

Universidad Michoacana de San
Nicolás Hidalgo

**Productos de Kronecker y la
correspondencia RSK.**

Tesis de Maestría presentada por

LEM Pedro David Sánchez Salazar

dirigida por el

Dr. Ernesto Vallejo Ruiz

para obtener el título de

Maestría en Matemáticas

Morelia, Michoacán. Julio 2007

Productos de Kronecker y la correspondencia RSK.

Pedro Sánchez

Índice general

1. Introducción y objetivos.	4
I. Material previo	6
2. Particiones y tablas de Young.	7
2.1. Particiones.	7
2.2. Diagramas y tablas.	8
2.3. Órdenes entre particiones.	9
2.4. Tablas de Young semiestándar.	10
2.5. Inserción por columnas e inserción por filas.	12
2.6. Inserción de palabras y equivalencia de Knuth	17
3. La correspondencia RSK.	20
3.1. Descripción de la correspondencia RSK.	20
4. Caracteres y matrices.	26
4.1. Representaciones.	26
4.2. Caracteres.	27
4.3. Producto interno de caracteres.	28
4.4. Módulos de permutación	29
4.5. Particiones de dos partes.	31
II. Cálculos combinatorios.	34
5. Primer método de conteo.	35
5.1. Conteo de las matrices.	41
5.1.1. Simplificación de los cálculos.	49
6. RSK para matrices 3D.	51
6.1. La correspondencia RSK para matrices 3D.	51
6.2. Las condiciones de fila y columna	53

Índice general

6.3. Las condiciones de fila y columna para matrices $2 \times 2 \times 2$	61
7. Segundo método de conteo	64
7.1. Cálculo en el contradominio.	66
7.2. Cálculo en el dominio.	69
7.2.1. Primer caso: $u = d$	70
7.2.2. Segundo caso: $u + b = c + d$ y $u + c > b + d$	71
7.2.3. Tercer caso: $u + c = b + d$ y $u + b > c + d$	74
7.3. Conteo total.	74
8. Conclusiones	76
8.1. Equivalencia de las fórmulas	76
8.2. Generalizaciones	81

1. Introducción y objetivos.

El objetivo principal del trabajo es desarrollar un par de métodos combinatorios para poder calcular el producto de Kronecker $c(\lambda, \mu, \nu) = \langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \chi^\nu \rangle$ de caracteres del grupo simétrico cuando λ, μ, ν son particiones de 2 partes. Este es un problema difícil que todavía no ha sido resuelto y es un área de investigación de actualidad (ver [2] y [1]). En particular, me enfocaré en el caso de que las tres particiones tienen 2 partes, caso en el que ya se han encontrado algunas fórmulas, presentando aquí dos nuevos métodos para atacar el problema, basados en interpretaciones combinatorias de productos de caracteres.

Las representaciones irreducibles V^λ del grupo simétrico están indexadas por particiones λ , y es un problema de interés, abierto y difícil calcular la descomposición en representaciones irreducibles del producto tensorial $V^\lambda \otimes V^\mu$ de dos representaciones irreducibles. Para atacar el problema se consideran los caracteres χ^λ de las representaciones irreducibles V^λ , de modo que el caracter de $V^\lambda \otimes V^\mu$ es el producto de $\chi^\lambda \otimes \chi^\mu$ de caracteres, llamado *producto de Kronecker*. En este lenguaje, la multiplicidad de V^ν en $V^\lambda \otimes V^\mu$ es igual al producto interno $c(\lambda, \mu, \nu) = \langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \chi^\nu \rangle$. Sin embargo, no existe una descripción combinatoria general de $c(\lambda, \mu, \nu)$.

Uno de los pocos casos en los que se conoce respuesta es el caso cuando las particiones μ, ν tienen cada una dos partes. En ese caso, $c(\lambda, \mu, \nu) > 0$ implica que λ puede tener a lo más 4 partes. Algunos trabajos como [10] y [5] han atacado el problema y han encontrado fórmulas para éstos casos. En esta tesis se presentan dos nuevos métodos para calcular $c(\lambda, \mu, \nu)$ en el caso de que λ también tenga dos partes. El segundo método presentado se basa en la correspondencia RSK entre matrices y tablas de Young. Es posible que la descripción combinatoria usada sirva para calcular $c(\lambda, \mu, \nu)$ cuando ν tiene dos partes, pero μ, ν más de dos, los cuales serían resultados nuevos.

El trabajo se divide en dos partes. En la primera, se introducen los conceptos y definiciones que serán necesarias para desarrollar los métodos. En el primer capítulo se consideran nociones como particiones, diagramas de Young, tablas de Young, operaciones con tablas, para después introducir en el capítulo siguiente la

1. Introducción y objetivos.

correspondencia de RSK. Esta correspondencia posee muchas propiedades notables y ha sido objeto de muchos trabajos y que tiene aplicación en muchas áreas de matemáticas. Para concluir la primera parte, se da una breve introducción a representaciones y caracteres con énfasis en el grupo simétrico, mencionando interpretaciones combinatorias de varios resultados de caracteres.

La segunda parte de la tesis desarrolla los dos métodos de cálculo para $c(\lambda, \mu, \nu)$. El primer método se obtiene de una interpretación combinatoria de productos de caracteres de permutación como número de matrices tridimensionales con entradas no negativas con ciertas restricciones.

Los dos capítulos siguientes, forman la parte más importante de la tesis. Primero, se introduce la correspondencia RSK para matrices tridimensionales, la cual establece una biyección entre matrices tridimensionales de entradas enteras no negativas y pares de tablas de Young. A continuación se determinan las «*condiciones de fila y columna*» que deben satisfacer las matrices para que el par de tablas que les corresponde tenga la misma forma y contenido. Posteriormente, el siguiente capítulo desarrolla una segunda forma de calcular $c(\lambda, \mu, \nu)$ para particiones de dos partes, como la diferencia entre el número de matrices tridimensionales que satisfacen las condiciones de fila y columna.

En el capítulo final, se presentan las dos fórmulas obtenidas, y se demuestra que ambas, junto con las dadas en [10] y [5] son equivalentes, así como un esquema que se podría seguir para atacar el mismo problema cuando alguna de las particiones tiene más de 2 partes.

Pedro Sánchez. Morelia, Michoacán. Junio 2006.

Parte I.
Material previo

2. Particiones y tablas de Young.

2.1. Particiones.

Dado un entero positivo n , decimos que λ es una partición de n si λ es una sucesión débilmente decreciente de números naturales cuyos términos suman n . En otras palabras,

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$$

es una partición de n si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ y $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = n$. En este caso, escribimos $\lambda \vdash n$. El conjunto de todas las particiones de n lo denotamos por $\text{Par}(n)$

Ejemplo. $\lambda = (4, 3, 1, 1)$, $\mu = (2, 2, 2, 2, 1)$ y $\nu = (9)$ son particiones de 9.

A los enteros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ se les llama las *partes* de λ y al entero r se le llama el *longitud* de la partición, denotado por $\ell(\lambda)$, mientras que a la suma n se le llama el *tamaño de la partición* y se denota por $|\lambda|$.

Una notación alterna de representar las particiones consiste en indicar el número de veces que cada entero aparece en la partición. Así,

$$\lambda = (1^{t_1}, 2^{t_2}, \dots, k^{t_k}, \dots)$$

representa la partición que consta de t_1 partes iguales a 1, t_2 partes igual a 2 y así sucesivamente.

Ejemplo. $\lambda = (4, 3, 1, 1) = (1^2, 2^0, 3^1, 4^1)$ y $\mu = (2, 2, 2, 2, 1) = (1^1, 2^4)$.

Finalmente, a veces es conveniente pensar en las particiones como sucesiones infinitas en las que sólo un número finito de términos es diferente a cero. Así, la partición $\lambda = (4, 3, 1, 1)$ puede identificarse con la sucesión infinita

$$\lambda = (4, 3, 1, 1, 0, 0, 0, \dots).$$

Al conjunto de todas las particiones de n lo denotaremos por $\text{Par}(n)$, y al conjunto de todas las particiones como Par .

2.2. Diagramas y tablas.

Para cada partición es posible obtener una representación gráfica como se describe a continuación.

Si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ es partición de n , el diagrama de la partición es el conjunto

$$D(\lambda) = \{(i, j) : 1 \leq j \leq \lambda_i \text{ para } 1 \leq i \leq r\}$$

Por ejemplo, para $\lambda = (4, 3, 1, 1)$ se tiene el siguiente diagrama

$$\lambda = \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & & & \\ \bullet & & & \end{array}$$

A la representación anterior se le conoce como *diagrama de Ferrer* de la partición. Es conveniente identificar las particiones con sus diagramas, de modo que se puede hablar del tamaño, o longitud de un diagrama. Cuando sea necesario hacer la distinción entre partición y diagrama, se señalará de forma explícita.

Cuando en vez de usar puntos se usan casillas, como en la representación siguiente,

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \end{array} .$$

se obtiene el *diagrama de Young* de la partición. Nuevamente hemos hecho la identificación de la partición con su diagrama. En lo sucesivo, al referirnos al diagrama de una partición usualmente nos referimos al diagrama de Young.

Dada una partición λ , la *partición conjugada* λ' la obtenemos intercambiando las filas y las columnas de su diagrama. Así:

$$\lambda' = (4, 2, 2, 1) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \end{array} .$$

Es claro que el conjugado de λ' es nuevamente λ .

2.3. Órdenes entre particiones.

Deseamos ahora establecer relaciones que nos permitan comparar dos particiones cualquiera. Una forma intuitiva primera de comparar dos particiones es comparar únicamente sus diagramas.

Si el diagrama de λ queda contenido en el diagrama de μ , en cierto modo podemos decir que μ es más «grande» que λ . Decimos entonces que λ está contenida en μ , lo cual lo denotamos por $\lambda \subseteq \mu$ si y sólo si $\lambda_j \leq \mu_j$ para $j = 1, 2, \dots$ (conviene considerar las particiones como sucesiones infinitas). La relación de contención define un orden en el conjunto Par de todas las particiones, llamado *orden de contención*.

$$(4, 3, 2, 1) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \subseteq \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \square \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \hline \cdot & \cdot & \square & & \\ \hline \cdot & & & & \\ \hline \end{array} = (5, 3, 3, 1).$$

El orden de contención no es un orden total, ya que no siempre es posible comparar dos particiones arbitrarias. Por ejemplo (4) y $(2, 2)$ no son comparables pues ninguno de los dos diagramas contiene al otro. En particular, cualquier pareja de particiones de un mismo entero no son comparables en este orden.

Un orden más refinado consiste en ordenar las particiones de modo lexicográfico. Es decir, $\lambda < \mu$ si existe un entero k tal que $\lambda_j = \mu_j$ para $1 \leq j \leq k$ y $\lambda_{k+1} < \mu_{k+1}$. El orden lexicográfico es un orden total, por lo que cualquiera dos particiones se pueden comparar. Por ejemplo, Par(4) que da totalmente ordenado como sigue:

$$(1, 1, 1, 1) < (1, 1, 2) < (2, 2) < (3, 1) < (4).$$

Finalmente, un tercer orden, que tendrá especial importancia en lo sucesivo, es el llamado *orden de dominación*.

Decimos que $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$ es dominado por $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots)$, lo cual se denota por $\lambda \trianglelefteq \mu$, si $|\lambda| = |\mu|$ y

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \leq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k$$

para toda k (nuevamente conviene considerar las particiones como sucesiones in-

2. Particiones y tablas de Young.

finitas). Por ejemplo $\lambda = (4, 3, 1, 1) \trianglelefteq \mu = (6, 2, 1)$ pues

$$\begin{aligned} 4 &\leq 6, \\ 4 + 3 &\leq 6 + 2, \\ 4 + 3 + 1 &\leq 6 + 2 + 1, \\ 4 + 3 + 1 + 1 &\leq 6 + 2 + 1 + 0. \end{aligned}$$

El orden de dominación no es un orden total, ya que $(5, 2, 2)$ y $(4, 4, 1)$ no son comparables: $5 \geq 2$ pero $5 + 2 \leq 4 + 4$.

2.4. Tablas de Young semiestándar.

Sea λ una partición. Si en cada casilla del diagrama de Young colocamos un número entero, obtenemos un *llenado* del diagrama.

Si un llenado es tal que las filas del diagrama son débilmente decrecientes y las columnas son estrictamente crecientes, obtenemos una *tabla de Young semiestándar*, o simplemente una *tabla de Young*.

Si T es una tabla de Young obtenida llenando el diagrama de λ , entonces λ es la forma de la tabla T .

Las siguientes son dos tablas semiestándar diferentes de una misma forma $\lambda = (4, 3, 1, 1)$:

2	5	5	6
3	6	7	
5			
6			

1	3	4	7
2	5	6	
8			
9			

Si T es una tabla de forma λ , al intercambiar las filas por columnas obtenemos una tabla T' de forma λ' . La tabla T' así obtenida se denomina la *tabla transpuesta* de T . Es claro que la tabla transpuesta de T' es nuevamente T .

El contenido $\text{cont}(T)$ de una tabla T es la sucesión $(c_1, c_2, \dots, c_k, \dots)$ donde c_k es el número de veces que k aparece en T . Así, para

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 6 & 7 & \\ \hline 5 & & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}$$

se tiene $\text{cont}(T) = (0, 1, 1, 0, 3, 3, 1)$. Notemos que el contenido de una tabla no necesariamente es una partición.

2. Particiones y tablas de Young.

Cuando la forma de una tabla es igual a su contenido, solo hay una forma de llenarla. A esta tabla de forma y contenido λ la denotamos por $U(\lambda)$. Por ejemplo, si $\lambda = (2, 2, 1)$, la única tabla de Young semiestandar de forma y contenido λ es

$$U((2, 2, 1)) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}.$$

Una tabla de forma $\lambda \vdash n$ que se llena con los números $1, 2, \dots, n$ de manera que cada uno de ellos aparece exactamente una vez, tiene contenido $(1, 1, \dots, 1)$ y se denomina *tabla de Young estándar*.

Por ejemplo,

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}, & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \end{array}, & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

son todas tablas de Young estándar y su contenido es $(1, 1, 1, 1)$.

Un diagrama sesgado es un diagrama que se obtiene borrando cuadros de un diagrama de Young, de forma que los cuadros borrados formen también un diagrama de Young. Si λ es un diagrama y μ es un diagrama contenido en λ , denotamos por λ/μ al diagrama sesgado obtenido al quitar μ de λ .

Por ejemplo, si $\lambda = (5, 3, 3, 1)$ y $\mu = (4, 2, 2)$, el diagrama sesgado λ/μ es el determinado al quitar las casillas marcadas:

$$\lambda/\mu = (5, 3, 3, 1)/(4, 2, 2) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \square \\ \hline \bullet & \bullet & \square & \square & \square \\ \hline \bullet & \bullet & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

Una tabla de Young sesgada consiste en un llenado de un diagrama sesgado de modo que las filas sean débilmente decrecientes y las columnas sean estrictamente crecientes, por ejemplo:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 3 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & 7 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 & \\ \hline \end{array}$$

Notemos que las tablas de Young son también tablas sesgadas (para $\mu = \emptyset$).

Si T es una tabla de Young, la *palabra fila* de T , o simplemente la palabra de T , se denota por $w(T)$ y se obtiene listando los elementos de la tabla por filas de abajo hacia arriba, cada fila de izquierda a derecha.

Así, para

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 & 5 \\ \hline 3 & 5 & 7 & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}$$

2. Particiones y tablas de Young.

tenemos $w(t) = 6\ 3\ 5\ 7\ 2\ 3\ 3\ 5$.

La palabra columna $w_{\text{col}}(T)$ de T se obtiene listando los elementos por columnas de derecha a izquierda, cada columna de abajo hacia arriba. Por ejemplo, para la tabla mencionada arriba se tiene $w_{\text{col}}(T) = 63253735$.

Las palabras fila y columna reversas, $w^*(T)$ y $w_{\text{col}}^*(T)$ se obtienen al invertir el orden de $w(T)$ y $w_{\text{col}}(T)$ respectivamente.

2.5. Inserción por columnas e inserción por filas.

A continuación describiremos el algoritmo denominado *inserción por columnas*. Sea T una tabla de Young semiestándar y c un entero no negativo. La inserción por columnas es un proceso por el cual se obtendrá una tabla denotada por $c \rightarrow T$ cuya forma difiere sólo en una casilla respecto a T .

Los pasos a seguir para insertar el entero c en la tabla T son los siguientes:

- Si c es estrictamente mayor que todos los enteros de la primera columna, se coloca al final de la misma y el proceso termina.
- En caso contrario, existe una primera casilla (de arriba hacia abajo) que contiene un entero c_1 que es mayor o igual a c . Intercambiamos entonces a c_1 por c en esta casilla y procedemos a insertar a c_1 en la siguiente columna. Decimos en este caso que c «botó» a c_1 de la primera columna.
- Si c_1 es estrictamente mayor que todos los enteros de la segunda columna, se coloca al final de la misma y el proceso termina.
- En caso contrario, existe una primera casilla de la segunda columna que contiene un entero c_2 mayor o igual que c_1 . Intercambiamos a c_2 por c_1 en tal casilla y procedemos a insertar c_2 en la tercera columna. Decimos que c_1 botó a c_2 a la tercera columna.
- El proceso continúa del mismo modo: Para insertar c_k en la columna k , si c_k es mayor que todas las entradas de la columna k , se agrega al final y el proceso termina. En caso contrario, encontramos la primera posición con un valor c_{k+1} mayor o igual que c_k e intercambiamos c_{k+1} por c_k en tal casilla, botando c_{k+1} a la columna siguiente.
- Si al llegar a la última columna r , el entero c_r bota a c_{r+1} , agregamos una nueva columna consistente de c_{r+1} y el proceso termina.

2. Particiones y tablas de Young.

A continuación ilustramos algunos ejemplos de inserción por columnas. Sea

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 5 & 6 & 7 & \\ \hline 8 & & & \\ \hline \end{array}$$

Ejemplo. Calcular $5 \rightarrow T$.

- Insertamos 5 en la primera columna, botando el 5 de la tercera fila (la primera entrada mayor o igual a 5), obteniendo

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 5 & 6 & 7 & \\ \hline 8 & & & \\ \hline \end{array}.$$

- Insertamos el 5 botado de la primera columna en la segunda, botando el 5 de la segunda columna:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 5 & 6 & 7 & \\ \hline 8 & & & \\ \hline \end{array}.$$

- Al insertar 5 en la tercera columna botamos el 6 y obtenemos

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 5 & 5 & 7 \\ \hline 5 & 6 & 7 & \\ \hline 8 & & & \\ \hline \end{array}.$$

- La inserción del 6 en la cuarta columna bota el 7:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 5 & 5 & 6 \\ \hline 5 & 6 & 7 & \\ \hline 8 & & & \\ \hline \end{array}.$$

- Al no haber más columnas, añadimos una columna consistente del 7 y termina el proceso.

$$5 \rightarrow T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ \hline 4 & 5 & 5 & 6 & \\ \hline 5 & 6 & 7 & & \\ \hline 8 & & & & \\ \hline \end{array}.$$

Ejemplo. Calcular $6 \rightarrow T$.

2. Particiones y tablas de Young.

- Si insertamos 6 en la tabla original, el 6 bota al 8 de la primera columna y obtenemos

2	2	4	5
4	5	6	7
5	6	7	
6			

- Como 8 es mayor que todos los elementos de la segunda columna, se agrega al final y el proceso termina:

$$6 \rightarrow T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 5 & 6 & 7 & \\ \hline 6 & 8 & & \\ \hline \end{array}.$$

Un hecho que no es obvio de la construcción anterior, es que el resultado final es una tabla de Young semiestándar. Para probarlo, demostraremos un hecho más general: cada uno de las etapas intermedias son también tablas de Young semiestándar.

Si en el paso k insertamos c_k en la k -ésima columna, ya sea que lo insertemos al final o botemos algún número, como botamos el primer valor mayor o igual a c_k , la nueva columna sigue siendo estrictamente creciente. Por tanto en todas las etapas las columnas permanecen en orden estrictamente creciente.

Supongamos que antes de ser botado c_k estaba en la fila m . Si había un entero a su derecha (esto es, en la columna k), debe ser mayor o igual a c_k por hipótesis de inducción, por lo que al insertar c_k en el paso k , necesariamente cae en una fila menor o igual a m .

Dicho de otro modo, al insertar un entero no puede terminar en una fila debajo de la que tenía antes de ser botado. Por ello en los ejemplos anteriores, las casillas marcadas (en las que se realizan los intercambios) están «subiendo» si recorremos las columnas de izquierda a derecha.

Ahora bien, si al insertar c_k queda en la misma fila que la anterior la nueva fila sigue siendo débilmente decreciente porque $c_{k-1} \leq c_k$. Por otro lado, si al insertar c_k queda en una fila más arriba de la que estaba en el paso anterior, la casilla que tiene a su izquierda es estrictamente menor que c_{k-1} y la que está a su derecha es mayor o igual al valor botado. Por tanto, la fila queda débilmente ordenada. Resumimos las observaciones anteriores en el siguiente teorema.

Teorema 1

El resultado de insertar por columnas un entero en una tabla de Young semiestán-

2. Particiones y tablas de Young.

dar es otra tabla de Young semiestándar.

Una pregunta natural al establecer un proceso es saber si se puede revertir. En este caso, dada una tabla y el entero que se insertó, recuperar la tabla original. El siguiente ejemplo muestra que esto no es posible, ya que una misma tabla se obtiene de insertar un mismo entero en dos tablas diferentes:

$$2 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} = 2 \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}.$$

Sin embargo, es posible revertir el proceso de inserción si se conoce la casilla extra que se agregó al final del proceso. Ilustremos el mecanismo con un ejemplo. Supongamos que la tabla S siguiente es el resultado de una inserción, y que la casilla marcada es la que se agregó al final

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 6 & 6 & 7 & \\ \hline 5 & 6 & 8 & & & \\ \hline \end{array}.$$

Dado que la última inserción fue el 7 de la quinta columna, debió ser botada de la columna anterior por el mayor número menor o igual a 7, en este caso, el 6. Por tanto, la etapa anterior (en la que se insertó el 6) debió ser

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 6 & 7 & & \\ \hline 5 & 6 & 8 & & & \\ \hline \end{array}.$$

Ahora, el 6 que se insertó en la cuarta columna debió ser botado de la tercera por el 6 (el mayor entero menor al que se botó), de modo que la etapa anterior fue

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 6 & 7 & & \\ \hline 5 & 6 & 8 & & & \\ \hline \end{array}.$$

El 6 que se insertó en la tercera columna debió ser botado por el 6 de la segunda. Así, el paso anterior fue

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 6 & 7 & & \\ \hline 5 & 6 & 8 & & & \\ \hline \end{array}.$$

Finalmente, el 6 que se insertó en la segunda columna fue botado por el 5 de la primera, con lo que concluimos que el entero insertado inicialmente fue 5 y la operación que se efectuó fue

$$5 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 6 & 7 & & \\ \hline 6 & 6 & 8 & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 6 & 6 & 7 & \\ \hline 5 & 6 & 8 & & & \\ \hline \end{array}.$$

2. Particiones y tablas de Young.

El mecanismo general para revertir el proceso es claro, la entrada que se bota en la columna anterior siempre es el mayor entero que es menor o igual al que se inserta en la siguiente.

A la sucesión de casillas en las que se realizan intercambios durante el proceso, que están marcadas en el ejemplo anterior se conoce como ruta de inserción. Así, la ruta de inserción en el último ejemplo consta de las casillas $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$ siendo $(2, 5)$ la casilla que se adicionó respecto a la tabla original.

Para concluir la sección, describiremos una notación usada para indicar la posición relativa entre dos casillas de una tabla. Decimos que una casilla A está al Norte (N) de otra casilla B si la fila de A está *estrictamente arriba* de la casilla de B , mientras que decimos que A está al norte (n) si la fila de A es menor o igual a la fila de B .

1	2	3	4	4	5	9
4	5	5	6	7	8	

El 3 está al Norte del 6, y el 6 está al norte del 8.

Una relación es más débil que la otra: si A está al Norte de B , entonces también está al norte de B , pero el converso no necesariamente es cierto.

De manera similar definimos notación para los demás puntos cardinales. Por ejemplo, la casilla A está al este de B si la columna de A es menor o igual a la de B , o decimos que la casilla A está al norte-Este (nE) de B si la fila de A es menor o igual a la de B pero la columna de A es estrictamente mayor que la de B .

		•	•	•
	5	•	•	

Las casillas marcadas están al norte-Este (nE) del 5.

Con esta propiedad podemos describir la propiedad de la ruta de inserción que se usó para probar que el resultado siempre es una tabla.

Teorema 2

Cada casilla de la ruta de inserción por columnas está al norte-Este de las anteriores.

Existe un algoritmo dual a la inserción por columnas, denominado inserción por filas. El resultado de insertar por filas el entero c en la tabla T se denota por $T \leftarrow c$ y el proceso es el siguiente:

- Si c es mayor o igual que todos los enteros de la primera fila, se coloca al final de la misma y el proceso termina.
- En caso contrario, existe una primera casilla (de izquierda a derecha) que contiene un entero c_1 que es estrictamente mayor a c . Intercambiamos en-

2. Particiones y tablas de Young.

tonces a c_1 por c en esta casilla y procedemos a insertar a c_1 en la siguiente fila. Decimos en este caso que c «botó» a c_1 de la primera fila.

- Si c_1 es mayor o igual que todos los enteros de la segunda fila, se coloca al final de la misma y el proceso termina.
- En caso contrario, existe una primera casilla de la segunda fila que contiene un entero c_2 mayor o igual que c_1 . Intercambiamos a c_2 por c_1 en tal casilla y procedemos a insertar c_2 en la tercera fila. Decimos que c_1 botó a c_2 a la tercera fila.
- El proceso continúa del mismo modo: Para insertar c_k en la fila k , si c_k es mayor o igual que todas las entradas de la columna k , se agrega al final y el proceso termina. En caso contrario, encontramos la primera posición con un valor c_{k+1} estrictamente mayor que c_k e intercambiamos c_{k+1} por c_k en tal casilla, botando c_{k+1} a la fila siguiente.
- Si al llegar a la última fila r , el entero c_r bota a c_{r+1} , agregamos una nueva fila consistente de c_{r+1} y el proceso termina.

Notemos que las desigualdades débiles y estrictas se invierten. El resultado de la inserción por filas es nuevamente una tabla de Young semiestándar y existen resultados duales para los resultados que se obtienen con inserción por filas. Por ejemplo, la ruta de inserción por filas ya no es en dirección norte-Este como en la inserción por columnas sino es en dirección Sur-oeste.

2.6. Inserción de palabras y equivalencia de Knuth

Si $w = w_1 w_2 \cdots w_r$ es una palabra y T es una tabla, definimos la *inserción por fila* de w en T como:

$$T \leftarrow w = (((T \leftarrow w_1) \leftarrow w_2) \cdots \leftarrow w_r) \quad (2.1)$$

y la *inserción por columna* de w en T como:

$$w \rightarrow T = (w_1 \rightarrow (w_2 \rightarrow \cdots (w_r \rightarrow T))). \quad (2.2)$$

Notemos que al insertar por filas, los elementos de la palabra se insertan en el orden en que se leen, pero al insertar por columnas se insertan en el orden contrario.

Decimos que dos palabras w_1, w_2 son Knuth-equivalentes (denotado $w_1 \equiv w_2$), cuando el resultado de la inserción por filas de ambas, es la misma tabla de Young

2. Particiones y tablas de Young.

semiestándar. Por ejemplo, si $w_1 = 3211$ y $w_2 = 3121$ tenemos

$$(\emptyset \leftarrow w_1) = (((\emptyset \leftarrow 3) \leftarrow 2) \leftarrow 1) \leftarrow 1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} = (\emptyset \leftarrow w_2),$$

por lo que w_1 y w_2 son Knuth-equivalentes. Recordemos ahora las palabras fila y columna w , w_{col} , descritas en en una sección anterior, es posible probar que si T es una tabla cualquiera, entonces

$$T = (\emptyset \leftarrow w(T)), \tag{2.3}$$

es decir toda palabra es Knuth-equivalente a la palabra fila de la tabla que se obtiene al inserción por fila la palabra original. Si usamos inserción por columnas podemos definir una relación de equivalencia similar, en donde dos palabras serían equivalentes si el resultado de insertarlas por columna es el mismo. Además, se tiene un resultado similar para la palabra columna:

$$T = (w_{\text{col}}(T) \rightarrow \emptyset) \tag{2.4}$$

por lo que toda palabra es Knuth-equivalente (por columnas) a la palabra columna de la tabla que genera.

En [3] se demuestra que la inserción por filas y la inserción por columnas de una palabra tiene el mismo resultado:

Teorema 3

Si $w = w_1 w_2 \cdots w_r$ es una palabra cualquiera, entonces

$$w \rightarrow \emptyset = w_1 \rightarrow (w_2 \rightarrow \cdots (w_r \rightarrow \emptyset)) = (((\emptyset \leftarrow w_1) \leftarrow w_2) \cdots \leftarrow w_r). \tag{2.5}$$

Notemos nuevamente que el orden en que se insertan los elementos en cada inserción es contrario del orden en la otra. De lo anterior, se tiene que las equivalencias definidas anteriormente son en realidad la misma:

Teorema 4

Para cualquier tabla T

$$w_{\text{col}}(T) \equiv w(T). \tag{2.6}$$

Vamos a ilustrar todo lo expuesto con ejemplos. Sea $w = 21243$. Si procedemos a insertar $w \rightarrow \emptyset$ obtenemos la sucesión de tablas

$$\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}$$

2. Particiones y tablas de Young.

mientras que al insertar $\emptyset \leftarrow w$ obtenemos

$$\boxed{2}, \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}$$

y el resultado final de ambas inserciones es la misma tabla $T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}$. Las palabras fila y columna de T son respectivamente

$$w(T) = 24123, \quad w_{\text{col}}(T) = 21423,$$

ambas palabras diferentes de w . La inserción por filas (o columna) de ambas da origen a la misma tabla T . Como ilustración daremos la inserción por columnas:

$$w(T) \rightarrow \emptyset : \quad \boxed{3}, \quad \boxed{2 \ 3}, \quad \boxed{1 \ 2 \ 3}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array} \quad (2.7)$$

$$w_{\text{col}}(T) \rightarrow \emptyset : \quad \boxed{3}, \quad \boxed{2 \ 3}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array} \quad (2.8)$$

3. La correspondencia RSK.

Usando la inserción por filas es posible construir una correspondencia entre matrices con entradas enteras no negativas y pares de tablas de la misma forma. Tal correspondencia se conoce como la correspondencia Robinson-Schensted-Knuth . El objetivo de este capítulo es describir a detalle tal correspondencia y explorar su relevancia.

Introduciremos primero el concepto de *márgenes* de una matriz. Si $A = (a_{ij})$, el *margen por renglones* es el vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ donde

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tag{3.1}$$

mientras que el *margen por columnas* es el vector $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ dado por

$$\mu_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}. \tag{3.2}$$

Es decir, λ es el vector de las sumas por fila de la matriz A , mientras que μ es el vector de sumas por columna.

3.1. Descripción de la correspondencia RSK.

La correspondencia RSK consta en realidad de 2 biyecciones. Una entre matrices con entradas no negativas y arreglos de 2 filas con cierto orden; la segunda entre tales arreglos y pares de tablas de Young de la misma forma.

Sea A una matriz de $m \times n$ con entradas enteras no negativas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

3. La correspondencia RSK.

A tal matriz le asignamos el arreglo

$$\omega = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_t \\ v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_t \end{pmatrix}$$

que consta de a_{ij} columnas de la forma $\binom{i}{j}$. En tal arreglo supondremos adicionalmente que las entradas se ordenan lexicográficamente, primero por la fila de arriba y luego por la de abajo.

Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces el arreglo de dos filas asociado es

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

la cual tiene $a_{11} = 3$ columnas de la forma $\binom{1}{1}$, $a_{12} = 0$ columnas de la forma $\binom{1}{2}$, $a_{21} = 4$ columnas de la forma $\binom{2}{1}$ y $a_{22} = 2$ columnas de la forma $\binom{2}{2}$.

La asignación es reversible, pues dado un arreglo de dos filas obtenemos la matriz inicial haciendo a_{ij} igual al número de columnas de la forma $\binom{i}{j}$. En las biyecciones anteriores, el arreglo está ordenado sólo para tener unicidad en la representación de los arreglos, pero el orden cobrará relevancia al describir la segunda biyección de la correspondencia RSK.

Notemos finalmente, que el número de columnas del arreglo de dos filas es igual a la suma de todos los elementos de la matriz A de $m \times n$ asociada. Todas las observaciones anteriores quedan reunidas en el siguiente resultado.

Proposición 5

Existe una biyección entre arreglos de tamaño $2 \times s$ ordenados lexicográficamente y matrices con entradas enteras no negativas cuyos elementos suman s .

Ahora, usaremos la inserción por filas para establecer una segunda biyección. Sea

$$\omega = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_t \\ v_1 & v_2 & \dots & v_t \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

y consideremos las palabras, $u = u_1 u_2 \dots u_t$ y $v = v_1 v_2 \dots v_t$. Vamos a construir un par de tablas (P, Q) a partir de las palabras u, v como sigue:

- Sean $P_1 = \boxed{v_1}$ y $Q_1 = \boxed{u_1}$.

3. La correspondencia RSK.

- Para $k \geq 1$, tomamos P_{k+1} como $P_k \leftarrow v_k$.
- Para $k \geq 1$, tomamos Q_{k+1} como la tabla obtenida de Q_k agregando u_k en misma posición que la casilla de P_{k+1} que fue añadida a P_k .
- Al final del proceso tomamos $P = P_t$ y $Q = Q_t$.

Notemos que de este modo, $P = \emptyset \leftarrow v$. Vamos a ilustrar el proceso con un ejemplo. Sea

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces $u = 11223$ y $v = 13221$. La sucesión de tablas que se obtiene es:

$$(P_1, Q_1) = (\boxed{1}, \boxed{1}) \quad (3.4)$$

$$(P_2, Q_2) = (\boxed{1 \ 3}, \boxed{1 \ 1}) \quad (3.5)$$

$$(P_3, Q_3) = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \right) \quad (3.6)$$

$$(P_4, Q_4) = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \right) \quad (3.7)$$

$$(P_5, Q_5) = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array} \right) = (P, Q) \quad (3.8)$$

A la tabla P le llamamos la "tabla de inserción" y a la tabla Q la "tabla de registro", haciendo referencia a la forma en que fueron construidas.

Teorema 6

La correspondencia $\omega \rightarrow (P, Q)$ es una biyección entre arreglos de dos filas ordenados lexicográficamente y pares de tablas de Young semiestándar de la misma forma.

Sabemos que la inserción por filas siempre da origen a una tabla de Young semiestándar, por lo que P siempre es una tabla de Young, por lo que solo tenemos que probar que Q es una tabla de Young semiestándar. Los elementos de Q se agregan en un orden débilmente decreciente, ya que son los valores de la primera fila de ω , y por tanto cada que se agrega una neuva casilla, el elemento que tiene es mayor o igual que los ya agregados anteriormente, de modo que cada fila se mantiene débilmente decreciente. Pero adicionalmente, las columnas deben estar en orden estrictamente creciente. Si $u_k = u_{k+1}$ entonces $v_k \leq v_{k+1}$, y por el Lema de Inserción por columnas ([3] p. 9), la ruta de inserción en P de v_{k+1} está estrictamente a la derecha y no termina debajo de la ruta de inserción de v_k . Esto garantiza que la casilla en la que se agrega u_{k+1} está en una columna diferente a la

3. La correspondencia RSK.

que se inserta u_k , y más aún, los elementos iguales de Q se agregan de izquierda a derecha.

Ahora hay que verificar que la correspondencia es biyectiva, para lo cual hay que describir que el proceso es reversible. Sabemos que la inserción por filas por sí misma no es reversible, porque dos palabras pueden dar origen a la misma tabla, pero con la ayuda de la tabla de registro podremos establecer de forma explícita de qué arreglo de dos filas ω se originó la tabla.

Recordemos que Q se obtiene a partir de la palabra $u_1 u_2 \cdots u_t$ la cual es débilmente decreciente. Para obtener entonces u_t , buscamos el mayor elemento z de Q . Si hay varias casillas con ese valor z , recordamos que valores iguales se agregan de izquierda a derecha de modo que la casilla con el valor z que se encuentre más a la derecha fue la última en agregarse a Q y $u_t = z$. Eliminando esa casilla obtenemos Q_{t-1} .

Ahora, en la tabla P , es posible deshacer la inserción por fila ya que conocemos la última casilla que fue agregada, de manera similar a la explicada en el capítulo anterior, de modo que obtengamos el valor v_t y la tabla P_{t-1} en la que fue insertado. De este modo, tenemos la última columna $\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}$ de ω y el par de tablas (P_{t-1}, Q_{t-1}) del paso anterior. Repetimos ahora el proceso en ese par de tablas para obtener la penúltima columna y continuamos hasta obtener la primera columna de ω . Esto muestra que el algoritmo es invertible y que dado cualquier par de tablas de la misma forma, es posible obtener un arreglo ω que da origen a ellas, y esto termina la prueba.

Recordemos que tenemos una biyección entre matrices y arreglos de dos filas. Si bajo esta biyección una matriz A se corresponde a un arreglo ω , el número de elementos 1 que aparece en la primera fila de ω es la suma de los elementos de la primera fila de A , el número de elementos 2 en la primera fila de ω es la suma de los elementos de la segunda fila A y así sucesivamente. De manera similar, la cantidad de elementos j en la segunda fila de ω es la suma de los elementos de la j -ésima columna de la matriz.

Por otro lado, sea el contenido de P es (p_1, p_2, \dots) (es decir, si p_1 es el número de casillas con valor 1, p_2 el número de casillas con valor 2, etc.) Entonces por construcción p_1 es el número de elementos 1 en la segunda fila de ω , p_2 el número de elementos 2 en la segunda fila de ω , etc. La observación anterior nos dice entonces que el contenido de P es igual al margen de las columnas de A . De manera similar podemos concluir que el contenido de Q es el margen de las filas de A . Reunimos todas las conclusiones en el siguiente teorema.

3. La correspondencia RSK.

Teorema 7

Existe una biyección entre matrices con entradas enteras no negativas cuyos márgenes son λ, μ y pares de tablas de Young (P, Q) semiestándar de la misma forma y cuyos contenidos son μ, λ . De forma más explícita, λ es el margen de renglones de la matriz y es el contenido de Q , mientras que μ es el margen de las columnas y contenido de P .

El algoritmo que establece las correspondencias $A \rightarrow \omega \rightarrow (P, Q)$ se conoce como algoritmo de Robinson-Schensted-Knuth (o simplemente algoritmo RSK). Este algoritmo ha sido tema de muchos trabajos y posee numerosas y variadas aplicaciones.

Un teorema que será importante en los capítulos posteriores es el *Teorema de simetría* que se enuncia a continuación.

Teorema 8

Si la matriz A se corresponde al par de tablas (P, Q) bajo la correspondencia RSK, entonces el par de tablas (Q, P) corresponde a la matriz A^t .

El teorema es notable, pues del algoritmo no es obvio que las matrices P, Q juegan papeles simétricos, ya que la construcción de P (por inserción) es diferente a la construcción de Q (por registro). El teorema nos permite construir entonces tanto a P como Q mediante inserciones apropiadas. La prueba del teorema de simetría se encuentra en [3] y [7].

Un caso particular del algoritmo RSK es cuando el arreglo de dos filas es una permutación. Esto sucede cuando la matriz A consta de unos y ceros, con exactamente un 1 en cada fila y en cada columna, es decir, cuando A es una matriz de permutación. En este caso, el contenido de P y de Q son ambos de la forma $(1, 1, 1, \dots, 1)$, es decir, la tabla que se obtiene es una tabla de Young estándar.

El teorema de simetría, en este caso, puede expresarse también en términos del arreglo de dos filas (la permutación):

Teorema 9

Si ω es una permutación que corresponde al par de tablas (P, Q) bajo el algoritmo RSK, entonces (Q, P) corresponde a la permutación ω^{-1} .

Para finalizar damos una aplicación de los resultados expuestos.

3. La correspondencia RSK.

Teorema 10

Sea f^λ el número de tablas de Young estándar. Entonces

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!.$$

Notemos que $(f^\lambda)^2$ es el número de formas de escoger dos tablas (P, Q) de manera que ambas sean tablas de Young estándar de forma λ , por lo que $\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2$ es el número de formas de escoger pares de tablas de Young estándar de la misma forma con n casillas. Bajo la correspondencia RSK, cada una de ellas corresponde a una permutación ω de S_n , por lo que el total de parejas de tablas es el número de permutaciones, $n!$.

El teorema anterior tiene una interpretación algebraica, en términos de caracteres que será mencionada en el capítulo siguiente.

4. Caracteres y matrices.

4.1. Representaciones.

Sea G un grupo. Una *representación* ρ de G es un homomorfismo $G \rightarrow GL(\mathbb{C}, n)$. Esto es:

$$\begin{aligned}\rho(e_G) &= I, \\ \rho(gh) &= \rho(g)\rho(h), \quad \forall g, h \in G.\end{aligned}$$

donde I es la matriz identidad de $GL(\mathbb{C}, n)$. El valor n es llamado el grado o dimensión de la representación.

Por ejemplo, sea $G = S_3$ un grupo simétrico. Si $\sigma \in S_n$, asociemos $\rho(\sigma)$ como la matriz de permutación $A_\sigma = (a_{ij})$ donde $a_{ij} = 1$ si $\sigma(i) = j$ y $a_{ij} = 0$ en los demás casos. Entonces ρ es una representación de G en $GL(\mathbb{C}, 3)$.

Podemos describir una representación en términos de G -módulos. Sea V el espacio vectorial \mathbb{C}^d . Entonces definiendo $g \cdot v$ como $\rho(g)v$ (producto de matrices) V adquiere estructura de G -módulo, es decir:

$$\begin{aligned}gv &\in V, \\ g(av + bw) &= a(gv) + b(gw), \\ (gh)v &= g(hv), \\ e_G v &= v.\end{aligned}$$

De manera inversa, dado un G -módulo V , fijando una base B para el espacio vectorial V obtenemos una representación donde $\rho(g)$ será la matriz de la transformación lineal gv en la base V .

La representación dada arriba corresponde al módulo obtenido tomando la base estándar $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{C}^3 y donde $\sigma \cdot e_i = e_j$. Por ejemplo, si $\sigma = (1, 2, 3)$ entonces

$$\sigma \cdot e_1 = e_2, \quad \sigma \cdot e_2 = e_3, \quad \sigma \cdot e_3 = e_1,$$

4. Caracteres y matrices.

de modo que la matriz correspondiente a σ es la matriz

$$\rho(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0. \end{pmatrix},$$

que es precisamente la matriz de permutación asociada a $(1, 2, 3)$.

Si V es un G -módulo, entonces decimos que W es un *submódulo* si W es un subespacio vectorial de V cerrado bajo la acción de G , es decir, si $w \in W$ entonces $gw \in W$. Todo módulo se contiene a si mismo y al módulo trivial como submódulos. Un módulo es *irreducible* si no contiene submódulos propios diferentes del trivial.

Nuevamente, para S_3 con la representación de definición sobre \mathbb{C}^3 , notamos que el subespacio vectorial $W = \langle (1, 1, 1) \rangle$ es un subespacio vectorial invariante bajo la acción del grupo. Por tanto, W es un S_3 -submódulo no trivial de V y por tanto la representación es irreducible.

Una representación que se puede descomponer como suma directa de submódulos irreducibles se llama una *representación completamente reducible*. El teorema de Maschke ([?, ?, Sagan] pag. 16). establece que toda representación de un grupo finito de dimensión positiva es completamente reducible.

4.2. Caracteres.

Sea $\rho(g)$ una representación de un grupo G . Definimos el *caracter* χ de ρ como

$$\chi(g) = \text{tr } \rho(g).$$

Si V es un G -módulo, entonces el caracter de G es el caracter de la representación de matrices asociada. El caracter de V no depende de la base escogida, por lo que la definición anterior es válida.

Si V es un G -módulo irreducible, decimos entonces que el caracter χ es un *caracter irreducible*, en caso contrario decimos que χ es un caracter reducible.

Por ejemplo, para el S_3 -módulo que estamos considerando en los ejemplos previos:

$$\chi(e) = 3, \quad \chi((1, 2)) = 1, \quad \chi((1, 3)) = 1 \quad (4.1)$$

$$\chi((2, 3)) = 1, \quad \chi((1, 2, 3)) = 0, \quad \chi((1, 3, 2)) = 0. \quad (4.2)$$

En general, para S_n , obtendríamos $\chi(\sigma)$ como el número de puntos fijos de σ .

4. Caracteres y matrices.

Los caracteres son de especial importancia ya que proporcionan información acerca de la representación que les da origen. Los siguientes resultados ([6], pag. 31) y ([9], pag. 123) ejemplifican la relación entre una representación y su caracter:

Teorema 11

Sea G un grupo y sean χ, ψ representaciones de G en $GL(\mathbb{C}, n)$. Entonces:

- $\chi(e) = n$.
- $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.
- Si g, h son elementos conjugados de G entonces $\chi(g) = \chi(h)$.
- G -módulos isomórficos tienen el mismo caracter.
- Representaciones equivalentes tienen el mismo caracter.

Podemos verificar las primeras dos afirmaciones en el ejemplo dado para S_3 .

4.3. Producto interno de caracteres.

Un caracter puede ser descrito como un vector de valores complejos:

$$\chi = \{\chi(e), \chi(g_1), \chi(g_2), \dots, \chi(g_t)\}$$

listando todos los valores que toma χ al recorrer G . En general, el conjunto de todas las funciones de G en \mathbb{C} forma un espacio vectorial, y los caracteres son elementos de este espacio.

Podemos definir un producto interno entre funciones de G en \mathbb{C} como sigue. Sean ϕ, φ dos funciones de G en $GL(\mathbb{C}, n)$. Entonces

$$\langle \phi, \varphi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) \overline{\varphi(g)}.$$

El producto definido es entonces, un producto interno. Ahora, para el caso de caracteres, usando que $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$ podemos reescribir el producto de χ y ψ como

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}). \quad (4.3)$$

Sean χ, ψ caracteres irreducibles de G , entonces ([6], pag. 35):

$$\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi, \psi}. \quad (4.4)$$

4. Caracteres y matrices.

En el caso de la representación de permutación de S_n , notamos que una permutación y su inversa pertenecen a la misma clase de conjugación. Por tanto el producto interno se puede reescribir como

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi(\sigma) \psi(\sigma). \quad (4.5)$$

Una consecuencia de la relación anterior entre productos de caracteres irreducibles es el siguiente teorema ([9], pag. 142.):

Teorema 12

Sean χ_1, χ_2, χ_k los diferentes caracteres irreducibles de G . Si ψ cualquier caracter entonces

$$\psi = d_1 \chi_1 + d_2 \chi_2 + \cdots + d_k \chi_k \quad (4.6)$$

para enteros no negativos d_1, d_2, \dots, d_k . Además

$$d_k = \langle \psi, \chi_k \rangle, \quad (4.7)$$

$$\langle \psi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^k d_i^2. \quad (4.8)$$

4.4. Módulos de permutación

Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)$ una partición de n . Definimos el *subgrupo de Young* S_λ como

$$S_\lambda = S_{\{1,2,\dots,\lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1,\lambda_1+2,\dots,\lambda_1+\lambda_2\}} \times \cdots \times S_{\{n-\lambda_1+1,\dots,\lambda_n\}}. \quad (4.9)$$

Se puede comprobar que

$$S_\lambda \cong S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \cdots \times S_{\lambda_t}. \quad (4.10)$$

Sea T una tabla de Young de forma λ con entradas $(1, 2, 3 \dots, n)$. Entonces S_n actúa sobre el conjunto de tablas de Young de modo que si $\sigma \in S_n$ entonces σT es la tabla obtenida intercambiando las entradas de T según la regla $i \rightarrow \sigma(i)$.

Por ejemplo, si $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$ y $\sigma = (1, 2) \in S_3$ entonces $\sigma T = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}$. Definimos entonces una relación $T_1 \sim T_2$ en el conjunto de tablas de forma λ si T_1 y T_2 tienen

4. Caracteres y matrices.

los mismos elementos en cada fila (aunque en diferente orden). Esta relación es una relación de equivalencia.

Entonces la acción de σ en el conjunto de tablas induce una acción en el conjunto de clases de equivalencia:

$$\sigma\{T\} = \{\sigma T\}.$$

Podemos comprobar que S_λ es el subgrupo de S_n que deja fijas las clases de equivalencia.

Esta acción da origen a un S_n -módulo M^λ que se conoce como el *módulo de permutación* correspondiente a λ .

Como ejemplos, si $\lambda = \{(n)\}$ entonces todas las tablas de forma λ son equivalentes (ya que todas tienen a $\{1, 2, \dots, n\}$ como elementos de su única fila. Entonces $M^{(n)}$ es el módulo dado por la acción trivial.

So $\lambda = (1^n)$ entonces cada clase de equivalencia consta de una única tabla

$$T = \begin{array}{|c|} \hline t_1 \\ \hline t_2 \\ \hline \dots \\ \hline t_n \\ \hline \end{array},$$

la cual puede identificarse con una permutación. Como la acción de S_n se preserva, $M^{(1^n)}$ es isomorfo a representación regular $\mathbb{C}S_n$.

Finalmente, si $\lambda = (n-1, 1)$ entonces cada clase de equivalencia queda determinada por el elemento de la segunda fila, por lo que se puede construir un isomorfismo

$$M^{(n-1,1)} \cong \mathbb{C}\{1, 2, \dots, n\},$$

la representación definitoria.

Cada S_n -módulo M^λ tiene asociado un caracter ϕ^λ conocido como *caracter de permutación* asociado a λ . Finalmente, los caracteres irreducibles de S_n vienen indexados por particiones ([6], pag. 66), al caracter irreducible asociado a λ lo denotamos por χ^λ .

Podemos entonces preguntarnos por la descomposición de ϕ^λ en caracteres irreducibles:

$$\phi^\mu = \sum_{\lambda \vdash n} K_{\lambda\mu} \chi^\lambda. \tag{4.11}$$

El teorema que nos dice el valor de $K_{\lambda\mu}$ se conoce como *Regla de Young*:

Teorema 13 (Regla de Young)

La multiplicidad de χ^λ en ϕ^λ en la descomposición 4.11, es decir, el número $K_{\lambda,\mu}$

4. Caracteres y matrices.

es igual al número de tablas de Young semiestándar de forma λ y contenido μ .

La prueba se encuentra en ([3], pag. 92), ([6], pag 85.). Dado que no hay tablas de Young semiestándar en donde la forma no domine al contenido, basta restringir la suma anterior para $\lambda \supseteq \mu$.

4.5. Particiones de dos partes.

El objetivo de este trabajo es determinar fórmulas para $c(\lambda, \mu, \nu)$, que es la multiplicidad de χ^ν en el producto tensorial $\chi^\lambda \otimes \chi^\mu$ en el caso de que λ, μ, ν sean todas particiones de 2 partes. Usaremos varias descripciones combinatorias de ciertos productos de caracteres para obtener fórmulas para $c(\lambda, \mu, \nu)$.

Sea $\lambda = (n - a, a)$ una partición de dos partes. La regla de Young nos dice que

$$\phi^\lambda = \sum_{\alpha \supseteq \lambda} \chi^\alpha = \chi^{(n-a, a)} + \chi^{(n-a+1, a-1)} + \dots + \chi^{(n-1, 1)} + \chi^{(n)}. \quad (4.12)$$

Sea $\tilde{\lambda} = (\lambda_1 + 1, \lambda_2 - 1)$. La regla de Young aplicada a $\phi^{\tilde{\lambda}}$ arroja

$$\phi^{\tilde{\lambda}} = \sum_{\alpha \supseteq \tilde{\lambda}} \chi^\alpha = \chi^{(n-a+1, a-1)} + \dots + \chi^{(n-1, 1)} + \chi^{(n)}. \quad (4.13)$$

Restando ambas expresiones obtenemos

$$\chi^\lambda = \phi^\lambda - \phi^{\tilde{\lambda}}. \quad (4.14)$$

La relación anterior tendrá especial importancia en la segunda parte de este trabajo.

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de $m \times n$, definimos los márgenes de la matriz como los vectores:

$$\text{fila}(A) = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right)_{i=1}^m, \quad \text{col}(A) = \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right)_{j=1}^n \quad (4.15)$$

es decir, $\text{fila}(A)$ es el vector cuyo k -ésimo elemento es la suma de las entradas de la k -ésima fila de A , y $\text{col}(A)$ el vector cuyo k -ésimo elemento es la suma de las entradas de la k -ésima columna de A . Si $\lambda = \text{fila}(A)$ y $\mu = \text{col}(A)$ entonces decimos que A tiene por márgenes las composiciones λ, μ

El conjunto de matrices con entradas enteras no negativas cuyos márgenes son λ y μ se denota $M(\lambda, \mu)$ y denotamos su cardinalidad como $m(\lambda, \mu)$.

4. Caracteres y matrices.

Ahora, sea $A = (a_{ijk})$ es una matriz tridimensional de tamaño $p \times q \times r$. De manera similar al caso de matrices planas, en que sumamos vectores filas y columnas, vamos a considerar vectores de sumas de planos.

Sean λ, μ, ν las composiciones de n definidas por

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r a_{ijk} \quad (4.16)$$

$$\mu_j = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^r a_{ijk} \quad (4.17)$$

$$\nu_k = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_{ijk} \quad (4.18)$$

$$(4.19)$$

Entonces λ, μ, ν son las 1-márgenes de A .

Al conjunto de matrices 3-dimensionales con márgenes λ, μ, ν lo denotamos por $M(\lambda, \mu, \nu)$ y a su cardinalidad la denotamos por $m(\lambda, \mu, \nu)$.

En la segunda parte del trabajo proporcionaremos un método usando tales conjuntos para calcular $c(\lambda, \mu, \nu)$. El esquema se describe a continuación.

Desarrollando el producto $c(\lambda, \mu, \nu) = \langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \chi^\nu \rangle$ usando que $\chi^\lambda = \phi^\lambda - \phi^{\check{\lambda}}$, $\chi^\mu = \phi^\mu - \phi^{\check{\mu}}$, $\chi^\nu = \phi^\nu - \phi^{\check{\nu}}$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \chi^\nu \rangle &= \langle \phi^\lambda \otimes \phi^\mu, \phi^\nu \rangle - \langle \phi^{\check{\lambda}} \otimes \phi^\mu, \phi^\nu \rangle - \langle \phi^\lambda \otimes \phi^{\check{\mu}}, \phi^\nu \rangle - \langle \phi^\lambda \otimes \phi^\mu, \phi^{\check{\nu}} \rangle \\ &\quad + \langle \phi^{\check{\lambda}} \otimes \phi^{\check{\mu}}, \phi^\nu \rangle + \langle \phi^{\check{\lambda}} \otimes \phi^\mu, \phi^{\check{\nu}} \rangle + \langle \phi^\lambda \otimes \phi^{\check{\mu}}, \phi^{\check{\nu}} \rangle - \langle \phi^{\check{\lambda}} \otimes \phi^{\check{\mu}}, \phi^{\check{\nu}} \rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

En [7] se da una interpretación combinatoria del producto $\langle \phi^\lambda, \phi^\mu \rangle$ como el número de matrices de entradas enteras no negativas con márgenes λ, μ . Es decir $\langle \phi^\lambda, \phi^\mu \rangle = m(\lambda, \mu)$.

Un resultado similar, pero para tres factores, fue encontrado por Snapper en [?] el cual dice que

$$\langle \phi^\lambda \otimes \phi^\mu, \phi^\nu \rangle = m(\lambda, \mu, \nu) \quad (4.21)$$

Ese resultado nos permite interpretar la suma alternante de productos mencionada como una suma alternante de cardinalidades de conjuntos. Sin embargo, la suma obtenida es difícil de calcular ya que los números involucrados suelen ser muy grandes, por lo que es necesario considerar formas de cancelar y simplificar términos de la suma alternante. La realización de esto constituye la primera parte de la segunda mitad del trabajo.

4. Caracteres y matrices.

Finalmente, se estudiará otro método para evaluar $c(\lambda, \mu, \nu)$ con otra descripción combinatoria. Desarrollando $\chi^\nu = \phi^\nu - \phi^{\check{\nu}}$ tenemos

$$\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \chi^\nu \rangle = \langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \phi^\nu \rangle - \langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \phi^{\check{\nu}} \rangle. \quad (4.22)$$

Una consecuencia de la regla de Littlewood-Richardson es que $\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \phi^\nu \rangle$ puede interpretarse en términos de multitablas de Littlewood-Richardson:

$$\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \phi^\nu \rangle = \text{lr}(\lambda, \mu; \nu). \quad (4.23)$$

donde $\text{lr}(\lambda, \mu; \nu)$ es el número de pares (T, S) de multitablas de Littlewood-Richardson con formas λ, μ y contenido ν . Al conjunto de tales tablas lo denotamos por $\text{LR}(\lambda, \mu; \nu)$.

Después, usando una correspondencia descrita en [8], se establecerá una correspondencia entre $\text{LR}(\lambda, \mu; \nu)$ y un conjunto de matrices tridimensionales con márgenes λ, μ, ν sujetos a condiciones adicionales. La deducción de estas condiciones adicionales y el desarrollo subsiguiente para encontrar a $c(\lambda, \mu, \nu)$ constituye la segunda y final mitad del trabajo.

Parte II.
Cálculos combinatorios.

5. Primer método de conteo.

Vamos a aplicar el método descrito con anterioridad para calcular el producto de Kronecker $\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \chi^\nu \rangle$ cuando λ, μ, ν tienen dos partes. Usaremos que $\chi^\nu = \phi^\nu - \phi^{\tilde{\nu}}$ y desarrollamos el producto como

$$\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \chi^\nu \rangle = \langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \phi^\nu - \phi^{\tilde{\nu}} \rangle \quad (5.1)$$

$$= \langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \phi^\nu \rangle - \langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \phi^{\tilde{\nu}} \rangle \quad (5.2)$$

Hacemos el mismo desarrollo separando ahora $\chi^\lambda = \phi^\lambda - \phi^{\tilde{\lambda}}$ y $\chi^\mu = \phi^\mu - \phi^{\tilde{\mu}}$ y al expandir todos los productos obtenemos al final

$$\begin{aligned} \langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \chi^\nu \rangle &= \langle \phi^\lambda \otimes \phi^\mu, \phi^\nu \rangle - \langle \phi^{\tilde{\lambda}} \otimes \phi^\mu, \phi^\nu \rangle - \langle \phi^\lambda \otimes \phi^{\tilde{\mu}}, \phi^\nu \rangle - \langle \phi^\lambda \otimes \phi^{\tilde{\mu}}, \phi^{\tilde{\nu}} \rangle \\ &+ \langle \phi^{\tilde{\lambda}} \otimes \phi^{\tilde{\mu}}, \phi^\nu \rangle + \langle \phi^{\tilde{\lambda}} \otimes \phi^\mu, \phi^{\tilde{\nu}} \rangle + \langle \phi^\lambda \otimes \phi^{\tilde{\mu}}, \phi^{\tilde{\nu}} \rangle - \langle \phi^{\tilde{\lambda}} \otimes \phi^{\tilde{\mu}}, \phi^{\tilde{\nu}} \rangle. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Pero el producto $\langle \phi^\lambda \otimes \phi^\mu, \phi^\nu \rangle$ tiene una interpretación combinatoria como el número de matrices 3-dimensionales con 1-márgenes λ, μ, ν , es decir $\langle \phi^\lambda \otimes \phi^\mu, \phi^\nu \rangle = m(\lambda, \mu, \nu)$, por lo que la diferencia que nos interesa calcular es:

$$\begin{aligned} m(\lambda, \mu, \nu) - m(\tilde{\lambda}, \mu, \nu) - m(\lambda, \tilde{\mu}, \nu) - m(\lambda, \mu, \tilde{\nu}) \\ + m(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \nu) + m(\tilde{\lambda}, \mu, \tilde{\nu}) + m(\lambda, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) - m(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

que podemos visualizar mediante la retícula de la Figura 5.1 en el cual, las filas 1 y 3 tienen signos positivos, mientras que las filas 2 y 4 tienen signos negativos.

Nuevamente, hay que seleccionar pares de sumandos que tengan signos opuestos para tratar de cancelar sus términos. En esta situación no podremos dar biyecciones completas, sino biyecciones parciales, es decir, funciones inyectivas de un subconjunto del dominio en el contradominio, calculando el valor final como el número de matrices del contradominio sin preimagen menos el número de matrices en el dominio que no fueron tomadas en cuenta.

Antes de proceder, haremos ciertas convenciones sobre la representación de las matrices tridimensionales.

5. Primer método de conteo.

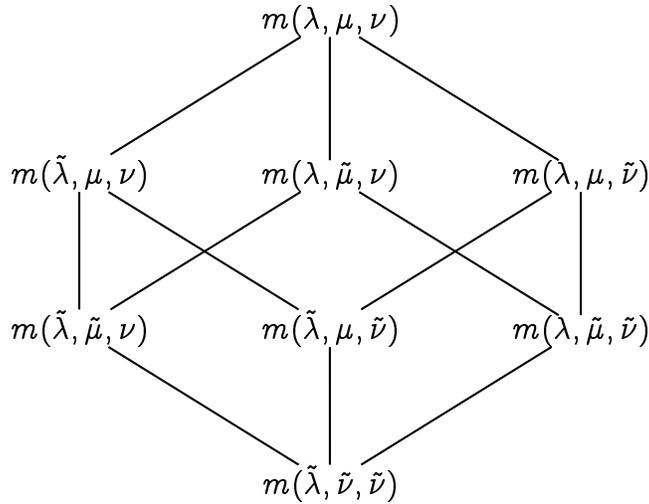
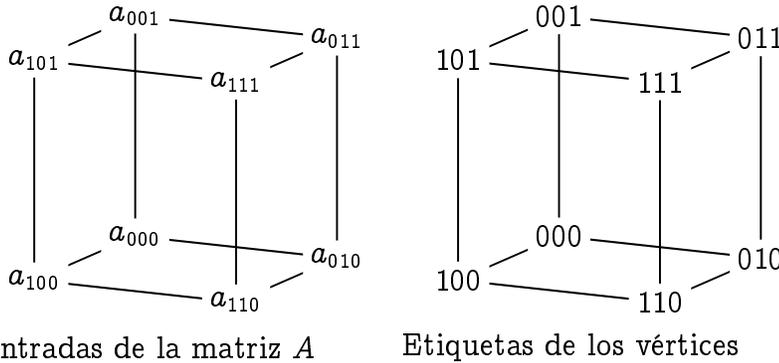


Figura 5.1.: Retícula de la suma alternante.



Entradas de la matriz A Etiquetas de los vértices

Figura 5.2.: Entradas y etiquetas de posición en una matriz $2 \times 2 \times 2$.

Si A es una matriz de $2 \times 2 \times 2$ con márgenes λ, μ, ν , las entradas de la matriz estarán en los vértices de un cubo unitario, y las posiciones vértices se etiquetarán con ternas de enteros, cada uno de ellos igual a 0 o 1 como se describe a continuación.

Si la matriz tiene márgenes λ, μ, ν , por convención, las esquinas de la forma $1_ _$ formarán la cara que suma λ_2 y las de la forma $0_ _$ forman la cara cuya suma es λ_1 ; las esquinas de la forma $_1 _$ y $_0 _$ forman las caras cuya suma es μ_2 y μ_1 respectivamente; finalmente las caras $_ _1$ y $_ _0$ forman las caras de suma ν_2 y ν_1 . Así, las caras «mayores» (es decir las caras que corresponden a las partes mayores de cada partición) son las que están cercanas al origen, mientras que las caras pequeñas son las que están más alejadas. Como ilustración, la figura 5.3 indica las caras cuyas sumas son las partes de μ .

5. Primer método de conteo.

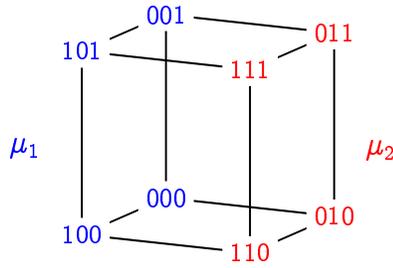


Figura 5.3.: Caras con márgenes $\mu = (\mu_1, \mu_2)$.

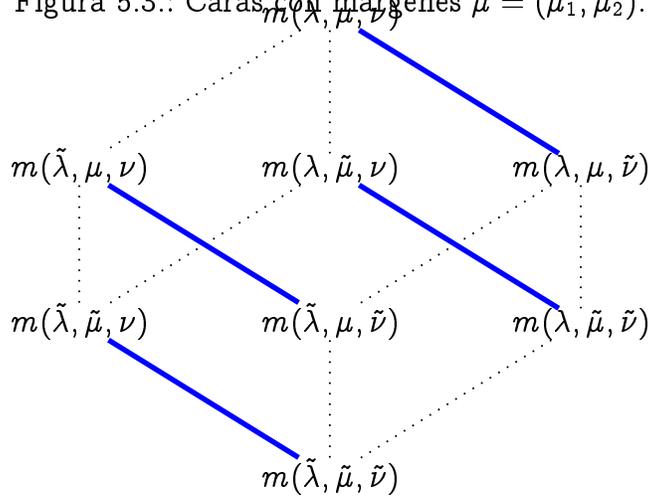


Figura 5.4.: Asignación de parejas variando la tercera partición.

También será conveniente representar a veces las matrices tridimensionales como parejas de matrices planas, una para la cara inferior y otra para la superior. Así, las posiciones de la matriz de la Figura 5.2 quedan representadas como

$$\begin{bmatrix} 000 & 001 \\ 010 & 011 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 101 \\ 110 & 111 \end{bmatrix}$$

Ahora procedemos a dar las biyecciones (parciales) para este caso. Para iniciar, consideremos la asignación de parejas dada en la Figura 5.4:

Que corresponde a agrupar la diferencia

$$\begin{aligned} m(\lambda, \mu, \nu) - m(\tilde{\lambda}, \mu, \nu) - m(\lambda, \tilde{\mu}, \nu) - m(\lambda, \mu, \tilde{\nu}) + m(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \nu) \\ + m(\tilde{\lambda}, \mu, \tilde{\nu}) + m(\lambda, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) - m(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

5. Primer método de conteo.

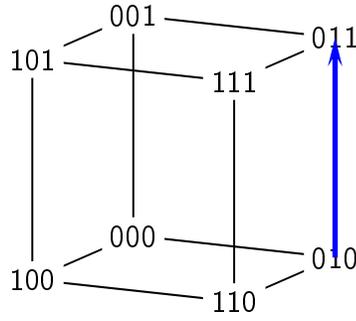


Figura 5.5.: Representación gráfica de la primera biyección.

como

$$\begin{aligned} & \left(m(\lambda, \mu, \nu) - m(\lambda, \mu, \tilde{\nu}) \right) - \left(m(\tilde{\lambda}, \mu, \nu) - m(\tilde{\lambda}, \mu, \tilde{\nu}) \right) \\ & - \left(m(\lambda, \tilde{\mu}, \nu) - m(\lambda, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \right) + \left(m(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \nu) - m(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

En ella, siempre los primeros dos márgenes quedan iguales, mientras que el tercer margen cambia de $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ a $\tilde{\nu} = (\nu_1 + 1, \nu_2 - 1)$.

Para establecer el mapeo correspondiente necesitamos, al igual que en el caso plano, determinar dos entradas de las matrices que van a cambiar, una de ellas aumentada en 1, la otra disminuyendo en 1. Con la convención establecida, tal operación corresponde a encontrar dos vértices de la forma $xy0$, $xy1$ y el mapeo disminuirá el vértice $xy0$ al mismo tiempo que aumenta el vértice $xy1$. La asignación explícita es la siguiente.

Primera biyección

El mapeo que transforma (a_{010}, a_{011}) de $M(*, *, \tilde{\nu})$ en $(a_{010} - 1, a_{011} + 1)$ de $M(*, *, \nu)$ es una biyección entre los conjuntos:

- Matrices del dominio cuya posición 010 es distinta de cero.
- Matrices del contradominio cuya posición 011 es distinta de cero.

El mapeo anterior queda representado gráficamente en la Figura 5.5.

Si en vez de variar la tercera partición hubiéramos variado la primera o la segunda, las asignaciones hubieran sido otras y las diferencias se agruparían de manera distinta.

Por ejemplo, variando la segunda partición, es decir, agrupando las diferencias

5. Primer método de conteo.

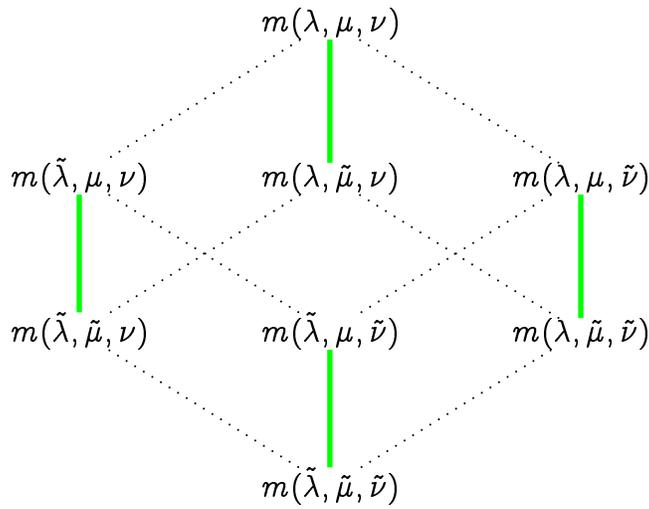


Figura 5.6.: Asignación de las parejas variando la segunda partición.

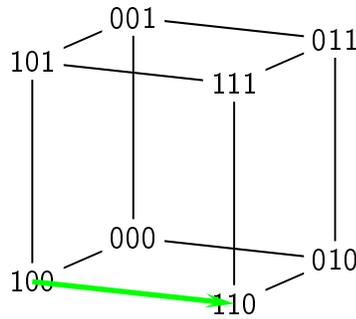


Figura 5.7.: Representación gráfica de la segunda biyección.

como

$$\begin{aligned} & \left(m(\lambda, \mu, \nu) - m(\lambda, \tilde{\mu}, \nu) \right) - \left(m(\tilde{\lambda}, \mu, \nu) - m(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \nu) \right) \\ & - \left(m(\lambda, \mu, \tilde{\nu}) - m(\lambda, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \right) - \left(m(\tilde{\lambda}, \mu, \tilde{\nu}) - m(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \right) \end{aligned}$$

ilustradas visualmente en la Figura 5.6.

En este caso, el mapeo se construye usando entradas de la forma $x0y$ y $x1y$, aumentando una y disminuyendo la otra. De forma más explícita tenemos lo siguiente.

Segunda biyección

El mapeo que transforma (a_{100}, a_{110}) en $(a_{100} - 1, a_{110} + 1)$ es una biyección entre los conjuntos:

5. Primer método de conteo.

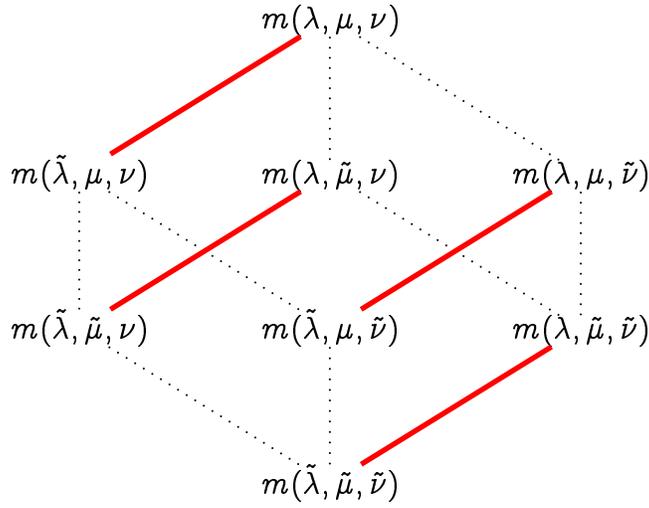


Figura 5.8.: Asignación de las parejas variando la primera partición.

- Matrices del dominio cuya posición 100 es distinta de cero.
- Matrices del contradominio cuya posición 110 es distinta de cero.

La representación gráfica de la segunda biyección se da en la Figura 5.7.

Finalmente, variando la primera partición obtenemos la agrupación de términos

$$\begin{aligned} & \left(m(\lambda, \mu, \nu) - m(\tilde{\lambda}, \mu, \nu) \right) - \left(m(\lambda, \mu, \tilde{\nu}) - m(\tilde{\lambda}, \mu, \tilde{\nu}) \right) \\ & - \left(m(\lambda, \tilde{\mu}, \nu) - m(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \nu) \right) - \left(m(\lambda, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) - m(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \right) \end{aligned}$$

visualmente representada en la Figura 5.8

A partir de la agrupación anterior podemos obtener otra biyección usando entradas de la matriz de la forma 0xy y 1xy de modo similar a los procesos anteriores.

Tercera biyección.

El mapeo que transforma (a_{001}, a_{101}) en $(a_{001} - 1, a_{101} + 1)$ es una biyección entre los conjuntos:

- Matrices del dominio cuya posición 001 es distinta de cero.
- Matrices del contradominio cuya posición 101 es distinta de cero.

La biyección anterior queda ilustrada en la Figura 5.9.

5. Primer método de conteo.

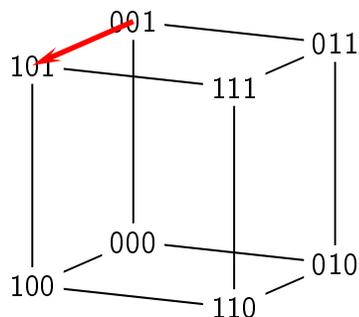


Figura 5.9.: Representación gráfica de la segunda biyección.

Dado que para las tres biyecciones, las entradas modificadas en una de ellas no afecta a las entradas modificadas por otra, podemos componer las tres en cualquier orden y obtener el mismo resultado, con la salvedad que cada una se aplica únicamente en el conjunto de matrices que sobrevivieron en la aplicación anterior.

Cuando aplicamos los mapeos uno tras otro, se realizan cancelaciones sucesivas entre las matrices que sobreviven de la aplicación anterior. Dado que los mapeos actúan sobre entradas diferentes de la matriz, no importa el orden en que hagamos la composición. Tales composiciones definirán ciertas biyecciones entre términos de la suma alternante, con lo que nos queda calcular el número de matrices de cada sumando que no se cancela en la composición. El valor de la suma alternante que buscamos, será entonces la suma de los elementos con signo positivo que no se cancelan, menos la suma de los elementos sin cancelar en las posiciones con signo negativo.

En otras palabras, la suma alternante representada en la Figura 5.1 puede reducirse a calcular la suma alternante dada por matrices $2 \times 2 \times 2$ que tienen ceros en las posiciones ilustradas en la Figura 5.10.

5.1. Conteo de las matrices.

En lo restante de la sección haremos los cálculos correspondientes al número de matrices que sobreviven en cada sumando de la retícula. Dado que la suma alternante es simétrica respecto a λ, μ, ν , podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\lambda_2 \geq \mu_2 \geq \nu_2$. Finalmente, al número de matrices que sobreviven en el sumando correspondiente a $m(x, y, z)$ lo denotaremos por $m_0(x, y, z)$. En lo

5. Primer método de conteo.

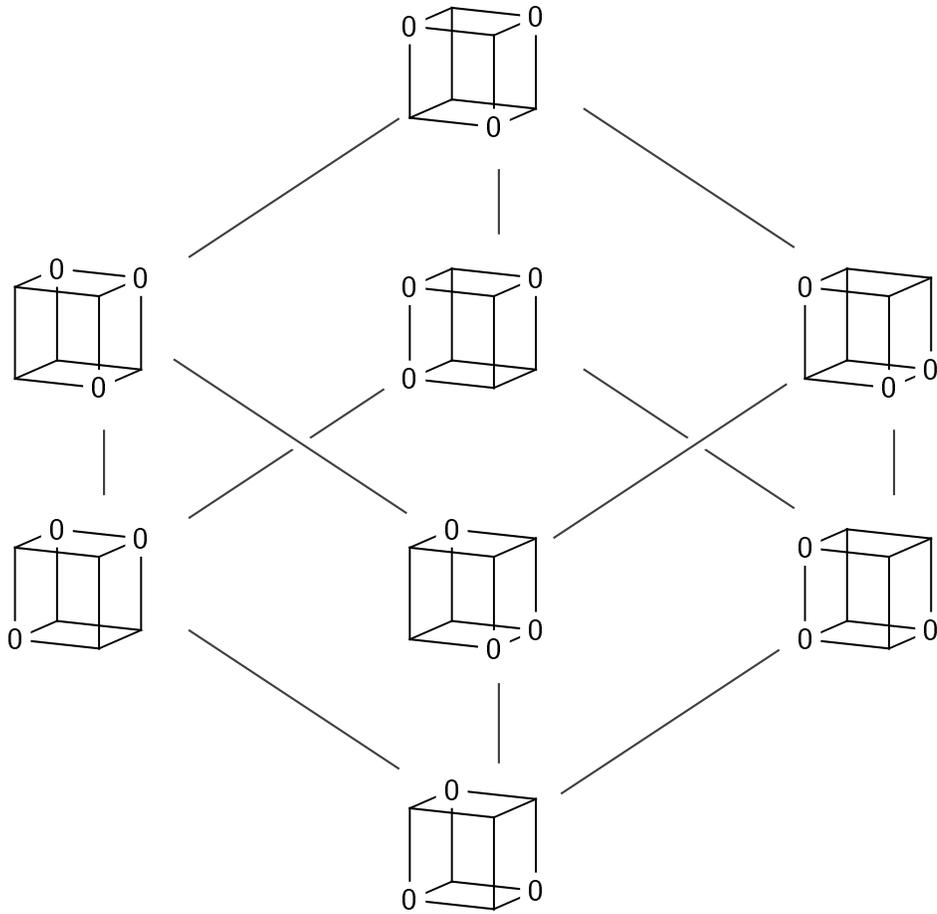


Figura 5.10.: Matrices que sobreviven al hacer las tres cancelaciones.

5. Primer método de conteo.

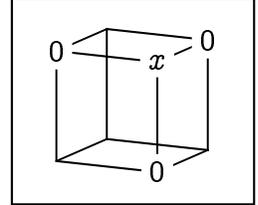
sucesivo usaremos la notación $\llbracket P \rrbracket$ para denotar

$$\llbracket P \rrbracket = \begin{cases} 1 & \text{si } P \text{ es cierto} \\ 0 & \text{si } P \text{ es falso} \end{cases}$$

Cálculo para $m_0(\lambda, \mu, \nu)$.

El número de matrices con márgenes λ, μ, ν con ceros en las posiciones 011, 101, 001 es

$$m_0(\lambda, \mu, \nu) = (\nu_2 + 1) + \left(\left\lfloor \frac{n - \lambda_2 - \mu_2 - \nu_2}{2} \right\rfloor \llbracket n < \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \rrbracket \right).$$



Sea x el valor en la entrada 111, que comparte cara con los tres ceros y es adyacente a ellos. Fijando ese valor, las posiciones 001, 010, 100 quedan fijas con los valores $\nu_2 - x$, $\mu_2 - x$ y $\lambda_2 - x$ respectivamente.

$$\begin{bmatrix} n - (\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2) + 2x & \mu_2 - x \\ \lambda_2 - x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_2 - x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

Una vez con esas entradas fijas, la entrada restante tiene que ser $n - (\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2) + 2x$. Sin embargo, las entradas de la matriz deben ser todas no negativas. De este modo, se deben cumplir adicionalmente las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} x &\geq 0, & \nu_2 &\geq x, & \mu_2 &\geq x \\ \lambda_2 &\geq x & x &\geq \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n}{2} \end{aligned}$$

Pero dado que por hipótesis se tiene $\nu_2 \leq \mu_2 \leq \lambda_2$, podemos reducir las desigualdades anteriores en una sola desigualdad:

$$\nu_2 \geq x \geq \max \left(0, \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n}{2} \right\rfloor \right).$$

Así el número de matrices es

$$\begin{aligned} 1 + \nu_2 - \max \left(0, \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n}{2} \right\rfloor \right) &= \min \left(\nu_2 + 1, \nu_2 + 1 - \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n}{2} \right\rfloor \right) \\ &= \min \left(\nu_2 + 1, \nu_2 + 1 - \left\lfloor -\frac{n - \lambda_2 - \mu_2 - \nu_2}{2} \right\rfloor \right) \\ &= \min \left(\nu_2 + 1, \nu_2 + 1 + \left\lfloor \frac{n - \lambda_2 - \mu_2 - \nu_2}{2} \right\rfloor \right). \end{aligned}$$

(5.7)

5. Primer método de conteo.

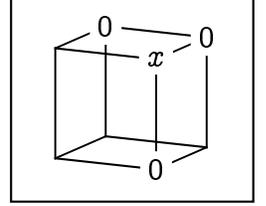
Entonces el número de matrices es $\nu_2 + 1 + \left\lfloor \frac{n - \lambda_2 - \mu_2 - \nu_2}{2} \right\rfloor$ cuando $\left\lfloor \frac{n - \lambda_2 - \mu_2 - \nu_2}{2} \right\rfloor < 0$, es decir, si $n - \lambda_2 - \mu_2 - \nu_2 < 0$, mientras que es $\nu_2 + 1$ en caso contrario. Podemos entonces escribir el número de matrices como

$$(\nu_2 + 1) + \left(\left\lfloor \frac{n - \lambda_2 - \mu_2 - \nu_2}{2} \right\rfloor \llbracket n < \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \rrbracket \right).$$

Cálculo para $m_0(\tilde{\lambda}, \mu, \nu)$.

El número de matrices con márgenes $\tilde{\lambda}, \mu, \nu$ con ceros en las posiciones 001, 011, 110 es

$$m_0(\tilde{\lambda}, \mu, \nu) = (\nu_2 + 1) \llbracket \lambda_2 > \nu_2 \rrbracket.$$



Sea x el valor en la entrada 111, que comparte cara con los tres ceros y es adyacente a dos de ellos. Fijando ese valor, las posiciones 101 y 100 quedan fijas con los valores $\nu_2 - x$ y $\lambda_2 - 1 - \nu_2$ respectivamente. Los demás valores quedan entonces determinados como indica la siguiente figura:

$$\begin{bmatrix} n - \lambda_2 - \mu_2 + x + 1 & \mu_2 - x \\ \lambda_2 - 1 - \nu_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \nu_2 - x & x \end{bmatrix}.$$

Para que todas las entradas sean no negativas, se tienen que satisfacer las desigualdades

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ \nu_2 &\geq x \\ \mu_2 &\geq x \\ \lambda_2 &\geq \nu_2 + 1 \\ x &\geq \lambda_2 + \mu_2 - (n + 1) \end{aligned}$$

Dado que $\lambda_2 + \mu_2 \leq n/2 + n/2$, la última desigualdad es más débil que $x \geq 0$. Así, los valores de x para los cuales las entradas son no negativas son

$$0 \leq x \leq \nu_2. \tag{5.8}$$

Por otro lado, $\lambda_2 - 1 - \nu_2 \geq 0$ implica $\lambda_2 \geq \nu_2 + 1$, o de otra forma, $\lambda_2 > \nu_2$. Esta condición es necesaria para que puedan haber matrices que contar. Concluimos entonces que el número de matrices en este caso es

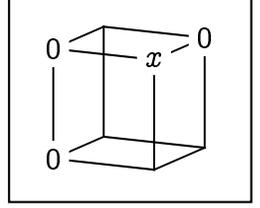
$$(\nu_2 + 1) \llbracket \lambda_2 > \nu_2 \rrbracket. \tag{5.9}$$

5. Primer método de conteo.

Cálculo para $m_0(\lambda, \tilde{\mu}, \nu)$.

El número de matrices con márgenes $\lambda, \tilde{\mu}, \nu$ con ceros en las posiciones 011, 101, 100 es

$$m_0(\lambda, \tilde{\mu}, \nu) = 0.$$



El conteo lo realizamos como sigue. Sea x el valor en la entrada 111, que comparte cara con los tres ceros y es adyacente a dos de ellos. Fijando ese valor, las posiciones 001, 110 quedan fijas con los valores $\nu_2 - x$ y $\lambda_2 - x$ respectivamente.

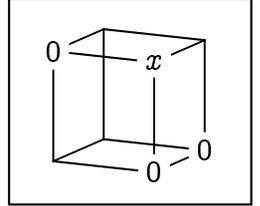
$$\begin{bmatrix} n - \mu_2 - \nu_2 + x + 1 & \mu_2 - 1 - \lambda_2 \\ 0 & \lambda_2 - x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_2 - x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

La posición 001 es entonces igual a $(\mu_2 - 1) - (\lambda_2 - x) - x = \mu_2 - 1 - \lambda_2$ y la posición 000 es entonces $n + 1 - \mu_2 - \nu_2 + x$. Pero si $\mu_2 - 1 - \lambda_2 \geq 0$ entonces $\mu_2 \geq \lambda_2 + 1 > \lambda_2 \geq \mu_2$, lo cual es una contradicción, y por tanto no existen matrices que contar en este caso.

Cálculo para $m_0(\lambda, \mu, \tilde{\nu})$.

El número de matrices con márgenes $\lambda, \mu, \tilde{\nu}$ con ceros en las posiciones 010, 101, 110 es

$$m_0(\lambda, \mu, \tilde{\nu}) = 0$$



Denotando por x el valor de la posición 111, las posiciones 100 y 011 tienen los valores $\lambda_2 - x$ y $\mu_2 - x$ respectivamente.

$$\begin{bmatrix} n - \lambda_2 - \nu_2 + x + 1 & 0 \\ \lambda_2 - x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_2 - 1 - \mu_2 & \mu_2 - x \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

Como $\nu_2 - 1 - \mu_2$ debe ser no negativo, se debe cumplir $\nu_2 > \mu_2$, lo cual es imposible pues $\lambda_2 \geq \mu_2 \geq \nu_2$.

Cálculo para $m_0(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \nu)$.

El número de matrices con márgenes $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \nu$ con ceros en las posiciones 010, 101, 100 es

$$m_0(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \nu) = (\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2 + 1) \llbracket \lambda_2 > \nu_2 \rrbracket \llbracket \lambda_2 \leq \mu_2 + \nu_2 \rrbracket.$$

5. Primer método de conteo.

Sea x el valor de la entrada 101, que comparte cara con todos los ceros y es adyacente a dos de ellos. La posición 111 debe ser entonces $\nu_2 - x$ y la posición 110 es igual a $\lambda_2 - 1 - \nu_2$. Pero si $\lambda_2 - 1 - \nu_2 \geq 0$ entonces $\lambda_2 > \nu_2$, por lo que si $\lambda = \mu = \nu$ no hay matrices en este caso.

$$\begin{bmatrix} n - \mu_2 + 1 - x & \mu_2 - \lambda_2 + x \\ 0 & \lambda_2 - 1 - \nu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & \nu_2 - x \end{bmatrix}$$

Las demás entradas quedan determinadas como se muestran arriba, Las restricciones que debe cumplir x para que las entradas sean no negativas son

$$x \geq 0 \tag{5.10}$$

$$x \geq \lambda_2 - \mu_2 \tag{5.11}$$

$$\nu_2 \geq x \tag{5.12}$$

$$n - \mu_2 + 1 \geq x \tag{5.13}$$

Dado que $\lambda_2 - \mu_2 \geq 0$, la segunda desigualdad es más fuerte que la primera. Además, como $n - \mu_2 + 1 > n - (n/2) = n/2 \geq \nu_2$, la condición más fuerte del último par es $\nu_2 \geq x$.

Así, el número de valores x que dan origen a matrices en este caso son aquellos tales que

$$\lambda_2 - \mu_2 \geq x \text{ ge } \nu_2$$

siempre que tal intervalo no sea vacío, lo cual sucede si $\lambda_2 \geq \mu_2 + \nu_2$. Recordando que $\lambda \neq \nu$ también era una condición necesaria, concluimos que el número de matrices es

$$(\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2 + 1) \llbracket \nu_2 < \lambda_2 \geq \mu_2 + \nu_2 \rrbracket. \tag{5.14}$$

Entonces los valores de x que dan origen a matrices con entradas no negativas son aquellos tales que

$$0 \leq x \leq \mu_2 + \nu_2 - \lambda_2 \tag{5.15}$$

provisto de que $\lambda_2 > \nu_2$ y de que $\lambda_2 \leq \mu_2 + \nu_2$, pues el término en la derecha podría ser negativo, no habiendo en tal caso matrices para contar.

Concluimos entonces que el número de matrices es

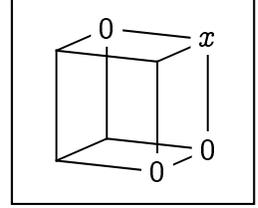
$$(\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2 + 1) \llbracket \nu_2 < \lambda_2 \leq \mu_2 + \nu_2 \rrbracket.$$

5. Primer método de conteo.

Cálculo para $m_0(\tilde{\lambda}, \mu, \tilde{\nu})$.

El número de matrices con márgenes $\tilde{\lambda}, \mu, \tilde{\nu}$ con ceros en las posiciones 001, 110, 010 es

$$m_0(\tilde{\lambda}, \mu, \tilde{\nu}) = 0$$



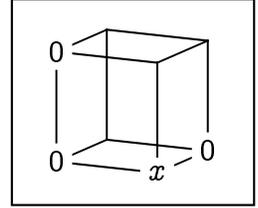
Sea x el valor de la entrada 011. Entonces las demás entradas quedan determinadas en el siguiente orden: 111 es igual a $\mu_2 - x$, 101 es igual a $\nu_2 - 1 - \mu_2$. Pero para que $\nu_2 - 1 - \mu_2$ sea no negativo, se necesita $\nu_2 > \mu_2$ que contradice la hipótesis de orden. Por tanto en este caso no aparece ninguna matriz.

$$\begin{bmatrix} n + 1 - \lambda_2 - x & 0 \\ \lambda_2 - \nu_2 + x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x \\ \nu_2 - 1 - \mu_2 & \mu_2 - x \end{bmatrix}$$

Cálculo para $m_0(\lambda, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$.

El número de matrices con márgenes $\lambda, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}$ con ceros en las posiciones 010, 101, 100 es

$$m_0(\lambda, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = 0.$$



Nuevamente procedemos con en casos anteriores asignando un valor a una entrada y expresando todas las demás en términos de tal variable, para luego encontrar las restricciones que deben imponerse a tal valor. En este caso sea x el valor en la posición 110, la cual comparte cara con los tres ceros y es adyacente a dos de ellos. Fijando esa posición, las posiciones 111 y 011 toman los valores $\lambda_2 - x$ y $\mu_2 - 1 - \lambda_2$ respectivamente y por tanto las posiciones 000 y 001 reciben los valores $n + 1 - \nu_2 - x$ y $\nu_2 - \mu_2 + x$ respectivamente.

$$\begin{bmatrix} n + 1 - \nu_2 - x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_2 - \mu_2 + x & \mu_2 - 1 - \lambda_2 \\ 0 & \lambda_2 - x \end{bmatrix}$$

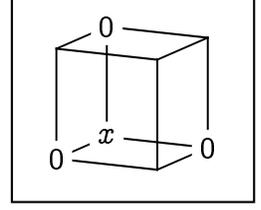
Pero para que $\mu_2 - 1 - \lambda_2$ sea no negativo, se necesita $\mu_2 > \lambda_2$, lo cual no es posible. Por tanto, no hay matrices a contar en este caso.

5. Primer método de conteo.

Cálculo para $m_0(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$.

El número de matrices con márgenes $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}$ con ceros en las posiciones 010, 100, 001 es

$$m_0(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = \left(\left\lfloor \frac{1 + \mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor \right) \llbracket \lambda_2 < \mu_2 + \nu_2 \rrbracket.$$



La entrada que es adyacente a todos los ceros es 000 por lo que denotamos por x su valor, determinando automáticamente las entradas 011, 101, 110 con los valores $n - a + 1 - x$, $n - b + 1 - x$ y $n - c + 1 - x$ respectivamente. La entrada faltante 111 necesariamente toma el valor $a + b + c + 2x - 2n - 3$.

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & n - \nu_2 + 1 - x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & n - \lambda_2 + 1 - x \\ n - \mu_2 + 1 - x & \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 + 2x - 2n - 3 \end{bmatrix}$$

Las restricciones no redundantes que se obtienen para esos valores son

$$x \geq 0, \quad x \geq \left\lfloor \frac{2n + 3 - (\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2)}{2} \right\rfloor, \quad n - \lambda_2 + 1 \geq x,$$

y dado que $\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \leq n/2 + n/2 + n/2 = 3n/2 < 2n + 3$, reducimos las tres desigualdades anteriores a

$$n + 1 - \lambda_2 \geq x \geq \left\lfloor \frac{2n + 3 - (\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor n + 1 - \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - 1}{2} \right\rfloor$$

Sin embargo, tal intervalo podría ser vacío, lo que sucede si

$$\left\lfloor n + 1 - \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - 1}{2} \right\rfloor > n + 1 - \lambda_2.$$

Tal condición sucede sólo si se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \left\lfloor n + 1 - \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - 1}{2} \right\rfloor - n - 1 + \lambda_2 &> 0 \\ \left\lfloor n + 1 - \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - 1}{2} - n - 1 + \lambda_2 \right\rfloor &> 0 \\ \left\lfloor \lambda_2 - \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - 1}{2} \right\rfloor &> 0 \\ \left\lfloor \frac{\lambda_2 - \mu_2 - \nu_2 + 1}{2} \right\rfloor &> 0 \\ \frac{\lambda_2 - \mu_2 - \nu_2 + 1}{2} &> 0 \\ \lambda_2 - \mu_2 - \nu_2 + 1 &> 0. \end{aligned}$$

5. Primer método de conteo.

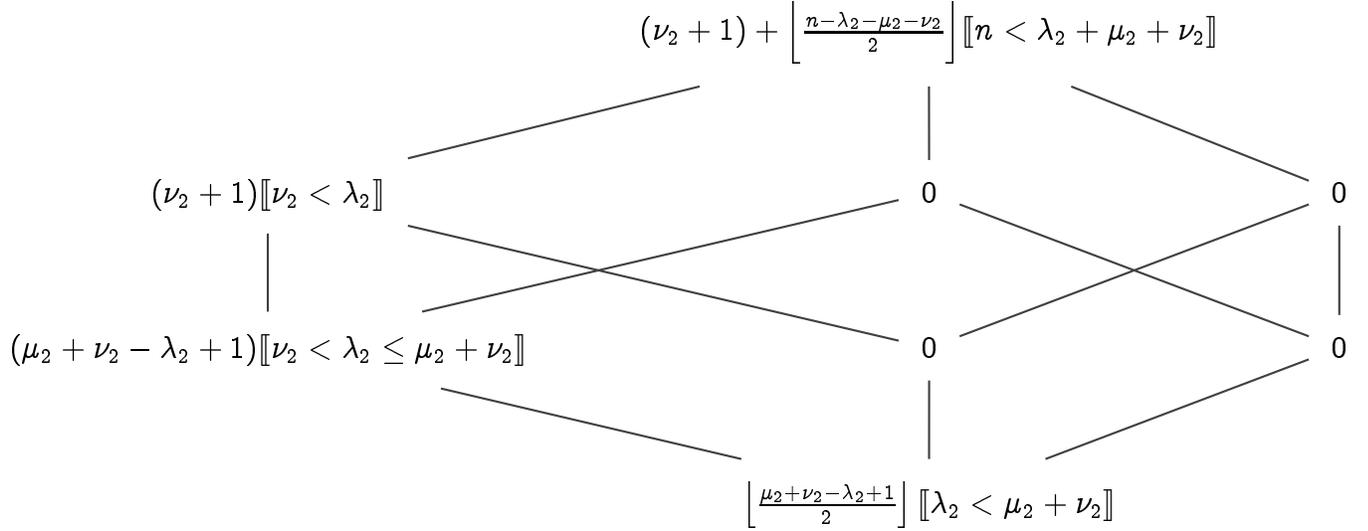


Figura 5.11.: Valores de los sumandos en la retícula después de la reducción.

Entonces, para que el intervalo no sea vacío necesitamos que $\lambda_2 + 1 \leq \mu_2 + \nu_2$, o de forma equivalente, que $\lambda_2 < \mu_2 + \nu_2$. Bajo esa condición, el número de matrices es

$$\begin{aligned}
 (n + 1 - \lambda_2) - \left\lfloor n + 1 - \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - 1}{2} \right\rfloor + 1 &= -\lambda_2 - \left\lfloor -\frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - 1}{2} \right\rfloor + 1 \\
 &= 1 - \lambda_2 + \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - 1}{2} \right\rfloor \\
 &= \left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2 + 1}{2} \right\rfloor.
 \end{aligned}$$

Por tanto el número de matrices es finalmente

$$\left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2 + 1}{2} \right\rfloor \llbracket \lambda_2 < \mu_2 + \nu_2 \rrbracket \quad (5.16)$$

5.1.1. Simplificación de los cálculos.

Resumimos todos los cálculos anteriores en el diagrama de la Figura 5.11.

Para iniciar la simplificación, notemos que

$$\left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2 + 1}{2} \right\rfloor \llbracket \lambda_2 < \mu_2 + \nu_2 \rrbracket = \left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2 + 1}{2} \right\rfloor \llbracket \lambda_2 \leq \mu_2 + \nu_2 \rrbracket \quad (5.17)$$

5. Primer método de conteo.

puesto que cuando $\lambda_2 = \mu_2 + \nu_2$ la primera expresión es $0 \cdot 0$ mientras que en el segundo es $0 \cdot 1$.

Notemos que la condición $\llbracket \lambda_2 > \nu_2 \rrbracket$ es equivalente a $\lambda \neq \nu$, y que si $\lambda = \nu$ entonces $\lambda = \mu = \nu$.

Procedamos por casos. Si $\lambda = \nu$ entonces efectuando cancelaciones y simplificando tenemos que la suma alternante es

$$\lambda_2 + 1 + \left\lfloor \frac{n - \lambda_2 - \mu_2 - \nu_2}{2} \right\rfloor \llbracket n < \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \rrbracket - \left\lfloor \frac{\lambda_2 + 1}{2} \right\rfloor \llbracket \lambda_2 \leq \mu_2 + \nu_2 \rrbracket \quad (5.18)$$

Dado que $\lambda_2 \leq \mu_2 + \nu_2$ siempre se cumple cuando $\lambda_2 = \nu_2$, y usando que para t entero se cumple

$$t - \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{t+1}{2} \right\rfloor \quad (5.19)$$

reducimos la diferencia anterior sustituyendo $t = \lambda_2 + 1$

$$\left\lfloor \frac{\lambda_2}{2} \right\rfloor + 1 + \left(\left\lfloor \frac{n - \lambda_2 - \mu_2 - \nu_2}{2} \right\rfloor \llbracket n \leq \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \rrbracket \right) \quad (5.20)$$

En el caso cuando $\lambda \neq \mu$ notamos que $\nu_2 + 1$ se cancela con $(\nu_2 + 1)\llbracket \lambda_2 > \nu_2 \rrbracket$. Si además expresamos $\llbracket \nu_2 + \mu_2 \geq \lambda_2 > \nu_2 \rrbracket$ como $\llbracket \lambda_2 > \nu_2 \rrbracket \llbracket \lambda_2 \leq \nu_2 + \mu_2 \rrbracket$ tenemos que la suma total se simplifica en

$$\begin{aligned} & \left\lfloor \frac{n - \lambda_2 - \mu_2 - \nu_2}{2} \right\rfloor \llbracket n < \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \rrbracket + (\nu_2 + \mu_2 - \lambda_2 + 1) \llbracket \lambda_2 \leq \nu_2 + \mu_2 \rrbracket \\ & - \left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2 + 1}{2} \right\rfloor \llbracket \lambda_2 \leq \mu_2 + \nu_2 \rrbracket \quad (5.21) \end{aligned}$$

y nuevamente haciendo uso de que $t - \lfloor t/2 \rfloor = \lfloor (t+1)/2 \rfloor$ reescribimos la suma anterior como

$$\left\lfloor \frac{n - \lambda_2 - \mu_2 - \nu_2}{2} \right\rfloor \llbracket n < \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \rrbracket + \left(\left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor + 1 \right) \llbracket \lambda_2 \leq \mu_2 + \nu_2 \rrbracket \quad (5.22)$$

Para concluir, notamos que si en la formula anterior se tiene $\lambda_2 = \mu_2 = \nu_2$ entonces obtenemos la fórmula para el primer caso. Por tanto, podemos simplemente tomar como fórmula final la fórmula (5.22) sin necesidad de considerar los casos de forma separada.

En los capítulos siguientes se estudiará una descripción combinatoria diferente que permitirá calcular $c(\lambda, \mu, \nu)$ de otra forma.

6. RSK para matrices 3D.

En el artículo [8] se presenta una generalización del algoritmo RSK para matrices 3D y una correspondencia entre matrices 3D y ciertos pares de multitablas. Tal correspondencia es la base para una enumeración diferente de matrices que dará origen a una forma diferente de calcular el producto $\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \chi^\nu \rangle$. En la siguiente sección describiremos la correspondencia que se establece y la aplicación al caso que nos concierne.

6.1. La correspondencia RSK para matrices 3D.

Recordemos que $K_{\alpha,\lambda}$ es el conjunto de tablas semiestándar de forma α y contenido λ , cuya cardinalidad es el número de Kotska $K_{\alpha,\lambda}$. Recordemos también que $LR(\alpha, \beta; \nu)$ es el conjunto de pares (T, S) de multitablas de Littlewood-Richardson de formas (α, β) y tipo ν con el mismo contenido.

En [8] se construye una biyección entre matrices tridimensionales con entradas enteras no negativas con márgenes λ, μ, ν y ternas $(P, Q, (T, S))$ donde P, Q son tablas de Young semiestándar y (T, S) son multitablas de Littlewood Richardson.

De forma explícita:

Teorema 14

Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto $M(\lambda, \mu, \nu)$ de matrices 3-dimensionales con entradas enteras no negativas cuyos 1-márgenes son λ, μ, ν , y el conjunto de ternas

$$\coprod_{\alpha, \beta} K_{\alpha, \lambda} \times K_{\beta, \mu} \times LR(\alpha, \beta; \nu)$$

Cuando $\alpha = \lambda$ y $\beta = \mu$ entonces $K_{\alpha, \lambda} = K_{\beta, \mu} = 1$ y podemos usar la biyección anterior para establecer una correspondencia entre pares de tablas de Young semiestándar (P, Q) con la misma firma y contenido, y un cierto conjunto de matrices. Notemos también, que en la construcción de la biyección, no se hace uso de que

6. RSK para matrices 3D.

λ, β, ν sean particiones, sino únicamente composiciones de n , lo cual será relevante posteriormente.

Sea $A = (a_{ijk})$ una matriz 3-dimensional cuyos márgenes son λ, μ, ν . En otras palabras, si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q)$ y $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r)$ entonces

$$\sum_{j,k} a_{ijk} = \lambda_i, \quad \sum_{i,k} a_{ijk} = \mu_j, \quad \sum_{i,j} a_{ijk} = \nu_k.$$

A la matriz A están asociadas matrices planas $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(r)}$ de tamaño $p \times q$ dadas por los «niveles» de la matriz:

$$A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}), \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ijk}$$

en otras palabras, $A^{(1)}$ es la matriz de los elementos de la forma a_{ij1} , $A^{(2)}$ es la matriz de elementos de la forma a_{ij2} y así sucesivamente.

Notemos que

$$\sum_{k=1}^r \text{fila}(A_k) = \lambda, \quad \sum_{k=1}^r \text{col}(A_k) = \mu, \quad \sum_{i,j} a_{ij}^{(k)} = \nu_k.$$

Las matrices $A^{(k)}$ son matrices planas de enteros no negativos, por lo que podemos aplicar el algoritmo RSK para obtener un par (P_k, Q_k) de tablas semiestándar, de modo que

$$\sum_{k=1}^r \text{cont}(Q_k) = \lambda, \quad \sum_{k=1}^r \text{cont}(P_k) = \mu, \quad \text{forma}(P_k) = \text{forma}(Q_k).$$

Dado que la composición de dos biyecciones es una biyección, tenemos la siguiente correspondencia:

$$A \mapsto (A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(r)}) \mapsto ((P_1, \dots, P_r), (Q_1, \dots, Q_r))$$

Finalmente, se construye una correspondencia

$$((P_1, \dots, P_r), (Q_1, \dots, Q_r)) \mapsto (Q, P, (T, S))$$

donde Q, P, T, S satisfacen las condiciones del teorema, es decir, Q es una tabla semiestándar de forma α y contenido λ , P es una tabla de forma β y contenido μ , mientras que (T, S) es un par de multitablas de Littlewood-Richardson de formas (α, β) y tipo ν de modo que S, T tienen el mismo contenido.

6. RSK para matrices 3D.

Esta última correspondencia se realiza como sigue. Si (P_1, P_2, \dots, P_r) son tablas semiestándar, sea $\gamma(k) = \text{forma}(P_k)$. Hagamos $P^{(1)} = P_1$ y $S_1 = U(\gamma(1))$ y construimos $P^{(k+1)}$ insertando por columnas $w_{\text{col}}(P_{k+1})$ en $P^{(k)}$. Es decir, si $w_{\text{col}}(P_{k+1}) = v_m v_{m-1} \dots v_1$ entonces

$$P^{(k+1)} = v_m \rightarrow (v_{m-1} \rightarrow (\dots (v_2 \rightarrow (v_1 \rightarrow P^{(k)})) \dots)).$$

Si $w_{\text{col}}(U(\gamma(k+1))) = u_m u_{m-1} \dots u_1$, S_{k+1} se obtiene colocando u_1, u_2, \dots, u_m en las casillas nuevas que se obtienen en la inserción para $P^{(k+1)}$.

Finalmente tomamos $P = P^{(r)}$ y $S = (S_1, S_2, \dots, S_r)$ y asociamos a (P_1, P_2, \dots, P_r) la pareja (P, S) así obtenida. Con un proceso similar para (Q_1, Q_2, \dots, Q_r) obtenemos (Q, T) . En [8] se demuestra que tal construcción es en efecto, una biyección, lo que permite construir la correspondencia buscada

$$A \mapsto (A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(r)}) \mapsto ((P_1, \dots, P_r), (Q_1, \dots, Q_r)) \mapsto (Q, P, (T, S)).$$

Las construcciones anteriores se pueden usar para construir una biyección entre $\text{LR}(\alpha, \beta; \nu)$ y un subconjunto de $M(\lambda, \mu, \nu)$. Esta biyección se explora en la siguiente sección.

6.2. Las condiciones de fila y columna

Si la forma de una tabla de Young es igual a su contenido, entonces solo hay una forma de llenarlo. Por ello $K_{\lambda\lambda} = 1$ para cualquier partición λ . En esta situación podemos identificar el conjunto $\text{LR}(\lambda, \mu; \nu)$ con el conjunto

$$K_{\lambda, \lambda} \times K_{\mu, \mu} \times \text{LR}(\lambda, \mu; \nu),$$

el cual, bajo las biyecciones descritas en la sección anterior, se corresponde a un cierto conjunto de matrices con sumas planas λ, μ, ν . Notemos que $\phi^{(\nu_1, \nu_2)} = \phi^{(\nu_2, \nu_1)}$, por lo que $\text{lr}(\lambda, \mu, (\nu_1, \nu_2)) = \text{lr}(\lambda, \mu, (\nu_2, \nu_1))$.

De forma más explícita, tenemos una correspondencia

$$A \mapsto (Q, P, (T, S))$$

entre ciertas matrices tridimensionales A y tablas de Young, en las cuales Q, P son tablas cuya forma es igual a su contenido, $\text{forma}(Q) = \lambda = \text{cont}(Q)$ y $\text{forma}(P) = \mu = \text{cont}(P)$.

6. RSK para matrices 3D.

Primero vamos a analizar primero bajo qué condiciones la inserción por columna de una palabra de origen a una tabla cuya forma sea igual a su contenido. Hay que tener en cuenta que al insertar por columna, las palabras se leen de derecha a izquierda. Por ejemplo, el resultado de insertar por columna $w = 231$ en una tabla vacía es:

$$1 \rightarrow \emptyset = \boxed{1} \tag{6.1}$$

$$3 \rightarrow \boxed{1} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \tag{6.2}$$

$$2 \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \tag{6.3}$$

así, $w \rightarrow \emptyset = 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow \emptyset$.

Analicemos primero unos casos. Si $w = 321232$, entonces la inserción $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ tiene las siguientes etapas:

$$\boxed{2}, \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \tag{6.4}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}. \tag{6.5}$$

El resultado no tiene forma igual a su contenido, y aunque insertemos más números, no vamos a conseguirlo ya que no será posible que los 2 que quedaron en la primera fila sean botados a la segunda, porque en la inserción por columna, las rutas de inserción siempre se mueven hacia el norte. Para que no aparezcan 2 en la primera fila, es necesario que la cantidad de entradas 2 que hay en la tabla sea al menos una menos que la de entradas 1 (para que la ruta de inserción no pueda terminar insertando una nueva columna en la primera fila).

Intentamos entonces con otra palabra para la que siempre haya más 1 insertados que 2, por ejemplo $w = 2331211$. Las tabla que obtenemos al final es

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 3 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

que nuevamente tiene forma diferente a contenido. El problema es que ahora el 3 quedo en la segunda fila y no podra ser botado a la tercera porque la ruta de inserción se mueve hacia el norte. El problema es similar al caso anterior, al efectuar la tercera inserción quedan más entradas 3 que entradas 2 en la tabla, y por tanto el 3 queda en alguna fila superior a la tercera.

6. RSK para matrices 3D.

Para el caso general, podemos usar un argumento similar para establecer la condición buscada: en cada paso siempre tiene que haber más entradas 1 que entradas 2, más entradas 2 que entradas 3, y así sucesivamente. Las palabras que cumplen tal condición se conocen como *permutaciones reticulares*. Si una palabra w es tal que al invertir el orden de sus elementos se obtiene una permutación reticular, decimos que w es una *permutación reticular reversa*.

Antes de proceder a efectuar la prueba, efectuemos la prueba con una palabra que satisfaga tal condición. Si $w = 231211$ las tablas que obtenemos son:

$$\boxed{1}, \quad \boxed{1 \mid 1}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \quad (6.6)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}. \quad (6.7)$$

El resultado final (así como todos los pasos intermedios) tiene forma igual a su contenido.

La prueba procede por inducción sobre la longitud de la palabra. Si $w = 1$ (la única permutación reticular de longitud 1) entonces la tabla correspondiente es $\boxed{1}$ que tiene forma igual a su contenido. Supongamos que la inserción por columnas de una permutación reticular reversa w de k números es una tabla de forma igual a su contenido:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & \\ \hline \dots & \dots & \dots & & & \\ \hline t & \dots & t & & & \\ \hline \end{array}$$

y supongamos que en el paso siguiente se inserta el número m de modo que la palabra obtenida al añadir m al final de w se sigue teniendo una permutación reticular. Existen dos casos, $m \leq t$ en cuyo caso la inserción procede en la fila m botando el m de la primera columna a la segunda, éste botando el m de la segunda columna a la tercera, y así sucesivamente hasta llegar al final. Como el número total de m es menor o igual al de $m - 1$ (pues la palabra obtenida sigue siendo una permutación reticular), al final se inserta una m al final de una columna de la forma $1 \ 2 \ 3 \ \dots \ m - 1$ y por tanto todas las m quedaron en la m -ésima fila, de modo que la tabla sigue teniendo forma igual a su contenido.

El otro caso es que $m = t + 1$ (ya que si $m > t + 1$ la palabra obtenida ya no es permutación reticular) y en este caso simplemente se agrega $m + 1$ en la $(m + 1)$ -ésima fila, de nueva cuenta resultando en una tabla cuya forma sea igual a su contenido.

6. RSK para matrices 3D.

Probamos de esta forma que si w es una permutación reticular reversa, el resultado de el proceso de inserción por columnas es una tabla cuya forma es igual a su contenido. La condición también es suficiente. Supongamos que k es la primera posición de w , leída de atrás hacia adelante, en la al leer la porción formada por los últimos k números al revés ya no se tiene una permutación reticular. El resultado de la inserción de las primeras $k - 1$ es, por la prueba anterior, una tabla de la forma

1	1	1	1	...	1
2	2	2	...	2	
...			
t	...	t			

y si en el paso k se inserta m , como la cantidad de entradas m es mayor a la cantidad de entradas $m - 1$, después de botar a todas las m de la m -ésima fila, el último paso tendrá que quedar al final de una columna con menos de $m - 1$ cuadros, por lo que aparece una m en una fila superior a la m -ésima y ya no podrá ser movida a la m -ésima, por ser la ruta de inserción dirigida hacia el norte.

Así hemos probado el siguiente teorema:

Teorema 15

La condición necesaria y suficiente para que el resultado de la inserción por columnas de una palabra (en una tabla vacía) tenga forma igual a su contenido, es que la palabra sea una permutación reticular al leerla de derecha a izquierda.

Podemos obtener ahora un resultado similar para inserción por fila. Recordemos que

$$x_r \rightarrow x_{r-1} \rightarrow \cdots \rightarrow x_2 \rightarrow x_1 = x_r \leftarrow x_{r-1} \leftarrow \cdots \leftarrow x_2 \leftarrow x_1, \quad (6.8)$$

en otras palabras, se puede intercambiar inserción por columnas a inserción por filas invirtiendo el orden de inserción: $w \rightarrow \emptyset = \emptyset \leftarrow w$

Por tanto se tiene el siguiente corolario:

Corolario 16

La condición necesaria y suficiente para que el resultado de la inserción por filas de una palabra (en una tabla vacía) tenga forma igual a su contenido, es que al escribir la palabra en orden inverso, el resultado sea una permutación reticular.

Ahora regresemos al problema que nos concierne. Para referencia escribimos nuevamente el proceso para obtener las tablas P y Q :

- De la matriz A se obtienen las matrices $p \times q$ de nivel $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(r)}$.
- Se aplica el algoritmo RSK a cada matriz $A^{(k)}$ para obtener dos tablas (P_k, Q_k) .

6. RSK para matrices 3D.

- La tabla P se obtiene mediante las inserciones de columna de las palabras $w_{\text{col}}(P_k)$ en el orden siguiente:

$$P = w_{\text{col}}(P_r) \rightarrow w_{\text{col}}(P_{r-1}) \rightarrow \cdots \rightarrow w_{\text{col}}(P_2) \rightarrow w_{\text{col}}(P_1) \quad (6.9)$$

y para Q se efectúa un proceso similar con las palabras $w_{\text{col}}(Q_i)$.

Entonces tenemos que P también puede calcularse como la inserción por filas de la única palabra

$$(w_{\text{col}}(P_r)w_{\text{col}}(P_{r-1}) \cdots w_{\text{col}}(P_2)w_{\text{col}}(P_1)) \quad (6.10)$$

por ser $w_{\text{col}}(P)$ Knuth-equivalente a esa concatenación [3].

Por otro lado, $w_{\text{col}}(P_k)$ es Knuth equivalente a $w(P_k)$ lo que nos permite expresar la condición de que la palabra sea reticular reversa, en términos de las entradas de la matriz.

Para que $w_{\text{col}}(P_1)$ sea permutación reticular, se necesita que la palabra que aparece en la fila inferior del arreglo de 2 filas obtenido de $A^{(1)}$ sea permutación reticular reversa, ya que tal palabra es precisamente $w(P_1)$ que es Knuth equivalente a $w_{\text{col}}(P_1)$.

Primero haremos un ejemplo para entender la condición necesaria y luego la enunciaremos. Supongamos que

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Y sea w_A el arreglo de 2 filas que se obtiene a partir de A . Ahora, si $u = u_1 u_2 \dots u_t$ es la palabra obtenida al tomar el renglón inferior de w_A , al final de u deben aparecer solo entradas 1. Esto quiere decir que $j = 0$ (porque sino, $\binom{\cdot}{33}$ aparecería j veces en w_A y por tanto u terminaría en 3, y que $i = 0$ (por un argumento similar, ya que sino al final habría 2 y no 1). Y también debe tenerse $f = 0$ pues de lo contrario el último bloque sería de la forma $\dots 33311 \dots 1$ que no sería permutación reticular al revertirse (pues aparecería 3 antes de 2).

Adicionalmente, se debe tener $h \geq e$ para que el ultimo bloque de la forma $2 \dots 21 \dots 1$ cumpla que haya más entradas 1 que 2. De manera similar, $e \geq c$ es necesario para que el último bloque de la forma $3 \dots 31 \dots 12 \dots 21 \dots 1$ tenga menos entradas 3 que 2. Finalmente, necesitamos también que $h + d \geq e + b$ para que no haya más que 1 al terminar. Así, las condiciones necesarias y suficientes

6. RSK para matrices 3D.

para que la palabra u sea permutación reticular reversa, son:

$$i = j = f = 0 \tag{6.12}$$

$$h \geq e \geq c \tag{6.13}$$

$$h + d \geq e + b \tag{6.14}$$

El caso que nos interesa es para matrices cuadradas ($m = n$). En este caso, podemos escribir las condiciones generales como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{6.15}$$

las condición para que la palabra obtenida sea permutación reticular reversa son:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si } i + j > m + 1, \quad j > 1 \tag{6.16}$$

$$a_{m1} \geq a_{(m-1)2} \geq \cdots \geq a_{2(n-1)} \geq a_{1n} \tag{6.17}$$

$$a_{m1} + a_{(m-1)1} \geq a_{(m-1)2} + a_{(m-2)2} \geq \cdots \geq a_{2(n-1)} + a_{1(n-1)} \tag{6.18}$$

$$\vdots \tag{6.19}$$

$$a_{m1} + a_{(m-1)1} + \cdots + a_{21} \geq a_{(m-1)2} + a_{(m-1)2} + \cdots + a_{12}. \tag{6.20}$$

Cuando A tiene varios niveles, para que la concatenación de todas las palabras columna sea reticular inversa, por la equivalencia de Knuth, es necesario que la concatenación de las palabras fila sea reticular inversa. Pero ésta última es el resultado de concatenar todos los segundos renglones de los arreglos de 2 filas obtenido en cada nivel. Esta es la condición que garantiza que la tabla P tenga la misma forma y contenido, denominada "condición de columnas".

Vamos a ilustrar y verificar las afirmaciones con un ejemplo. Sea A una matriz de $3 \times 2 \times 2$, y construyamos A^{col} con los dos niveles:

$$A^{col} = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

Queremos que la palabra u_2u_1 sea permutación reticular reversa, donde u_j es el segundo renglón del arreglo de 2 filas obtenido de $A^{(j)}$. Entonces, por las observa-

6. RSK para matrices 3D.

ciones de arriba, las condiciones de columna son:

$$e = f = c = 0 \tag{6.22}$$

$$d \geq b \geq w \tag{6.23}$$

$$d + a \geq b + y \geq z + w \tag{6.24}$$

$$d + a + x \geq b + y + v \tag{6.25}$$

Vamos a verificar con un ejemplo:

$$A^{col} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.26}$$

Los arreglos de 2 filas son:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{6.27}$$

por lo que las tablas P_1 y P_2 obtenidas por RSK son

$$P_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}, \quad P_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 & & & \\ \hline \end{array} \tag{6.28}$$

Las correspondientes palabras columna son

$$w_{col}(P_1) = 21111, \quad w_{col}(P_2) = 213132223. \tag{6.29}$$

y el resultado de las inserciones por columna $w_{col}(P_2) \rightarrow w_{col}(P_1) \rightarrow \emptyset$ es

$$213132223 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \\ \hline 3 & 3 & 3 & & & \\ \hline \end{array}, \tag{6.30}$$

que tiene la misma forma y contenido.

Una acotación final. Dado que en la construcción de la biyección no se requiere que λ, μ, ν sean particiones, podemos tomar ventaja y enumerar los niveles en sentido inverso ($A^{(1)}$ sería el nivel correspondiente a ν_r , $A^{(2)}$ sería el nivel correspondiente a ν_{r-1} , y así hasta el nivel $A^{(r)}$ que sería correspondiente a ν_1). La ventaja de esta reenumeración es que al establecer las condiciones de columna se obtiene una representación visual más clara.

6. RSK para matrices 3D.

Con esa renumeración, A^{col} sería

$$A^{col} = \begin{bmatrix} A^{(r)} \\ A^{(r-1)} \\ \vdots \\ A^{(1)} \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

En el ejemplo:

$$A^{col} = \begin{bmatrix} A^{(2)} \\ A^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ a & b & 0 \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

$$e = f = c = 0 \quad (6.33)$$

$$d \geq b \geq w \quad (6.34)$$

$$d + a \geq b + y \geq z + w \quad (6.35)$$

$$d + a + x \geq b + y + v \quad (6.36)$$

Para terminar, tenemos que determinar ahora las condiciones para que la tabla Q tenga la misma forma y contenido. Sin embargo, haciendo uso del Teorema de Simetría para RSK: Si A es una matriz plana y si $A \rightarrow (P, Q)$ bajo RSK, entonces $A^t \rightarrow (Q, P)$ bajo RSK.

Así, la condición para que Q en la biyección considerada al inicio del capítulo tenga la misma forma y contenido, es que la matriz

$$A^{row} = \begin{bmatrix} (A^{(r)})^t \\ (A^{(r-1)})^t \\ \vdots \\ (A^{(1)})^t \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

satisfaga la condición de columna. Tal condición se determina la "condición de fila" (debido a que en realidad, aquí las columnas son filas en la matriz original).

Como conclusión tenemos el resultado siguiente, el cual fue encontrado por el Dr. Ernesto Vallejo, pero que aun no ha sido publicado.

6. RSK para matrices 3D.

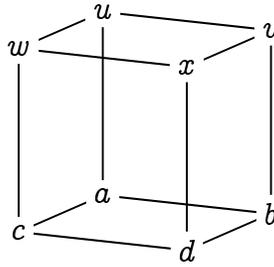
Teorema 17

Si λ, μ, ν son particiones de n , el conjunto $\text{LR}(\lambda, \mu; \nu)$ puede identificarse con el conjunto de matrices tridimensionales cuyos márgenes son λ, μ, ν y que satisfacen las condiciones de fila y columna.

Dado que el tema central de esta tesis se refiere al caso en que λ, μ, ν tienen dos partes, vamos a describir con más detalle las condiciones que se obtienen.

6.3. Las condiciones de fila y columna para matrices $2 \times 2 \times 2$.

Sea M una matriz de $2 \times 2 \times 2$ cuyas entradas están dadas por



Si los márgenes de M son λ, μ, ν :

$$a + b + u + v = \lambda_1, \quad c + d + w + x = \lambda_2, \quad (6.38)$$

$$a + c + u + w = \mu_1, \quad b + d + v + x = \mu_2, \quad (6.39)$$

$$a + b + c + d = \nu_1, \quad u + v + w + x = \nu_2. \quad (6.40)$$

Supongamos además que la matriz M satisface tanto las condiciones de fila como las de columna. Sean

$$M^{col} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ u & v \\ w & x \end{bmatrix} \quad M^{row} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \\ u & w \\ v & x \end{bmatrix}.$$

6. RSK para matrices 3D.

Entonces tenemos desigualdades entre las entradas de la matriz.

$$\begin{array}{ll}
 w \geq v, & v \geq w \\
 u + w \geq d + v, & u + v \geq d + w \\
 c + u + w \geq b + d + v, & b + u + v \geq c + d + w
 \end{array}$$

junto con $x = 0$.

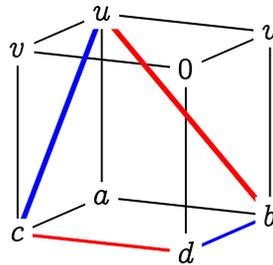
Notando que $v = w$ y cancelando términos repetidos podemos reducir las desigualdades a

$$\begin{array}{ll}
 x = 0, & v = w, \\
 u + b \geq c + d, & u + c \geq b + d, \\
 u \geq d.
 \end{array}$$

Además, sumando las desigualdades $u + b \geq c + d$ y $u + c \geq b + d$ se deduce $u \geq d$, por lo que únicamente necesitamos considerar las cuatro primeras restricciones. Tenemos entonces el siguiente resultado.

Proposición 18

Las matrices de entradas enteras no negativas de tamaño $2 \times 2 \times 2$ y márgenes λ, μ, ν , que bajo la correspondencia en consideración, corresponden a pares de tablas (P, Q) de forma igual a su contenido son aquellas matrices cuyas entradas cumplen las condiciones



Ciertas observaciones son inmediatas:

1. Las condiciones de fila y columna no imponen restricción sobre a .
2. El valor de u determina el valor de v y viceversa:

$$u = \nu_2 - 2v, \quad v = \frac{\nu_2 - u}{2}.$$

6. RSK para matrices 3D.

3. Los valores de b y c se determinan mutuamente. Restando las ecuaciones de las caras cuyas sumas son λ_1 y μ_1 obtenemos

$$\lambda_1 - \mu_1 = b - c.$$

4. Las condiciones son simétricas respecto a λ y μ , pero no respecto a ν . Por tanto

$$\text{lr}(\lambda, \mu; \nu) = \text{lr}(\mu, \lambda; \nu).$$

Aunque las condiciones no son simétricas en λ, μ, ν , la diferencia $c(\lambda, \mu, \nu) = \text{lr}(\lambda, \mu; \nu) - \text{lr}(\lambda, \mu; \tilde{\nu})$ sí es simétrica respecto a las tres particiones, por lo que podemos antes de hacer los cálculos, suponer que están ordenadas de la forma que nos convenga. En particular, en el resto del capítulo supondremos $\lambda \leq \mu \leq \nu$, es decir

$$\nu_2 \leq \mu_2 \leq \lambda_2 \leq \frac{n}{2} \leq \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \nu_1. \quad (6.41)$$

7. Segundo método de conteo

Usando el último teorema del capítulo anterior, identificamos de aquí en adelante el conjunto de tablas $LR(\lambda, \mu; \nu)$ con el conjunto de matrices de márgenes λ, μ, ν que satisfacen tanto la condición de fila como la de columna. Recordemos que estamos trabajando con particiones de dos partes. Finalmente, recordemos que si $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, entonces $\tilde{\nu} = (\nu_1 + 1, \nu_2 - 1)$.

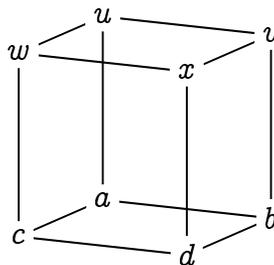
Nuevamente deseamos calcular el producto de Kronecker $\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \chi^\nu \rangle$. Usando una vez más que $\chi^\nu = \phi^\nu - \phi^{\tilde{\nu}}$ desarrollamos el producto como

$$\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \chi^\nu \rangle = \langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \phi^\nu - \phi^{\tilde{\nu}} \rangle \quad (7.1)$$

$$= \langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \phi^\nu \rangle - \langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \phi^{\tilde{\nu}} \rangle = lr(\lambda, \mu; \nu) - lr(\lambda, \mu; \tilde{\nu}). \quad (7.2)$$

El objetivo de este capítulo será usar la descripción combinatoria descrita en el capítulo anterior para poder calcular la diferencia que se obtuvo en el desarrollo anterior. Pero dado que los números $lr(\lambda, \mu; \nu)$ son grandes y difíciles de calcular, daremos una correspondencia entre los conjuntos de matrices asociados y calcularemos la diferencia después de hacer la cancelación bajo esa correspondencia.

Al final del capítulo anterior, vimos que las matrices de $2 \times 2 \times 2$ que satisfacen las condiciones de fila y columna son aquellas matrices



cuyas entradas satisfacen

$$x = 0, \quad v = w, \quad (7.3)$$

$$u + b \geq c + d, \quad u + c \geq b + d \quad (7.4)$$

7. Segundo método de conteo

Identificando los conjuntos de matrices que satisfacen las condiciones de filas y columna con los conjuntos apropiados de tablas, podemos calcular $lr(\lambda, \mu; \nu) - lr(\lambda, \mu; \tilde{\nu})$ contando las cardinalidades de los conjuntos de matrices. Nuevamente estableceremos una correspondencia entre tales conjuntos, de modo que la diferencia buscada sea igual a la diferencia entre el número de elementos del dominio menos los elementos del contradominio.

De forma explícita, tal correspondencia consiste en asignar a cada matriz con valores (a, b, c, d, u, v) en el primer sumando, la matriz con valores $(a + 1, b, c, d, u - 1, v)$:

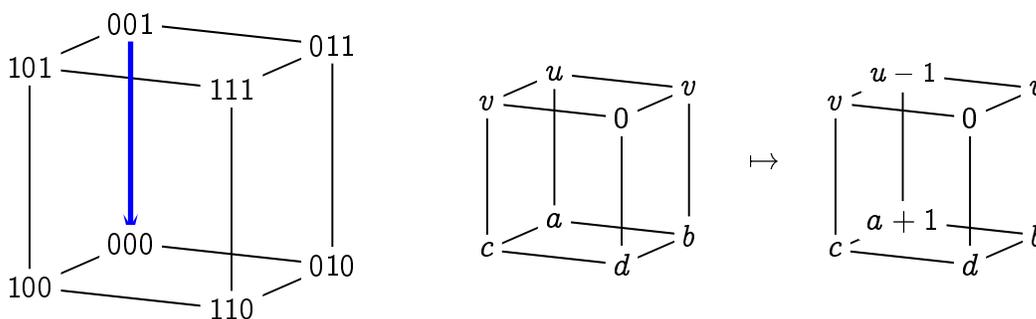


Figura 7.1.: Representación gráfica de la correspondencia.

Dado a que tal correspondencia es uno a uno, podemos cancelar parejas de matrices correspondientes, y así la diferencia $lr(\lambda, \mu; \nu) - lr(\lambda, \mu; \tilde{\nu})$ la calcularemos como la diferencia entre el número de matrices de $LR(\lambda, \mu; \nu)$ que no tienen imagen en $LR(\lambda, \mu; \tilde{\nu})$ menos las matrices del segundo conjunto que no tienen preimagen bajo la correspondencia.

Para el dominio, existen dos razones por las que una matriz no tenga imagen o que ésta no esté definida:

- Que el valor de u sea igual a cero.
- Que el resultado de cambiar (a, u) por $(a + 1, u - 1)$ sea una matriz que no satisface (??).

Si $u = 0$, al ser $u \geq d$ se tiene $d = 0 = u$. Al efectuar el cambio tendremos $u - 1 < d$, que no cumple las condiciones de fila y columna. De este modo la única condición que tenemos que tomar en cuenta es la segunda, es decir, basta con contar únicamente las matrices cuya imagen no cumple las condiciones de fila y columna. Para esto es necesario tener una igualdad en cualquiera de las condiciones de fila

7. Segundo método de conteo

y columna que involucran a u para que al cambiar u por $u - 1$ no se satisfagan las condiciones.

Proposición 19

El número de matrices de $\text{LR}(\lambda, \mu; \nu)$ en las que no está definida la correspondencia son aquellas que satisfacen alguna de las siguientes igualdades:

- $u + b = c + d.$
- $u + c = b + d.$

Ahora, para el contradominio, dado que la posición 001 siempre aparece en el lado mayor de las desigualdades determinadas por las restricciones de fila y columna, siempre que $u - 1$ las satisfaga, u lo hará también. Además, no existe restricción sobre a . Esto quiere decir que todas las matrices del contradominio con $a > 0$ que satisfagan las condiciones de fila y columna tienen preimagen que también satisface las condiciones de fila y columna:

Proposición 20

El número de matrices de $\text{LR}(\lambda, \mu; \tilde{\nu})$ que no tienen preimagen en $\text{LR}(\lambda, \mu; \nu)$ bajo la correspondencia mencionada son aquellas donde $a = 0$.

En las siguientes secciones procedemos a calcular el número de matrices que con las restricciones mencionadas anteriormente para poder encontrar el valor de la diferencia. Dado que los cálculos son más sencillos para el contradominio, efectuamos primero el trabajo ahí.

7.1. Cálculo en el contradominio.

Queremos calcular el número de matrices en $\text{LR}(\lambda, \mu; \tilde{\nu})$ con $\tilde{\nu} = (\nu_1 + 1, \nu_2 - 1)$ para las que $a = 0$. Sea $z = u - 1$. Las matrices que estamos considerando son las de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & v \\ v & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.5)$$

que satisfacen

$$z + b \geq c + d, \quad z + c \geq b + d. \quad (7.6)$$

7. Segundo método de conteo

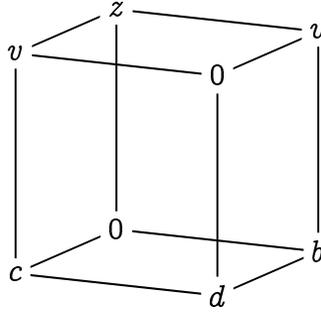


Figura 7.2.: Matrices del contradominio que no se cancelan con la correspondencia.

- Para cada valor de v fijo, el valor z queda únicamente determinado como

$$z = \tilde{\nu}_2 - 2v. \quad (7.7)$$

- Si v, z están fijos, $b = \lambda_1 - (z + v)$, $c = \mu_1 - (z + v)$ quedan únicamente determinados. Además, dado que $z + v = \tilde{\nu}_2 - v$, tenemos:

$$b = \lambda_1 - \tilde{\nu}_2 + v, \quad (7.8)$$

$$c = \mu_1 - \tilde{\nu}_2 + v. \quad (7.9)$$

- Una vez fijos z, v, b, c entonces d queda dado por $d = \tilde{\nu}_1 - (b+c) = \lambda_2 - (v+c) = \mu_2 - (v+b)$, es decir:

$$d = \tilde{\nu}_1 - \lambda_1 - \mu_1 + 2\tilde{\nu}_2 - 2v, \quad (7.10)$$

$$d = \lambda_2 - \mu_1 + \tilde{\nu}_2 - 2v, \quad (7.11)$$

$$d = \mu_2 - \lambda_1 + \tilde{\nu}_2 - 2v. \quad (7.12)$$

Las observaciones anteriores muestran que basta con fijar el valor de v para que los demás valores de la matriz queden completamente determinados. En otras palabras, el número de matrices que buscamos es el número de valores de v para los cuales los valores obtenidos son compatibles con los márgenes y con las condiciones de fila y columna. Antes de proceder, recordamos que por simetría de $c(\lambda, \mu, \nu)$ estamos suponiendo $\lambda_2 \geq \mu_2 \geq \nu_2 > \tilde{\nu}_2 = \nu_2 - 1$.

- El valor v aparece en las caras cuya suma es $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \tilde{\nu}_2$ por lo que es necesario que

$$0 \leq v \leq \min(\lambda_2, \mu_2, \left\lfloor \frac{\tilde{\nu}_2}{2} \right\rfloor) = \left\lfloor \frac{\tilde{\nu}_2}{2} \right\rfloor. \quad (7.13)$$

7. Segundo método de conteo

- El valor $z = \tilde{v}_2 - 2v$ es, por la elección de v , no negativo y menor o igual a \tilde{v}_2 .
- Se tiene que $b = \lambda_1 - \tilde{v}_2 + v \geq 0$ pues $\lambda_1 - \tilde{v}_2 \geq 0$ y $v \geq 0$. La entrada b aparece en las caras $\lambda_1, \mu_2, \tilde{v}_1$. La restricción más fuerte es $b \leq \mu_2$.

Si $\lambda_1 - \tilde{v}_2 + v \leq \mu_2$ entonces debe cumplirse

$$0 \leq v \leq \mu_2 + \tilde{v}_2 - \lambda_1 = \lambda_2 + \mu_2 + \tilde{v}_2 - n. \quad (7.14)$$

- Si se efectúa el mismo razonamiento para c obtenemos la misma restricción, lo cual concuerda con el papel simétrico de λ, μ (por tanto de b y c).
- Finalmente d , que aparece en las caras $\lambda_2, \mu_2, \tilde{v}_1$ cumple

$$d = \lambda_2 - (\mu_1 - \tilde{v}_2) - 2v \leq \lambda_2, \quad (7.15)$$

$$d = \mu_2 - (\lambda_1 - \tilde{v}_2) - 2v \leq \mu_2 \quad (7.16)$$

por lo que el valor de d sí es compatible con las caras de suma $\lambda_2, \mu_2, \tilde{v}_1$ en las que aparece. Sólo nos queda verificar la no negatividad de d , lo cual sucede si $b + c \leq \tilde{v}_1$, que por (7.10) y (7.11) equivale a

$$\lambda_1 + \mu_1 - 2\tilde{v}_2 + 2v \leq \tilde{v}_1, \quad (7.17)$$

o en otras palabras, ya que $\tilde{v}_1 = n - \tilde{v}_2$,

$$0 \leq v \leq \frac{n - \lambda_1 - \mu_1 + \tilde{v}_2}{2} = \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \tilde{v}_2 - n}{2}. \quad (7.18)$$

Recordando que $\lambda_2, \mu_2, \tilde{v}_2$ son todos menores o iguales a $n/2$, reordenando la última desigualdad se prueba que

$$\frac{\tilde{v}_2}{2} \geq \frac{\tilde{v}_2}{2} - \left(\frac{n - (\lambda_2 + \mu_2)}{2} \right). \quad (7.19)$$

- En otras palabras, (7.18) es más fuerte que (7.13) y (7.14) y por lo tanto los valores posibles a v en consideración se reducen a aquellos que cumplan

$$0 \leq v \leq \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \tilde{v}_2 - n}{2} \right\rfloor \quad (7.20)$$

Dado que la fracción en el lado derecho puede ser negativa, el número de valores para v posibles es

$$\alpha = \max \left(0, \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \tilde{v}_2 - n}{2} \right\rfloor + 1 \right). \quad (7.21)$$

7. Segundo método de conteo

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \tilde{\nu}_2 - n}{2} \right\rfloor + 1 &= \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - 1 - n + 2}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n + 1}{2} \right\rfloor \end{aligned} \quad (7.22)$$

es positivo cuando $\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n + 1 \geq 2$, es decir, $\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \geq n + 1$.

Usando entonces la notación $\llbracket P \rrbracket$ que significa

$$\llbracket P \rrbracket = \begin{cases} 1 & \text{si } P \text{ es verdadero} \\ 0 & \text{si } P \text{ es falso} \end{cases}, \quad (7.23)$$

tenemos el resultado:

Proposición 21

El número de matrices del conjunto $\text{LR}(\lambda, \mu; \tilde{\nu})$ que no se cancelan en la relación considerada, es decir, aquellas matrices con $a = 0$ es

$$\left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n + 1}{2} \right\rfloor \llbracket \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \geq n + 1 \rrbracket \quad (7.24)$$

7.2. Cálculo en el dominio.

Ahora queremos calcular las matrices en $\text{LR}(\lambda, \mu; \nu)$ cuya imagen bajo la correspondencia no está definida o no cumple las condiciones de fila y columna.

Como señalamos anteriormente, tales matrices son aquellas en las que las condiciones de fila y columna se convierten en igualdades, esto es, si alguna de las condiciones siguientes se cumple:

$$u + b = c + d, \quad (7.25)$$

$$u + c = b + d. \quad (7.26)$$

Si ambas igualdades se cumplen, sumándolas obtenemos $2u + b + c = b + c + 2d$, y por tanto $u = d$ y $b = c$. De forma alterna, $u - d = c - b$ y $u - d = b - c$ implican $u - d = 0 = b - c$.

Además, si $u = d$, al sustituir en las condiciones de fila y columna se obtiene $u + b = c + d$ y $u + c = b + d$, por lo que la condición $u = d$ es equivalente a que las dos igualdades mencionadas arriba se satisfagan simultáneamente.

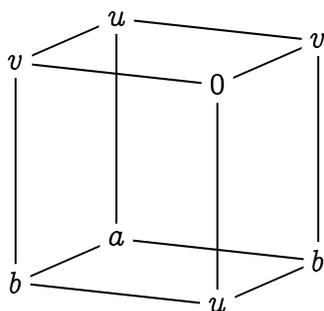
7. Segundo método de conteo

Tenemos entonces 3 casos:

- Caso 1: $u = d$
- Caso 2: $u + b = c + d$ y $u + c > b + d$.
- Caso 3: $u + c = b + d$ y $u + b > c + d$.

7.2.1. Primer caso: $u = d$.

Dado que $u = d$ implica $b = c$, la matriz toma la forma siguiente:



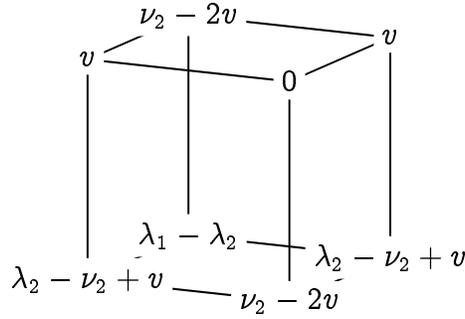
Las caras que suman λ_2 y μ_2 son ambas iguales a $u + b + v$, por lo que $\lambda = \mu$ es una condición necesaria y suficiente (pues $b = c$ implica $u = d$) para que existan matrices de este tipo.

La cara menor es ν_2 y por tanto v puede tomar valores desde 0 hasta $\lfloor \nu_2/2 \rfloor$. Una vez fijo el valor de v , el valor $u = \nu_2 - 2v$ queda determinado. Tal valor es no negativo por construcción y como $u \leq \nu_2$, no es posible que u sea mayor que la suma de cualquier cara en la que aparece.

Podemos calcular b como $\lambda_2 - (u + v) = \lambda_2 - (\nu_2 - v) = \lambda_2 - \nu_2 + v$. Dado que $\lambda_2 \geq \nu_2$, el valor obtenido siempre es no negativo, y por construcción es compatible con las sumas de las caras en las que aparece. Finalmente, a queda determinado por $\lambda_1 - \lambda_2 = (a + b + u + v) - (b + u + v)$ por lo que su valor es fijo, igual a a , y no depende de v .

Concluimos entonces que, cuando $\lambda = \mu$ las matrices son de la forma

7. Segundo método de conteo



Para terminar, se debe considerar que $\lambda_2 - \nu_2 + v$ debe satisfacer las desigualdades

$$0 \leq \lambda_2 - \nu_2 + v \leq \min(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1) = \mu_2. \quad (7.27)$$

Ahora, $0 \leq \lambda_2 - \nu_2 + v$ equivale a que $v \geq \nu_2 - \lambda_2$, lo cual siempre es cierto ya que $v \geq 0 \geq \nu_2 - \lambda_2$. Por otro lado, $\lambda_2 - \nu_2 + v \leq \mu_2$ equivale a que

$$v \leq \mu_2 + \nu_2 - \lambda_2 \quad (7.28)$$

pero recordando que $\lambda = \mu$, tal condición se convierte en $v \leq \nu_2$ que es más débil que $v \leq \lfloor \nu_2/2 \rfloor$ obtenida inicialmente.

Concluimos entonces que cuando $\lambda = \mu$, los valores de v que dan origen a las matrices buscadas son tales que

$$0 \leq v \leq \left\lfloor \frac{\nu_2}{2} \right\rfloor. \quad (7.29)$$

Resumimos el resultado en el siguiente teorema.

Teorema 22

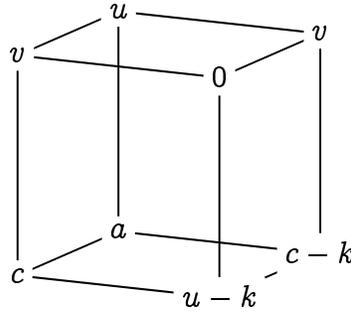
El número de matrices en $LR(\lambda, \mu; \nu)$ tales que $u = d$, o de forma equivalente, $\lambda = \mu$ es

$$\left(\left\lfloor \frac{\nu_2}{2} \right\rfloor + 1 \right) \llbracket \lambda = \mu \rrbracket. \quad (7.30)$$

7.2.2. Segundo caso: $u + b = c + d$ y $u + c > b + d$.

El siguiente caso a considerar es que $u + b = c + d$, $u + c > b + d$. Sea $k = u - d = c - b > 0$. Las matrices son de la forma

7. Segundo método de conteo



El valor de a es único y queda determinado como

$$\lambda_1 - \lambda_2 = (a + u + v + c - k) - (v + c + u - k) = a \geq 0.$$

Al inicio del capítulo, al establecer las condiciones de fila y columna, se obtuvo $b - c = \lambda_1 - \mu_1$, por lo que $k = \lambda_2 - \mu_2 \geq 0$.

Hemos visto que las entradas de una matriz que satisface las condiciones del segundo caso quedan determinadas por v . A continuación determinaremos los valores posibles para v .

Dado que ν_2 es la cara menor, v puede tomar los valores entre 0 y $\lfloor \nu_2/2 \rfloor$. Una vez fijo el valor de v , el valor $u = \nu_2 - 2v$ queda determinado.

Podemos determinar c mediante alguna de las fórmulas:

$$c = \lambda_2 - (v + u - k)$$

Como se cumple

$$0 \leq c \leq \min(\lambda_2, \mu_1, \nu_1) = \lambda_2. \quad (7.31)$$

podemos establecer restricciones sobre v expresando a c en términos de v .

Usando que $c = \lambda_2 - (u + v - k)$ y que $u + v \leq \nu_2$, se tiene $u + v - k < \nu_2 \leq \lambda_2$. Esto garantiza que $c \geq 0$. Para $c \leq \lambda_2$ hay que comprobar que $u + v - k \geq 0$:

$$\begin{aligned} u + v - k &= u + v - \lambda_2 + \mu_2 \\ &= \nu_2 - v - \lambda_2 + \mu_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En otras palabras, v debe satisfacer $v \leq \nu_2 + \mu_2 - \lambda_2$. Esta expresión podría ser negativa (pues $\nu_2 \leq \mu_2 \leq \lambda_2$), en cuyo caso no habría valores de v que den origen a entradas apropiadas de la matriz.

También tenemos que

$$0 \leq c - k \leq \min(\lambda_1, \mu_2, \nu_1) = \mu_2. \quad (7.32)$$

7. Segundo método de conteo

De la fórmula para c se tiene

$$c - k = \lambda_2 - (u + v) = \lambda_2 - (v'\nu_2 - 2v) = v + \lambda_2 - \nu_2 \geq 0$$

La condición $c - k \leq \mu_2$ es equivalente a $v \leq \mu_2'\nu_2 - \lambda_2$.

Como $u + v - k \leq \nu_2 - k < \nu_2 \leq \mu_2$ se cumple $c - k \geq 0$. Ya determinamos la condición para que $u + v - k$ sea no negativo y en ese caso $c - k \leq \mu_2$.

Para terminar hay que verificar que

$$0 \leq u - k \leq \min(\lambda_2, \mu_2, \nu_1) = \mu_2. \quad (7.33)$$

Primero comprobaremos que $u - k \leq \mu_2$, recordando que $k = \lambda_2 - \mu_2$ y por tanto $\mu_2 + k = \mu_2 + \lambda_2 - \mu_2 = \lambda_2$. Por otro lado $\lambda_2 \geq \nu_2 \geq u$, lo cual prueba que la desigualdad siempre se satisface.

Para que $u - k \geq 0$, o en otras palabras, $u \geq k$ es necesario que

$$u = \nu_2 - 2v \geq \lambda_2 - \mu_2, \quad (7.34)$$

que es equivalente, recordando que v es un valor entero, a la condición

$$v \leq \left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor. \quad (7.35)$$

Tenemos entonces que los valores de v determinan únicamente los demás valores de la matriz siempre y cuando v sea no negativo y cumpla las restricciones

$$\begin{aligned} v &\leq \left\lfloor \frac{\nu_2}{2} \right\rfloor \\ v &\leq \nu_2 + \mu_2 - \lambda_2 \\ v &\leq \left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Dado que $\mu_2 - \lambda_2 < 0$, la tercera desigualdad es la más fuerte y por tanto los valores de v que nos interesan son

$$0 \leq v \leq \left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor, \quad (7.36)$$

siempre y cuando $\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2 \geq 0$.

Resumimos todas los cálculos anteriores en el siguiente teorema:

Teorema 23

El número de matrices en $\text{LR}(\lambda, \mu; \nu)$ tales que $u + b = c + d$, $u + c > b + d$ es

$$\left(\left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor + 1 \right) \llbracket \mu_2 + \nu_2 \geq \lambda_2 \rrbracket. \quad (7.37)$$

7.2.3. Tercer caso: $u + c = b + d$ y $u + b > c + d$.

Sea nuevamente $k = u - d > 0$, por lo que $b - c = k$.

Sin embargo, $b - c = \lambda_1 - \mu_1 < 0$, lo que significa que no hay valores de k que satisfagan las condiciones de este caso y por tanto no hay matrices que contar.

7.3. Conteo total.

Finalmente, calculamos $c(\lambda, \mu, \nu) = lr(\lambda, \mu; \nu) - lr(\lambda, \mu; \tilde{\nu})$ como la diferencia entre el número de matrices que sobran en el dominio después de aplicar la correspondencia menos el número de matrices que sobran en el contradominio.

Dado que el conteo del dominio consta de 2 casos disjuntos:

- $u = d$ que equivale a $\lambda = \mu$.
- $u > d$ y $u + b = c + d$ que equivale a $\lambda \neq \mu$.

tenemos dos casos para el conteo total:

- Si $\lambda = \mu$:

$$\left(\left\lfloor \frac{\nu_2}{2} \right\rfloor + 1 \right) - \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n + 1}{2} \right\rfloor \llbracket \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \geq n + 1 \rrbracket \quad (7.38)$$

- Si $\lambda \neq \mu$:

$$\left(\left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor + 1 \right) \llbracket \mu_2 + \nu_2 \geq \lambda_2 \rrbracket - \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n + 1}{2} \right\rfloor \llbracket \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \geq n + 1 \rrbracket \quad (7.39)$$

Ahora bien, si $\lambda = \mu$ entonces $\mu_2 = \lambda_2$ y $\mu_2 + \nu_2 \geq \lambda_2$. Entonces $\llbracket \mu_2 + \nu_2 \geq \lambda_2 \rrbracket = 1$ en ese caso y podemos reescribir (7.38) como

$$\left(\left\lfloor \frac{\nu_2}{2} \right\rfloor + 1 \right) \llbracket \mu_2 + \nu_2 \geq \lambda_2 \rrbracket - \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n + 1}{2} \right\rfloor \llbracket \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \geq n + 1 \rrbracket \quad (7.40)$$

7. Segundo método de conteo

Finalmente, notemos que $\left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor$ se reduce a $\left\lfloor \frac{\nu_2}{2} \right\rfloor$ cuando $\lambda = \mu$, por lo que podemos agrupar ambos casos en una única fórmula.

Concluimos entonces con el siguiente teorema.

Teorema 24

Si λ, μ, ν son particiones con 2 partes, y $\lambda \leq \mu \leq \nu$ (en el orden lexicográfico), entonces

$$c(\lambda, \mu, \nu) = \left(\left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor + 1 \right) \llbracket \mu_2 + \nu_2 \geq \lambda_2 \rrbracket - \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n + 1}{2} \right\rfloor \llbracket \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \geq n + 1 \rrbracket \quad (7.41)$$

Del teorema anterior se puede deducir otra fórmula, que aunque menos simétrica, está relacionada con la profundidad de las particiones.

Corolario 25

$$c(\lambda, \mu, \nu) = \left\lfloor \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + 1}{2} \right\rfloor \llbracket \mu_2 + \nu_2 > \lambda_1 \rrbracket + \left(\left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor + 1 \right) \llbracket \lambda_1 \geq \mu_2 + \nu_2 \geq \lambda_2 \rrbracket. \quad (7.42)$$

8. Conclusiones

En los capítulos anteriores se usaron diferentes descripciones combinatorias para calcular el coeficiente de Kronecker $c(\lambda, \mu, \nu)$ de dos formas. Existen otras dos fórmulas en la literatura, [10] y [5] obtenidas mediante métodos diferentes que calculan el mismo valor. A continuación verificaremos que las 4 formas disponibles son equivalentes y después discutiremos brevemente sobre la posibilidad de extender algunas en los casos cuando ν tenga más de dos partes.

8.1. Equivalencia de las fórmulas

Primero listaremos las 4 fórmulas que se tienen para calcular $c(\lambda, \mu, \nu)$ cuando λ, μ, ν tienen dos partes. Asumiremos que $\lambda \geq \mu \geq \nu$ en las 4 fórmulas.

Remmel y Whitehead determinaron la siguiente formula en [10]:

$$c(\lambda, \mu, \nu) = (1 + W_1 - V_1)\llbracket W_1 \geq V_1 \rrbracket \quad (8.1)$$

donde

$$W_1 = \left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor \quad (8.2)$$

$$V_1 = \max\left(0, \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n}{2} \right\rfloor\right) \quad (8.3)$$

Por otro lado, Mercedes Rosas determina en [5] la fórmula

$$c(\lambda, \mu, \nu) = (x - y)\llbracket x \geq y \rrbracket \quad (8.4)$$

donde

$$x = \left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2 + 1}{2} \right\rfloor \quad (8.5)$$

$$y = \max\left(0, \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n}{2} \right\rfloor\right) \quad (8.6)$$

8. Conclusiones

Dado que V_1 en (8.1) es igual a y en (8.4), para probar que ambas fórmulas son equivalentes basta probar

$$1 + \left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2 + 1}{2} \right\rceil, \quad (8.7)$$

pero tal igualdad se sigue directamente de la siguiente proposición.

Proposición 26

Si t es un entero, entonces

$$1 + \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{t+1}{2} \right\rceil. \quad (8.8)$$

Para probar la proposición procedemos por casos. Si t es par, entonces $t = 2l$ para algún entero l y

$$\left\lceil \frac{t+1}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{2l+1}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{2l}{2} \right\rfloor = (l+1) - l = 1.$$

Si t es impar, entonces $t = 2l + 1$ para algún entero l y

$$\left\lceil \frac{t+1}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{2l+2}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{2l+1}{2} \right\rfloor = (l+1) - l = 1.$$

De este modo, la proposición queda probada.

La equivalencia de las fórmulas (8.1) y (8.4) queda probada tomando $t = \mu_2 + \nu_2 - \lambda_2$.

Antes de proceder a demostrar que las fórmulas encontradas en el presente trabajo son equivalentes a las fórmulas anteriores, vamos a demostrar que son equivalentes entre sí.

La fórmula obtenida por el primer método es

$$\left\lfloor \frac{n - \lambda_2 - \mu_2 - \nu_2}{2} \right\rfloor \llbracket n < \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \rrbracket + \left(\left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor + 1 \right) \llbracket \lambda_2 \leq \mu_2 + \nu_2 \rrbracket \quad (8.9)$$

y la fórmula obtenida por el segundo método es

$$\left(\left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor + 1 \right) \llbracket \lambda_2 \leq \mu_2 + \nu_2 \rrbracket - \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n + 1}{2} \right\rfloor \llbracket n < \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \rrbracket \quad (8.10)$$

por lo que basta probar que

$$-\left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n + 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n - \lambda_2 - \mu_2 - \nu_2}{2} \right\rfloor. \quad (8.11)$$

8. Conclusiones

Usaremos una versión modificada de la Proposición 26. Si k es un entero, entonces

$$\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil = 1 + \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor, \quad (8.12)$$

que se obtiene haciendo $k = t - 1$ en la proposición mencionada.

Si $\Sigma = \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2$, la igualdad que queremos probar es

$$-\left\lfloor \frac{\Sigma - n + 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n - \Sigma}{2} \right\rfloor. \quad (8.13)$$

Dado que $-\lfloor x \rfloor = \lceil -x \rceil$ para toda x , tenemos

$$\left\lfloor \frac{n - \Sigma}{2} \right\rfloor = -\left\lceil \frac{\Sigma - n}{2} \right\rceil \quad (8.14)$$

pero por otro lado

$$\left\lceil \frac{\Sigma - n}{2} \right\rceil = 1 + \left\lfloor \frac{\Sigma - n - 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\Sigma - n - 1}{2} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\Sigma - n + 1}{2} \right\rfloor, \quad (8.15)$$

lo cual concluye la prueba de la equivalencia.

Por último, vamos a probar que las fórmulas encontradas en este trabajo son equivalentes a las formulas encontradas en la literatura. En particular, vamos aprobar que la fórmula dada por Remmel y Whitehead es equivalente a la fórmula encontrada por el segundo método. Para referencia transcribimos las fórmulas nuevamente. La fórmula de Remmel-Whitehead es:

$$(1 + W_1 - V_1) \llbracket W_1 \geq V_1 \rrbracket \quad (8.16)$$

$$W_1 = \left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor \quad (8.17)$$

$$V_1 = \text{máx} \left(0, \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n}{2} \right\rfloor \right) \quad (8.18)$$

mientras que la del segundo método es

$$\left(\left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor + 1 \right) \llbracket \lambda_2 \leq \mu_2 + \nu_2 \rrbracket - \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n + 1}{2} \right\rfloor \llbracket n < \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \rrbracket. \quad (8.19)$$

Si reescribimos

$$(1 + W_1 + V_1) \llbracket W_1 \geq V_1 \rrbracket = (1 + W_1) \llbracket W_1 \geq V_1 \rrbracket - V_1 \llbracket W_1 \geq V_1 \rrbracket \quad (8.20)$$

8. Conclusiones

podemos demostrar que las fórmulas son equivalentes probando que los términos que aparecen restados en ambas formulas son los mismos.

Comencemos probando que los términos restados en ambos casos son equivalentes

$$\max\left(0, \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n}{2} \right\rfloor\right) \llbracket W_1 \geq V_1 \rrbracket = \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n + 1}{2} \right\rfloor \llbracket n < \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \rrbracket. \quad (8.21)$$

Nuevamente Σ denotará la suma $\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2$. Si

$$V_1 = \max\left(0, \left\lfloor \frac{\Sigma - n}{2} \right\rfloor\right) = 0$$

entonces $\left\lfloor \frac{\Sigma - n}{2} \right\rfloor \leq 0$, que implica $\Sigma - n \leq 0$. Pero entonces $\llbracket n < \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \rrbracket = 0$. Tenemos entonces que $V_1 \llbracket W_1 \geq V_1 \rrbracket = 0 = \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n + 1}{2} \right\rfloor \llbracket n < \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \rrbracket$.

Si $\max\left(0, \left\lfloor \frac{\Sigma - n}{2} \right\rfloor\right) \llbracket W_1 \geq V_1 \rrbracket > 0$ entonces $\max\left(0, \left\lfloor \frac{\Sigma - n}{2} \right\rfloor\right) > 0$ y

$$\max\left(0, \left\lfloor \frac{\Sigma - n}{2} \right\rfloor\right) = \left\lfloor \frac{\Sigma - n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\Sigma - n + 1}{2} \right\rfloor \quad (8.22)$$

por el argumento usado en (8.15). Además $\left\lfloor \frac{\Sigma - n}{2} \right\rfloor > 0$ implica $\Sigma - n > 0$ y por tanto $\llbracket n < \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \rrbracket = 1$. Concluimos entonces que el término restado en ambas fórmulas también coincide en el segundo caso.

Finalmente, los términos que aparecen al inicio de cada diferencia son los mismos salvo los condicionales, es decir, hay que probar

$$\left(1 + \left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor\right) \llbracket W_1 \geq V_1 \rrbracket = \left(1 + \left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor\right) \llbracket \lambda_2 \leq \mu_2 + \nu_2 \rrbracket. \quad (8.23)$$

Procederemos por casos una vez más. Vamos a probar primero que cuando $\llbracket W_1 \geq V_1 \rrbracket = 1$ ambas expresiones coinciden y por tanto las fórmulas coinciden, para verificar al final que si $\llbracket W_1 \geq V_1 \rrbracket = 0$ ambas formulas toman el valor cero.

Si $\llbracket W_1 \geq V_1 \rrbracket = 1$, entonces $W_1 \geq V_1 \geq 0$, por lo que

$$\left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor \geq 0, \quad (8.24)$$

lo que implica $\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2 \geq 0$, es decir, $\llbracket \lambda_2 \leq \mu_2 + \nu_2 \rrbracket = 1$. Hemos probado entonces que si $W_1 \geq V_1$ los términos que aparecen al inicio de cada formula también son iguales, y por tanto las formulas son equivalentes.

8. Conclusiones

Cuando $\llbracket W_1 \geq V_1 \rrbracket = 0$ la primera fórmula se anula por completo, veamos que la segunda formula también. Sabemos que $\llbracket W_1 \geq V_1 \rrbracket = 0$ es equivalente a $W_1 < V_1$.

Cuando $V_1 = 0$ se tiene

$$\left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor < 0, \quad (8.25)$$

de modo que $\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2 < 0$ y por tanto $\llbracket \lambda_2 \leq \mu_2 + \nu_2 \rrbracket = 0$. Así, en este caso, ambas expresiones en consideración son nulas.

Cuando $V_1 > 0$ el argumento de (8.15) muestra que $V_1 = \left\lfloor \frac{\Sigma - n + 1}{2} \right\rfloor$. Así la condición $W_1 < V_1$ se traduce en

$$\left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n + 1}{2} \right\rfloor \quad (8.26)$$

$$= \left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} + \frac{2\lambda_2 - n + 1}{2} \right\rfloor. \quad (8.27)$$

Si $n \neq 2\lambda_2$, obtenemos una contradicción puesto que en ese caso $n > 2\lambda_2$ y por tanto $2\lambda_2 - n + 1 \leq 0$ y por tanto

$$\left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 - n + 1}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor. \quad (8.28)$$

Hasta ahora hemos probado que las dos formulas, las de Remmel-Whitehead y el método dos, coinciden siempre excepto en el caso cuando $W_1 < V_1$, $V_1 > 0$ y $n = 2\lambda_2$. Este caso especial lo probamos directamente. En la fórmula de Remmel-Whitehead, el condicional $\llbracket W_1 \geq V_1 \rrbracket = 0$ hace que toda la formula se anule (sin importar los términos involucrados). Veamos que en la segunda fórmula el valor resultante es cero.

Recordemos que $V_1 > 0$ implica que $\llbracket n < \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 \rrbracket = 1$ (argumento siguiente a (8.22)). Además, si $2\lambda_2 = n < \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2$ entonces $\lambda_2 < \mu_2 + \nu_2$, y así $\llbracket \lambda_2 \leq \mu_2 + \nu_2 \rrbracket = 1$.

Sustituyendo $n = 2\lambda_2$ en la fórmula (8.19) del segundo método obtenemos entonces

$$1 + \left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\mu_2 + \nu_2 - \lambda_2 + 1}{2} \right\rfloor. \quad (8.29)$$

y por la Proposición 26, tal expresión se hace cero. Habiendo probado el caso especial, concluimos que las cuatro fórmulas disponibles para calcular $c(\lambda, \mu, \nu)$ son equivalentes.

8.2. Generalizaciones

El segundo método, no depende de que las matrices tengan tamaño $2 \times 2 \times 2$, por lo que se podría aplicar a matrices donde los márgenes tengan más de 2 partes.

El esquema a seguir es el siguiente:

- Establecer las condiciones de fila y columna que deben satisfacer las matrices.
- Encontrar una correspondencia adecuada que permita cancelar la mayor cantidad de matrices en el dominio y el contradominio.
- Determinar las características de las matrices que quedan sin cancelar en ambos conjuntos.
- Escribir los valores de las entradas en términos de la menor cantidad posible de parámetros.
- Determinar los valores posibles para los parámetros y calcular así las cardinalidades de los conjuntos.
- Calcular y simplificar la diferencia.

En este trabajo, se usó la correspondencia $(a, u) \rightarrow (a + 1, u - 1)$, pero no es la única posible, ya que otra correspondencia podría ser $(a, b, c, u, v) \rightarrow (a - 1, b + 1, c + 1, u + 1, v - 1)$ que da lugar a una diferente cancelación. En el caso considerado, todas las entradas quedaron en términos de un único parámetro (el valor de v), pero para matrices más grandes las entradas quedan expresadas en términos de 2 o más parámetros, los cuales no son independientes entre sí. Este tipo de situaciones son las que se explorarán en trabajos posteriores.

Bibliografía

- [1] William Fulton. *Young Tableaux*. Number 35 in London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1997.
- [2] Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming*, volume 2. Addison-Wesley, 2 edition, 1998.
- [3] Mercedes H. Rosas. Kronecker products of Schur functions indexed by 2 row shapes of hook shape. *J. of Algebraic Combin.*, 14(2):153–173, 2001.
- [4] Bruce E. Sagan. *The Symmetric Group*. Springer, 2001.
- [5] Richard P. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, volume 2. Cambridge University Press, 1999.
- [6] Diana Avella-Alaminos y Ernesto Vallejo. RSK correspondences for 3-dimensional matrices. December 2001.
- [7] James, G. D. y Liebeck M. W. *Representations and Characters of Groups*. Springer, 2001.
- [8] Ballantine, Cristina M. y Orellana, Rosa C. A combinatorial interpretation for the coefficients in the kronecker product $s_{(n-p,p)} * s_\lambda$. *Sém. Lothar. Combin.*, 54A, 2005.
- [9] Ballantine, Cristina M. y Orellana, Rosa C. On the kronecker product $s_{(n-p,p)} * s_\lambda$. *Electron. J. Combin.*, 12, 2005.
- [10] Remmel, Jeffrey B. y Whitehead, Tamsen. On the Kronecker product of Schur functions of 2 row shapes. *Bulletin of Belgian Mathematical Society*, 1994.