

# Método de las características complejas para ecuaciones elípticas en ángulos no convexos

Tesis de Maestría

Presenta:

José Eligio de la Paz Méndez

Asesor: Dr. Anatoli Merzon

Coasesor: Dr. Víctor Manuel Villanueva Sandoval

Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Morelia, Michoacán. Diciembre 2006

Dedico esta tesis a mi familia

A mi esposa Ma.Guadalupe Echeverría Díaz  
y a mis hijas  
Katy Nicole de la Paz Echeverría  
Karen Denisse de la Paz Echeverría

## **Agradecimientos**

Agradezco primeramente a Dios por permitirme dar este paso, y a mi esposa Ma. Guadalupe Echeverría Díaz por su gran apoyo incondicional que siempre me ha brindado.

Le agradezco infinitamente al Dr. Anatoli Merzon por sus enseñanzas, paciencia y sobre todo, por dedicarme una parte valiosa de su tiempo para realizar este trabajo.

Así como también agradezco al Dr. Víctor Manuel Villanueva Sandoval por el gran apoyo que me brindó.

Agradezco también a:

Dr. Eugenio Balanzario Gutiérrez

Dr. Abdon E. Choque Rivero

Dr. Joaquín Estévez Delgado

Por sus sugerencias y comentarios.

# Índice

1	Introducción	5
2	Reducción al complemento del primer cuadrante	6
3	Extensión por cero	9
4	Expresión de $d_0$ por medio de los datos de Cauchy	13
5	Transformada de Fourier	14
6	Transformada de Fourier de la ecuación (4.2)	17
7	El símbolo del operador diferencial estrictamente elíptico	17
8	Expresión de la solución de la ecuación (4.1) a través de los datos de Cauchy.	21
9	Teoría de Paley-Wiener	21
10	Superficie de Riemann y la cubierta universal	23
11	Levantamiento de las transformadas de Fourier de los datos de Cauchy	24
12	La ecuación de conexión para el ángulo convexo	27
13	Transformada de Fourier de las funciones decrecientes en $K_+$	28
14	La ecuación integral de conexión	29
15	Levantamiento de la ecuación de conexión a la superficie de Riemann	32
16	Conclusión	39
17	Apéndice	40

# 1 Introducción

Este trabajo está dedicado a algunos aspectos de la solución de problemas de frontera para las ecuaciones elípticas en los ángulos planos no convexos. Precisamente se trata de la justificación del método de las características complejas [2], [3], [5], [7] para ángulos no convexos. Este método encuentra aplicaciones para varios problemas de la Física Matemática tanto como para ángulos convexos y ángulos no convexos [6], [8], [9], [10], [11] [13].

En la parte principal de este método la ecuación de conexión juega un papel muy importante sobre la superficie de Riemann de las características complejas del operador elíptico. La ecuación de conexión generaliza las relaciones bien conocidas sobre las características reales de las ecuaciones hiperbólicas. Esta tesis es una ampliación, modificación y aclaración de los resultados [5].

El problema principal es proponer un análogo apropiado de la ecuación de la conexión entre los datos de Cauchy para el caso de los ángulos convexos que servirá para el caso de los ángulos no convexos. Para los ángulos convexos, la conexión entre las transformadas de Fourier de los datos de Cauchy de la solución sobre los lados del ángulo aparece como una ecuación algebraica sobre las características complejas del operador elíptico [7]. En los ángulos no convexos no existe esta relación por que la "sálida a una área compleja" no se puede realizar. En este caso el Teorema de Paley-Wiener [3] no se cumple.

Sin embargo se puede proponer un método para encontrar dicha conexión sobre las características complejas del símbolo del operador estrictamente elíptico. Nosotros damos el primer paso en esta dirección. Encontramos la **ecuación integral (15.34)**, que es una relación entre los datos de Cauchy. La relación algebraica en esta tesis no se considera.

Este método está basado en la teoría de distribuciones de Soboleff-Schwartz [13], en la teoría de la transformada de Fourier compleja y usa la cubierta universal de la superficie de Riemann de las raíces del símbolo del operador. El objeto principal de esta investigación es la ecuación

$$(\Delta + a)u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in Q, \quad (1.1)$$

donde  $\Delta$  es el operador de Laplace,  $Q$  es el ángulo plano no convexo y

$$a \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}_+}, \quad (1.2)$$

donde  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ . Además

$$Q = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 2\pi - \alpha < \theta < 2\pi\}, \quad \pi < \alpha < 2\pi, \quad \rho > 0.$$

( véase la Figura 1 )

La solución  $u(x, y)$  se busca en el espacio  $C^\infty(\overline{Q})$ , es decir, en el espacio de las funciones en  $\overline{Q}$  que tienen todas las derivadas en  $\overline{Q}$ .

La ecuación (1.1) con  $\omega \in \mathbb{C}^+$  aparece después de la transformada de Fourier-Laplace en problemas estacionarios de dispersión sobre cuñas [8]. La solución del problema de dispersión

en [8] está buscado sobre la conexión entre los datos de Cauchy de la solución del problema estacionario correspondiente sobre un ángulo.

La conexión es una ecuación algebraica sobre la superficie de Riemann de las Características Complejas de la ecuación (1.1). La ecuación de conexión juega un crucial papel en este enfoque [8, 9].

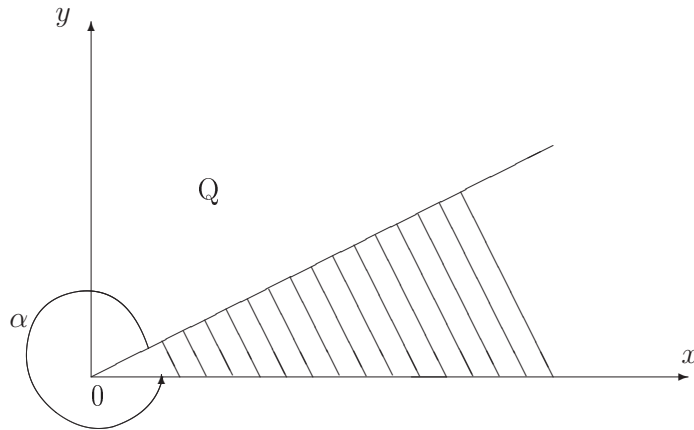


Figura 1

Nuestra primera meta es "extender" la ecuación  $(\Delta + a)u(x, y) = 0$ ,  $(x, y) \in Q$ ,  $Q \subset \mathbb{R}^2$ , extendiendo  $u$  a  $\mathbb{R}^2$  por 0. Para esto vamos a reducir primero ésta ecuación a la ecuación en el complemento del primer cuadrante.

## 2 Reducción al complemento del primer cuadrante

En esta sección vamos a reducir la ecuación (1.1) a la ecuación dada en el complemento del primer cuadrante. Lo hacemos por medio del cambio de variables lineal, que transforma  $Q$  al  $K_- := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < 0 \text{ ó } x_2 < 0\}$  (véase la Figura 2)

Consideremos la transformación del ángulo  $Q$  al complemento del primer cuadrante,  $K_-$ .

Dicha transformación es

$$\mathcal{L} : Q \longrightarrow K_-, \quad (2.1)$$

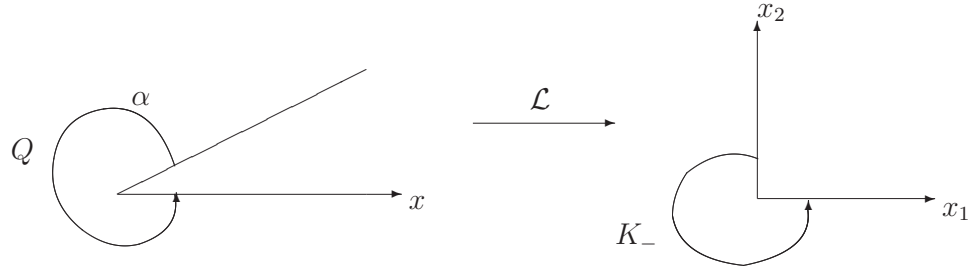


Figura 2

y se puede determinarla por medio de las fórmulas:

$$x_1 = x + y \cot \alpha, \quad x_2 = -\frac{y}{\sin \alpha}. \quad (2.2)$$

Donde,  $\pi < \alpha < 2\pi$ .

Vamos a representar el operador  $\Delta + a$  en las variables  $(x_1, x_2)$ . En el siguiente lema reescribimos el operador  $\Delta + a$  en las variables  $x_1, x_2$ .

**Lema 2.1** Sea  $u(x_1, x_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ . El operador  $\Delta + a$  en las variables  $x_1, x_2$  se escribe en la siguiente forma:

$$(\Delta + a)u(\mathcal{L}(x, y)) := \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \cos \alpha + a \sin^2 \alpha \right). \quad (2.3)$$

**Demostración.** En lo que sigue vamos a denotar  $u(\mathcal{L}(x, y)) = u(x, y)$ .

De (2.2) y usando la regla de cadena, obtenemos

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}; \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cot \alpha - \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Derivando nuevamente respecto a  $x$  y  $y$  tenemos para  $v(x_1, x_2) := \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x} v(x_1, x_2) = \frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}. \quad (2.5)$$

Similarmente para  $v(x_1, x_2) := \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$  y por (2.4)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (v(x_1, x_2)) = \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial y} (v(x, y)) = \frac{\partial v}{\partial x_1} \cot \alpha - \frac{\partial v}{\partial x_2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \\
&= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \cot \alpha - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \right) \cot \alpha - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \cot \alpha - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \right) \frac{1}{\sin \alpha} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \cot^2 \alpha - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Sumando (2.5) y (2.6), obtenemos (2.3). ■

El Lema 2.1 implica que la ecuación (1.1) es equivalente a la ecuación:

$$\left( \Delta - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \cos \alpha + a \sin^2 \alpha \right) u(x) = 0, \quad x \in K_-. \tag{2.7}$$

La solución de esta ecuación se busca en  $C^\infty(\overline{K_-})$ , que se define similarmente al  $C^\infty(\overline{Q})$ .

Desde ahora en adelante vamos a denotar al operador en (2.7) como:

$$\mathcal{H} = \Delta - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \cos \alpha + a \sin^2 \alpha. \tag{2.8}$$

Este operador se llama el operador de Helmholtz transformado. Nuestro siguiente paso es reducir la ecuación (2.7) a todo el plano.

Para esto queremos extender la solución por 0 y aplicar el operador  $\mathcal{H}$  a esta extensión en el sentido generalizado.



### 3 Extensión por cero

Vamos a recordar las siguientes definiciones y hechos de la Teoría de Distribuciones de Sobolef-Schwartz [13]. Recordemos que  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{supp } \varphi \text{ es compacto}\}$ .  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  es el espacio de los funcionales lineales continuos sobre  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  equipado por la topología estandar [13]. La acción de  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  a  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  la denotamos como  $\langle u, \varphi \rangle$ .

Citamos algunas propiedades de las distribuciones.

i)  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , entonces para cada  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  por definición

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} u, \varphi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle, \quad k = 1, \dots, n$$

ii) La función  $\delta$  de Dirak se define como  $\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0)$  para cada  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

iii) La función de Heaviside se define como

$$\theta(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

iv) El producto de dos distribuciones  $u(x_1)$  y  $v(x_2)$  se define como

$$\langle u(x_1)v(x_2), \varphi(x_1, x_2) \rangle := \langle u(x_1), \langle v(x_2), \varphi(x_1, x_2) \rangle \rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Sea  $u(x) \in C^\infty(\overline{K_-})$ . Ahora vamos a aplicar el operador  $\mathcal{H}$  a la función  $u_0(x)$  que es extensión de  $u(x)$  por 0 al plano  $\mathbb{R}^2$ , en el sentido de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ . Más precisamente, definimos

$$[u(x)]_0 := u_0(x) := \begin{cases} u(x), & x \in \overline{K_-} \\ 0, & x \notin \overline{K_-}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Nuestra meta inmediata es aplicar el operador  $\mathcal{H}$  a la función  $u_0$ , en otras palabras, queremos obtener  $d_0 := \mathcal{H}u_0$ , en el sentido de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ . La otra parte importante que deseamos realizar, consiste en expresar a  $d_0$  en términos de los datos de Cauchy de la función  $u(x)$ , definidas en la Definición 4.1.

En primer lugar, vamos a recordar como se realiza la derivación de funciones discontinuas de una variable. Sea  $u(x) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^+})$ . Consideremos

$$[u(x)]_0 := u_0(x) = \begin{cases} u(x), & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

la extensión de  $u(x)$  por cero a  $\mathbb{R}$ . Ésta función  $u_0(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

Derivando ésta función en el sentido  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , obtenemos:

$$\frac{d}{dx} u_0(x) = \left[ \frac{d}{dx} u(x) \right]_0 - \delta(x) \cdot u(0), \quad (3.4)$$

donde  $[\cdot]_0$  se entiende como en (3.3), es decir,

$$\left[ \frac{d}{dx} u(x) \right]_0 = \begin{cases} u'(x), & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Calculemos  $\frac{d^2}{dx^2} u_0(x)$  usando la regla de diferenciación de la teoría de distribuciones, es decir, aplicamos (3.4), para obtener la segunda derivada de  $u_0$ .

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} u_0(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} u_0(x) \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ \left[ \frac{d}{dx} u(x) \right]_0 - \delta(x) \cdot u(0) \right\} \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ \left[ \frac{d}{dx} u(x) \right]_0 \right\} - \frac{d}{dx} \{ \delta(x) \cdot u(0) \} \\ &= \left[ \frac{d}{dx} u'(x) \right]_0 - \delta(x) \cdot u'(0) - \delta'(x) \cdot u(0) \\ &= [u''(x)]_0 - \delta(x) \cdot u'(0) - \delta'(x) \cdot u(0), \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde  $x \in \mathbb{R}$ . En el caso  $\mathbb{R}^2$  podemos aplicar el mismo método. Precisamente, aplicamos el operador  $\mathcal{H}$  de (2.8) a la función (3.2).

**Teorema 3.1**

$$\mathcal{H}u_0 = [\mathcal{H}u]_0 + d_0, \quad (3.7)$$

donde

$$\begin{aligned} d_0 = & -\delta(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}u(0, x_2) \cdot \theta(x_2) - \delta(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}u(x_1, 0) \cdot \theta(x_1) - \delta'(x_1)u(0, x_2) \cdot \theta(x_2) \\ & -\delta'(x_2)u(x_1, 0) \cdot \theta(x_1) + 2 \cos \alpha \cdot \delta(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}u(0, x_2) \cdot \theta(x_2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$+2 \cos \alpha \cdot \delta(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}u(x_1, 0) \cdot \theta(x_1) + 2 \cos \alpha \cdot \delta(x_1, x_2)u(0, 0)$$

y donde  $[\mathcal{H}u]_0$  es la extensión por cero de la función  $\mathcal{H}u(x)$ ,  $x \in \overline{K_-}$  ( véase (3.2)).

**Demostración.** Fijamos  $x_2$  y encontramos  $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u_0(x_1, x_2)$ . Para esto vamos a escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u_0(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}u_0(x_1, x_2) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}u(x_1, x_2) \right]_0 - \delta(x_1) \cdot u(0, x_2) \cdot \theta(x_2) \right\} \\ &= \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u(x_1, x_2) \right]_0 - \delta(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}u(0, x_2) \cdot \theta(x_2) - \delta'(x_1)u(0, x_2) \cdot \theta(x_2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

De manera semejante calculamos  $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u_0(x_1, x_2)$ . Mantenemos fijo a  $x_1$ , (varía  $x_2$ )

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u_0(x_1, x_2) = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u(x_1, x_2) \right]_0 - \delta(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}u(x_1, 0) \cdot \theta(x_1) - \delta'(x_2)u(x_1, 0) \cdot \theta(x_1). \quad (3.10)$$

Finalmente calculemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}u_0(x_1, x_2)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u_0(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} u_0(x_1, x_2) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2) \right]_0 - \delta(x_2) \cdot u(x_1, 0) \cdot \theta(x_1) \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2) \right]_0 - \frac{\partial}{\partial x_1} (\delta(x_2) \cdot u(x_1, 0) \cdot \theta(x_1)) \\
&= \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u(x_1, x_2) \right]_0 - \delta(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} u(0, x_2) \cdot \theta(x_2) - \delta(x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, 0) \cdot \theta(x_1) \\
&\quad - \delta(x_1, x_2) u(0, 0).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Aplicando el operador  $\mathcal{H}$  de (2.8) a la función  $u_0$  y usando (3.9)-(3.11), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}u_0 &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_0(x_1, x_2) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u_0(x_1, x_2) - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u_0(x_1, x_2) + a \sin^2 \alpha \right) \\
&= \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x_1, x_2) \right]_0 - \delta(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} u(0, x_2) \cdot \theta(x_2) - \delta'(x_1) u(0, x_2) \cdot \theta(x_2) \\
&\quad + \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x_1, x_2) \right]_0 - \delta(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, 0) \cdot \theta(x_1) - \delta'(x_2) u(x_1, 0) \cdot \theta(x_1) \\
&\quad - 2 \cos \alpha \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u(x_1, x_2) \right]_0 + 2 \cos \alpha \cdot \delta(x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, 0) \cdot \theta(x_1) \\
&\quad + 2 \cos \alpha \cdot \delta(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} u(0, x_2) \cdot \theta(x_2) + 2 \cos \alpha \cdot \delta(x_1, x_2) u(0, 0) + \left[ a \sin^2 \alpha \cdot u(x_1, x_2) \right]_0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Juntando los términos del tipo  $[\cdot]_0$ , obtenemos (3.7) ■

## 4 Expresión de $d_0$ por medio de los datos de Cauchy

Ahora vamos a aplicar el Teorema 3.1 a las soluciones homogéneas de la ecuación de Helmholtz en  $K_-$ .

Supongamos que  $u \in C^\infty(\overline{K_-})$  satisface la ecuación de Helmholtz, es decir,

$$\mathcal{H}u(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in K_- \quad (4.1)$$

Aplicando el Teorema 3.1 a la función  $u_0(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , de (3.2) obtenemos:

$$\mathcal{H}u_0(x_1, x_2) = d_0(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (4.2)$$

donde  $d_0$  se define en (3.8). Introducimos los datos de Cauchy, los cuales juegan un gran papel en el método de las características complejas [6].

**Definición 4.1** (Datos de Cauchy)

Sea

$$u(x_1, 0)\theta(x_1) := v_1^0(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad (4.3)$$

$$u(0, x_2)\theta(x_2) := v_2^0(x_2), \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

$v_1^0$ ,  $v_2^0$  se llaman los *datos de Dirichlet* de la función  $u(x_1, x_2)$  sobre  $\partial K_-$ .  
Sea, también

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u(0, x_2)\theta(x_2) := v_2^1(x_2), \quad x_2 \in \mathbb{R}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, 0)\theta(x_1) := v_1^1(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

$v_1^1$ ,  $v_2^1$  se llaman los *datos de Neumann* de la misma función  $u(x)$ .

$$v_\ell^\beta(x_\ell), \quad \ell = 1, 2, \quad \beta = 0, 1 \quad (4.5)$$

se llaman los datos de Cauchy de la función  $u(x)$  sobre la frontera de  $K_-$ .

**Proposición 4.2** En los términos de los datos de Cauchy la función  $d_0(x)$  tiene la forma:

$$\begin{aligned} d_0(x_1, x_2) &= -\delta(x_1)v_2^1(x_2) - \delta(x_2)v_1^1(x_1) - \delta'(x_1)v_2^0(x_2) - \delta'(x_2)v_1^0(x_1) \\ &+ 2 \cos \alpha \cdot \delta(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} v_2^0(x_2) + 2 \cos \alpha \cdot \delta(x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} v_1^0(x_1) - 2 \cos \alpha \cdot \delta(x_1, x_2) \cdot v_0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde

$$u(0, 0) = v_0.$$

**Demostación.**

Solamente fálta expresar

$$\frac{\partial}{\partial x_2} u(0, x_2) \cdot \theta(x_2) \quad y \quad \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, 0) \cdot \theta(x_1)$$

en los términos de dichos datos, ya que todas las otras funciones se expresan por medio de (4.5) directamente.

Aplicando (3.4) a la función  $\frac{d}{dx_2} v_2^0(x_2)$ , obtenemos

$$\frac{d}{dx_2} v_2^0(x_2) = \left[ \frac{d}{dx_2} u(0, x_2) \right]_0 + \delta(x_2) \cdot u(0, 0) = \frac{d}{dx_2} u(0, x_2) \cdot \theta(x_2) + \delta(x_2) u(0, 0). \quad (4.7)$$

Esto implica que

$$\frac{d}{dx_2} u(0, x_2) \cdot \theta(x_2) = \frac{d}{dx_2} v_2^0(x_2) - \delta(x_2) \cdot u(0, 0). \quad (4.8)$$

Similarmente

$$\frac{d}{dx_1} u(x_1, 0) \cdot \theta(x_1) = \frac{d}{dx_1} v_1^0(x_1) - \delta(x_1) \cdot u(0, 0). \quad (4.9)$$

Sustituyendo (4.4), (4.8), (4.9), en (3.8) podemos reescribir ésta identidad en términos de los datos de Cauchy, y obtener (4.6). La proposición 4.2 queda demostrada. ■

Nuestro siguiente paso es pasar a la transformada de Fourier en la identidad (4.2) en el sentido de distribuciones.

## 5 Transformada de Fourier

Introducimos los espacios de Schwartz  $S(\mathbb{R}^n)$  y  $S'(\mathbb{R}^n)$  (veáse p.e. [13]).

**Definición 5.1** *El espacio  $S(\mathbb{R}^n)$  de Schwartz de las funciones rápidamente decrecientes se define como el conjunto de las funciones  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tales que para cualesquiera  $\alpha \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \dots \times \mathbb{N}_0$ ,  $N \in \mathbb{R}$ , existe  $C_N$ :*

$$| (1 + |x|)^N D^\alpha \varphi(x) | \leq C_N, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$\varphi_k \longrightarrow 0$  en  $S(\mathbb{R}^n)$  si y solo si para todo  $\alpha$  y para todo  $N$ ,  $| (1 + |x|)^N D^\alpha \varphi_k(x) | \longrightarrow 0$ , uniformemente en  $\mathbb{R}^n$ , cuando  $k \longrightarrow \infty$

**Definición 5.2** *El espacio  $S'(\mathbb{R}^n)$  se define como el espacio dual a  $S$ , es decir, como el espacio de todos los funcionales lineales continuos sobre  $S$ , al cual llamamos el espacio de distribuciones temperadas de Schwartz.*

Las acciones de la distribución  $u \in S'(\mathbb{R}^n)$  a la función  $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ , también como en la Sección 3, lo denotaremos como  $\langle u, \psi \rangle$ .

Es bien conocido que  $S'(\mathbb{R}^n)$  es un subespacio de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  y por lo tanto se pueden diferenciar todas las distribuciones en  $S'(\mathbb{R}^n)$  (véase la sección 3); el resultado de diferenciación también pertenece a  $S'(\mathbb{R}^2)$ .

Las distribuciones de  $S'(\mathbb{R}^n)$  se pueden multiplicar por las funciones suaves temperadas.

**Definición 5.3** Sea  $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  y para cada  $\alpha \in \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$  existe  $k_\alpha \in \mathbb{N}$ :

$$|D^\alpha \varphi(x)| \leq C_{\alpha,k}(1 + |x|)^{k_\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.1)$$

El producto  $\varphi u$  se define como

$$\langle \varphi u, \psi \rangle = \langle u, \varphi \psi \rangle \quad (5.2)$$

para toda  $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ . En vista de (5.1), (5.2) esta bien definida por la Definición 5.1.

Damos la definición de la transformada de Fourier.

**Definición 5.4** Sea  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  entonces su transformada de Fourier se define como:

$$F_{x \rightarrow \xi}[\varphi(x)](\xi) := \widehat{\varphi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x \rangle} \varphi(x) dx, \quad (5.3)$$

$$x, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \xi, x \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$$

La transformada de Fourier de las funciones de  $S(\mathbb{R}^n)$  también se definen por la misma definición.

Es evidente que para  $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$F[\alpha\varphi + \psi] = \alpha F[\varphi] + F[\psi], \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad F[\varphi(-x)] = \widehat{\varphi}(-\xi), \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (5.4)$$

La Definición 5.4 sirve también para  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$

**Definición 5.5** La transformada de Fourier inversa  $F_{\xi \rightarrow x}^{-1}$  actúa por la fórmula

$$F_{\xi \rightarrow x}^{-1}[\varphi(\xi)](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \varphi(\xi) d\xi, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

La Definición 5.4 y la Definición 5.5 implican que

$$F_{x \rightarrow \xi}[\varphi(x)](\xi) = (2\pi)^n F_{x \rightarrow \xi}^{-1}[\varphi(x)](-\xi). \quad (5.5)$$

El siguiente teorema es principal en Análisis Harmónico.

**Teorema 5.6** [2], [13].

i) La transformada de Fourier transforma el espacio  $S(\mathbb{R}^n)$  en si mismo uno-a-uno, recíprocamente y continuamente.

ii) La transformada de Fourier inversa, definida por la Definición 5.5 es el operador inverso para  $F$ , es decir, se cumplen las siguientes fórmulas, las cuales se llaman fórmulas de inversión.

$$F^{-1}F[\varphi] = \varphi, \quad FF^{-1}[\psi] = \psi, \text{ para toda } \varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n). \quad (5.6)$$

**Lema 5.7** Para  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$F_{\xi \rightarrow x} F_{x \rightarrow \xi}[\varphi(x)] = (2\pi)^n \varphi(-x). \quad (5.7)$$

**Demostración.**

Usando (5.3), (5.5) y (5.6), obtenemos

$$F_{\xi \rightarrow x}[F_{x \rightarrow \xi}[\varphi(x)]](x) = (2\pi)^n F_{\xi \rightarrow x}[F_{x \rightarrow \xi}^{-1}[\varphi(x)](-\xi)] = \varphi(-x). \quad (5.8)$$

■

Existe la transformada de Fourier,  $F : S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ , que es una transformación uno-a-uno y recíprocamente continua en topología débil en  $S'(\mathbb{R}^n)$ .

**Definición 5.8** Para  $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ , su transformada de Fourier se define como:

$$F[u] = \hat{u} : \langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \quad (5.9)$$

Es bien conocido [13] que  $S(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$  y las transformadas de Fourier dadas por la Definición 5.4 y por la fórmula (5.9) coinciden sobre  $S(\mathbb{R}^n)$ .

Las siguientes propiedades de ésta transformación tienen lugar para  $u, v \in S'(\mathbb{R}^n)$ .

i) *Linealidad*

$$F[\alpha u + v] = \alpha F[u] + F[v], \quad \alpha \in \mathbb{C}; \quad (5.10)$$

ii)

$$F_{x \rightarrow \xi} \left[ \frac{\partial^{\alpha_1 \dots \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x_1, \dots, x_n) \right] = (-i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (-i\xi_n)^{\alpha_n} \hat{u}(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad (5.11)$$

$$n \geq 1, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

iii)

$$F_{x \rightarrow \xi} [\delta(x)](\xi) = 1(\xi), \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n; \quad (5.12)$$

iv) *La igualdad de Parseval se cumple: para  $u \in S'(\mathbb{R}^2)$ ,  $\psi \in S(\mathbb{R}^2)$*

$$\langle u(x), \psi(x) \rangle = (2\pi)^n \langle \hat{u}(\xi), \hat{\psi}(-\xi) \rangle. \quad (5.13)$$

**Demostración.**

Por (5.7) y por (5.9) tenemos:

$$\langle \hat{u}(\xi), \hat{\psi}(-\xi) \rangle = \langle u(x), \hat{\psi}(-x) \rangle = \langle u(x), (2\pi)^n \psi(x) \rangle = (2\pi)^n \langle u(x), \psi(x) \rangle. \quad (5.14)$$

■

Ahora, ya podemos pasar a la transformada de Fourier en la ecuación (4.2).



## 6 Transformada de Fourier de la ecuación (4.2)

Consideremos la ecuación (4.1). Suponemos que  $u$  y  $\nabla u$  crecen lentamente, es decir, existe  $N \in \mathbb{R}$  tal que

$$|u(x)| \leq C(1 + |x|)^N, x \in \overline{K_-} \quad y \quad |\nabla u(x)| \leq C(1 + |x|)^N, x \in \overline{K_-}.$$

Esto implica, en particular, que

$$u_0 := [u]_0 \in S'(\mathbb{R}^2), v_\ell^\beta(x_\ell) \in S'(R), \quad \ell = 1, 2, \beta = 0, 1 \text{ y } d_0 \in S'(\mathbb{R}^2), \quad (6.1)$$

donde  $v_\ell^\beta$  se definen en la Definición 4.1 y  $d_0$  se define en (4.6)

Ahora podemos aplicar la transformada de Fourier en  $S'(\mathbb{R}^2)$ , usando la Definición 5.3.

Usando las propiedades (5.10)-(5.12) obtenemos para  $\mathcal{H}$  de (2.8)

$$F_{x \rightarrow \xi}[\mathcal{H}u_0(x)](\xi_1, \xi_2) = \left(-\xi_1^2 - \xi_2^2 + 2\xi_1\xi_2 \cos \alpha + a^2 \sin^2 \alpha\right) \widehat{u}_0(\xi_1, \xi_2). \quad (6.2)$$

**Definición 6.1** *El polinomio (complejo)*

$$\mathcal{H}(z_1, z_2) = -z_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_2 \cos \alpha + a^2 \sin^2 \alpha, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \quad (6.3)$$

se llama el símbolo del operador diferencial  $\mathcal{H}$  de (2.8).

Ahora encontramos

$$\widehat{d}_0(\xi_1, \xi_2) = F_{x \rightarrow \xi}[d_0(x)](\xi).$$

De (4.6) y usando las propiedades (5.10)-(5.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{d}_0(\xi_1, \xi_2) &= \widehat{v}_1^0(\xi_1)(i\xi_2 - 2i\xi_1 \cos \alpha) - \widehat{v}_1^1(\xi_1) \\ &+ \widehat{v}_2^0(\xi_2)(i\xi_1 - 2i\xi_2 \cos \alpha) - \widehat{v}_2^1(\xi_2) - 2v_0 \cos \alpha, \quad \xi \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

De esta manera, aplicando la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación (4.2) y usando (6.2) obtenemos la ecuación algebraica

$$\mathcal{H}(\xi) \cdot \widehat{u}_0(\xi) = \widehat{d}_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad (6.5)$$

donde  $\widehat{d}_0$  se determina en (6.4).

## 7 El símbolo del operador diferencial estrictamente elíptico

La idea principal del uso de la transformada de Fourier en la teoría de las ecuaciones diferenciales consiste en el cambio de la ecuación diferencial por la ecuación algebraica del tipo (6.5).

De aquí la transformada de Fourier de la solución  $u_0(x)$  (y por lo tanto la misma solución  $u_0(x)$  por el Teorema 5.6) se encuentra a través de la división de  $\widehat{d}_0$  por  $\mathcal{H}$ . Pero para esto es necesario que  $\mathcal{H}(\xi) \neq 0$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^2$ . En esta sección demostraremos que el símbolo  $\mathcal{H}$  no se anula en una "franja" compleja de  $\mathbb{R}^2$ . Esto nos permite analizar los datos de Cauchy  $v_\ell^\beta$ .

En lo que sigue, vamos a suponer, que en (6.3)  $a = \omega^2$ . Ya que  $a \notin \overline{R^+}$  por (1.2), entonces  $\omega \notin \mathbb{R}$ . Suponemos para concreción

$$\omega := \omega_1 + i\omega_2, \quad \omega_1 \geq 0, \quad \omega_2 \geq 0 \quad (7.1)$$

Ahora el símbolo del operador  $\mathcal{H}$  en (6.3) adquiere la forma:

$$\mathcal{H}(z_1, z_2) = -z_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_2 \cos \alpha + \omega^2 \sin^2 \alpha. \quad (7.2)$$

**Proposición 7.1** *Existe  $\delta := \delta(\omega, \alpha)$  tal que para  $|\operatorname{Im} z_1| < \delta$ ,  $|\operatorname{Im} z_2| < \delta$  se cumple*

$$\mathcal{H}(z_1, z_2) \neq 0. \quad (7.3)$$

donde  $\mathcal{H}(z_1, z_2)$  se define en (6.3).

**Demostración.** Sea

$$\mathcal{H}_1(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 \cos \alpha$$

y

$$z_1 = \xi_1 + i\tau_1, \quad z_2 = \xi_2 + i\tau_2, \quad \tau_{1,2}, \xi_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$\operatorname{Re} \mathcal{H}_1(z_1, z_2) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2 \cos \alpha - \tau_1^2 - \tau_2^2 + 2\tau_1\tau_2 \cos \alpha.$$

Usando la desigualdad

$$2|\xi_1\xi_2| \leq \xi_1^2 + \xi_2^2,$$

obtenemos que:

$$2|\xi_1\xi_2 \cos \alpha| \leq (\xi_1^2 + \xi_2^2) |\cos \alpha|. \quad (7.4)$$

Luego, por la desigualdad del triángulo

$$|\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2 \cos \alpha| \geq \xi_1^2 + \xi_2^2 - 2|\xi_1\xi_2 \cos \alpha| \geq (\xi_1^2 + \xi_2^2)(1 - |\cos \alpha|)$$

Notemos que para  $\pi < \alpha < 2\pi$ ,  $|\cos \alpha| < 1$ , por lo tanto existe  $R := R(\omega)$  tal que

$$|\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2 \cos \alpha| \geq 2|\omega|^2 |\sin^2 \alpha| \quad (7.5)$$

para  $|\xi| \geq R$ . Además existe  $\delta_1 := \delta_1(\omega, \alpha) > 0$  tal que para  $|\tau_1| \leq \delta_1$ ,  $|\tau_2| < \delta_1$

$$|\tau_1^2 + \tau_2^2 + 2\tau_1\tau_2 \cos \alpha| < \frac{1}{2}|\omega^2 \sin^2 \alpha| \quad (7.6)$$

por continuidad. (7.3), (7.4) implican por la desigualdad del triángulo que :

$$|\operatorname{Re} \mathcal{H}_1(z_1, z_2)| \geq \frac{3}{2}|\omega^2 \sin^2 \alpha|, \quad |\operatorname{Re} z| \geq R, \quad |\tau_1| < \delta_1, \quad |\tau_2| < \delta_1. \quad (7.7)$$

De aquí,

$$|\mathcal{H}_1(z_1, z_2)| \geq \frac{3}{2}|\omega^2 \sin^2 \alpha|, \quad (7.8)$$

para los mismos  $z \in \mathbb{C}^2$ . Esto implica que

$$|\mathcal{H}_1(z_1, z_2) - \omega^2 \sin^2 \alpha| \geq \frac{1}{2}|\omega|^2 \sin^2 \alpha, \quad |\xi| \leq R, \quad |\tau_1| < \delta_1, \quad |\tau_2| < \delta_1. \quad (7.9)$$

Por lo tanto  $\mathcal{H}(z_1, z_2) \neq 0$  para estos  $z$ .

Demostremos que  $\mathcal{H}(z) \neq 0$  para  $|\xi_{1,2}| \leq R$ ,  $|\tau_{1,2}| < \delta_2$ .

Notemos que

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2 \cos \alpha - \omega^2 \sin^2 \alpha \neq 0 \quad (7.10)$$

para  $\xi \in \mathbb{R}^2$ . En efecto,

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2 \cos \alpha - \omega^2 \sin^2 \alpha = 0$$

implica que

$$\xi_1 = \xi_2 \cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{\omega^2 - \xi_2^2}. \quad (7.11)$$

Para  $\operatorname{Im} \omega \neq 0$ ,  $\xi_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\sqrt{\omega^2 - \xi_2^2} \notin \mathbb{R}$ .

En efecto,  $\sqrt{\omega^2 - \xi_2^2} \in \mathbb{R}$  implica que  $\omega^2 \in \overline{\mathbb{R}}_+$  lo cuál significa que  $\operatorname{Im} \omega = 0$ . Pero esto contradice a la suposición. Por lo tanto, para  $\xi_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\xi_1 \notin \mathbb{R}$ , entonces (7.10) se cumple.

Ahora sea

$$M := \min_{|\xi| \leq R} |\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2 \cos \alpha - \omega^2 \sin^2 \alpha| > 0. \quad (7.12)$$

Por la continuidad de  $\mathcal{H}(z_1, z_2)$  existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$|\mathcal{H}(z_1, z_2)| \neq 0, \quad 0 \leq |\operatorname{Im} z_{1,2}| < \delta_2, \quad |\operatorname{Re} z| \leq R.$$

Tomando

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$$

obtenemos (7.2). ■

**Corolario 7.2** *Existe  $\delta > 0$  tal que para algún  $C > 0$*

$$|\mathcal{H}(z_1, z_2)| \geq C \tag{7.13}$$

para todo  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ ,  $|\operatorname{Im} z_1| < \delta$ ,  $|\operatorname{Im} z_2| < \delta$ .

**Demostración.**

De (7.9) tenemos que  $\exists R > 0$ ,  $\delta > 0$  tal que:

$$|\mathcal{H}(z_1, z_2)| \geq C(\omega, \alpha), \quad |\xi| \leq R, \quad |\tau_1| \leq \delta_1, \quad |\tau_2| \leq \delta_2$$

Además, de (7.12) se sigue, que  $\exists \delta_2$ :

$$|\mathcal{H}(z_1, z_2)| \geq \frac{M}{2}$$

para  $|\xi| \leq R$ ,  $|\tau_1| < \delta_1$ ,  $|\tau_2| < \delta_2$ . De éstas dos desigualdades obtenemos (7.13) ■

## 8 Expresión de la solución de la ecuación (4.1) a través de los datos de Cauchy.

Ahora podemos aplicar la derivación, la cual se ha mencionado en la Sección 5.

Aplicando la transformada de Fourier a la identidad (4.2) y usando (6.2), (6.3) obtenemos

$$\mathcal{H}(\xi_1, \xi_2) \widehat{u}_0(\xi_1, \xi_2) = \widehat{d}_0(\xi_1, \xi_2), \quad (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (8.1)$$

donde  $\widehat{d}_0$  se define en (6.4). La desigualdad (7.10) implica que,  $\mathcal{H}(\xi_1, \xi_2) \neq 0 \forall \xi \in \mathbb{R}^2$ , si  $\text{Im } \omega \neq 0$ . Entonces podemos dividir ambas partes en (8.1) sobre  $\mathcal{H}(\xi)$  y obtener la siguiente expresión para  $\widehat{u}_0(\xi)$

$$\widehat{u}_0(\xi) = \frac{\widehat{d}_0(\xi)}{\mathcal{H}(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^2. \quad (8.2)$$

Aquí la división se entiende en el sentido generalizado como en la Definición 5.3, porque  $\frac{1}{\mathcal{H}(\xi)} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  y  $\left| \frac{1}{\mathcal{H}(\xi)} \right| \leq C$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^2$ . Por el Corolario 7.2.

## 9 Teoría de Paley-Wiener

El símbolo  $\mathcal{H}(z)$  no tiene las características reales, por lo tanto (8.1) no proporciona ninguna relación entre los datos de Cauchy  $v_\ell^\beta$  que fueron introducidos en  $\widehat{d}_0$ . Pero en un área compleja, por ejemplo en  $\mathbb{C}K_+^* = \mathbb{R}^2 \oplus iK_+$ ,  $\mathcal{H}(z)$  tiene ceros. Estos ceros son *las características complejas* del símbolo. La función  $\widehat{d}_0(\xi_1, \xi_2)$  también se extiende a esta área analíticamente, de ser así, nosotros hubieramos obtenido la relación buscada. Pero ésto no es así, porque  $\text{supp } u_0 \not\subset \overline{K_+}$ , y así el Teorema de Paley-Wiener no se cumple y  $u_0(\xi_1, \xi_2)$  en general no se extiende a  $\mathbb{C}K_+^*$ . No obstante éste teorema se usa. En esta sección recordaremos algunos hechos de esta teoría [2],[13].

**Definición 9.1** Sea  $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ . Decimos que  $u \equiv 0$  en un conjunto abierto  $O \subset \mathbb{R}^n$  si para cada  $\psi \in C_0^\infty(O)$

$$\langle u, \psi \rangle = 0$$

La unión de todos los conjuntos abiertos donde  $u$  es igual a cero se llama el *conjunto de cero*. El complemento de este conjunto se llama el soporte de  $u$  y se denota como  $\text{supp } u$ .

**Observación.** Cuando  $u \in S'(\mathbb{R}^n)$  es una función continua, entonces  $\text{supp } u = \overline{\{x : u(x) \neq 0\}}$ . Denotemos para  $z \in \mathbb{C}^2$ ,  $\tau \in \mathbb{R}^2$ ,  $|z| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$ ,  $|\tau| = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$ .

**Teorema 9.2** (Paley-Wiener)

Sea  $u \in S'(\overline{\mathbb{R}^+})$  ó  $u \in S'(\overline{K_+})$ . Entonces

i) Su transformada de Fourier  $\hat{u}(\xi)$  admite la extensión  $\tilde{u}(z)$  en  $\mathbb{C}^+$  ó  $\mathbb{C}K_+^*$ ,  $z = \xi + i\tau$ , tal que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \tilde{u}(\xi + i\tau) = \hat{u}(\xi) \quad (9.1)$$

en  $S'(\mathbb{R})$  ó en  $S'(\mathbb{R}^2)$

ii) La función  $\tilde{u}(z)$  admite la cota

$$|\tilde{u}(z)| \leq C(1 + |z|)^\eta |\tau|^{-\nu} \text{ para algunos } \tau, \nu \in \overline{\mathbb{R}_+}. \quad (9.2)$$

Apliquemos éste teorema para extender analíticamente los sumandos de  $\hat{d}_0(\xi_1, \xi_2)$ .

Usando el teorema de Paley-Wiener podemos extender primero analíticamente las funciones  $\hat{v}_\ell^\beta(\xi_\ell) \in S'(\overline{\mathbb{R}^+})$  de (4.5), para  $\ell = 1, 2$ ,  $\beta = 0, 1$  a las funciones  $\tilde{v}_\ell^\beta(z_\ell) \in H(\mathbb{C}^+)$ . Notemos que (6.1) y (9.2) implican las cotas:

$$|v_\ell^\beta(z_\ell)| \leq C(1 + |z_\ell|)^{n_{\ell,\beta}} |\tau_\ell|^{-\nu_{\ell,\beta}}, \quad z_\ell \in \mathbb{C}^+, \quad z_\ell = \xi_\ell + i\tau_\ell, \quad \ell = 1, 2, \quad \beta = 0, 1, \quad \mu_{\ell,\beta}, \nu_{\ell,\beta} \in \overline{\mathbb{R}^+}. \quad (9.3)$$

Esto permite también extender analíticamente la función  $\hat{d}_0(\xi_1, \xi_2)$  de (6.4) a la función:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_0(z_1, z_2) = & \tilde{v}_1^0(z_1)(iz_2 - 2iz_1 \cos \alpha) - \tilde{v}_1^1(z_1) \\ & + \tilde{v}_2^0(z_2)(iz_1 - 2iz_2 \cos \alpha) - \tilde{v}_2^1(z_2) - 2v_0 \cos \alpha, \\ & z_1, z_2 \in \mathbb{C}K_+^* \end{aligned} \quad (9.4)$$

tal que  $\tilde{d}_0(z_1, z_2) \rightarrow \hat{d}_0(\xi_1, \xi_2)$ ,  $\text{Im } z_\ell \rightarrow 0^+$ ,  $\ell = 1, 2$ .

Las cotas (9.3) implican ahora la cota para  $\tilde{d}_0(z_1, z_2)$ :

$$|\tilde{d}_0(z_1, z_2)| \leq C(1 + |z|)^\eta |\tau|^{-\nu}, \quad z \in \mathbb{R}^2 \oplus iK_+, \quad \mu, \nu \in \overline{\mathbb{R}^+}. \quad (9.5)$$

Notemos que

$$\tilde{d}_0(z_1, z_2) = \tilde{v}_1(z_1, z_2) + \tilde{v}_2(z_1, z_2), \quad (9.6)$$

donde

$$\tilde{v}_1(z) = \tilde{v}_1^0(z_1)(iz_2 - 2iz_1 \cos \alpha) - \tilde{v}_1^1(z_1) - v_0 \cos \alpha, \quad z \in \mathbb{C}^+ \times \mathbb{C} \quad (9.7)$$

$$\tilde{v}_2(z) = \tilde{v}_2^0(z_2)(iz_1 - 2iz_2 \cos \alpha) - \tilde{v}_2^1(z_2) - v_0 \cos \alpha, \quad z \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^+. \quad (9.8)$$

Estas funciones  $\tilde{v}_1(z)$  y  $\tilde{v}_2(z)$  satisfacen las cotas:

$$|\tilde{v}_1(z_1, z_2)| \leq C(1 + |z|)^{\eta_1} |\tau_1|^{-\nu_1}, \quad z \in \mathbb{C}^+ \quad (9.9)$$

$$|\tilde{v}_2(z_1, z_2)| \leq C(1 + |z|)^{\eta_2} |\tau_2|^{-\nu_2}, \quad z \in \mathbb{C}^+ \quad (9.10)$$

En lo que sigue estas funciones van a jugar un gran papel. Resulta que, similarmente al caso del ángulo convexo, se puede conectar los datos de Cauchy, escribiendo una ecuación de conexión. Para esto necesitamos introducir la superficie de Riemann de los ceros del símbolo  $\mathcal{H}(z_1, z_2)$ .

## 10 Superficie de Riemann y la cubierta universal

Consideremos el símbolo  $\mathcal{H}$  de (7.2).

Notaremos por  $V = V(\omega)$  el conjunto de las raíces complejas en  $\mathbb{C}$  de  $\mathcal{H}$ ;

$$V(\omega) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1^2 + z_2^2 - 2 \cos \alpha z_1 z_2 - \omega^2 \sin^2 \alpha = 0\}. \quad (10.1)$$

En geometría algebraica, se sabe que [1] si  $q$  es un polinomio irreducible de segundo orden, entonces la superficie de Riemann de las raíces de  $q$  son isomorfas al cilindro. Por lo tanto, tales superficies tienen cubiertas universales isomorfas a  $\mathbb{C}$ . Para  $V$ , denotemos por  $\check{V}$  a esta cubierta universal. El paso a seguir ahora es encontrar una parametrización de  $\check{V}$  que sea adecuada para nuestras metas.

Notemos que para  $(z_1, z_2) \in V$ :

$$(z_1 \sin \alpha)^2 + (z_2 - z_1 \cos \alpha)^2 = z_1^2 + z_2^2 - 2 \cos \alpha z_1 z_2 = \omega^2 \sin^2 \alpha,$$

esto nos motiva a definir:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 := \omega \sin \varphi \\ z_2 - z_1 \cos \alpha := \omega \sin \alpha \cos \varphi \end{array} \right\} \mid \varphi \in \mathbb{C} \quad (10.2)$$

la cual resulta ser una parametrización de  $V$ , con parámetro  $\varphi$ . Es conveniente hacer un cambio de variable en el parámetro, consideremos  $\mu = i\varphi$ , de tal forma que por una parte:

$$z_1(\mu) = -i\omega \sinh \mu, \quad (10.3)$$

por otra parte, sustituyendo esta última expresión en la segunda ecuación de (10.2) obtenemos que:

$$z_2(\mu) = -i\omega \sinh(\mu + i\alpha) \quad (10.4)$$

Entonces, tenemos la siguiente parametrización de  $V$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1(\mu) := -i\omega \sinh \mu \\ z_2(\mu) := -i\omega \sinh(\mu + i\alpha) \end{array} \right\} \mid \mu \in \check{V} \cong \mathbb{C}. \quad (10.5)$$

Denotemos por  $p$  a la proyección  $p : \check{V} \longrightarrow V$  definida mediante:

$$p(\mu) := (z_1(\mu), z_2(\mu)). \quad (10.6)$$

También, consideremos las proyecciones  $p_l : \check{V} \longrightarrow \mathbb{C}$  definidas por:

$$p_l(\mu) = z_l(\mu) \quad l = 1, 2. \quad (10.7)$$

## 11 Levantamiento de las transformadas de Fourier de los datos de Cauchy

Nuestra meta ahora es la de “levantar” las funciones  $\tilde{v}_l^\beta(z_l)$  a la cubierta universal  $\check{V}$ , para ello usaremos las proyecciones (10.5). Dado que el dominio de  $\tilde{v}_l^\beta(z_l)$  es  $\mathbb{C}^+$ , entonces necesitamos introducir las regiones en  $\check{V}$  que corresponden a las imágenes inversas de  $\mathbb{C}$  bajo  $p_l$ , es decir, encontrar:

$$p_l^{-1}(\mathbb{C}^+), \quad l = 1, 2.$$

**Definición 11.1** Para  $l = 1, 2$ , definimos  $\mathbb{C}_l := \{\mu \in \mathbb{C} : p_l(\mu) \in \mathbb{C}^+\}$ .

Sean  $\check{V}_1^+$  la componente conexa de  $\mathbb{C}_1$  que contiene a  $\mu = \frac{i\pi}{2}$  y  $\check{V}_2^+$  la componente conexa de  $\mathbb{C}_2$  que contiene a  $\mu = i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ . (10.5) implica que  $\mu \in \check{V}_1^+$  si y sólo si

$$\operatorname{Im}(-i\omega \sinh \mu) > 0 \tag{11.1}$$

y  $\mu \in \check{V}_2^+$  si y sólo si

$$\operatorname{Im}(-i\omega \sinh(\mu + i\alpha)) > 0. \tag{11.2}$$

En otras palabras

$$\check{V}_1^+ = \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z_1(\mu) > 0\}$$

$$\check{V}_2^+ = \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z_2(\mu) > 0\}.$$

No es difícil notar que para  $l = 1, 2$   $\partial\check{V}_l^+ = \check{\Gamma}_l^+ \cup \check{\Gamma}_l^-$ , donde:

$$\begin{aligned} \check{\Gamma}_1^+ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z_1(\mu) = 0, \quad i\pi \in \check{\Gamma}_1^+\} \\ \check{\Gamma}_1^- &= \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z_1(\mu) = 0, \quad 0 \in \check{\Gamma}_1^-\} \end{aligned} \tag{11.3}$$

$$\begin{aligned} \check{\Gamma}_2^+ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z_2(\mu) = 0, \quad -i\alpha \in \check{\Gamma}_2^+\} \\ \check{\Gamma}_2^- &= \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z_2(\mu) = 0, \quad i(\pi - \alpha) \in \check{\Gamma}_2^-\}. \end{aligned}$$



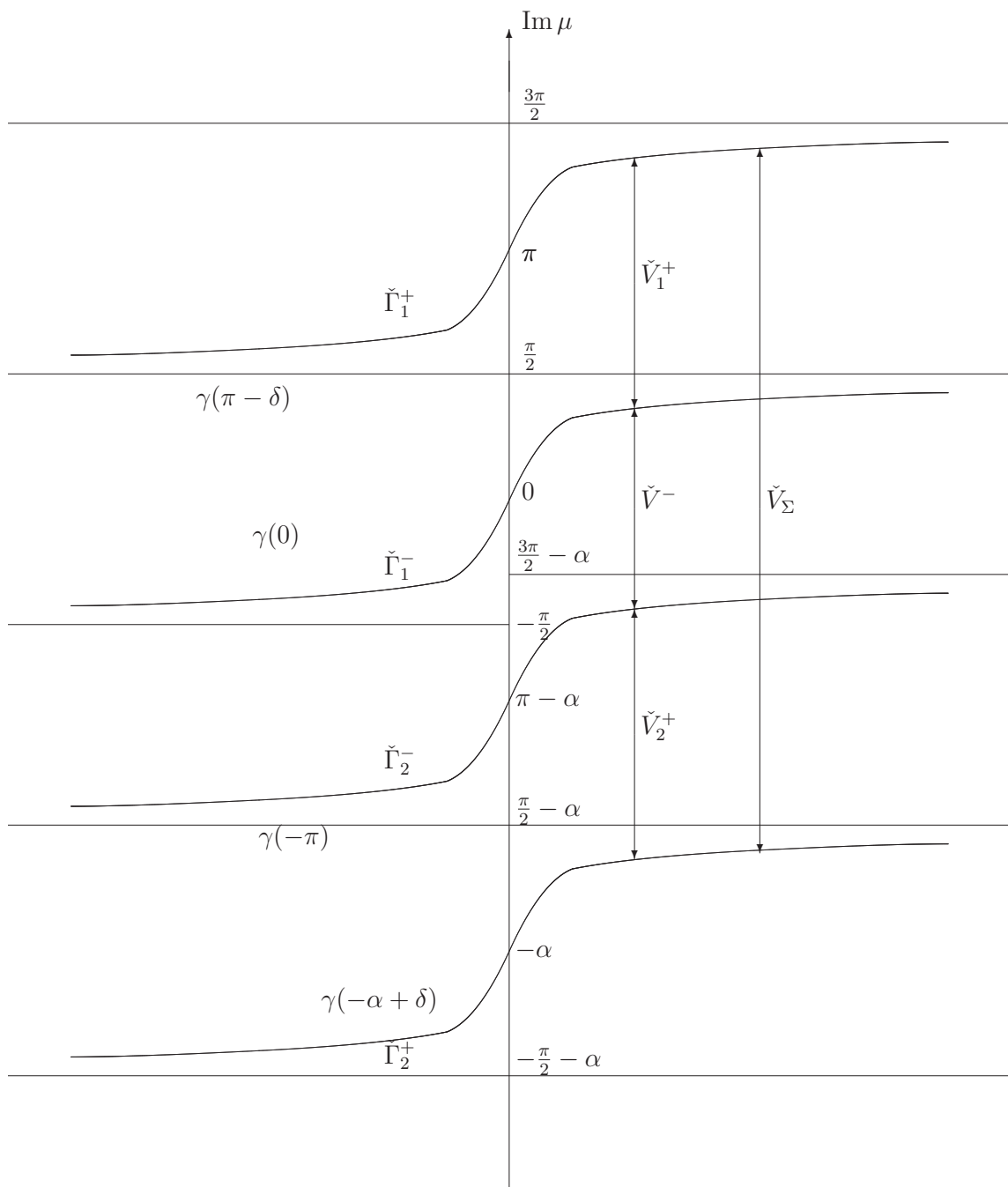


Figura 3

Notemos que si  $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ , entonces para  $\omega = \omega_1 + i\omega_2$  y  $z_1(\mu)$  definido en (10.3)

$$\operatorname{Im} [z_1(\mu)] = \omega_2 \cosh \mu_1 \sin \mu_2 - \omega_1 \sinh \mu_1 \cos \mu_2.$$

De aquí  $\operatorname{Im} [z_1(\mu_1 + i\mu_2)] = 0$  si y sólo si  $\tan \mu_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} \tanh \mu_1$ , así que:

$$\check{\Gamma}_1^- = \left\{ \mu = \mu_1 + i\mu_2 \mid \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \mu_2 = \arctan \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} \tanh \mu_1 \right) \right\}.$$

Además no es difícil convencerse de que los cuatro contornos son los mismos salvo traslaciones, de hecho:

$$\check{\Gamma}_1^+ = \check{\Gamma}_1^- + i\pi, \quad \check{\Gamma}_2^+ = \check{\Gamma}_1^- - i\alpha, \quad \check{\Gamma}_2^- = \check{\Gamma}_2^+ + i\pi.$$

Para  $\nu \in \mathbb{R}$ , definimos el contorno:

$$\gamma(\nu) \equiv \Gamma_1^- + i\nu.$$

De aquí que los contornos (11.3), se representan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \check{\Gamma}_1^+ &= \gamma(\pi), & \check{\Gamma}_1^- &= \gamma(0), \\ \check{\Gamma}_2^+ &= \gamma(-\alpha), & \check{\Gamma}_2^- &= \gamma(\pi - \alpha). \end{aligned}$$

De manera análoga, para  $l = 1, 2$ , definimos la región  $\check{V}_l^-$  como la componente conexa del conjunto  $\{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z_l(\mu) < 0\}$  que contiene al punto  $\mu = -\frac{i\pi}{2}$ . Sean:  $\check{V}^- := \check{V}_1^- \cap \check{V}_2^-$  y  $\check{V}_\Sigma := \check{V}_1^+ \cup \overline{\check{V}^-} \cup \check{V}_2^+$ . (Ver Fig.3, que corresponde al caso  $\operatorname{Re} \mu > 0$ ).

Usando las definiciones de  $\check{V}_l^-, \check{V}_l^+, \check{V}^-$  y  $\check{V}_\Sigma$ , podemos representar las regiones a través de los contornos  $\gamma(\nu)$ :

$$\begin{aligned} \check{V}_1^+ &= (\gamma(0), \gamma(\pi)), & \check{V}_2^+ &= (\gamma(-\alpha), \gamma(\pi - \alpha)) \\ \check{V}_1^- &= (\gamma(\pi - \alpha), \gamma(0)), & \check{V}_2^- &= (\gamma(\pi - \alpha), \gamma(2\pi - \alpha)) \\ \check{V}^- &= (\gamma(\pi - \alpha), \gamma(0)), & \check{V}_\Sigma &= (\gamma(-\alpha), \gamma(\pi)), \end{aligned}$$

donde para  $\gamma_1$ , que está por abajo de  $\gamma_2$ ,  $(\gamma_1, \gamma_2) := \{\mu : \gamma_1 < \mu < \gamma_2\}$  y el símbolo  $A \prec B$  significa que el conjunto  $A$  está por debajo del conjunto  $B$ .

Dado un abierto  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , denotamos por  $H(\Omega)$  al conjunto de todas las funciones analíticas en  $\Omega$ .

Sea  $v(z_l) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$ ,  $l = 1, 2$ . Definimos el levantamiento  $\check{v}(\mu)$  de  $\check{v}(z_l)$  como la composición:

$$\check{v}(\mu) = v(z_l(\mu)), \tag{11.4}$$

donde  $z_l(\mu)$  está definida en (10.5).

La analiticidad de las funciones  $\tilde{v}_l^\beta$  en  $\mathbb{C}^+$  implica la analiticidad de  $\check{v}_l^\beta$  en  $\check{V}_l^+$  para  $l = 1, 2$ . En particular:

$$\check{v}_l^\beta(\mu) \in H(\check{V}_l^+), \quad l = 1, 2, \quad \beta = 0, 1. \quad (11.5)$$

Usando (10.3), también podemos calcular el levantamiento de (9.7), (9.8). De hecho, obtenemos las expresiones:

$$\begin{aligned} \check{v}_1(\mu) &= -\check{v}_1^1(\mu) + \omega \sinh(\mu - i\alpha) \check{v}_1^0(\mu) - v(0) \cos \alpha, & \mu \in \check{V}_1^+, \\ \check{v}_2(\mu) &= -\check{v}_2^1(\mu) + \omega \sinh(\mu + 2i\alpha) \check{v}_2^0(\mu) - v(0) \cos \alpha, & \mu \in \check{V}_2^+. \end{aligned} \quad (11.6)$$

## 12 La ecuación de conexión para el ángulo convexo

En el caso del ángulo convexo, la conexión entre los datos de Cauchy se obtiene del Teorema de Paley-Wiener, [2], [5], [7], [3], [13].

Si consideramos la ecuación de Helmholtz

$$\mathcal{H}(D)u_0(x) = d_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (12.1)$$

con  $\text{supp } u_0(x) \subset \overline{G}$ , donde  $G$  es un ángulo plano convexo, por ejemplo:

$$G = K_+,$$

entonces el Teorema de Paley-Wiener implica que:

$$\mathcal{H}(z)\tilde{u}_0(z) = \tilde{d}_0(z), \quad z \in \mathbb{R}^2 \oplus iK_+, \quad (12.2)$$

donde  $\hat{d}_0(z)$  tiene la forma similar a (9.4).

Entonces (9.4) representa igualdad como funciones analíticas. Como  $\mathcal{H}(z) = 0$  para  $z \in V$ , entonces

$$\tilde{d}_0(z) = 0, \quad z \in V. \quad (12.3)$$

Dado que  $\tilde{d}_0$  se expresa a través de los datos de Cauchy, como en (9.4), entonces la ecuación (12.3) es **la ecuación de conexión** de estos datos de Cauchy.

En el caso en el que  $G$  no es convexo, la situación se vuelve mucho más complicada.

Nosotros obtenemos solamente una ecuación integral para las funciones  $\tilde{v}_l^\beta$ . La ecuación algebraica del tipo (12.3) en ésta tesis no se considera.

## 13 Transformada de Fourier de las funciones decrecientes en $K_+$

**Definición 13.1** Sea

$$S(K_+) := \{\psi \in S(\mathbb{R}^2) : \text{supp } \psi \subset \overline{K_+}\}.$$

**Lema 13.2** Sea  $\psi \in S(K_+)$  y existen  $C > 0$ ,  $\epsilon_0 > 0$  tal que

$$|\psi(x_1, x_2)| \leq C \exp(-\epsilon_0 x_1 - \epsilon_0 x_2), \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0. \quad (13.1)$$

Entonces la función  $\widehat{\psi}(-\xi_1, -\xi_2)$  admite la extensión analítica  $\widetilde{\psi}(-z_1, -z_2)$  en el área

$$\Pi_{\epsilon_0} := \{(z_1, z_2) : \text{Im } z_1 < \epsilon_0, \text{Im } z_2 < \epsilon_0\}. \quad (13.2)$$

**Demostración.**

Por la Definición 5.3 y la condición sobre el soporte de  $\psi$ , tenemos:

$$\widehat{\psi}(-\xi) = \int_{K_+} \exp(-i\xi_1 x_1 - i\xi_2 x_2) \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (13.3)$$

Demostremos que la función

$$\widetilde{\psi}(-z_1, -z_2) = \int_{K_+} \exp(-iz_1 x_1 - iz_2 x_2) \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (13.4)$$

es analítica en el área  $\Pi_{\epsilon_0}$ . Para esto es suficiente demostrar que la integral (13.4) converge uniformemente con respecto de  $z \in \Pi_{\epsilon_0}$ , lo mismo sucede con sus derivadas complejas respecto de  $z$ . Tenemos

$$\left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial z_2^{\alpha_2}} \exp(-iz_1 x_1 - iz_2 x_2) \psi(x_1, x_2) \right| =$$

$$|\exp(-iz_1 x_1 - iz_2 x_2) (-ix_1)^{\alpha_1} (-ix_2)^{\alpha_2} \psi(x_1, x_2)| \leq \quad (13.5)$$

$$\exp(\tau_1 x_1) \exp(\tau_2 x_2) (1 + |x|)^{\alpha_1 + \alpha_2} |\psi(x_1, x_2)|,$$

donde  $z_1 = \xi_1 + i\tau_1$ ,  $z_2 = \xi_2 + i\tau_2$ . Usando (13.1) obtenemos

$$\left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial z_2^{\alpha_2}} \exp(-iz_1 x_1 - iz_2 x_2) \psi(x_1, x_2) \right| \leq \quad (13.6)$$

$$\exp(x_1(\tau_1 - \epsilon_0)) \exp(x_2(\tau_2 - \epsilon_0)) (1 + |x|)^{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Por lo tanto para  $z \in \Pi_{\epsilon_0}$  la integral (13.4) converge absolutamente igual como las derivadas complejas en  $(z_1, z_2)$ . Esto nos da que  $\widetilde{\psi}(-z_1, -z_2)$  es analítica en  $\Pi_{\epsilon_0}$ . Falta notar solamente que  $\widetilde{\psi}(-z_1, -z_2) = \widehat{\psi}(-\xi_1, -\xi_2)$ , cuando  $(z_1, z_2) = (\xi_1, \xi_2)$ . ■

## 14 La ecuación integral de conexión

En esta sección obtendremos la Ecuación Integral de Conexión. Introducimos el subespacio del espacio  $S(K_+)$  que vamos a usar en adelante. Denotemos para  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{C}_\alpha^\pm := \{z \in \mathbb{C} : \pm(\operatorname{Im} z - \alpha) > 0\}$$

**Definición 14.1** Sea  $\epsilon > 0$ . El conjunto de las funciones  $\psi \in S(K_+)$  cuyas transformadas de Fourier-Laplace  $\tilde{\psi}(z)$  tienen continuación analítica en el área  $\mathbb{C}_{-\epsilon}^+ \times \mathbb{C}_{-\epsilon}^+$  y satisface la cota para toda  $N \in \mathbb{N}$

$$|\tilde{\psi}(z)| \leq C_{N,\tau}(1 + |z|)^{-N}, \quad \operatorname{Im} z = \tau \quad (14.1)$$

al cual llamamos  $S_\epsilon(K_+)$ .

**Lema 14.2** Sea  $\hat{u}(\xi)$  la transformada de Fourier de la distribución  $u(x) \in S'(\mathbb{R}^2)$  tal que  $\hat{u}(\xi)$  tiene continuación analítica en el área  $\tilde{\Pi}_\epsilon := (\mathbb{C}_\epsilon^- \times \mathbb{C}_\epsilon^-) \cap (\mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^+)$ , para algún  $\epsilon > 0$ .

Supongamos que  $\tilde{u}(z)$  admite la siguiente cota en  $\tilde{\Pi}_\epsilon$ :

$$|\tilde{u}(z)| \leq C(1 + |z|)^\mu |\tau|^{-\nu}, \quad z = \sigma + i\tau, \quad (14.2)$$

para algunos  $\mu, \nu \in \overline{\mathbb{R}^+}$ . Supongamos también, que  $\psi \in S_\epsilon(K_+)$ . Entonces para toda  $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in (0, \epsilon) \times (0, \epsilon)$

$$\langle \hat{u}(\xi), \hat{\psi}(-\xi) \rangle = \int_{\operatorname{Im} z_1 = \tau_1, \operatorname{Im} z_2 = \tau_2} \tilde{u}(z) \tilde{\psi}(-z) dz_1 dz_2. \quad (14.3)$$

### Demostración

Por la definición de la continuación analítica de las distribuciones

$$\langle \hat{u}(\xi), \hat{\psi}(-\xi) \rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \langle \tilde{u}(\xi + i\tau), \hat{\psi}(-\xi) \rangle. \quad (14.4)$$

Ya que  $\tilde{u}(\xi + i\tau)$  es analítica en  $\tilde{\Pi}_\epsilon$  y admite la cota (14.2), entonces para  $0 < \tau_1, \tau_2 < \epsilon$

$$\langle \tilde{u}(\xi + i\tau), \hat{\psi}(-\xi) \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}(\xi + i\tau) \hat{\psi}(-\xi) d\xi$$

porque  $\hat{\psi}(-\xi) \in S(\mathbb{R}^2)$ . Por otro lado la función  $\tilde{\psi}(-z_1, -z_2)$  es analítica en  $\tilde{\Pi}_\epsilon$  y admite la cota (14.1) por hipótesis. Hacemos el cambio de variables  $\xi + i\tau = z$  en la integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}(\xi + i\tau) \hat{\psi}(-\xi) d\xi$$

y obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}(\xi + i\tau) \hat{\psi}(-\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^2 + i\tau} \tilde{u}(z) \hat{\psi}(-z + i\tau) dz.$$

Fijemos algún  $\tau' = (\tau'_1, \tau'_2)$  tal que  $0 < \tau'_k < \epsilon$ ,  $k = 1, 2$ . Por el Teorema de Cauchy de Residuos, analiticidad de las funciones  $\tilde{u}(z)$  y  $\tilde{\psi}(-z + i\tau)$  con respecto de  $z$  y las cotas (14.1),(14.2) obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}(\xi + i\tau) \widehat{\psi}(-\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^2 + i\tau'} \tilde{u}(z) \tilde{\psi}(-z + i\tau) dz. \quad (14.5)$$

Haciendo otra vez el cambio de variable  $\sigma = z - i\tau'$ , obtenemos de (14.5) que:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}(\xi + i\tau) \widehat{\psi}(-\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}(\sigma + i\tau') \tilde{\psi}(-\sigma - i\tau' + i\tau) d\sigma \quad (14.6)$$

Sea  $\tau \rightarrow 0+$ . Entonces

$$\tilde{\psi}(-\sigma - i\tau' - i\pi) \rightarrow \tilde{\psi}(-\sigma - i\sigma')$$

en  $S(\mathbb{R}_\sigma^2)$ . Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}(\sigma + i\tau') \tilde{\psi}(-\sigma - i\tau' - i\tau) d\sigma \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}(\sigma + i\tau') \tilde{\psi}(-\sigma - i\tau') d\sigma$$

cuando  $\tau \rightarrow 0+$ . De otro lado, por (14.4) y (14.6) tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}(\sigma + i\tau') \tilde{\psi}(-\sigma - i\tau' - i\tau) d\sigma \rightarrow \langle \widehat{u}(\xi), \widehat{\psi}(-\xi) \rangle,$$

por lo tanto obtenemos

$$\langle \widehat{u}(\xi), \widehat{\psi}(-\xi) \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}(\sigma + i\tau) \tilde{\psi}(-\sigma - i\tau) d\sigma$$

para todo  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ :  $0 < \tau_{1,2} < \epsilon$ . Esto prueba (14.3) después del cambio  $z = \sigma + i\tau'$ . ■

Regresemos a la ecuación de Helmholtz (4.1) en  $K_-$ . Sea  $u \in C^\infty(\overline{K_-})$  una solución de esta ecuación y  $u_0(x) = [u]_0$  su extensión por 0 a  $\mathbb{R}^2$ . Notemos que se cumple (4.2) con  $d_0$  de (4.6).

Sea  $\psi \in S(K_+)$ . Debido a que el  $\text{supp } u_0 \subset \overline{K_-}$  y el  $\text{supp } \psi \subset \overline{K_+}$ , entonces :

$$\langle u_0(x), \psi(x) \rangle = 0. \quad (14.7)$$

Por la igualdad de Parseval (5.13) esto implica que:

$$\langle \widehat{u}_0(\xi), \widehat{\psi}(-\xi) \rangle = 0. \quad (14.8)$$

Esta ecuación es la base para construir la ecuación integral de conexión. Nuestra próxima meta es representar (14.8) como una ecuación integral.

Recordemos que la transformada de Fourier  $\widehat{d}_0(\xi)$  tiene la continuación analítica  $\tilde{d}_0(z_1, z_2)$ ,  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}K_+^*$  que esta definida en (9.4). En el siguiente lema representamos la distribución  $\widehat{u}_0(\xi)$  en la forma de integral apropiada.

**Lema 14.3** Sea  $\psi \in S_{\epsilon_0}(K_+)$  para algún  $\epsilon_0 > 0$ . Entonces para cualquier  $\epsilon: 0 < \epsilon < \bar{\epsilon} := \min(\epsilon_0, \delta(\omega, \alpha))$ .

$$\langle \hat{u}_0(\xi), \hat{\psi}(-\xi) \rangle = \int_{\text{Im } z_1 = \epsilon, \text{Im } z_2 = \epsilon} \frac{\tilde{d}_0(z) \tilde{\psi}(-z)}{\mathcal{H}(z_1, z_2)} dz_1 dz_2. \quad (14.9)$$

Aquí  $\delta(\omega, \alpha)$  es como en la Proposición 7.1.

**Demostración.**

De la fórmula (8.2) obtenemos

$$\langle \hat{u}_0(\xi), \hat{\psi}(-\xi) \rangle = \left\langle \frac{\hat{d}_0(\xi)}{\mathcal{H}(\xi)}, \hat{\psi}(-\xi) \right\rangle. \quad (14.10)$$

La función  $\hat{d}_0(\xi)$  tiene la extensión analítica  $\tilde{d}_0(z_1, z_2)$  en el área  $\mathbb{C}K_+^*$  (véase 9.4), con la cota (9.5).

Por el Corolario 7.2 existe  $\delta = \delta(\omega, \alpha)$  tal que  $\mathcal{H}(z)$  satisfase (7.13) en  $\tilde{\Pi}_\delta$ .

Por lo tanto  $\frac{\hat{d}_0(\xi)}{\mathcal{H}(\xi)}$  tiene continuación analítica  $\frac{\tilde{d}_0(z)}{\mathcal{H}(z)}$  en el área  $\tilde{\Pi}_\delta$  y admite la siguiente cota para algunas  $\mu, \nu \in \overline{\mathbb{R}^+}$

$$\left| \frac{\tilde{d}_0(z)}{\mathcal{H}(z)} \right| \leq C(1 + |z|)^\mu |\tau|^{-\nu}, \quad z \in \tilde{\Pi}_\delta. \quad (14.11)$$

Ahora, aplicamos el Lema 14.2. Vemos que todas las hipótesis de este lema se cumplen para  $\tilde{\Pi}_\delta$ , si en lugar de  $\hat{u}(\xi)$  ponemos  $\frac{\hat{d}_0(\xi)}{\mathcal{H}(\xi)}$ . Por lo tanto (14.9) se sigue de (14.3). ■

**Corolario 14.4** La siguiente ecuación integral se cumple para toda  $\psi \in S_{\epsilon_0}(K_+)$ ,  $\epsilon_0 < \delta(\omega, \alpha)$ :

$$\int_{\text{Im } z_1 = \text{Im } z_2 = \epsilon} \frac{\tilde{d}_0(z) \tilde{\psi}(-z)}{\mathcal{H}(z)} dz_1 dz_2 = 0, \quad \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0) \quad (14.12)$$

**Demostración.**

Ésto se sigue de (14.8) y (14.9). ■

**Observación.** Ya que  $\hat{d}_0(\xi)$  se expresa a través de los datos de Cauchy (véase (9.4)), entonces la ecuación (14.12) establece una conexión entre éstos datos, por lo tanto llamamos a ésta ecuación, la Ecuación Integral de Conexión .

En la siguiente sección vamos a levantar ésta ecuación a la cubierta  $\check{V}$  .

## 15 Levantamiento de la ecuación de conexión a la superficie de Riemann

Sustituyendo (9.4) en (14.12), descomponiendo la integral obtenida en dos sumandos, y usando luego (9.7), obtenemos:

$$A_1(\psi) + A_2(\psi) = 0, \quad \text{para todo } \psi \in S_{\epsilon_0}(K_+), \quad \epsilon_0 < \delta(\omega, \alpha), \quad (15.1)$$

donde para  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$

$$A_1(\psi) = \int_{\text{Im } z_1 = \epsilon, \text{Im } z_2 = \epsilon} \frac{\tilde{v}_1^0(z_1)(iz_2 - 2iz_1 \cos \alpha) - \tilde{v}_1^1(z_1) - v_0 \cos \alpha}{z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 \cos \alpha - \omega^2 \sin^2 \alpha} \tilde{\psi}(-z_1, -z_2) dz_1 dz_2 \quad (15.2)$$

$$A_2(\psi) = \int_{\text{Im } z_1 = \epsilon, \text{Im } z_2 = \epsilon} \frac{\tilde{v}_2^0(z_2)(iz_1 - 2iz_2 \cos \alpha) - \tilde{v}_2^1(z_2) - v_0 \cos \alpha}{z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 \cos \alpha - \omega^2 \sin^2 \alpha} \tilde{\psi}(-z_1, -z_2) dz_1 dz_2. \quad (15.3)$$

La idea principal es "restringir" éstas integrales a la superficie de Riemann  $V$  de (10.1) usando el Teorema de Cauchy de residuos. Realmente la expresión en la primera integral es meromorfa con respecto de  $z_2$  (bajo  $z_1$  fijo) para  $\text{Im } z_2 < \epsilon$  y en la segunda integral para  $\text{Im } z_1 < \epsilon$  y los polos están sobre  $V$  en ambos casos. Más precisamente, vamos a factorizar el símbolo  $\mathcal{H}(z_1, z_2)$  en el denominador de (15.2), (15.3) como

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 \cos \alpha - \omega^2 \sin^2 \alpha &= (z_2 - z_2^+(z_1))(z_2 - z_2^-(z_1)) \\ &= (z_1 - z_1^+(z_2))(z_1 - z_1^-(z_2)), \quad z \in \mathbb{C}^2. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Aquí

$$z_2^\pm(z_1) = z_1 \cos \alpha \mp \sin \alpha \sqrt{\omega^2 - z_1^2} \quad (15.5)$$

$$z_1^\pm(z_2) = z_2 \cos \alpha \mp \sin \alpha \sqrt{\omega^2 - z_2^2} \quad (15.6)$$

y

$$\text{Im } z_2^+(z_1) > 0, \quad \text{cuando } \text{Im } z_1 = \epsilon \quad (15.7)$$

$$\text{Im } z_2^-(z_1) < 0, \quad \text{cuando } \text{Im } z_1 = \epsilon \quad (15.8)$$

$$\text{Im } z_1^+(z_2) > 0, \quad \text{cuando } \text{Im } z_2 = \epsilon \quad (15.9)$$

$$\text{Im } z_1^-(z_2) < 0, \quad \text{cuando } \text{Im } z_2 = \epsilon. \quad (15.10)$$

La rama de la raíz en (15.5), (15.6) es tal que  $\text{Im}(\sqrt{a}) > 0$ , si  $a \in \mathbb{C}^+ \setminus \overline{\mathbb{R}^+}$ .  
Reescribiendo la integral en (15.2) como la integral iterada, obtenemos:

$$\begin{aligned} A_1(\psi) &= \\ &= \int_{\text{Im } z_1 = \epsilon} \left[ \int_{\text{Im } z_2 = \epsilon} \frac{\tilde{v}_1^0(z_1)(iz_2 - 2iz_1 \cos \alpha) - \tilde{v}_1^1(z_1) - v_0 \cos \alpha}{[z_2 - z_2^+(z_1)][z_2 - z_2^-(z_1)]} \tilde{\psi}(-z_1, -z_2) dz_2 \right] dz_1 \end{aligned} \quad (15.11)$$



Ahora usamos el Corolario 17.7 de apéndice. Según este corolario existe  $\epsilon_1 < \bar{\epsilon}$ , tal que para  $z_1$  con  $\text{Im } z_1 = \epsilon$

$$\text{Im } z_2^+(z_1) > \epsilon, \quad \text{Im } z_2^-(z_1) < \epsilon, \quad \text{para todo } \epsilon \in (0, \epsilon_1).$$

Consideremos la integral interior en (15.11). Tomemos  $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$ , donde  $\epsilon_1$  es el mismo como en el Corolario 17.7 del apéndice. Entonces una de las raíces  $z_2^+(z_1)$ ,  $z_2^-(z_1)$ , más precisamente  $z_2^+(z_1)$  se encuentra hacia arriba de la recta  $\{\text{Im } z_2 = \epsilon\}$  si  $\text{Im } z_1 = \epsilon$  y la otra raíz  $z_2^-(z_1)$  se encuentra hacia abajo de la misma recta para  $\text{Im } z_1 = \epsilon$ . Vamos a cerrar el contorno  $\{\text{Im } z_2 = \epsilon\}$  por abajo de tal forma que tomemos el polo  $z_2^-(z_1)$ . Calculando la integral interior en (15.11) y por el Teorema de residuos de Cauchy y usando también, que  $\tilde{\psi}(-z_1, -z_2)$  decrece con respecto de  $z_2$  suficientemente rápido por (14.1), obtenemos:

$$\begin{aligned} A_1(\psi) = & \\ -2\pi i \int_{\text{Im } z_1 = \epsilon} & \frac{\tilde{v}_1^0(z_1)(iz_2^-(z_1) - 2iz_1 \cos \alpha) - \tilde{v}_1^1(z_1) - v_0 \cos \alpha}{z_2^-(z_1) - z_2^+(z_1)} \tilde{\psi}(-z_1, -z_2^-(z_1)) dz_1. \end{aligned} \quad (15.12)$$

De manera semejante obtenemos

$$\begin{aligned} A_2(\psi) = & \\ -2\pi i \int_{\text{Im } z_2 = \epsilon} & \frac{\tilde{v}_2^0(z_2)(iz_1^-(z_2) - 2iz_2 \cos \alpha) - \tilde{v}_2^1(z_2) - v_0 \cos \alpha}{z_1^-(z_2) - z_1^+(z_2)} \tilde{\psi}(-z_1^-(z_2), z_2) dz_2. \end{aligned} \quad (15.13)$$

Sustituyendo (15.12) y (15.13) en (15.1) obtenemos la ecuación integral

$$\begin{aligned} & \int_{\text{Im } z_1 = \epsilon_1} \frac{\tilde{v}_1^0(z_1)(iz_2^-(z_1) - 2iz_1 \cos \alpha) - \tilde{v}_1^1(z_1) - v_0 \cos \alpha}{z_2^-(z_1) - z_2^+(z_1)} \tilde{\psi}(-z_1, -z_2^-(z_1)) dz_1 \\ & + \int_{\text{Im } z_2 = \epsilon_1} \frac{\tilde{v}_2^0(z_2)(iz_1^-(z_2) - 2iz_2 \cos \alpha) - \tilde{v}_2^1(z_2) - v_0 \cos \alpha}{z_1^-(z_2) - z_1^+(z_2)} \tilde{\psi}(-z_1^-(z_2), -z_2) dz_2 = 0, \end{aligned} \quad (15.14)$$

$$\forall \psi \in S_{\epsilon_0}(K_+)$$

Hacemos el cambio de variables (10.5) en la ecuación (15.14) para "levantar" ésta ecuación a  $V$ . En primer lugar, vamos a identificar los contornos de integración en la ecuación (15.14). Para  $\epsilon > 0$

$$\check{\Gamma}_{1,\epsilon}^- := \{\mu \in \check{V}_1^+(\mu) : \text{Im } z_1(\mu) = \epsilon, \text{ Im } z_2 < 0\}. \quad (15.15)$$

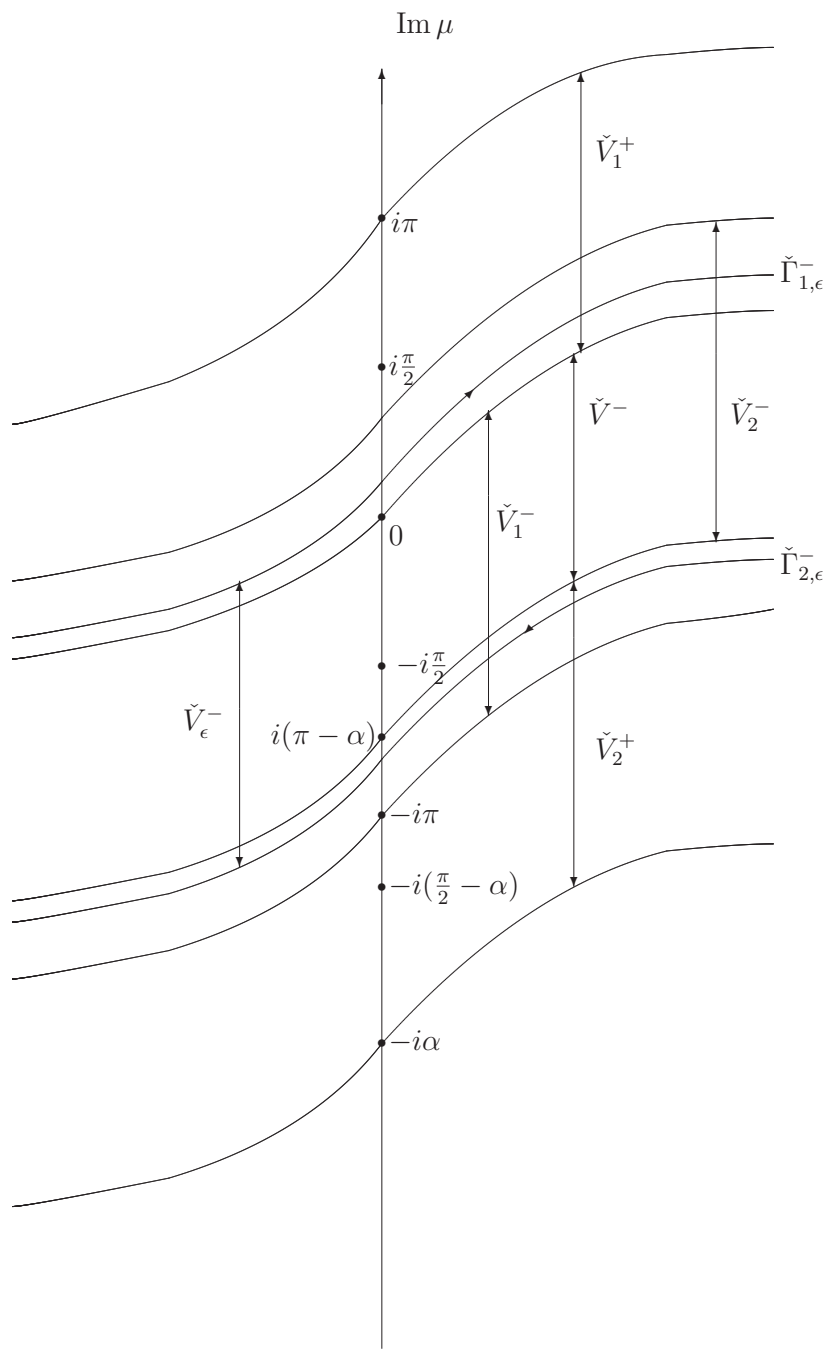


Figura 4

Esto únicamente determina la curva en la cubierta  $\check{V}_1^-$ . (Ver Figura 4).

Orientamos la curva  $\check{\Gamma}_{1,\epsilon}^-$  tal que la orientación confirmaría a la orientación del contorno  $\{\text{Im } z_1 = \epsilon\}$ . Notemos que la última orientación es tal que  $\mathbb{C}_\epsilon^-$  está por la derecha del contorno, cuando movemos por él.

Por lo tanto escogemos la orientación de  $\check{\Gamma}_{1,\epsilon}^-$  tal que el área  $\check{V}_1^-$  se quedará por la derecha también. Similarmente, para  $\epsilon > 0$

$$\check{\Gamma}_{2,\epsilon}^- := \{\mu \in \check{V}_2^+(\omega) : \text{Im } z_2(\mu) = \epsilon, \text{ Im } z_1 < 0\},$$

con la orientación como en la Fig.4.

Para  $\epsilon > 0$  denotemos

$$\check{V}_\epsilon^- := (\check{\Gamma}_{2,\epsilon}^-, \check{\Gamma}_{1,\epsilon}^-) \quad (15.16)$$

Ahora, hacemos el cambio (10.5) en las integrales (15.14).

De la fórmula (15.5) se sigue que

$$z_2^-(z_1) = -i\omega[\sinh \mu \cos \alpha \pm i \cosh \mu \sin \alpha] = -i\omega \sinh(\mu \pm i\alpha). \quad (15.17)$$

Escogemos el signo en (15.17), si  $\mu \in \check{\Gamma}_{1,\epsilon}^-(\omega)$ . Recordemos que  $\text{Im } z_2^-(z_1) < 0$  cuando  $\text{Im } z_1 = \epsilon$ . Si  $\mu \in \check{\Gamma}_{1,\epsilon}^-$ , entonces hay que poner el signo " + " en (15.17) ya que en este caso

$$z_2^-(z_1) = -i\omega \sinh(\mu + i\alpha) = z_2(\mu)$$

por (10.5), y

$$\text{Im } z_2(\mu) < 0, \text{ si } \mu \in \check{\Gamma}_{1,\epsilon}^-.$$

Entonces, para  $\mu \in \check{\Gamma}_{1,\epsilon}^-(\mu)$

$$z_2^-(z_1(\mu)) = z_2(\mu) = -i\omega \sinh(\mu + i\alpha). \quad (15.18)$$

Conformemente, por (15.5)

$$z_2^+(z_1(\mu)) = -i\omega \sinh(\mu - i\alpha), \mu \in \check{\Gamma}_{1,\epsilon}^-. \quad (15.19)$$

Ahora encontremos  $z_1^\pm(z_2)$ , cuando  $\text{Im } z_2 = \epsilon > 0$ . En este caso también la expresión final depende de la curva  $\check{\Gamma}_{2,\epsilon}^-$ .

Si escogemos ésta curva como en la Figura 4, entonces

$$z_1^-(z_2(\mu)) = z_1(\mu)$$

por que  $\text{Im } z_1(\mu) < 0$  cuando  $\mu \in \check{\Gamma}_{2,\epsilon}^-$ . En efecto, (15.6), (10.5) implican, que

$$\begin{aligned}
z_1^\pm(z_2) &= z_2 \cos \alpha \mp \sin \alpha \sqrt{\omega^2 - z_2^2} \\
&= -i\omega \sinh(\mu + i\alpha) \cos \alpha \mp \sin \alpha \sqrt{\omega^2 - (i\omega \sinh(\mu + i\alpha))^2} \\
&= -i\omega \sinh(\mu + i\alpha) \cos \alpha \mp \sin \alpha \sqrt{-\omega^2 \cosh^2(\mu + i\alpha)} \\
&= -i\omega [\sinh(\mu + i\alpha) \cos \alpha \mp i \cosh(\mu + i\alpha) \sin \alpha] \\
&= \begin{cases} -i\omega \sinh \mu \\ -i\omega \sinh(\mu + 2i\alpha) \end{cases}
\end{aligned} \tag{15.20}$$

Vemos, que por (10.5)

$$z_1^\pm(z_2(\mu)) = z_1(\mu)$$

o bien

$$z_1^\pm(z_2(\mu)) = -i\omega \sinh(\mu + 2i\alpha).$$

Ya que para  $\mu \in \check{\Gamma}_{2,\epsilon}^-$

$$\text{Im } z_1(\mu) < 0,$$

entonces

$$z_1^-(z_2(\mu)) = z_1(\mu), \quad \mu \in \check{\Gamma}_{2,\epsilon}^- \tag{15.21}$$

y

$$z_1^+(z_2(\mu)) = -i\omega \sinh(\mu + 2i\alpha), \quad \mu \in \check{\Gamma}_{2,\epsilon}^-(\omega). \tag{15.22}$$

Ahora sustituimos las expresiones obtenidas (15.18), (15.19), (15.21), (15.22) y las expresiones para  $z_1, z_2$  (10.5) en (15.14), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\check{\Gamma}_{1,\epsilon}^-} \frac{\check{v}_1^0(\mu) [i(-i)\omega \sinh(\mu + i\alpha) - 2\omega \sinh \mu \cos \alpha] - \check{v}_1^1(\mu) - v_0 \cos \alpha}{-i\omega \sinh(\mu + i\alpha) + i\omega \sinh(\mu - i\alpha)} \check{\psi}(\mu) (-i\omega) \cosh \mu d\mu \\
&+ \int_{\check{\Gamma}_{2,\epsilon}^-} \frac{\check{v}_2^0(\mu) [i(-i)\omega \sinh \mu - 2i(-i)\omega \sinh(\mu + i\alpha) \cos \alpha] - \check{v}_2^1(\mu) - v_0 \cos \alpha}{-i\omega \sinh \mu + i\omega \sinh(\mu + 2i\alpha)}. \tag{15.23}
\end{aligned}$$

$$\check{\psi}(\mu) (-i\omega) \cosh(\mu + i\alpha) d\mu = 0,$$

donde

$$\check{\psi}(\mu) = \tilde{\psi}(-z_1(\mu), -z_2^-(z_1(\mu))) = \tilde{\psi}(-z_1(z_2(\mu)), z_2(\mu))$$

Transformemos las expresiones en (15.23)

1)

$$\begin{aligned}
 i(-i)\omega \sinh(\mu + i\alpha) - 2\omega \sinh \mu \cos \alpha &= \omega[\sinh(\mu + i\alpha) - 2 \sinh \mu \cos \alpha] \\
 &= \omega(\sinh \mu \cos \alpha + i \cosh \mu \sin \alpha - 2 \sinh \mu \cos \alpha) \\
 &= -\omega[\sinh \mu \cos \alpha - i \cosh \mu \sin \alpha] \quad (15.24) \\
 &= -\omega \sinh(\mu - i\alpha)
 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
 -i\omega \sinh(\mu + i\alpha) + i\omega \sinh(\mu - i\alpha) &= -i\omega[\sinh \mu \cos \alpha \\
 &\quad + i \cosh \mu \sin \alpha - \sinh \mu \cos \alpha + i \cosh \mu \sin \alpha] \\
 &= -i\omega[2i \cosh \mu \sin \alpha] \quad (15.25) \\
 &= 2\omega \cosh \mu \sin \alpha
 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
 i(-i)\omega \sinh \mu - 2i(-i)\omega \sinh(\mu + i\alpha) \cos \alpha &= \omega \sinh \mu - \\
 &\quad - 2\omega \sinh(\mu + i\alpha) \cos \alpha \\
 &= \omega[\sinh \mu - 2 \sinh \mu \cos^2 \alpha - 2i \cosh \mu \sin \alpha \cos \alpha] \\
 &= \omega[\sinh \mu(1 - 2 \cos^2 \alpha) - 2i \cosh \mu \sin \alpha \cos \alpha] \quad (15.26) \\
 &= \omega[\sinh \mu(-\cos 2\alpha) - i \cosh \mu \sin 2\alpha] \\
 &= -\omega[\sinh \mu \cos 2\alpha + i \cosh \mu \sin 2\alpha] \\
 &= -\omega \sinh(\mu + 2i\alpha)
 \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
-i\omega \sinh \mu + i\omega \sinh(\mu + 2i\alpha) &= -i\omega[\sinh \mu - \\
&\quad - \sinh \mu \cos 2\alpha - i \cosh \mu \sin 2\alpha] \\
&= -i\omega[\sinh \mu(2 \sin^2 \alpha) - i \cosh \mu \sin 2\alpha] \\
&= -i\omega[2 \sin \alpha(\sinh \mu \sin \alpha - i \cosh \mu \cos \alpha)] \\
&= -i\omega \cdot 2 \sin \alpha(-i) \cosh(\mu + i\alpha) \\
&= -2\omega \sin \alpha \cdot \cosh(\mu + i\alpha)
\end{aligned} \tag{15.27}$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en (15.24)-(15.27) a (15.23), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\check{\Gamma}_{1,\epsilon}^-} [\omega \sinh(\mu - i\alpha)\check{v}_1^0(\mu) + \check{v}_1^1(\mu) + v_0 \cos \alpha] \check{\psi}(\mu) d\mu \\
&\quad + \int_{\check{\Gamma}_{2,\epsilon}^-} [-\omega \sinh(\mu + 2i\alpha)\check{v}_2^0(\mu) - \check{v}_2^1(\mu) - v_0 \cos \alpha] \check{\psi}(\mu) d\mu = 0,
\end{aligned} \tag{15.28}$$

para toda  $\psi \in S_{\epsilon_0}(K_+)$ . Aquí  $\epsilon < \epsilon_0$ .  
Sea

$$\check{v}(\mu) := \begin{cases} \check{v}_1(\mu), & \mu \in \check{V}_1^+ \\ \check{v}_2(\mu), & \mu \in \check{V}_2^+. \end{cases} \tag{15.29}$$

donde

$$\check{v}_1(\mu) = \omega \sinh(\mu - i\alpha)\check{v}_1^0(\mu) + \check{v}_1^1(\mu) + v_0 \cos \alpha, \quad \mu \in \check{V}_1^+ \tag{15.30}$$

$$\check{v}_2(\mu) = -\omega \sinh(\mu + 2i\alpha)\check{v}_2^0(\mu) - \check{v}_2^1(\mu) - v_0 \cos \alpha, \quad \mu \in \check{V}_2^+ \tag{15.31}$$

Ahora, por (9.3)

$$|\check{v}_1^0(z_1)| \leq C(1 + |z_1|)^{\mu_{1,0}}(\text{Im } z_1)^{-\nu_{1,0}},$$

entonces, por (10.5)

$$|\check{v}_1^0(\mu)| \leq C(1 + |\sinh \mu|)^{\mu_1^0} e^{-\nu_1^0}, \quad \mu \in \check{\Gamma}_{1,\epsilon}^-.$$

Similarmente

$$|\check{v}_1^1(\mu)| \leq C(1 + |\sinh \mu|)^{\mu_{1,1}} e^{-\nu_{1,1}}, \quad \mu \in \check{\Gamma}_{1,\epsilon}^-.$$

Esto implica que

$$|\check{v}_1(\mu)| \leq C(1 + |\sinh \mu|)^{\mu_1} e^{-\nu_1}, \quad \mu \in \check{\Gamma}_{1,\epsilon}^-. \tag{15.32}$$

Similarmente

$$|\check{v}_2(\mu)| \leq C(1 + |\sinh \mu|)^{\mu_2} e^{-\nu_2}, \quad \mu \in \check{\Gamma}_{2,\epsilon} \quad (15.33)$$

Entonces, la ecuación (15.28) la podemos reescribir como

$$\int_{\partial\check{V}_\epsilon^-} \check{v}(\mu) \check{\psi}(\mu) = 0 \quad (15.34)$$

para todo  $\psi \in S_{\epsilon_0}(K_+)$  y  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ .

Esta es la ecuación integral de conexión. Ella conecta los datos de Cauchy. Esta ecuación implica una ecuación algebraica que es más útil.

## 16 Conclusión

Nosotros hemos obtenido la ecuación integral de conexión (15.34), que conecta los datos de Cauchy sobre la superficie de Riemann de las características complejas del símbolo  $\mathcal{H}$ . Esta ecuación permite extender analíticamente las funciones  $\check{v}_1(\mu)$  y  $\check{v}_2(\mu)$  en  $\check{V}_1^+ \cup \check{V}^- \cup \check{V}_2^+$  y obtener la ecuación algebraica

$$\check{v}_1(\mu) = \check{v}_2(\mu)$$

para estas extensiones. Precisamente esta ecuación se usa en aplicaciones [8], [9].

## 17 Apéndice

En este apéndice demostraremos algunas propiedades analíticas de los contornos de integración que se usan en la Sección 13.

**Definición 17.1** Para  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}^+}$  asumimos que  $\arg z \in (0, 2\pi)$  y para  $\sqrt{z}$  escogemos la rama tal que

$$\operatorname{Im} \sqrt{z} > 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}^+}. \quad (17.1)$$

**Lema 17.2** Sea  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$0 < \alpha \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \quad (17.2)$$

y

$$|z| \geq C \geq 0. \quad (17.3)$$

Entonces ,

$$\operatorname{Im} z \geq C \sin \alpha. \quad (17.4)$$

**Demostración.**

Sea  $z = \rho e^{i\theta}$ , entonces  $\operatorname{Im} z = \rho \cos \alpha$ ,  $\theta \in [\alpha, \frac{\pi}{2}]$ . Ahora (17.3) implica (17.4). ■

**Lema 17.3** Sea  $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ ,  $\omega_1 \geq 0$ ,  $\omega_2 > 0$ , entonces existe  $C(\omega) > 0$  tal que para  $\xi \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Im} \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \geq C(\omega) > 0. \quad (17.5)$$

**Demostración.**

Ya que  $\omega^2 \in \mathbb{C}^+$ , entonces para  $\xi \in \mathbb{R}$ , tenemos

$$\arg \omega^2 \leq \arg(\omega^2 - \xi^2) \leq \pi.$$

Ya que  $\omega_2 > 0$ , entonces  $\arg \omega^2 \geq \alpha(\omega) > 0$ . Esto implica que para  $\xi \in \mathbb{R}$

$$0 < \frac{1}{2}\alpha(\omega) \leq \arg \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \leq \frac{\pi}{2}. \quad (17.6)$$

Ahora acotemos  $|\omega^2 - \xi^2|$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ . Si  $\omega_1 = 0$ , entonces

$$|\omega^2 - \xi^2| = \omega_2^2 + \xi^2 \geq \omega_2^2, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Si  $\omega_1 > 0$ , entonces

$$|\omega^2 - \xi^2| \geq |\operatorname{Im}(\omega^2 - \xi^2)| = 2\omega_1\omega_2.$$

En ambos casos tenemos

$$|\omega^2 - \xi^2| \geq C(\omega), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Y luego

$$\left| \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \right| \geq C_1(\omega), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (17.7)$$

Usando (17.6), (17.7) y aplicando el Lema 17.2, obtenemos (17.5). ■



**Lema 17.4** Sea  $z := a + bi$ , entonces

$$\sqrt{z} = x + iy,$$

donde

$$y^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}). \quad (17.8)$$

**Demostración.**

Haciendo calculos sencillos se obtiene que

$$y^2 = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 + b^2}).$$

El signo "-" se suprime, porque  $y^2 \geq 0$ , por lo tanto (17.8) queda demostrada. ■

**Lema 17.5** Sea  $f(x, y)$ , una función continua en dos variables en

$$A := [-p, p] \times [-q, q] \subset \mathbb{R}^2.$$

Entonces la función

$$M(y) := \min_{|x| \leq p} |f(x, y)| \quad (17.9)$$

es continua en  $y \in [-q, q]$ .

**Demostración**

Sea  $y_n \rightarrow y_0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $y_n, y_0 \in [-q, q]$ . Ya que  $f(x, y)$  es uniformemente continua en  $A$ , entonces para  $\epsilon > 0$  existe  $N_\epsilon$  tal que

$$|f(x, y_n) - f(x, y_0)| < \epsilon, \quad x \in [-q, q], \quad n > N_\epsilon.$$

Esta desigualdad implica que

$$|f(x, y_n)| < |f(x, y_0)| + \epsilon \quad (17.10)$$

y

$$|f(x, y_n)| > |f(x, y_0)| - \epsilon \quad (17.11)$$

para  $x \in [-p, p]$ ,  $n > N_\epsilon$

Sea

$$|f(x_1, y_0)| = \min_{|x| \leq p} |f(x, y_0)|.$$

Entonces por (17.10) tenemos que

$$\min_{|x| \leq p} |f(x, y_n)| \leq |f(x_1, y_n)| < |f(x_1, y_0)| + \epsilon = \min_{|x| \leq p} |f(x, y_0)|, \quad n > N_\epsilon,$$

de donde, tomando en cuenta (17.9) obtenemos:

$$M(y_n) < M(y_0) + \epsilon, \quad n > N_\epsilon. \quad (17.12)$$

Similarmente, (17.11) implica que

$$M(y_n) > M(y_0) - \epsilon, \quad n > N_\epsilon.$$

Estas dos desigualdades implican que

$$|M(y_n) - M(y_0)| < \epsilon, \quad n > N_\epsilon,$$

que significa, que

$$M(y_n) \longrightarrow M(y_0), \quad n \longrightarrow \infty,$$

es decir  $M$  es continua. ■

**Proposición 17.6** Existe  $\gamma = \gamma(\omega) > 0$  y existe  $C(\omega) > 0$  tal que

$$\operatorname{Im}(\sqrt{\omega^2 - z^2}) \geq C(\omega) > 0 \quad (17.13)$$

para todo  $\epsilon \in (0, \gamma)$ ,  $\operatorname{Im} z = \epsilon$ .

**Demostración.**

Sin pérdida de generalidad podemos buscar  $\gamma$  tal que

$$0 < \gamma < 1. \quad (17.14)$$

Sea  $\omega := \omega_1 + i\omega_2$ ,  $\omega_1 \geq 0$ ,  $\omega_2 > 0$ ,  $\epsilon < \gamma$ . Entonces

$$\omega^2 - z^2 = \omega_1^2 - \omega_2^2 - \xi^2 + \epsilon^2 + 2i(\omega_1\omega_2 - \xi\epsilon). \quad (17.15)$$

1) Supongamos que

$$|\xi| \geq R(\omega) := \sqrt{|\omega_1^2 - \omega_2^2 + 2|}. \quad (17.16)$$

Entonces

$$\xi^2 \geq \omega_1^2 - \omega_2^2 + 2.$$

De la representación (17.15), (17.8), (17.14) y (17.16) obtenemos que

$$(\operatorname{Im}(\sqrt{\omega^2 - z^2}))^2 \geq \frac{1}{2}(\xi^2 - \omega_1^2 + \omega_2^2 - \epsilon^2) \geq \frac{1}{2}(2 - \epsilon^2) \geq \frac{1}{2}.$$

Entonces, en este caso podemos tomar en (17.13)

$$C(\omega) = \frac{1}{2} \quad (17.17)$$

2) Supongamos que

$$|\xi| \leq R(\omega). \quad (17.18)$$

Consideremos la función

$$M(\epsilon) = \min_{|\xi| \leq R} \left| \operatorname{Im} \left( \sqrt{\omega^2 - (\xi + i\epsilon)^2} \right) \right|. \quad (17.19)$$

Demostremos que existe  $\epsilon_1 > 0$  tal que  $\sqrt{\omega^2 - (\xi + i\epsilon)^2}$  es continua en  $[-R, R] \times [-\epsilon_1, \epsilon_1]$ .

a)  $\omega_1 > 0$ . Existe  $\epsilon := \epsilon(\omega)$  tal que para  $z = x + iy \in [-R, R] \times [-\epsilon_2, \epsilon_2]$

$$|\operatorname{Im} z^2| < 2\omega_1\omega_2, \quad |y| < \epsilon.$$

En efecto,

$$|\operatorname{Im} z^2| = |\operatorname{Im} [(x + iy)^2]| = |2xy| \leq 2R|y|.$$

De aquí obtenemos la afirmación. Por lo tanto,

$$\operatorname{Im} (\omega^2 - z^2) > 0, \quad \text{para } |x| \leq R, \quad |y| \leq \epsilon_2.$$

Pero en  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}^+}$  la función  $\sqrt{z}$  es continua, entonces  $\sqrt{\omega^2 - (\xi + i\epsilon)^2}$  es continua en  $[-R, R] \times [-\epsilon_1, \epsilon_1]$ .

b)  $\omega_1 = 0$ . En este caso, para  $z = x + iy$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|y| \leq \omega_2$

$$\omega^2 - z^2 = -\omega_2^2 - x^2 + y^2 - 2ixy \in \mathbb{C}^+ \setminus \overline{\mathbb{R}^+}$$

y  $\sqrt{\omega^2 - z^2}$  es continua en  $\mathbb{R} \times (-\omega_2, \omega_2)$  por la Definición 17.1.

Entonces, para  $\omega_1 \geq 0$ ,  $\left| \operatorname{Im} \left( \sqrt{\omega^2 - (\xi + i\epsilon)^2} \right) \right|$  es continua en  $[-R, R] \times [-\epsilon_1, \epsilon_1]$ , donde  $\epsilon_1 = \min(\epsilon_2, \omega_2)$  depende solo de  $\omega$  y  $R$ . Por el Lema 17.5  $M(\epsilon)$  es continua en  $[-\epsilon_1, \epsilon_1]$ . Consideremos  $M(0)$ . Por el lema 17.3 existe  $C_1(\omega)$  tal que

$$M(0) \geq C_1(\omega) > 0.$$

Por la continuidad de  $M(\epsilon)$  existe  $\gamma := \gamma(\omega) > 0$  tal que

$$M(\epsilon) \geq \frac{C_1(\omega)}{2}, \quad |\epsilon| < \gamma.$$

Entonces por (17.19)  $\operatorname{Im} \left( \sqrt{\omega^2 - (\xi + i\epsilon)^2} \right) \geq \frac{C_1(\omega)}{2}$  para  $|\xi| \leq R$ ,  $|\epsilon| < \gamma(\omega)$ . ■

**Corolario 17.7** Sea  $\bar{\epsilon}$  que se define como en el Lema 14.3 entonces existe  $\epsilon_1 \in (0, \bar{\epsilon})$  tal que

para  $z = \xi + i\epsilon$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \epsilon < \epsilon_1$ ,

$$\operatorname{Im} z_2^+(z) > \epsilon \quad (17.20)$$

$$\operatorname{Im} z_2^-(z) < \epsilon \quad (17.21)$$

**Demostración.**

Demostremos (17.20). (15.5) implica que

$$\operatorname{Im} z_2^+(z) = \epsilon \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{Im} \sqrt{\omega^2 - z^2}. \quad (17.22)$$

Por la Proposición 17.6 existe  $C(\omega)$ , y  $\gamma > 0$  tal que

$$\operatorname{Im}(\sqrt{\omega^2 - z^2}) \geq C(\omega) > 0, \quad \text{para } \epsilon \in (0, \gamma), \xi \in \mathbb{R}. \quad (17.23)$$

Luego (17.22) implica que

$$-\sin \alpha \cdot \operatorname{Im}(\sqrt{\omega^2 - z^2}) \geq C_1(\omega) > 0, \quad \text{para } \epsilon \in (0, \gamma). \quad (17.24)$$

Sea  $\epsilon_2 > 0$  tal que  $\epsilon_2 \in (0, \gamma)$  y

$$|\cos \alpha| \epsilon_2 < \frac{1}{2}(-\sin \alpha)C(\omega).$$

Entonces

$$\epsilon \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{Im}(\sqrt{\omega^2 - z^2}) \geq (-\sin \alpha)C(\omega) - |\epsilon \cos \alpha| = -\frac{1}{2} \sin \alpha C(\omega) > 0,$$

$\epsilon \in (0, \epsilon_2)$ . Ahora (17.22) implica que

$$\operatorname{Im} z_2^+(z) \geq -\frac{1}{2} \sin \alpha \cdot C(\omega) > 0, \quad \text{para } \operatorname{Im} z = \epsilon \in (0, \epsilon_2).$$

Si  $\epsilon_2 < -\frac{1}{2} \sin \alpha \cdot C(\omega)$ , y  $\epsilon_2 < \bar{\epsilon}$ , entonces (17.20) queda demostrada.

Si  $\epsilon_2 < -\frac{1}{2} \sin \alpha \cdot C_1(\omega)$ , ó  $\epsilon_2 \geq \bar{\epsilon}$ , entonces tomamos  $\epsilon_1 > 0$  menor que  $(-\frac{1}{2} \sin \alpha C(\omega))$  y  $\bar{\epsilon}$ .

En este caso (17.20) también se demostró.

2) Demostremos (17.21). De (15.5) y por el Teorema de Vieta obtenemos

$$z_2^+(z) + z_2^-(z) = 2z \cos \alpha$$

de donde

$$\operatorname{Im} z_2^+(z) + \operatorname{Im} z_2^-(z) = 2 \cos \alpha \cdot \operatorname{Im} z$$

(17.20) implica que

$$2 \cos \alpha \cdot \operatorname{Im} z > \epsilon + \operatorname{Im} z_2^-(z), \quad \text{cuando } 0 < \operatorname{Im} z = \epsilon < \epsilon_1,$$

que equivale a

$$\operatorname{Im} z_2^-(z) < 2\epsilon \cos \alpha - \epsilon, \quad \text{cuando } 0 < \operatorname{Im} z = \epsilon < \epsilon_1,$$

ya que  $2\epsilon \cos \alpha < 2\epsilon$ , entonces

$$\operatorname{Im} z_2^-(z) < \epsilon, \quad \text{si } 0 < \operatorname{Im} z = \epsilon < \epsilon_1.$$

por lo tanto el corolario se demostró. ■

## Bibliografia

- [1] Jost, Jurgen. *Compact Riemann Surfaces: an introduction to contemporary mathematics*. Ed. Springer: New York, 1997.
- [2] Komech AI. Elliptic boundary value problems on manifolds with piecewise smooth boundary. *Math. USSR Sbornik*. 1973; **21**(1): 91-135.
- [3] Komech AI. Elliptic differential equations with constant coefficients in a cone. *Moscow Univ. Math. Bull.* 1974; **29**(2): 140-145.
- [4] Komech AI. Linear partial differential equations with constant coefficients. In Egorov YuE, Komech AI, Shubin MA. *Elements of the Modern Theory of Partial Differential Equations*. Springer: Berlin, 1999: 127-260.
- [5] Komech AI, Merzon AE. General boundary value problems in region with corners. *Operator Theory: Adv. Appl.* 1992; **57**: 171-183.
- [6] Komech AI, Merzon AE, Zhevandrov PN. On completeness of Ursell's trapping modes. *Russian Journal of Mathematical Physics*. 1996; **4**(4): 457-485.
- [7] Komech A, Merzon A, Zhevandrov P. A method of complex characteristics for elliptic problems in angles and its applications. *Amer. Math. Soc. Transl.*(2). 2002; **206** : 125-159.
- [8] Komech AI , Mauser NJ, Merzon AE. On Sommerfeld representation and uniqueness in scattering by wedges. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 2005; **28**:147-183.
- [9] A.I.Komech, A.E.Merzon, Limiting amplitud principle in the scattering by wedges. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 2006. Publitted online 20.02.2006
- [10] Merzon AE. On Ursell's problem. *Proceedings of the Third International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*. SIAM – INRIA, edited by Gary Cohen. 1995; 613-623.
- [11] A. Merzon. Well-posedness of the problem of nonstationary diffraction of Sommerfeld. *Proceeding of the International Seminar "Day on Diffraction-2003"*. University of St.Petersburg, 2003; 151-162.
- [12] Sommerfeld A. Mathematische Theorie der Diffraction. *Math. Ann.* 1896; **47**: 317-341.
- [13] Vladimirov V.S. Equations of Mathematical Physics. Ed. Mir. Moscú,1984.
- [14] Williams W-E. Diffraction of an E-polarized plane wave by an imperfectly conducting wedge. *Proc. Roy. Soc. London*, 1959; **A252**: 376-393.
- [15] Zhevandrov P, Merzon A. On the Neumann problem for the helmholtz equation in a plane angle. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2000; **23**: 1401-1446.