

PROBLEMAS DE VALORES DE FRONTERA EN ÁNGULOS CON CONDICIONES DE FRONTERA NO LOCALES.

Por

Marco Antonio Taneco Hernández

Asesor: Dr. Anatoli Merzon

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

*Instituto de Física y Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Instituto de Matemáticas, UNAM
unidad Morelia*

junio 2006

Para mi mayor tesoro.

MI FAMILIA.

Resumen

En esta tesis se estudia un problema de valores en la frontera para la ecuación en derivadas parciales de tipo Helmholtz en un cuadrante. Las condiciones de frontera que se consideran son de tipo absorbente. Se demuestra que en el cuadrante, el problema de valores en la frontera con condiciones de frontera del tipo mencionado tiene únicamente la solución trivial en una clase funcional específica.

Agradecimientos

Esta parte de mi trabajo esta reservada para todas y cada una de las personas que representar en vida, una fuente importante de sabiduria, apoyo cariño y amor.

Antes que nada agradezco a el Creador por situarme en este suspiro de la vida del Universo. Quiero agradecer especialmente a mi esposa Ari quien me enseñó que la paciencia es una virtud, *GRACIAS AMOR!* por tu entrega, amor y confianza, gracias por darme una hija maravillosa.

A ti Daira Atzin, se que aún eres muy pequeña y lo único que te hace feliz es que te amemos y cuidemos con toda esta pasión que despierta tu presencia en nuestra vida. Pero llegará el momento y podras leer cuanta fuerza imprimes a mi vida, mamá y tu siempre serán mi mayor motivación. Este logro es nuestro.

A mis padres por darme la vida y las herramientas para buscar mi destino a lado de mi propia familia. Gracias Anastacia y Victor, siempre estaé orgulloso de ustedes.

Agrdezco inmensamente a todos mis amigos que he conocido en Morelia, Anel y Juan, Gaspar, Luis, Liliana Puaulina, Martín, Tanya, Arturo, Alfredo González, Alfredo Fortiz, Cederik León, Hector A. y Daniela A., Joaquín, Pablo, Epimenio, Santos, Salomon y Johana, Jorge, Rafael. Cada uno representa una estación en mi vida. Por que siempre me brindaron el mayor regalo que uno puede afrendar, confianza y amistad. Siempre estaré orgulloso de ustedes por lo que representan como personas un mi vida. Gracias por su amistad...

También quiero expresar mi gratitud a cada uno de los profesores que fueron partícipes de mi paso por este posgrado, quienes formaron y fortalecieron mi nivel académico. Gracias profesor Jesus R. Muciño por creer en

mi y ayudarme a levantar la cara y no dejarme derrotar. A mi asesor, profesor Anatoli Merzon, por darme la oportunidad de compartir su quehacer científico y depositar en mi persona su confianza.

Agradezco de igual manera a el Instituto de Matemáticas, UNAM, unidad Morelia, y al Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH, por abrirme las puertas y otorgarme todas las facilidades y apoyo. Gracias Lic. Laura por su amistad y a la Sra. Cadelaria por su ayuda.

Finalmente agradezco al Proyecto SEP-2004-C01-46769 del CONACyT, quien soporto el desarrollo del presente trabajo.

Índice

Dedicatoria	II
Resumen	III
Agradecimientos	IV
Contenido	VI
Introducción	IX
CAPÍTULO 1	1
Introducción	1
§ 1. Antecedentes	4
CAPÍTULO 2	7
Operador de frontera de tipo absorbente	7
§ 1. Introducción	7
§ 2. Denotaciones, definiciones y hechos	7
§ 3. Transformada de Fourier	10
§ 4. El operador pseudodiferencial B_{abs}	14
§ 5. Ondas armónicas planas y su transformada de Fourier	17
§ 6. Absorción de ondas planas armónicas	18
CAPÍTULO 3	21
Problema principal	21
§ 1. Introducción	21
§ 2. Planteamiento del problema	22

§ 3. Teoría de Paley-Wiener	22
CAPÍTULO 4	25
· Extensión analítica del problema principal	25
§ 1. Introducción	25
§ 2. Extensión de la ecuación de Helmholtz definida en un cuadrante, a todo el plano	25
§ 3. Transformada de Fourier compleja de la ecuación de Helmholtz y los valores de frontera	28
1. Transformada de Fourier (Real) de la ecuación de Helmholtz	28
2. Extensión Analítica de la ecuación de Helmholtz	29
3. Transformada de Fourier compleja de los valores de frontera	30
CAPÍTULO 5	31
· Superficie de Riemann y la ecuación de co- nexión	31
§ 1. Introducción	31
§ 2. Características complejas del operador de Helmholtz	31
§ 3. Levantamientos de funciones a la superficie de Riemann	32
§ 4. Levantamientos de la ecuación (53) a la superficie de Riemann. La ecuación de conexión	32
§ 5. Levantamientos de las condiciones de frontera sobre la superficie de Riemann	33
§ 6. Reducción del sistema de ecuaciones (61) a ecuaciones sobre la superficie de Riemann. Automorfismos	33
CAPÍTULO 6	35
· Solución sobre las características complejas	35
§ 1. Introducción	35
§ 2. Cubierta universal	35
§ 3. Levantamiento de automorfismos sobre la cubierta universal	36
§ 4. Levantamiento de las funciones $v_l^\beta(z)$, $z \in \mathcal{V}_l^+$, $l = 1, 2$, $\beta = 0, 1$ a la cubierta universal	37

§ 5. Levantamiento del sistema (65) a la cubierta universal de $\mathcal{V}$. . .	42
CAPÍTULO 7	47
Conclusiones	47
§ 1. Investigaciones a futuro	48
Referencias	49

Introducción

En esta tesis estamos interesados en un problema estacionario de propagación de ondas en cuñas con condiciones de frontera no locales. Básicamente la descripción del problema es la siguiente.

Tenemos un dominio no acotado en una cierta región, en la cual se haya un obstáculo G . Hacemos que una onda incidente interactúe con dicho obstáculo. El resultado de esta interacción da como resultado una nueva onda, llamada onda dispersa, de tal forma que la solución a el problema, compuesta de la onda incidente mas la onda dispersa, satisfaga una ecuación en derivadas parciales conocida como la ecuación de D'Alembert junto con algunas condiciones de frontera sobre el obstáculo G .

La meta es obtener la solución a el problema de valores en la frontera mediante el uso de técnicas numéricas de tal forma que la solución sea lo más precisa posible. Para tal fin debemos considerar únicamente un dominio finito, ya que la simulación numérica debe estar confinada a dominios truncados de dimensiones mucho mas pequeñas que el dominio original en donde el fenómeno toma lugar. Nos referiremos a dicho dominio como dominio computacional. En estos términos resulta conveniente introducir ciertos límites artificiales de tal forma que acoten a el dominio computacional en donde se esta desarrollando el problema que estamos estudiando. Y no perturben la solución dentro del dominio computacional, es decir, que la onda dispersa no sea reflejada hacia el interior del dominio cuando incida sobre los límites del dominio computacional.

Plantear condiciones de frontera artificiales sobre los límites de un dominio computacional finito no es tan fácil y depende de la geometría del problema en cuestión y del fenómeno que se esté analizando.

Uno de los objetivos de esta investigación es proponer condiciones de frontera artificiales sobre los límites de dominios computacionales de tal manera que las ondas que inciden sobre dichos límites sean aniquiladas y no se reflejen hacia el interior de los dominios. Esto garantiza en cierto sentido que la solución en los dominios computacionales coincida con la solución en el do-

minios no acotados. Específicamente nosotros solo consideraremos fronteras planas ya que nuestros dominios son rectangulares.

El desarrollo del trabajo es como sigue. En el Capítulo 1 hacemos una introducción breve de cómo aparecen problemas de valores en la frontera de este tipo y damos algunos antecedentes.

En el Capítulo 2 introducimos a los operadores de frontera de tipo absorbente. Justificamos el buen planteamiento de un problema de valores de frontera para el caso de el semi-plano derecho $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 > 0\}$ y encontramos la condición de frontera artificial que aniquila a las ondas incidentes sobre la frontera de dicho semi-plano.

En el Capítulo 3 planteamos un problema definido en el primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$ y proponemos condiciones de frontera artificiales sobre los límites de dicho cuadrante. Se observa que es bien planteado en algún sentido. Esto nos motiva a tratar de resolver dicho problema mediante técnicas del Método de las características complejas [7], el cual se basa principalmente en la teoría de Paley-Wiener.

En el Capítulo 4 extendemos el problema definido en un cuadrante a todo el plano. Reformulamos el problema definido en todo el plano en términos de los datos de Cauchy del mismo y expresamos las condiciones de frontera artificiales en términos de los datos de Cauchy. Aplicamos transformación de Fourier a la ecuación de Helmholtz y a las condiciones de frontera y extendemos analíticamente el problema a una área compleja, utilizando la teoría de Paley-Wiener.

En el Capítulo 5 establecemos una relación algebraica de los datos de Cauchy sobre la superficie de Riemann que genera los ceros del símbolo del operador diferencial de Helmholtz. Para tal fin se definen levantamientos de las funciones involucradas sobre la superficie de Riemann. Tal relación algebraica no es bien planteada pero utilizando ciertos automorfismos definidos sobre la superficie de Riemann se logra que éste se convierta en un problema bien planteado.

En el Capítulo 6 se introduce la cubierta universal de la superficie de Riemann que generan las características complejas del operador de Helmholtz y se resuelve el problema sobre ella.

Finalmente en el Capítulo 7 se expresa el resultado principal de esta tesis.

CAPÍTULO 1

Introducción

Muchos problemas interesantes que aparecen en física, biología, acústica, sismología y otras ciencias naturales están descritos por ecuaciones en derivadas parciales cuyas soluciones están compuestas de ondas. En estos campos de la ciencia la simulación precisa de dichos problemas es importante para ampliar el entendimiento de los fenómenos básicos involucrados, así como también en el diseño y desarrollo de aplicaciones tecnológicas en ingeniería. En general, la simulación numérica debe estar confinada a dominios truncados de dimensiones mucho mas pequeños que el espacio físico en donde el fenómeno toma lugar, esto debido a la capacidad computacional finita. Para truncar el dominio físico no acotado introducimos fronteras artificiales Γ y condiciones de frontera adecuadas que corresponden a dicha frontera. Esto define un nuevo dominio Ω , al cual nos referiremos como dominio computacional (véase Figura 1).

Existen cuatro clases principales de métodos que se pueden utilizar para estudiar problemas con dominios no acotados truncados:

- 1 Métodos que involucran condiciones de frontera de tipo integral,
- 2 Métodos de elemento finito,
- 3 Métodos que involucran condiciones de frontera de tipo absorbente,
- 4 Métodos de capa absorbente.

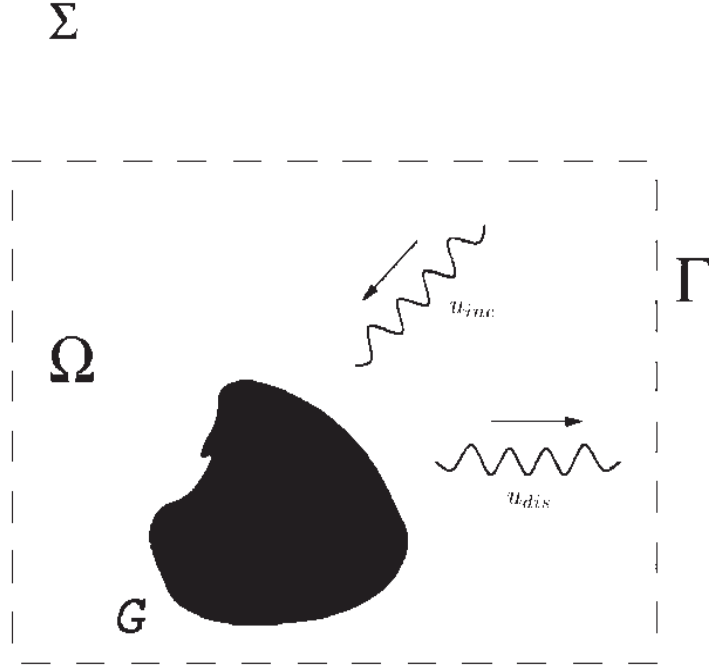


Figura 1: Representación de un dominio computacional acotado por la frontera Γ . Aquí la unión de Σ y Ω constituyen el dominio no acotado original.

En el presente trabajo únicamente nos interesa considerar condiciones de frontera de tipo absorbente, ya que son nuestra principal motivación para plantear un problema de valores en la frontera que definiremos más adelante.

Para que el problema sea bien planteado, Ω debe ser cerrado y por supuesto debe ser dada una condición de frontera adecuada sobre Γ . Y lo más importante, debemos elegir la condición de frontera de tal manera que la solución sobre Ω coincida con la solución del problema en el dominio no acotado. Específicamente se consideran problemas donde están presentes ondas viajeras. Matemáticamente representamos a una onda viajera como una función de la forma

$$u(x, t) = v(z), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

en donde, $z = \vec{n} \cdot x + ct$. Aquí c es alguna constante, conocida como la

velocidad de la onda, mientras que $\vec{n}$ es un vector unitario. Una función de la forma (1) es una onda con una descripción dada por v , moviéndose con una velocidad c en la dirección del vector $-\vec{n}$ y $v(z)$ es una función arbitraria de una variable. Ella satisface la ecuación de D’Alambert

$$\square u(x, t) := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \right) u(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Consideremos el siguiente problema. Tenemos un obstáculo G y una onda incidente que denotaremos por u_{inc} , la cual interactúa con dicho obstáculo G . Este obstáculo G dispersa a la onda u_{inc} y crea una nueva onda, u_{dis} , llamada onda dispersa, de tal forma que

$$u = u_{total} := u_{inc} + u_{dis},$$

satisface la ecuación de D’Alambert (2) junto con condiciones de frontera sobre G y con alguna condición de frontera apropiada sobre Γ .

La meta es obtener u_{total} mediante el uso de técnicas numéricas que resuelvan el problema de la forma mas precisa posible. Para tal fin debemos considerar unicamente un dominio finito, por ejemplo, como se muestra en la Figura 1, en donde Ω representa a dicho dominio acotado por la frontera Γ .

Ahora debemos imponer condiciones de frontera sobre Γ pero, **¿cuáles serán las más adecuadas para nuestros propósitos?**

Si se adoptarán condiciones de frontera de tipo Dirichlet o de tipo Neumann estándares como nuestras condiciones de frontera sobre Γ , entonces en muchos casos, una onda viajera que evolucionó de acuerdo a una ecuación de onda verá a la condición de frontera como una barrera impenetrable y la onda se reflejaría completamente hacia el interior del dominio. Mas precisamente esto significa que la onda viajera (1) no satisfacería la condición de frontera de tipo Dirichlet

$$u(x, t)|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

o la condición de frontera de tipo Neumann

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x, t) \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (4)$$

Además, para que se satisfaga la condición (3) o (4) es necesario agregar la onda reflejada u_{ref} , que es producida cuando la onda incidente u_{inc} chocan con la frontera Γ . Pero en este caso esta onda reflejada u_{ref} perturbará la solución u_{total} . Por lo tanto, las condiciones de frontera del tipo (3) o (4) no son adecuadas para efectuar los cálculos que nos permitirán encontrar la solución u_{total} .

Una manera de usar alguna de las condiciones de frontera mencionadas sería colocarla en una parte muy distante respecto de la solución en Ω , de tal forma que la onda reflejada no afectara la solución en el interior de Ω después de un número grande de desarrollos en el tiempo. En la práctica esto sería muy costoso sobre todo si se desean resolver problemas multi-dimensionales o problemas que involucran muchos pasos en el tiempo.

Otro método es usar *condiciones de frontera artificiales* (o *absorbente*, o *amortiguadas*, o *de radiación* como también son conocidas en la literatura (véase [5] y las referencias citadas ahí)). La virtud de estas condiciones de frontera sobre Γ es que no afecta la solución dentro del dominio Ω , ya que aniquilan todas las ondas incidentes en una manera tal que no se producen reflexiones que se propaguen hacia el interior del dominio. Además tampoco tienen que ser situadas a una distancia muy grande respecto de la solución definida en Ω .

La obtención de las mejores condiciones de frontera absorbentes es muy importante, ya que permitirá una mejor precisión en la simulación de fenómenos que involucran ondas.

En aplicaciones, las áreas que usan fronteras artificiales son en Meteorología para predecir el tiempo localmente, en Geofísica para cálculos que involucren ondas acústicas y elásticas, en dinámica de fluidos, Tomografía, Ultrasonido, etc.

§ 1. Antecedentes

A continuación describiremos brevemente algunos antecedentes que consideramos importantes para el desarrollo del trabajo.

Una condición de frontera se puede definir como un operador

$$B_{abs}u = 0, \quad \text{sobre } \Gamma,$$

que actúa sobre algún espacio específico y está determinado de acuerdo a el

problema que se está estudiando. Diremos que la condición de frontera B_{abs} es absorbente si la restricción de la solución u a Ω es idéntica a la solución sobre el dominio no acotado cerrado con condiciones de frontera en el infinito.

Una condición de frontera absorbente B_{abs} dependerá de la forma de Γ y del problema mismo que se este estudiando. Es posible que sea difícil idear o encontrar una representación explícita de B_{abs} si la frontera Γ es muy complicada. En este trabajo solo se consideran fronteras planas.

Como mencionamos en la Introducción siempre requerimos considerar condiciones de frontera sobre Γ , los límites del dominio computacional Ω , para garantizar la solución y la unicidad a problemas de ecuaciones diferenciales bien planteados. Por supuesto, estas fronteras absorbentes son únicamente una necesidad computacional y no tienen significado físico. Por lo tanto, es altamente deseable idear condiciones de frontera para estas fronteras artificiales de tal manera que minimicen las amplitudes de las ondas reflejadas. En [2] se diseñó una jerarquía de condiciones de frontera para estas fronteras artificiales con las siguientes propiedades:

- (i) Estas condiciones de frontera junto con la ecuación diferencial asociada garantizan un problema de valores a la frontera con condiciones iniciales bien planteado.
- (ii) Las amplitudes de las ondas reflejadas sobre estas condiciones de frontera son tan pequeños como sea posible.

Una serie de trabajos previos se han llevado a cabo para diseñar condiciones de frontera absorbentes para varias ecuaciones de onda.

Usando la teoría de reflexión de singularidades [8]-[10] se pueden desarrollar perfectamente condiciones de frontera amortiguadas o absorbentes (con coeficientes de reflexión idénticamente cero) para sistemas generales de ecuaciones diferenciales hiperbólicos con coeficientes variables.

Las condiciones de frontera absorbentes se pueden dividir en condiciones de frontera para ecuaciones disipativas y condiciones de frontera para ecuaciones no disipativas. Una ecuación no disipativa es aquella que admite soluciones de la forma de ondas planas, como por ejemplo:

$$e^{i(\omega t - k \cdot x)}, \quad \omega \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x, \quad k \in \mathbb{R}^n,$$

en donde la velocidad de propagación de la onda depende completa o parcialmente del número de onda $|k|$. Nosotros solo consideraremos ecuaciones no disipativas.

CAPÍTULO 2

Operador de frontera de tipo absorbente

§ 1. Introducción

En este Capítulo vamos a introducir un cierto tipo de condición de frontera absorbente. Resulta ser que esta condición es no local y se define por medio de un operador pseudodiferencial. Para este fin en §2 enunciaremos algunos conceptos teóricos. Luego en el §3 daremos algunas propiedades de la transformada de Fourier, para después en el el §4 definir a dicho operador de frontera. Finalmente en el §5 introducimos un cierto tipo de onda, las ondas planas armónicas y en el §6 demostramos que este tipo de operador es absorbente con respecto a dichas ondas.

§ 2. Denotaciones, definiciones y hechos

Primeramente describiremos el espacio de funciones que decrecen rápidamente $\mathcal{S}$ y su dual (topológico), el espacio de distribuciones temperadas $\mathcal{S}'$. Para hacer más amable la exposición de las definiciones introducimos algunas notaciones. Nosotros escribiremos funciones sobre $\mathbb{R}^n$, es decir, como $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$; el símbolo $\mathbb{N}_0^n$ denotará el conjunto de todas las suceciones ordenadas de numeros enteros no negativos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Además D^α denotará $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ y x^α denotará $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.

Denotaremos por $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ a el conjunto de todas las funciones de valores complejos que tienen derivada de orden arbitrario. Denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Schwartz de las funciones suaves que decrecen rápidamente en $\mathbb{R}^n$ definido por

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta f)(x)| < \infty, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \right\}, \quad (5)$$

y equipado con la topología determinada por la familia de seminormas $\|\cdot\|_{\alpha, \beta}$, en donde,

$$\|\varphi\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n. \quad (6)$$

El símbolo $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ denotará el espacio de distribuciones temperadas, es decir, a el conjunto de todos los funcionales lineales continuos sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Siempre vamos a considerar a $\mathcal{S}'$ con la topología débil (ver [1] para definición). Resulta ser que $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ y es denso con respecto a la topología débil de $\mathcal{S}'$ [4].

A continuación introducimos un tipo de "función" que será de mucha importancia más adelante. Sea la "función" $\delta : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, conocida como la "función" δ de Dirac, con las siguientes propiedades:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Es evidente que no existe una función en el sentido clásico que satisfaga las propiedades de la "función" δ , ya que cualquier función que se anula casi en cualquier parte de $\mathbb{R}$ posee una integral igual a cero. Esta situación aparentemente contradictoria se resuelve interpretando a la "función" δ como un funcional que asigna el valor $\varphi(0)$ para cualquier función φ que sea continua en el origen, es decir, $\delta(\varphi) = \varphi(0)$.

Formalmente sea $\alpha \in \mathbb{R}^n$ fijo. Definimos la distribución δ de Dirac centrada en el punto α , $\delta(x - \alpha)$, por

$$\langle \delta(x - \alpha), \varphi \rangle = \varphi(\alpha), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (7)$$

Es posible demostrar que $\delta(x - \alpha) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ya que (7) define un funcional lineal y continuo sobre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

A continuación motivaremos el hecho que cada función localmente integrable con alguna condición de crecimiento sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es una distribución, es decir, que el concepto de distribución generaliza el concepto de función común.

Sea $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de las funciones localmente integrables. Supongamos que para $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, existe $C > 0$ y $n \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|)^n. \quad (8)$$

Entonces, la acción de f sobre $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se define como

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx. \quad (9)$$

La integral converge por la cota (8) y la definición (5) y se puede demostrar (ver [4], pag 154) que ella determina una distribución de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Observación 1. *Si una distribución se puede representar en la forma (9), entonces decimos que tal distribución es regular, o es una distribución de tipo función. Todas aquellas distribuciones que no son generadas por funciones localmente intrgrables se dice que son distribuciones singulares, por ejemplo la distribución de tipo δ de Dirac.*

Recordemos el concepto de multiplicar una distribución de la clase $\mathcal{S}'$ por funciones de la clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ que satisfacen cotas del tipo (8). La definición del producto de una distribución por funciones esta motivada por el producto de distribuciones regulares (ver Observación 1) con tales funciones. En efecto, sea $u \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ una función dada que safisface la cota (8) y sea ψ cuaquier función en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ que cumple con la cota (8). Entonces, para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, en virtud de (9) se cumple

$$\begin{aligned} \langle \psi u, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} [\psi(x)u(x)]\varphi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)[\psi(x)\varphi(x)]dx = \langle u, \psi\varphi \rangle. \end{aligned}$$

Teniendo en mente la igualdad del lado izquierdo y del lado derecho, es natural escribir la siguiente definición.

Definición 1. Sea $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que admite una cota del tipo (8) y sea $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Definimos el producto ψu , mediante

$$\langle \psi u, \varphi \rangle = \langle u, \psi \varphi \rangle, \quad (10)$$

para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

El lado derecho de (10) está bien definido ya que $\psi \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Es posible demostrar que $\psi u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (para $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ver por ejemplo [9]).

Ejemplo 1. Sea $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\psi(x)\delta(x - \alpha) = \psi(\alpha)\delta(x - \alpha). \quad (11)$$

En efecto, usando Definición 1 y (7) tenemos

$$\begin{aligned} \langle \psi(x)\delta(x - \alpha), \varphi \rangle &= \langle \delta(x - \alpha), \psi(x)\varphi(x) \rangle \\ &= \psi(\alpha)\varphi(\alpha) = \psi(\alpha)\langle \delta(x - \alpha), \varphi(x) \rangle, \quad \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Definición 2. Sea $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Decimos que f es simétrica si

$$\langle f(-x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(-x) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

No es difícil convencerse que $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ implica que $f(-x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

§ 3. Transformada de Fourier

Sea $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la transformada de Fourier definida por

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[f] := \mathcal{F}[f](\xi) \equiv \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} f(x) dx_1 \cdots dx_n; \quad \xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n. \quad (12)$$

La transformación $\mathcal{F}$ es un isomorfismo lineal topológico, de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, con la topología generada por las seminormas dadas en (6) (ver [11], pag. 107 para la demostración). Esto implica que existe la transformación inversa $\mathcal{F}^{-1}$ tal que para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[\varphi(x)](x) = \varphi(x), \quad \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\xi)](\xi) = \varphi(\xi). \quad (13)$$

El siguiente teorema es principal en la teoría y da la expresión para la transformación inversa de $\mathcal{F}$.

Teorema 1 (Fórmula de inversión [9]). *La transformación de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ está dada por*

$$\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\xi)](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} \varphi(\xi) d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (14)$$

Observación 2. *Es fácil ver que para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que*

$$\mathcal{F}[\varphi(-x)](\xi) = \mathcal{F}[\varphi(x)](-\xi).$$

Lema 1. *Para cada $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene la siguiente representación de la transformada de Fourier inversa (expresión (14)),*

$$\mathcal{F}^{-1}[\varphi(x)](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[\varphi(x)](-\xi).$$

Demostración. Se sigue directamente comparando la fórmula de la transformada de Fourier inversa con la expresión (12). $\square$

La transformación $\mathcal{F}$ se extiende por continuidad a el isomorfismo en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (ver [11], pag. 108 para la prueba). Para hacer esto, notemos primeramente que para cualquier $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \hat{f}(\xi), \varphi(\xi) \rangle = \langle f(x), \hat{\varphi}(x) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (15)$$

se cumple como una consecuencia directa de (12). Entonces, tiene sentido escribir la definición de la transformación de Fourier para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Definición 3. *Sea $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, entonces, el funcional $\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi)$ está definido por la identidad (15).*

Teorema 2. *La transformación $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ actúa por continuidad de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en si mismo y es un isomorfismo algebraico y topológico de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, existe $\mathcal{F}^{-1} : \hat{f} \mapsto f$ que también es una transformación continua de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sobre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Lema 2. *Para $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se tiene que*

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[f(x)](\xi), \psi(\xi) \rangle = \langle f(x), \mathcal{F}^{-1}[\psi(\xi)](x) \rangle, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Dado que la transformación de Fourier es un isomorfismo topológico sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, en particular, es sobreyectiva en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces cada $\psi(\xi)$ es la transformada de Fourier de alguna $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, es decir $\psi(\xi) = \mathcal{F}[\varphi(x)](\xi)$. Entonces, usando (15) y el Teorema 2 tenemos

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}^{-1}[f(x)](\xi), \psi(\xi) \rangle &= \langle \mathcal{F}^{-1}[f(x)](\xi), \mathcal{F}[\varphi(x)](\xi) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1}[f(x)](x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(x) \rangle \\ &= \langle f(x), \mathcal{F}^{-1}[\psi(\xi)](x) \rangle, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

□

Lema 3. Para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se tiene la siguiente igualdad

$$\langle f(x), \hat{\varphi}(-x) \rangle = \langle \hat{f}(-\xi), \varphi(\xi) \rangle, \quad \varphi(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Para $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y haciendo el cambio de variable $\xi \mapsto -\xi$ tenemos que $\mathcal{F}[\varphi(\xi)](-x) = \mathcal{F}[\varphi(-\xi)](x)$. Entonces, usando lo anterior, la Definición 3 y la Definición 2

$$\begin{aligned}\langle f(x), \hat{\varphi}(-x) \rangle &= \langle f(x), \mathcal{F}[\varphi(-\xi)](x) \rangle \\ &= \langle \hat{f}(\xi), \varphi(-\xi) \rangle = \langle \hat{f}(-\xi), \varphi(\xi) \rangle\end{aligned}$$

□

Teorema 3. Para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ y para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\mathcal{F}^{-1}[f(x)](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[f(x)](-\xi).$$

Demostración. A partir de Lema 2, el Lema 1 y el Lema 3 obtenemos

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}^{-1}[f(x)](\xi), \varphi(\xi) \rangle &= \langle f(x), \mathcal{F}^{-1}[\varphi(\xi)](x) \rangle = \langle f(x), (2\pi)^{-n} \mathcal{F}[\varphi(\xi)](-x) \rangle \\ &= (2\pi)^{-n} \langle \mathcal{F}[f(x)](-\xi), \varphi(\xi) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2. $\mathcal{F}[\delta(x - \alpha)] = e^{i\xi \cdot \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$. En efecto, usando (7) y (15) obtenemos que

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[\delta(x - \alpha)](\xi), \varphi(\xi) \rangle &= \langle \delta(x - \alpha), \mathcal{F}[\varphi](\xi) \rangle \\ &= \mathcal{F}[\varphi](\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{i\xi \cdot \alpha} d\xi \\ &= \langle e^{i\xi \cdot \alpha}, \varphi(\xi) \rangle, \quad \varphi(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

En particular, si $\alpha = 0$, entonces, el resultado del Ejemplo 2 implica que $\mathcal{F}[\delta](\xi) = 1$.

A continuación listamos algunas propiedades de la transformada de Fourier que serán de utilidad más adelante. Sea $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces,

$$\left. \begin{array}{l} a) \mathcal{F}\left[\frac{\partial^k}{\partial x_l^k}u\right](\xi) = (-i\xi_l)^k \hat{u}(\xi), \quad l = 1, \dots, n, \quad k \in \mathbb{N}, \\ b) \mathcal{F}[\delta](\xi) = 1, \\ c) \mathcal{F}[1](\xi) = (2\pi)^n \delta(\xi), \\ d) \mathcal{F}[\delta(x - \alpha)](\xi) = e^{i\alpha \cdot \xi}, \\ e) \mathcal{F}[e^{-i\alpha \cdot x}](\xi) = (2\pi)^n \delta(\xi - \alpha), \end{array} \right| \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n, \quad (16)$$

en donde, $\delta = \delta(x)$ es la "función" δ de Dirac definida como en (7).

Demostración.

c)

En virtud de (15) y usando (13) tenemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[1](\xi), \varphi(\xi) \rangle &= \langle 1, \mathcal{F}[\varphi](x) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i0 \cdot x} \hat{\varphi}(x) dx = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}[\varphi](0) \\ &= (2\pi)^n \varphi(0) \\ &= (2\pi)^n \langle \delta(\xi), \varphi(\xi) \rangle, \quad \varphi(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

e)

El Ejemplo 2 implica que $\delta(\xi - \alpha) = \mathcal{F}^{-1}[e^{i\alpha \cdot x}](\xi)$. Ahora usando el Teorema 3 se sigue que

$$\delta(\xi - \alpha) = \mathcal{F}^{-1}[e^{i\alpha \cdot x}](\xi) = \mathcal{F}^{-1}[e^{-i\alpha \cdot (-x)}](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[e^{-i\alpha \cdot x}](\xi),$$

de donde obtenemos e). □

§ 4. El operador pseudodiferencial B_{abs}

Nosotros deseamos introducir operadores de frontera diferenciales apropiados. Inicialmente consideremos la función $\sqrt{\omega^2 - z^2}$, en donde $\omega > 0$, $z \in \mathbb{C}$. Esta función es doble-valuada. A continuación definiremos la rama adecuada para hacer analítica a dicha función. Sea $\mathbb{R}_- := \{z \in \mathbb{R} \mid z < 0\}$.

Definición 4. Para $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}_-}$ supongamos que $\text{Arg } z \in (-\pi, \pi)$ y elegimos para $\sqrt{z}$ la rama tal que

$$\text{Re } \sqrt{z} > 0, \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}_-}. \quad (17)$$

Notemos que (17) implica que $-\pi/2 < \text{Arg } \sqrt{z} < \pi/2$, para $z \notin \overline{\mathbb{R}_-}$. Ahora observemos que la condición $\omega^2 - z^2 \notin \overline{\mathbb{R}_-}$ es equivalente a la condición $z \notin \mathcal{L}$, en donde $\mathcal{L} := (-\infty, -\omega] \cup [\omega, \infty)$. Por lo tanto, tenemos que hacer los cortes para la función $\sqrt{\omega^2 - z^2}$ a lo largo de $\mathcal{L}$ (Figura 2).

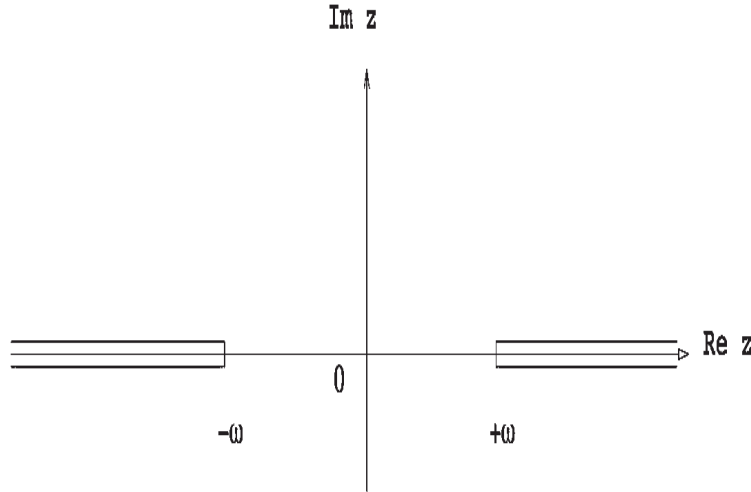


Figura 2: Corte que determina la rama de $\sqrt{\omega^2 - z^2}$.

Definición 5. Definimos la función $\sqrt{\omega^2 - (\cdot)^2} : \mathbb{C} \setminus \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$ como la rama analítica principal de la función $\sqrt{\omega^2 - z^2}$, de tal manera que

$$\text{Re } \sqrt{\omega^2 - z^2} > 0 \quad \forall z \notin \mathcal{L}. \quad (18)$$

También definimos $\sqrt{\omega^2 - z^2}$ sobre el corte $\mathcal{L}$, es decir, escribimos para $z \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{\omega^2 - z^2} = \begin{cases} +\sqrt{\omega^2 - z^2}, & |z| < \omega, \\ i\sqrt{z^2 - \omega^2}, & z > \omega, \\ -i\sqrt{z^2 - \omega^2}, & z < -\omega. \end{cases} \quad (19)$$

Notemos que $\sqrt{\omega^2 - z^2}$, $z \in \mathbb{R}$ es una función continua que pertenece a la clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{-\omega, \omega\})$ y satisface una cota del tipo dado por (8).

Denotaremos a la rama elegida de esta manera por $\sqrt{\omega^2 - z^2}$.

En lo que sigue desarrollaremos la manera en cómo se construyeron los operadores de frontera. Sea el operador pseudodiferencial

$$\sqrt{\omega^2 + d_2^2}, \quad (20)$$

en donde $d_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$.

En seguida presentamos la manera en como actúa este operador. Consideremos funciones $\varphi_{\pm p, \epsilon}(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $p > 0$, $\epsilon > 0$ tales que

$$\varphi_{p, \epsilon}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{si } |\xi \pm p| \geq \epsilon, \\ 0, & \text{si } |\xi \pm p| \leq \epsilon/2, \end{cases} \quad (21)$$

De aquí tenemos

$$\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \varphi_{\omega, \epsilon}(\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}). \quad (22)$$

Consideremos el siguiente subespacio de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, para $p > 0$ definimos

$$\mathcal{S}'_p(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \mid \exists \epsilon > 0, f \equiv 0 \text{ en } (-p - \epsilon, -p + \epsilon) \cup (p - \epsilon, p + \epsilon) \right\} \quad (23)$$

En otras palabras, el subespacio $\mathcal{S}'_p(\mathbb{R})$ consiste de las distribuciones temperadas cuyo soporte no contiene a $\pm p$.

Definición 6. Sea $f \in \mathcal{S}'_p(\mathbb{R})$, para $p > 0$ y sea $\sqrt{p^2 - x^2}$ definida como en la Definición 5. Entonces, definimos la multiplicación $\sqrt{p^2 - x^2} f(x)$ como

$$\sqrt{p^2 - x^2} f(x) := \sqrt{p^2 - x^2} \varphi_{p, \epsilon}(x) f(x), \quad (24)$$

en donde, la multiplicación se entiende en el sentido de la Definición 1 y

$$\epsilon < \text{dist} \{ \text{supp } f, \{\pm p\} \}. \quad (25)$$

Lema 4. *La multiplicación está bien definida, es decir, no depende de ϵ , tal que satisfaga (25).*

Demostración.

Sean $\varphi_{p,\epsilon_1}(x)$, $\varphi_{p,\epsilon_2}(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, con $\epsilon_1, \epsilon_2 < \epsilon = \text{dist} \{\text{supp } f, \{\pm p\}\}$. Es suficiente demostrar que

$$\langle f(x), \sqrt{p^2 - x^2} \varphi(x) (\varphi_{p,\epsilon_1}(x) - \varphi_{p,\epsilon_2}(x)) \rangle = 0$$

Supongamos que $\epsilon_1 < \epsilon_2$. Entonces,

$$\varphi_{p,\epsilon_1}(x) - \varphi_{p,\epsilon_2}(x) = 0 \quad \text{para } x \in (-p - \epsilon_1/2, -p + \epsilon_1/2) \cup (p - \epsilon_1/2, p + \epsilon_1/2).$$

Esto implica que $\sqrt{p^2 - x^2} \varphi(x) (\varphi_{p,\epsilon_1}(x) - \varphi_{p,\epsilon_2}(x)) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Por lo tanto, $\langle f(x), \sqrt{p^2 - x^2} \varphi(x) (\varphi_{p,\epsilon_1}(x) - \varphi_{p,\epsilon_2}(x)) \rangle$ esta bien definida. Además

$$\langle f(x), \sqrt{p^2 - x^2} \varphi(x) (\varphi_{p,\epsilon_1}(x) - \varphi_{p,\epsilon_2}(x)) \rangle = 0,$$

ya que $\text{supp} (\varphi_{p,\epsilon_1} - \varphi_{p,\epsilon_2}) \subset (-p - \epsilon, -p + \epsilon) \cup (p - \epsilon, p + \epsilon)$, en donde $f \equiv 0$, dado que $f \in \mathcal{S}'_p(\mathbb{R})$ y $\epsilon > 0$ satisface (25). $\square$

Definición 7. Sean $\omega, c > 0$. El operador pseudodiferencial $R_c := \sqrt{(\omega/c)^2 + d_2^2}$ actúa sobre las funciones $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, tal que $\hat{f} \in \mathcal{S}'_{\omega/c}(\mathbb{R})$ de la siguiente manera

$$R_c f(x) = \mathcal{F}_{\eta \rightarrow x_2}^{-1} [\sqrt{(\omega/c)^2 - \eta^2} \varphi_{\frac{\omega}{c}, \epsilon}(\eta) \hat{f}(\eta)],$$

en donde, ϵ satisface (25) y elegimos la rama de $\sqrt{(\omega/c)^2 - \eta^2}$ como en la Definición 5 salvo un factor $1/c$ en los cortes sobre el eje real.

Notemos que por el Lema 4 el operador R_c esta bien definido.

Con los conceptos anteriores ahora si podemos definir el siguiente operador de frontera B_{abs} . Consideremos el conjunto

$$\mathcal{O}_p(\overline{\mathbb{R}_+^2}) := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^2}) \mid \mathcal{F}_{x_2 \rightarrow \eta} [f(0, x_2)] \in \mathcal{S}'_p(\mathbb{R}) \right\}, \quad (26)$$

en donde, $\mathcal{F}_{x_2 \rightarrow \eta} [f(x_1, x_2)]$ denota la transformada de Fourier de la función f con respecto a la variable x_2 y x_1 se considera fija o constante.

Ahora para cada $c > 0$ definimos $B_{abs} : \mathcal{O}_p(\mathbb{R}_+^2) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}_{x_2})$ por

$$B_{abs}(f) := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) \right) \Big|_{x_1=0} - i R_c [f(0, x_2)], \quad x_2 \in \mathbb{R}, \quad (27)$$

en donde R_c esta bien definido por de la Definición 7.

En los siguientes párrafos mostraremos que un cierto tipo de ondas, las ondas planas armónicas que viajan a la izquierda con velocidad c son aniquiladas por el operador B_{abs} .

§ 5. Ondas armónicas planas y su transformada de Fourier

Refiriendonos a la Figura 1. El problema principal que aparece, y el cual estudiaremos, es cómo proponer condiciones de frontera sobre Γ de tal manera que la onda dispersa u_{dis} no sea reflejada hacia el interior del dominio Ω . En otras palabras se requiere que las condiciones de frontera sobre las fronteras de Ω sean transparentes para la onda u_{dis} .

Por simplicidad vamos a proponer condiciones de frontera para el semiplano derecho. Matemáticamente se considera la ecuación de D’Alambert

$$\square u(x_1, x_2, t) := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \right) u(x_1, x_2, t) = 0, \quad x_1 > 0, x_2 \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}. \quad (28)$$

Nos interesan las soluciones de (28) que tiene la forma

$$u(x_1, x_2, t) = v(\vec{n} \cdot (x_1, x_2) + ct), \quad \vec{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \alpha \in [0, 2\pi), \quad (29)$$

en donde $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función arbitraria. Es fácil ver que las funciones u de este tipo satisface la ecuación (28) para cada $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$. A este tipo de soluciones se les conoce como *ondas planas* que se propagan en la dirección del vector $-\vec{n}$ con una velocidad de propagación c y v se llama el perfil de la onda plana.

Vamos a considerar las ondas planas (29) que además son armónicas con respecto a la variable t con frecuencia $\omega > 0$. Esto es $u(x_1, x_2, t)$ tiene la forma

$$u(x_1, x_2, t) = e^{-i\omega t} A(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (30)$$

aquí la función $A(x_1, x_2)$ se conoce como la amplitud de la onda $u(x_1, x_2, t)$.

Lema 5. *Si u satisface (29) y (30), entonces*

$$A(x_1, x_2) = K e^{-i \frac{\omega}{c} \vec{n} \cdot (x_1, x_2)}, \quad K = \text{const.}$$

Demostración. Es claro que existe $(x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ con la propiedad que $\vec{n} \cdot (x_1^0, x_2^0) = 0$. Entonces, (29) y (30) implican que

$$u(x_1^0, x_2^0, t) = v(s) = K e^{-i \frac{\omega}{c} s}, \quad s = ct \text{ y } K = A(x_1^0, x_2^0). \quad (*)$$

Luego (*) implica que $u(x_1, x_2, t) = v(\vec{n} \cdot (x_1, x_2) + ct) = Ke^{-i\frac{\omega}{c}\vec{n} \cdot (x_1, x_2) - i\omega t}$. Comparando nuevamente con (30) obtenemos que $A(x_1, x_2) = Ke^{-i\frac{\omega}{c}\vec{n} \cdot (x_1, x_2)}$ $\square$

Para que (30) sea una solución de la ecuación (28) es necesario y suficiente que la función de amplitud $A(x_1, x_2)$ satisfaga la ecuación de Helmholtz en el semiplano derecho

$$(\Delta + [\omega/c]^2)A(x_1, x_2) = 0, \quad x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}. \quad (31)$$

Es un cálculo directo verificar lo anterior, basta sustituir (30) en la ecuación (28) y agrupar. Se observa además que el Lema 5 da la forma explícita de la solución a (31). En la siguiente sección usaremos ampliamente este tipo de soluciones.

Ahora encontremos la transformada de Fourier de una onda plana armónica. Sea $u_{inc} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $u_{inc}(x_1, x_2) = Ke^{-i\frac{\omega}{c}\vec{n} \cdot (x_1, x_2)}$, en donde $\vec{n}$ es como en (29). Entonces, en virtud del inciso e) de (16) con $\alpha = \frac{\omega}{c}\vec{n}$ se tiene

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \left[e^{-i\frac{\omega}{c}\vec{n} \cdot (x_1, x_2)} \right] = (2\pi)^2 \delta \left(\xi - \frac{\omega}{c}\vec{n} \right). \quad (32)$$

En particular, la transformada de Fourier con respecto a la variable x_2 de u_{inc} es,

$$\mathcal{F}_{x_2 \rightarrow \eta} \left[e^{-i\frac{\omega}{c}(\cos \alpha, \sin \alpha) \cdot (x_1, x_2)} \right] = (2\pi)^2 e^{-i\frac{\omega}{c} \cos \alpha x_1} \delta \left(\eta - \frac{\omega}{c} \sin \alpha \right) \quad (33)$$

§ 6. Absorción de ondas planas armónicas

Recordemos que estamos considerando el problema de encontrar condiciones de frontera absorbentes sobre la barrera $x_1 = 0$ en el plano, para la ecuación de onda (28). Vimos en §5 que esto es equivalente a considerar la ecuación de Helmholtz (31) en el semiplano derecho, más aun encontramos que las soluciones a dicha ecuación son de la forma dada por el Lema 5 y representan ondas planas armónicas. Notemos que la condición de frontera para ambos casos no cambia.

A continuación exhibiremos como las condiciones de frontera del tipo (27) aniquilan ondas viajeras del tipo dado por $A(x_1, x_2)$ del Lema 5.

Lema 6. Sea $\vec{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$. Entonces, $u_{inc}(x_1, x_2) = Ke^{-i\frac{\omega}{c}\vec{n}\cdot(x_1, x_2)}$ pertenece a la clase $\mathcal{O}_{\frac{\omega}{c}}(\overline{\mathbb{R}_+^2})$.

Demostración. Representemos a la onda incidente u_{inc} , que choca con la barrera $x = 0$ como $u_{inc}(x_1, x_2) = Ke^{-i\frac{\omega}{c}(\cos \alpha x_1 + \sin \alpha x_2)}$. Entonces, usando (33) tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{x_2 \rightarrow \eta}[u_{inc}(0, x_2)] &= \mathcal{F}_{x_2 \rightarrow \eta}[Ke^{-i\frac{\omega}{c}\sin \alpha x_2}] \\ &= K(2\pi)^2 \delta\left(\eta - \frac{\omega}{c}\sin \alpha\right).\end{aligned}$$

Ahora como el soporte de $\delta\left(\eta - \frac{\omega}{c}\sin \alpha\right)$ no intersecta a los puntos $\{-\omega/c, \omega/c\}$, ya que $\sin \alpha \neq \pm 1$, entonces se sigue que $\mathcal{F}_{x_2 \rightarrow \eta}[u_{inc}(0, x_2)] \in \mathcal{S}'_{\frac{\omega}{c}}(\mathbb{R})$. Lo cual implica que $u_{inc} \in \mathcal{O}_{\frac{\omega}{c}}(\overline{\mathbb{R}_+^2})$. $\square$

Corolario . Existe $B_{abs} : \mathcal{O}_{\frac{\omega}{c}}(\overline{\mathbb{R}_+^2}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}_{x_2})$ dado por la expresión (27) y existe $u_{inc} \in \mathcal{O}_{\frac{\omega}{c}}(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ definida por $u_{inc}(x_1, x_2) = Ke^{-i\frac{\omega}{c}\vec{n}\cdot(x_1, x_2)}$, en donde $\vec{n}$ es como en el Lema 6 tal que

$$B_{abs}u_{inc}(0, x_2) = 0, \quad x_2 \in \mathbb{R}, \quad (34)$$

Demostración. Es fácil ver que

$$d_1 u_{inc}(x_1, x_2)|_{x_1=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u_{inc}(x_1, x_2) \right) \Big|_{x_1=0} = -iK \left(\frac{\omega}{c} \right) \cos \alpha e^{-i\frac{\omega}{c}\sin \alpha x_2}. \quad (a)$$

Usando la definición del operador psedodiferencial (Definición 7) tenemos que

$$\left(\sqrt{(\omega/c)^2 + d_2^2} \right) [u_{inc}(x_1, x_2)|_{x_1=0}] = \mathcal{F}_{\eta \rightarrow x_2}^{-1} \left[\sqrt{(\omega/c)^2 - \eta^2} \varphi_{\frac{\omega}{c}, \epsilon}(\eta) \hat{u}_{inc}(0, \eta) \right],$$

en donde, $\hat{u}_{inc}(0, \eta)$ denota la transformada de Fourier de la onda plana armónica $u_{inc}(0, x_2)$ con respecto a la variable x_2 , el símbolo $\mathcal{F}_{\eta \rightarrow x_2}^{-1}$ denota la transformada de Fourier inversa con respecto a únicamente la variable η y hemos escogido para $\sqrt{(\omega/c)^2 - \eta^2}$ la rama cuyo corte es $\mathcal{L}$ tal que $\operatorname{Re} \sqrt{(\omega/c)^2 - z^2} > 0$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}$.

Sea $\epsilon > 0$, como $\sin \alpha < 0$ en el segundo y tercer cuadrante, entonces $-(\omega/c)\sin \alpha > (\omega/c) + \epsilon$. Luego para este ϵ , y dado que $\sqrt{(\omega/c)^2 - \eta^2} \varphi_{\frac{\omega}{c}, \epsilon}(\eta) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ entonces del Lema 6, (11) y (7) se tiene

$$\begin{aligned}
 \left(i \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}} \right) [u_{inc}(0, x_2)] &= \mathcal{F}_{\eta \rightarrow x_2}^{-1} \left(i \sqrt{(\omega/c)^2 - \eta^2} \varphi_{\frac{\omega}{c}, \epsilon}(\eta) \hat{u}_{inc}(0, \eta) \right) \\
 &= K \mathcal{F}_{\eta \rightarrow x_2}^{-1} \left(i \sqrt{(\omega/c)^2 - \eta^2} \varphi_{\frac{\omega}{c}, \epsilon}(\eta) \delta \left(\eta - \left(\frac{\omega}{c} \right) \sin \alpha \right) \right) \\
 &= K \mathcal{F}^{-1} \left(i \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \delta \left(\eta - \left(\frac{\omega}{c} \right) \sin \alpha \right) \right) \\
 &= i K e^{-i \frac{\omega}{c} \sin \alpha x_2} \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}
 \end{aligned}$$

Dado que el signo del coseno en el tercer cuadrante es negativo, esto implica que $\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{\cos^2 \alpha} = -\cos \alpha$ por la definición de la rama de $\sqrt{\cdot}$ (expresión (18)). Por lo tanto,

$$\left(i \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}} \right) [u_{inc}(0, x_2)] = -i K \left(\frac{\omega}{c} \right) \cos \alpha e^{-i \frac{\omega}{c} \sin \alpha x_2}. \quad (b)$$

Luego a partir de la expresión (27) de B_{abs} y de las ecuaciones (a) y (b) se sigue que $B_{abs} u_{inc}(0, x_2) = 0$, $x_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

CAPÍTULO 3

Problema principal

§ 1. Introducción

En este Capítulo planteamos matemáticamente el problema que estudiamos en esta tesis. Una vez más debemos introducir un poco de notación.

Sea $K_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_k > 0, \forall k = 1, \dots, n\}$. Para $n = 1$, $K_+^1 = \mathbb{R}^+$ y para $n = 2$ vamos a denotar a K_+^2 por K . Sea $\gamma_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 = 0\}$ y $\gamma_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0, x_2 > 0\}$ los lados del cuadrante K .

Sea $\mathcal{S}'(\overline{K_+^n})$ un subespacio de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (véase Capítulo 2, §2), que consiste de todas las distribuciones cuyo soporte (ver [4] para definición) pertenece a $\overline{K_+^n}$.

Sea A una región abierta en $\mathbb{C}^n$. El símbolo $\mathcal{H}(A)$ denotará a el conjunto de todas las funciones analíticas en A . Denotemos $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$. En este Capítulo también consideraremos la rama principal de $\sqrt{\omega^2 - z^2}$ como en (18). La restricción de esta rama a $\mathbb{C}^+$ es analítica en $\mathbb{C}^+$, ya que $\mathcal{L} \cup \mathbb{C}^+ = \emptyset$.

En el Capítulo 2 justificamos las condiciones de frontera de tipo absorbente para el caso de ondas armónicas planas, sobre la barrera $x = 0$. Ahora vamos a plantear un problema definido en un cuadrante con condiciones de frontera absorbentes sobre los semiejes positivos $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$.

§ 2. Planteamiento del problema

Estamos interesados en el siguiente problema de valores en la frontera

$$(\Delta + \omega^2)u(x) = 0 \quad x \in K, \quad (35)$$

$$\left(d_1 - i\sqrt{\omega^2 + d_2^2}\right)u(0, x_2) = 0, \quad x_2 \in \gamma_2, \quad (36)$$

$$\left(d_2 - i\sqrt{\omega^2 + d_1^2}\right)u(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in \gamma_1,$$

en donde, $\omega > 0$, $d_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $d_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$, Δ es el Laplaciano en $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Y

$$\left(d_1 - i\sqrt{\omega^2 + d_2^2}\right)u(0, x_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)u(0, x_2) - i\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2} [u(0, x_2)], \quad (37)$$

en donde, $\sqrt{\omega^2 + d_2^2} [u(0, x_2)]$ se entiende en un sentido que definiremos más adelante.

El operador (37) coincide en la forma con el operador R_c definido en §4 del capítulo anterior. La diferencia es que ahora queremos considerar la acción de este operador únicamente en el cuadrante $K \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\}$ y no en todo el semiplano derecho $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\}$. Esto nos permite simplificar el dominio del operador (37) usando la teoría de Paley-Wiener, ya que el soporte de u esta en el cono convexo.

La meta es demostrar que el problema (35)-(36) tiene únicamente la solución trivial en una clase funcional que especificamos en el siguiente párrafo.

§ 3. Teoría de Paley-Wiener

Aquí vamos a modificar un poco el concepto de operador de frontera, con respecto al Capítulo anterior. Para tal fin usaremos la teoría de Paley-Wiener.

Definición 8. Sea $\mathcal{S}'(K_+^n) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)|_{K_+^n}$ el espacio de las restricciones de las distribuciones de Schwartz en $\mathbb{R}^2$.

Sea $\mathcal{S}'(\overline{K_+^n}) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp } f \subset \overline{K_+^n} \right\}$ y $\mathcal{C}^1(\overline{K_+^n})$ el espacio de funciones continuas definidas en K_+^n y cuyas primeras derivadas son continuas.

Definición 9. Definimos el espacio $\mathcal{C}_t^1(K_+^n)$ como

$$\mathcal{C}_t^1(K_+^n) := \mathcal{S}'(\overline{K_+^n}) \cap \mathcal{C}^1(\overline{K_+^n}).$$

Nota. Sea

$$u_0(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \overline{K_+^n} \\ 0, & x \notin \overline{K_+^n}, \end{cases}$$

entonces, la Definición 9 y la Definición 8 implican que $u_0 \in \mathcal{S}'(\overline{K_+^n})$.

Teorema 4 (Paley-Wiener). [4]

i) Sea $f \in \mathcal{S}'(\overline{K_+^n})$, entonces, $\hat{f}(\xi)$ se extiende de manera única a $\mathbb{C}K_+^{n*} := \mathbb{R}^n \oplus iK_+^n$, a la función analítica $\tilde{f}(z)$, con $z := (z_1, \dots, z_n) = (\xi_1 + i\tau_1, \dots, \xi_n + i\tau_n)$, $\xi_i, \tau_i \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, \dots, n$, tal que

$$\left| \tilde{f}(z) \right| \leq C(1 + |z|)^\mu \text{dist } \{z, \mathbb{R}^n\}, \quad z \in \mathbb{C}K_+^{n*}, \quad (38)$$

para algunas constantes $\mu \in \mathbb{R}$, $C > 0$ con

$$\text{dist } \{z, \mathbb{R}^n\} := \min_{i=1, \dots, n} \{|\text{Im } z_i|\};$$

y en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\tilde{f}(\xi_1 + i\tau_1, \dots, \xi_n + i\tau_n) \xrightarrow{\tau_1, \dots, \tau_n \rightarrow 0+} \hat{f}(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad (39)$$

ii) Recíprocamente, si $\tilde{f}(z)$ es analítica en $\mathbb{C}K_+^{n*}$ y satisface (38) y (39), entonces, existe

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{\text{Im } z \rightarrow 0+} \tilde{f}(z),$$

en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y esta es la transformada de Fourier de una distribución $f(x) \in \mathcal{S}'(\overline{K_+^n})$.

Denotación. Si $\hat{f}(\xi) = \lim_{\text{Im } z \rightarrow 0+} \tilde{f}(z)$, entonces escribimos

$$\tilde{f}(z) := \mathcal{F}_{x \rightarrow z}[f(x)], \quad f(x) = \mathcal{F}_{z \rightarrow x}^{-1}[\tilde{f}(z)].$$

Definición 10. El operador pseudodiferencial $\sqrt{\omega^2 + d_2^2} [u(0, x_2)]$ actúa sobre funciones $u(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^+)$ de tal forma que

$$\sqrt{\omega^2 + d_2^2} [u(x)] := \mathcal{F}_{z \rightarrow x}^{-1}[\sqrt{\omega^2 - z^2} \tilde{u}(z)], \quad \text{Im } z > 0,$$

en donde, $\sqrt{\cdot}$ se entiende de acuerdo a la Definición 5.

Este operador se define correctamente. En efecto, en virtud del Teorema de Paley-Wiener podemos concluir que $\sqrt{\omega^2 + d_2^2} [u(0, x_2)] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^+)$, ya que $\sqrt{\omega^2 - z^2} \tilde{f}(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$ y satisface la estimación (38). Ahora podemos definir como actúan los operadores de frontera (36).

Definición 11. Sea $u \in \mathcal{C}_t^1(K)$, entonces, para $\text{Im } z_i > 0$, $i = 1, 2$ definimos

$$\begin{aligned} \left(d_1 - i\sqrt{\omega^2 + d_2^2}\right)u(0, x_2) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)u(0, x_2) - i\sqrt{\omega^2 + d_2^2} [u(0, x_2)], \\ \left(d_2 - i\sqrt{\omega^2 + d_1^2}\right)u(0, x_2) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)u(x_1, 0) - i\sqrt{\omega^2 + d_1^2} [u(x_1, 0)], \end{aligned}$$

en donde, $\sqrt{\omega^2 + d_l^2}$ se entiende como en la Definición 10, para $l = 1, 2$.

Estos operadores se definen correctamente ya que las primeras derivadas son continuas sobre la frontera de acuerdo a la Definición 9.

Vamos a considerar el problema (35)-(37) en el espacio $\mathcal{C}_t^1(K)$. La meta principal es demostrar que dicho problema tiene solamente la solución trivial.

CAPÍTULO 4

Extensión analítica del problema principal

§ 1. Introducción

En el presente Capítulo extenderemos la ecuación de Helmholtz a todo el plano, para tal fin describiremos como se definen las derivadas de funciones generalizadas, (o derivadas débiles). Consideraremos funciones definidas en $\mathbb{R}^2$ y extendidas por cero que se anulan fuera del primer cuadrante. El motivo de hacer lo anterior es por que deseamos aplicar el método de las características complejas [7], el cual requiere el de la teoría de Paley-Wiener. Después presentamos cómo actúa el operador de Helmholtz sobre este tipo de funciones, en términos de los datos de Cauchy. Finalmente describiremos la transformada de Fourier compleja de la ecuación de Helmholtz y de los valores de frontera de nuestro problema original.

§ 2. Extensión de la ecuación de Helmholtz definida en un cuadrante, a todo el plano

El primer paso es extender por cero la solución del problema en el cuadrante y después aplicar el operador diferencial a la función discontinua. Por esta razón, a continuación recordaremos como son las derivadas generalizadas de funciones definidas en $\mathbb{R}^2$, que se anulan fuera del primer cuadrante y además son suaves en dicho cuadrante.

Supongamos que $u \in \mathcal{C}_t^1(K_+^n)$. Consideremos la función $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n = 1, 2$) definida por

$$u_0(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \overline{K_+^n} \\ 0, & x \notin \overline{K_+^n}, \end{cases} \quad (40)$$

Esto significa

- (a) la función $u(x)$ tiene dos derivadas continuas en cada punto de la cerradura de K_+^n y estas derivadas pertenecen a la clase $\mathcal{S}'(K_+^n)$.
- (b) la función $u_0(x)$ es la continuación por cero de la función $u(x)$ en todo el espacio $\mathbb{R}^n$.

Denotaremos a tal continuación por $[u]$. Entonces,

$$u_0(x) := [u(x)] = \begin{cases} u(x), & x \in \overline{K_+^n} \\ 0, & x \notin \overline{K_+^n}, \end{cases} \quad (41)$$

en donde, $u \in \mathcal{C}_t^1(K_+^n)$, $n = 1, 2$. Por lo tanto, $u_0(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Es conocido (véase [4]) que la derivada de la función $u_0(x)$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se calcula como

$$\frac{d}{dx}u_0(x) = [u'(x)] + u(0)\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (42)$$

en donde, $[u'(x)]$ denota la continuación por cero de la derivada de la función $u(x)$, $x \in \overline{\mathbb{R}_+}$, con respecto a x en el sentido usual dada por

$$[u'(x)] = \begin{cases} u'(x), & x \in \overline{\mathbb{R}_+} \\ 0, & x \notin \overline{\mathbb{R}_+}, \end{cases} \quad (43)$$

y $\delta(x)$ es la distribución delta de Dirac, definida como en (7).

Lema 7. *Sea $u \in \mathcal{C}_t^1(\mathbb{R}_+)$. Entonces, la segunda derivada generalizada de u_0 en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es*

$$\frac{d^2}{dx^2}u_0(x) = [u''(x)] + u'(0)\delta(x) + u(0)\delta'(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (44)$$

en donde $[u''(x)]$ se entiende como en (43).

Demostración. La ecuación (42) implica que

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}u_0(x) &= \frac{d}{dx}\left\{[u'(x)] + u(0)\delta(x)\right\} \\ &= \frac{d}{dx}[u'(x)] + u(0)\delta'(x) \\ &= \frac{d}{dx}v_0(x) + u(0)\delta'(x),\end{aligned}$$

en donde $v_0(x) = [u'(x)]$. Entonces, nuevamente por (42) aplicada a v_0 obtenemos

$$\frac{d^2}{dx^2}u_0(x) = [u''(x)] + u'(0)\delta(x) + u(0)\delta'(x).$$

□

Lema 8. Sea $n = 2$ y $u \in \mathcal{C}_t^1(K)$. Entonces, en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned}(\Delta + \omega^2)u_0(x_1, x_2) &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u(x_1, x_2)\right] + \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u(x_1, x_2)\right] + \omega^2[u(x_1, x_2)] \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial x_1}u(0, x_2)\right]\delta(x_1) + \left[\frac{\partial}{\partial x_2}u(x_1, 0)\right]\delta(x_2) \\ &+ [u(0, x_2)]\delta'(x_1) + [u(x_1, 0)]\delta'(x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}\tag{45}$$

Demostración. Se sigue directamente del Lema 7.

□

A continuación presentamos cómo actúa el operador de Helmholtz sobre una función definida en un cuadrante y extendida por 0, en términos de los datos de Cauchy.

Sea $u(x_1, x_2) \in \mathcal{C}_t^1(K)$ la solución a la ecuación homogénea de Helmholtz en K , entonces

$$(\Delta + \omega^2)u(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in K.\tag{46}$$

Sea u_0 la continuación en $\mathbb{R}^2$ por cero de u como en (41). Apliquemos el operador $(\Delta + \omega^2)$ a la función u_0 en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, entonces, por el Lema 8 se tiene

$$\begin{aligned}
 (\Delta + \omega^2)u_0(x_1, x_2) &= \left[\frac{\partial}{\partial x_1} u(0, x_2) \right] \delta(x_1) + \left[\frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, 0) \right] \delta(x_2) + \omega^2 [u(x_1, x_2)] \\
 &+ [u(0, x_2)] \delta'(x_1) + [u(x_1, 0)] \delta'(x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (47)
 \end{aligned}$$

Definición 12. Sea $n = 2$ y $u \in \mathcal{C}_t^1(K)$. Los datos de Cauchy son:

1. $v_1^0(x_1) := [u(x_1, 0)]$ con $x_1 \in \mathbb{R}$ es el dato de Dirichlet de u sobre el lado γ_1 .
2. $v_2^0(x_2) := [u(0, x_2)]$ con $x_2 \in \mathbb{R}$ es el dato de Dirichlet de u sobre la frontera γ_2 .
3. $v_2^1(x_2) := \left[\frac{\partial}{\partial x_1} u(0, x_2) \right]$ con $x_2 \in \mathbb{R}_+$ es el dato de Neumann de u sobre γ_2 ,
4. $v_1^1(x_1) := \left[\frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, 0) \right]$ con $x_1 \in \mathbb{R}_+$ es el dato de Neumann de u sobre γ_1 .

Dado que $u \in \mathcal{C}_t^1(K)$, se sigue que $v_l^\beta(x) \in \mathcal{C}_t^1(K_+^1)$, $l = 1, 2$ y $\beta = 0, 1$. De esta manera la ecuación (47) se reescribe como

$$\begin{aligned}
 (\Delta + \omega^2)u_0(x_1, x_2) &= v_1^1(x_1)\delta(x_2) + v_2^1(x_2)\delta(x_1) \\
 &+ v_1^0(x_1)\delta'(x_2) + v_2^0(x_2)\delta'(x_1) \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (48)
 \end{aligned}$$

§ 3. Transformada de Fourier compleja de la ecuación de Helmholtz y los valores de frontera

1. Transformada de Fourier (Real) de la ecuación de Helmholtz

Proposición 1. Sea $u(x) \in \mathcal{C}_t^1(K)$ la solución a la ecuación (46) y $u_0(x)$ su continuación en $\mathbb{R}^2$ por cero. Entonces,

$$\begin{aligned}
 (-\xi_1^2 - \xi_2^2 + \omega^2)\hat{u}_0(\xi_1, \xi_2) &= \hat{v}_1^1(\xi_1) + \hat{v}_2^1(\xi_2) - i\xi_2\hat{v}_1^0(\xi_1) \\
 &- i\xi_1\hat{v}_2^0(\xi_2), \quad (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (49)
 \end{aligned}$$

se satisface en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, en donde, $\hat{v}_l^\beta(\xi_l)$ son las transformadas de Fourier de las funciones $v_l^\beta(\xi_l)$, $l = 1, 2$, $\beta = 0, 1$.

Demostración. Sea $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, entonces por las propiedades de la transformada de Fourier (expresiones a) y b) de (16)) se tiene que

$$\begin{aligned} i) \mathcal{F} \left\{ \left(\Delta + \omega^2 \right) (u_0) \right\} (\xi_1, \xi_2) &= (-\xi_1^2 - \xi_2^2 + \omega^2) \hat{u}_0(\xi_1, \xi_2), \quad (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \\ ii) \mathcal{F} \left\{ v_1^1(x_1) \delta(x_2) + v_2^1(x_2) \delta(x_1) + v_1^0(x_1) \delta'(x_2) + v_2^0(x_2) \delta'(x_1) \right\} (\xi_1, \xi_2) \\ &= \hat{v}_1^1(\xi_1) + \hat{v}_2^1(\xi_2) - i\xi_2 \hat{v}_1^0(\xi_1) - i\xi_1 \hat{v}_2^0(\xi_2), \quad (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Entonces, (48) implica (49). $\square$

2. Extensión Analítica de la ecuación de Helmholtz

Utilizando el teorema de Paley-Wiener (ver Teorema 4) para la función $\hat{u}_0(\xi_1, \xi_2)$ concluimos que existe una única continuación analítica $\tilde{u}_0(z_1, z_2)$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}K_+^*$ tal que $(-z_1^2 - z_2^2 + \omega^2) \tilde{u}_0(z_1, z_2)$ es la continuación analítica de $(-\xi_1^2 - \xi_2^2 + \omega^2) \hat{u}_0(\xi_1, \xi_2)$ a $\mathbb{C}K_+^*$, es decir, en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$

$$(-z_1^2 - z_2^2 + \omega^2) \tilde{u}_0(z_1, z_2) \xrightarrow{\text{Im } z_{1,2} \rightarrow 0+} (-\xi_1^2 - \xi_2^2 + \omega^2) \hat{u}_0(\xi_1, \xi_2), \quad (50)$$

Análogamente para los datos de Cauchy $\hat{v}_l^1(\xi_l)$, $\hat{v}_l^0(\xi_l)$, $\xi_l \in \mathbb{R}$, $l = 1, 2$, existen continuaciones analíticas, $\tilde{v}_l^1(z_l)$, $\tilde{v}_l^0(z_l)$, $z_l \in \mathbb{C}^+$, $l = 1, 2$, tales que

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}_l^1(z_l) &\xrightarrow{\text{Im } z_l \rightarrow 0+} \hat{v}_l^1(\xi_l), \\ \tilde{v}_l^0(z_l) &\xrightarrow{\text{Im } z_l \rightarrow 0+} \hat{v}_l^0(\xi_l), \end{aligned} \right| \xi_l \in \mathbb{R} \text{ y } z_l \in \mathbb{C}^+, \quad l = 1, 2, \quad (51)$$

y

$$\tilde{v}_l^\beta(z_l) = \mathcal{F}_{x_l \rightarrow z_l} [v_l^\beta(x_l)], \quad l = 1, 2, \quad \beta = 0, 1, \quad (52)$$

de acuerdo a la Denotación hecha en §3 Capítulo 3.

Por lo tanto, la identidad (49) de la Proposición 1 también tiene continuación analítica a $\mathbb{C}K_+^*$ y para estas continuaciones analíticas se cumple la identidad

$$\begin{aligned} (-z_1^2 - z_2^2 + \omega^2) \tilde{u}_0(z_1, z_2) &= \tilde{v}_1^1(z_1) + \tilde{v}_2^1(z_2) - iz_2 \tilde{v}_1^0(z_1) \\ &\quad - iz_1 \tilde{v}_2^0(z_2), \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{C}K_+^*, \end{aligned} \quad (53)$$

la cual es válida en $\mathcal{H}(\mathbb{C}K_+^*)$.

3. Transformada de Fourier compleja de los valores de frontera

Retomando nuestro problema de valores iniciales original (ecuaciones (35)-(36)) tenemos la siguiente afirmación. La cual expresa que los datos de Cauchy de nuestro problema tienen continuaciones analíticas a $\mathbb{C}K_+^*$.

Proposición 2. Sea $u \in \mathcal{C}_t^1(K)$. Entonces,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_{x_2 \rightarrow z_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} u(0, x_2) \right] (z_2) &= \tilde{v}_2^1(z_2), \\ \mathcal{F}_{x_2 \rightarrow z_2} \left[i \sqrt{\omega^2 + d_2^2} u(0, x_2) \right] (z_2) &= i \sqrt{\omega^2 - z_2^2} \tilde{v}_2^0(z_2), \\ \mathcal{F}_{x_1 \rightarrow z_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, 0) \right] (z_1) &= \tilde{v}_1^1(z_1), \\ \mathcal{F}_{x_1 \rightarrow z_1} \left[i \sqrt{\omega^2 + d_1^2} u(x_1, 0) \right] (z_1) &= i \sqrt{\omega^2 - z_1^2} \tilde{v}_1^0(z_1), \end{aligned} \right|_{z_1, z_2 \in \mathbb{C}^+}.$$

Demostración. Sea $u(x_1, x_2) \in \mathcal{C}_t^1(K)$. Entonces, la primera y tercera igualdad son consecuencia directa de la Definición 12.

Y la segunda y tercera igualdad se siguen directamente de la Definición 10, la Definición 12 y la expresión (52). $\square$

Por lo tanto, de acuerdo a la Proposición 2 se obtiene que las condiciones de frontera (36) poseen continuación analítica a $\mathbb{C}^+$ y satisfacen

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}_1^1(z_1) - i \sqrt{\omega^2 - z_1^2} \tilde{v}_1^0(z_1) &= 0, \\ \tilde{v}_2^1(z_2) - i \sqrt{\omega^2 - z_2^2} \tilde{v}_2^0(z_2) &= 0, \end{aligned} \right|_{z_1, z_2 \in \mathbb{C}^+}. \quad (54)$$

CAPÍTULO 5

Superficie de Riemann y la ecuación de conexión

§ 1. Introducción

En este Capítulo describiremos la superficie de Riemann que generan los ceros del símbolo del operador de Helmholtz y definiremos sobre ella la ecuación de conexión que relaciona los datos de Cauchy y la solución u . Para tal fin definiremos levantamientos y automorfismos sobre dicha superficie. En suma el objetivo de los siguientes párrafos será resolver el sistema (53)-(54) en el subespacio $\mathcal{S}'(\overline{K})$ suponiendo que $\tilde{v}_l^\beta(z_l) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$, $l = 1, 2$, $\beta = 0, 1$.

§ 2. Características complejas del operador de Helmholtz

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{V} = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid -z_1^2 - z_2^2 + \omega^2 = 0 \right\}. \quad (55)$$

El conjunto $\mathcal{V}$ es la superficie de Riemann de los ceros del operador diferencial $(\Delta + \omega^2)$ ó las *características complejas* de $(\Delta + \omega^2)$.

Definimos

$$\mathcal{V}_l^+ := \left\{ z \in \mathcal{V} \mid z_l \in \mathbb{C}^+ \right\}, \quad l = 1, 2. \quad (56)$$

Sea

$$\mathcal{V}^* := \mathcal{V}_1^+ \cap \mathcal{V}_2^+ = \mathcal{V} \cap \mathbb{C}K_+^*. \quad (57)$$

§ 3. Levantamientos de funciones a la superficie de Riemann

Definimos los levantamientos $v_l^\beta(z)$, de las funciones $\tilde{v}_l^\beta(z_l)$, a $\mathcal{V}_l^+$:

$$v_l^\beta(z) := \tilde{v}_l^\beta(z_l), \quad |z_l \in \mathcal{V}_l^+, \quad l = 1, 2, \quad \beta = 0, 1. \quad (58)$$

Notemos que las funciones $v_l^\beta(z_l)$ son analíticas en $\mathcal{V}_l^+$, ya que $\tilde{v}_l^\beta(z_l) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$, por lo tanto,

$$v_l^\beta(z_l) \in \mathcal{H}(\mathcal{V}_l^+), \quad l = 1, 2, \quad \beta = 0, 1. \quad (59)$$

§ 4. Levantamientos de la ecuación (53) a la superficie de Riemann. La ecuación de conexión

Levantamos la parte derecha de la ecuación (53) a $\mathcal{V}$. Usando los levantamientos (58) tenemos que la parte derecha de (53) se escribe como

$$v_1^1(z) + v_2^1(z) - iz_2 v_1^0(z) - iz_1 v_2^0(z), \quad z = (z_1, z_2) \in \mathcal{V}^*,$$

Teorema 5.

$$v_1^1(z) + v_2^1(z) - iz_2 v_1^0(z) - iz_1 v_2^0(z) = 0, \quad z = (z_1, z_2) \in \mathcal{V}^*.$$

Demostración. Consideremos la ecuación (53). Notemos que

$$(z_1, z_2) \in \mathcal{V} \Rightarrow (-z_1^2 - z_2^2 + \omega^2)\hat{u}_0(z_1, z_2) = 0.$$

Ahora, dado que $-z_1^2 - z_2^2 + \omega^2 = 0$ para $z \in \mathcal{V}^*$, entonces, la parte derecha de (53) también es igual a 0 sobre $\mathcal{V}^*$, por lo tanto,

$$v_1^1(z) + v_2^1(z) - iz_2 v_1^0(z) - iz_1 v_2^0(z) = 0, \quad z = (z_1, z_2) \in \mathcal{V}^*. \quad (60)$$

□

La ecuación que aparece en el Teorema 5 se denomina la *ecuación de conexión* entre los datos de Cauchy y la función $u(x_1, x_2)$.

§ 5. Levantamientos de las condiciones de frontera sobre la superficie de Riemann

En seguida levantaremos las ecuaciones de (54) sobre la superficie de Riemann $\mathcal{V}$.

Usando los levantamientos definidos en (58) obtenemos que las ecuaciones de (54) se levantan a la superficie de Riemann mediante las expresiones

$$\begin{aligned} v_1^1(z) - i\sqrt{\omega^2 - z_1^2} v_1^0(z) &= 0, \quad z \in \mathcal{V}_1^+, \\ v_2^1(z) - i\sqrt{\omega^2 - z_2^2} v_2^0(z) &= 0, \quad z \in \mathcal{V}_2^+. \end{aligned} \tag{61}$$

§ 6. Reducción del sistema de ecuaciones (61) a ecuaciones sobre la superficie de Riemann. Automorfismos

Sea $h_l : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ la función definida por

$$h_l(z_1, z_2) = (z_1, -z_2). \tag{62}$$

Proposición 3. *La función h_l es un automorfismo. Es decir, $h_l : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, cumple*

1. *Si $z \in \mathcal{V}$, entonces, $h_1(z) \in \mathcal{V}$.*
2. *$h_l^2(z) = h_l(z)$, $\forall z \in \mathcal{V}$.*
3. *Además, $v_l^\beta(h_l(z)) = v_l^\beta(z)$, $l = 1, 2$, $\beta = 0, 1$, para todo $z \in \mathcal{V}$.*

Demostración.

1.

Sea $z \in \mathcal{V}$, entonces, $h_1(z) \in \mathcal{V}$. En efecto, ya que

$$z_1^2 + (-z_2)^2 - \omega^2 = 0.$$

2.

Sea $z \in \mathcal{V}$, entonces

$$h_l^2(z_1, z_2) = (z_1, -((-z_2))) = (z_1, z_2) = h_l(z_1, z_2).$$

3.

Sea $z \in \mathcal{V}$, y sean $v_l^\beta(z)$, los levantamientos de $\tilde{v}_l^\beta(z)$, $l = 1, 2$, $\beta = 0, 1$. Entonces,

$$v_l^\beta(h_l(z)) = v_l^\beta(z_1, -z_2) = v_l^\beta(z_1, z_2) = v_l^\beta(z_l), \quad l = 1, 2, \beta = 0, 1,$$

en donde, en la segunda igualdad estamos utilizando la propiedad 2. $\square$

Usando los levantamientos que aparecen en (58) y la parte tres de la Proposición 3 tenemos que

$$v_l^\beta(z) = v_l^\beta(h_l z), \quad z \in \mathcal{V}_l^+, \quad l = 1, 2, \beta = 0, 1. \quad (63)$$

Es decir, las funciones $v_l^\beta(z)$, $l = 1, 2$, $\beta = 0, 1$, son automorfias. Ahora despejando $v_1^1(z)$ y $v_2^1(z)$ en (61) y sustituyendo en la ecuación de conexión (60) obtenemos

$$i\sqrt{\omega^2 - z_1^2} v_1^0(z) + i\sqrt{\omega^2 - z_2^2} v_2^0(z) - iz_2 v_1^0(z) - iz_1 v_2^0(z) = 0, \quad z \in \mathcal{V}^*.$$

La cual se puede reescribir como

$$\left(\sqrt{\omega^2 - z_1^2} - z_2\right) v_1^0(z) + \left(\sqrt{\omega^2 - z_2^2} - z_1\right) v_2^0(z) = 0, \quad z \in \mathcal{V}^*. \quad (64)$$

Así hemos obtenido una ecuación con dos funciones incognita, $v_1^0(z)$ y $v_2^0(z)$. Este problema no está bien planteado, sin embargo, sabemos que $v_1^0(z)$ es analítica en $\mathcal{V}_1^+$ y que $v_2^0(z)$ es analítica en $\mathcal{V}_2^+$ por (59). Además, por (63) $v_1^0(z)$ y $v_2^0(z)$ son automorfias.

Entonces, para $l = 1, 2$ y $\beta = 0, 1$, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \left(\sqrt{\omega^2 - z_1^2} - z_2\right) v_1^0(z) + \left(\sqrt{\omega^2 - z_2^2} - z_1\right) v_2^0(z) = 0, & z \in \mathcal{V}^*, \\ v_l^\beta(z) - v_l^\beta(h_l z) = 0, & z \in \mathcal{V}_l^+, \end{cases} \quad (65)$$

el cual ahora si representa un problema bien planteado.

Nótese que hemos reducido el problema inicial a un sistema de ecuaciones algebraico definido sobre las características complejas del operador de Helmholtz. Resolveremos dicho sistema en el siguiente Capítulo.

CAPÍTULO 6

Solución sobre las características complejas

§ 1. Introducción

En el Capítulo anterior obtuvimos el sistema de ecuaciones (65) el cual está bien planteado. Lo que ahora se requiere es conocer más acerca del dominio de acción de los automorfismos que involucra dicho sistema. Para tal efecto en el presente Capítulo vamos a introducir una uniformización en la cubierta universal de la superficie de Riemann de los ceros del símbolo. De esta manera levantaremos los automorfismos definidos en el Capítulo anterior y los datos de Cauchy a la cubierta universal.

Finalmente planteamos un sistema equivalente a (65) sobre la cubierta universal de dicha superficie de Riemann y lo resolvemos.

§ 2. Cubierta universal

En geometría algebraica se sabe que si p es un polinomio irreducible en dos variables con coeficientes complejos, de segundo orden, entonces la superficie de Riemann de las raíces de p es compacta (véase [12], pag. 94) e isomorfa a un cilindro. Por lo tanto, tal superficie posee una cubierta universal que es isomorfa a $\mathbb{C}$ (véase [6], pag. 191). Entonces, en nuestro caso la superficie de Riemann $\mathcal{V}$ de los ceros del símbolo del operador de Helmholtz $z_1^2 + z_2^2 - \omega^2$ es topológicamente isomorfa a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Luego esta posee una cubierta universal $\tilde{\mathcal{V}}$ que es isomorfa al plano complejo $\mathbb{C}$.

Podemos uniformizar a $\check{\mathcal{V}}$ por medio de los parámetros de uniformización: $\mathcal{V}$ y la transformación

$$\begin{aligned} z_1 &= -i\omega \operatorname{sh} \mu, \\ z_2 &= \omega \operatorname{ch} \mu, \end{aligned} \quad \left| \quad \mu \in \check{\mathcal{V}}. \right. \quad (66)$$

Denotaremos por $p : \check{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{V}$ a la función proyección

$$p(\mu) = (z_1, z_2), \quad (I)$$

en donde (z_1, z_2) se determinan por (66). En seguida demostraremos que de hecho $p(\mu) \in \mathcal{V}$.

Proposición 4.

$$p(\mu) \in \mathcal{V} \quad \forall \mu \in \check{\mathcal{V}} \cong \mathbb{C}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 - \omega^2 &= -\omega^2 \operatorname{sh}^2 \mu + \omega^2 \operatorname{ch}^2 \mu - \omega^2 \\ &= \omega^2 (\operatorname{ch}^2 \mu - \operatorname{sh}^2 \mu) - \omega^2 \\ &= 0, \quad \forall \mu \in \check{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

□

Observación 3. Notemos que la transformación (66) es periódica de periodo $2\pi i$.

§ 3. Levantamiento de automorfismos sobre la cubierta universal

Lema 9. Sean $h_l : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, $l = 1, 2$ automorfismos definidos por $h_1(z_1, z_2) = (z_1, -z_2)$ y $h_2(z_1, z_2) = (-z_1, z_2)$. Sea $p : \check{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{V}$ como en (I). Entonces, existen funciones $\check{h}_l : \check{\mathcal{V}} \rightarrow \check{\mathcal{V}}$, $l = 1, 2$, dadas por

$$\begin{aligned} \check{h}_1(\mu) &= -\mu + i\pi, \\ \check{h}_2(\mu) &= -\mu, \end{aligned} \quad (67)$$

tales que

$$p\check{h}_l = h_l p \quad l = 1, 2. \quad (68)$$

Demostración. Basta verificar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \check{\mathcal{V}} & \xrightarrow{\check{h}_l} & \check{\mathcal{V}} \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{h_l} & \mathcal{V} \end{array}$$

Sea $\mu \in \check{\mathcal{V}}$, entonces, por un lado

$$p\check{h}_1(\mu) = p(-\mu + i\pi) = (-i\omega \text{sh}(-\mu + i\pi), \omega \text{ch}(-\mu + i\pi)) = (-i\omega \text{sh}\mu, -\omega \text{ch}\mu),$$

y por el otro

$$h_1 p(\mu) = h_1(-i\omega \text{sh}\mu, \omega \text{ch}\mu) = (-i\omega \text{sh}\mu, -\omega \text{ch}\mu).$$

Por lo tanto, se tiene que $p\check{h}_1 = h_1 p$. De manera análoga se prueba que $p\check{h}_2 = h_2 p$. $\square$

§ 4. Levantamiento de las funciones $v_l^\beta(z)$, $z \in \mathcal{V}_l^+$, $l = 1, 2$, $\beta = 0, 1$ a la cubierta universal

En el siguiente lema levantamos las funciones $v_l^\beta(z)$ dadas en (58) a $\check{\mathcal{V}}$.

Lema 10. Sea la función proyección $p : \check{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{V}$. Sean $\check{v}_l^\beta : \check{\mathcal{V}} \rightarrow \check{\mathcal{V}}$ definidas por

$$\check{v}_l^\beta(\mu) = v_l^\beta(p(\mu)), \quad \mu \in \check{\mathcal{V}}_l^+, \quad l = 1, 2, \quad \beta = 0, 1,$$

en donde $v_l^\beta(z)$ se definen como en (58). Entonces,

$$\check{v}_l^\beta(\mu) = \check{v}_l^\beta(\check{h}_l \mu), \quad \mu \in \check{\mathcal{V}}_l^+, \quad l = 1, 2, \quad \beta = 0, 1,$$

en donde $\check{h}_l$ se define como en (67).

Demostración. Basta ver que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccccc} \check{\mathcal{V}} & \xrightarrow{\check{h}_l} & \check{\mathcal{V}} & & \\ \downarrow p & & \downarrow p & \searrow \check{v}_l^\beta & \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{h_l} & \mathcal{V} & \xrightarrow{v_l^\beta} & \mathbb{C} \end{array}$$

En efecto. Por hipótesis, la expresión de (68) y el punto 3 de la Proposición 3 se tiene

$$\check{v}_l^\beta \check{h}_l = v_l^\beta p \check{h}_l = v_l^\beta h_l p = v_l^\beta p = \check{v}_l^\beta, \quad l = 1, 2 \quad \beta = 0, 1.$$

□

Definición 13. *Sea*

$$\check{\mathcal{V}}_l^+ := \left\{ \mu \in \check{\mathcal{V}} \mid p(\mu) \in \mathcal{V}_l^+ \right\}, \quad l = 1, 2. \quad (69)$$

A continuación describiremos como son las componentes conexas de $\check{\mathcal{V}}_l^+$ de acuerdo a los parámetros de uniformización (66).

Lema 11.

$$\check{\mathcal{V}}_1^+ := \check{\mathcal{V}}_{1d}^+ \cup \check{\mathcal{V}}_{1i}^+,$$

en donde,

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{V}}_{1d}^+ &= \left\{ \mu \in \check{\mathcal{V}} \mid \operatorname{Re} \mu > 0, \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \operatorname{Im} \mu < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \\ \check{\mathcal{V}}_{1i}^+ &= \left\{ \mu \in \check{\mathcal{V}} \mid \operatorname{Re} \mu < 0, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \operatorname{Im} \mu < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

y

$$\check{\mathcal{V}}_2^+ = \check{\mathcal{V}}_{2d}^+ \cup \check{\mathcal{V}}_{2i}^+,$$

en donde,

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{V}}_{2d}^+ &= \left\{ \mu \in \check{\mathcal{V}} \mid \operatorname{Re} \mu > 0, \quad 2k\pi < \operatorname{Im} \mu < \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \\ \check{\mathcal{V}}_{2i}^+ &= \left\{ \mu \in \check{\mathcal{V}} \mid \operatorname{Re} \mu < 0, \quad -\pi + 2k\pi < \operatorname{Im} \mu < 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $\mu = \mu_1 + i\lambda$. Por definición $z_1 = z_1(\mu) \in \check{\mathcal{V}}_1^+$ si $\operatorname{Im} z_1 > 0$, $\mu \in \check{\mathcal{V}}$. Entonces, de acuerdo a las expresiones de (66)

$$\begin{aligned} z_1(\mu) &= -i\omega \operatorname{sh}(\mu_1 + i\lambda) \\ &= \omega \operatorname{ch} \mu_1 \operatorname{sen} \lambda - i\omega \operatorname{sh} \mu_1 \cos \lambda. \end{aligned}$$

Luego,

$$\operatorname{Im} z_1(\mu) = -\omega \operatorname{sh} \mu_1 \cos \lambda,$$

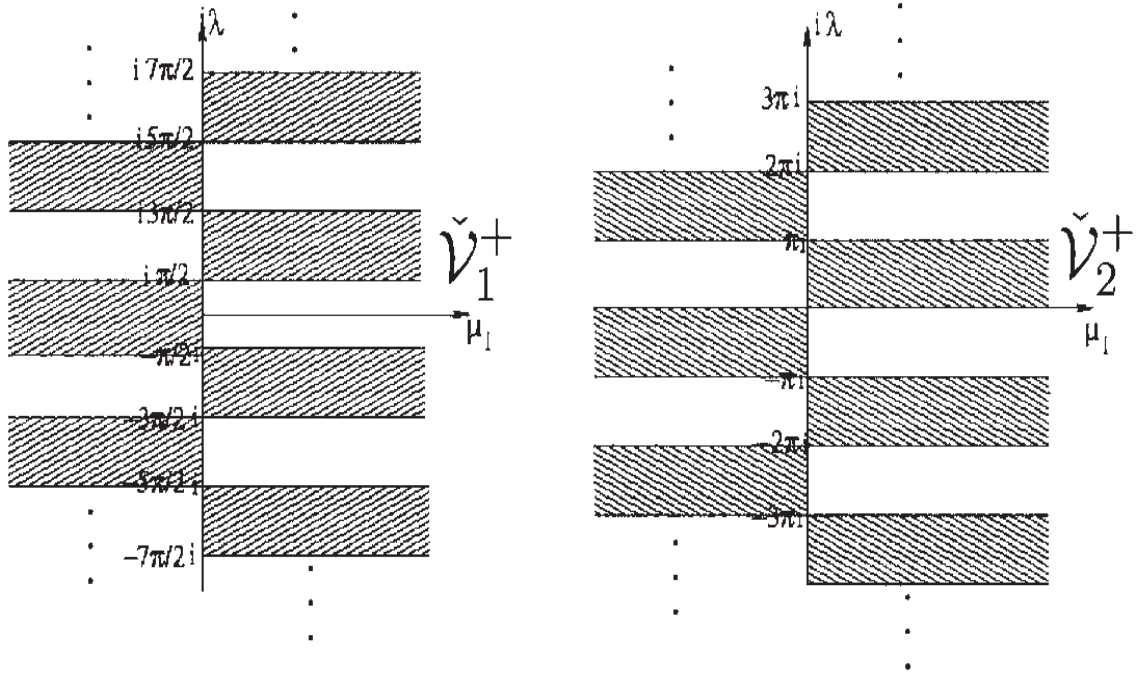


Figura 3: Regiones $\check{\mathcal{V}}_1^+$ y $\check{\mathcal{V}}_2^+$.

de donde $\text{Im } z_1(\mu) > 0$ si y solo si

$$\begin{cases} \mu_1 > 0 \text{ y } \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \lambda < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ó} \\ \mu_1 < 0 \text{ y } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \lambda < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

De manera análoga $z_2 = z_2(\mu) \in \check{\mathcal{V}}_2^+$ si $\text{Im } z_2 > 0$. Pero nuevamente de las expresiones de (66)

$$z_2(\mu) = \omega \text{ch} \mu_1 \cos \lambda + i \omega \text{sh} \mu_1 \sin \lambda.$$

Entonces, $\text{Im } z_2(\mu) > 0$ si y solo si

$$\begin{cases} \mu_1 > 0 \text{ y } 2k\pi < \lambda < \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ó} \\ \mu_1 < 0 \text{ y } (2k+1)\pi < \lambda < 2(k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

□

A continuación escribiremos a que es igual la intersección de $\mathcal{V}_1^+$ y $\mathcal{V}_2^+$ según los parámetros de uniformización de la cubierta universal dados al inicio del Capítulo.

Por la definición de $\mathcal{V}^*$ (57) y el Lema 11 el levantamiento a $\check{\mathcal{V}}$ se determina por

$$\begin{aligned}\check{\mathcal{V}}^* &= \check{\mathcal{V}}_1^+ \cap \check{\mathcal{V}}_2^+ \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} \mid \mu = \mu_1 + i\lambda, \mu_1 > 0, \lambda \in (\pi/2, \pi), (5\pi/2, 3\pi), \dots \right\} \\ &\cup \left\{ \mu \in \mathbb{C} \mid \mu = \mu_1 + i\lambda, \mu_1 < 0, \lambda \in (-\pi/2, 0), (3\pi/2, 2\pi), \dots \right\}\end{aligned}$$

Ver Figura 4.

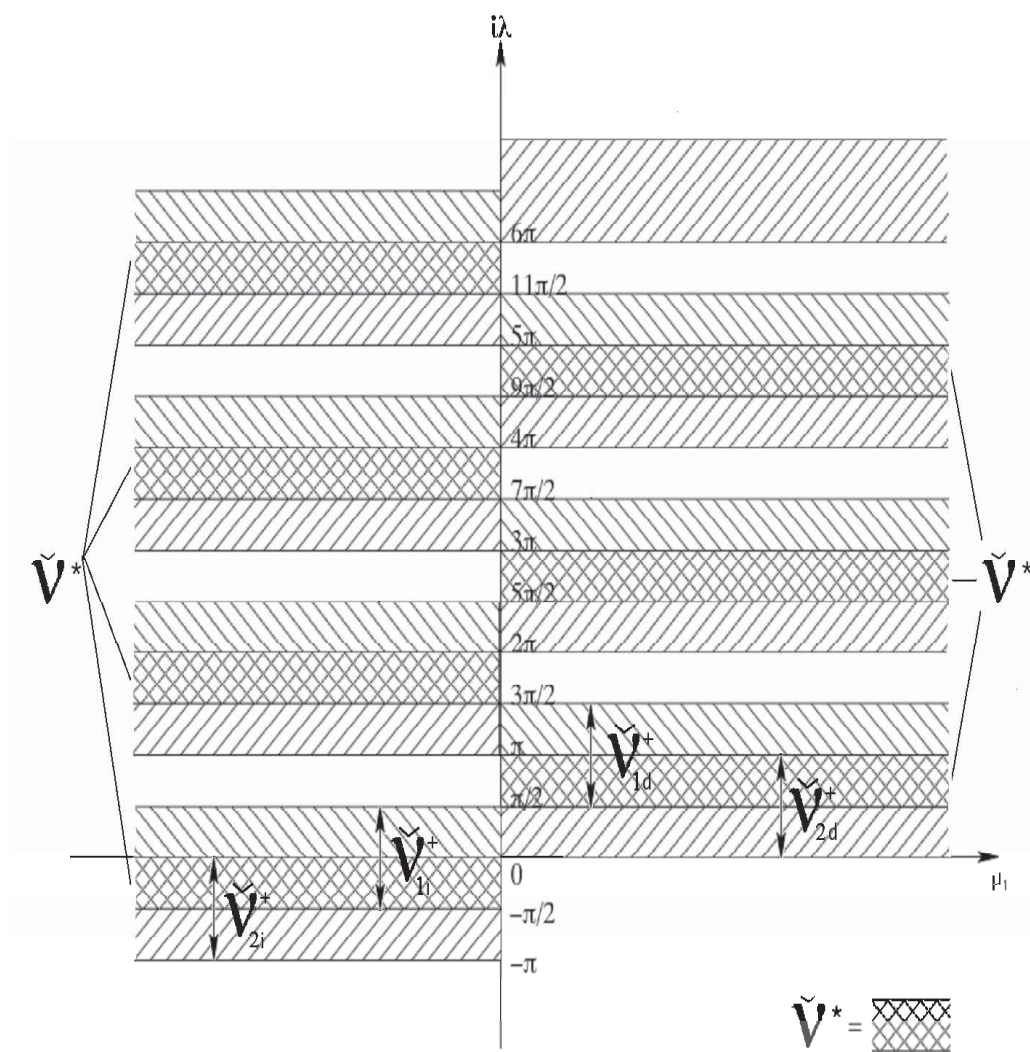


Figura 4: Descripción de $\tilde{V}^*$.

Vemos que todas las regiones $\check{\mathcal{V}}_l^+$, $\check{\mathcal{V}}_{ld}^+$, $\check{\mathcal{V}}_{li}^+$, $l = 1, 2$ son invariantes con respecto a la translación a $2\pi i$. Esto se debe a la periodicidad de la transformación $p(\mu)$ de (66) (Observación 3).

§ 5. Levantamiento del sistema (65) a la cubierta universal de $\mathcal{V}$

En seguida levantaremos las ecuaciones del sistema (65) definido en el Capítulo anterior a $\check{\mathcal{V}}$. Debido a la periodicidad de todos los levantamientos, es suficiente levantar todas las funciones unicamente a una región principal que podemos escoger arbitrariamente.

Denotaremos

$$\check{V}_{1d}^+ := \left\{ \mu \in \check{\mathcal{V}} \mid \operatorname{Re} \mu > 0, \frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} \mu < \frac{3\pi}{2} \right\} \quad (70)$$

$$\check{V}_{1i}^+ := \left\{ \mu \in \check{\mathcal{V}} \mid \operatorname{Re} \mu < 0, -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} \mu < \frac{\pi}{2} \right\} \quad (71)$$

$$\check{V}_{2d}^+ := \left\{ \mu \in \check{\mathcal{V}} \mid \operatorname{Re} \mu > 0, 0 < \operatorname{Im} \mu < \pi \right\} \quad (72)$$

$$\check{V}_{2i}^+ := \left\{ \mu \in \check{\mathcal{V}} \mid \operatorname{Re} \mu < 0, -\pi < \operatorname{Im} \mu < 0 \right\} \quad (73)$$

$$\check{V}_1^+ := \check{V}_{1d}^+ \cup \check{V}_{1i}^+ \quad (74)$$

$$\check{V}_2^+ := \check{V}_{2d}^+ \cup \check{V}_{2i}^+ \quad (75)$$

Estos conjuntos representan las primeras franjas de las Figura 4. Luego

$$\check{V}^* = \check{V}_d^* \cup \check{V}_i^*, \quad (76)$$

en donde,

$$\begin{aligned} \check{V}_d^* &= \check{V}_{1d}^+ \cap \check{V}_{2d}^+ \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} \mid \mu = \mu_1 + i\lambda, \mu_1 > 0, \lambda \in (\pi/2, \pi) \right\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \check{V}_i^* &= \check{V}_{1i}^+ \cap \check{V}_{2i}^+ \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} \mid \mu = \mu_1 + i\lambda, \mu_1 < 0, \lambda \in (-\pi/2, 0) \right\} \end{aligned}$$

Ver Figura 5.

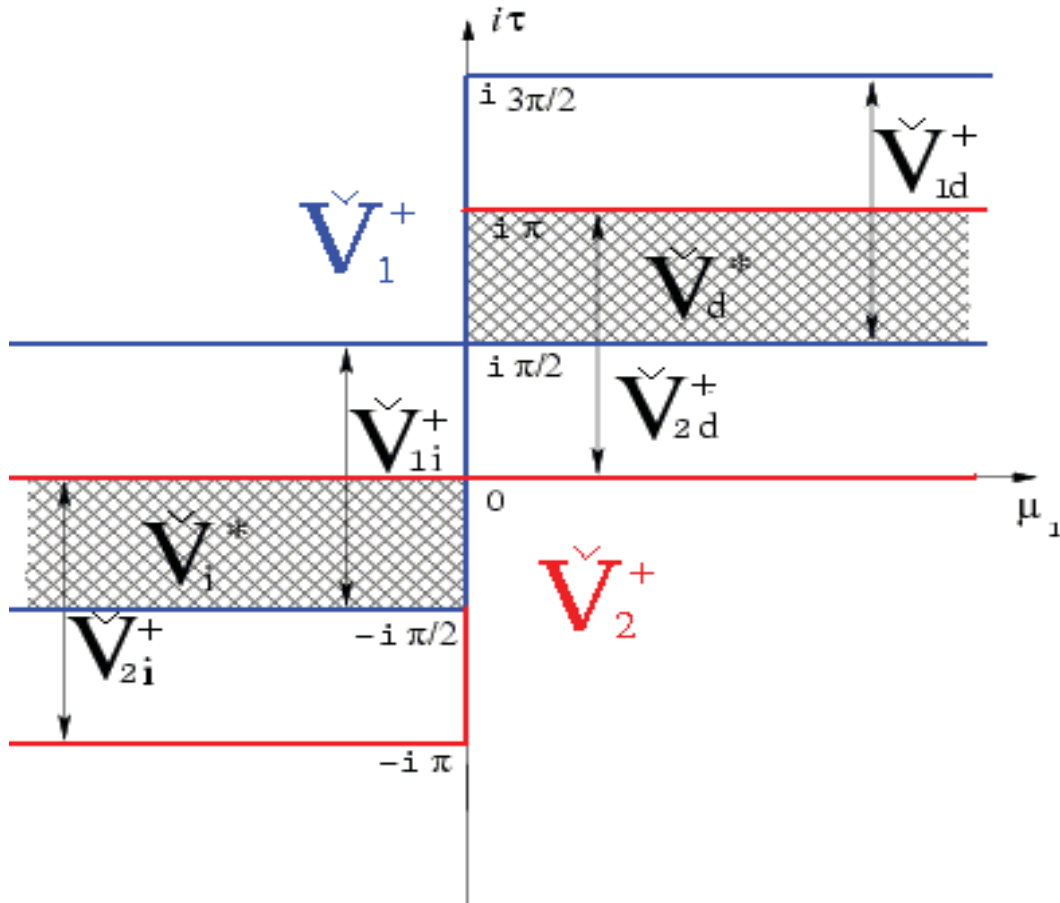


Figura 5: Región principal.

Ahora vamos a levantar el sistema (65) a la cubierta universal $\check{\mathcal{V}}$. De hecho es suficiente levantar dicho sistema a $\check{V}_1^+ \cup \check{V}_2^+$, en donde $\check{V}_l^+$, $l = 1, 2$, se definen como en (74) y (75). Usando el Lema 10 y las representaciones (66) y (67) se obtiene el siguiente sistema para los levantamientos $\check{v}_l^\beta$, $\beta = 0, 1$, sobre $\check{V}_1^+ \cup \check{V}_2^+$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\omega \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \mu} - \omega \operatorname{ch} \mu \right) \check{v}_1^0(\mu) \\ \quad + \left(\omega \sqrt{1 - \operatorname{ch}^2 \mu} + i \omega \operatorname{sh} \mu \right) \check{v}_2^0(\mu) = 0, \quad \mu \in \check{V}^*, \\ \check{v}_1^0(-\mu + i\pi) = \check{v}_1^0(\mu), \quad \mu \in \check{V}_1^+, \\ \check{v}_2^0(-\mu) = \check{v}_2^0(\mu), \quad \mu \in \check{V}_2^+. \end{array} \right. \quad (77)$$

Demostraremos que el sistema (77) tiene unicamente la solución trivial en la clase $\mathcal{H}(\check{V}^*)$. Dividiendo entre ω la primera ecuación de (77) obtenemos la ecuación algebraica

$$\left(\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \mu} - \operatorname{ch} \mu \right) \check{v}_1^0(\mu) + \left(\sqrt{1 - \operatorname{ch}^2 \mu} + i \operatorname{sh} \mu \right) \check{v}_2^0(\mu) = 0, \quad \mu \in \check{V}^*. \quad (78)$$

Lo que sigue es transformar $\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \mu}$, $\mu \in \check{V}_1^+$ y $\sqrt{1 - \operatorname{ch}^2 \mu}$, $\mu \in \check{V}_2^+$, de acuerdo a las ramas de $\sqrt{1 - z_1^2}$ y $\sqrt{1 - z_2^2}$ definidas como se convino en §1, Capítulo 3.

Lema 12. Sea $\check{V}^*$ como en (76), entonces para $\mu \in \check{V}^*$ tenemos

$$a) \quad \sqrt{\omega^2 - z_1^2(\mu)} = \omega \sqrt{1 - (-i \operatorname{sh} \mu)^2} = \begin{cases} -\omega \operatorname{ch} \mu, & \mu \in \check{V}_d^*, \\ \omega \operatorname{ch} \mu, & \mu \in \check{V}_i^*. \end{cases} \quad (79)$$

$$b) \quad \sqrt{\omega^2 - z_2^2(\mu)} = \omega \sqrt{1 - \operatorname{ch}^2 \mu} = \begin{cases} -i \omega \operatorname{sh} \mu, & \mu \in \check{V}_d^*, \\ i \omega \operatorname{sh} \mu, & \mu \in \check{V}_i^*. \end{cases} \quad (80)$$

Demostración.

a) Consideremos la función

$$\sqrt{\omega^2 - z_1^2} : \mathbb{C}_{z_1}^+ \rightarrow \mathbb{C}.$$

Esta función es analítica en $\mathbb{C}_{z_1}^+$, por lo tanto, su levantamiento usando a las formulas de (66) se escribe como $\sqrt{\omega^2 - (-i \omega \operatorname{sh} \mu)^2}$ y es analítica en $\check{V}_1^+$.

En general,

$$\sqrt{\omega^2 - (-i\omega\text{sh}\mu)^2} = \pm\omega\text{ch}\mu, \quad \mu \in \check{V}_1^+, \quad (81)$$

de tal suerte que debemos elegir el signo en una manera tal que (81) corresponda a la rama determinada por (18). Es fácil ver que para $\mu \in \check{V}_d^*$ se tiene que $\text{Re}(\text{ch}\mu) < 0$. Por lo tanto, tenemos que elegir el signo (-) en (81). De esta manera obtenemos la primera fórmula de (79).

Para $\mu \in \check{V}_i^*$ obtenemos que $\text{Re}(\text{ch}\mu) > 0$. Por lo tanto, obtenemos la segunda fórmula de (79).

b)

Se procede análogamente para obtener la expresión (80). $\square$

Ahora demostraremos el teorema principal de la tesis.

Teorema (Principal). *La ecuación algebraica (78) en la clase $\mathcal{H}(\check{V}^*)$ no tiene soluciones no triviales.*

Demostración.

Vamos a considerar la ecuación (78) en la parte derecha $\check{V}_d^*$ de $\check{V}^*$ y en la parte izquierda $\check{V}_i^*$ de $\check{V}^*$.

i) Consideremos la ecuación algebraica (78) en $\check{V}_d^*$. Notemos que por el Lema 12 inciso a):

$$\mu \in \check{V}_d^* \quad \text{implica} \quad \sqrt{1 - (-i\text{sh}\mu)^2} = -\text{ch}\mu.$$

En tanto que por el inciso b):

$$\mu \in \check{V}_d^* \quad \text{implica} \quad \sqrt{1 - (\text{ch}\mu)^2} = -i\text{sh}\mu.$$

Entonces, la parte izquierda de la ecuación (78), en $\check{V}_d^*$, se transforma en

$$\left(\sqrt{1 - (i\text{sh}\mu)^2} - \text{ch}\mu \right) \check{v}_1^0(\mu) + \left(\sqrt{1 - \text{ch}^2\mu} + i\text{sh}\mu \right) \check{v}_2^0(\mu) = -2\text{ch}\mu \check{v}_1^0(\mu), \quad \mu \in \check{V}_d^*.$$

Esto implica que en $\check{V}_d^*$, la ecuación (78) es equivalente a

$$-2\text{ch}\mu \check{v}_1^0(\mu) = 0,$$

la cual se satisface si y solo si $\check{v}_1^0(\mu) = 0$, $\mu \in \check{V}_d^*$.

Por la analiticidad de $\check{v}_1^0(\mu)$ en $\check{V}_{1d}^+$ se sigue que $\check{v}_1^0(\mu) \equiv 0$ en $\check{V}_{1d}^+$. Luego por la propiedad de automorfía de $\check{v}_1^0(\mu)$ (segunda expresión de (77)) se concluye que $\check{v}_1^0(\mu) \equiv 0$ en $\check{V}_1^+$.

ii) Ahora consideremos (78) en $\check{V}_i^*$, entonces, nuevamente por el Lema 12 inciso a):

$$\mu \in \check{V}_i^* \quad \text{implica} \quad \sqrt{1 - (-ish\mu)^2} = ch\mu.$$

Y por el inciso b):

$$\mu \in \check{V}_i^* \quad \text{implica} \quad \sqrt{1 - (ch\mu)^2} = ish\mu.$$

Entonces, la parte izquierda de la ecuación (78), en $\check{V}_i^*$, se transforma en

$$\left(\sqrt{1 - (ish\mu)^2} - ch\mu \right) \check{v}_1^0(\mu) + \left(\sqrt{1 - ch^2\mu + ish\mu} \right) \check{v}_2^0(\mu) = 2ish\mu \check{v}_2^0(\mu), \quad \mu \in \check{V}_i^*,$$

Esto implica que en $\check{V}_i^*$, la ecuación (78) es equivalente a

$$2ish\mu \check{v}_2^0(\mu) = 0,$$

la cual se satisface si y solo si $\check{v}_2^0(\mu) = 0$, para $\mu \in \check{V}_i^*$.

Por la analiticidad de $\check{v}_2^0(\mu)$ en $\check{V}_{2i}^+$ se sigue que $\check{v}_2^0(\mu) \equiv 0$ en $\check{V}_{2i}^+$. Luego por la propiedad de automorfía de $\check{v}_2^0(\mu)$ (última expresión de (77)) se concluye que $\check{v}_2^0(\mu) \equiv 0$ en $\check{V}_2^+$.

Por consiguiente por los casos i) y ii) se obtiene el resultado. Y más aun la ecuación (78) no tiene soluciones no triviales en $\check{V}_1^+ \cup \check{V}_2^+$. $\square$

CAPÍTULO 7

Conclusiones

Teorema . Sea $\omega \in \mathbb{R}^+$. El problema (35)-(36) no tiene soluciones no triviales en la clase $\mathcal{C}_t^1(K)$.

Demostración. Sea $u(x) \in \mathcal{C}_t^1(K)$ y $u_0(x) \in \mathcal{S}(\overline{K})$ su continuación en $\mathbb{R}^2$ por cero. Esto implica la identidad (53).

Mediante la Proposición 2 se tiene que las condiciones de frontera de nuestro problema original se escriben como en (54). De esta manera si el problema (35)-(36) tiene solución no trivial en $\mathcal{C}_t^1(K)$, entonces el sistema (53)-(54) tiene soluciones analíticas no triviales.

Ahora levantamos el sistema (53)-(54) a la superficie de Reimann de los ceros del símbolo del operador $(\Delta + \omega^2)$. El Teorema 5 y los levantamientos definidos en (58) dan el sistema (60)-(61).

Usando el automorfismo definido en (62) y el punto 3 de la Proposición 3 obtenemos que el sistema (60)-(61) toma la forma de (65).

Finalmente levantamos el sistema (65) a la cubierta universal $\check{\mathcal{V}}^*$ de $\mathcal{V}^*$.

Nótese que es suficiente levantar dicho sistema a una región principal que se puede elegir arbitrariamente, debido a la invarianza, con respecto a la translación a $2\pi i$, de las componentes conexas de $\check{\mathcal{V}}^*$. Escogemos la región como en (76). Entonces, mediante los resultados del Lema 10, los parámetros de uniformización y las representaciones (67) de los automorfismos sobre la cubierta universal $\check{V}^*$ de V^* , obtenemos el sistema (77). Luego en virtud a el

Teorema Principal se sigue que el sistema (77) no tiene soluciones no triviales en $\mathcal{H}(\tilde{V}^*)$. Esto implica que el problema original (35)-(36) no tiene soluciones no triviales en $\mathcal{C}_t^1(K)$. $\square$

De esta manera el problema de valores en la frontera definido en el cuadrante K , con condiciones de frontera no locales está bien planteado. Y además tiene kernel trivial en la clase funcional $\mathcal{C}_t^1(K)$, esto minimiza la presencia de soluciones parásitos en K .

Se logró establecer y justificar el planteamiento de las condiciones de frontera sobre los límites de K . Estas condiciones de frontera son condiciones de frontera no locales teóricas, ya que debido a su no localidad no es posible implementarlas directamente en procesos de simulación numérica, sin embargo, es bastante útil el resultado de esta tesis, ya que garantiza estabilidad en cierto sentido de las aproximaciones en diferencias, en el sentido de que el problema que estudiamos es bien planteado.

Cada condición de frontera de (36) representa una condición de frontera de tipo absorbente, ya que si planteamos el problema (35), sobre el semi-plano derecho (izquierdo) y usamos la primera expresión de (36) en la frontera $x_1 = 0$ obtenemos también un problema bien planteado. Análogamente si planteamos el problema (35) sobre el semi-plano superior (inferior) y usamos la segunda expresión de (36) en la frontera $x_2 = 0$ nuevamente obtenemos un problema bien planteado.

§ 1. Investigaciones a futuro

Un primer problema interesante que parece ser el siguiente paso en esta investigación es considerar un dominio como en la Figura 1 y establecer condiciones de frontera no locales del tipo estudiado en esta tesis sobre cada segmento de línea que conforma a Γ y estudiar su buen planteamiento.

Otro problema interesante sería considerar el problema (35)-(36) no homogéneo.

Referencias

- [1] DiBenedetto Emmanuele, *Real Analysis*, Birkhäuser, Advanced Texts Basler Lehrbücher, 1998.
- [2] Engquist, B.; Majda E.; *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol 74, No. 5, pp 1765-1766, 1977, Applied Mathematical Sciences.
- [3] Engquist, B.; Majda E.; *Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves*, Math. Comp., Vol. 31, No. 139, 1977, pp 629-651.
- [4] Egorov, Yu V.; Komech, A. I.; Shibin, M. A. Shubin; *Elements of the Modern Theory of Partial Differential Equations*. Springer, 1999.
- [5] Fevens, T., Jiang, H.; *Absorbing Boundary Conditions for the Schrödinger Equation*, Tecnical Report 95-376, February 16, 1995.
- [6] Jost Jürgen, *Compact Riemann Surfaces. An introduction to contemporary Mathematics*, Universitext, Springer.
- [7] Komech, A.; Merzon, A.; Zhevandrov, P. *A method of complex characteristics for elliptic problems in angles, and its applications*, 125-159, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 206, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [8] Majda A., Osher S.; *Reflection of singularities at the boundary*; C.P.A.M. No. 28, pp. 479-499, 1975.
- [9] Mitrović Dragiša, Žbrinić Darko, *Fundamentals of Applied Funcional Analysis*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 91, Logman.
- [10] Taylor, M. E., *Reflection of singularities of solutions to systems of differential equations*, C.P.A.M., No. 28, pp 457-478, 1975.

- [11] Vladimirov Vasilij Sergeevič, *Le distribuzioni nella fisica matematica*, Ed. Mir, 1979.
- [12] Zaldívar Felipe, *Funciones Algebraicas de una Variable Compleja*, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, 1995.