



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**EL CONJUNTO DE 1-FORMAS DIFERENCIALES MEROMORFAS
SOBRE LA ESFERA DE RIEMANN**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN MATEMÁTICAS**

PRESENTA

LUIS FERNANDO HERNÁNDEZ MOGUEL

ASESOR

DR. JESÚS MUCIÑO RAYMUNDO

DICIEMBRE DE 2006

Índice

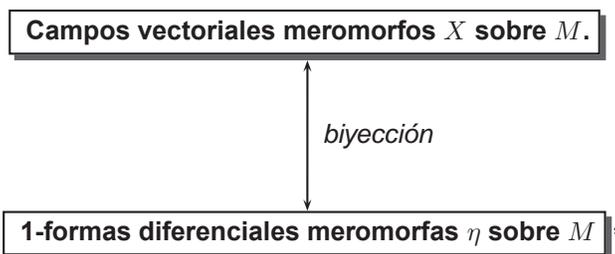
| | |
|---|-----------|
| Introducción | II |
| 0.1. Resultados principales en este trabajo. | II |
| 0.2. ¿Por qué es interesante? | V |
| 0.3. Problemas por realizar. | VII |
| 1. Preliminares | 1 |
| 1.1. Superficies de Riemann. | 1 |
| 1.2. Campos vectoriales meromorfos y 1-formas diferenciales meromorfas. | 4 |
| 2. Dinámica local de campos vectoriales meromorfos y métricas planas | 19 |
| 2.1. Caracterización local de polos y ceros. | 19 |
| 2.2. Construcción de métricas planas. | 29 |
| 3. El conjunto de 1-formas diferenciales meromorfas | 41 |
| Apéndice | |
| Superficies Riemannianas | 55 |
| Bibliografía | 94 |

Introducción

0.1. Resultados principales en este trabajo.

El objeto de estudio en este trabajo, son las parejas $\{(M, \eta)\}$, donde M es una superficie de Riemann y η una 1-forma diferencial meromorfa en M . Se muestran algunos resultados cuando M es la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, por ejemplo para una 1-forma diferencial meromorfa η no idénticamente nula sobre $\hat{\mathbb{C}}$, la suma total de sus ceros y sus polos contando multiplicidad, es -2 (ver Teorema 1.2.1 en el Capítulo 1).

Es un resultado conocido en superficies de Riemann que existe una biyección entre:



donde $\eta(X) \equiv 1$, para más detalles ver (Capítulo 1) o [13], [16]. Esto permite estudiar a las parejas (M, X) como ecuaciones diferenciales.

En particular, en el Capítulo 2 se demuestra el teorema de la forma normal de un campo vectorial meromorfo X en una superficie de Riemann M ; ello da la descripción del campo X alrededor de un polo o un cero, también consultar [7]

y [19].

Desde el punto de vista de la geometría Riemanniana, en la Sección 2.2 del Capítulo 2, se muestra que la pareja (M, η) induce una métrica Riemanniana plana g_η de clase C^∞ , en $M - \{\text{polos y ceros de } \eta\}$ (ver Apéndice para un repaso del concepto de métricas de Riemann).

Las soluciones del campo diferenciable parte real $\Re e(X)$ asociado a η , son geodésicas en la superficie Riemanniana

$$(M - \{\text{polos y ceros de } \eta\}, g_\eta).$$

Para más detalles consultar Capítulos 1 y 2, [16] y [2].

En el presente trabajo un punto novedoso es que las superficies Riemannianas que se consideran,

$$(\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } \eta\}, g_\eta),$$

resultan ser no compactas (de área infinita), consultar [15]. A diferencia del caso de 1-formas diferenciales holomorfas, en el cual las superficies Riemannianas que se obtienen son compactas (de área finita), para más detalles de la teoría existente en este caso, consultar [9].

Los resultados nuevos que se muestran en el trabajo son:

Para $r \in \mathbb{N}$ (el conjunto de los números naturales) con $-r \leq -2$, el conjunto:

$$\mathcal{FM}(-r) \stackrel{\text{definición}}{:=} \left\{ \begin{array}{l} \text{1-formas diferenciales meromorfas } \eta \text{ sobre } \widehat{\mathbb{C}}, \\ \text{cuya suma total de multiplicidades es exactamente } -r \end{array} \right\}$$

es una variedad compleja, no compacta de dimensión compleja $2r - 1$, ver Teorema 3.0.1 en el Capítulo 3.

Para el caso $-r = -2$, el espacio de métricas Riemannianas planas $\{g_\eta\}$, que provienen de 1-formas diferenciales meromorfas $\{\eta\}$ en $\mathcal{FM}(-r)$, módulo

isometrías es

$$\mathcal{M}(-r) \stackrel{\text{definición}}{:=} \frac{\{g_\eta \mid \eta \in \mathcal{FM}(-r)\}}{\{\text{isometrías entre } g_\eta\}}.$$

Se describe tal espacio, en el caso más simple, mostrando que $\mathcal{M}(-2)$ es naturalmente difeomorfo a la variedad con frontera

$$\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Donde:

El conjunto de los números reales positivos \mathbb{R}^+ parametriza a todos los cilindros Riemannianos $(S^1_{2\pi\|R\|_{\mathbb{C}}} \times \mathbb{R}, g)$ con g la métrica Riemanniana plana en el cilindro y $\|R\|_{\mathbb{C}}$ es la norma usual en \mathbb{C} del residuo R , de la 1-forma diferencial meromorfa η en alguno de sus polos.

El punto $\{+\infty\}$ representa al plano euclideo $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$ con (δ_{lm}) la métrica Riemanniana plana usual en \mathbb{R}^2 (ver Proposición 2.2.4 en el Capítulo 2).

Las parejas $\{(M, X)\}$ con M una superficie de Riemann y X un campo vectorial meromorfo sobre M son de hecho ecuaciones diferenciales meromorfas sobre la variedad compleja uno dimensional M , escritas localmente como

$$\frac{dz}{dt} = X(z(t)).$$

El estudio de todos los campos vectoriales meromorfos sobre el espacio complejo de dimensión n (y sus ecuaciones diferenciales asociadas), es complicado, debido a que los campos vectoriales presentan comportamientos de gran complejidad, ver [21] Capítulos 9 y 10.

Una alternativa es describir el comportamiento de un campo vectorial meromorfo a lo largo de una sola de sus soluciones complejas. Ello lleva a estudiar las parejas (M, X) como antes, donde M es una solución compleja, probablemente compactificada al agregarle los ceros o polos de X en los que se acumula la solución compleja.

0.2. ¿Por qué es interesante?

Es natural en geometría: describir el espacio de todos los objetos geométricos de cierto tipo, módulo su noción de equivalencia natural, ver [17] para la teoría general. Dos ejemplos elementales son:

1. El espacio de todos los triángulos rectángulos con hipotenusa de longitud igual a 1, módulo isometrías de \mathbb{R}^2 , es parametrizado por el arco de círculo

$$\left\{ (\cos \theta, \sin \theta) \mid 0 < \theta \leq \frac{\pi}{3} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

2. El espacio de triángulos con lado mayor de longitud igual a 1, módulo isometrías de \mathbb{R}^2 , permitiendo triángulos degenerados, es parametrizado por la región

$$\left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y < \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

En resumen: en muchas situaciones, el espacio de todos los objetos geométricos de cierto tipo, vuelve a ser un objeto geométrico.

En este trabajo los objetos son: las 1-formas diferenciales meromorfas η en $\widehat{\mathbb{C}}$ con suma total de multiplicidades de polos igual a $-r$ (≤ -2). Es natural considerar el siguiente diagrama:

$$\boxed{\frac{\mathcal{FM}(-r)}{PSL(2, \mathbb{C})} \xrightarrow{\Lambda} \mathcal{M}(-r) \xrightarrow{\Psi} \frac{\{\text{Polígonos con } r \text{ lados}\}}{\{\text{isometrías de } \mathbb{R}^2\}}}$$

A continuación se describen en detalle los elementos del diagrama:

Recuerde que

$$PSL(2, \mathbb{C}) := \left\{ L(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ y } ad - bc = 1 \right\},$$

es el grupo de automorfismos holomorfos en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$.

Dos 1-formas diferenciales meromorfas η_1 y η_2 en $\mathcal{FM}(-r)$ se dicen que son

equivalentes, si existe un elemento $L \in PSL(2, \mathbb{C})$, tal que $L_*(\eta_1) = \eta_2$; esto es, ambas 1-formas difieren por un cambio de coordenadas holomorfo global en $\widehat{\mathbb{C}}$. En consecuencia, es natural considerar el cociente $\frac{\mathcal{FM}(-r)}{PSL(2, \mathbb{C})}$, que es el conjunto a la izquierda del diagrama.

Λ es la función que a cada 1-forma diferencial meromorfa η le asocia su superficie Riemanniana $(\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } \eta\}, g_\eta)$. Dicha función está bien definida:

Primero, tomando el cociente bajo el grupo $PSL(2, \mathbb{C})$ en su dominio, ya que las métricas Riemannianas que inducen η_1 y $L_*(\eta_1)$ son siempre isométricas (ver Lema 2.2.1 en el Capítulo 2).

Segundo, tomando el cociente bajo isometrías entre las métricas, en su contradominio, de tal manera que este cociente es $\mathcal{M}(-r)$ (definido como en la sección anterior).

La construcción de la función Λ se debe a los trabajos de O. Teichmüller (1913-1943), L. Bers (1914-1993) ver [6], K. Strebel (1921-) ver [19].

Para argumentar la existencia de la función Ψ , se observa lo siguiente:

Dada una superficie Riemanniana $(\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } \eta\}, g_\eta)$, se tiene que alrededor de cada polo simple de η , la superficie Riemanniana es isométrica a un (medio) cilindro Riemanniano plano $S^1_{2\pi||R||_{\mathbb{C}}} \times (0, \infty)$ (ver Teorema 2.1.1 de la Forma normal de un campo vectorial meromorfo alrededor de un polo, de un cero o de un punto regular y Lema 2.2.4 en el Capítulo 2). Si se remueven dichos cilindros, se obtiene una nueva superficie Riemanniana con frontera que proviene de pegar entre sí los vértices de un polígono euclideo \mathcal{P}_η con r lados en el plano $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$. Por lo tanto Ψ asigna a cada clase de superficie Riemanniana $(\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } \eta\}, g_\eta)$ su polígono \mathcal{P}_η , módulo su posición relativa en \mathbb{R}^2 , por eso se considera el cociente bajo isometrías de \mathbb{R}^2 en el contradominio de Ψ , ver [11] para un estudio similar del cociente

$$\frac{\{\text{Polígonos con } r \text{ lados}\}}{\{\text{isometrías de } \mathbb{R}^2\}}.$$

0.3. Problemas por realizar.

A futuro se desea:

1. Describir con detalle la topología de $\mathcal{FM}(-r)$ para $-r \leq -3$. Por ejemplo calcular su grupo fundamental.
2. Investigar la naturaleza de las funciones Λ y Ψ en el diagrama de la sección anterior, por ejemplo decir si son funciones de clase C^∞ o si son funciones analíticas. Ello naturalmente requiere, describir en detalle cada uno de los conjuntos:

$$\frac{\mathcal{FM}(-r)}{PSL(2, \mathbb{C})}, \mathcal{M}(-r) \text{ y } \frac{\{\text{Polígonos con } r \text{ lados}\}}{\{\text{isometrías de } \mathbb{R}^2\}},$$

cuando $-r \leq -3$, dotándolos de estructuras de variedad, quizá con singularidades.

3. Investigar en detalle que sucede en la construcción de la función Ψ , cuando las multiplicidades en los polos de $\eta \in \mathcal{FM}(-r)$, son mayores que 1.
4. Describir la métrica Riemanniana “natural” en $\mathcal{FM}(-r)$, para $-r \leq -2$, si es que tal métrica hace sentido. Ver [3] para una definición de métrica Riemanniana natural.

Capítulo 1

Preliminares

En esta parte se define que es una función meromorfa, un campo diferencial meromorfo y una 1-forma diferencial meromorfa sobre una superficie de Riemann M .

Se prueba que en la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, toda función meromorfa, todo campo diferencial meromorfo y toda 1-forma diferencial meromorfa, son racionales. Además se muestra que en la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, la suma total de ceros más la suma total de polos (contando multiplicidades), para una función meromorfa, un campo diferencial meromorfo o una 1-forma diferencial meromorfa, resulta ser 0, 2 ó -2 , respectivamente.

1.1. Superficies de Riemann.

En adelante se supondrá que M es una superficie topológica real, conexa; es decir, M es un espacio topológico Hausdorff, conexo, con base de vecindades numerable y localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 . Aquí se está identificando de la manera usual a \mathbb{R}^2 con el plano complejo \mathbb{C} .

Definición 1.1.1. 1. *Una carta coordenada compleja en M es una función*

$\psi : U \subset M \rightarrow \psi(U) \subset \mathbb{C}$, donde ψ es un homeomorfismo y U es un conjunto abierto. Por comodidad se escribirá, (U, ψ) como carta coordenada compleja.

Dos cartas coordenadas complejas (U_i, ψ_i) y (U_j, ψ_j) con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ son compatibles holomorfamente, si la aplicación:

$$\psi_{ji} \stackrel{\text{definición}}{:=} \psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}_{z_i} \longrightarrow \psi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}_{z_j},$$

es holomorfa con inversa holomorfa de la manera usual. A la función ψ_{ji} se le conoce como función de cambio de coordenadas.

2. Un atlas complejo en M consiste de una colección de cartas coordenadas complejas $\mathfrak{A} = \{(U_i, \psi_i) : i \in I\}$, donde I es el conjunto de índices de las cartas y $\{U_i \mid i \in I\}$ es una cubierta abierta de M .
3. Se dice que un atlas complejo \mathfrak{A} es maximal si toda carta coordenada compleja que sea compatible analíticamente con las cartas coordenadas complejas de \mathfrak{A} esta en \mathfrak{A} .
4. Una estructura compleja en M es una atlas maximal en M .
5. Una superficie de Riemann M es una pareja (M, \mathfrak{A}) donde M es una superficie topológica real conexa y \mathfrak{A} es una estructura compleja en M .

Ejemplo 1.1.1. 1. El plano complejo. Como espacio topológico \mathbb{C} es homeomorfo a \mathbb{R}^2 y la estructura compleja en él esta dada por el atlas complejo $\mathfrak{A} = \{(\mathbb{C}, id)\}$ donde id es la función identidad en \mathbb{C} .

2. Dominios. Sea M una superficie de Riemann y $\Omega \subset M$ cualquier región abierta y conexa de M . Si $\mathfrak{A} = \{(U_i, \psi_i) : i \in I\}$ es la estructura compleja en M , entonces la estructura compleja en Ω esta dada por la colección de cartas coordenadas complejas $\{(U_j, \psi_j) : j \in I' \subseteq I\}$ en \mathfrak{A} tal que $U_j \subset \Omega \forall j \in I'$.

3. La esfera de Riemann. *Considérese el conjunto $\widehat{\mathbb{C}} \doteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con la topología que se obtiene de \mathbb{C} compactificando por un punto (el punto al infinito). Con esta topología el espacio resultante es homeomorfo a la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.*

Se define una estructura compleja en $\widehat{\mathbb{C}}$ de la siguiente manera:

Sean $(U_1, \psi_1), (U_2, \psi_2)$ con $U_1 = \widehat{\mathbb{C}} - \{\infty\} = \mathbb{C}, U_2 = \widehat{\mathbb{C}} - \{0\}$ y

$$\psi_1 : U_1 \xrightarrow{z} \mathbb{C}_z, \quad \psi_2 : U_2 \xrightarrow{\frac{1}{z}} \mathbb{C}_w.$$

Claramente estas funciones son homeomorfismos. También se tiene que la función:

$$\psi_{21} : (\mathbb{C} - \{0\}) \subset \mathbb{C}_z \xrightarrow{z \mapsto \frac{1}{z}=w} (\mathbb{C} - \{0\}) \subset \mathbb{C}_w,$$

es holomorfa con inversa holomorfa de la manera usual.

De ahora en adelante se entenderá a $\widehat{\mathbb{C}}$ como la superficie de Riemann anterior.

Definición 1.1.2. *Sean M y N superficies de Riemann.*

Una función $F : M \rightarrow N$ se dice que es holomorfa si para cada par de cartas coordenadas complejas $(U, \psi), (V, \varphi)$ en las superficies M y N respectivamente con $F(U) \subset V$, la función:

$$\varphi \circ F \circ \psi^{-1} : \psi(U) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \varphi(V) \subset \mathbb{C} \tag{1.1}$$

es holomorfa de la manera usual.

Una función $F : M \rightarrow N$ es un biholomorfismo si es holomorfa, biyectiva y su inversa es holomorfa.

Definición 1.1.3. *Sea M una superficie de Riemann. Una función $F : M \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es meromorfa si y solo si para cada carta (U_i, ψ_i) de M la composición*

$$F \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i) \subset \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \tag{1.2}$$

es una función meromorfa de la manera usual.

Observación 1.1.1. *Un cálculo sencillo muestra que las Definiciones (1.1.2) y (1.1.3), no dependen de las cartas coordenadas complejas.*

1.2. Campos vectoriales meromorfos y 1-formas diferenciales meromorfas.

En las siguientes definiciones se supondrá que M es una superficie de Riemann y que el conjunto $\{(U_i, \psi_i) \mid i \in I\}$ es su estructura compleja.

Definición 1.2.1. *Un vector tangente complejo a M en el punto $p \in M$, es una expresión formal:*

$$\left(c_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \Big|_{\psi_i(p)},$$

con $c_i \in \mathbb{C}$ y (ψ_i, U_i) una carta de M .

Dos expresiones

$$\left(c_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \Big|_{\psi_i(p)} \quad \text{y} \quad \left(c_j \frac{\partial}{\partial z_j} \right) \Big|_{\psi_j(p)},$$

con $p \in U_i \cap U_j$, determinan el mismo vector tangente complejo a M si:

$$\frac{d(\psi_{ji})}{dz_i} \Big|_{\psi_i(p)} c_i = c_j,$$

donde

$$\frac{d(\psi_{ji})}{dz_i} \Big|_{\psi_i(p)} \in GL(1, \mathbb{C})$$

es la diferencial del cambio de coordenadas evaluada en el punto $\psi_i(p)$.

Observación 1.2.1. *De hecho, la expresión $\frac{\partial}{\partial z_i}$ es el operador diferencial definido de la siguiente manera:*

$$\frac{\partial}{\partial z_i} : \mathcal{O}(V_p) \xrightarrow{F} \mathbb{C},$$

$$\xrightarrow{\quad} \frac{\partial(F \circ \psi_i^{-1})}{\partial z_i} \Big|_{\psi_i(p)}$$

donde $\mathcal{O}(V_p)$ es el álgebra de funciones holomorfas F , definidas sobre vecindades abiertas V_p de p .

Definición 1.2.2. *Un campo vectorial meromorfo X sobre M , es una colección $\{X_i \mid i \in I\}$ donde:*

$$X_i = f_i(z_i) \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad (1.3)$$

son campos vectoriales dados mediante: $f_i : \psi_i(U_i) \subset \mathbb{C}_{z_i} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ funciones meromorfas, $i \in I$, tales que:

$$f_j(z_j) = \frac{d(\psi_{ji}(z_i))}{dz_i} \Big|_{\psi_{ij}(z_j)} f_i(\psi_{ij}(z_j)), \quad (1.4)$$

donde $\psi_{ij}(z_j) = z_i$.

A la igualdad (1.3) se le conoce como la representación local del campo X en la carta (U_i, ψ_i) (o en la coordenada local z_i). La igualdad (1.4) se obtiene de empujar el campo X_i bajo la función de cambio de coordenadas ψ_{ji} , al conjunto abierto $\psi_j(U_i \cap U_j)$. Con más detalle esto es:

$$(\psi_{ji})_* \left(f_i(z_i) \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \stackrel{\text{definición}}{=} \frac{d(\psi_{ji}(z_i))}{dz_i} \Big|_{\psi_{ij}(z_j)} f_i(\psi_{ij}(z_j)) \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

A la igualdad (1.4) se le conoce como condición de compatibilidad del campo X .

Ejemplo 1.2.1. *Considere la estructura compleja $\{(U_i, \psi_i) \mid i = 1, 2\}$ para $\widehat{\mathbb{C}}$, dada en el Ejemplo (1.1.1).*

Un campo vectorial meromorfo X sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, es una pareja $\{X_1, X_2\}$, donde:

$$\begin{aligned} X_1 &= f_1(z) \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_2 &= f_2(w) \frac{\partial}{\partial w}, \end{aligned}$$

con $f_1 : \psi_1(U_1) \subset \mathbb{C}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ y $f_2 : \psi_2(U_2) \subset \mathbb{C}_w \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ funciones meromorfas, tales que:

$$f_2(w) = -w^2 f_1\left(\frac{1}{w}\right).$$

Notación 1. Por comodidad, en adelante se escribirá $X = \{f_i(z_i) \frac{\partial}{\partial z_i} \mid i \in I\}$ para denotar a un campo vectorial meromorfo sobre una superficie de Riemann M .

Definición 1.2.3. Una 1-forma diferencial meromorfa η sobre M , es una colección $\{\eta_i \mid i \in I\}$, donde:

$$\eta_i = h_i(z_i)dz_i, \quad (1.5)$$

con $h_i : \psi_i(U_i) \subset \mathbb{C}_{z_i} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ funciones meromorfas, $i \in I$, tales que:

$$h_j(z_j) = \left(\frac{d(\psi_{ji}(z_i))}{dz_i} \Big|_{\psi_{ij}(z_j)} \right)^{-1} f_i(\psi_{ij}(z_j)), \quad (1.6)$$

donde $\psi_{ij}(z_j) = z_i$.

A la igualdad (1.5) se le conoce como la representación local de la 1-forma η en la carta (U_i, ψ_i) (o en la coordenada local z_i). La igualdad (1.6) se obtiene de empujar la 1-forma η_i bajo la función $\psi_{ji}(z_j)$, al conjunto abierto $\psi_j(U_i \cap U_j)$. Con más detalle esto es:

$$(\psi_{ji})_* (h_i(z_i)dz_i) \stackrel{\text{definición}}{:=} \left(\frac{d(\psi_{ji}(z_i))}{dz_i} \Big|_{\psi_{ij}(z_j)} \right)^{-1} f_i(\psi_{ij}(z_j))dz_j.$$

A la igualdad (1.6) se le conoce como condición de compatibilidad de la 1-forma diferencial meromorfa η .

Ejemplo 1.2.2. Considere la estructura compleja para la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ dada en el Ejemplo (1.1.1).

Una 1-forma diferencial meromorfa η sobre la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, es una pareja $\{\eta_1, \eta_2\}$, donde:

$$\eta_1 = h_1(z)dz,$$

$$\eta_2 = h_2(w)dw,$$

con $h_1 : \psi_1(U_1) \subset \mathbb{C}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ y $h_2 : \psi_2(U_2) \subset \mathbb{C}_w \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ funciones meromorfas, tales que:

$$h_2(w) = \frac{-1}{w^2} h_1\left(\frac{1}{w}\right).$$

Notación 2. Por comodidad, en adelante se escribirá $\eta = \{h_i(z_i)dz_i \mid i \in I\}$ para denotar a una 1-forma diferencial meromorfa sobre una superficie de Riemann M .

Observación 1.2.2. Sea $\{(U_i, \psi_i) \mid i = 1, 2\}$ la estructura compleja de la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ dada en el Ejemplo (1.1.1).

Si η es una 1-forma diferencial meromorfa sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ y se conoce su expresión en la carta (U_1, ψ_1) , implica de manera inmediata que se conoce su expresión en la carta (U_2, ψ_2) .

En efecto, recuerde que η esta determinada por una pareja de formas diferenciales meromorfas $\{h_1(z)dz, h_2(w)dw\}$, que satisfacen:

$$h_2(w) = \frac{-1}{w^2} h_1\left(\frac{1}{w}\right). \quad (1.7)$$

Como $h(z)dz$ es meromorfa, entonces tiene un desarrollo en series de Laurent en el anillo $\{z \in \mathbb{C}_z \mid \|z\|_{\mathbb{C}} > K\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$, vecindad del $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ (donde $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ es la norma usual en \mathbb{C}), dado de la siguiente manera:

$$h_1(z)dz = \left(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{\nu} z^{\nu} \right) dz.$$

Entonces por la igualdad (1.7), el desarrollo en series de Laurent para $h_2(w)dw$ en el anillo $\{w \in \mathbb{C}_w \mid \|w\|_{\mathbb{C}} < 1/K\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$, vecindad de $w = 0$, es de la siguiente manera:

$$h_2(w)dw = \frac{-1}{w^2} \left(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} b_{\nu} w^{\nu} \right) dw,$$

donde $b_{\nu} = a_{-\nu}$, para toda ν .

Por lo tanto el conocer la expresión de η en una carta, de manera inmediata se conoce como es la expresión de η en otra carta.

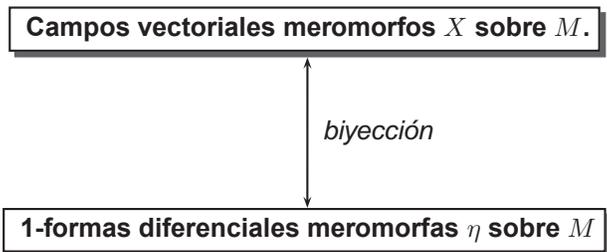
Ahora en adelante y sin confusión se denotará a una 1-forma diferencial meromorfa η sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, como el conjunto:

$$\{h(z)dz\}.$$

De manera análoga se denotará a un campo diferencial meromorfo X sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, como el conjunto:

$$\left\{f(z)\frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$

Ahora bien, dada M superficie de Riemann, existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de campos vectoriales meromorfos $\{X\}$ y el conjunto de 1-formas diferenciales meromorfas $\{\eta\}$ sobre M ; esto es, dado un campo vectorial meromorfo X sobre M existe una manera natural de asociarle una 1-forma diferencial meromorfa η sobre M con $\eta(X) \equiv 1$.



donde $\eta(X) \equiv 1$.

En efecto, sea $X = \{f_i(z_i)\frac{\partial}{\partial z_i} \mid i \in I\}$ un campo vectorial meromorfo sobre M .

Se define la 1-forma diferencial meromorfa η_X asociada a X como la colección $\eta_X = \{\eta_i \mid i \in I\}$, donde:

$$\eta_i \stackrel{\text{definición}}{:=} \frac{1}{f_i(z_i)} dz_i,$$

para i en I .

Recíprocamente, dada $\eta = \{h_i(z_i)dz_i \mid i \in I\}$ una 1-forma diferencial meromorfa sobre M , el campo vectorial meromorfo X_η asociado a η , se define como la colección $X_\eta = \{X_i \mid i \in I\}$ donde:

$$X_i \stackrel{\text{definición}}{:=} \frac{1}{h_i(z_i)} \frac{\partial}{\partial z_i},$$

para i en I .

Observación 1.2.3. De lo anterior, se tiene que si $c \in M$ es un cero (o polo) de una 1-forma diferencial η sobre una superficie de Riemann M , entonces c es un polo (o cero respectivamente) del campo vectorial meromorfo X asociado a η y viceversa.

Definición 1.2.4. Una 1-forma diferencial racional sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, es una colección $\{\omega_i \mid i \in I\}$ donde:

$$\omega_i = \frac{P_i(z_i)}{Q_i(z_i)} dz_i$$

con $Q_i, P_i : \psi_i(U_i) \subset \mathbb{C}_{z_i} \rightarrow \mathbb{C}$ funciones polinomiales, tales que:

$$\frac{P_j(z_j)}{Q_j(z_j)} = \left(\frac{d\psi_{ji}}{dz_i} \Big|_{\psi_{ij}(z_j)} \right)^{-1} \frac{P_i(\psi_{ij}(z_j))}{Q_i(\psi_{ij}(z_j))},$$

donde $\psi_{ij}(z_j) = z_i$.

De manera análoga se define un campo vectorial racional sobre $\widehat{\mathbb{C}}$.

Proposición 1.2.1. 1. Toda función meromorfa de $\widehat{\mathbb{C}}$ a $\widehat{\mathbb{C}}$ es racional.

2. Toda 1-forma diferencial meromorfa sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ es racional.

3. Todo campo vectorial meromorfo sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ es racional.

Demostración. Sea $\{(U_i, \psi_i) \mid i = 1, 2\}$ la estructura compleja en $\widehat{\mathbb{C}}$, dada en el Ejemplo (1.1.1).

Como $\widehat{\mathbb{C}}$ es compacto, entonces F tiene a lo más un número finito de polos y ceros, lo mismo sucede para campos vectoriales meromorfos o formas diferenciales meromorfas, no idénticamente cero.

Para cada uno de los incisos suponga primero que $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ es punto regular para F , para η y para X respectivamente. Esto es, suponga que todos los polos y todos los ceros de F , de η o de X , se encuentran en la

parte finita U_1 de $\widehat{\mathbb{C}}$, ya que en caso contrario existe una transformación de Möebius $L : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, tal que $L(\infty)$ es punto regular para F , $L_*(\eta)$ y $L_*(X)$ con $L(\{\text{polos y ceros de } F \text{ en } \widehat{\mathbb{C}}\}) \subset U_1$, respectivamente.

1. Sea $F : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa.

Sea $F(z)$ la expresión de F en la coordenada z en \mathbb{C}_z .

Sea $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ el conjunto de todos los polos de $F(z)$ con multiplicidades

$$-m_1, -m_2, \dots, -m_r$$

con $m_k > 0$, para $k = 1, 2, \dots, r$ y $D(p_k, \varepsilon_k) = \{z \in \mathbb{C}_z \mid \|z - p_k\|_{\mathbb{C}} < \varepsilon_k\}$ con $\varepsilon_k > 0$, para $k = 1, 2, \dots, r$, discos con centro en p_k con la propiedad de que no contienen a ningún otro polo distinto de p_k y a ningún cero de $F(z)$ (pues los ceros y los polos de F son aislados).

Sea $A_{p_1} = D(p_1, \varepsilon_1) - \{p_1\}$ un anillo alrededor de p_1 . Desarrollando en series de Laurent a $F(z)$ alrededor de p_1 en A_{p_1} , se tiene la siguiente expresión para $F(z)$:

$$F(z) = \frac{b_{1,m_1}}{(z-p_1)^{m_1}} + \frac{b_{1,m_1-1}}{(z-p_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{b_{1,1}}{z-p_1} + F_1(z)$$

con $F_1(z)$ holomorfa en $D(p_1, \varepsilon_1)$ pero con polos en $\mathbb{C}_z - D(p_1, \varepsilon_1)$.

Sea $A_{p_2} = D(p_2, \varepsilon_2) - \{p_2\}$ un anillo alrededor de p_2 . Desarrollando en series de Laurent a $F_1(z)$ alrededor de p_2 en A_{p_2} , se tiene la siguiente expresión para $F_1(z)$:

$$F_1(z) = \frac{b_{2,m_2}}{(z-p_2)^{m_2}} + \frac{b_{2,m_2-1}}{(z-p_2)^{m_2-1}} + \dots + \frac{b_{2,1}}{z-p_2} + F_2(z),$$

donde $F_2(z)$ es holomorfa en $D(p_1, \varepsilon_1) \cup D(p_2, \varepsilon_2)$ pero con polos en

$$\mathbb{C}_z - (D(p_1, \varepsilon_1) \cup D(p_2, \varepsilon_2)).$$

Continuando con este proceso, se tiene que $F(z)$ puede escribirse en \mathbb{C}_z de la siguiente manera:

Para $k = 1, 2, \dots, n$, sea

$$H_k(z) = \frac{b_{k,m_k}}{(z-p_k)^{m_k}} + \frac{b_{k,m_k-1}}{(z-p_k)^{m_k-1}} + \dots + \frac{b_{k,1}}{z-p_k}$$

Entonces

$$F(z) = H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_n(z) + \tilde{F}_{n+1}(z)$$

con $\tilde{F}_{n+1}(z)$ holomorfa en todo \mathbb{C}_z y de hecho $\tilde{F}_{n+1}(z)$ definida como:

$$\tilde{F}_{n+1} : \hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{z \mapsto F(z) - \sum_{k=1}^n H_k(z)} \mathbb{C},$$

es holomorfa sobre la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

Se afirma que $\tilde{F}_{n+1}(z)$ es constante.

En efecto, suponga que $\tilde{F}_{n+1}(z)$ no es constante, entonces por el teorema de la función abierta (ver [18], Capítulo 8, página 256), $\tilde{F}_{n+1}(z)$ es una función abierta. Entonces $\tilde{F}_{n+1}(\hat{\mathbb{C}})$ es un conjunto abierto no vacío en \mathbb{C} .

Como $\hat{\mathbb{C}}$ es compacto entonces $\tilde{F}_{n+1}(\hat{\mathbb{C}})$ es compacto y por lo tanto es cerrado en \mathbb{C} , pero como \mathbb{C} es conexo se tiene que necesariamente $\tilde{F}_{n+1}(\hat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$, lo cual es una contradicción, puesto que \mathbb{C} no es compacto.

Por lo tanto $\tilde{F}_{n+1}(z)$ es una función constante. Luego un cálculo sencillo muestra que $F(z)$ es racional, en las cartas (U_1, ψ_1) y (U_2, ψ_2) que cubren a $\hat{\mathbb{C}}$.

2. Sea $\eta = \{h(z)dz\}$ una 1-forma diferencial meromorfa sobre $\hat{\mathbb{C}}$.

Sea $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ el conjunto de todos polos de la 1-forma diferencial meromorfa $h(z)dz$ en \mathbb{C}_z con multiplicidades $-m_1, -m_2, \dots, -m_n$ y $m_k > 0$.

Procediendo de manera similar como en el inciso (1), se tiene que $h(z)dz$ se puede escribir en \mathbb{C}_z , de la siguiente manera:

$$h(z)dz = \left(\frac{b_{1,m_1}}{(z-p_1)^{m_1}} + \frac{b_{1,m_1-1}}{(z-p_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{b_{1,1}}{z-p_1} + \frac{b_{2,m_2}}{(z-p_2)^{m_2}} + \frac{b_{2,m_2-1}}{(z-p_2)^{m_2-1}} + \dots + \frac{b_{2,1}}{z-p_2} + \dots + \frac{b_{n,m_n}}{(z-p_n)^{m_n}} + \frac{b_{n,m_n-1}}{(z-p_n)^{m_n-1}} + \dots + \frac{b_{n,1}}{z-p_n} + \tilde{F}_{n+1}(z) \right) dz,$$

donde $\tilde{F}_{n+1}(z)$ es holomorfa en todo \mathbb{C}_z .

Agrupando y realizando el álgebra correspondiente, $h(z)dz$ se escribe de la siguiente manera:

$$h(z)dz = \left(\frac{\tilde{Q}(z)}{(z-p_1)^{m_1}(z-p_2)^{m_2}\cdots(z-p_n)^{m_n}} + \tilde{F}_{n+1}(z) \right) dz,$$

donde $\tilde{Q}(z)$ es un polinomio de grado a lo más $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - 1$.

Ahora bien, para poder concluir que η es una 1-forma diferencial racional, basta con probar que su expresión $h(z)dz$ lo es, esto es, si $h(z)dz$ es racional en \mathbb{C}_z , de manera inmediata la expresión de η en la coordenada w es racional (ver Observación 1.2.2).

En efecto, como $\tilde{F}_{n+1}(z)$ holomorfa en \mathbb{C}_z , entonces tiene un desarrollo (infinito) en series de potencias:

$$\tilde{F}_{n+1}(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu z^\nu.$$

Para ver que $h(z)dz$ es racional, basta con probar que $\tilde{F}_{n+1}(z)$ es un polinomio, es decir que su grado es finito.

Si el grado de $\tilde{F}_{n+1}(z)$ no fuese finito, entonces la expresión de η en la coordenada w es:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{w^2} h\left(\frac{1}{w}\right) dw &= \frac{-1}{w^2} \left(\frac{\tilde{Q}\left(\frac{1}{w}\right)}{\left(\frac{1}{w}-p_1\right)^{m_1} \left(\frac{1}{w}-p_2\right)^{m_2} \cdots \left(\frac{1}{w}-p_n\right)^{m_n}} + \tilde{F}_{n+1}\left(\frac{1}{w}\right) \right) dw \\ &= \left(\frac{-1}{(-p_1)^{m_1} \cdots (-p_n)^{m_n}} \frac{\tilde{Q}\left(\frac{1}{w}\right) w^{m_1+m_2+\cdots+m_n-2}}{\left(w-\frac{1}{p_1}\right)^{m_1} \cdots \left(w-\frac{1}{p_n}\right)^{m_n}} + \frac{-1}{w^2} \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu w^{-\nu} \right) dw. \end{aligned}$$

Entonces el sumando:

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu w^{-\nu},$$

indica que $w = 0$ es una singularidad esencial para $-1/w^2 h(1/w)dw$ y además es claro que el factor $-1/w^2$, no destruye la singularidad esencial en el sumando $\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu w^{-\nu}$.

Entonces ∞ sería una singularidad esencial para $h(z)dz$, lo cual es una contradicción con la hipótesis del principio, de que ∞ es un punto regular para η .

Por lo tanto $\tilde{F}_{n+1}(z)$ es un polinomio.

Si el grado de $\tilde{F}_{n+1}(z)$ es estrictamente positivo entonces ∞ sería un polo para $h(z)dz$, lo cual es una contradicción con la hipótesis, entonces $\tilde{F}_{n+1}(z)$ es constante para todo $z \in \mathbb{C}_z$.

Por lo tanto, un cálculo sencillo muestra que $h(z)dz$ es racional.

3. Sea $X = \{f(z)\frac{\partial}{\partial z}\}$ un campo vectorial meromorfo sobre $\hat{\mathbb{C}}$.

Por el inciso (2), se tiene que la 1-forma diferencial meromorfa $\{dz/f(z)\}$ asociada a X es racional.

Luego un cálculo sencillo muestra que X es racional en $\hat{\mathbb{C}}$. \square

Lema 1.2.1. 1. Sea $F : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa.

La multiplicidad de un cero o de un polo de F , es independiente de la expresión de F en cualquier carta coordenada.

2. Sea $\eta = \{h(z)dz\}$ una 1-forma diferencial meromorfa sobre $\hat{\mathbb{C}}$.

La multiplicidad de un cero o de un polo de η , es independiente de la expresión de η en cualquier carta coordenada.

3. Sea $X = \{f(z)\frac{\partial}{\partial z}\}$ un campo vectorial meromorfo sobre $\hat{\mathbb{C}}$.

La multiplicidad de un cero o de un polo de X , es independiente de la expresión de X en cualquier carta coordenada.

Demostración. Sea $\{(U_i, \psi_i) \mid i = 1, 2\}$ la estructura compleja en $\hat{\mathbb{C}}$ dada en el Ejemplo (1.1.1).

1. Sea $c \in \hat{\mathbb{C}}$ un cero (o un polo) de F .

Sea $F(z) = F \circ \psi_1^{-1}(z)$ la expresión de F en la coordenada z y suponga que $\psi_1(c) = c$ es un cero (o un polo) de multiplicidad $s \geq 1$ (respectivamente $-r \leq -1$). Se desea mostrar que $\psi_2(c) = 1/c$ es un cero (o un polo), para la

expresión

$$F\left(\frac{1}{w}\right) = F \circ \psi_2^{-1}(w),$$

de la función F en la coordenada w , de multiplicidad $s \geq 1$ (respectivamente $-r \leq -1$).

En efecto, como $\psi_1(c) = c$ es un cero de multiplicidad s para $F(z)$, entonces

$$F(z) = (z - c)^s H(z), \quad (1.8)$$

donde $H(c) \neq 0$.

Entonces sustituyendo $z = 1/w$ en la igualdad (1.8), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{w}\right) &= \left(\frac{1}{w} - c\right)^s H\left(\frac{1}{w}\right) \\ &= \left(w - \frac{1}{c}\right)^s \tilde{H}(w), \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde $\tilde{H}(w) = (-c)^s H(1/w)/w^s$.

Por lo tanto de la igualdad (1.9), se tiene que $\psi_2(c) = 1/c$ es un cero de multiplicidad s para $F(1/w)$. Sustituyendo $s = -r$ en las igualdades (1.8) y (1.9), se obtiene el resultado para el caso en que c es un polo.

Por lo tanto la multiplicidad de un cero o de un polo de F , es independiente de la carta coordenada en que se exprese la función F .

2. Sea c un cero (o un polo) distinto de cero de η .

Sea $h(z)dz$ la expresión de η en la coordenada z y suponga que $\psi_1(c) = c$ es un cero de multiplicidad $s \geq 1$ (respectivamente $-r \leq -1$). Se desea mostrar que $\psi_2(c) = 1/c$ es un cero (o un polo), para la expresión de η en la coordenada w de multiplicidad s (respectivamente $-r$).

En efecto, como $\psi_1(c) = c$ es un cero de multiplicidad s para $h(z)dz$, entonces

$$h(z)dz = (z - c)^s h_1(z)dz,$$

donde $h_1(z)$ es una función racional con $h_1(c) \neq 0$ e ∞ .

Bajo el cambio de coordenadas $\psi_{21}(z)$, se tiene que la 1-forma diferencial me-

romorfa

$$(\psi_{21})_*(h(z)dz) \stackrel{\text{definición}}{:=} \frac{-1}{w^2} h\left(\frac{1}{w}\right) dw$$

tiene un cero (o un polo) en $\psi_2(c) = 1/c$ y se afirma que es de multiplicidad s (respectivamente $-r$).

En efecto, se tiene la igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{w^2} h\left(\frac{1}{w}\right) &= \frac{-1}{w^2} \left(\frac{1}{w} - c\right)^s h_1\left(\frac{1}{w}\right) dw \\ &= \left(w - \frac{1}{c}\right)^s \tilde{h}_1(w), \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde

$$\tilde{h}_1(w) = \frac{(-1)^{s+1} c^s h_1\left(\frac{1}{w}\right)}{w^{s+2}}.$$

Entonces

$$\tilde{h}_1\left(\frac{1}{c}\right) = (-1)^{s+1} c^{2s+2} h_1(c),$$

donde $h_1(c) \neq 0$ e ∞ ($\neq 0$ e ∞).

Entonces de la igualdad (1.10), se obtiene que $\psi_2(c) = 1/c$ es un cero de multiplicidad s para $(-1/w^2)h(1/w)dw$. Tomando $s = -r$ en la igualdad (1.10), se obtiene el resultado para el caso en que c es un polo.

En el caso cuando $c = 0$ es un cero (o polo) para $h(z)dz$, el resultado se obtiene de manera similar al caso ($c \neq 0$) con la particularidad de que se utiliza únicamente la carta (U_1, ψ_1) , pues es la única carta que cubre a $c = 0$.

Por lo tanto la multiplicidad de un cero o de un polo de η , es independiente de la carta coordenada en que se exprese η .

3. Para el caso de campos vectoriales meromorfs, basta considerar la 1-forma diferencial meromorfa $\{dz/f(z)\}$ sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, para obtener lo pedido. \square

Notación 3. Se define para una función, para una 1-forma diferencial meromorfa y para un campo diferencial meromorfo, la suma total de multiplicidades de ceros y la suma total de multiplicidades de polos de la función, de la 1-forma diferencial meromorfa o del campo vectorial meromorfo en cuestión, sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, como C y P donde C es un entero positivo y P es un entero negativo.

Teorema 1.2.1. 1. Sea $F : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa, entonces

$$C(F) + P(F) = 0.$$

2. Sea X un campo vectorial meromorfo sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces

$$C(X) + P(X) = 2.$$

3. Sea η una 1-forma diferencial meromorfa sobre $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces

$$C(\eta) + P(\eta) = -2.$$

Demostración. Para el inciso (1), la expresión de F en la coordenada local z es igual a:

$$F(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}$$

donde a_n y $b_m \neq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$ (el conjunto de los números naturales) y el numerador y denominador sin factores comunes.

Se tiene que en la coordenada z , $P(F) = -m$ y $C(F) = n$. Se quiere mostrar que 0 en la coordenada w (correspondiente a ∞ en \mathbb{C}_z) es un cero de multiplicidad $m - n$ o un polo de multiplicidad $-(n - m)$ para F .

En efecto,

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{w}\right) &= \frac{a_n \left(\frac{1}{w}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{1}{w}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{1}{w}\right) + a_0}{b_m \left(\frac{1}{w}\right)^m + b_{m-1} \left(\frac{1}{w}\right)^{m-1} + \cdots + b_1 \left(\frac{1}{w}\right) + b_0} \\ &= \frac{w^m}{w^n} \left(\frac{a_n + a_{n-1}w + \cdots + a_1 w^{n-1} + a_0 w^n}{b_m + b_{m-1}w + \cdots + b_1 w^{m-1} + b_0 w^m} \right). \end{aligned}$$

Puesto que

$$\left(\frac{a_n + a_{n-1}w + \cdots + a_1 w^{n-1} + a_0 w^n}{b_m + b_{m-1}w + \cdots + b_1 w^{m-1} + b_0 w^m} \right) (0) = \frac{a_n}{b_m},$$

entonces

a. Si $m > n$, implica que 0 es un cero de multiplicidad $m - n$, por lo tanto:

$$C(F) + P(F) = n + (m - n) + (-m) = 0.$$

- b. Si $m < n$, implica que 0 es un polo de multiplicidad $-(n-m)$, por lo tanto:

$$C(F) + P(F) = n - m - (n - m) = 0.$$

- c. Si $n = m$, el resultado es trivial e ∞ es un punto regular (no cero y no polo) para F .

Para el inciso (2), la expresión de X en la coordenada z es:

$$f(z) \frac{\partial}{\partial z} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0} \frac{\partial}{\partial z}$$

donde a_n y $b_m \neq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$ y el numerador y el denominador sin factores comunes.

Se tiene que en la coordenada z , $P(X) = -m$ y $C(X) = n$. Se quiere mostrar que 0 correspondiente a la coordenada w es un cero de multiplicidad $m-n+2$ o un polo de multiplicidad $-(n-m-2)$.

En efecto, considere la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} -w^2 f\left(\frac{1}{w}\right) \frac{\partial}{\partial w} &= -w^2 \left(\frac{a_n \left(\frac{1}{w}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{1}{w}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{1}{w}\right) + a_0}{b_m \left(\frac{1}{w}\right)^m + b_{m-1} \left(\frac{1}{w}\right)^{m-1} + \cdots + b_1 \left(\frac{1}{w}\right) + b_0} \right) \frac{\partial}{\partial w} \\ &= -\frac{w^{m+2}}{w^n} \left(\frac{a_n + a_{n-1}w + \cdots + a_1 w^{n-1} + a_0 w^n}{b_m + b_{m-1}w + \cdots + b_1 w^{m-1} + b_0 w^m} \right) \frac{\partial}{\partial w}. \end{aligned}$$

Puesto que

$$\left(\frac{a_n + a_{n-1}w + \cdots + a_1 w^{n-1} + a_0 w^n}{b_m + b_{m-1}w + \cdots + b_1 w^{m-1} + b_0 w^m} \right) (0) = \frac{a_n}{b_m},$$

entonces

- a. Si $m+2 > n$, implica que 0 es un cero de multiplicidad $m+2-n$, por lo tanto:

$$C(X) + P(X) = n + (m+2-n) + (-m) = 2.$$

- b. Si $m+2 < n$, implica que 0 es un polo de multiplicidad $-(n-m-2)$, por lo tanto:

$$C(X) + P(X) = n - m - (n - m - 2) = 2.$$

c. Si $n = m + 2$, el resultado es trivial e ∞ es un punto regular para X .

Por un proceso similar se obtiene el resultado para el inciso (3). □

Capítulo 2

Dinámica local de campos vectoriales meromorfos y métricas planas

2.1. Caracterización local de polos y ceros.

Habiendo definido los campos vectoriales meromorfos sobre una superficie de Riemann M , el siguiente paso es entender la dinámica inducida por éstos en una vecindad de un polo, de un cero o de un punto regular en M . Para esto primero se describirá la forma que adoptan los campos alrededor de un polo, de un cero o de un punto regular del mismo.

Por simplicidad se trasladará el polo, cero o el punto regular al origen de \mathbb{C} .

Definición 2.1.1. Sean $f_1(z)\frac{\partial}{\partial z}$ y $f_2(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}$ dos campos vectoriales meromorfos definidos en vecindades $W_1 \subset \mathbb{C}_z$ y $W_2 \subset \mathbb{C}_\xi$ del origen, respectivamente.

Se dice que los campos $f_1(z)\frac{\partial}{\partial z}$ y $f_2(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}$ son equivalentes si existe un cambio de coordenadas local holomorfo $F : V_1 \subset W_1 \rightarrow V_2 \subset W_2$ donde V_1, V_2 son

vecindades adecuadas del origen con $F(0) = 0$, tal que:

$$F_* \left(f_1(z) \frac{\partial}{\partial z} \right) = f_2(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Teorema 2.1.1 (Forma normal de un campo vectorial meromorfo alrededor de un polo, de un cero o de un punto regular). Sea $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$ un campo vectorial meromorfo definido en una vecindad de $0 \in \mathbb{C}$.

Existe un cambio de coordenadas local holomorfo, tal que:

1. Si 0 es un punto regular de $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$, es decir $f(0) \neq 0$, entonces $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$ es equivalente con

$$\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

2. Si 0 es un polo de multiplicidad $-r \leq -1$, para $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$, entonces $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$ es equivalente con

$$\xi^{-r} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

3. Si 0 es un cero de multiplicidad 1 de $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$, entonces $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$ es equivalente con

$$\lambda_1 \xi \frac{\partial}{\partial \xi},$$

donde $\lambda_1 = \frac{df}{dz}(0) \in \mathbb{C} - \{0\}$.

4. Si 0 es un cero de multiplicidad $s \geq 2$ para $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$, entonces $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$ es equivalente con

$$\frac{\xi^s}{1 + \lambda_2 \xi^{s-1}} \frac{\partial}{\partial \xi},$$

donde $\lambda_2 = \text{Res}(dz/f(z), z = 0)$ y por notación Res indica el residuo de la 1-forma diferencial meromorfa $\eta = dz/f(z)$ en $z = 0$.

Demostración. 1. Sea $W_1 \subset \mathbb{C}_z$ una vecindad de 0 tal que no contiene a ningún cero y a ningún polo de $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$.

Se define la función:

$$F : W_1 \xrightarrow{z} \mathbb{C}_\xi \xrightarrow{\int_0^z \frac{1}{f(\mu)} d\mu}.$$

Como $1/f(z) \neq 0 \text{ e } \infty$, para todo $z \in W_1$, se tiene que la integral de arriba esta bien definida y se calcula utilizando trayectorias en W_1 . Además se afirma que $F(z)$ es un cambio de coordenadas local holomorfo.

En efecto, como $F(0) = 0$ y

$$\frac{dF}{dz}(0) = \frac{1}{f(0)} \neq 0 \text{ e } \infty,$$

entonces por el teorema de la función inversa se tiene que existen vecindades $V_1 \subset W_1$ y $V_2 \subset \mathbb{C}_\xi$ de 0 y $F(0) = 0$ respectivamente, tal que la función:

$$F : V_1 \subset \mathbb{C}_z \xrightarrow{z} V_2 \subset \mathbb{C}_\xi \xrightarrow{\int_0^z \frac{1}{f(\mu)} d\mu},$$

es un cambio de coordenadas local holomorfo. Además bajo este cambio de coordenadas, se obtiene que:

$$\begin{aligned} F_* \left(f(z) \frac{\partial}{\partial z} \right) & \stackrel{\text{definición}}{=} \left(\frac{dF(z)}{dz} \right) \Big|_{F^{-1}(\xi)} f(F^{-1}(\xi)) \frac{\partial}{\partial \xi} \\ & = \left(\frac{1}{f(z)} \right) \Big|_{F^{-1}(\xi)} f(F^{-1}(\xi)) \frac{\partial}{\partial \xi} \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

2. Si $0 \in \mathbb{C}$ es un polo de multiplicidad $-r \leq -1$, para $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$, entonces existe una vecindad $W_1 \subset \mathbb{C}_z$ de 0 , tal que no contiene a ningún otro polo y a ningún cero de $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$. Además se tiene la igualdad:

$$f(z) \frac{\partial}{\partial z} = z^{-r} G(z) \frac{\partial}{\partial z},$$

para $z \in W_1 - \{0\}$ con G holomorfa en W_1 y $G(0) \neq 0$.

Entonces el cambio de coordenadas local holomorfo F que se desea hallar, debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial, definida en W_1 :

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} z^{-r} G(z) = (\Phi(z))^{-r}, \tag{2.1}$$

puesto que si $\xi = F(z)$ es solución de (2.1), entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} F_* \left(f(z) \frac{\partial}{\partial z} \right) & \stackrel{\text{definición}}{=} \frac{dF(z)}{dz} \Big|_{F^{-1}(\xi)} f(F^{-1}(\xi)) \frac{\partial}{\partial \xi} \\ & = \left(\frac{dF(z)}{dz} z^{-r} G(z) \right) \Big|_{F^{-1}(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ & = \xi^{-r} \frac{\partial}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Reescribiendo la ecuación diferencial (2.1), se ve de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{(\Phi(z))^{r+1}}{r+1} \right) = \frac{z^r}{G(z)}. \quad (2.2)$$

Como $1/f(z) \neq 0$ e ∞ , entonces

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{z^r}{G(z)}$$

es holomorfa en W_1 , de lo cual se sigue que existe una función holomorfa $H : W_1 \rightarrow \mathbb{C}_\xi$ tal que:

$$\frac{dH}{dz}(z) = \frac{z^r}{G(z)}.$$

De la ecuación diferencial anterior se concluye que $H(z)$ tiene un cero de multiplicidad $r+1$ en $z=0$, lo que implica que exista una función holomorfa $H_0 : W_1 \rightarrow \mathbb{C}_\xi$ con $H_0(0) \neq 0$ y

$$H(z) = \int_0^z \frac{\mu^r}{G(\mu)} d\mu = \frac{z^{r+1}}{r+1} H_0(z).$$

Integrando la ecuación (2.2), se tiene la siguiente igualdad:

$$(\Phi(z))^{r+1} = z^{r+1} H_0(z).$$

Como $H_0(0) \neq 0$, existe $V \subset W_1$ vecindad de 0, tal que $H_0(V) \subset \tilde{V}$, donde $\tilde{V} \subset \mathbb{C}_\xi$ es una rama adecuada de $z^{\frac{1}{r+1}}$.

Se define la función:

$$F : V \longrightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{C}_\xi \\ z \longmapsto z(H_0(z))^{\frac{1}{r+1}},$$

que por construcción satisface la ecuación diferencial (2.2) y por consiguiente satisface la ecuación diferencial (2.1).

Note que $F(0) = 0$ y

$$\frac{dF}{dz}(0) = (H_0(0))^{\frac{1}{r+1}} \neq 0,$$

entonces por el teorema de la función inversa, existen vecindades $V_1 \subset V$ y $V_2 \subset \tilde{V}$ de 0 y $F(0) = 0$ respectivamente, tal que:

$$F : V_1 \subset \mathbb{C}_z \xrightarrow{z} V_2 \subset \mathbb{C}_\xi \xrightarrow{z(H_0(z))^{\frac{1}{r+1}}}$$

es un cambio de coordenadas local holomorfo.

3. Si $0 \in \mathbb{C}$ es un cero de multiplicidad 1 para $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$, entonces en una vecindad $W_1 \subset \mathbb{C}_z$ de 0 , tal que W_1 no contiene a ningún otro cero y a ningún polo, se desarrolla en series de potencias infinitas al campo vectorial $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ en W_1 , de tal manera que factorizando se tiene la siguiente igualdad:

$$f(z)\frac{\partial}{\partial z} = \lambda_1 z G(z)\frac{\partial}{\partial z},$$

donde $G(z)$ es holomorfa en W_1 , $G(0) = 1$ y $\lambda_1 = \frac{df}{dz}(0) \in \mathbb{C} - \{0\}$.

El cambio de coordenadas local holomorfo F que se desea hallar, debe ser una solución de la ecuación diferencial definida en W_1 de la siguiente manera:

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} \lambda_1 z G(z) = \lambda_1 \Phi(z), \tag{2.3}$$

puesto que si $\xi = F(z)$ es solución de (2.3), entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} F_* \left(f(z)\frac{\partial}{\partial z} \right) & \stackrel{\text{definición}}{=} \left. \frac{dF(z)}{dz} \right|_{F^{-1}(\xi)} f(F^{-1}(\xi))\frac{\partial}{\partial \xi} \\ & = \left(\left. \frac{dF(z)}{dz} \lambda_1 z G(z) \right) \right|_{F^{-1}(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ & = \left(\lambda_1 F(z) \right) \Big|_{F^{-1}(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ & = \lambda_1 \xi \frac{\partial}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Reescribiendo la ecuación diferencial (2.3), se ve de la siguiente manera:

$$\frac{d\Phi(z)}{\Phi(z)} = \frac{dz}{zG(z)}. \quad (2.4)$$

Restringiendo el dominio y el contradominio de $\Phi(z)$ a la rama del logaritmo $W_1 - \{z = x + \sqrt{-1}y \mid y = 0 \text{ y } x \leq 0\}$ y $\mathbb{C}_\xi - \{\xi = \xi_1 + \sqrt{-1}\xi_2 \mid \xi_2 = 0 \text{ y } \xi_1 \leq 0\}$ respectivamente, se tiene que la ecuación diferencial (2.4), se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{d \log(\Phi(z))}{dz} = \frac{dz}{zG(z)}. \quad (2.5)$$

Como $G(z)$ es holomorfa en W_1 y $G(0) = 1$, entonces existe una vecindad $V \subset W_1$ de 0, tal que $1/G(z)$ se desarrolla en series de potencias infinitas de la siguiente manera:

$$\frac{1}{G(z)} = 1 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

Entonces para $z \in V - \{z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}_z \mid y = 0 \text{ y } x \leq 0\}$, se tiene la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{zG(z)} = \frac{1}{z} + a_1 + a_2z + a_3z^2 + \dots$$

Se define la función:

$$H : V - \{z = x + \sqrt{-1}y \mid y = 0 \text{ y } x \leq 0\} \longrightarrow \mathbb{C}_\xi - \{\xi = \xi_1 + \sqrt{-1}\xi_2 \mid \xi_2 = 0 \text{ y } \xi_1 \leq 0\}$$

donde

$$H(z) = \log z + H_0(z)$$

$$\text{y } H_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}.$$

Derivando la función $H(z)$, se obtiene la siguiente igualdad:

$$\frac{dH(z)}{dz} = \frac{1}{zG(z)}.$$

Sustituyendo esta última igualdad en la ecuación (2.5), se obtiene lo siguiente:

$$\log(\Phi(z)) = \log z + H_0(z). \quad (2.6)$$

Sea $F(z)$ la continuación holomorfa de alguna solución $\Phi(z)$ de (2.6), definida de la siguiente manera:

$$F : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_\xi \\ z \longmapsto ze^{H_0(z)},$$

donde $F(0) = 0$ y por construcción satisface la ecuación diferencial (2.3).

Además se tiene que en $z = 0$, la derivada de F es:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dz}(0) &= e^{H_0(0)} \\ &= e^0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto F es un cambio de coordenadas local holomorfo.

4. Sea $0 \in \mathbb{C}_z$ un cero de multiplicidad $s \geq 2$ para el campo vectorial meromorfo $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$. Existe una vecindad $V_0 \subset \mathbb{C}_z$ de 0 , tal que la 1-forma diferencial meromorfa $dz/f(z)$ se escribe en $V_0 - \{0\}$ de la siguiente manera:

$$\frac{dz}{f(z)} = \frac{b_{-s}}{z^s} + \frac{b_{-(s-1)}}{z^{s-1}} + \dots + \frac{\lambda_2}{z} + G(z),$$

donde $\lambda_2 = \text{Res}(dz/f(z), z=0)$ y $G(z)$ es una función holomorfa en V_0 .

Sea $w = z^{-s+1} (c_{-s} + c_{-(s-1)} + \dots) + \lambda_2 \log z$ una antiderivada de $1/f(z)$, definida en una rama adecuada W de logaritmo, contenida en $V_0 - \{0\}$.

Sea F_1 , la función meromorfa definida en V_0 como:

$$F_1 : V_0 \longrightarrow \mathbb{C}_{\widehat{\xi}} \\ z \longmapsto z_{(d_0+d_1+\dots)} = ze^{h(z)}$$

con $h(z)$ holomorfa en V_0 , $F_1(0) = 0$ y $d_0 \neq 0$, tal que:

$$w = \widehat{\xi}^{-s+1} + \lambda_2 \log \widehat{\xi} + b$$

con $b \in \mathbb{C}$ una constante.

Entonces tomando la diferencial de w se obtiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} dw &= \left((-s+1)\widehat{\xi}^{-s} + \frac{\lambda_2}{z} \right) d\widehat{\xi} \\ &= \frac{dz}{f(z)} \end{aligned}$$

Luego del cálculo anterior se tiene que el campo vectorial meromorfo $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$ alrededor de $0 \in \mathbb{C}_z$, se escribe como:

$$\frac{\widehat{\xi}^s}{(-s+1) + \lambda_2 \widehat{\xi}^{s-1}} \frac{\partial}{\partial \widehat{\xi}}.$$

Considere la función holomorfa:

$$F_2 : \mathbb{C}_{\widehat{\xi}} \xrightarrow{\xi} \mathbb{C}_{\xi} \xrightarrow{(s-1)\sqrt{\frac{1}{-s+1}}\widehat{\xi}}$$

para alguna $(s-1)$ -ésima raíz de $1/(-s+1)$. Entonces un cálculo sencillo, muestra que:

$$(F_2)_* \left(\frac{\widehat{\xi}^s}{(-s+1) + \lambda_2 \widehat{\xi}^{s-1}} \frac{\partial}{\partial \widehat{\xi}} \right) = \frac{\xi^s}{1 + \lambda_2 \xi^{s-1}} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Por lo tanto, se obtiene lo pedido. □

Definición 2.1.2. Sea $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$ un campo vectorial meromorfo en un abierto $W \subset \mathbb{C}$.

Se definen los campos vectoriales diferenciables (ver Apéndice) reales parte real y parte imaginaria en $W - \{\text{polos de } f(z) \frac{\partial}{\partial z}\}$ como:

$$\begin{aligned} \Re \left(f(z) \frac{\partial}{\partial z} \right) &:= \operatorname{Re}(f) \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{Im}(f) \frac{\partial}{\partial y}, \\ \Im \left(f(z) \frac{\partial}{\partial z} \right) &:= -\operatorname{Im}(f) \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{Re}(f) \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

donde $\operatorname{Re}(f)$ y $\operatorname{Im}(f)$ son las partes real e imaginaria de $f(z)$ respectivamente.

Ejemplo 2.1.1. Considere en \mathbb{C} el campo vectorial meromorfo:

$$\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Entonces en $\mathbb{C} - \{0\}$, los campos vectoriales parte real y parte imaginaria son

$$\begin{aligned} \Re \left(\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) &= \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{-y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y}, \\ \Im \left(\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) &= \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Definición 2.1.3. Considere en $\widehat{\mathbb{C}}$ la cerradura del semiplano superior

$$\overline{H}^2 = (\{x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C} \mid y \geq 0\} \cup \{\infty\}) \subset \widehat{\mathbb{C}}$$

con su métrica Riemanniana usual. Se define un sector elíptico plano como la intersección de una vecindad abierta de $\infty \in \overline{H}^2 \subset \widehat{\mathbb{C}}$.

Se define un sector elíptico hiperbólico como la intersección de una vecindad abierta de $0 \in \overline{H}^2 \subset \widehat{\mathbb{C}}$.

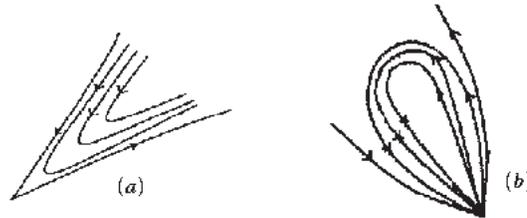


Figura 1. (a) Sector hiperbólico, (b) Sector elíptico.

De manera informativa (sin demostración) se incluye el siguiente:

Corolario 2.1.1. Sea $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ un campo vectorial meromorfo en una vecindad de $0 \in \mathbb{C}$.

1. Si 0 es un punto regular para $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$, entonces las trayectorias de $\Re e(f(z)\frac{\partial}{\partial z})$ son difeomorfas a líneas rectas paralelas en \mathbb{R}^2 .
2. Si 0 es un polo de multiplicidad $-r \leq -1$, para $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$, entonces las trayectorias de $\Re e(f(z)\frac{\partial}{\partial z})$ definen $2r + 2$ sectores hiperbólicos planos en 0 .

3. Si 0 es un cero de multiplicidad 1 , para $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$, entonces las trayectorias de $\Re(f(z) \frac{\partial}{\partial z})$ definen una fuente, un pozo o un centro en 0 , dependiendo de que $\Re(\frac{df}{dz}(0))$ (la parte real de $\frac{df}{dz}(0)$) es positiva, negativa o cero respectivamente.
4. Si 0 es un cero de multiplicidad $s \geq 2$, para $f(z) \frac{\partial}{\partial z}$, entonces las trayectorias de $\Re(f(z) \frac{\partial}{\partial z})$ definen $2s - 2$ sectores elípticos planos en 0 .

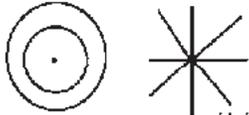
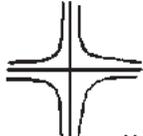
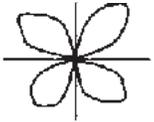
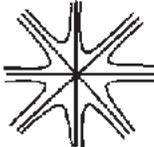
| Ceros | Polos |
|--|--|
|  <p style="text-align: center;">multiplicidad 1</p> |  <p style="text-align: center;">multiplicidad -1</p> |
|  <p style="text-align: center;">multiplicidad 2</p> |  <p style="text-align: center;">multiplicidad -2</p> |
|  <p style="text-align: center;">multiplicidad 3</p> |  <p style="text-align: center;">multiplicidad -3</p> |

Figura 2. Ceros y polos de campos vectoriales meromorfos.

Para la demostración, ver [13].

Proposición 2.1.1. *Sea $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ un campo vectorial meromorfo en una vecindad de $0 \in \mathbb{C}$ con 0 un cero de multiplicidad 1 de $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$. Existe $\theta \in [0, 2\pi)$, tal que las trayectorias de $\Re(e^{\sqrt{-1}\theta} f(z)\frac{\partial}{\partial z})$ son difeomorfas a círculos concéntricos en \mathbb{R}^2 .*

Demostración. Por el inciso (3) del Lema (2.1.1), se tiene que alrededor de una vecindad de $0 \in \mathbb{C}$ el campo vectorial meromorfo $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$, es equivalente al campo vectorial meromorfo:

$$\lambda \xi \frac{\partial}{\partial \xi}$$

con $\lambda = \frac{df}{dz}(0) \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Como λ es un número complejo distinto de cero, entonces es posible encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$, tal que

$$e^{\sqrt{-1}\theta} \lambda = \sqrt{-1} \varepsilon$$

con $\varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Entonces se tiene que el campo vectorial $e^{\sqrt{-1}\theta} f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ es equivalente al campo vectorial meromorfo:

$$\sqrt{-1} \varepsilon \xi \frac{\partial}{\partial \xi}$$

y por el inciso (3) del Corolario (2.1.1), se obtiene lo pedido. □

2.2. Construcción de métricas planas.

El objetivo principal de la sección es mostrar que dada una superficie de Riemann M provista de una 1-forma diferencial η , tiene asociada de manera natural una métrica Riemanniana plana en $M - \{\text{polos y ceros de } \eta\}$ (ver el Apéndice para una consulta rápida de la definición).

Se muestran algunos resultados geométricos para el caso en que M es igual a la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$.

Proposición 2.2.1 (Construcción de métricas planas que provienen de 1-formas diferenciales meromorfas). *Dada una 1-forma diferencial meromorfa η en una superficie de Riemann M , esta provee a $M - \{\text{polos y ceros de } \eta\}$ de una métrica Riemanniana plana g_η .*

Demostración. Bastará hacer el análisis, en cada dominio $U \subset \mathbb{C}$ provisto de $\eta = (u + \sqrt{-1}v)dz$.

En efecto, se tiene que:

$$g_\eta = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 & 0 \\ 0 & u^2 + v^2 \end{pmatrix},$$

es una forma bilineal, simétrica y definida positiva, es decir una métrica Riemanniana en cada espacio tangente $T_z(U - \{\text{polos y ceros de } \eta\})$ para cada $z \in U - \{\text{polos y ceros de } \eta\}$.

Para ver que la superficie Riemanniana $(U - \{\text{polos y ceros de } \eta\}, g_\eta)$ es de curvatura cero, bastará con mostrar que $U - \{\text{polos y ceros de } \eta\}$, tiene asociada una familia de cartas complejas $\{(U_i, \psi_i) \mid i \in I\}$ con

$$\psi_i : U_i \rightarrow \psi_i(U_i) \subset \mathbb{C}_{z_i}$$

y tal que los cambios de coordenadas ψ_{ji} son traslaciones euclideanas en \mathbb{C}_{z_i} .

En efecto, para cada $a_i \in U - \{\text{polos y ceros de } \eta\}$, sean

$$U_i \subset (U - \{\text{polos y ceros de } \eta\}),$$

discos con centro en a_i .

Se definen las funciones de coordenadas como:

$$\begin{aligned} \psi_i : U_i &\longrightarrow \psi_i(U_i) \subset \mathbb{C}_{z_i}, \\ z &\longmapsto \int_{a_i}^z (u + \sqrt{-1}v) d\xi \end{aligned}$$

donde se usan trayectorias en U_i , para calcular la integral. Como

$$\frac{d\psi_i}{dz}(a_i) = (u + \sqrt{-1}v)(a_i) \neq 0 \text{ e } \infty,$$

entonces por el Teorema de la función inversa, se tiene que ψ_i es un difeomorfismo local.

Se observa que $0 \in \mathbb{C}$ esta $\psi_i(U_i)$ para todo i . Entonces un cálculo sencillo muestra que:

$$\psi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow[\xrightarrow{0}]{\psi_i^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow[\xrightarrow{a_i}]{\psi_j} \psi_j(U_i \cap U_j). \\ k_{ij} = \int_{a_j}^{a_i} (u + \sqrt{-1}v) d\xi$$

Además

$$\psi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow[\xrightarrow{z_i}]{\psi_i^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow[\xrightarrow{\psi_i^{-1}(z_i)}]{\psi_j} \psi_j(U_i \cap U_j) \\ \int_{a_j}^{\psi_i^{-1}(z_i)} (u + \sqrt{-1}v) d\xi = k_{ij} + \int_{a_i}^{\psi_i^{-1}(z_i)} (u + \sqrt{-1}v) d\xi$$

y puesto que

$$\int_{a_i}^{\psi_i^{-1}(z_i)} (u + \sqrt{-1}v) d\xi = \psi_i(\psi_i^{-1}(z_i)) = z_i,$$

entonces

$$\psi_{ji} \stackrel{\text{definición}}{:=} \psi_i \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow[\xrightarrow{z_i}]{\psi_j} \psi_j(U_i \cap U_j). \\ z_i + k_{ij}$$

Ahora para ver que g_η es de curvatura cero, basta verificar que ψ_i es una isometría local (ver Apéndice), esto es:

$$\psi_i^*((\delta_{lm})) = g_\eta,$$

donde (δ_{lm}) es la métrica Riemanniana usual en \mathbb{R}^2 (donde se identifica de manera usual a \mathbb{C}_{z_i} con \mathbb{R}^2).

En efecto, expresando ψ_i en coordenadas cartesianas (x, y) se tiene que:

$$\psi_i(x, y) = \left(\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u d\xi_1 - v d\xi_2, \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v d\xi_1 + u d\xi_2 \right),$$

donde (x_0, y_0) es el centro del disco U_i . Luego la diferencial de ψ_i en forma matricial se expresa como:

$$D\psi_i = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \psi_i^*((\delta_{lm})) & \stackrel{\text{definición}}{:=} (D\psi_i)^T(\delta_{lm})D\psi_i \\
 & = \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 & 0 \\ 0 & u^2 + v^2 \end{pmatrix} \\
 & = g_\eta,
 \end{aligned}$$

donde $(D\psi_i)^T$ es la transpuesta de $D\psi_i$.

Por lo tanto g_η es plana. □

Observación 2.2.1. Si $f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ un campo vectorial meromorfo en \mathbb{C} , entonces las soluciones de los campos $\Re e(f(z)\frac{\partial}{\partial z})$ y $\Im m(f(z)\frac{\partial}{\partial z})$ son geodésicas en la superficie Riemanniana $(\mathbb{C} - \{\text{polos y ceros de } \eta = dz/f(z)\}, g_\eta)$.

En efecto, puesto que para cada vecindad

$$V \subset (\mathbb{C} - \{\text{polos y ceros de } \eta = dz/f(z)\}, g_\eta)$$

de un punto z_0 en la superficie $\mathbb{C} - \{\text{polos y ceros de } \eta = dz/f(z)\}$, se tiene que la función:

$$F : (V, g_\eta) \xrightarrow{z} (\tilde{V} \subset \mathbb{C}, (\delta_{lm}))$$

$$\xrightarrow{\int_{z_0}^z \frac{1}{f(\mu)} d\mu}$$

con (δ_{lm}) la métrica Riemanniana usual en $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ es una isometría.

Entonces como una isometría envía geodésicas en geodésicas (ver Proposición .0.9 en el Apéndice), se tiene que las soluciones de los campos $\Re e(f(z)\frac{\partial}{\partial z})$ y $\Im m(f(z)\frac{\partial}{\partial z})$ son geodésicas en la superficie Riemanniana

$$(\mathbb{C} - \{\text{polos y ceros de } \eta = dz/f(z)\}, g_\eta).$$

Proposición 2.2.2. Sea $\eta = \{h(z)dz\}$ una 1-forma diferencial meromorfa sobre la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

Entonces para $\theta \in [0, 2\pi)$, las superficies Riemannianas

$$(\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } \eta\}, g_\eta) \text{ y } (\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } \eta\}, g_{e^{\sqrt{-1}\theta}\eta})$$

son isométricas.

Demostración. La métrica Riemanniana plana que induce la 1-forma diferencial meromorfa $\{h(z)dz\} = \{(u + \sqrt{-1}v)dz\}$, en la superficie de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } \eta\}$ es:

$$g_\eta = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 & 0 \\ 0 & u^2 + v^2 \end{pmatrix},$$

ver Proposición (2.2.1).

Entonces la métrica Riemanniana plana en $\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } e^{\sqrt{-1}\theta}\eta\}$, inducida por la 1-forma diferencial meromorfa, $e^{\sqrt{-1}\theta}\eta = \{e^{\sqrt{-1}\theta}(u + \sqrt{-1}v)dz\}$ con $\theta \in [0, 2\pi)$ es:

$$g_{e^{\sqrt{-1}\theta}\eta} = \begin{pmatrix} \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 & 0 \\ 0 & \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 \end{pmatrix},$$

donde $\tilde{u} = u \cos \theta - v \sin \theta$ y $\tilde{v} = u \sin \theta + v \cos \theta$. Elevando al cuadrado y sumando se tiene que:

$$\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 = u^2 + v^2.$$

Entonces el cálculo anterior, induce una isometría natural entre las superficies Riemannianas $(\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } \eta\}, g_\eta)$ y $(\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } \eta\}, g_{e^{\sqrt{-1}\theta}\eta})$.

□

Lema 2.2.1. Sea $\eta = \{(u + \sqrt{-1}v)dz\}$ una 1-forma diferencial meromorfa sobre la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$.

Considere el grupo de automorfismos holomorfos en $\widehat{\mathbb{C}}$:

$$PSL(2, \mathbb{C}) := \left\{ L(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c \text{ y } d \in \mathbb{C} \text{ con } ad - bc = 1 \right\}.$$

Entonces para $L \in PSL(2, \mathbb{C})$, las superficies Riemannianas:

$$(\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } \eta\}, g_\eta) \text{ y } (\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } L_*\eta\}, g_{L_*\eta})$$

son isométricas.

Demostración. Sea $L : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, elemento de $PSL(2, \mathbb{C})$.

Considere la carta (U_1, ψ_1) de $\widehat{\mathbb{C}}$, donde $U_1 = \widehat{\mathbb{C}} - \{\infty\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ con

$$\psi_1 : U_1 \xrightarrow{z} \mathbb{C}_z$$

y la expresión $L \circ \psi_1^{-1}(z)$ de la función de Möebius L , en la carta (U_1, ψ_1) y que por simplicidad se escribirá $L(z) = L \circ \psi_1^{-1}(z)$, donde

$$L : \mathbb{C}_z \xrightarrow{z} \widehat{\mathbb{C}}_\xi \xrightarrow{\frac{az+b}{cz+d}}$$

elemento de $PSL(2, \mathbb{C})$. Un cálculo sencillo muestra que la inversa de L es:

$$L^{-1}(\xi) = \frac{d\xi - b}{a - c\xi}.$$

Empujando la 1-forma diferencial meromorfa $(u + \sqrt{-1}v)dz$ bajo L , se obtiene:

$$L_*((u + \sqrt{-1}v)dz) \stackrel{\text{definición}}{=} \left(\frac{dL}{dz} \Big|_{L^{-1}(\xi)} \right)^{-1} (u(L^{-1}(\xi)) + \sqrt{-1}v(L^{-1}(\xi))) d\xi,$$

donde

$$\frac{dL}{dz} \Big|_{L^{-1}(\xi)} = (a - c\xi)^2.$$

Sean $\tilde{u}(\xi)$ y $\tilde{v}(\xi) : \mathbb{C}_\xi \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ funciones meromorfas, tales que:

$$\tilde{u}(\xi) + \sqrt{-1}\tilde{v}(\xi) = \frac{u(L^{-1}(\xi)) + \sqrt{-1}v(L^{-1}(\xi))}{(a - c\xi)^2}.$$

Entonces $L_*\eta = \{(\tilde{u} + \sqrt{-1}\tilde{v})d\xi\}$ define una 1-forma diferencial meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Sean

$$g_\eta = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 & 0 \\ 0 & u^2 + v^2 \end{pmatrix}$$

$$g_{L_*\eta} = \begin{pmatrix} \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 & 0 \\ 0 & \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 \end{pmatrix}$$

las métricas Riemannianas definidas en las superficies $\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } \eta\}$ y $\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } L_*\eta\}$, respectivamente.

Se afirma que $L : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es una isometría entre las superficies Riemannianas anteriores.

En efecto, puesto que L es un difeomorfismo (ya que es un biholomorfismo) entre $\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } \eta\}$ y $\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } L_*\eta\}$, entonces solo falta por mostrar la igualdad:

$$L^*(g_{L_*\eta}) = g_\eta.$$

Por simplicidad, se demostrará la igualdad de arriba en la carta (U_1, ψ_1) de $\widehat{\mathbb{C}}$, ya que por la definición de métrica Riemanniana, se tiene de inmediato la igualdad en la otra carta coordenada de la esfera $\widehat{\mathbb{C}}$ (ver Apéndice para una lectura rápida de la definición de métrica Riemanniana).

Sea z un punto de $\mathbb{C}_z - \{\text{polos y ceros de } (u + \sqrt{-1}v)dz\}$.

Sean v_1 y v_2 vectores tangentes a $\mathbb{C}_z - \{\text{polos y ceros de } (u + \sqrt{-1}v)dz\}$ en el punto z con $v_1 = (a_1, b_1)$ y $v_2 = (a_2, b_2)$ (note que aquí se identifica de manera canónica el espacio tangente $T_z\mathbb{C}_z$ con el espacio tangente $T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$, donde $z = x + \sqrt{-1}iy$).

Entonces por la definición de jalar una métrica Riemanniana (ver Apéndice),

se tiene que:

$$\begin{aligned}
 L^*(g_{L_*\eta})(v_1, v_2)|_z & \stackrel{\text{definición}}{=} g_{L_*\eta} \left(\frac{dL}{dz} \Big|_z v_1, \frac{dL}{dz} \Big|_z v_2 \right) \Big|_{L(z)} \\
 &= \frac{1}{(cz+d)^4} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}^2(L(z)) + \tilde{v}^2(L(z)) & 0 \\ 0 & \tilde{u}^2(L(z)) + \tilde{v}^2(L(z)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^2 + v^2 & 0 \\ 0 & u^2 + v^2 \end{pmatrix} \Big|_z \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \\
 &= g_\eta(v_1, v_2)|_z.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto las superficies Riemannianas

$$(\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } \eta\}, g_\eta) \text{ y } (\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } L_*\eta\}, g_{L_*\eta}),$$

son isométricas. □

Proposición 2.2.3. *Sea η una 1-forma diferencial meromorfa sobre la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Si η tiene al menos un cero en $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces la superficie Riemanniana

$$(\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } \eta\}, g_\eta)$$

no es geodésicamente completa.

Demostración. Sea $\eta = \{h(z)dz\}$ y $p \in \widehat{\mathbb{C}}$ un cero de multiplicidad $r (\geq 1)$ de η . Sin pérdida de generalidad suponga que $p = 0 \in \mathbb{C}_z \subset \widehat{\mathbb{C}}$, ya que de lo contrario existe una transformación de Möbius adecuada $L : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ y tal que $L(p) = 0$ y las superficies Riemannianas

$$(\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } \eta\}, g_\eta) \text{ y } (\widehat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } L_*\eta\}, g_{L_*\eta})$$

son isométricas, ver Lema (2.2.1).

Considere la expresión $h(z)dz$ de η en \mathbb{C}_z y el campo diferencial meromorfo asociado a $h(z)dz$,

$$\frac{1}{h(z)} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Entonces por el Teorema de la forma normal de un campo (2.1.1), existen vecindades adecuadas $V_1 \subset \mathbb{C}_z$ y $V_2 \subset \mathbb{C}_\xi$ de 0 respectivamente y un cambio de coordenadas local holomorfo $F : V_1 \rightarrow V_2$, tal que

$$F_* \left(\frac{1}{h(z)} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{1}{\xi^r} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Considere ahora el campo vectorial real diferenciable $\Re e(1/\xi^r \frac{\partial}{\partial \xi})$ en $\mathbb{R}_{(\xi_1, \xi_2)}^2$ con $\xi = \xi_1 + \sqrt{-1}\xi_2$.

Se sabe que las soluciones del campo $\Re e(1/\xi^r \frac{\partial}{\partial \xi})$ son geodésicas en la superficie Riemanniana

$$(V_2 - \{0\}, g_{\tilde{\eta}})$$

con $\tilde{\eta} = \xi^r d\xi$.

Puesto que el campo $\Re e(1/\xi^r \frac{\partial}{\partial \xi})$ apunta en dirección tangente al eje real en \mathbb{C}_ξ , la ecuación diferencial ordinaria asociada a $\Re e(1/\xi^r \frac{\partial}{\partial \xi})$, sobre el eje real es:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{1}{\xi_1^r}, \quad \xi_2 = 0. \tag{2.7}$$

Las soluciones de la ecuación diferencial (2.7), son de la forma:

$$\alpha(t) = \left(\sqrt[r+1]{(r+1)t + \tilde{C}}, 0 \right)$$

con $\tilde{C} \in \mathbb{R}$ e identificando a \mathbb{C}_ξ de manera usual con $\mathbb{R}_{(\xi_1, \xi_2)}^2$.

Como la traza de α esta contenida en $V_2 - \{0\}$, entonces $\alpha(t)$ solo está definida en $\mathbb{R}_t - \{-\tilde{C}/(r+1)\}$.

Puesto que F es un biholomorfismo, en particular es un difeomorfismo y además isometría entre las superficies Riemannianas

$$(V_1 - \{0\}, g_\eta) \text{ y } (V_2 - \{0\}, g_{\tilde{\eta}}).$$

Entonces $F^{-1} \circ \alpha(t)$ es geodésica en la superficie Riemanniana $(V_2 - \{0\}, g_{\tilde{\eta}})$ con el mismo dominio que $\alpha(t)$ (ver Apéndice).

Por lo tanto la superficie Riemanniana $(V_1 - \{0\}, g_\eta)$ no es geodésicamente completa y en consecuencia $(\hat{\mathbb{C}} - \{\text{polos y ceros de } \eta\}, g_\eta)$ tampoco lo es. \square

Proposición 2.2.4. Sea $\eta = \{dz/(z - p_1)(z - p_2)\}$, una 1-forma diferencial meromorfa sobre la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ con p_1 y $p_2 \in \mathbb{C}$.

Entonces:

1. si $p_2 \neq p_1$, la superficie Riemanniana $(\widehat{\mathbb{C}} - \{p_1, p_2\}, g_\eta)$ es isométrica al cilindro Riemanniano $(S^1_{2\pi\|R\|_{\mathbb{C}}} \times \mathbb{R}, g)$, donde g es la métrica Riemanniana plana en el cilindro (ver Apéndice) y $\|R\|_{\mathbb{C}}$ es la norma usual en \mathbb{C} , del residuo R de η en el polo $z = p_1$.
2. si $p_2 = p_1$, la superficie Riemanniana $(\widehat{\mathbb{C}} - \{p_1\}, g_\eta)$, es isométrica al plano $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$ con (δ_{lm}) la métrica Riemanniana usual en \mathbb{R}^2 .

Demostración. Demostración del inciso (1). Por el Lema (2.2.1) se tiene que existe una transformación de Möebius adecuada $L : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ con $L(p_1) = 0$, $L(p_2) = \infty$ y

$$L_* \left(\frac{dz}{(z - p_1)(z - p_2)} \right) = \frac{1}{(p_1 - p_2)} \frac{d\xi}{\xi},$$

donde $(1/(p_1 - p_2)) = \text{Res}(\eta, z = p_1)$, tal que las superficies Riemannianas

$$(\widehat{\mathbb{C}} - \{p_1, p_2\}, g_\eta) \text{ y } (\widehat{\mathbb{C}} - \{0, \infty\}, g_{L_*\eta}),$$

son isométricas.

Entonces bastará con mostrar el resultado para la superficie Riemanniana

$$(\widehat{\mathbb{C}} - \{0, \infty\}, g_{\tilde{\eta}})$$

con $\tilde{\eta} = \{Rdz/z\}$ y $R = 1/(p_1 - p_2)$.

En efecto, considere los subconjuntos de \mathbb{C} :

$$\Omega_1 = \mathbb{C} - \{z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C} \mid y = 0 \text{ y } x \leq 0\},$$

$$\Omega_2 = \mathbb{C} - \{z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C} \mid y = 0 \text{ y } x \geq 0\}.$$

Entonces de análisis complejo se sabe que las funciones:

$$F_1 : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2,$$

$$z \longmapsto \int_1^z \frac{\mu}{z} d\mu$$

$$F_2 : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2,$$

$$z \longmapsto \int_1^z \frac{\mu}{z} d\mu$$

son biholomorfismos entre Ω_1 con la banda $(-\pi\|R\|_{\mathbb{C}}, \pi\|R\|_{\mathbb{C}}) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ y Ω_2 con la banda $(0, 2\pi\|R\|_{\mathbb{C}}) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, respectivamente.

Sea

$$V = ((-\pi\|R\|_{\mathbb{C}}, \pi\|R\|_{\mathbb{C}}) \times \mathbb{R}) \cup ((0, 2\pi\|R\|_{\mathbb{C}}) \times \mathbb{R}).$$

Entonces F_1 y F_2 inducen una isometría entre las superficies Riemannianas $(\mathbb{C} - \{0\}, g_\eta)$ y $(V, (\delta_{lm}))$.

No es difícil verificar que la superficie Riemanniana $(V, (\delta_{lm}))$ y el cilindro Riemanniano $(S^1_{2\pi\|R\|_{\mathbb{C}}} \times \mathbb{R}, g)$ son isométricos (ver Ejemplo .0.2 inciso 4 en el Apéndice).

Por lo tanto las superficies Riemannianas $(\widehat{\mathbb{C}} - \{0, \infty\}, g_\eta)$ y $(S^1_{2\pi\|R\|_{\mathbb{C}}} \times \mathbb{R}, g)$ son isométricas, puesto que $\widehat{\mathbb{C}} - \{0, \infty\}$ y $\mathbb{C} - \{0\}$ son biholomorfas.

Demostración del inciso (2). Por el Lema (2.2.1) se tiene que existe una transformación de Möebius adecuada $L : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ con $L(p_1) = 0$ y

$$L_* \left(\frac{dz}{(z - p_1)^2} \right) = \frac{d\xi}{\xi^2},$$

tal que las superficies Riemannianas

$$(\widehat{\mathbb{C}} - \{p_1\}, g_\eta) \text{ y } (\widehat{\mathbb{C}} - \{0\}, g_{L_*\eta}),$$

son isométricas.

Entonces bastará con mostrar que la superficie Riemanniana $(\widehat{\mathbb{C}} - \{0\}, g_{\widehat{\eta}})$, con $\widehat{\eta} = \{dz/z^2\}$, es isométrica al plano euclideo $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$.

En efecto, considerando la carta (U_2, ψ_2) de $\widehat{\mathbb{C}}$ con $U_2 = \widehat{\mathbb{C}} - \{0\}$ y

$$\psi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{C}_w,$$

$$z \longmapsto \frac{1}{z} = w$$

se tiene que la expresión de η en (U_2, ψ_2) es:

$$-dw,$$

ver Capítulo 1.

Entonces calculando la métrica Riemanniana $g_{\hat{\eta}}$ en $\hat{\mathbb{C}} - \{0\}$, se obtiene que:

$$g_{\hat{\eta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la superficie Riemanniana $(\hat{\mathbb{C}} - \{0\}, g_{\hat{\eta}})$ es isométrica a $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$, puesto que $\hat{\mathbb{C}} - \{0\}$ y \mathbb{C} son biholomorfos, donde \mathbb{C} se identifica de manera usual con \mathbb{R}^2 . □

Capítulo 3

El conjunto de 1-formas diferenciales meromorfas

En este capítulo se muestra que el conjunto de 1-formas diferenciales meromorfas sobre la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, cuya suma de multiplicidades de polos es exactamente $-r$, con $r \in \mathbb{N}$ (conjunto de los números naturales) y $-r \leq -2$, resulta ser un espacio proyectivo menos un conjunto cerrado (en dicho espacio proyectivo), donde este conjunto cerrado está dado en términos de la Resultante de dos polinomios.

Definición 3.0.1. Sea $\mathcal{FM}(-r) := \{1\text{-formas diferenciales meromorfas } \eta \text{ sobre } \widehat{\mathbb{C}}, \text{ cuya suma total de multiplicidades de polos es exactamente } -r\}$.

Teorema 3.0.1. $\mathcal{FM}(-r)$ es variedad compleja, no compacta, de dimensión compleja $2r - 1$.

Antes de la demostración del teorema, es requerido probar el siguiente resultado: Las posiciones de los polos y los ceros de η en $\widehat{\mathbb{C}}$ determinan, salvo un múltiplo escalar $\lambda \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$, a η .

De manera más formal lo anterior se resume en el siguiente lema.

Lema 3.0.2. Sean $\eta_1 = \{h_1(z)dz\}$ y $\eta_2 = \{h_2(z)dz\}$ dos 1-formas diferenciales meromorfas sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ con:

1. $\{\text{ceros de } \eta_1\} = \{\text{ceros de } \eta_2\}$ contados con multiplicidad.
2. $\{\text{polos de } \eta_1\} = \{\text{polos de } \eta_2\}$ contados con multiplicidad.

Entonces $\eta_1 = \lambda\eta_2$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Demostración. Se supondrá primero que $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$, es punto regular para $h_1(z)dz$ y $h_2(z)dz$, en caso contrario existe $L : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ transformación de Möebius, tal que $L(\infty)$ es punto regular de $L_*\eta_1$ y de $L_*\eta_2$, esto es, que todos los ceros y todos los polos de η_1 y η_2 se encuentran en la parte finita $U_1 = \widehat{\mathbb{C}} - \{\infty\}$ vecindad de 0 de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Para ello se tienen las siguientes igualdades (ver capítulo 1):

$$\begin{aligned} h_1(z)dz &= \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0} dz \\ h_2(z)dz &= \frac{\tilde{a}_k z^k + \tilde{a}_{k-1} z^{k-1} + \dots + \tilde{a}_1 z + \tilde{a}_0}{\tilde{b}_l z^l + \tilde{b}_{l-1} z^{l-1} + \dots + \tilde{b}_1 z + \tilde{b}_0} dz. \end{aligned}$$

Sean $\{c_1, c_2, \dots, c_s\}$ y $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$, el conjunto de ceros y polos respectivamente de $h_1(z)dz$ con multiplicidades $n_1, n_2, \dots, n_s, -m_1, -m_2, \dots, -m_r$ y $n_i, m_j \in \mathbb{N}$, para cada $i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, r$ respectivamente con $\sum_{i=1}^s n_i = n$, $\sum_{j=1}^r m_j = m$. Por las hipótesis (1) y (2) se tiene que

$$\begin{aligned} k &= \sum_{i=1}^s n_i = n, \\ l &= \sum_{j=1}^r m_j = m. \end{aligned}$$

Luego necesariamente se tiene que:

$$\begin{aligned} h_1(z)dz &= \lambda_1 \frac{(z-c_1)^{n_1} (z-c_2)^{n_2} \dots (z-c_s)^{n_s}}{(z-p_1)^{m_1} (z-p_2)^{m_2} \dots (z-p_r)^{m_r}} dz \\ h_2(z)dz &= \lambda_2 \frac{(z-c_1)^{n_1} (z-c_2)^{n_2} \dots (z-c_s)^{n_s}}{(z-p_1)^{m_1} (z-p_2)^{m_2} \dots (z-p_r)^{m_r}} dz, \end{aligned}$$

con λ_1 y $\lambda_2 \in \mathbb{C}^*$.

Tomando $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$, se obtiene que $h_1(z)dz = \lambda h_2(z)dz$.

Ahora para finalizar la prueba, es necesario verificar que $\lambda \in \mathbb{C}^*$ es independiente de la expresión local de η_1 y η_2 .

En efecto, basta verificar que $(-1/w^2)h_1(1/w)dw$ y $(-1/w^2)h_2(1/w)dw$ satisfacen lo anterior.

Calculando la expresión de ambas 1-formas en la carta (U_2, ψ_2) , que contiene al $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$, se tiene que:

$$\frac{-1}{w^2}h_1\left(\frac{1}{w}\right)dw = \frac{-\lambda_1(-c_1)^{n_1}(-c_2)^{n_2}\dots(-c_s)^{n_s}}{(-p_1)^{m_1}(-p_2)^{m_2}\dots(-p_r)^{m_r}} \frac{\prod_{i=1}^s \left(w - \frac{1}{c_i}\right)^{n_i}}{\prod_{j=1}^r \left(w - \frac{1}{p_j}\right)^{m_j}} \frac{w^m}{w^{n+2}},$$

$$\frac{-1}{w^2}h_2\left(\frac{1}{w}\right)dw = \frac{-\lambda_2(-c_1)^{n_1}(-c_2)^{n_2}\dots(-c_s)^{n_s}}{(-p_1)^{m_1}(-p_2)^{m_2}\dots(-p_r)^{m_r}} \frac{\prod_{i=1}^s \left(w - \frac{1}{c_i}\right)^{n_i}}{\prod_{j=1}^r \left(w - \frac{1}{p_j}\right)^{m_j}} \frac{w^m}{w^{n+2}},$$

con λ_1 y λ_2 como antes. Por (b) se tiene que $m = n + 2$.

Luego un cálculo sencillo muestra que para $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$ se tiene que:

$$\frac{-1}{w^2}h_1\left(\frac{1}{w}\right) = \lambda \left(\frac{-1}{w^2}h_2\left(\frac{1}{w}\right) \right)$$

y por lo tanto se obtiene lo pedido. □

Demostración del Teorema (3.0.1).

La idea de la prueba es encontrar una biyección natural con una variedad compleja no compacta de la dimensión requerida.

Para esto, la prueba se dividirá en dos casos, cuando $-r = -2$ y $-r \leq -3$; debido a que en el segundo caso, se hará uso del discriminante de dos polinomios para hallar la biyección que se requiere.

Recuerde que el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ de dimensión n se define como el cociente:

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n \stackrel{\text{definición}}{:=} \frac{\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}}{\mathbb{C}^*}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mid (x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (y_0, y_1, \dots, y_n) \\ \Leftrightarrow \text{existe } \zeta \in \mathbb{C}^* \text{ tal que} \\ (\zeta x_0, \zeta x_1, \dots, \zeta x_n) = (y_0, y_1, \dots, y_n) \end{array} \right\}.$$

Se denotará a $\mathbb{C}\mathbb{P}^n_{[x_0:x_1:\dots:x_n]}$ como el espacio proyectivo de dimensión compleja n , en coordenadas $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$.

En geometría (topología) diferencial se demuestra que el espacio proyectivo de dimensión n , resulta ser una variedad compleja de dimensión compleja n , donde sus puntos son precisamente las clases de equivalencia $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$.

Caso $-r = -2$.

Existe una función:

$$F_1 : \mathbb{C}_\lambda^* \times \widehat{\mathbb{C}}_{p_1} \times \widehat{\mathbb{C}}_{p_2} \longrightarrow \mathcal{FM}(-2)$$

$$(\lambda \quad p_1 \quad p_2) \longmapsto \begin{cases} \frac{\lambda}{(z-p_1)(z-p_2)} dz, & \text{si } p_1 \text{ y } p_2 \neq \infty; \\ \frac{\lambda}{z-p_i} dz, & \text{si } p_i \neq \infty \text{ y } p_j = \infty; \\ \lambda dz, & \text{si } p_1 = p_2 = \infty, \end{cases}$$

donde F_1 es 2 a 1 en $\mathbb{C}_\lambda^* \times \widehat{\mathbb{C}}_{p_1} \times \widehat{\mathbb{C}}_{p_2} - \{(\lambda, p_1, p_2) \in \mathbb{C}_\lambda^* \times \widehat{\mathbb{C}}_{p_1} \times \widehat{\mathbb{C}}_{p_2} \mid p_1 = p_2\}$ y F_1 es inyectiva en $\{(\lambda, p_1, p_2) \in \mathbb{C}_\lambda^* \times \widehat{\mathbb{C}}_{p_1} \times \widehat{\mathbb{C}}_{p_2} \mid p_1 = p_2\}$. Tomando la inclusión natural i de la variedad $\mathbb{C}_\lambda^* \times \widehat{\mathbb{C}}_{p_1} \times \widehat{\mathbb{C}}_{p_2}$ a la variedad $\widehat{\mathbb{C}}_\lambda \times \widehat{\mathbb{C}}_{p_1} \times \widehat{\mathbb{C}}_{p_2}$, se define la función *proyección a coeficientes* Π , dada de la siguiente manera:

$$\Pi : \{\text{imagen de } i\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_\lambda \times \widehat{\mathbb{C}}_{p_1} \times \widehat{\mathbb{C}}_{p_2} \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^3_{[a_0:b_2:b_1:b_0]}$$

$$(\lambda \quad p_1 \quad p_2) \longmapsto \begin{cases} [\lambda : 1 : -p_1 - p_2 : p_1 p_2], & \text{si } p_1 \text{ y } p_2 \neq \infty; \\ [\lambda : 0 : 1 : -p_i], & \text{si } p_i \neq \infty \text{ y } p_j = \infty, j \neq i; \\ [\lambda : 0 : 0 : 1], & \text{si } p_1 = p_2 = \infty. \end{cases}$$

Sea

$$F_2 : \mathbb{C}\mathbb{P}^3 - (\{[0 : b_2 : b_1 : b_0]\} \cup \{[a_0 : 0 : 0 : 0]\}) \longrightarrow \mathcal{FM}(-2).$$

$$[a_0 : b_2 : b_1 : b_0] \longmapsto \frac{a_0}{b_2 z^2 + b_1 z + b_0} dz$$

Se afirma que F_2 es una función bien definida y es biyectiva.

En efecto, considérense las clases $[a_0 : b_2 : b_1 : b_0]$ y $[\zeta a_0 : \zeta b_2 : \zeta b_1 : \zeta b_0]$ con

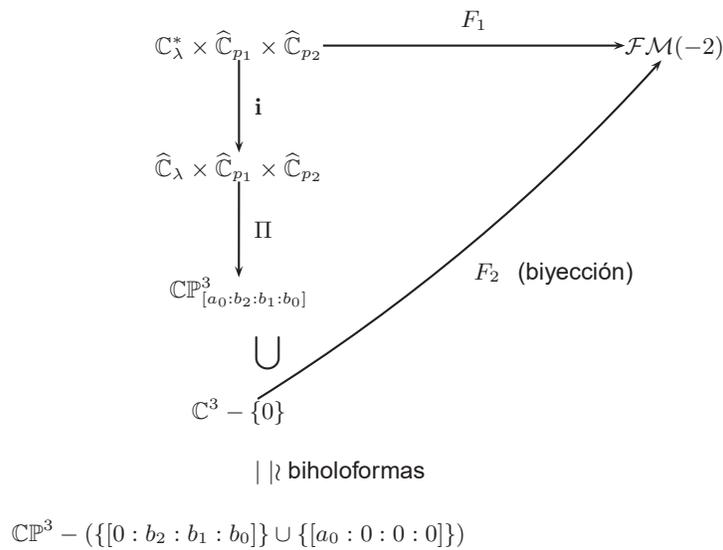
$\zeta \in \mathbb{C}^*$. Evaluando en F_2 se tiene que:

$$\begin{aligned} F_2([\zeta a_0 : \zeta b_2 : \zeta b_1 : \zeta b_0]) &= \frac{\zeta a_0}{\zeta b_2 z^2 + \zeta b_1 z + \zeta b_0} dz \\ &= \frac{a_0}{b_2 z^2 + b_1 z + b_0} dz \\ &= F_2([a_0 : b_2 : b_1 : b_0]), \end{aligned}$$

por lo que F_2 está bien definida sobre $\mathbb{CP}^3 - (\{[0 : b_2 : b_1 : b_0]\} \cup \{[a_0 : 0 : 0 : 0]\})$.

A continuación, se verifica la biyectividad de F_2 :

En efecto, del siguiente diagrama conmutativo se obtiene la suprayectividad de F_2 .



Puesto que F_2 no está definida para el subconjunto

$$(\{[0 : b_2 : b_1 : b_0]\} \cup \{[a_0 : 0 : 0 : 0]\}) \subset \mathbb{CP}^3_{[a_0:b_2:b_1:b_0]},$$

entonces bastará con tomar puntos de la forma $[1 : b_2 : b_1 : b_0]$ y $[1 : \tilde{b}_2 : \tilde{b}_1 : \tilde{b}_0]$, para demostrar la inyectividad de F_2 .

En efecto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
F_2([1 : b_2 : b_1 : b_0]) &= F_2([1 : \tilde{b}_2 : \tilde{b}_1 : \tilde{b}_0]) \\
&\iff \frac{1}{b_2 z^2 + b_1 z + b_0} dz = \frac{1}{\tilde{b}_2 z^2 + \tilde{b}_1 z + \tilde{b}_0} dz \\
&\iff b_2 z^2 + b_1 z + b_0 = \tilde{b}_2 z^2 + \tilde{b}_1 z + \tilde{b}_0 \\
&\iff b_2 = \tilde{b}_2, \quad b_1 = \tilde{b}_1 \text{ y } b_0 = \tilde{b}_0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto F_2 es biyección.

Recuerde que de geometría proyectiva se tiene que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathbb{C}\mathbb{P}^3_{[a_0:b_2:b_1:b_0]} - (\{[a_0 : 0 : 0 : 0]\} \cup \{[0 : b_2 : b_1 : b_0]\})$ es biholomorfo a $\mathbb{C}^3 - \{0\}$.

De lo anterior se tiene que empujando la estructura compleja de $\mathbb{C}^3 - \{0\}$ por medio de F_2 a $\mathcal{FM}(-2)$, este último espacio es variedad compleja no compacta de dimensión compleja $3 = 2(2) - 1$.

Caso $-r \leq -3$.

Sea $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2r-1}$ con coordenadas $\{[a_{r-2} : a_{r-3} : \dots : a_0 : b_r : b_{r-1} : \dots : b_0]\}$.

Sea

$$\Theta_r = (\{[\overbrace{0 : \dots : 0}^{r-1} : b_r : \dots : b_0]\} \cup \{[a_{r-2} : \dots : a_0 : \overbrace{0 : \dots : 0}^{r+1}]\}) \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{2r-1}.$$

Procediendo de manera similar al caso $-r = -2$, se obtiene una función

$$F_2 : \mathbb{C}\mathbb{P}^{2r-1} - \Theta_r \rightarrow \mathcal{FM}(-r),$$

donde para un punto $[a_{r-2} : a_{r-3} : \dots : a_0 : b_r : b_{r-1} : \dots : b_0]$ se tiene que:

$$F_2([a_{r-2} : \dots : a_0 : b_r : \dots : b_0]) = \frac{a_{r-2} z^{r-2} + \dots + a_1 z + a_0}{b_r z^r + \dots + b_1 z + b_0} dz.$$

Ahora bien, si los polinomios $P(z) = a_{r-2} z^{r-2} + a_{r-3} z^{r-3} + \dots + a_1 z + a_0$ y $Q(z) = b_r z^r + b_{r-1} z^{r-1} + \dots + b_1 z + b_0$ tienen al menos un factor común de la forma $(z - p)^l$ para algún $1 \leq l \leq r$ o si los polinomios tienen exactamente grados $r' - 2 = r - l - 2$ y $r' = r - l$ con $1 \leq l \leq r$: entonces la imagen de

$\widetilde{F}_2([a_{r-2} : \cdots : b_0])$ esta contenida en otro conjunto $\mathcal{FM}(-r')$ con $-r < -r' \leq -2$.

Luego para poder hallar una biyección entre $\mathcal{FM}(-r)$ con alguna variedad compleja, no compacta, de dimensión requerida, se debe eliminar del dominio de F_2 al conjunto de puntos

$$\{[a_{r-2} : \cdots : a_0 : b_r : \cdots : b_0]\} \subset \mathbb{CP}^{2r-1},$$

para los cuales $P(z) = a_{r-2}z^{r-2} + \cdots + a_1z + a_0$ y $Q(z) = b_rz^r + \cdots + b_1z + b_0$ tienen al menos un factor común.

Para describir con claridad el subconjunto de \mathbb{CP}^{2r-1} que se requiere eliminar, se necesita recordar el concepto de *Resultante de dos polinomios*.

Definición 3.0.2. Sean

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n \text{ y } Q(z) = b_0 + b_1z + b_2z^2 + \cdots + b_mz^m,$$

polinomios sobre \mathbb{C} de grados n y m respectivamente con $n \geq m$. Se define la Resultante $\Delta(P, Q)$ de $P(z)$ y $Q(z)$ como el determinante de la matriz de orden $(n + m)$ dada de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{pmatrix},$$

donde son m renglones de a 's y n renglones de b 's.

Ejemplo 3.0.1. Sean $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$ y $Q(z) = b_0 + b_1z$. Entonces la Resultante de P y Q es:

$$\Delta(P, Q) = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{pmatrix} = a_2b_0^2 - a_1b_0b_1 + a_0b_1^2.$$

Lema 3.0.3. Sean $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios sobre \mathbb{C} , de grados n y m respectivamente. Entonces $P(z)$ y $Q(z)$ tienen un factor común no constante si y sólo si existen polinomios $\tilde{P}(z)$ y $\tilde{Q}(z)$ con $\text{grado}(\tilde{P}) < n$ y $\text{grado}(\tilde{P}), \text{grado}(\tilde{Q}) < m$ tal que $P(z)\tilde{Q}(z) = \tilde{P}(z)Q(z)$.

Demostración. Suponga que $P(z)$ y $Q(z)$ tienen un factor común no constante H , es decir, $P = H\tilde{P}$ y $Q = H\tilde{Q}$ para algunos polinomios \tilde{P}, \tilde{Q} distintos de cero, entonces $\text{grado}(\tilde{P}), \text{grado}(\tilde{Q}) < n$ y $\text{grado}(\tilde{P}), \text{grado}(\tilde{Q}) < m$. Luego multiplicando a P por \tilde{Q} y a Q por \tilde{P} , se obtiene que $P\tilde{Q} = \tilde{P}Q$.

Inversamente, suponga que \tilde{P}, \tilde{Q} existen y $P\tilde{Q} = \tilde{P}Q$. Todos los polinomios anteriores tienen una factorización única (salvo el orden) en polinomios irreducibles. Los factores de Q (salvo escalares) deben aparecer entre los factores de $P\tilde{Q}$ puesto que $P\tilde{Q} = \tilde{P}Q$. Todos los factores de Q no pueden aparecer entre los factores de \tilde{Q} , puesto que $\text{grado}(\tilde{Q}) < m$; luego se tiene que al menos un factor de Q debe ser factor de P , es decir, P y Q tienen un factor común. \square

Lema 3.0.4. Los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ de grados n y m respectivamente, tienen un factor común no constante si y sólo si la Resultante $\Delta(P, Q)$ es igual a 0.

Demostración. Se mostrará que la Resultante $\Delta(P, Q)$ es igual a 0 si y sólo si existen polinomios $\tilde{P}(z)$ y $\tilde{Q}(z)$ como en el lema anterior.

En efecto, considérense los polinomios:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(z) &= \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2z + \cdots + \tilde{a}_nz^{n-1}, \\ \tilde{Q}(z) &= \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2z + \cdots + \tilde{b}_mz^{m-1} \end{aligned}$$

con \tilde{a}_n y \tilde{b}_m no necesariamente cero.

La relación $P\tilde{Q} = \tilde{P}Q$ es equivalente al sistema lineal de $(n + m)$ ecuaciones con $(n + m)$ incógnitas $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m$, dado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 a_0\tilde{b}_1 & & & & & = & & & & b_0\tilde{a}_1 \\
 a_1\tilde{b}_1 + a_0\tilde{b}_2 & & & & & = & & & & b_1\tilde{a}_1 + b_0\tilde{a}_2 \\
 a_2\tilde{b}_1 + a_1\tilde{b}_2 + a_0\tilde{b}_3 & & & & & = & & & & b_2\tilde{a}_1 + b_1\tilde{a}_2 + b_0\tilde{a}_3 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & a_n\tilde{b}_m & = & & & & b_m\tilde{a}_n.
 \end{aligned}$$

Lo anterior puede escribirse en forma matricial, como:

$$\begin{pmatrix}
 a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\
 b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m
 \end{pmatrix}^T
 \begin{pmatrix}
 \tilde{b}_1 \\
 \tilde{b}_2 \\
 \vdots \\
 \tilde{b}_m \\
 -\tilde{a}_1 \\
 -\tilde{a}_2 \\
 \vdots \\
 -\tilde{a}_n
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0
 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

donde A^T indica la transpuesta de la matriz A .

Luego existen polinomios $\tilde{P}(z)$ y $\tilde{Q}(z)$ distintos de cero que satisfacen la relación $P\tilde{Q} = \tilde{P}Q$ si y sólo si el sistema lineal (3.1) tiene una solución no trivial. Lo anterior sucede si y sólo si el determinante de la matriz del sistema (3.1) es igual a cero.

Por lo tanto, se tiene que la Resultante $\Delta(P, Q) = 0$. □

Después de haber definido y demostrado algunas propiedades acerca del discriminante para dos polinomios, se tiene que el problema inicial, se reduce a eliminar el conjunto dado por la Resultante:

$$\{\Delta(Q_r, P_{r-2}) = 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}_{[a_{r-2}:\dots:a_0:b_r:\dots:b_0]}^{2r-1},$$

donde

$$Q_r(z) = b_r z^r + b_{r-1} z^{r-1} + \dots + b_1 z + b_0,$$

$$P_{r-2}(z) = a_{r-2} z^{r-2} + a_{r-3} z^{r-3} + \dots + a_1 z + a_0.$$

La Resultante $\{\Delta(P_{r-2}, Q_r) = 0\}$ es una hipersuperficie en $\mathbb{C}\mathbb{P}_{[a_{r-2}:\dots:a_0:b_r:\dots:b_0]}^{2r-1}$ de dimensión $2r - 2$ y es en donde la función F_2 deja de ser biyección.

Además se tiene que el conjunto de puntos

$$\Theta_r = \{\overbrace{[0:0:\dots:0:b_r:b_{r-1}:\dots:b_0]}^{r-1}\} \cup \{\overbrace{[a_{r-2}:a_{r-3}:\dots:a_0:0:0:\dots:0]}^{r+1}\},$$

está contenido en la Resultante

$$\{\Delta(P_{r-2}, Q_r) = 0\}.$$

En efecto, considérese la matriz de orden $(2r - 2)$:

$$\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_r & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_r \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{r-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{r-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{r-2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{r-2} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

asociada a $\Delta(Q_r, P_{r-2})$.

Tomando los puntos $[a_{r-2} : \dots : a_1 : a_0 : b_r : \dots : b_1 : b_0]$ en

$$\Theta_r = \left\{ \overbrace{[0 : 0 : \dots : 0 : b_r : b_{r-1} : \dots : b_0]}^{r-1} \right\} \cup \left\{ [a_{r-2} : a_{r-3} : \dots : a_0 : \overbrace{0 : 0 : \dots : 0}]^{r+1} \right\}$$

y evaluando sus coordenadas como coeficientes en la matriz (3.2), se obtienen matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_r & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

y la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{r-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{r-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{r-2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{r-2} \end{pmatrix},$$

donde un cálculo sencillo muestra que estas matrices tienen determinante igual a cero. Por lo tanto se obtiene lo pedido.

De lo anterior, la función

$$F_2 : \mathbb{CP}^{2r-1}_{[a_{r-2}:\dots:a_0:b_r:\dots:b_0]} - \{\Delta(Q_r, P_{r-2}) = 0\} \rightarrow \mathcal{FM}(-r),$$

dada por:

$$F_2([a_{r-2}:\dots:a_0:b_r:\dots:b_0]) = \frac{a_{r-2}z^{r-2} + a_{r-3}z^{r-3} + \dots + a_1z + a_0}{b_rz^r + b_{r-1}z^{r-1} + \dots + b_1z + b_0} dz,$$

esta bien definida y por un cálculo similar al caso $(-r = -2)$ es biyectiva.

Empujando la estructura compleja de

$$\mathbb{CP}^{2r-1} - \{\Delta(Q_r, P_{r-2}) = 0\},$$

por medio de F_2 , se tiene que $\mathcal{FM}(-r)$ es variedad compleja y F_2 es un bihomomorfismo.

Por lo tanto $\mathcal{FM}(-r)$ es variedad compleja no compacta de dimensión compleja $2r - 1$ (puesto que la Resultante $\{\Delta(Q_r, P_{r-2}) = 0\}$ es un conjunto cerrado en el espacio proyectivo de dimensión $2r - 1$). \square

El siguiente paso es estudiar el espacio de métricas Riemannianas planas $\{g_\eta\}$, que provienen de 1-formas diferenciales meromorfas $\{\eta\}$ en $\mathcal{FM}(-r)$, módulo isometrías,

$$\mathcal{M}(-r) \stackrel{\text{definición}}{:=} \frac{\{g_\eta \mid \eta \in \mathcal{FM}(-r)\}}{\{\text{isometrías entre } g_\eta\}}.$$

Proposición 3.0.5.

$$\mathcal{M}(-2) = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Demostración. Por la Proposición (2.2.4) en el Capítulo 2, se sabe que: $\mathcal{M}(-2)$ está formado por: cilindros Riemannianos $(S^1_{2\pi\|R\|_c} \times \mathbb{R}, g)$ con g la métrica plana en el cilindro y el plano euclideo $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$ con su métrica Riemanniana usual (ver Apéndice).

Recuerde que el conjunto $\mathcal{FM}(-2)$ es biholomorfo a $\mathbb{C}^3 - \{0\} \subset \mathbb{CP}^3_{[a_0:b_2:b_1:b_0]}$.

Considere la función **Res**, definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{Res} : \mathbb{C}^3 - \{0\} \subset \mathbb{CP}^3 \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}},$$

$$[a_0:b_2:b_1:b_0] \longmapsto \frac{a_0}{\sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}}$$

donde $a_0/\sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}$, es el residuo de la 1-forma diferencial meromorfa

$$\eta = \left\{ \frac{a_0}{b_2z^2 + b_1z + b_0} dz \right\}.$$

La imagen bajo la función **Res** del conjunto de 1-formas meromorfas con exactamente dos polos de multiplicidad 1, por definición

$$\mathcal{FM}(-2) - \left\{ \eta = \left\{ \frac{a_0}{b_2z^2 + b_1z + b_0} dz \right\} \in \mathcal{FM}(-2) \mid b_1^2 - 4b_0b_2 = 0 \right\}$$

es precisamente $\mathbb{C} - \{0\}$ (ver Teorema inverso del residuo en [16]).

Cada punto de $\mathcal{M}(-2)$ o es un cilindro Riemanniano o es el plano euclideo $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$.

Se pueden parametrizar a todos los cilindros Riemannianos con la longitud de sus paralelos (ya que es un invariante métrico) y puede pensarse a $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$ como un cilindro cuya longitud de sus paralelos es infinita.

Considere ahora la norma de la función **Res** multiplicada por el escalar 2π :

$$|\mathbf{Res}| : \mathbb{C}^3 - \{0\} \subset \mathbb{CP}^3 \longrightarrow \mathcal{M}(-2),$$

$$[a_0:b_2:b_1:b_0] \longmapsto 2\pi \left| \frac{a_0}{\sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}} \right|_{\mathbb{C}}$$

donde

$$2\pi \left| \frac{a_0}{\sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}} \right|_{\mathbb{C}}$$

es precisamente la longitud de los paralelos del cilindro Riemanniano

$$(S^1_{2\pi||R||_{\mathbb{C}}} \times \mathbb{R}, g).$$

Entonces la imagen bajo $|\mathbf{Res}|$, del conjunto de 1-formas meromorfas con exactamente dos polos de multiplicidad 1, es precisamente \mathbb{R}^+ y el complemento no es difícil verificar que va a dar al punto $\{+\infty\}$, el cual corresponde

en $\mathcal{M}(-2)$ al plano $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$.

Por lo tanto

$$\mathcal{M}(-2) = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

□

Apéndice

Superficies Riemannianas

En adelante se supondrá que M es una superficie topológica real, conexa; es decir, M es un espacio topológico Hausdorff, conexo, con base de vecindades numerable y localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 .

En este trabajo la palabra diferenciable significa siempre de clase C^∞ .

Notación 4. El símbolo $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$ denotará al espacio euclideo en coordenadas (x, y) .

Definición .0.3. 1. Una carta coordenada (o sistema de coordenadas) real de M es una función $\psi : U \subset M \rightarrow \psi(U) \subset \mathbb{R}^2$, donde ψ es un homeomorfismo y U es un conjunto abierto. Por comodidad se escribirá (U, ψ) como carta coordenada real.

Dos cartas coordenadas reales (U_i, ψ_i) y (U_j, ψ_j) donde

$$\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}_{(x_i, y_i)}^2,$$

$$\psi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}_{(x_j, y_j)}^2$$

con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, son compatibles diferenciablemente, si la aplicación:

$$\psi_{ji} \stackrel{\text{definición}}{:=} \psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}_{(x_i, y_i)}^2 \longrightarrow \psi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}_{(x_j, y_j)}^2,$$

es diferenciable con inversa diferenciable, por definición $\psi_{ji}^{-1} := \psi_{ij}$.

A la función $\psi_{ji}(x_i, y_i)$ se le conoce como función de cambio de coordenadas.

2. Un atlas real en M consiste de una colección de cartas coordenadas reales $\mathfrak{U} = \{(U_i, \psi_i)\}$ con $i \in I$ el conjunto de índices de las cartas y $\cup_i U_i = M$. Se dice que un atlas real \mathfrak{U} es maximal si toda carta coordenada real que sea compatible diferenciablemente con las cartas coordenadas reales de \mathfrak{U} también esta en \mathfrak{U} .
3. Una estructura diferenciable en M es una atlas maximal en M .
4. Una superficie diferenciable, es una pareja (M, \mathfrak{U}) donde M es una superficie topológica real conexa y \mathfrak{U} es una estructura diferenciable en M . Por comodidad se escribirá simplemente M para una superficie diferenciable.

Ejemplo .0.2. 1. Considere el plano real \mathbb{R}^2 y la estructura diferenciable en él dada por $\mathfrak{U} = \{(\mathbb{R}^2, id)\}$ donde $id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la función identidad. De hecho cualquier dominio Ω en \mathbb{R}^2 con $id : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Omega$, donde id es la función identidad en \mathbb{R}^2 restringida a Ω , es una superficie diferenciable.

2. La esfera unitaria. Sea $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ con el siguiente atlas:

$U_1 = \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 1)\}$, $U_2 = \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, -1)\}$ y las proyecciones en los polos norte $(0, 0, 1)$ y sur $(0, 0, -1)$:

$$\begin{aligned} \psi_1 : U_1 &\longrightarrow \mathbb{R}_{(x,y)}^2 & ; \psi_2 : U_2 &\longrightarrow \mathbb{R}_{(\hat{x}, \hat{y})}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right) & (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3} \right) \end{aligned}$$

respectivamente con funciones inversas:

$$\begin{aligned} \psi_1^{-1} : \mathbb{R}_{(x,y)}^2 &\longrightarrow U_1, \\ (x,y) &\longmapsto \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right) \\ \psi_2^{-1} : \mathbb{R}_{(\hat{x}, \hat{y})}^2 &\longrightarrow U_2, \\ (\hat{x}, \hat{y}) &\longmapsto \left(\frac{2\hat{x}}{\hat{x}^2+\hat{y}^2+1}, \frac{2\hat{y}}{\hat{x}^2+\hat{y}^2+1}, \frac{1-\hat{x}^2-\hat{y}^2}{\hat{x}^2+\hat{y}^2+1} \right) \end{aligned}$$

Claramente las funciones ψ_1 y ψ_2 son homeomorfismos. Ahora bien, se tiene: $U_1 \cap U_2 = \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ y $\psi_i(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, para $i = 1, 2$. Luego un cálculo sencillo muestra los cambios de coordenadas

$$\begin{aligned} \psi_{21} : \mathbb{R}_{(x,y)}^2 - \{(0, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{R}_{(\hat{x}, \hat{y})}^2 - \{(0, 0)\}, \\ (x, y) &\longmapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right) \\ \psi_{12} : \mathbb{R}_{(\hat{x}, \hat{y})}^2 - \{(0, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{R}_{(x,y)}^2 - \{(0, 0)\}, \\ (\hat{x}, \hat{y}) &\longmapsto \left(\frac{\hat{x}}{\hat{x}^2+\hat{y}^2}, \frac{\hat{y}}{\hat{x}^2+\hat{y}^2} \right) \end{aligned}$$

son funciones diferenciables. Por lo tanto \mathbb{S}^2 provista de $\{(U_1, \psi_1), (U_2, \psi_2)\}$, es una superficie diferenciable.

3. $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = |x_1|\}$, provista del atlas $\{(U, \psi)\}$ con $U = M$ y la proyección en las dos primeras coordenadas:

$$\begin{aligned} \psi : U &\longrightarrow \mathbb{R}_{(x,y)}^2, \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (x_1, x_2) \end{aligned}$$

es superficie diferenciable.

En efecto, se tiene que la inversa de ψ dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \psi^{-1} : \mathbb{R}_{(x,y)}^2 &\longrightarrow U, \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, |x|) \end{aligned}$$

es una función continua. Entonces ψ es un homeomorfismo.

Además, el cambio de coordenadas

$$\psi \circ \psi^{-1}(x, y) = (x, y) = id(x, y)$$

con id la función identidad en \mathbb{R}^2 , es diferenciable. Por lo tanto M provista de atlas anterior es una superficie diferenciable.

Observe que sin embargo M no es subvariedad diferenciable de \mathbb{R}^3 , pero ello no es significativo en este trabajo.

4. Sea $Cil = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, el cilindro en \mathbb{R}^3 con el siguiente atlas:

$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in Cil \mid (x_1, x_2, x_3) \neq (1, 0, x_3)\}$ y $U_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in Cil \mid (x_1, x_2, x_3) \neq (-1, 0, x_3)\}$ con

$$\begin{aligned} \psi_1^{-1} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}_{(\theta, \xi)}^2 &\longrightarrow U_1 \subset Cil, \\ &\longmapsto (\cos \theta, \text{sen } \theta, \xi) \\ \psi_2^{-1} : (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}_{(\tilde{\theta}, \tilde{\xi})}^2 &\longrightarrow U_2 \subset Cil, \\ &\longmapsto (\cos \tilde{\theta}, \text{sen } \tilde{\theta}, \tilde{\xi}) \end{aligned}$$

en coordenadas cilíndricas (θ, ξ) y $(\tilde{\theta}, \tilde{\xi})$ de $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$ y $\mathbb{R}_{(\tilde{x}, \tilde{y})}^2$ respectivamente.

Los cambios de coordenadas estan dados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \psi_{21} : ((0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)) \times \mathbb{R} &\longrightarrow ((-\pi, 0) \cup (0, \pi)) \times \mathbb{R}, \\ &\longmapsto \begin{cases} (\theta, \xi), & \text{si } \theta \in (0, \pi), \\ (\theta - 2\pi, \xi), & \text{si } \theta \in (\pi, 2\pi). \end{cases} \\ \psi_{12} : ((-\pi, 0) \cup (0, \pi)) \times \mathbb{R} &\longrightarrow ((0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)) \times \mathbb{R}, \\ &\longmapsto \begin{cases} (\tilde{\theta}, \tilde{\xi}), & \text{si } \tilde{\theta} \in (0, \pi), \\ (\tilde{\theta} + 2\pi, \tilde{\xi}), & \text{si } \tilde{\theta} \in (-\pi, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Luego $\{(U_i, \psi_i) \mid i = 1, 2\}$ es estructura diferenciable para *Cil* y por lo tanto *Cil* es una superficie diferenciable.

Definición .0.4. Sean M_1 y M_2 dos superficies diferenciables. Una función $F : M_1 \rightarrow M_2$ es diferenciable, si para cada par de cartas coordenadas reales (U, ψ) , (V, ϕ) de M_1 y M_2 respectivamente, con $F(U) \subset V$, la función

$$\phi \circ F \circ \psi^{-1} : \psi(U) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \phi(V) \subset \mathbb{R}^2, \quad (3)$$

es diferenciable en el sentido usual. Una función biyectiva $F : M_1 \rightarrow M_2$, es un difeomorfismo, si es diferenciable y su inversa es diferenciable. Dos superficies diferenciables se dicen que son difeomorfas si existe un difeomorfismo entre ellas.

Definición .0.5. Sea M una superficie diferenciable.

1. Una función $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ es diferenciable, si para cualquier carta coordenada (U_i, ψ_i) de M , con $F([a, b]) \cap U_i \neq \emptyset$, la función:

$$\psi_i \circ F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (4)$$

es diferenciable de la manera usual.

Una curva diferenciable sobre M , es una función $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ diferenciable.

2. Una función $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, si para cualquier carta coordenada (U_i, ψ_i) de M , la función:

$$F \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i) \subset \mathbb{R}_{(x_i, y_i)}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (5)$$

es diferenciable de la manera usual.

Observación .0.2. Un cálculo sencillo muestra que la diferenciabilidad de F en las Definiciones (.0.4) y (.0.5), no depende de las expresiones (3), (4) y (5) respectivamente.

Ejemplo .0.3. 1. Considere a la esfera unitaria \mathbb{S}^2 como en el Ejemplo (.0.2).

Sea

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1^2 + x_2^2\},$$

el paraboloides provisto del atlas (V, ϕ) con $V = M$ y la proyección en las dos primeras coordenadas

$$\begin{aligned} \phi : V &\longrightarrow \mathbb{R}_{(x, y)}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (x_1, x_2) \end{aligned}$$

Se afirma que la función

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & M, \\ (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) & \longmapsto & (\tilde{x}_3 \cos(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2), \tilde{x}_3 \sin(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2), \tilde{x}_3^2) \end{array}$$

es diferenciable.

En efecto, sea (U_1, ψ_1) carta de \mathbb{S}^2 . Puesto que la composición de fun-

ciones:

$$\begin{aligned} \phi \circ F \circ \psi_1^{-1} : \mathbb{R}_{(x,y)}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_{(\bar{x},\bar{y})}^2, \\ (x,y) &\longmapsto \left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \cos\left(\frac{2x+2y}{x^2+y^2+1}\right), \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \sin\left(\frac{2x+2y}{x^2+y^2+1}\right) \right) \end{aligned}$$

es diferenciable, por la definición anterior se tiene que F es una función diferenciable.

2. Sea

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = |x_1|\},$$

la superficie diferenciable dada en el Ejemplo (.0.2).

Se afirma que la función:

$$F : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & x_3 \end{array}$$

no es diferenciable.

En efecto, puesto que la composición de funciones:

$$F \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}_{(x,y)}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x,y) \longmapsto |x|$$

no es diferenciable, entonces por la definición anterior se tiene que F no es una función diferenciable.

3. Considere la esfera unitaria \mathbb{S}^2 como en el Ejemplo (.0.2). Se afirma que la función:

$$\alpha : \begin{array}{ccc} [1/2, 1] \subset \mathbb{R}_t & \longrightarrow & \mathbb{S}^2, \\ t & \longmapsto & (t \operatorname{sen} t, t \operatorname{cos} t, \sqrt{1-t^2}) \end{array}$$

es una curva diferenciable en \mathbb{S}^2 .

En efecto, como la composición de funciones

$$\psi_1 \circ \alpha : \begin{array}{ccc} [1/2, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{(x,y)}^2, \\ t & \longmapsto & \left(\frac{t \operatorname{sen} t}{1-\sqrt{1-t^2}}, \frac{t \operatorname{cos} t}{1-\sqrt{1-t^2}} \right) \end{array}$$

es una función diferenciable. Entonces por la definición anterior α es diferenciable y por lo tanto es una curva diferenciable sobre la esfera \mathbb{S}^2 .

Definición .0.6. Sea M una superficie diferenciable con estructura diferenciable $\{(U_i, \psi_i) \mid i \in I\}$.

Un vector tangente real a M en el punto $p \in U_i \subset M$, es una expresión abstracta:

$$\left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \Big|_{\psi_i(p)},$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}$ son los operadores diferenciales de primer orden usuales en $\psi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^2_{(x_i, y_i)}$, es decir, las derivadas direccionales evaluadas en $\psi_i(p) \in \mathbb{R}^2_{(x_i, y_i)}$.

Dos expresiones abstractas:

$$\left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \Big|_{\psi_i(p)} \quad \text{y} \quad \left(a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \Big|_{\psi_j(p)},$$

con $p \in U_i \cap U_j$, respecto a dos cartas coordenadas (U_i, ψ_i) y (U_j, ψ_j) , determinan el mismo vector tangente real a M si:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_{ji1}}{\partial x_i} & \frac{\partial \psi_{ji1}}{\partial y_i} \\ \frac{\partial \psi_{ji2}}{\partial x_i} & \frac{\partial \psi_{ji2}}{\partial y_i} \end{pmatrix} \Big|_{\psi_i(p)} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix}, \quad (6)$$

donde ψ_{ji1} y ψ_{ji2} son las funciones componentes de ψ_{ji} y

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_{ji1}}{\partial x_i} & \frac{\partial \psi_{ji1}}{\partial y_i} \\ \frac{\partial \psi_{ji2}}{\partial x_i} & \frac{\partial \psi_{ji2}}{\partial y_i} \end{pmatrix} \Big|_{\psi_i(p)} \in GL(2, \mathbb{R}),$$

es la diferencial de ψ_{ji} evaluada en el punto $\psi_i(p)$.

Definición .0.7. Sea M una superficie diferenciable. A la colección de todas las expresiones

$$\left\{ \left(d_1 \frac{\partial}{\partial x_i} + d_2 \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \Big|_{\psi_i(p)} \mid d_1, d_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

se le conoce como espacio tangente a M en el punto p , y se le denota por $T_p M$.

El espacio tangente a M en p con las operaciones de suma y multiplicación por escalar (sobre los reales), es un espacio vectorial real de dimensión 2 con base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\psi_i(p)}, \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{\psi_i(p)} \right\},$$

la cual no es canónica pues depende de (U_i, ψ_i) .

Observación .0.3. Note que por la igualdad (6) en la Definición (.0.6), el espacio $T_p M$ está bien definido, esto es, dado $p \in U_i \cap U_j$, entonces

$$\left\{ \left(d_1 \frac{\partial}{\partial x_i} + d_2 \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \Big|_{\psi_i(p)} \mid d_1, d_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\tilde{d}_1 \frac{\partial}{\partial x_j} + \tilde{d}_2 \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \Big|_{\psi_j(p)} \mid \tilde{d}_1, \tilde{d}_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

A continuación se muestra con un ejemplo concreto el significado de las Definiciones (.0.6) y (.0.7), con el fin de que el lector menos experimentado pueda apreciar los objetos de manera más clara.

Ejemplo .0.4. Considere la esfera unitaria

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

como en el Ejemplo (.0.2) y la carta (U_1, ψ_1) donde $U_1 = \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 1)\}$. Sea $p = (1, 0, 0) \in U_1$.

Entonces por definición, la expresión abstracta:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{\psi_1(1,0,0)},$$

es un vector tangente real tangente a la esfera y se desea ver que la definición abstracta de vector tangente en la esfera, coincide con la teoría elemental, es decir, se desea comprobar que el vector tangente a la esfera en el punto p es precisamente una terna:

$$(a, b, c) \stackrel{\text{definición}}{:=} \left(a \frac{\partial}{\partial x_1} + b \frac{\partial}{\partial x_2} + c \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \Big|_p \in T_p \mathbb{S}^2 \subset T_p \mathbb{R}^3,$$

tal que es ortogonal al vector de posición

$$\vec{p} = 1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 0 \frac{\partial}{\partial x_2} + 0 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

del punto p :

$$\langle (a, b, c), \vec{p} \rangle = 0,$$

respecto al producto punto usual en \mathbb{R}^3 .

En efecto, puesto que

$$\psi_1^{-1} : \mathbb{R}_{(x,y)}^2 \xrightarrow{\quad} U_1, \\ (x,y) \longmapsto \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right)$$

es un difeomorfismo, entonces ψ_1^{-1} induce un isomorfismo lineal entre los espacios vectoriales $T_{(1,0,0)}U_1$ y $T_{\psi_1((1,0,0))}\mathbb{R}_{(x,y)}^2$.

Entonces, para el vector

$$v = \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{\psi_1((1,0,0))} \in T_{\psi_1((1,0,0))}\mathbb{R}_{(x,y)}^2,$$

se tiene que: $(\psi_1^{-1})_*(v) \in T_{(1,0,0)}U_1 \subset T_{(1,0,0)}\mathbb{S}^2$, donde

$$\begin{aligned} (\psi_1^{-1})_*(v) &= (\psi_1^{-1})_* \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{\psi_1((1,0,0))} \right] \\ &\stackrel{\text{definición}}{=} \left(\frac{\partial \psi_1^{-1}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \psi_1^{-1}}{\partial y} \right) \Big|_{(1,0)} \\ &= \left(\frac{-2x^2 + 2y^2 + 2 - 8xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \frac{-4y^2 + 4x^2 + 4 - 4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \frac{4x + 8y}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \right) \Big|_{(1,0)} \\ &= (0, 2, 1) \\ &\stackrel{\text{definición}}{=} 0 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}, \end{aligned}$$

Ejemplo .0.5. Considere al cilindro $Cil = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ como en el Ejemplo (.0.2) y la carta coordenada de Cil , (U_1, ψ_1) , donde

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in Cil \mid (x_1, x_2, x_3) \neq (1, 0, x_3)\},$$

$$\psi_1^{-1} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}_{(\theta, \xi)}^2 \xrightarrow{\quad} U_1, \\ (\xi, \theta) \longmapsto (\cos \theta, \sin \theta, \xi)$$

El espacio tangente a Cil en el punto $p = (0, 1, 1/2) \in U_1$ es por definición:

$$T_{(0,1,\frac{1}{2})}Cil := \left\{ \left(d_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + d_2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Big|_{(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})} \mid d_1, d_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Puesto que ψ_1^{-1} es un difeomorfismo entre $\mathbb{R}_{(\theta, \xi)}^2$ y U_1 , entonces induce un isomorfismo lineal $(\psi_1^{-1})_*$, entre los espacios vectoriales $T_{(\pi/2, 1/2)}\mathbb{R}_{(\theta, \xi)}^2$ y $T_{(0, 1, 1/2)}U_1$. Entonces se tiene que el espacio tangente a Cil en el punto $(0, 1, 1/2)$ es:

$$\begin{aligned} T_{(0, 1, \frac{1}{2})}Cil &\cong_{\text{isomorfo}} \left\{ (\psi_1^{-1})_* \left(d_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + d_2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Big|_{(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})} \mid d_1, d_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &\stackrel{\text{definición}}{=} \left\{ \left(d_1 \frac{\partial \psi_1^{-1}}{\partial \theta} + d_2 \frac{\partial \psi_1^{-1}}{\partial \xi} \right) \Big|_{(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})} \mid d_1, d_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ d_1(-\text{sen } \theta, \cos \theta, 0) \Big|_{(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})} + d_2(0, 0, 1) \Big|_{(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})} \mid d_1, d_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ -d_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 0 \frac{\partial}{\partial x_2} + d_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \mid d_1, d_2 \in \mathbb{R} \right\} \subset T_{(0, 1, \frac{1}{2})}\mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Definición .0.8. Sea M una superficie diferenciable con estructura diferenciable $\{(U_i, \psi_i) \mid i \in I\}$. Un campo vectorial real diferenciable, tangente a M , es una colección $\{X_i \mid i \in I\}$, donde:

$$X_i = u_i(x_i, y_i) \frac{\partial}{\partial x_i} + v_i(x_i, y_i) \frac{\partial}{\partial y_i},$$

con $u_i, v_i : \psi(U_i) \subset \mathbb{R}_{(x_i, y_i)}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables, tales que:

$$(\psi_{ji})_*(X_i) = X_j,$$

en más detalle esto es:

$$\begin{pmatrix} u_j(x_j, y_j) \\ v_j(x_j, y_j) \end{pmatrix} = D(\psi_{ji}(x_i, y_i)) \Big|_{\psi_{ij}(x_j, y_j)} \begin{pmatrix} u_i(\psi_{ij}(x_j, y_j)) \\ v_i(\psi_{ij}(x_j, y_j)) \end{pmatrix},$$

donde $D(\psi_{ji}(x_i, y_i))$ es la diferencial (pensada como matriz) del cambio de coordenadas ψ_{ji} .

Ejemplo .0.6. Considere la esfera unitaria \mathbb{S}^2 como en el Ejemplo (.0.2).

Sea

$$X = (ax + by) \frac{\partial}{\partial x} + (cx + dy) \frac{\partial}{\partial y},$$

un campo vectorial diferenciable sobre $\mathbb{R}_{(x, y)}^2$. Se desea extender X a un campo vectorial diferenciable sobre toda la esfera \mathbb{S}^2 .

En efecto, considere en la esfera \mathbb{S}^2 a la pareja de campos $\{X_1, X_2\}$, definidos de la siguiente manera:

$$X_1 = (ax + by) \frac{\partial}{\partial x} + (cx + dy) \frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_2 = (\psi_{21})_* X_1 = \begin{pmatrix} \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \bigg|_{\left(\frac{\hat{x}}{\hat{x}^2+\hat{y}^2}, \frac{\hat{y}}{\hat{x}^2+\hat{y}^2}\right)} \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \bigg|_{\left(\frac{\hat{x}}{\hat{x}^2+\hat{y}^2}, \frac{\hat{y}}{\hat{x}^2+\hat{y}^2}\right)}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y X_2 diferenciable en $\mathbb{R}^2_{(\hat{x}, \hat{y})} - \{(0, 0)\}$.

Se desea extender de manera natural al campo vectorial X_2 sobre todo $\mathbb{R}^2_{(\hat{x}, \hat{y})}$.

Es un ejercicio sencillo mostrar que una condición necesaria y suficiente para que esto suceda, es que las constantes a, b, c , y d satisfagan: $d = a$ y $c = -b$.

Por lo tanto la pareja de campos vectoriales:

$$X_1 = (ax + by) \frac{\partial}{\partial x} + (-bx + ay) \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{en } (U_1, \psi_1),$$

$$X_2 = (-a\hat{x} + b\hat{y}) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + (-b\hat{x} - a\hat{y}) \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \quad \text{en } (U_2, \psi_2),$$

determina un campo vectorial real diferenciable, tangente a \mathbb{S}^2 .

Definición .0.9. Sea M una superficie diferenciable con estructura diferenciable $\{(U_i, \psi_i) \mid i \in I\}$ y $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R}_t \rightarrow M$ una curva diferenciable sobre M .

Sean $\alpha(t_0) = p$ y

$$\psi_i \circ \alpha(t) = (x_i(t), y_i(t)),$$

$$x'_i(t_0) \stackrel{\text{definición}}{:=} \frac{dx_i}{dt}(t_0),$$

$$y'_i(t_0) \stackrel{\text{definición}}{:=} \frac{dy_i}{dt}(t_0).$$

El vector tangente a la curva α en $t = t_0$, se define como la expresión:

$$\frac{d\alpha}{dt}(t_0) = \alpha'(t_0) := \left(x'_i(t_0) \frac{\partial}{\partial x_i} + y'_i(t_0) \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \bigg|_{\psi_i(p)}. \quad (7)$$

Observación .0.4. Por la condición (2) en la Definición (.0.6), el vector tangente a la curva α esta bien definido, esto es, es independiente de la elección de la carta coordenada (U_i, ψ_i) .

Ejemplo .0.7. Considere el paraboloido

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1^2 + x_2^2\}$$

con el atlas $\{(V, \phi)\}$ donde $V = M$ y la proyección en las dos primeras coordenadas:

$$\phi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R}_{(x,y)}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1, x_2) \end{array}$$

Sea

$$\alpha : \begin{array}{ccc} [0, 2] \subset \mathbb{R}_t & \longrightarrow & M, \\ t & \longmapsto & (t, t^2, t^2 + t^4) \end{array}$$

una curva diferenciable sobre M . El vector tangente a la curva α en $t = 1$ es por definición, la expresión abstracta:

$$\alpha'(1) \underset{\text{definición}}{:=} \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{\phi(\alpha(1))},$$

donde $\phi \circ \alpha(t) = (1, 1)$ y $(\phi \circ \alpha)'(1) = (1, 2)$. Se desea mostrar al lector que la definición abstracta de vector tangente a la curva α en el paraboloido, coincide con la teoría elemental de vector tangente a una curva en \mathbb{R}^3 , esto es, si la curva α es vista como función diferenciable en t de un abierto de \mathbb{R}_t a un abierto de \mathbb{R}^3 , entonces el vector tangente a α en $t = 1$ es

$$\begin{aligned} \alpha'(1) &= (1, 2t, 2t + 4t^3)|_{t=1} \\ &= (1, 2, 6) \\ &\underset{\text{definición}}{:=} 1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 6 \frac{\partial}{\partial x_3}, \end{aligned}$$

el cual pertenece al espacio $T_{(1,1,2)}M \subset T_{(1,1,2)}\mathbb{R}^3$.

En efecto, puesto que ϕ^{-1} es un difeomorfismo entre el paraboloido M y $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$, entonces induce un isomorfismo entre espacios vectoriales $T_{(1,1,2)}M$ y $T_{(1,1)}\mathbb{R}_{(x,y)}^2$.

Entonces para el vector

$$w = \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{\phi(\alpha(1))} \in T_{(1,1)}\mathbb{R}_{(x,y)}^2,$$

se tiene que $(\phi^{-1})_*w$ esta en $T_{(1,1,2)}M$, donde por definición

$$\begin{aligned} (\phi^{-1})_*w &= (\phi^{-1})_* \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{\phi(\alpha(1))} \\ &\stackrel{\text{definición}}{=} \left(\frac{\partial \phi^{-1}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial y} \right) \Big|_{(1,1)} \\ &= (1, 2, 2x + 4y) \Big|_{(1,1)} \\ &= (1, 2, 6) \\ &\stackrel{\text{definición}}{=} 1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 6 \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Definición .0.10. Sean M_1 y M_2 superficies diferenciables.

Sea $F : M_1 \rightarrow M_2$ una función diferenciable, p un punto en M_1 con (U, ψ) y (V, ϕ) cartas coordenadas alrededor de p y $F(p)$ respectivamente.

Se define la diferencial de F en el punto p , como la transformación lineal:

$$\begin{aligned} D_p F : T_p M_1 &\longrightarrow T_{F(p)} M_2. \\ v &\longmapsto D_{\psi(p)}(\phi \circ F \circ \psi^{-1})v \end{aligned}$$

Observación .0.5. Por las Definiciones (.0.4) y (.0.7), la definición anterior no depende de las cartas (U, ψ) y (V, ϕ) .

Ejemplo .0.8. Sea \mathbb{S}^2 la esfera unitaria y M el paraboloides descrito en el Ejemplo (.0.7). Sea $p = (1, 2, 5) \in M$.

Considere la función

$$F : \begin{array}{l} M \\ (x_1, x_2, x_3) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \mathbb{S}^2. \\ (\cos(x_1+x_2), \text{sen}(x_1+x_2), 0) \end{array}$$

Entonces la diferencial de F en el punto $p = (1, 2, 5)$, es la transformación lineal:

$$\begin{aligned} D_{(1,2,5)}F : T_{(1,2,5)}M &\longrightarrow T_{(\cos 3, \text{sen } 3, 0)}\mathbb{S}^2. \\ \left(d_1 \frac{\partial}{\partial x} + d_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{(1,2)} &\longmapsto \left((-d_1 \text{sen } 3 - d_2 \text{sen } 3) \frac{\partial}{\partial x} + (d_1 \cos 3 + d_2 \cos 3) \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{(\cos 3, \text{sen } 3)} \end{aligned}$$

Definición .0.11. Una superficie Riemanniana, es una superficie diferenciable provista de una métrica Riemanniana esto es, una forma bilineal, simétrica y definida positiva

$$\langle , \rangle_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R},$$

para cada $p \in M$, tal que si (U_i, ψ_i) es una carta alrededor de p se tiene que:

$$\langle v, w \rangle_p := \begin{pmatrix} a_{i1} \\ b_{i1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \Big|_{\psi_i(p)} \begin{pmatrix} a_{i2} \\ b_{i2} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

donde (a_{iv}, b_{iv}) y (a_{iw}, b_{iw}) son las expresiones de v y w en la carta (U_i, ψ_i) respectivamente y $g_{\nu\mu} : \psi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables con índices $\nu, \mu = 1, 2$, llamadas componentes de la métrica en (U_i, ψ_i) , las cuales están dadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g_{11}(x_i, y_i) &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle_p, \\ g_{12}(x_i, y_i) = g_{21}(x_i, y_i) &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i} \right\rangle_p, \\ g_{22}(x_i, y_i) &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_i} \right\rangle_p. \end{aligned}$$

Se denotará a la pareja (M, g) como la superficie Riemanniana M con métrica g .

Observación .0.6. Para cada par de cartas (U_i, ψ_i) y (U_j, ψ_j) con intersección $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, se tiene la igualdad:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \Big|_{(x_i, y_i)} = (D(\psi_{ji}))^T \Big|_{(x_i, y_i)} \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} \Big|_{\psi_{ji}(x_i, y_i)} D(\psi_{ji}) \Big|_{(x_i, y_i)}, \quad (9)$$

donde $g_{\nu\mu}$ y $\tilde{g}_{\nu\mu}$ con $\nu, \mu = 1, 2$, son las componentes de la métrica en la cartas (U_i, ψ_i) y (U_j, ψ_j) respectivamente.

La expresión (8) se conoce como representación de la métrica en la carta (U_i, ψ_i) .

La igualdad (9) se obtiene de jalar bajo el cambio de coordenadas ψ_{ji} , la métrica $(\tilde{g}_{\nu\mu})_{\nu,\mu=1,2}$ definida en el conjunto abierto $\psi_j(U_i \cap U_j)$, al conjunto abierto $\psi_i(U_i \cap U_j)$. En otras palabras

$$(\psi_{ji})^* ((\tilde{g}_{\nu\mu})|_{(x_j, y_j)}) \stackrel{\text{definición}}{=} (D(\psi_{ji}))^T|_{(x_i, y_i)} ((g_{\nu\mu})|_{\psi_{ji}(x_i, y_i)}) D(\psi_{ji})|_{(x_i, y_i)}.$$

A la igualdad (9) se le conoce como condición de compatibilidad de la métrica g , en cada punto $p \in M$.

Ejemplo .0.9. 1. Considere al cilindro

$$Cil = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\},$$

como en el Ejemplo (.0.2). Las componentes de la métrica Riemanniana en el cilindro dada por su inmersión en \mathbb{R}^3 (la restricción de la métrica Riemanniana usual en \mathbb{R}^3 a cada espacio tangente al cilindro), están dadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g_{11}(\theta, \xi) &= \left\langle \frac{\partial \psi_1^{-1}}{\partial \theta}, \frac{\partial \psi_1^{-1}}{\partial \theta} \right\rangle = 1, \\ g_{12}(\theta, \xi) = g_{21}(\theta, \xi) &= \left\langle \frac{\partial \psi_1^{-1}}{\partial \theta}, \frac{\partial \psi_1^{-1}}{\partial \xi} \right\rangle = 0, \\ g_{22}(\theta, \xi) &= \left\langle \frac{\partial \psi_1^{-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi_1^{-1}}{\partial \xi} \right\rangle = 1, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{array}{ccc} \psi_1^{-1} : ((0, 2\pi) \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_{(\theta, \xi)}^2 & \longrightarrow & \{(x_1, x_2, x_3) \in Cil \mid (x_1, x_2, x_3) \neq (1, 0, x_3)\}. \\ (\theta, \xi) & \longmapsto & (\cos \theta, \sin \theta, \xi) \end{array}$$

2. Considere la esfera \mathbb{S}^2 como en el Ejemplo (.0.2). Las componentes de la métrica Riemanniana de \mathbb{S}^2 dada por su inmersión en \mathbb{R}^3 , están dadas

por las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} g_{11}(x, y) &= \left\langle \frac{\partial \psi_1^{-1}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^{-1}}{\partial x} \right\rangle = \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \\ g_{12}(x, y) = g_{21}(x, y) &= \left\langle \frac{\partial \psi_1^{-1}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1^{-1}}{\partial y} \right\rangle = 0, \\ g_{22}(x, y) &= \left\langle \frac{\partial \psi_1^{-1}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1^{-1}}{\partial y} \right\rangle = \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \psi_1^{-1} : \mathbb{R}_{(x,y)}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 1)\} \subset \mathbb{S}^2. \\ (x, y) &\longmapsto \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right) \end{aligned}$$

Definición .0.12. Sea (M, g) una superficie Riemanniana.

1. Se define la longitud (o norma) de un vector $v \in T_p M$ como:

$$\|v\|_p := \sqrt{g_p(v, v)}.$$

2. Se define el ángulo $\theta(v, w)$, entre dos vectores no nulos v y $w \in T_p M$ como:

$$\theta(v, w) := \cos^{-1} \left(\frac{g_p(v, w)}{\|v\|_p \|w\|_p} \right).$$

3. Se define la longitud de una curva diferenciable $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow (M, g)$, entre los puntos $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ como:

$$\text{long}(\alpha) := \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Si (U_i, ψ_i) es una carta coordenada, entonces la expresión de la longitud de la curva α con respecto a la carta (U_i, ψ_i) , se escribe de la siguiente manera:

$$\int_a^b \sqrt{\begin{pmatrix} x'_i(t) \\ y'_i(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \Big|_{(x_i(t), y_i(t))} \begin{pmatrix} x'_i(t) \\ y'_i(t) \end{pmatrix}} dt. \quad (10)$$

Observación .0.7. De la igualdad (9) en la Definición (.0.11) y por un cálculo sencillo, se tiene que la longitud de la curva no depende de la carta (U_i, ψ_i) en la que se calcula, si no que depende de la imagen de α en M .

Ejemplo .0.10. 1. Considere la esfera unitaria \mathbb{S}^2 como en el Ejemplo (.0.2) y con métrica Riemanniana:

$$g = \begin{pmatrix} \frac{4}{(x^2+y^2+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(x^2+y^2+1)^2} \end{pmatrix},$$

que resulta de su inmersión en \mathbb{R}^3 .

Sea $p = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \in \mathbb{S}^2$ y $v = \left(\frac{\partial}{\partial x} + 3 \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{\psi_1(p)}$ un vector tangente a \mathbb{S}^2 en el punto p .

Entonces la norma del vector v es igual a:

$$\begin{aligned} \|v\|_p & \stackrel{\text{definición}}{=} \sqrt{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} \\ & = \sqrt{10}. \end{aligned}$$

2. Sea $p = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \in \mathbb{S}^2$ y $v = \left(\frac{\partial}{\partial x} + 3 \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{\psi_1(p)}$, $w = \left(5 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{\psi_1(p)}$ vectores tangentes a \mathbb{S}^2 en el punto p .

Entonces el ángulo $\theta(v, w)$ entre los vectores v y w es:

$$\theta(v, w) \stackrel{\text{definición}}{=} \cos^{-1} \left(\frac{\frac{13}{2}}{(\sqrt{10})(\frac{\sqrt{101}}{2})} \right).$$

3. Sea $\alpha : [-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}_t \rightarrow (\mathbb{S}^2, g)$, una curva diferenciable en (\mathbb{S}^2, g) , definida de la siguiente manera:

$$\alpha : \begin{matrix} [-\pi, \pi] \\ t \end{matrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{matrix} \begin{matrix} (\mathbb{S}^2, g) \\ (\cos t, \sin t, 0) \end{matrix}.$$

La longitud de α entre $t = -\pi$ y $t = \pi$, es la integral:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\begin{pmatrix} -\sen t \\ \cos t \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{4}{(x^2+y^2+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(x^2+y^2+1)^2} \end{pmatrix} \Big|_{(\cos t, \sin t)} \begin{pmatrix} -\sen t \\ \cos t \end{pmatrix}} dt \\ = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Ahora se desea definir el área de una región \mathcal{R} contenida en una superficie Riemanniana (M, g) . Por simplicidad suponga primero que $\mathcal{R} \subset U_i$ para alguna carta coordenada (U_i, ψ_i) de (M, g) , entonces el área de \mathcal{R} se calcula de la siguiente manera:

Sea $p \in U_i$ y sea K un rectángulo pequeño formado por los vectores v_1 y $v_2 \in T_{\psi_i(p)}\psi_i(U_i)$, donde $v_1 = (a, 0)$ y $v_2 = (0, b)$ son vectores paralelos a los ejes de coordenadas en $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$. Entonces $(\psi_i^{-1})_*$ envía a los vectores v_1 y v_2 a los vectores $\tilde{v}_1 = a \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\psi_i(p)}$ y $\tilde{v}_2 = b \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\psi_i(p)} \in T_p U_i$, respectivamente. Así que el rectángulo original K es enviado a un paralelogramo $(\psi_i^{-1})_*(K)$ en $T_p M$ cuya área (orientada positivamente) es:

$$ab \sqrt{\det((g_{\nu\mu}))} \stackrel{\text{definición}}{=} ab \sqrt{(g_{11}(\psi_i(p))g_{22}(\psi_i(p)) - (g_{12}(\psi_i(p)))^2)}.$$

Intuitivamente, si el área de $\psi_i(\mathcal{R})$ está aproximada por una partición en rectángulos pequeños K_1, K_2, \dots, K_m , entonces el área de la región \mathcal{R} está aproximada por la suma de las áreas de los paralelogramos $(\psi_i^{-1})_*(K_l)$, donde $l = 1, 2, \dots, m$.

Puesto que

$$\sum_l (\text{área de } (\psi_i^{-1})_*(K_l)) = \sum_l (\sqrt{\det g} (\text{área de } K_l)),$$

al pasar al límite, se obtiene que:

$$\text{area}(\mathcal{R}) := \int \int_{\psi_i(\mathcal{R})} \sqrt{g_{11}(x_i, y_i)g_{22}(x_i, y_i) - (g_{12}(x_i, y_i))^2} dx_i dy_i.$$

Proposición .0.6. Sea $\mathcal{R} \subset (M, g)$ un dominio y sean (U_i, ψ_i) , (U_j, ψ_j) cartas de M con $\mathcal{R} \subset U_i \cap U_j$, entonces

$$\begin{aligned} & \int \int_{\psi_i(\mathcal{R})} \sqrt{g_{11}(x_i, y_i)g_{22}(x_i, y_i) - (g_{12}(x_i, y_i))^2} dx_i dy_i \\ &= \int \int_{\psi_j(\mathcal{R})} \sqrt{\tilde{g}_{11}(x_j, y_j)\tilde{g}_{22}(x_j, y_j) - (\tilde{g}_{12}(x_j, y_j))^2} dx_j dy_j. \end{aligned}$$

Demostración. Por definición se tiene que $(g_{\nu\mu}) = (D(\psi_j))^{-T}(\tilde{g}_{\nu\mu})D(\psi_j)$ y la expresión $dx_j dy_j$ se transforma a $|\det(D\psi_j)| dx_i dy_i$ por el Teorema de cambio

de variable. Entonces se tiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
& \int \int_{\psi_i(\mathcal{R})} \sqrt{g_{11}(x_i, y_i)g_{22}(x_i, y_i) - (g_{12}(x_i, y_i))^2} dx_i dy_i \\
&= \int \int_{\psi_i(\mathcal{R})} \sqrt{\det((g_{\nu\mu}))} dx_i dy_i \\
&= \int \int_{\psi_i(\mathcal{R})} \sqrt{\det((D(\psi_{j_i}))^T(\tilde{g}_{\nu\mu})(D(\psi_{j_i})))} \\
&= \int \int_{\psi_i(\mathcal{R})} \sqrt{\det((\tilde{g}_{\nu\mu}))} |\det(D(\psi_{j_i}))| dx_i dy_i \\
&= \int \int_{\psi_j(\mathcal{R})} \sqrt{\tilde{g}_{11}(x_j, y_j)\tilde{g}_{22}(x_j, y_j) - (\tilde{g}_{12}(x_j, y_j))^2} dx_j dy_j.
\end{aligned}$$

□

Por lo tanto se tiene la siguiente definición:

Definición .0.13. Sea \mathcal{R} una región contenida en una superficie Riemanniana (M, g) .

Sea $\{\mathcal{R}_l \mid l \in J\}$ una partición adecuada de \mathcal{R} con $\mathcal{R}_l \subset U_i$ para algún U_i y $l = l(i)$.

Entonces el área de \mathcal{R} se define como:

$$\text{area}(\mathcal{R}) := \sum_i \int \int_{\psi_i(U_i \cap \mathcal{R}_{l(i)})} \sqrt{g_{11}(x_i, y_i)g_{22}(x_i, y_i) - (g_{12}(x_i, y_i))^2} dx_i dy_i. \quad (11)$$

Observación .0.8. Observe que en la definición anterior, la suma (11) esta bien definida si $\mathcal{R}_l \subset U_i \cap U_j$ para algunos $i, j \in I$ y $l \in J$, puesto que por la Proposición (.0.6), se tiene la igualdad:

$$\begin{aligned}
& \int \int_{\psi_i(\mathcal{R}_l)} \sqrt{g_{11}(x_i, y_i)g_{22}(x_i, y_i) - (g_{12}(x_i, y_i))^2} dx_i dy_i \\
&= \int \int_{\psi_j(\mathcal{R}_l)} \sqrt{\tilde{g}_{11}(x_j, y_j)\tilde{g}_{22}(x_j, y_j) - (\tilde{g}_{12}(x_j, y_j))^2} dx_j dy_j,
\end{aligned}$$

lo cual hace que en la suma (11), no se consideren sumandos demás.

Ejemplo .0.11. Considere el hemisferio inferior de la esfera unitaria \mathbb{S}^2 , parametrizado como $\{(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta, -\sqrt{1 - \xi^2}) \mid (\xi, \theta) \in (0, 1) \times (0, 2\pi)\}$.

La métrica Riemanniana en el hemisferio inferior, inducida por la parametrización es:

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\xi^2} & 0 \\ 0 & \xi^2 \end{pmatrix}.$$

Entonces el área del hemisferio está dada por:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi d\theta = 2\pi.$$

Definición .0.14. Sean (M_1, g_1) y (M_2, g_2) superficies Riemannianas. Una función diferenciable $F : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ es una isometría, si F es un difeomorfismo y $g_1 = F^*(g_2)$, es decir, para todo punto $p \in M_1$ y para cada par de vectores $v, w \in T_p M_1$ se tiene:

$$g_{1,p}(v, w) := g_{2,F(p)}(D_p F(v), D_p F(w)).$$

Dos superficies Riemannianas son isométricas, si existe una isometría entre ellas.

Definición .0.15. Sean (M_1, g_1) y (M_2, g_2) dos superficies Riemannianas. Una función diferenciable $F : M_1 \rightarrow M_2$ se dice que es una isometría local, si para cada $p \in M_1$ existen vecindades $W_p \subset M_1$ y $\widetilde{W}_{F(p)}$ tal que la función:

$$F|_{W_p} : W_p \longrightarrow \widetilde{W}_{F(p)},$$

es una isometría.

Dos superficies Riemannianas son localmente isométricas, si existe una isometría local, para cada par de puntos $p \in M$ y $q \in M_2$.

Ejemplo .0.12. Considere el cilindro como en el Ejemplo (.0.2).

La función

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \text{Cil.} \\ (x, y) \longmapsto (\cos x, \text{sen } x, y)$$

No es una isometría (global) puesto que no es una biyección, pero si es una isometría local.

Ahora se mostrará que la esfera y el plano euclideo no son localmente isométricos. Para esto se probarán algunos resultados previos.

Definición .0.16. Una curva diferenciable $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R}_t \rightarrow (M, g)$ en una superficie Riemanniana (M, g) se llama geodésica, si:

1. *minimiza localmente la distancia (para parejas suficientemente cercanas de puntos sobre la traza¹ de α).*
2. *$\|\alpha'(t)\| = 1$, (la norma de la velocidad de α respecto a la métrica g , es constante igual a 1, para todo $t \in [a, b]$).*

Observación .0.9. En más detalle el inciso (1) significa que:

Para todo punto $\alpha(t_0)$ en la traza de α con $t_0 \in [a, b]$, existe $\varepsilon > 0$ (que depende de $\alpha(t_0)$) tal que la curva α tiene la siguiente propiedad:

De entre todas las curvas $\{\beta\}$ en (M, g) que unen los puntos $\alpha(t_0)$ y $\alpha(t_0 + \varepsilon)$, la curva de menor longitud en M , es el segmento sobre α :

$$\alpha : [t_0, t_0 + \varepsilon] \longrightarrow (M, g),$$

esto es:

$$\text{long}(\alpha([t_0, t_0 + \varepsilon])) \leq \min_{\{\beta\}} \{\text{long}(\beta)\}.$$

La condición (2) es necesaria para que la curva α recorra monótonamente su traza y por simplicidad con velocidad de norma uno.

En particular, se desea evitar que la curva α recorra más de una vez segmentos sobre su traza, ya que esto aumentaría la longitud de α y en consecuencia no se cumpliría la condición (1).

Para detallar más la condición (2) de la definición anterior, considere el siguiente ejemplo:

¹Recuerde que dada una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow (M, g)$, la traza de α es el subconjunto de M

$$\{\alpha(t) \in M \mid t \in [a, b]\}.$$

Ejemplo .0.13. Sea $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$ con (δ_{lm}) la métrica Riemanniana usual en \mathbb{R}^2 y la curva

$$\beta : [0, 1] \xrightarrow[t \mapsto]{} (\mathbb{R}^2, (\delta_{lm})),$$

$$t \mapsto \left(\frac{28}{3}t^3 - 13t^2 + \frac{14}{3}t, 0 \right)$$

que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$.

La curva β describe el siguiente recorrido:

Del punto $\beta(0) = (0, 0)$ va al punto $\beta(1/4) = (1/2, 0)$, luego regresa al punto $\beta(1/2) = (1/4, 0)$ y de ahí va en dirección al punto final $\beta(1) = (1, 0)$. La longitud de β esta dada por la integral:

$$\begin{aligned} \text{long}(\beta) &= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^1 \left| \frac{dx(t)}{dt} \right| dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right| dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| \frac{dx(t)}{dt} \right| dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{2} > 1 = \text{long}(\alpha), \end{aligned}$$

donde

$$\alpha : [0, 1] \xrightarrow[t \mapsto]{} (\mathbb{R}^2, (\delta_{lm})),$$

$$t \mapsto (t, 0)$$

es la geodésica en $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$ que une $(0, 0)$ con $(1, 0)$ (lo cual se probará más adelante en el Lema .0.5).

A continuación se considerará a la esfera unitaria

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

con la estructura diferenciable dada por el atlas:

$U_1 = \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 1)\}$, $U_2 = \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, -1)\}$ con las proyecciones estereográficas

desde los polos norte $(0, 0, 1)$ y sur $(0, 0, -1)$:

$$\begin{aligned}\psi_1 : U_1 &\longrightarrow \mathbb{R}^2_{(x,y)}, \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right) \\ \psi_2 : U_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2_{(\hat{x}, \hat{y})}, \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3} \right)\end{aligned}$$

respectivamente y con la métrica Riemanniana

$$g = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix},$$

inducida por su inmersión en \mathbb{R}^3 .

Proposición .0.7. *Las geodésicas en la esfera (\mathbb{S}^2, g) , son aquellas curvas que se obtienen de la intersección de la esfera con planos que pasan por el origen.*

Demostración. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow (\mathbb{S}^2, g)$ una curva con $\|\alpha'(t)\| = 1$, respecto a g , que resulta de intersectar la esfera (\mathbb{S}^2, g) con un plano que pasa por el origen. Se desea mostrar que $\alpha(t)$ satisface la definición de geodésica.

En efecto sea $\alpha(t_0) \in \mathbb{S}^2$ con $t_0 \in [a, b]$ y $0 < \varepsilon < \pi$. Como (\mathbb{S}^2, g) es un espacio homogéneo,² existe una rotación adecuada $T : (\mathbb{S}^2, g) \rightarrow (\mathbb{S}^2, g)$ que es isometría y que envía el segmento $\alpha([t_0, t_0 + \varepsilon])$ al segmento $\alpha_1([0, \varepsilon])$ parametrizado por la longitud de arco \tilde{s} de $\alpha([t_0, t_0 + \varepsilon])$, donde $\alpha_1(0) = (0, 0, -1)$ y $\alpha_1([0, \varepsilon]) \subset \mathbb{S}^2 \cap \{\text{el plano } x_1x_3\}$. Puesto que T es una isometría de (\mathbb{S}^2, g) en si misma, se tiene que $\|\alpha'_1(\tilde{s})\| = 1$, para todo $\tilde{s} \in [0, \varepsilon]$. A continuación se probará que α minimiza la distancia local.

En efecto, puesto que $\psi_1 : (U_1, g) \rightarrow (\mathbb{R}^2_{(x,y)}, g)$ es una isometría, entonces bastará con demostrar que el segmento $\psi_1 \circ \alpha_1([0, \varepsilon])$ minimiza la distancia entre los puntos $\psi_1 \circ \alpha_1(0)$ y $\psi_1 \circ \alpha_1(\varepsilon)$.

²Recuerde que (M, g) es un espacio homogéneo, si para cada par de puntos p y $q \in M$, existe $T : (M, g) \rightarrow (M, g)$ isométrica con $T(p) = q$

Utilizando la expresión más sencilla en coordenadas polares (ρ, θ) de $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$ para el segmento $\psi_1 \circ \alpha_1([0, \varepsilon])$ se puede suponer que:

$$\psi_1 \circ \alpha_1 : [0, \varepsilon] \xrightarrow[\substack{\longmapsto \\ (\bar{s}, 0)}]{\substack{\longrightarrow \\ (\mathbb{R}_{(\rho,\theta)}^2, g_{(\rho,\theta)})}}$$

donde la métrica Riemanniana

$$g_{(\rho,\theta)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1+\rho^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4\rho^2}{(1+\rho^2)^2} \end{pmatrix},$$

es la expresión de g en coordenadas polares (ρ, θ) .

Sea

$$\beta : [c, d] \subset \mathbb{R} \xrightarrow[\substack{\longmapsto \\ (\rho(t), \theta(t))}]{\substack{\longrightarrow \\ (\mathbb{R}_{(\rho,\theta)}^2, g_{(\rho,\theta)})}}$$

una curva diferenciable en $(\mathbb{R}_{(\rho,\theta)}^2, g)$ que une los puntos $\psi_1 \circ \alpha_1(0) = (0, 0)$ y $\psi_1 \circ \alpha_1(\varepsilon) = (\varepsilon, 0)$. Calculando la longitud de β , se obtienen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \text{long}(\beta) &= \int_c^d \sqrt{\frac{4 \left(\frac{d\rho(t)}{dt}\right)^2 + 4\rho(t)^2 \left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2}{(1 + \rho(t)^2)^2}} dt \\ &\geq \int_c^d \sqrt{\frac{4 \left(\frac{d\rho(t)}{dt}\right)^2}{(1 + \rho(t)^2)^2}} dt \\ &= \int_c^d \left| \frac{\frac{d\rho(t)}{dt}}{1 + \rho(t)^2} \right| dt \\ &\geq \int_c^d \frac{\frac{d\rho(t)}{dt}}{1 + \rho(t)^2} dt \\ &= 2 \arctan \rho(d) - 2 \arctan \rho(c) \\ &= 2 \arctan \varepsilon \\ &= \text{long}(\psi_1 \circ \alpha_1([0, \varepsilon])). \end{aligned}$$

Entonces se tiene que:

$$\text{long}(\psi_1 \circ \alpha_1([0, \varepsilon])) \leq \min_{\{\beta\}} \{\text{long}(\beta)\},$$

Observación .0.10. Sean (M_1, g_1) y (M_2, g_2) superficies Riemannianas.

Si $F : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ es una isometría local, entonces para cada $p \in M_1$, se tiene la igualdad:

$$A_p(r) = A_{F(p)}(r),$$

para todo $r \in (0, \varepsilon)$, donde $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ con $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ (que dependen de p y $F(p)$ respectivamente), para M_1 y M_2 respectivamente, que satisfacen la Definición (.0.18).

Ejemplo .0.14. La esfera unitaria (\mathbb{S}^2, g) y el plano euclideo $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$ con (δ_{lm}) la métrica Riemanniana usual en \mathbb{R}^2 , no son localmente isométricos.

Demostración. Procediendo por contradicción, suponga que

$$F : (\mathbb{S}^2, g) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, (\delta_{lm})),$$

es una isometría local. Entonces por la observación (.0.10) para cada punto $p \in \mathbb{S}^2$ se tiene la igualdad:

$$A_p(r) = A_{F(p)}(r), \tag{12}$$

con $r \in (0, \varepsilon)$ donde $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ con $0 < \varepsilon_1 \leq \pi$ y $0 < \varepsilon_2 < +\infty$ para \mathbb{S}^2 y \mathbb{R}^2 , respectivamente, que satisfacen la Definición (.0.18).

Por la homogeneidad de (\mathbb{S}^2, g) , bastará con mostrar que en el punto $p = (0, 0, -1)$, la igualdad (12) es falsa.

Como $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$ es también un espacio homogéneo, sin pérdida de generalidad suponga que $F((0, 0, -1)) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Para $r \in (0, \varepsilon_1)$, sea $B(p, r) \subset (\mathbb{S}^2, g)$ el disco con centro en $p = (0, 0, -1)$ y radio r .

Un cálculo sencillo en (\mathbb{S}^2, g) , muestra que:

$$r = 2 \arctan a.$$

para algún $a \in \mathbb{R}^+$. Calculando el área del disco $B(p, r)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} A_p(r) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{4\rho}{(1+\rho^2)^2} d\rho d\theta \\ &= \frac{4\pi a^2}{1+a^2} \\ &= 4\pi \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Para $\varepsilon_1 > 0$ como antes, se tiene que la función de área en $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$ asociada al punto $F(p) = (0, 0)$ es:

$$A_{F(p)} : (0, \varepsilon_2) \xrightarrow[r]{\quad} \mathbb{R}^+, \quad \mapsto \pi r^2$$

donde evidentemente para $r \in (0, \varepsilon)$, se tiene la desigualdad:

$$4\pi \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2} < \pi r^2,$$

lo cual es una contradicción con la suposición inicial.

Por lo tanto (\mathbb{S}^2, g) y $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$ no son localmente isométricas. \square

Definición .0.19. Sea (M, g) una superficie Riemanniana.

Se dice que (M, g) es una superficie Riemanniana plana (o de curvatura cero), si existe un atlas diferenciable $\{(U_i, \psi_i) \mid i \in I\}$, tal que para cada carta coordenada (U_i, ψ_i) de (M, g) , existe un disco $B_i \subset \mathbb{R}^2$ con radio $r_i > 0$ adecuado, donde:

$$\psi_i : (U_i, g) \longrightarrow (B_i, (\delta_{lm})),$$

es una isometría y (δ_{lm}) es la métrica Riemanniana usual en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo .0.15. Sea $Cil = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ el cilindro.

Considere el atlas para Cil dado de la siguiente manera:

$\{(U_i, \psi_i)\}$ con $i \in I$ (donde hay tantos índices i como puntos en $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$) y funciones

$$\begin{aligned} \psi_i^{-1} : B_\pi((x_i, y_i)) &\longrightarrow U_i \subset Cil \\ (x, y) &\longmapsto (\cos x, \operatorname{sen} x, y) \end{aligned}$$

con $U_i = \psi_i^{-1}(B_\pi((x_i, y_i)))$ y $B_\pi((x_i, y_i)) \subset \mathbb{R}_{(x,y)}^2$ para toda $i \in I$. Entonces un cálculo sencillo muestra que

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es la métrica Riemanniana para Cil y que para cada carta (U_i, ψ_i) , se tiene que $g = \psi_i^*((\delta_{lm}))$.

Por lo tanto el cilindro Cil es una superficie Riemanniana plana.

Lema .0.5. Sea $(B_r(0), (\delta_{lm})) \subset (\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$ el disco abierto con centro en $(0, 0)$ y radio $r > 0$.

Una curva diferenciable

$$\alpha : [a, b] \longrightarrow (B_r(0), (\delta_{lm})),$$

para $a, b \in \mathbb{R}$ adecuados, es geodésica (ver Definición .0.16) si y sólo si satisface que:

1. $\alpha([a, b])$ es un segmento de recta en $(B_r(0), (\delta_{lm}))$,
2. $\|\alpha'(t)\| = 1$, para todo $t \in [a, b]$ (respecto a la métrica (δ_{lm})).

Demostración. (\Rightarrow) Suponga que

$$\alpha : [a, b] \xrightarrow[t \mapsto (x(t), y(t))]{\quad} (B_r(0), (\delta_{lm})),$$

es geodésica y que no es un segmento de recta en $(B_r(0), (\delta_{lm}))$.

Sin pérdida de generalidad suponga que sus extremos $p = \alpha(a)$ y $q = \alpha(b)$ están situados en un segmento de recta paralelo al eje de las abscisas, ya que en caso contrario existe una rotación adecuada

$$T_\theta : (B_r(0), (\delta_{lm})) \rightarrow (B_r(0), (\delta_{lm})),$$

para algún $\theta \in \mathbb{R}$, tal que $T_\theta(p)$ y $T_\theta(q)$ están sobre un segmento de recta paralelo al eje de las abscisas.

Sin pérdida de generalidad suponga que $x(a) < x(b)$; entonces $p = (x(a), \tilde{C})$ y $q = (x(b), \tilde{C})$, donde \tilde{C} es un constante tal que $|\tilde{C}| < r$.

Sea el segmento de recta que une p con q :

$$\gamma : [x(a), x(b)] \xrightarrow[s]{(s, \tilde{C})} (B_r(0), (\delta_{lm})).$$

Como $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ no es un segmento de recta, $y(t) \neq \text{constante}$. Calculando la longitud de α se obtienen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \text{long}(\alpha) &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2} dt \\ &> \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \left| \frac{dx(t)}{dt} \right| dt \\ &\geq \int_a^b \frac{dx(t)}{dt} dt \\ &= x(b) - x(a) \\ &= \text{long}(\gamma), \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, puesto que se suponía que α es geodésica.

Entonces la curva α es un segmento de recta en $(B_r(0), (\delta_{lm}))$ y $\|\alpha'(t)\| = 1$, respecto a la métrica (δ_{lm}) para todo $t \in [a, b]$ (puesto que por hipótesis α era geodésica).

(\Leftarrow) Sea $\gamma : [c, d] \rightarrow (B_r(0), (\delta_{lm}))$, un segmento de recta con $\|\beta'(s)\| = 1$, para toda $t \in [a, b]$.

(i) Se mostrará primero que un segmento de recta paralelo al eje de las abscisas es geodésica.

En efecto, sea:

$$\gamma : [c, d] \xrightarrow[s]{(s, C)} (B_r(0), (\delta_{lm})),$$

donde C es una constante tal que $|C| < r$ y $c, d \in \mathbb{R}$ adecuados.

Sean $p = \alpha(c) = (c, C)$ y $q = \alpha(d) = (d, C) \in B_r(0)$ los extremos de la curva α

y

$$\beta : [\tilde{c}, \tilde{d}] \xrightarrow[t \mapsto (x(t), y(t))]{\quad} (B_r(0), (\delta_{lm})),$$

una curva diferenciable en $(B_r(0), (\delta_{lm}))$ que une p con q .

Calculando la longitud de β se obtienen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \text{long}(\beta) &= \int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}} \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2} dt \\ &\geq \int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}} \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right| dt \\ &\geq \int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}} \frac{dx(t)}{dt} dt \\ &= x(\tilde{d}) - x(\tilde{c}) = d - c \\ &= \text{long}(\gamma). \end{aligned}$$

Luego de las desigualdades de arriba se obtiene que:

$$\text{long}(\gamma) = d - c \leq \min_{\{\beta\}} \{\text{long}(\beta)\},$$

donde el mínimo se toma sobre todas las curvas diferenciables $\{\beta\}$ en $(B_r(0), (\delta_{lm}))$ que unen p con q . Entonces por definición se tiene que γ es geodésica.

(ii) Si γ no es un segmento de recta paralelo al eje de las abscisas, entonces mediante una rotación adecuada $T_\theta : (B_r(0), (\delta_{lm})) \rightarrow (B_r(0), (\delta_{lm}))$ es posible enviar γ a un segmento de recta paralelo al eje de las abscisas, entonces por el inciso (i) y puesto que T_θ envía geodésicas en geodésicas, se tiene que γ es geodésica en $(B_r(0), (\delta_{lm}))$. \square

Proposición .0.8. Sea (M, g) una superficie Riemanniana plana.

Una curva diferenciable

$$\alpha : [a, b] \longrightarrow (M, g)$$

con $\alpha'(t) \neq 0 \in T_{\alpha(t)}M$, para todo $t \in [a, b]$, es geodésica (ver Definición .0.16) si y sólo si para cada punto $p = \alpha(t_0) \in U_i \subset M$ con $t_0 \in [a, b]$, existe un número $\varepsilon > 0$ (que posiblemente depende del punto p) tal que la curva

$$\psi_i \circ \alpha : [t_0, t_0 + \varepsilon] \longrightarrow (B_r(\psi_i(p)), (\delta_{lm})) \subset (\mathbb{R}^2, (\delta_{lm})),$$

para $r > 0$ adecuado, satisface:

1. $\psi_i \circ \alpha([t_0, t_0 + \varepsilon])$ es un segmento de recta en la superficie Riemanniana $(B_r(\psi_i(p)), (\delta_{lm}))$,
2. $\|(\psi_i \circ \alpha)'(t)\| = 1$, respecto a la métrica (δ_{lm}) , para todo $t \in [a, b]$.

Demostración. La idea de la demostración consistirá en mostrar que las curvas β en (M, g) , cuya traza no esta totalmente contenida en $U_i \subset M$, tienen longitud mayor que la curva α propuesta.

(\Rightarrow) Sea $p = \alpha(t_0) \in U_i$. Como α es geodésica, entonces por definición existe $\varepsilon_0 > 0$ que depende de p , tal que la curva de menor longitud en (M, g) , que une los puntos extremos $p = \alpha(t_0)$ y $\alpha(t_0 + \varepsilon_0)$, es el segmento $\alpha([t_0, t_0 + \varepsilon_0])$. Puesto que $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$ es un espacio homogéneo, sin pérdida de generalidad suponga que $\psi_i(p) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Como (M, g) es de curvatura cero, existe $r > 0$ tal que

$$\psi_i : (U_i, g) \longrightarrow (B_r(0), (\delta_{lm})),$$

es isometría.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \min\{\varepsilon_0, r\}$. Para demostrar los incisos (1) y (2), por el Lema (.0.5) basta con mostrar que la curva

$$\psi_i \circ \alpha : [t_0, t_0 + \varepsilon] \longrightarrow (B_r(0), (\delta_{lm})),$$

es geodésica en $(B_r(0), (\delta_{lm}))$.

Procediendo por contradicción, suponga primero que no minimiza localmente la distancia, entre los puntos $\psi_i(p) = (0, 0)$ y $\psi_i \circ \alpha(t_0 + \varepsilon)$ en $(B_r(0), (\delta_{lm}))$

y sea $\gamma : [c, d] \rightarrow (B_r(0), (\delta_{lm}))$ geodésica en $(B_r(0), (\delta_{lm}))$ que une el punto $\psi_i(p) = (0, 0)$ con el punto $\psi_i \circ \alpha(t_0 + \varepsilon)$, entonces

$$\text{long}(\gamma) < \text{long}(\psi_i \circ \alpha([t_0, t_0 + \varepsilon]))$$

en $(B_r(0), (\delta_{lm}))$.

Puesto que $\psi_i^{-1} : (B_r(0), (\delta_{lm})) \rightarrow (U_i, g)$ es isometría, entonces se tiene la siguiente desigualdad:

$$\text{long}(\psi_i^{-1} \circ \gamma) = \text{long}(\gamma) < \text{long}(\psi_i \circ \alpha([t_0, t_0 + \varepsilon])) = \text{long}(\alpha([t_0, t_0 + \varepsilon])),$$

donde $\psi_i^{-1} \circ \beta : [c, d] \rightarrow (U_i, g) \subset (M, g)$ es una curva diferenciable en (M, g) que une los puntos $p = \alpha(t_0)$ y $\alpha(t_0 + \varepsilon)$, lo cual es una contradicción pues α es geodésica en (M, g) .

Entonces, la curva $\psi_i \circ \alpha : [t_0, t_0 + \varepsilon] \rightarrow (B_r(0), (\delta_{lm}))$ minimiza localmente la distancia entre $\psi_i(p) = (0, 0)$ y $\psi_i \circ \alpha(t_0 + \varepsilon)$ en $(B_r(0), (\delta_{lm}))$. Además puesto que $\psi_i : (U_i, g) \rightarrow (B_r(0), (\delta_{lm}))$ es isometría y $t_0 \in [a, b]$ fue un punto arbitrario, se tiene que

$$\|(\psi_i \circ \alpha)'(t)\| = 1,$$

respecto a la métrica (δ_{lm}) , para todo $t \in [a, b]$.

Por lo tanto la curva $\psi_i \circ \alpha : [t_0, t_0 + \varepsilon] \rightarrow (B_r(0), (\delta_{lm}))$ es geodésica.

(\Leftarrow) Procediendo por contradicción, suponga que $\alpha : [a, b] \rightarrow (M, g)$ no es geodésica. Suponga primero que existe un punto $p = \alpha(t_0) \in M$ con $t_0 \in [a, b]$, tal que para todo $\tilde{\varepsilon} > 0$, el segmento $\alpha([t_0, t_0 + \tilde{\varepsilon}])$ no minimiza localmente la distancia entre los puntos p y $q = \alpha(t_0 + \tilde{\varepsilon}) \in M$.

Entonces existe $\beta : [c, d] \rightarrow (M, g)$ curva diferenciable en (M, g) distinta de α , que une los puntos p y q con

$$\text{long}(\beta) \leq \text{long}(\alpha([t_0, t_0 + \tilde{\varepsilon}])) \quad (13)$$

en (M, g) .

Sea (U_i, ψ_i) carta coordenada de (M, g) tal que $\psi_i(p) = (0, 0)$. Entonces por la

hipótesis se tiene que existe $\varepsilon > 0$ tal que la curva

$$\psi_i \circ \alpha : [t_0, t_0 + \varepsilon] \rightarrow (B_r(0), (\delta_{lm})) \subset (\mathbb{R}^2, (\delta_{lm})),$$

es un segmento de recta en $(B_r(0), (\delta_{lm}))$ con $\|(\psi_i \circ \alpha)'(t)\| = 1$, para todo $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$.

Sin pérdida de generalidad suponga que $\psi_i \circ \alpha([t_0, t_0 + \varepsilon]) \subset B_r(0)$ esta sobre el eje de las abscisas. Entonces reparametrizando, se tiene que:

$$\psi_i \circ \alpha : [0, \varepsilon] \xrightarrow[s]{(s,0)} (B_r(0), (\delta_{lm})).$$

Sea $\tilde{\varepsilon} = \min\{\varepsilon, r/3\}$ y considere el segmento de recta $\psi_i \circ \alpha([0, \tilde{\varepsilon}]) \subset (B_r(0), (\delta_{lm}))$.

Para la curva diferenciable $\psi_i \circ \beta : [c, d] \rightarrow (\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$ que uno los puntos $\psi_i(p)$ y $\psi_i(q)$ en $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$ existen dos posibilidades:

(i) El segmento $\psi_i \circ \beta([c, d])$ esta totalmente contenido en $(B_r(0), (\delta_{lm}))$. En este caso se tiene la desigualdad:

$$\text{long}(\psi_i \circ \alpha([0, \tilde{\varepsilon}])) \geq \text{long}(\psi_i \circ \beta),$$

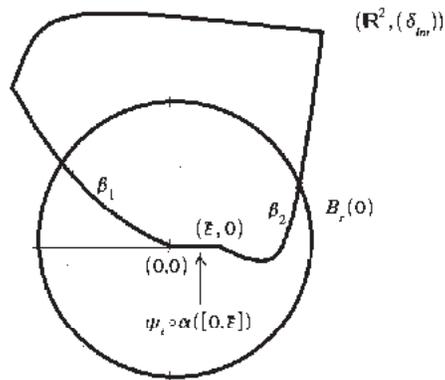
puesto que $\psi_i : (U_i, g) \rightarrow (B_r(0), (\delta_{lm}))$ es una isometría, lo cual es una contradicción, ya que se tenía que $\psi_i \circ \alpha : [0, \tilde{\varepsilon}] \rightarrow (B_r(0), (\delta_{lm}))$ era geodésica en $(B_r(0), (\delta_{lm}))$.

(ii) El segmento $\psi_i \circ \beta([c, d])$ no esta totalmente contenido en $(B_r(0), (\delta_{lm}))$.

De entre todas las posibles formas que puede adoptar $\psi_i \circ \beta$ en $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$, una de ellas se ve como en la Figura de abajo.

Sean β_1 y β_2 segmentos sobre $\psi_i \circ \beta$ como en la Figura, tales que:

$$\text{long}(\psi_i \circ \beta) = \text{long}(\beta_1) + \text{long}(\beta_2).$$



Segmento geodésico en el disco.

Un calculo sencillo muestra que las longitudes de β_1 y β_2 cumplen la siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \text{long}(\beta_1) &\geq r \\ \text{long}(\beta_2) &\geq \frac{2r}{3}. \end{aligned}$$

Comparando las longitudes de $\psi_i \circ \beta$ y $\psi_i \circ \alpha([0, \tilde{\varepsilon}])$, se obtienen la siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \text{long}(\psi_i \circ \beta) &\geq \frac{5r}{3} \\ &> \frac{r}{3} \\ &\geq \min\{\varepsilon, \frac{r}{3}\} \\ &= \tilde{\varepsilon} \\ &= \text{long}(\psi_i \circ \alpha([0, \tilde{\varepsilon}])). \end{aligned}$$

Puesto que $\psi_i^{-1} : (B_r, (0), (\delta_{lm})) \rightarrow (U_i, g)$ es una isometría, se tienen

las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \text{long}(\beta) &> \text{long}(\psi_i^{-1} \circ \beta_1) + \text{long}(\psi_i^{-1} \circ \beta_2) \\ &> \text{long}(\alpha([0, \tilde{\varepsilon}])) \\ &> \text{long}(\alpha([t_0, t_0 + \tilde{\varepsilon}])), \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción con la desigualdad (13).

Por lo tanto de los incisos (i) y (ii), se tiene que el segmento $\alpha([t_0, t_0 + \tilde{\varepsilon}])$ minimiza la distancia local entre los puntos $p = \alpha(t_0)$ y $q = \alpha(t_0 + \tilde{\varepsilon})$ para cualquier punto $p = \alpha(t_0) \in M$ con $t_0 \in [a, b]$.

Ahora como $\alpha'(t) \neq 0 \in T_{\alpha(t)}M$, para todo $t \in [a, b]$, entonces reparametrizando a α por longitud de arco igual a \tilde{s} , se obtiene que

$$\|\alpha'(\tilde{s})\| = 1,$$

para todo $\tilde{s} \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$ con $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}_{\tilde{s}}$ adecuados.

Por lo tanto la curva α es geodésica. □

Proposición .0.9. Sean (M_1, g_1) y (M_2, g_2) superficies Riemannianas planas. Sea $F : M_1 \rightarrow M_2$ sobreyectiva e isometría local y $\alpha : [a, b] \rightarrow (M_1, g_1)$ geodésica en (M_1, g_1) (ver Definición (.0.16)).

Entonces la curva

$$F \circ \alpha : [a, b] \longrightarrow (M_2, g_2),$$

es geodésica en (M_2, g_2) .

Además toda geodésica

$$\alpha_2 : [a, b] \longrightarrow (M_2, g_2)$$

en (M_2, g_2) , es de la forma $\alpha_2(t) = F \circ \alpha_1(t)$, para alguna geodésica α_1 en (M_1, g_1) .

Demostración. Se desea aplicar la Proposición (.0.8) a la imagen de α bajo F , pero como F no es un difeomorfismo (global), se aplicará la proposición en

en alguna vecindad $W_{\alpha(t)} \subset M_1$ y $\widetilde{W}_{F \circ \alpha(t)} \subset M_2$ de $\alpha(t)$ y $F \circ \alpha(t)$ respectivamente, en donde F es isometría entre estas vecindades para cada punto sobre la traza de α . Luego se construye una isometría local (que depende de F) entre dos discos abiertos Riemannianos en $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$ respecto a las superficies Riemannianas (M_1, g_1) y (M_2, g_2) respectivamente, que por geometría elemental se sabe que envía segmentos de recta en segmentos de recta, probando que un segmento de $F \circ \alpha$ bajo una carta adecuada (V_k, ϕ_k) de (M_2, g_2) es un segmento de recta en el disco Riemanniano en $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$ correspondiente a la superficie Riemanniana (M_2, g_2) .

En efecto, sean (U_i, ψ_i) y (V_k, ϕ_k) cartas coordenadas de (M_1, g_1) y (M_2, g_2) respectivamente tales que $F(U_i) \subset V_k$. Sea $q = F \circ \alpha(t_0) \in V_k$ con $t_0 \in [a, b]$. Como α es geodésica en (M_1, g_1) por la Proposición (.0.8), existe $\varepsilon_0 > 0$ y $r > 0$ adecuados, tal que la traza de

$$\psi_i \circ \alpha : [t_0, t_0 + \varepsilon_0] \longrightarrow (B_r(\psi_i(\alpha(t_0)), (\delta_{lm})) \subset (\mathbb{R}^2, (\delta_{lm})),$$

es un segmento de recta en $(B_r(\psi_i(\alpha(t_0)), (\delta_{lm}))$ y $\|(\psi_i \circ \alpha)'(t)\| = 1$, respecto a la métrica (δ_{lm}) , para todo $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon_0]$ con (U_i, ψ_i) carta coordenada de (M_1, g_1) .

Puesto que $F : M_1 \rightarrow M_2$ es una isometría local, entonces para cada punto $\alpha(t) \in U_i \subset M_1$ con $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon_0]$, existen vecindades $W_{\alpha(t)}$ y $\widetilde{W}_{F \circ \alpha(t)}$ de $\alpha(t)$ y $F \circ \alpha(t)$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon_0]$ respectivamente, tal que la función:

$$F_t : W_{\alpha(t)} \subset U_i \longrightarrow \widetilde{W}_{F \circ \alpha(t)} \subset V_k,$$

es isometría local, donde F_t es la restricción de F a $W_{\alpha(t)}$.

Como $[t_0, t_0 + \varepsilon_0]$ es compacto, existen $t_1, t_2, \dots, t_n \in [t_0, t_0 + \varepsilon_0]$ tales que, la función definida como:

$$\widehat{F} : \bigcup_{j=1}^n W_{\alpha(t_j)} \xrightarrow{p} \bigcup_{j=1}^n \widetilde{W}_{F \circ \alpha(t_j)}, \quad \begin{cases} F_{t_j}(p), & \text{si } p \in W_{\alpha(t_j)}, \\ F_{t_1}(p) = F_{t_j}(p), & \text{si } p \in W_{\alpha(t_1)} \cap W_{\alpha(t_j)}, \end{cases}$$

para $l, j = 1, 2, \dots, n$, es isometría.

Como (M_2, g_2) es plana, existe $\tilde{r} > 0$ tal que:

$$\phi_k : (V_k, g_2) \longrightarrow (B_{\tilde{r}}(\phi_k(q)), (\delta_{lm})) \subset (\mathbb{R}^2, (\delta_{lm})),$$

es isometría.

Sea $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < \min\{\varepsilon_0, r, \tilde{r}\}$ y la curva:

$$\phi_k \circ \tilde{F} \circ \alpha : [t_0, t_0 + \varepsilon] \longrightarrow (B_{\tilde{r}}(\phi_k(q)), (\delta_{lm})).$$

Entonces para demostrar que $F \circ \alpha$ es geodésica en (M_2, g_2) , por la Proposición (.0.8), basta con mostrar que la traza de la curva de arriba es un segmento de recta en el disco $(B_{\tilde{r}}(\phi_k(q)), (\delta_{lm}))$ y que $\|(\phi_k \circ \tilde{F} \circ \alpha)'(t)\| = 1$, respecto a la métrica (δ_{lm}) , para todo $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$.

En efecto, puesto que la restricción

$$\phi_k \circ \tilde{F} \circ \psi_i^{-1} : (\psi_i(\cup_{j=1}^n W_{\alpha(t_j)}), (\delta_{lm})) \longrightarrow \phi_k(\cup_{j=1}^n \tilde{W}_{F \circ \alpha(t_j)}),$$

de $\phi_k \circ \tilde{F} \circ \psi_i^{-1} : (B_r(\psi_i(\alpha(t_0)), (\delta_{lm})) \rightarrow (B_{\tilde{r}}(\phi_k(q)), (\delta_{lm}))$, es una isometría y $\psi_i \circ \alpha([t_0, t_0 + \varepsilon]) \subset (\psi_i(\cup_{j=1}^n W_{\alpha(t_j)}), (\delta_{lm}))$, es un segmento de recta, entonces

$$\phi_k \circ \tilde{F} \circ \psi_i^{-1}(\psi_i \circ \alpha([t_0, t_0 + \varepsilon])) = \phi_k \circ F \circ \alpha([t_0, t_0 + \varepsilon]),$$

es un segmento de recta en $(\phi_k(\cup_{j=1}^n \tilde{W}_{F \circ \alpha(t_j)}), (\delta_{lm}))$ y por lo tanto también lo es en el disco Riemanniano $(B_{\tilde{r}}(\phi_k(q)), (\delta_{lm}))$. Además

$$\|(\phi_k \circ F \circ \alpha)'(t)\| = 1,$$

respecto a la métrica (δ_{lm}) , para todo $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$.

Por lo tanto $F \circ \alpha$ es geodésica en (M_2, g_2) .

Ahora sea $\alpha_2 : [a, b] \rightarrow (M_2, g_2)$ geodésica. Como F es sobre y es un difeomorfismo local, entonces $F : M_1 \rightarrow M_2$ es un cubriente.

Entonces por el Teorema del levantamiento para una curva, existe una función continua $\alpha_1 : [a, b] \rightarrow M_1$ tal que $F \circ \alpha_1(t) = \alpha_2(t)$ para todo $t \in [a, b]$.

Como $\alpha_2(t)$ y $F : M_1 \rightarrow M_2$ son funciones diferenciables, entonces $\alpha_1(t)$ también y puesto que $\|\alpha_2'(t)\| = 1$, respecto a la métrica g_2 , para todo $t \in [a, b]$ entonces $\alpha_1'(t) \neq 0 \in T_{\alpha_1(t)}M_1$, para todo $t \in [a, b]$. Entonces parametrizando a α_1 por longitud de arco s , se tiene que

$$\|\alpha_1'(s)\| = 1,$$

respecto a la métrica g_1 , para todo $s \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$.

Como α_2 es geodésica y F es una isometría local, por un proceso similar descrito en la primera parte de la prueba de esta proposición, se tiene que α_1 minimiza la distancia local entre puntos cercanos sobre su traza. Por lo tanto α_1 es geodésica en (M_1, g_1) .

□

Ejemplo .0.16. Sea $M = Cil$ el cilindro como en el Ejemplo (.0.15).

La función

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow (Cil, g), \\ (x, y) \longmapsto (\cos x, \text{sen } x, y)$$

es suprayectiva e isometría local entre las variedades Riemannianas $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$ y (Cil, g) con g como en el Ejemplo (.0.15).

Entonces por la proposición anterior, cualquier geodésica en (Cil, g) es imagen bajo F de alguna geodésica en $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$. Así se tiene que para cada $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ con $\sqrt{a_1^2 + a_3^2} = 1$, la curva

$$\alpha_2 : [0, 1] \subset \mathbb{R}_t \xrightarrow{t} (Cil, g), \\ \longmapsto (\cos(a_1 t + a_2), \text{sen}(a_1 t + a_2), a_3 t + a_4)$$

es geodésica en (Cil, g) puesto que $\alpha_2(t) = F \circ \alpha_1(t)$, para toda $t \in [0, 1]$, donde

$$\alpha_1 : [0, 1] \xrightarrow{t} (\mathbb{R}_{(x,y)}^2, (\delta_{lm})), \\ \longmapsto (a_1 t + a_2, a_3 t + a_4)$$

es la parametrización de una recta en $(\mathbb{R}^2, (\delta_{lm}))$.

Bibliografía

- [1] Ahlfors, Lars V. *Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. 3rd ed.*. International Series in pure and applied Mathematics. Düsseldorf etc.: McGraw-Hill Book Company, 331 p. (1979).
- [2] Brambila-Paz, L.; Muciño-Raymundo, Jesús. *Geometría de superficies de Riemann y haces lineales holomorfos*. López Mimbela, J. A. (ed.) et al., XXX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Aguascalientes, México, Septiembre 28-Octubre 2, 1997. Proceedings. México: Sociedad Matemática Mexicana. Aportaciones Mat., Comun. 22, 179-207 (1998).
- [3] Besse, Arthur L. *Einstein manifolds*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Bd. 10. Berlin etc.: Springer-Verlag (1987).
- [4] do Carmo, Manfredo Perdigão. *Differential geometry of curves and surfaces*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 503 p. (1976).
- [5] Frías-Armenta, Eduardo; Hernández-Moguel, Luis; Muciño-Raymundo Jesús. *Explicit flat metrics from meromorphic forms*. En preparación (2006).
- [6] Gardiner, Frederick P.; Lakic, Nikola. *Quasiconformal Teichmüller theory*. Mathematical Surveys and Monographs. 76. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 372 p. (2000).

- [7] Garijo, Antonio; Gasull, Armengol; Jarque, Xavier. *Normal forms for singularities of one dimensional holomorphic vector fields*. Electron. J. Differ. Equ. 2004, Paper No. 122, 7 p., electronic only (2004).
- [8] Harris, Joe. *Algebraic geometry. A first course*. Graduate Texts in Mathematics. 133. Berlin etc.: Springer-Verlag, 328 p. (1992).
- [9] Masur, Howard; Tabachnikov, Serge. *Rational billiards and flat structures*. [A] Hasselblatt, B. (ed.) et al., Handbook of dynamical systems. Volume 1A. Amsterdam: North-Holland. 1015-1089 (2002).
- [10] Kodaira, Kunihiro. *Complex manifolds and deformation of complex structures*. Transl. from the Japanese by Kazuo Akao. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 283. New York etc.: Springer-Verlag, 465 p. (1986).
- [11] Kapovich, Michael; Millson, John. *On the moduli space of polygons in the Euclidean plane*. J. Differ. Geom. 42, No.1, 133-164 (1995).
- [12] Muciño-Raymundo, Jesús; Valero-Valdés, Carlos. *Bifurcations of meromorphic vector fields on the Riemann sphere*. Ergodic Theory Dyn. Syst. 15, No.6, 1211-1222 (1995).
- [13] Muciño-Raymundo, Jesús; Valero-Valdés, Carlos. *Geometry and dynamics of the residue theorem*. Morfismos 5, No.1, 1-16 (2001).
- [14] Muciño-Raymundo, Jesús. *Complex structures adapted to smooth vector fields*. Math. Ann. 322, No. 2, 229-265 (2002).
- [15] Muciño-Raymundo, Jesús. *Geometría y dinámica de poliedros*. León J., A, (ed.) et al., XXVII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Querétaro, México, Octubre 2-8, 1994. Ciudad de México: Sociedad Matemática Mexicana. Aportaciones Mat., Comun. 16, 403-435 (1995).

- [16] Muciño-Raymundo, Jesús. *Integración, geometría euclidea y campos vectoriales meromorfos*. Avila Murillo, F. (ed.) et al., XXIX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, San Luis Potosí, México, Octubre 6-12, 1996. Ciudad de México: Sociedad Matemática Mexicana. *Aportaciones Mat., Comun.* 20, 135-156 (1997).
- [17] Mukai, Shigeru. *An introduction to invariants and moduli*. Transl. by W. M. Oxbury. Cambridge Tracts in Mathematics 81. Cambridge: Cambridge University Press, 503 p. (2003).
- [18] Remmert, Reinhold. *Theory of complex functions*. Transl. from the German by Robert B. Burckel. Graduate Texts in Mathematics. 122. New York etc.: Springer-Verlag, 453 p. (1991).
- [19] Strebel, Kurt. *Quadratic differentials*. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Band 5*. Berlin etc.: Springer-Verlag, 184 p. (1984).
- [20] Wolf, Joseph A.. *Spaces of constant curvature*. 5th ed. Boston, Mass.: Publish or Perish, Inc., 408 p. (1984).
- [21] Zoladek, Henryk. *The monodromy group*. *Monografie Matematyczne. Instytut Matematyczny PAN (New Series) 67*. Basel: Birkhäuser. 580 p. (2006).