta - \Gamma_{\phi t}^\phi T_\phi^\phi = 0 \quad (2.3)$$

Pero en el capítulo anterior ya habíamos calculado el valor de todas las $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu$ (expresiones a) para el espacio-tiempo de FRW. En particular obtuvimos que (expresión):

$$\Gamma_{rt}^r = \Gamma_{\theta t}^\theta = \Gamma_{\phi t}^\phi = \frac{\dot{a}}{a} \quad \text{y} \quad \Gamma_{tt}^t = 0$$

³El que no cambie k es una propiedad que tienen los *espacios maximalmente simétricos*

Usando estos valores en , además de la matriz obtenemos:

$$\partial_t \rho + \Gamma_{r^*t}^r (3T_t^t - T_r^r - T_\theta^\theta - T_\phi^\phi) = 0 \quad (2.4)$$

$$-\dot{\rho} + \frac{\dot{a}}{a}(-3\rho - 3P) = 0 \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

2.5. Ecuaciones de estado

Los diferentes tipos de materia tienen asociadas *ecuaciones de estado*, que nos permiten estudiarlas en base a sus características. La ecuación de estado, en general, la podemos escribir como:

$$P = w\rho \quad (2.7)$$

donde: P = presión de la materia, ρ = su densidad.

El factor w es una constante de proporcionalidad, tal que:

<i>tipo de materia</i>	w
materia bariónica y oscura	0
radiación	1/3
energía oscura	-1

Para el caso de la materia bariónica y oscura: $w = 0 \Rightarrow P = 0$ (pero con $\rho \neq 0$). Y por este motivo se les suele llamar como *polvo*.

Para el caso de la energía oscura, si *suponemos* que esta es la **constante cosmológica**, esto es, la **energía del vacío cuántico**, entonces se tiene que su ecuación de estado debiera ser $P = -\rho$ (es decir, $w = -1$).

Entonces $w = -1$ es válido solamente en el caso en que asumimos que la energía oscura es la *energía del vacío cuántico*. No obstante, ésto es solo una suposición, dado que hasta ahora no se puede asegurar con certeza; sin embargo, la teoría y las observaciones parecen dar cierta evidencia de que es así.

2.6. La ecuación de Friedmann

La ecuación de Friedmann es una de las ecuaciones fundamentales de la cosmología.

A continuación describiré la manera en que se obtienen.

A partir de las ecuaciones de Einstein, tenemos:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) \quad (2.8)$$

Tomando solamente la componente R_{tt} y usando los elementos de la matriz (1.12) del tensor $T_{\mu\nu}$, los elementos de la matriz (1.10) del tensor métrico de FRW: $g_{\mu\nu}$, así como tomando cuenta que $T \equiv \text{Tr}(T_\nu^\mu) = 3P - \rho$ tenemos:

$$R_{tt} = 8\pi G \left(\rho + \frac{1}{2}(3P - \rho) \right) = \frac{8\pi G}{2}(3P + \rho)$$

CAPÍTULO 2. ENERGÍA OSCURA

2.6. LA ECUACIÓN DE FRIEDMANN

Sin embargo, habíamos encontrado que $R_{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$ (cf. expresiones (1.20)), por tanto:

$$\begin{aligned} -3\frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{8\pi G}{2}(3P + \rho) \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(3P + \rho) \end{aligned} \quad (2.9)$$

A esta ecuación se le llama la *2da ecuación de Friedmann*. La *primera ecuación de Friedmann*, o más brevemente, la **Ecuación de Friedmann** se deriva a partir de esta como sigue:

Tomamos ahora la componente R_{rr} . A partir de (2.8), la componente de la matriz (1.12) donde $T_{rr} = g_{rr}P$, y tomando en cuenta de (1.10) que $g_{rr} = a^2/(1 - kr^2)$ tenemos:

$$R_{rr} = 8\pi G \frac{a^2}{1 - kr^2} \left(P - \frac{1}{2}(3P - \rho) \right)$$

pero en (1.20) habíamos encontrado que

$$R_{rr} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}$$

igualando estas dos expresiones obtenemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} = 4\pi G(\rho - P)$$

Sustituyendo la segunda ecuación de Friedmann (2.9) en esta última expresión:

$$2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} = 4\pi G(\rho - P) + \frac{4\pi G}{3}(3P + \rho) \quad (2.10)$$

$$= \frac{4\pi G}{3}(3\rho - 3P + \rho + 3P) \quad (2.11)$$

$$= \frac{4\pi G}{3}4\rho \quad (2.12)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (2.13)$$

Ahora, definimos el **parámetro de Hubble** como

$$\boxed{H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}} \quad (2.14)$$

De esta forma, tenemos finalmente:

$$\boxed{H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{k}{a^2(t)}} \quad (2.15)$$

Esta es la **Ecuación de Friedmann**

Otra manera alternativa de expresar la ecuación de Friedmann es de la siguiente forma. Primero reescribimos la ecuación y luego haremos algunas definiciones.

CAPÍTULO 2. ENERGÍA OSCURA
2.6. LA ECUACIÓN DE FRIEDMANN

Manipulando los términos de (2.15):

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2(t)}\rho(t) - \frac{k}{a^2(t)H^2(t)}$$

Definimos ahora la *densidad crítica* $\rho_{crit}(t)$ como

$$\rho_{crit}(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \quad (2.16)$$

Definimos el cociente de densidades Ω como la densidad de materia ρ entre la densidad crítica ρ_{crit}

$$\Omega(t) \equiv \rho(t)/\rho_{crit}(t)$$

También definimos un parámetro de densidad Ω_k para la *curvatura del espacio - tiempo*

$$\Omega_k(t) \equiv -\frac{k}{a^2(t)H^2(t)} \quad (2.17)$$

Con estas definiciones podemos reescribir la ecuación de Friedmann (2.16) como:

$$\Omega_k(t) + \Omega(t) = 1 \quad (2.18)$$

Nótese que $\rho(t)$ es la densidad total, es decir, es la suma de densidades de todas las componentes del universo, de aquí que $\Omega(t)$ también lo sea. Esto es:

$$\rho(t) = \rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_\Lambda(t) \quad (2.19)$$

$$\Omega(t) = \Omega_m(t) + \Omega_r(t) + \Omega_\Lambda(t) \quad (2.20)$$

donde

ρ_m = Densidad de materia bariónica y oscura ($\approx 27\%$, actualmente)

ρ_r = Densidad de radiación ($\approx 0\%$, actualmente)

ρ_Λ = Densidad de energía oscura ($\approx 73\%$, actualmente)

Utilizando la definición (2.17) y la ecuación (2.18) podemos también definir una Ω *total* donde también incluyamos a la Ω_k de curvatura, como:

$$\Omega_{total}(t) = \Omega_k(t) + \Omega_m(t) + \Omega_r(t) + \Omega_\Lambda(t)$$

Con esto, la ecuación de Friedmann la podemos escribir de manera más compacta y elegante como:

$$\boxed{\Omega_{total}(t) = \Omega_k(t) + \Omega_m(t) + \Omega_r(t) + \Omega_\Lambda(t) = 1} \quad (2.21)$$

Otra manera alternativa de expresar a la ecuación de Friedmann, es en términos de z y de las Ω 's de los distintos tipos de materia, evaluados hoy:

$$\boxed{H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m^0 (1+z)^3 + \Omega_\Lambda^0 + \Omega_r^0 (1+z)^4 + \Omega_k^0 (1+z)^2}} \quad (2.22)$$

El superíndice cero en una cantidad indica que está evaluada en el tiempo presente $t = t_0$. Por ejemplo, H_0 es el valor del parámetro de Hubble evaluado en el presente.

Todas estas formas son equivalentes y útiles en diferentes situaciones, por lo que conviene tomarlas en cuenta.

2.6.1. Parámetro de desaceleración

Tomemos la primera derivada temporal del parámetro de Hubble

$$\dot{H}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right) = \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}$$

Definimos el **parámetro de desaceleración** como

$$q(t) = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \tag{2.23}$$

Resulta que:

$\ddot{a} > 0 \Rightarrow q(t) < 0$ Cuando el universo se expande *aceleradamente*

$\ddot{a} < 0 \Rightarrow q(t) > 0$ Cuando el universo se expande *desaceleradamente*

De igual forma, de la definición del parámetro de Hubble $H(t)$ vemos que:

$H(t) > 0 \Rightarrow$ *Expansión* del universo

$H(t) < 0 \Rightarrow$ *Contracción* del universo

CAPÍTULO 2. ENERGÍA OSCURA
2.6. LA ECUACIÓN DE FRIEDMANN

Capítulo 3

Datos de supernovas y su estadística

3.1. Las Supernovas

Existen diferentes técnicas observacionales para generar datos que podamos comparar con la teoría para el estudio de la Cosmología, y en particular de la Energía Oscura; tales como la medición de distancias de objetos lejanos, medición de anisotropías en la radiación cósmica de fondo y estudio de la distribución actual de las galaxias.

Básicamente lo que se necesita es hacer mediciones de las distancias a las que se encuentran los objetos en el Universo (tales como Supernovas, Galaxias, cúmulos y supercúmulos de galaxias) y la velocidad con la que se mueven con respecto a nosotros. Lo que se quiere es tener la mayor cantidad posibles de mediciones de distancias de objetos tanto cercanos como lejanos.

Para los objetos cercanos no hay mucha dificultad hoy en día. Sin embargo, para objetos distantes (del orden de megaparsecs) es un verdadero desafío conseguir medir sus distancias debido a diversas dificultades, y que además, el valor medido sea lo suficientemente confiable como para tomarlo en cuenta.

Actualmente, una de las técnicas más empleada para la medición de objetos distantes es midiendo *Supernovas tipo Ia*¹(SNe Ia). A pesar de su brillantez, las SNe's siguen siendo muy difícil de medir su distancia, ¡hoy en día solo se cuenta con alrededor de unos 300 datos únicamente!

Existe un proyecto para hacer mediciones de una gran cantidad de supernovas, es a través del satélite (???) dedicado para tal fin. Planea medir alrededor de 2000 ??? supernovas a partir del 200???

¹Son el remanente de una estrellas que ha explotado, por lo cual es muy brillante y puede *verse* desde una gran distancia

CAPÍTULO 3. DATOS DE SUPERNOVAS Y SU ESTADÍSTICA
3.1. LAS SUPERNOVAS

3.1.1. Redshift

La distancia a la cual se encuentra un objeto se suele expresar en términos de su corrimiento al rojo, o del inglés “*redshift* z ”. Esta se define como:

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_o}{\lambda_o} \quad (3.1)$$

Existe una relación muy útil e importante entre el redshift z y el factor de escala $a(t)$ que aparece en la métrica de FRW (cf. (1.9)):

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)} \quad (3.2)$$

3.1.2. Redshift vs Distancia Modular

Comenzemos por definir algunas cantidades usadas en las observaciones:

Luminosidad L Cantidad de energía radiada por una fuente, en todas direcciones, por unidad de tiempo

Flujo F Cantidad de energía radiada por una fuente, por unidad de tiempo, unidad de area

Luego

$$L = \int_{S^2} F dA = 4\pi r^2 F \quad \Rightarrow \quad F = \frac{L}{4\pi r^2}$$

Distancia Modular

Para los astrónomos es de gran utilidad una medida de luminosidad, muy particular, que le llama la **distancia modular**, que es equivalente a nuestra noción de distancia. En general, depende de z y se define como:

$$\boxed{\mu(z) \equiv m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L(z)}{1 \text{ Mpc}} \right) + 25} \quad (3.3)$$

donde

m = Magnitud aparente

M = Magnitud absoluta

Mpc = Un megaparsec

d_L = Distancia de Luminosidad, que se define como:

$$d_L(z) \equiv (1 + z)d_{\text{eff}}(z) \quad (3.4)$$

$$d_{\text{eff}}(z) \equiv ca(t_0) \text{Sinn } \chi(z)$$

donde, con “Sinn $\chi(z)$ ” queremos escribir de manera abreviada lo siguiente:

Sinn χ = Sen χ (Seno) Si el universo es **cerrado** (i.e., $k > 0 \Rightarrow \Omega_m^0 + \Omega_\Lambda^0 > 0$)

Sinn χ = χ Si el universo es **plano** (i.e., $k = 0 \Rightarrow \Omega_m^0 + \Omega_\Lambda^0 = 0$)

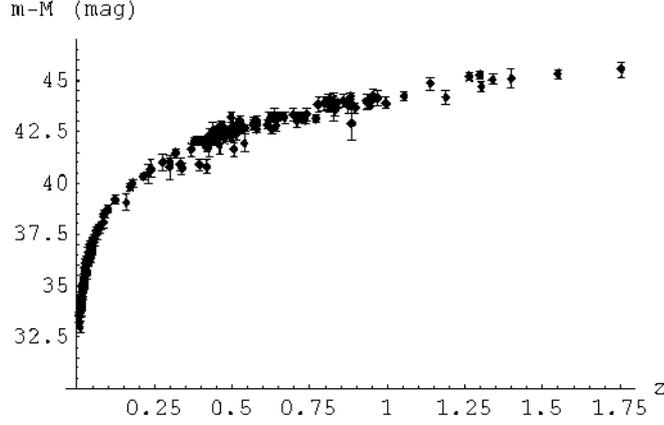


Figura 3.1: Diagrama de Hubble. Se grafican los datos $zvs\mu(z)$ de las supernovas tipo Ia. Esta gráfica es generada con la *muestra de oro* de los datos de Riess et al. 2004 [7], que consta de 157 SNe Ia.

Sinn $\chi = \text{Senh } \chi$ (Seno hiperbólico) Si el universo es **abierto** (i.e., $k < 0 \Rightarrow \Omega_m^0 + \Omega_\Lambda^0 < 0$)

$a(t_0)$ = factor de escala evaluado en el tiempo presente t_0

c = velocidad de la luz

“ χ ” es una función que depende del redshift z y se define como:

$$\chi(z) = \frac{1}{a(t_0)} \int_0^z \frac{dz}{H(z)}$$

Nota En lo sucesivo, utilizaré un subíndice (o superíndice, siempre que no haya confusión) “cero (0)” para indicar a cualquier cantidad evaluada hoy en día, i.e., $t = t_0$. Por ejemplo, el parámetro de Hubble evaluado hoy: $H(t_0) = H_0$.

Ahora, usando las anteriores expresiones, más la ecuación de Friedmann expresada en términos del parámetro de Hubble y las Ω 's (2.22), expresamos la forma completa de la distancia de luminosidad como:

$$d_L(z) = ca(t_0)(1+z) \text{Sinn} \left[\frac{1}{a(t_0)} \int_0^z \frac{dz}{H_0 [\Omega_m^0(1+z)^3 + \Omega_\Lambda^0 + \Omega_r^0(1+z)^4 + \Omega_k^0(1+z)^2]^{1/2}} \right] \quad (3.5)$$

3.2. Los datos

Los datos relevantes para nosotros van a ser la distancia modular $\mu(z)$ y su respectivo redshift z , para cada una de las supernovas. Estos datos los podemos graficar y con ello generar el llamado *Diagrama de Hubble*. Este diagrama se muestra en la figura 3.1.

3.3. Estadística Paramétrica

Como se podrá ver de las secciones anteriores, una parte central de la cosmología es medir (o inferir) de alguna manera los valores de parámetros cosmológicos.

En específico, los parámetros que nos son de interés en el presente trabajo de tesis, y que nos concentramos en estimar son Ω_m y Ω_Λ . También el parámetro de curvatura Ω_k es importante, pero queda determinado una vez que son calculados Ω_m y Ω_Λ (cf. (2.21))

Sin embargo, en la práctica, sabemos que no se puede medir ninguna cantidad con infinita precisión sino que solo se hace una estimación de su valor a través de observaciones, experimentos o algún otro mecanismo, y mientras más refinadas sean las observaciones, más precisas serán las mediciones del valor.

Podemos resumir lo anterior como sigue: Existe un parámetro X en la naturaleza, del cual, solo la naturaleza conoce su valor exacto y que llamaremos a_0 . Este valor nos es desconocido para nosotros, pero a través de observaciones y/o experimentos logramos estimar el valor aproximado del mismo, que llamaremos a_e . Y a través de análisis estadístico determinamos que el valor a_0 (que desconocemos) se encuentra en un intervalo δa aproximadamente centrado en el valor a_e . Por tanto, la estimación de a_0 será:

$$a_0 = a_e \pm \delta a$$

Debido a que la parte teórica de este trabajo de tesis se confrontó con los datos que actualmente se disponen de las observaciones de supernovas, hubo que hacer un análisis estadístico de los mismos. En las siguientes secciones hago una descripción del análisis estadístico realizado.

Comenzemos por explicar la notación que utilizo:

Definición 1 Sean X y Y dos proposiciones las cuales solo pueden tomar dos valores cada una: que sea falsa o verdadera. Además, sea I una suposición. Entonces:

$Prob(X, Y|I)$ = Probabilidad de que X y Y sean verdaderas, asumiendo a I como verdadera.

Esta definición se extiende a cualquier número n de proposiciones X_1, X_2, \dots y de suposiciones I_1, I_2, \dots .

En el contexto de nuestro estudio, X_1, X_2, \dots , serán los parámetros a inferir (e.g., los valores de los parámetros Ω_m, Ω_Λ y Ω_k) a partir de los datos observacionales. Y I_1, I_2, \dots será la información de fondo, con la que ya contamos respecto al universo y que asumimos como cierta (e.g., los datos observacionales de las supernovas, la teoría de la Relatividad, etc.)

La idea básica del estudio estadístico es buscar los valores de los parámetros que *mejor se ajusten a los datos*. Esto significa, en términos de probabilidad, el buscar los valores que nos den la **máxima probabilidad** de que sean ciertos. Esta búsqueda la haremos a través de una técnica estadística llamada **Prueba χ^2** .

3.3.1. Teoremas de probabilidad

Los dos axiomas de probabilidad que nos interesan son los siguientes:

CAPÍTULO 3. DATOS DE SUPERNOVAS Y SU ESTADÍSTICA

3.3. ESTADÍSTICA PARAMÉTRICA

Axioma 1 *Suma de probabilidades:*

$$\text{Prob}(X|I) + \text{Prob}(\bar{X} | I) = 1$$

donde \bar{X} significa la negación de la proposición X

Axioma 2 *Producto de probabilidades:*

$$\text{Prob}(X, Y | I) = \text{Prob}(X | Y, I) \cdot \text{Prob}(Y | I)$$

Como se mencionó al principio de esta sección, lo que queremos calcular son los valores de ciertos parámetros cosmológicos tales que maximicen la probabilidad de que estos valores sean ciertos en base a los datos observacionales.

Esto se traduce primeramente en calcular cierta probabilidad muy particular que se le *probabilidad posterior* (o del inglés *posterior probability*) y se define como:

$$\text{Prob}(X | Y, I)$$

Esta expresión la podemos leer como: “*probabilidad de que los valores propuestos para los parámetros cosmológicos $X = (\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ sean ciertos, asumiendo a los datos observacionales de las supernovas $Y = (\text{datos SNe Ia})$ como verdaderos, así como también, a algunos otros valores cosmológicos y a la teoría misma I , como ciertos*”

Podríamos pensar como si fuéramos a probar diferentes valores para los parámetros X y para cada valor de los parámetros dado, medimos su probabilidad posterior. Y continuamos con esta prueba de valores hasta encontrar aquellos que nos den la máxima probabilidad de ser ciertos, a los cuales llamaremos **la mejor estimación**, en base a los datos dados.

Desafortunadamente es difícil poder calcular la probabilidad posterior directamente, pero a través del **Teorema de Bayes** se puede hacer este cálculo.

Teorema 1 (Bayes)

$$\text{Prob}(X | Y, I) = \frac{\text{Prob}(Y | X, I) \cdot \text{Prob}(X | I)}{\text{Prob}(Y | I)}$$

donde, cada uno de estos factores tienen un nombre particular, que son:

$\text{Prob}(X | Y, I)$ = Probabilidad posterior (*posterior probability*)

$\text{Prob}(Y | X, I)$ = Función de probabilidad (*likelihood function*)

$\text{Prob}(X | I)$ = Probabilidad previa (*prior probability*)

El teorema de Bayes se demuestra fácilmente de los axiomas (1) y (2).

Otra herramienta estadística de gran utilidad es la **ecuación de marginalización**:

Proposición 1 (Ecuación de Marginalización)

$$\text{Prob}(X|I) = \text{Prob}(X, Y|I) + \text{Prob}(X, \bar{Y}|I)$$

Como puede verse, en el lado derecho de la igualdad de esta ecuación, la probabilidad ya solo depende de la proposición X , la proposición Y ya no esta presente.

Esta ecuación principalmente nos será útil para eliminar una proposición, la cual no nos interesa estimar.

Esto es de gran ayuda, ya que en términos teóricos, lo que estamos logrando es eliminar un *parámetro libre* no relevante, de la teoría. Y que, de conservarlo, incrementaría la imprecisión en la estimación de los parámetros que realmente nos son importantes.

Hasta ahora, solo hemos tenido proposiciones las cuales, cada una solo puede tomar dos valores: **falso o verdadero**. Sin embargo, nuestras definiciones pueden generalizarse fácilmente al caso cuando las proposiciones pueden tomar más de dos valores, por ejemplo, que la proposición X pueda adquirir valores **discretos** tales como A, B, C, \dots , o más aún, que pueda escoger entre un **continuo** de valores. En este caso, la ecuación de marginalización tiene la forma:

Proposición 2 *Ecuación de Marginalización (Caso continuo)*

$$\text{Prob}(X|I) = \int \text{pdf}(X, Y|I) dY$$

*intregrando sobre todos los posibles valores de Y . La función $\text{pdf}(X, Y|I)$ se llama **función de densidad de probabilidad***

3.4. Prueba χ^2

A continuación describiré la técnica estadística de estimación de parámetros llamada **Prueba χ^2** , que fue la manera en que se estimaron los valores cosmológicos de nuestro interés a partir de los datos de las supernovas Ia, utilizando los elementos ya descritos en las secciones anteriores.

Sean:

$X \equiv$ Vector cuyas componentes son el conjunto de los parámetros a estimar su valor.

En específico: $X = (\Omega_m, \Omega_\Lambda)$

$D \equiv$ Vector cuyas componentes son el conjunto de observaciones de las supernovas, i.e., los 157 datos de las supernovas: $D = (x_1, x_2, \dots, x_{157}) = ([z_1, \mu_1], [z_2, \mu_2], [z_3, \mu_3], \dots, [z_{157}, \mu_{157}])$.

El teorema de Bayes toma la forma:

$$\text{Prob}(X | D, I) \propto \text{Prob}(D | X, I) \cdot \text{Prob}(X | I) \tag{3.6}$$

Como se puede ver, hemos omitido el denominador que aparecía en el teorema de Bayes (??). Esto porque no es un término relevante², lo importante son los otros dos términos: la *función de probabilidad* $\text{Prob}(D | X, I)$, y la *probabilidad previa* $\text{Prob}(X | I)$.

Nuestro cálculo se basará en tres suposiciones. La primera es:

²El término que iría como denominador sería: $\text{Prob}(D|I)$ = probabilidad de que los datos sean ciertos asumiendo que la teoría es válida.

Proposición 3 *La probabilidad previa es igual a una constante:*

$$\text{Prob}(X | I) = \text{cte}$$

Esta primera suposición no es tan aventurada como podría pensarse a primera vista, ya que $\text{Prob}(X | I)$ es la probabilidad de que los parámetros X tengan cierto valor, asumiendo a la teoría e información de fondo como verdaderas. Pero de la pura teoría e información de fondo, los parámetros X no prefieren algún valor en particular, sino que, son los datos D quienes nos permitirán escoger cuáles valores para X nos dan la mayor probabilidad. Por tanto, *a priori* no podemos asignar alguna probabilidad mayor para algún valor particular de X sino que en principio, lo más que podemos hacer es asignar la misma probabilidad (i.e., $\text{Prob}(X | I) = \text{cte}$) a todos los valores posibles de X .

Dado la probabilidad previa es una constante, entonces, todo el peso de calcular la probabilidad posterior recae sobre la función de probabilidad, esto es:

$$\text{Prob}(X | D, I) \propto \text{Prob}(D | X, I) \quad (3.7)$$

Ahora, tomemos dos datos cualesquiera x_k y x_l del conjunto de datos D . Del axioma (2) tenemos que:

$$\text{Prob}(x_k, x_l | X, I) = \text{Prob}(x_k | x_l, X, I) \cdot \text{Prob}(x_l | X, I) \quad (3.8)$$

En este momento conviene establecer nuestra segunda suposición. Esta es:

Proposición 4 *La medición observacional de cada dato x_k es independiente de la medición de cualquier otro dato x_l .*

Esta suposición es muy razonable, ya el medir la distancia modular $\mu(z)$ (cf. definición (3.3)) de una supernova, no influye en la medición que obtendremos al medir la distancia modular de alguna otra.

Utilizando esta suposición, obtenemos:

$$\text{Prob}(x_k | x_l, X, I) = \text{Prob}(x_k | X, I)$$

de aquí que:

$$\text{Prob}(x_k, x_l | X, I) = \text{Prob}(x_k | X, I) \cdot \text{Prob}(x_l | X, I)$$

Solo ha desaparecido el término x_l de la ecuación (3.8). Aplicando esta proposición (4) a todos los datos, la función de probabilidad se vuelve:

$$\text{Prob}(D | X, I) = \prod_{k=1}^n \text{Prob}(x_k | X, I) \quad (3.9)$$

La tercera suposición es:

Proposición 5 *La distribución de probabilidad de cada dato x_k , generada a partir de las mediciones observacionales de x_k , es en una buena aproximación, una distribución gaussiana.*

CAPÍTULO 3. DATOS DE SUPERNOVAS Y SU ESTADÍSTICA

3.4. PRUEBA χ^2

En otras palabras, esto significa que la distribución de probabilidad del dato x_k , tienen la forma:

$$\text{Prob}(x_k|X, I) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \text{Exp} \left[-\frac{(t_k - x_k)^2}{2\sigma_k^2} \right] \quad (3.10)$$

donde:

t_k = es la *media* de la distribución gaussiana.

σ_k = es la desviación estandar que se obtiene de las multiples observaciones

En términos cosmológicos, el dato x_k es la medición de la distancia modular $\mu_k(z)$ de la k-ésima supernova del conjunto de supernovas de los que se disponen datos. La distribución de probabilidad de $\mu_k(z)$ surge de todas las mediciones realizadas a la k-ésima supernova para calcular el valor de $\mu_k(z)$, y que de acuerdo con al tercera suposición (5), tiene una distribución normal, centrada en el valor t_k , que es el valor que *teóricamente* predecimos acerca del valor μ_k , al cual podemos etiquetar como:

$$\mu_k^t(z) \equiv \text{valor teórico de } \mu_k$$

Nótese que solo $\mu_k^t(z)$ depende de z ; μ_k no porque viene de las observaciones, es un dato fijo.

Combinando (3.9) y (3.10), la función de probabilidad toma la forma:

$$\text{Prob}(D|X, I) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \text{Exp} \left[-\frac{(\mu_k^t(z) - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2} \right]$$

En este caso σ_k es la desviación estandar que se obtiene de las multiples observaciones de una supernova. Este es un dato que se obtiene de las observaciones.

Definiendo a la constante A :

$$A \equiv \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}}$$

y a la **función** $\chi^2(z)$ como:

$$\chi^2(z) \equiv \sum_{k=1}^n \frac{(\mu_k^t(z) - \mu_k)^2}{\sigma_k^2} \quad (3.11)$$

obtenemos:

$$\text{Prob}(D|X, I) = A \text{Exp} \left[-\frac{\chi^2(z)}{2} \right]$$

Por tanto, de acuerdo a (3.7), hemos hallado una expresión para la probabilidad posterior:

$$\text{Prob}(X|D, I) = B \text{Exp} \left[-\frac{\chi^2(z)}{2} \right] \quad (3.12)$$

donde B es una constante de proporcionalidad (y normalización), en ella ya va incluida la constante A .

Nuestro objetivo será ahora, hallar los valores para los parámetros Ω_m, Ω_Λ tales que maximizen a la probabilidad (3.12), y esto lo haremos justamente con la *función* $\chi^2(z)$, quien es el corazón de la prueba que lleva el mismo nombre.

Como puede verse de la probabilidad (3.12), los valores que la maximizan serán aquellos que *minimizen* a la función $\chi^2(z)$. Por tanto, la tarea se reduce a hallar los valores que minimizen a $\chi^2(z)$ tomando la definición (3.11), a esto se le llama, **prueba** $\chi^2(z)$.

3.5. Teoría vs Datos

A continuación, voy a describir el análisis de la teoría con los datos. Empezaré por mostrar los diferentes ajustes de la teoría a los datos, pero antes, conviene introducir una utilidad de la χ^2

3.5.1. χ^2 como medida de calidad de ajuste

Una vez que construimos un modelo teórico cosmológico que contiene ciertos parámetros libres que deseamos calcular a través de los datos, aplicamos la prueba χ^2 y al hacerlo logramos dos cosas:

Estimación de parámetros La prueba nos da como resultado *la mejor estimación* de los valores de los parámetros libres, de acuerdo al modelo teórico propuesto y en comparación con los datos.

Calidad de ajuste La misma prueba nos dice qué tan bueno es el ajuste de la teoría a los datos, suponiendo como verdaderos los valores de las mejores estimaciones de los parámetros libres.

Mientras más pequeño sea el valor de χ^2 , mejor a sido nuestro ajuste de la teoría a los datos, y por tanto, podemos decir que tenemos una buena calidad de ajuste.

En el caso óptimo de una buena teoría, esperamos que el valor de χ^2 sea del orden del número de datos.

3.5.2. El “Modelo de concordancia”

Este modelo consiste en suponer que el universo tiene una geometría *plana* y esta compuesto como:

materia bariónica + materia oscura = $0,27 \pm 0,04$

energía oscura = $0,73$

radiación ≈ 0

Este es modelo el más aceptado hasta hoy en día en la comunidad, principalmente porque diversos tipos de observaciones y pruebas cosmológicas tales como las *anisotropías de la radiación de fondo* o la *distribución de las galaxias* lo favorecen entre otros modelos

De la ecuación de Friedman (2.22), para este caso toma la forma:

$$H(z) = H_0 \sqrt{0,27(1+z)^3 + 0,73} \quad (3.13)$$

De aquí que la distancia de luminosidad (3.5) adquiera la siguiente forma (recuérdese que estamos en el caso *plano*):

$$d_L(z) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz}{H_0 \sqrt{0,27(1+z)^3 + 0,73}}$$

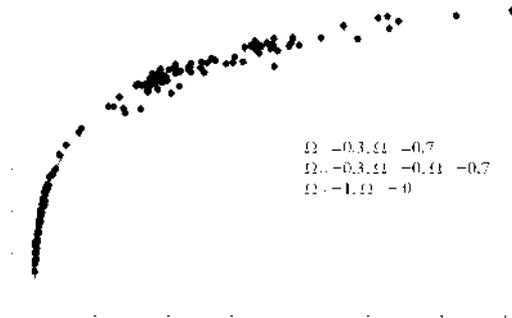


Figura 3.2: Diagrama de Hubble de los datos de las SNE Ia y su comparación con algunos modelos sobre el contenido materia en el universo. Nótese cómo el modelo de concordancia logra ajustar mejor los datos, que los otros dos.

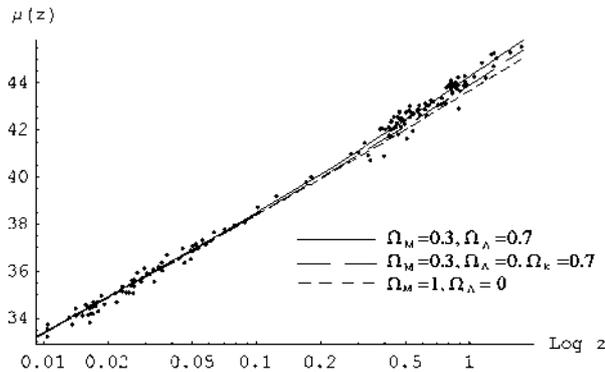


Figura 3.3: Diagrama de Hubble de las SNE Ia en escala logarítmica.

y usando la definición de la distancia moduli $\mu(z) \equiv m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L(z)}{1 \text{ Mpc}} \right) + 25$, podemos generar el diagrama de Hubble de este para comparar con las observaciones. Esta comparación la muestro en la figura 3.2.

Como se puede ver en las figuras 3.2 y 3.3, el ajuste del modelo a los datos es bastante bueno. No obstante, la *calidad* del ajuste lo medimos a través de prueba estadística χ^2

Haciendo la prueba χ^2 obtenemos un valor de: $\chi^2 \simeq 193,966$ (habiendo ya marginalizado con respecto a H_0).

3.5.3. Otros modelos

Para otras ideas que de manera natural podríamos pensar sobre el contenido del universo tenemos³:

³Para comprender mejor la tabla, conviene tener en cuenta la relación entre Ω_M , Ω_Λ y Ω_k que es la ecuación de Friedman. (2.21).

Para generar esta tabla asumiendo un valor de $H_0 = 65,5$ en el segundo y tercer caso

CAPÍTULO 3. DATOS DE SUPERNOVAS Y SU ESTADÍSTICA

3.6. ¿CÓMO SABEMOS QUE EL UNIVERSO SE EXPANDE ACELERADAMENTE HOY? ANÁLISIS DE Q_0

Modelo			χ^2
$\Omega_M^0 = 0,27$	$\Omega_\Lambda^0 = 0,73$	$\Omega_k^0 = 0$ (Universo plano)	193.9
$\Omega_M^0 = 0,3$	$\Omega_\Lambda^0 = 0$	$\Omega_k^0 = 0,7$ (Universo abierto)	303
$\Omega_M^0 = 1$	$\Omega_\Lambda^0 = 0$	$\Omega_k^0 = 0$ (Universo plano)	569

Las gráficas de estos modelos se muestran en la figuras 3.2 y 3.3.

3.5.4. Estimación de H_0

El análisis de los datos de las supernovas también nos permite calcular el parámetro de Hubble H_0 .

La manera de hacerlo consiste en dejar a H_0 como parámetro libre de la teoría, y calcular a través de la prueba χ^2 , cual es su mejor estimación.

Esta manera de calcular H_0 , a pesar de ser buena, no es la mejor, así que los resultados que se puedan obtener de el valor de H_0 a partir de SNE Ia, debe ser comparado y analizado con otras pruebas astrofísicas que también calculan H_0 .

Vale la pena hacer notar que la *estimación* del valor de H_0 *depende* de la teoría. En nuestro caso, *depende del modelo cosmológico que asumamos*.

3.6. ¿Cómo sabemos que el universo se expande *aceleradamente* hoy? Análisis de q_0

El estudio de los datos y la conclusión de que el universo se expande aceleradamente se logra a través del **parámetro de desaceleración**⁴ « $q(z)$ » (cf. a la sección 2.6.1).

Como se comentó en la sección 2.6.1, $q(z)$ se define como:

$$q(z) = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \tag{3.14}$$

Pero usando el hecho de que $H(z) = \frac{\dot{a}}{a_0}$ podemos reescribir a $H(z)$ como:

$$H(z) = H_0 \exp\left(\int_0^z [1 + q(u)] d\ln(1 + u)\right)$$

Luego, asumiendo un universo plano, la distancia de luminosidad adquiere la forma:

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \exp\left(-\int_0^z [1 + q(u)] d\ln(1 + u)\right) du$$

No conocemos la forma funcional del parámetro $q(z)$, sin embargo, podemos hacer una expansión y estudiarla a primer orden

$$q(z) = q_0 + z \frac{dq}{dz}\Big|_{z=0} \tag{3.15}$$

Esto nos va a permitir, por un lado calcular el valor que q tiene hoy en día ($q(z=0) \equiv q_0$). Y por otro lado, $(dq/dz)|_{z=0}$ nos dirá si este valor esta cambiando actualmente

⁴Pues cuestiones históricas se le llamo parámetro de *desaceleración*, ya que hasta antes de 1998 se pensaba que el universo se expandía pero *desaceleradamente*.

CAPÍTULO 3. DATOS DE SUPERNOVAS Y SU ESTADÍSTICA

3.6. ¿CÓMO SABEMOS QUE EL UNIVERSO SE EXPANDE ACELERADAMENTE HOY? ANÁLISIS DE Q_0

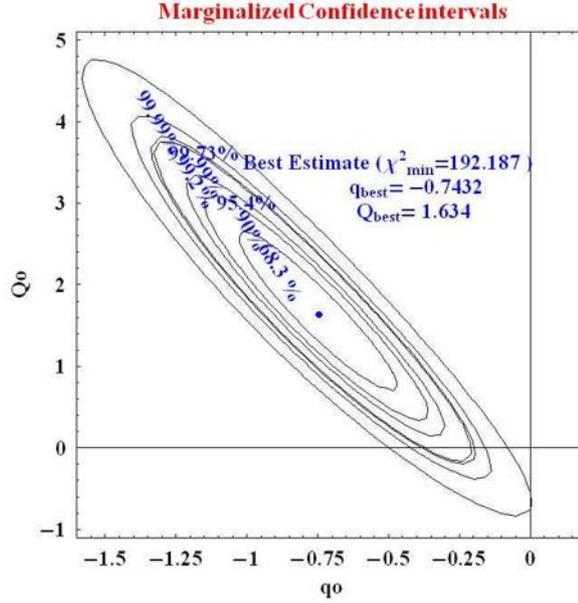


Figura 3.4: Intervalos de confianza para los parámetros $(q_0, (dq/dz)|_{z=0})$. Obsérvese como los datos favorecen a un universo acelerado en su expansión, con un nivel de confianza del 99.99%, y con una pasada desaceleración con aproximadamente 97% de confianza, a partir de la muestra de oro de SNe Ia. Nota: en la gráfica, el símbolo $Q_0=(dq/dz)|_{z=0}$.

y como fue en el pasado, i.e., si el universo algún tiempo atrás tuvo una desaceleración, o bien, desde siempre ha estado acelerando.

Tomando en cuenta la expansión a primer orden del parámetro $q(z)$, la expresión (3.6) se vuelve:

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{(1+z)^{1+q_0-q'_0} e^{zq'_0}}$$

con esto, podemos entonces definir distancia modular $(\mu(z) = 5 \log_{10}(d_L(z)/1 \text{ Mpc}) + 25)$ que utilizaremos para hacer la prueba χ^2 .

En este estudio, los dos parámetros libres de la teoría son $(q_0, (dq/dz)|_{z=0})$. A H_0 lo hemos ya marginalizado para desaparecerlo de la distribución de probabilidad.

Realizando un estudio estadístico a través de la prueba χ^2 obtenemos que los valores de la mejor estimación de q_0 y $(dq/dz)|_{z=0}$ a partir de los datos, son:

$$q_0 = -0,7432 \quad \frac{dq}{dz}|_{z=0} = 1,6344 \quad \chi^2 = 192,187 \quad (3.16)$$

¡¡Encontramos que $q_0 < 0$!! Esto nos indica que el universo *está acelerando en su expansión actualmente..* Además, podemos concluir también que ha habido una desaceleración pasada: $(dq/dz)|_{z=0} > 0$.

En la figura 3.4 se muestran los intervalos de confianza para la estimación de $(q_0, (dq/dz)|_{z=0})$

CAPÍTULO 3. DATOS DE SUPERNOVAS Y SU ESTADÍSTICA
3.7. ANÁLISIS DEL CONTENIDO DE MATERIA EN EL UNIVERSO ($\Omega_M^0, \Omega_\Lambda^0$).

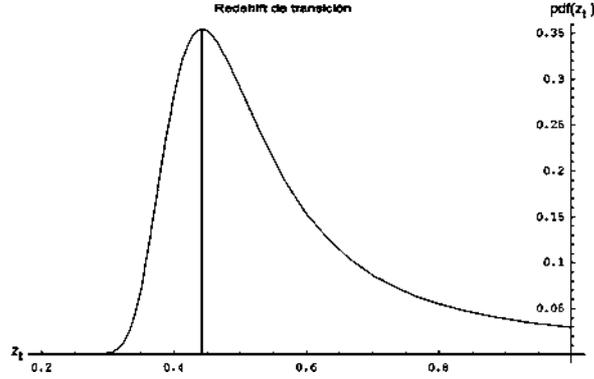


Figura 3.5: Función de distribución de probabilidad para el redshift de transición z_t .

3.6.1. ¿Hubo una transición *desaceleración-aceleración*?

Los datos parecen dar evidencia de que el universo se expande aceleradamente, entonces ¿Alguna vez el universo pudo haber estado expandiéndose *desaceleradamente*? Para responder a esta pregunta, podemos apoyarnos en los cálculos de la sección anterior.

En la sección anterior encontramos que los datos dan evidencia de que el universo tuvo una pasada desaceleración ($q'_0 > 0$). Por tanto, podemos pensar que el universo alguna vez estuvo expandiéndose *desaceleradamente* y luego, por alguna razón o mecanismo, sufrió una transición a una expansión acelerada.

De la expresión (3.15) notemos que habrá una transición entre desaceleración - aceleración justamente cuando el parámetro de desaceleración $q(t) = 0$. Esto sucederá para un redshift de transición z_t Entonces:

$$\begin{aligned} 0 = q(z_t) &= q_0 + q'_0 z_t \\ \Rightarrow z_t &= -\frac{q_0}{q'_0} \end{aligned} \quad (3.17)$$

El valor para la mejor estimación que encontramos es $z_t = 0,442338$.

La figura 3.5 muestra la distribución de probabilidad para z_t entre desaceleración y aceleración en la expansión.

Estos resultados están en concordancia con los reportados por el grupo de Riess et al [7].

3.7. Análisis del contenido de materia en el universo ($\Omega_M^0, \Omega_\Lambda^0$).

Otro análisis relevante que podemos realizar con los datos, es calcular el contenido de los diversos tipos de materia del universo. Como se ha discutido en las secciones anteriores, básicamente tenemos dos tipos de materia: materia bariónica más materia oscura (Ω_M^0), y energía oscura (Ω_Λ^0). Además, también está presente la curvatura del espacio, que también lo podemos tratar matemáticamente como otra componente más de materia (Ω_k^0), aunque

CAPÍTULO 3. DATOS DE SUPERNOVAS Y SU ESTADÍSTICA
3.7. ANÁLISIS DEL CONTENIDO DE MATERIA EN EL UNIVERSO ($\Omega_M^0, \Omega_\Lambda^0$).

esta componente queda determinada, una vez que las otras dos son estimadas (cf. la ecuación de Friedman (2.21)).

Ahora vamos a calcular la cantidad de materia en el universo de cada uno de estos tipos. Para ello, dejaremos a ($\Omega_M^0, \Omega_\Lambda^0$) como parámetros libres de la teoría y los vamos a estimar a través de χ^2 .

De las ecuaciones (2.22) y (2.21) obtenemos:

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0|1-\Omega_M^0-\Omega_\Lambda^0|^{1/2}} \text{Sinn} \left(|1-\Omega_M^0-\Omega_\Lambda^0|^{1/2} \int_0^z \frac{dz}{\tilde{H}(z)} \right) \quad (3.18)$$

donde

$$\tilde{H}(z) = \sqrt{\Omega_M^0(1+z)^3 + \Omega_\Lambda^0 + (1-\Omega_M^0-\Omega_\Lambda^0)(1+z)^2} \quad (3.19)$$

La expresión de *Sinn* va de acuerdo a la geometría del universo que estemos tratando: abierto, cerrado o plano. En la sección 3.1.2 se describe con detalle el significado de *Sinn*.

Después de hacer una análisis estadístico de los datos en base a este modelo, obtenemos los siguiente resultados ⁵:

Geometría	Mejor estimación			χ^2
Plano	$\Omega_M^0 = 0,3086$	$\Omega_\Lambda^0 = 0,6913$	$\Omega_k^0 = 0$	193.96
Cerrado	$\Omega_M^0 = 0,4591$	$\Omega_\Lambda^0 = 0,9795$	$\Omega_k^0 = -0,4386$	191.91
Abierto	$\Omega_M^0 = 0,3322$	$\Omega_\Lambda^0 = 0,70189$	$\Omega_k^0 = -0,0341$	193.98

Los intervalos de confianza de estos tres modelos se muestran en la figura 3.6. Además de los intervalos de confianza, esta gráfica nos es muy conveniente para ilustrar diversas características de los modelos cosmológicos y notar en qué parte de los intervalos de confianza, están ubicados (lo que equivale a confrontar con los datos)

Se muestran diferentes valores para el parámetro de desaceleración q_0 . La cota teórica para los valores de Ω_M^0 y Ω_Λ^0 en base al “*no big-bang*”. Y el comportamiento sobre la expansión por siempre del universo, o bien su recolapso, todo en base a los valores de Ω_M^0 y Ω_Λ^0 .

⁵los cuales, están en buena concordancia con [7]

CAPÍTULO 3. DATOS DE SUPERNOVAS Y SU ESTADÍSTICA
3.7. ANÁLISIS DEL CONTENIDO DE MATERIA EN EL UNIVERSO ($\Omega_M^0, \Omega_\Lambda^0$).

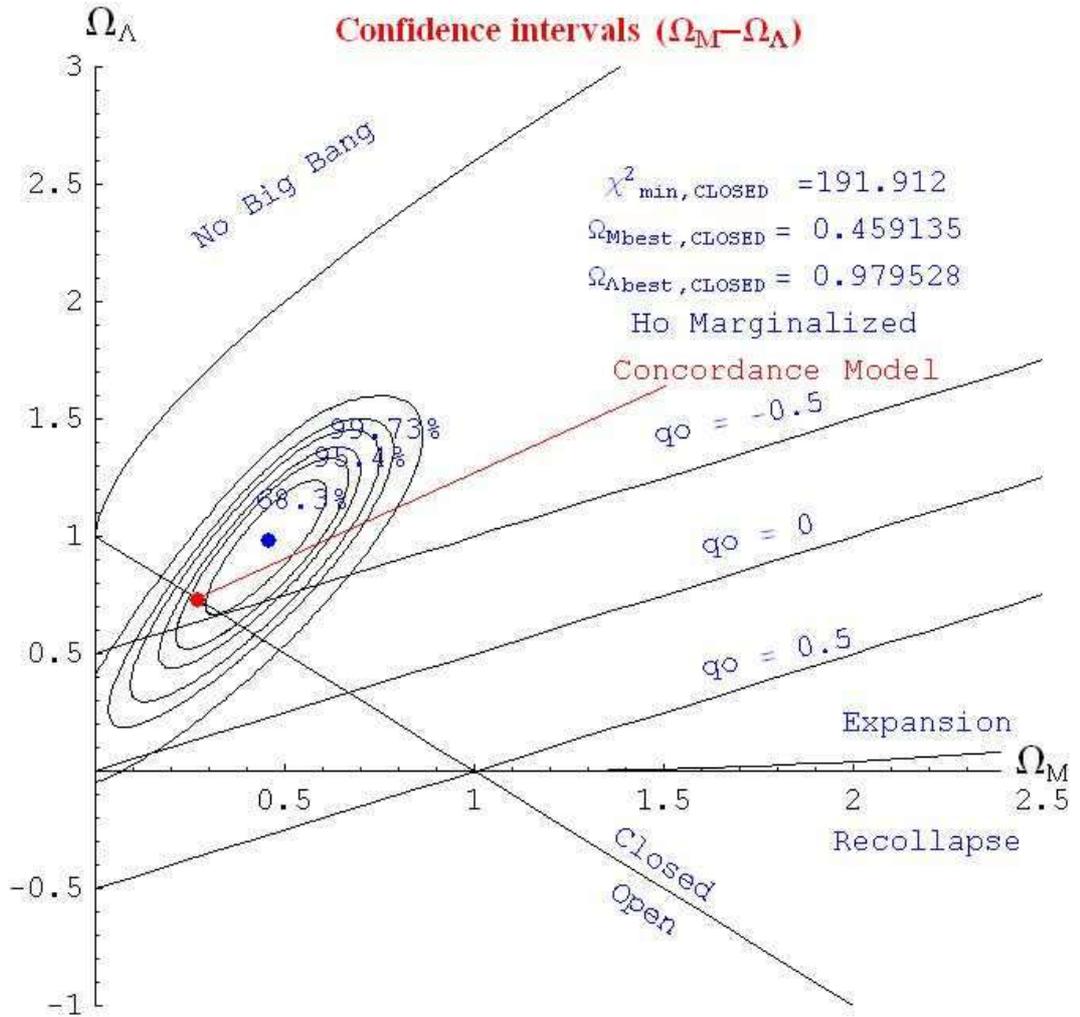


Figura 3.6: Intervalos de confianza para los parámetros $\Omega_M^0, \Omega_\Lambda^0$. El punto azul indica el valor de los parámetros en la mejor estimación, que resulta ser para el caso cerrado. El punto rojo indica el lugar donde está ubicado el modelo de concordancia. Las demás líneas muestran el comportamiento teórico del universo, según sean los valores de $\Omega_M^0, \Omega_\Lambda^0$.

CAPÍTULO 3. DATOS DE SUPERNOVAS Y SU ESTADÍSTICA
3.7. ANÁLISIS DEL CONTENIDO DE MATERIA EN EL UNIVERSO ($\Omega_M^0, \Omega_\Lambda^0$).

Capítulo 4

Modelos Cosmológicos con fluidos viscosos

El tensor de energía-momento para un fluido con viscosidad volumétrica es [14]:

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu + (g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu) (P - \xi \nabla_\alpha U^\alpha) \quad (4.1)$$

donde $\xi(x^\mu) \equiv$ Parámetro de viscosidad que depende en general del espacio-tiempo. El término de viscosidad es proporcional al gradiente de la cuadri-velocidad del fluido U^μ . Ésto es equivalente a definir una presión efectiva como:

$$P^* \equiv P - \xi \nabla_\alpha U^\alpha \quad (4.2)$$

Para un modelo cosmológico FRW tenemos:

$$\nabla_\alpha U^\alpha = 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = 3H(t) \quad (4.3)$$

Por lo que la presión efectiva es:

$$P^* = P - 3\xi(t)H(t)$$

aquí el coeficiente de viscosidad depende, en general, del tiempo cósmico, lo cual esta de acuerdo con las simetrías de homogeneidad e isotropía espacial de los modelos de FRW. Entonces en este caso las ecuaciones de Friedmann tienen la forma:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) - \frac{k}{a^2(t)} \quad (4.4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} [\rho + 3P^*] = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P - 9\xi H(t)) \quad (4.5)$$

donde hemos asumido que tenemos varios fluidos no interactuantes con la misma cuadri-velocidad U^μ (es decir, solamente interactúan gravitacionalmente) y con su propio coeficiente de viscosidad ξ_i , por lo cual tenemos (el índice i denota cada componente de

CAPÍTULO 4. MODELOS COSMOLÓGICOS CON FLUIDOS VISCOSOS

4.1. MODELO COSMOLÓGICO DOMINADO POR MATERIA VISCOSA

fluido):

$$\rho = \sum_i \rho_i \quad (4.6)$$

$$P = \sum_i P_i \quad (4.7)$$

$$\xi = \sum_i \xi_i \quad (4.8)$$

además obtenemos la ecuación de movimiento para cada componente de fluido:

$$\dot{\rho}_i = -3H(\rho_i + P_i^*) = -3H(\rho_i + P_i - 3\xi_i H) \quad (4.9)$$

Para cada componente de fluido asumimos una ecuación de estado:

$$P_i = w_i \rho_i \quad (4.10)$$

donde w_i es una constante. Introduciendo (4.10) en (4.9) tenemos:

$$\dot{\rho}_i + 3H[\rho_i(1 + w_i) - 3\xi_i H] = 0 \quad (4.11)$$

reescribimos esta última ecuación como:

$$a \frac{d\rho_i}{da} = 3[3\xi_i H - (1 + w_i)\rho_i] \quad (4.12)$$

En la próxima sección analizaremos dos casos particulares con el fin de estudiar los efectos de la viscosidad sobre la aceleración reciente del universo:

- Modelo cosmológico dominado por materia viscosa (bariónica y oscura).
- Modelo cosmológico dominado por energía oscura viscosa y por materia no viscosa (bariónica y oscura).

Para ello usaremos las ecuaciones de Friedmann (4.4), (4.5) y la ecuación de movimiento para cada componente de fluido (4.11).

4.1. Modelo cosmológico dominado por materia viscosa

En este caso tenemos la condición para un fluido hecho de polvo: $w_m = 0$ y de la ecuación (4.12) obtenemos,

$$a \frac{d\rho_m}{da} = 9\xi_m H - 3\rho_m \quad (4.13)$$

sustituyendo la ecuación de Friedmann (4.4) en (4.13) obtenemos,

$$a \frac{d\rho_m}{da} = 9\xi_m \left[\frac{8\pi G}{3} \rho_m - \frac{k}{a^2(t)} \right]^{1/2} - 3\rho_m \quad (4.14)$$

CAPÍTULO 4. MODELOS COSMOLÓGICOS CON FLUIDOS VISCOSOS

4.2. ANÁLISIS DEL CASO DE MATERIA CON VISCOSIDAD

motivados por el modelo inflacionario introducimos la restricción $k = 0$ (caso plano) y adicionalmente asumimos el coeficiente de viscosidad $\xi_m = \text{constante}$; bajo estas condiciones encontramos una solución de (4.14):

$$\rho_m(a) = \frac{\exp(-\alpha)}{a^3} \left[1 + (24\pi G)^{1/2} \exp(\alpha/2) \xi_m a^{3/2} \right]^2 \quad (4.15)$$

donde α es una constante de integración. Por conveniencia definimos el parámetro de viscosidad adimensional:

$$\tilde{\xi}_m \equiv \frac{8\pi G}{3H_0^2} \xi_m \quad (4.16)$$

Imponiendo la condición $\rho_m(a_0) = \rho_m^0$ en el presente y dividimos la ecuación (4.15) por $\rho_{crit}^0 \equiv (3H_0^2)/(8\pi G)$, obtenemos:

$$\frac{\rho_m(a)}{\rho_{crit}^0} = \left[3\tilde{\xi}_m + \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^{3/2} \left[\Omega_m^0 \pm 6\tilde{\xi}_m \sqrt{\Omega_m^0} + 9\tilde{\xi}_m^2 \right]^{1/2} \right]^2 \quad (4.17)$$

reescribimos la ecuación anterior en términos del corrimiento al rojo z usando la relación $(1+z) = a_0/a(t)$:

$$\frac{\rho_m(a)}{\rho_{crit}^0} = \left[3\tilde{\xi}_m + (1+z)^{3/2} \left[\Omega_m^0 \pm 6\tilde{\xi}_m \sqrt{\Omega_m^0} + 9\tilde{\xi}_m^2 \right]^{1/2} \right]^2 \quad (4.18)$$

Finalmente de la ecuación de Friedmann encontramos el parámetro de Hubble:

$$H(z) = H_0 \left(\frac{\rho_m(a)}{\rho_{crit}^0} \right)^{1/2} = H_0 \left[3\tilde{\xi}_m + (1+z)^{3/2} \left[\Omega_m^0 \pm 6\tilde{\xi}_m \sqrt{\Omega_m^0} + 9\tilde{\xi}_m^2 \right]^{1/2} \right] \quad (4.19)$$

En este caso la distancia de luminosidad es:

$$d_L(z) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \quad (4.20)$$

con $H(z)$ dado por (4.19)

En este modelo el único parámetro libre es $\tilde{\xi}_m$ debido a que $\Omega_m^0 = 1$

4.2. Análisis del caso de materia con viscosidad

En este modelo proponemos que el universo está compuesto *únicamente* por materia bariónica, más materia oscura, además, que es plano ($\Omega_k = 0$).

Proponemos que esta materia tiene una cierta viscosidad $\tilde{\xi}_m$. Esto, como una búsqueda de explicación a las observaciones (o la expansión acelerada) proponiendo que es debida puramente a efectos de viscosidad de la materia, y sin la necesidad de añadir un nuevo tipo de materia como lo es la energía oscura.

Proponemos que la viscosidad $\tilde{\xi}_m$ es constante en el tiempo. Esto significa, que esta viscosidad siempre ha estado presente en el universo desde sus orígenes y que no ha cambiado desde entonces.

CAPÍTULO 4. MODELOS COSMOLÓGICOS CON FLUIDOS VISCOSOS

4.3. MODELO COSMOLÓGICO DOMINADO POR ENERGÍA OSCURA VISCOSA Y POR MATERIA NO VISCOSA (BARIÓNICA Y OSCURA)

De la teoría obtenemos (4.19). De aquí podemos obtener la expresión de la distancia modular $\mu(z) = 5 \log_{10} (d_L(z)/1 \text{ Mpc}) + 25$.

Estamos interesados en estudiar la viscosidad del fluido de materia. En particular, queremos estimar su valor a través de los datos, y al mismo tiempo, observar que tan bueno es el ajuste que se logra a los datos a través de este modelo.

En este modelo tenemos dos casos para los parámetros libres de la teoría:

Caso 1 Parámetros libres: la viscosidad $\tilde{\xi}_m$ únicamente.

Caso 2 Parámetros libres: la viscosidad $\tilde{\xi}_m$ y el parámetro de Hubble H_0 .

Al realizar la prueba χ^2 para calcular las mejores estimaciones de los parámetros libres obtenemos:

Modelo	Signo	Mejor estimación	χ^2
$\tilde{\xi}_m, (H_0 = 65,5)$	+	$\tilde{\xi}_m = -0,023$	359.321
$\tilde{\xi}_m, (H_0 = 65,5)$	-	$\tilde{\xi}_m = 0,0100$	554.112
$\tilde{\xi}_m, H_0$	+	$\tilde{\xi}_m = 9,073, H_0 = 0,548$	239.281
$\tilde{\xi}_m, H_0$	-	$\tilde{\xi}_m = 0,333, H_0 = 15,677$	235.856

El signo «+» y «-» sale de considerar los dos casos de la ecuación (4.19).

En los dos primeros casos que muestra la tabla, asumimos un valor de $H_0 = 65,5$, que estadísticamente equivale a proponer una probabilidad previa para el parámetro H_0 igual a una delta de Dirac, centrada en el valor $H_0 = 65,5$

$$pdf(H_0|D, I) = \delta(H_0 - 65,5)$$

Al comparar gráficamente los resultados de la tabla, con los datos, obtenemos las figuras 4.1 y 4.2.

4.2.1. Conclusiones del Modelo 1

Para el caso en que se tienen como parámetros libres a $\tilde{\xi}_m$ y a H_0 , el valor de la mejor estimación para H_0 es demasiado pequeño en comparación con los valores que se obtienen de las anisotropías de la radiación de fondo.

Para el caso en que se asume el valor de $H_0 = 65,5$, se obtienen valores muy grandes para $\chi^2_{dof} = 2,28$ (donde “dof” = grados de libertad, en nuestro caso, 157 datos) para el caso «+» con $\tilde{\xi}_m$ como parámetro libre.

En todos los demás casos, también se obtienen valores de χ^2_{dof} mucho más grandes que 1.

4.3. Modelo cosmológico dominado por energía oscura viscosa y por materia no viscosa (bariónica y oscura)

En este caso tenemos las ecuaciones de estado:

$$P_m = 0 \tag{4.21}$$

$$P_X = w_X \rho_X \tag{4.22}$$

CAPÍTULO 4. MODELOS COSMOLÓGICOS CON FLUIDOS VISCOSOS
4.3. MODELO COSMOLÓGICO DOMINADO POR ENERGÍA OSCURA VISCOSA
Y POR MATERIA NO VISCOSA (BARIÓNICA Y OSCURA)

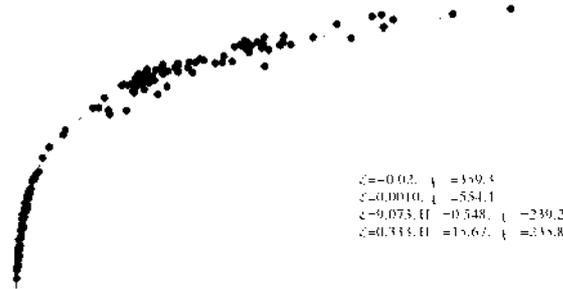


Figura 4.1: Comparación del primer modelo con los datos. En la gráfica prácticamente quedan superpuestas las curvas para los dos últimos modelos, es decir, para $\xi = \tilde{\xi}_m = 9,073$, $H_0 = 0,548$ con el de $\xi = \tilde{\xi}_m = 0,333$, $H_0 = 15,677$. Esto era de esperarse ya que ambos tienen un valor en su calidad de ajuste (χ^2) muy cercano entre ellos. Para los otros dos, tienen un valor de χ^2 más grande, lo que implica una calidad de ajuste a los datos no tan buena. Esto puede apreciarse en la figura. Nota: en la gráfica $\xi = \tilde{\xi}_m$ del texto

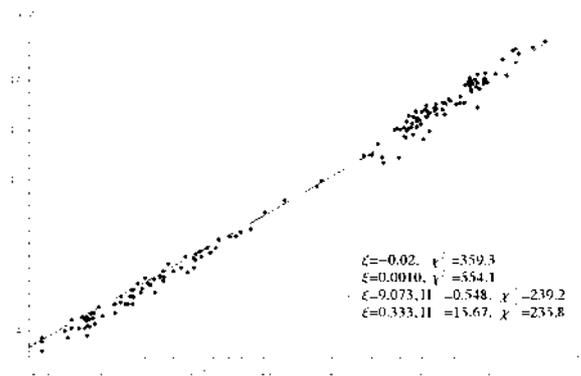


Figura 4.2: Comparación del primer modelo con los datos. El eje z está en escala logarítmica. Nota: en la gráfica $\xi = \tilde{\xi}_m$ del texto

CAPÍTULO 4. MODELOS COSMOLÓGICOS CON FLUIDOS VISCOSOS
4.3. MODELO COSMOLÓGICO DOMINADO POR ENERGÍA OSCURA VISCOSA
Y POR MATERIA NO VISCOSA (BARIÓNICA Y OSCURA)

con coeficiente de viscosidad cero para el polvo $\xi_m = 0$, y ξ_X para el fluido de energía oscura. Las ecuaciones de movimiento para los dos fluidos son (de la ecuación 4.12 para $i = m, X$):

$$a \frac{d\rho_m}{da} = -3\rho_m \quad (4.23)$$

$$a \frac{d\rho_X}{da} = 9\xi_X H - 3(1 + w_X)\rho_X \quad (4.24)$$

resolviendo (4.23) obtenemos la expresión conocida para el polvo:

$$\rho_m(a) = \rho_m^0 \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 \quad (4.25)$$

mientras que la ecuación de friedmann toma la forma:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} [\rho_m + \rho_X] - \frac{k}{a^2(t)} \quad (4.26)$$

Ahora asumimos un coeficiente de viscosidad ξ_X dependiente del tiempo cósmico a través del parámetro de hubble:

$$\xi_X = \epsilon_X H \quad (4.27)$$

entonces (4.24) es escrita como:

$$a \frac{d\rho_X}{da} = 9\epsilon_X H^2 - 3(1 + w_X)\rho_X \quad (4.28)$$

En adelante, asumimos un universo con $k = 0$ (plano). Introduciendo (4.26) en (4.28) obtenemos:

$$a \frac{d\rho_X}{da} = 24\pi G \epsilon_X \left[\rho_X + \rho_m^0 \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 \right] - 3(1 + w_X)\rho_X \quad (4.29)$$

Por conveniencia definimos los parámetros adimensionales:

$$\tilde{\epsilon}_X \equiv \frac{8\pi G}{3} \epsilon \quad (4.30)$$

$$\alpha = 9\tilde{\epsilon}_X - 3(1 + w_X) \quad (4.31)$$

y la constante:

$$\beta \equiv 9\tilde{\epsilon}_X \rho_m^0 a_0^3 \quad (4.32)$$

La solución a la ecuación (4.29) es:

$$\rho_X(a) = \frac{1}{(3 + \alpha)a^3} \left[\left(\frac{a}{a_0} \right)^{(3+\alpha)} [\beta + a_0^3 \rho_X^0 (3 + \alpha)] - \beta \right] \quad (4.33)$$

CAPÍTULO 4. MODELOS COSMOLÓGICOS CON FLUIDOS VISCOSOS

4.4. ANÁLISIS DE MODELO DE ENERGÍA OSCURA CON VISCOSIDAD

Dividimos la expresión anterior entre ρ_{crit}^0 :

$$\frac{\rho_X(a)}{\rho_{crit}^0} = \frac{9\tilde{\epsilon}_X [\Omega_m^0 (1 - (1+z)^{(3+\alpha)}) + \Omega_X^0] - 3w_X \Omega_X^0}{(3+\alpha)(1+z)^\alpha} \quad (4.34)$$

Usamos la constricción $\Omega_X^0 = 1 - \Omega_m^0$ (válida en el caso plano) en (4.34):

$$\frac{\rho_X(a)}{\rho_{crit}^0} = \frac{3(3\tilde{\epsilon}_X - w_X) + 3\Omega_X^0 [w_X - 3\tilde{\epsilon}_X(1+z)^{(3+\alpha)}]}{(3+\alpha)(1+z)^\alpha} \quad (4.35)$$

Usando (4.35) en la ecuación de Friedmann (4.26) tenemos la expresión final para el parámetro de Hubble en términos de los parámetros libres ($\Omega_m^0, w_X, \tilde{\epsilon}_X$):

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_m^0 (1+z)^3 + \frac{\rho_X(a)}{\rho_{crit}^0} \right]^{1/2} \quad (4.36)$$

4.4. Análisis de modelo de energía oscura con viscosidad

En este modelo proponemos que el universo esta compuesto por materia bariónica, más materia oscura, pero que además, sí contiene energía oscura también. De igual forma que el modelo anterior, supondremos un universo plano.

Ahora, proponemos que la viscosidad la tiene el fluido de energía oscura, y con la forma funcional de la viscosidad:

$$\xi_X = \epsilon_X H \quad (4.37)$$

En este modelo tenemos dos parámetros libres de la teoría: la viscosidad ξ_X y la constante de proporcionalidad w_X de la ecuación de estado para la energía oscura ¹.

Al realizar la prueba χ^2 para calcular las mejores estimaciones de los parámetros libres obtenemos²

Mejor estimación	χ^2
$\tilde{\epsilon}_X = -0,66259$ $w_X = -4,40426$	190.559

En las figuras 4.3 y 4.4 se muestra el ajuste que se obtiene a los datos.

En la figura 4.5 se muestran los intervalos de confianza para $\tilde{\epsilon}_X$ vs w_X

4.4.1. Conclusiones del Modelo 2

La prueba χ^2 del segundo modelo de viscosidad de la energía oscura nos da un excelente ajuste a los datos, con una $\chi^2 = 190,559$. Incluso mejor que el modelo cosmológico dominado por materia y constante cosmológica (ambos fluidos) *sin* viscosidad. Compárese este resultado con la tabla de la sección 3.5.3.

¹Recuerde que $P_X = w_X \rho_X$. Refiérase a la (2.7) y su discusión para mayores detalles

²Aquí hemos ya marginalizado con respecto al parámetro de Hubble H_0 y hemos asumido del valor de $\Omega_m^0 = 0,27$ que es una constricción que proviene de las observaciones de las anisotropías de la radiación de fondo cósmico

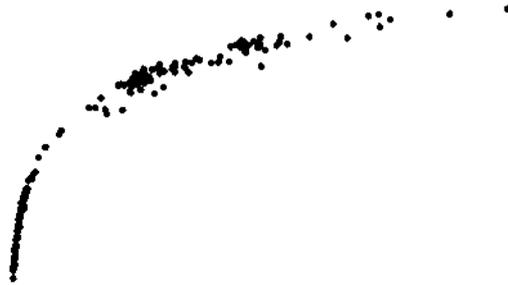


Figura 4.3: Comparación del segundo modelo con los datos. Nótese la excelente calidad de ajuste del modelo a los datos.

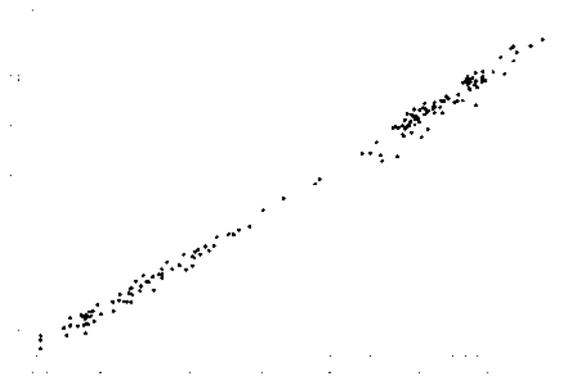


Figura 4.4: Comparación del segundo modelo con los datos. El eje z está en escala logarítmica. Nota: en la gráfica $\zeta_X = \tilde{\epsilon}_X$

CAPÍTULO 4. MODELOS COSMOLÓGICOS CON FLUIDOS VISCOSOS
4.4. ANÁLISIS DE MODELO DE ENERGÍA OSCURA CON VISCOSIDAD

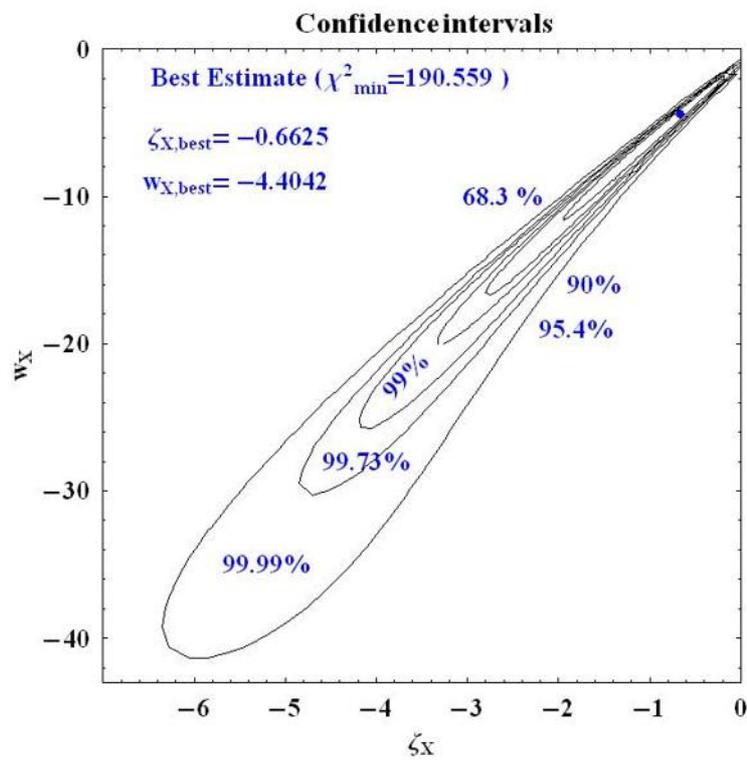


Figura 4.5: Intervalos de confianza de los parámetros $\tilde{\epsilon}_X$ vs w_X . Nota: en la gráfica $\zeta_X = \tilde{\epsilon}_X$.

CAPÍTULO 4. MODELOS COSMOLÓGICOS CON FLUIDOS VISCOSOS

4.4. ANÁLISIS DE MODELO DE ENERGÍA OSCURA CON VISCOSIDAD

Se observa una gran dispersión en el parámetro w_X , lo cual no nos dice mucho sobre la naturaleza de la energía oscura.

Hay que hacer notar, que estas rangos para w_X fueron hallados bajo la suposición de que $\Omega_m^0 = 0,27$, lo que hace robusto este resultado.

Es preciso mencionar que muy recientemente han aparecido una serie de trabajos relacionados con modelos cosmológicos usando fluidos viscosos [17], [18] y [19].

Esta idea de fluidos viscosos cosmológicos ya había sido explorada anteriormente por [15] y [16].

Bibliografía

- [1] S. Perlmutter et al, Nature (London) 391, 51(1998);
- [2] Riess A et al., Astron. J. 116 1009 (1998);
- [3] Tonry, J L et al., 2003 Astroph. J. 594 1;
- [4] Perlmutter S J et al., Astroph. J. 517 565 (1999);
- [5] Barris, B et al., 2004 Astroph. J. 602 571;
- [6] Knop R et al., 2003 Astroph. J. 598 102;
- [7] A. G. Riess et al. [Supernova Search Team Collaboration], Astrophys. J. 607, 665 (2004).
- [8] P. Astier et al., arXiv:astro-ph/0510447. Comments: (The SNLS Collaboration). Accepted in Astron.Astrophys.
- [9] Weinberg S. 1989, Rev.Mod.Phys. 61, 1;
- [10] Carroll S. M., Press W. H., Turner E. L., 1992, Annu. Rev. Astron. Astrophys., 30, 499;
- [11] Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. By Sean M. Carroll (Chicago U., Astron. Astrophys. Ctr.). San Francisco, USA: Addison-Wesley (2004).
- [12] Sean M. Carroll, "The Cosmological Constant", Living Rev. Relativity 4, (2001), 1. URL (cited on 22/02/2006): <http://www.livingreviews.org/lrr-2001-1>.
- [13] James B. Hartle, "Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity". Addison Wesley; 1st edition (2002).
- [14] Steven Weinberg, "Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity". Wiley (1972).
- [15] G. L. Murphy, Phys. Rev. D8, 4231 (1973).
- [16] M. Heller, Z. Klimek, and L. Suszycki, Astrophys. Sp. Sc. 20, 205 (1973).
- [17] Julio Cesar Fabris, S.V.B. Goncalves, R. de Sa Ribeiro (Espirito Santo U.),. Mar 2005. E-Print Archive: astro-ph/0503362.

[18] M. Szydlowski, O. Hrycyna, astro-ph/0602118, 23 of February of 2006.

[19] J. Ren, X.H. Meng. 21 of February of 2006. E-Print Archive: astro-ph/0602462.