UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

"APLICACIÓN DEL MÉTODO DE DISPERSIÓN INVERSA EN LA TEORíA EINSTEN-MAXWELL-DILATÓN-AXIÓN Y CONSTRUCCIÓN DE SOLUCIONES EXACTAS"

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA:

JULIO CÉSAR MEJIA AMBRIZ

ASESOR:

ALFREDO HERRERA AGUILAR

AGOSTO DEL 2007

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. La métrica

En el área de gravitación se trabaja con variedades tetradimensionales que tienen cierta topología, tales variedades describen el espaciotiempo a través de un campo tensorial simétrico de segundo rango $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ denominado tensor métrico.

De este modo, el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ posee diez componentes y contiene toda la información que necesitamos para describir la estructura del espaciotiempo; dicho tensor, en relatividad general, depende de la disposición y cantidad de materia localizada en la region en cuestión. Las soluciones a las ecuaciones de Einstein en una variedad con una topología específica determinan el tensor métrico. Tales ecuaciones están dadas por la relación tensorial

$$R^{\mu\nu} = k(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg^{\mu\nu}), \tag{1.1}$$

donde $T^{\mu\nu}$ es llamado tensor de estrés y contiene toda la información acerca de la energía y momento, mientras que $\kappa = \frac{-8\pi G}{c^4}$ y $T = T^{\mu}_{\mu}$. En el lado izquierdo tenemos el denominado tensor de Ricci, el cual depende de la curvatura del espacio.

Llamaremos *métrica*, a la relación cuadrática

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}.$$

Esta expresión, fundamentalmente, nos dá la distancia entre dos puntos vecinos cuyas coordenadas difieren en dx^{μ}, pero lo importante aquí es que en tal relación está involucrado explícitamente el tensor métrico.

En el marco de la cosmología, los modelos cosmológicos también se representan por métricas, éstas dependen del tiempo, y en algunos casos (métricas no homogéneas) dependen de ciertas coordenadas espaciales.

Por otro lado, también trabajaremos con métricas que en la teoría de la gravitación describen el espaciotiempo en el vacío ($R^{\mu\nu} = 0$) y sólo dependen de coordenadas espaciales. Particularmente estas métricas describen agujeros negros. Posteriormente, con el uso de un método llamado *método de dispersión inversa*, construiremos una una métrica que constituye una solución de las ecuaciones de campo en la teoría de cuerdas heteróticas a bajas energías y que poseerá la forma de los intervalos de los agujeros negros. Esta última métrica, a diferencia de las obtenidas en el vacío, considera campos adicionales (no sólo campo gravitatorio) como veremos más tarde.

Otra característica del tensor métrico es la *signatura*, determinada por los signos de las componentes diagonales de la matriz $g_{\mu\nu}$ en el espaciotiempo plano. Si la métrica tiene signatura de Minkowski (pseudorriemanniana), una de las componentes de la signatura (la g_{00}) posee signo negativo (positivo) y las demás signo positivo (negativo); en nuestro estudio adoptaremos la primera alternativa, denotada por $(-+++)$. La diferencia entre el número de componentes positivas y negativas se denomina signatura, por lo tanto, tendremos signatura $+2$ en los modelos que trataremos.

La solución a las ecuaciones de Einstein más básica descubierta en gravitación es la solución de Schwarzschild, y describe espaciotiempos esféricamente simétricos en el vacío. Esta métrica generaliza el espaciotiempo plano puesto que cuando no se tienen fuentes gravitacionales obtenemos el espaciotiempo de Minkowski. De acuerdo con un teorema establecido por Birkhoff se afirma que la métrica de Schwarzschild es la única solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el vacío.

1.2. Métrica y agujeros negros

Una métrica equipada con un vector de Killing[1] temporaloide (es decir, que no depende del tiempo) es llamada *estacionaria*. Por otro lado, como definición, una métrica es llamada *estática* si posee un vector de Killing temporaloide que es ortogonal a una familia de hipersuperficies con t constante [1], (en este caso, una hipersuperficie es una subvariedad espacial tridimensional de la variedad tetradimensional). Particularmente, cuando la métrica es estacionaria y además diagonal (esto es, que no hay términos cruzados $dx^\mu dx^\nu$, tales que $\mu \neq \nu$), tenemos una métrica estática. Físicamente hablando, una

[1] Se le llama vector de Killing a un vector covariante ξ_μ que satisface la ecuación

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0.$$

Si el espaciotiempo tiene un vector de Killing, entonces se puede encontrar un sistema coordenado en el cual las componentes del tensor métrico son independientes de una de las coordenadas [1]–[2].

métrica estática es aquella en la que nada tiene movimiento, mientras que una estacionaria permite que se muevan las cosas pero de manera simétrica. La solución de Schwarzschild, por ejemplo, es esféricamente simétrica, estática y describe objetos esféricos masivos no rotatorios tal como estrellas u hoyos negros estáticos. Los sistemas rotatorios (que se mantienen rotando de la misma forma todo el tiempo) son descritos por métricas estacionarias.

Un cuerpo estelar que gira sobre un eje perpendicular a su plano ecuatorial no puede ser descrito por la solución de Schwarzschild, lo que se necesita en este caso es una métrica estacionaria que tenga simetría axial. La solución para este problema fue encontrada por Kerr y tiene simetría axial con respecto al eje z. La solución de Kerr posee dos vectores de Killing, que se manifiestan debido a que las componentes de la métrica son independientes de t y φ. Aquí también se tiene un vector de Killing temporaloide, pero no es ortogonal a las hipersuperficies (t=constante); de este modo, esta métrica es estacionaria, pero no es estática. Una forma sencilla de entender que es estacionaria radica en su carácter no diagonal.

1.3. Modelos cosmológicos

En general, cualquier resultado que se obtenga en relatividad general debe ajustarse a las observaciones (o bién a suposociones físicas convincentes), en cosmología hay dos conceptos fundamentales dadas las propiedades del universo observable, uno de estos conceptos es la *homogeneidad*, el espacio se considera homogéneo ya que la densidad de galaxias parece ser uniforme al considerar regiones suficientemente grandes [3]. Para los modelos en gravitación, esto implica que la métrica es la misma a través de todo el espacio, esto es, que sus puntos tienen las mismas propiedades geométricas. Si, en cambio, las propiedades de la métrica cambian a lo largo de una de sus dimensiones, entonces la métrica se denomina no homogénea.

El otro concepto fundamental es la *isotropía*, éste se aplica a todo punto específico del espacio, y establece que el espacio tiene las mismas propiedades físicas sin importar la dirección en la que se estudie. Este concepto se debe a que el número observado de galaxias por unidad de ángulo sólido parece ser el mismo en todas direcciones [3].

Formalmente hablando, una variedad es homogénea si dados dos puntos p y q de la variedad existe una isometría[2] bajo traslaciones espaciales, y una

[2]Se dice que tenemos una isometría cuando en la variedad M tenemos una aplicación

variedad es isotrópica si la isometría existe para rotaciones espaciales [1]. Entonces, si la métrica cambia o no bajo traslaciones se dirá que es homogénea o no homogénea respectivamente, similarmente, si la métrica cambia o no bajo rotaciones se llamará isotrópica o no isotrópica.

Sin embargo, se ha considerado que a etapas iniciales del universo, éste debió ser no homogéneo y no isotrópico, por lo que no sólo se han propuesto modelos cosmológicos homogéneos en la teoría general de la relatividad. En 1971 Gowdy propuso un conjunto de modelos cosmológicos no homogéneos en el vacío [4] (la gravedad por si sola nos proporciona soluciones a las ecuaciones de Einstein que describen modelos cosmológicos). [3]) Dichos modelos tienen una topología compacta y dos vectores de Killing tal que las métricas correspondientes sólo dependen del tiempo y de una variable espacial. Este tipo de métricas tienen la misma estructura que las métricas estacionarias y/o estáticas con simetría axial o cilíndricas si hacemos la permutación de la coordenada radial con la coordenada temporal.

Hay tres tipos de variedades topológicas compactas asociadas a estos mo-

---

$\psi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ donde ψ es invertible con las aplicaciones ψ^{-1} y ψ suaves y, además, $g_{\mu\nu} \circ \psi = g_{\mu\nu}$ (considerando $g_{\mu\nu}$ como función $g_{\mu\nu} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{R}$)[1]

[3]Si deseamos considerar un modelo más real, debemos incluir un potencial o términos que describen la materia, por ejemplo un fluido perfecto.

delos cosmológicos: T^3 (el toro tridimensional), S^1XS^2 y S^3. A cada variedad topológica le corresponden dos versiones: polarizada y no polarizada (estas etiquetas, "polarizado" y "no polarizado"se aclararán después).

1.4. Relación de agujeros negros con modelos cosmológicos

El modelo con el que básicamente trabajaremos (con el fin de encontrarle soluciones analíticas y relacionarlo con soluciones conocidas) es el modelo de Gowdy con topología S^1XS^2 no polarizado, el cual tiene ecuaciones de campo no lineales sumamente complicadas. Sin embargo, con el fin de evadir las ecuaciones de Einstein del modelo en cuestión, relacionaremos una parte de la solución de tipo agujero negro rotatorio (la región comprendida entre los horizontes del agujero negro de Kerr) con una cosmología de Gowdy por medio de la transformación $r \longleftrightarrow t$.

Puesto que la métrica de Gowdy constituye una cosmología no homogénea, más adelante la relacionaremos con dos métricas no homogéneas de tipo hoyo negro, a saber, con la solución de Kerr de la relatividad general y con la solución que obtendremos a partir del metodo de disperisión inversa aplicado a Teoría de Cuerdas Heteróticas a bajas energías.

De manera preliminar, para ilustrar el método consistente en relacionar un modelo cosmológico con una solución de agujero negro, consideraremos el resultado obtenido por Kantowsky y Sachs al estudiar un modelo cosmológico homogéneo [5]. Dichos autores descubrieron que se pueden hallar soluciones a los modelos cosmológicos en la teoría general de la relatividad de manera rápida y directa aplicando la transformació $r \longleftrightarrow t$ al interior de la métrica de Schwarzschild.

Posteriormente, el marco de la teoría de cuerdas, trabajaremos con la acción efectiva de Cuerdas Heteróticas a bajas energías. Dicha acción tetradimensional describe gravedad ($g_{\mu\nu}$) acoplado a un campo escalar denominado dilatón (ϕ), un campo pseudoescalar [4] llamado axión (κ) y un campo de Maxwell electromagnético (A_μ).

De este modo, en el contexto de esta teoría, haremos uso del método de dispersión inversa para encontrar una solución de tipo hoyo negro rotatorio.

[4]Consideremos el efecto de reflexión o inversión en las coordenadas $x^\mu \to -x^\mu$ (en coordenadas cartesianas R^3 equivale a cambiar un sistema coordenado derecho por uno izquierdo). Si tenemos un campo escalar ϕ tal que $\phi \to -\phi$ bajo la transformación mensionada, decimos que ϕ es un campo pseudo escalar. Un ejemplo conocido de campo pseudoescalar es la divergencia del campo elćtrico $\frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Veremos como aplicar dicha técnica mediante diversos ejemplos en diferentes áreas de la física. De esta manera nuestro trabajo central será obtener la solución (que físicamente es de interés en el área de Teoría de Cuerdas) y luego proponer un modelo cosmológico de Gowdy con topología S^1XS^2 no polarizado y analizaremos algunos de sus límites.

Capítulo 2

El Método de Dispersión Inversa en Relatividad General y Teoría EMDA

2.1. Idea básica del método y solitones

En la matemática y fisicamatemática, el método de dispersión inversa, también llamado transformada de dispersión inversa es un procedimiento para integrar ciertas ecuaciones diferenciales parciales no lineales por medio de convertirlas en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. En la física, ésto aplica a potenciales que decaen rápidamente al infinito y dicha técnica puede ser aplicada a muchos de los llamados modelos de solución exacta. Esto incluye la ecuación de Korteweg-de Vries, la ecuación no lineal de Schrödinger y la ecuación de sine-Gordon que son históricamente importantes [11]. Las soluciones típicamente consisiten en solitones más alguna radiación de fondo que decae a cero cuando un parámetro (temporal generalmente) va a infinito y estan caracterizadas por tener constantes de movimiento no obvias.

Los solitones son soluciones clásicas de ecuaciones de campo no lineales que poseen energía finita, densidad de energía localizada y que viajan con una velocidad uniforme sin dispersión. Se habla de soluciones solitónicas si inicialmente tenemos un número arbitrario de dichas soluciones ampliamente separadas, para tiempos asintóticamente negativos ($t \to -\infty$), que se aproximan con una velocidad constante y sin deformarse, luego de interactuar durante un intervalo de tiempo finito Δt se separan asintóticamente ($t \to \infty$) como paquetes de onda que conservan su forma y velocidades iniciales [12].

El método de dispersión inversa involucra básicamente dos pasos: El primero de ellos, dada una ecuación diferencial parcial no lineal, el problema consiste en hallar un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales cuyas condiciones de integrabilidad constituyan precisamente la ecuación no lineal a resolver, tales ecuaciones son llamadas *ecuaciones espectrales*. El segundo paso consiste en hallar la clase de soluciones solitónicas para las ecuaciones espectrales, luego a partir de una solución particular de la ecuación no lineal se pueden generar nuevas soluciones solitónicas mediante operaciones puramente algebraicas, una vez que las ecuaciones diferenciales lineales han sido resueltas para la solución particular.

2.2. Aplicaciones del método de dispersión inversa.

Veamos ahora un par de ejemplos en donde aplicamos el método en cuestión. primero encontraremos la solución a una ecuación conocida como la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) [13], la cual, describe la dinámica de ondas que se mueven en aguas poco profundas además de otras aplicaciones físicas [11]. Posteriormente, usaremos el método para un sistema de ecuaciones matriciales, este último ejemplo nos ilustrará la manera de aplicar el método en la forma que lo haremos en gravitación. consideremos la ecuación lineal (la cual, tomará el papel de ecuación espectral)

$$\psi_{,xx} + (\lambda(t) + u(x,t))\psi = 0 \tag{2.1}$$

donde $u(x,t)$ es la solución de la ecuacón Korteweg-de Vries, tal ecuación está dada por

$$u_{,t} + uu_{,x} + u_{,xxx} = 0. \tag{2.2}$$

La ecuación (2.1) es idéntica a la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica para una partícula en un potencial unidimensional, $u(x,t)$ [1]. De (2.1) podemos escribir $u = -\lambda - (\psi_{,xx})/\psi$ la cual, cuando se sustituye en la ecuación (KdV) nos dá:

$$\lambda_{,t}\psi^2 = (\psi_{,x}Q - \psi Q_{,x})_{,x} \tag{2.3}$$

donde

$$Q = \psi_{,t} + \psi_{,xxx} - 3(\lambda - u)\psi_{,x}$$

Integrando (2.3) sobre todo x, y asumiendo que ψ y sus derivadas van a cero cuando $x \to +\infty$ tenemos

$$\frac{d\lambda}{dt}\int \psi^2(x,t)dx = 0. \tag{2.4}$$

[1]Notemos que t aparece unicamente como un parámetro.

Las soluciones para (2.1) son bién conocidas y tienen distintos tipos de solución: aquellas identificadas como estados ligados que correspenden a $\psi \to 0$ exponencialmente cuando $x \to \pm\infty$, y estados de dispersión. Por simplicidad asumimos que solo existen estados ligados y estos son discretos. Así asociamos N soluciones $\psi_n(x,t)$ a (2.1) que son acotadas, tal que la integración en (2.4) existe y es finita. Esto implica que los eigenvalores λ_n son constantes.Ahora, imponemos una constricción adicional: $u \to 0$ si $x \to \pm\infty$. Esto limita a soluciones solitónicas de la ecuación KdV y elimina soluciones correspondientes a ondas no lineales. Ya que $u \to 0$ mientras $x \to \pm\infty$, podemos resolver para ψ en esta región asintótica y escribir, cuando $x \to +\infty$, $\psi_n(x,t) = C_n(t)e^{-k_n x}$ donde $\lambda_n = k_n^2$. Si sustituimos esto en (2.3) encontramos que $C_n(t) = C_n(0)e^{4k_n^3 t}$ donde $C(0)$ es una constante de integración que es obtenida al resolver (2.1) en $x = 0$. Entonces, usando los resultados de arriba, tenemos la solución asintótica de $\psi_n(x,t)$ para todo tiempo. El problema de dispersión inversa en mecánica cuantica y otros problemas de ondas es: dada la forma asintótica de la solución, construir el potencial. Este es exactamente el problema que debemos resolver. Por lo tanto, la solución completa de la ecuación KdV surge de la solución del problema de dispersión inversa. Afortunadamente, este problema a sido resuelto y la solución para de la ecuación KdV es expresada en la forma

$$u(x,t) = 2K(x,y)_{,x} \tag{2.5}$$

donde $K(x,y)$ satisface la ecuación integral de Gelfand-Levitan-Marchenko

$$K(x,y) + B(x+y) + \int_x^\infty B(y+z)K(x,z)dz = 0, \tag{2.6}$$

y

$$B(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n(0)^2 e^{8k_n^3 t - k_n x}. \tag{2.7}$$

Esta ecuación se resuelve asumiendo una solución de la forma

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{N} K_n(x)e^{-k_n y} \tag{2.8}$$

y sustituyendo en (2.6), tenemos N ecuaciones lineales algebraicas para las K_n, las cuales, cuando son resueltas, nos da la forma de $K(x,y)$ y así, con el uso de (2.5), una solución única para $u(x,t)$ [13]. Por ejemlo, si hay solo un estado ligado ($N = 1$), nos da

$$K_0(x) = \frac{-2k_0 B_0}{2k_0 e^{k_0 x} + B_0 e^{-k_0 x}} \tag{2.9}$$

por lo tanto, de (2.5)

$$u(x,t) = \frac{4k_0 B_0 e^{-2k_0 x}}{1 + \frac{B_0}{2k_0} e^{-2k_0 x}}. \tag{2.10}$$

Ahora, veamos el segundo ejemplo que ya habiamos adelantado. La experiencia en el uso del método de dispersión inversa ha mostrado que la mayoría de las ecuaciones bidimensionales conocidas pueden ser representadas como las condiciones consistentes de integrabilidad de las siguientes ecuaciones matriciales

$$\psi_{,x} = U^{(1)}\psi, \qquad\qquad \psi_{,t} = V^{(1)}\psi, \tag{2.11}$$

donde tanto las matrices $U^{(1)}$ y $V^{(1)}$ como el vector columna ψ dependen racionalmente del parámetro espectral complejo λ y de dos de sus coordenadas espaciotemporales x y t, tales variables λ, x y t son independientes. Si diferenciamos la primera ecuación de (2.11) con respecto a la variable t, la segunda con respecto a x e igualamos los resultados, la condición de integración de dicho sistema se expresa como

$$U^{(1)}_{,t} - V^{(1)}_{,x} + U^{(1)}V^{(1)} - V^{(1)}U^{(1)} = 0 \tag{2.12}$$

Esta condición deberá cumpilrse para todos los valores de λ; precisamente este requerimiento coincide con la ecuación diferencial (integrable) que se debe resolver. En este punto debemos hacer mención que la naturaleza física de de las variables x y t en las ecuaciones (2.11) es completamente irrelevante por lo que podemos interpretarlas como nos sea conveniente. Ilustraremos lo anterior con el siguiente caso.

Consideremos las coordenadas del cono de luz [14] $x^{\pm} = x \pm t$ y $\partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_x \pm \partial_t)$. la ecuación sine-Gordon en tales coordenadas para una función ϕ se expresa como $\partial_+\partial_-\phi - 2sen(2\phi) = 0$. Con objeto de simplificar la notación hagamos la identificación $\sigma = x^+$ y $\rho = x^-$ donde ahora σ y ρ son las variables temporal y espacial asociadas al cono de luz [2], las ecuaciones (2.11) y (2.12) adoptan la forma siguiente

$$\psi_{,\sigma} = U^{(2)}\psi \qquad , \qquad \psi_{,\rho} = V^{(2)}\psi \tag{2.13}$$

y

$$U^{(2)}_{,\rho} - V^{(2)}_{,\sigma} + U^{(2)}V^{(2)} - V^{(2)}U^{(2)} = 0 \tag{2.14}$$

respectivamente. Ahora, si elegimos las matrices $U^{(2)}$ y $V^{(2)}$ de la siguiente manera

$$U^{(2)} = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \phi_{,\sigma} \\ \phi_{,\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

$$V^{(2)} = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -i\sin(\phi) \\ i\sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

[2] la ecuación de sine-Gordon en coordenadas usuales se expresa como $\phi_{,tt} - \phi_{,xx} + \sin(\phi) = 0$, donde ϕ es una función de dos variables reales x y t.

A partir de (2.14) tenemos que

$$\begin{pmatrix} 0 & \phi_{,\sigma\rho} - \sin(\phi) \\ \phi_{,\sigma\rho} - \sin(\phi) & 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.15}$$

y vemos que aquí está involucrada la ecuación de sine-Gordon en las coordenadas del cono de luz, las soluciones a la misma son de tipo solitón como ya habíamos señalado. Finalmente, dado que en este caso la función ψ tiene la forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

y el problema espectral se deriva de la ecuación (2.13)

$$\psi_{1,\sigma} = i\lambda\psi_1 + \frac{i}{2}\phi_{,\sigma}\psi_2, \tag{2.16}$$

$$\psi_{2,\sigma} = -i\lambda\psi_2 + \frac{i}{2}\phi_{,\sigma}\psi_1. \tag{2.17}$$

2.3. El método de dispersión inversa en la Relatividad General

Ahora consideremos un modelo que nos será útil al utilizar la ténica de dispersión inversa a la gravedad y a ciertos modelos de la teoría de cuerdas a bajas energías. Como primer punto, supongamos que las matrices U y V son regulares en el infinito del plano definido por el parámetro espectral complejo λ y cada una posee solamente un polo para un valor finito de λ. En este caso se pueden construir las matrices U y V de manera que se anulen cuando $\lambda \to \infty$ debido a que las ecuaciones (2.13) y (2.14) tienen cierta libertad de norma. Debemos hacer notar que ahora pierde relevancia la interpretación de coordenadas del cono de luz (σ, ρ) y solo las consideraremos como coordenadas cualquiera de un espacio tetradimensional, en tanto que ψ ya no será vector columna sino una matriz cuadrada, por lo que el análisis que se hace aquí también se puede aplicar a las ecuaciones (2.11) y (2.12).

Sin pérdida de generalidad, elegimos la localización de los polos de la siguiente manera: $\lambda = \lambda_0$ y $\lambda = -\lambda_0$ para U y V respectivamente, donde λ es una constante arbitraria.

De este modo tenemos

$$U^{(2)} = \frac{K}{\lambda - \lambda_0}, \qquad\qquad V^{(2)} = \frac{L}{\lambda + \lambda_0}, \tag{2.18}$$

con las matrices K y L independientes del parámetro λ. Al sustituir la relación de arriba en (2.14) vemos que el primer miembro se anula si y sólo si se cumplen las siguientes igualdades

$$K_{,\rho} - L_{,\sigma} = 0 \tag{2.19}$$

$$K_{,\rho} + L_{,\sigma} + \frac{1}{\lambda_0}(KL - LK) = 0 \tag{2.20}$$

La anterior ecuación sugiere que podemos representar las matrices K y L en la forma de "derivadas logarítmicas" de cierta matriz g:

$$K = -\lambda_0 g_{,\sigma} g^{-1}, \qquad\qquad L = \lambda_0 g_{,\rho} g^{-1}. \tag{2.21}$$

Así, la ecuación (2.20) representa la condición de integrabilidad de las relaciones anteriores para la matriz g, mientras que la igualdad (2.19) constituye la ecuación de campo de cierto modelo relativista integrable:

$$(g_{,\sigma}\, g^{-1})_{,\rho} + (g_{,\rho}\, g^{-1})_{,\sigma} = 0 \tag{2.22}$$

Esta ecuación matricial está asociada al modelo denominado *campo quiral principal*. A partir de una solución arbitraria $\psi(\sigma, \rho, \lambda)$ del sistema de ecuaciones (2.13) se obtiene de manera inmediata una solución para la ecuación de campo (2.22) es decir, para la matriz g.

De las relaciones (2.13), 2.18 y 2.21 se infiere que

$$\psi_{,\sigma}\, \psi^{-1} = \frac{K}{\lambda - \lambda_0} = \frac{-\lambda_0\, g_{,\sigma}\, g^{-1}}{\lambda - \lambda_0} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} g_{,\sigma}\, g^{-1}, \tag{2.23}$$

$$\psi_{,\rho}\,\psi^{-1} = \frac{L}{\lambda+\lambda_0} = \frac{\lambda_0\, g_{,\rho}\, g^{-1}}{\lambda+\lambda_0} \xrightarrow[\lambda\to 0]{} g_{,\rho}\, g^{-1}, \tag{2.24}$$

lo cual implica que la matriz a encontrar es la función $\psi(\sigma,\rho,\lambda)$ evaluada en $\lambda = 0$, esto es,

$$g(\sigma,\rho) = \psi(\sigma,\rho,0). \tag{2.25}$$

Para obtener soluciones solitónicas para la ecuación (2.22), lo único que necesitamos es conocer una solución solitónica particular (g_0, ψ_0) de las ecuaciones (2.22) y (2.13), que en adelante demominaremos *solución inicial*, y construiremos una nueva solución solitónica a partir de ésta con ayuda del método de dispersión inversa. Nuevamente, como lo hemos estado haciendo, ilustraremos el método con un ejemplo en el marco de la Teoría General de la Relatividad.

Consideremos un espaciotiempo estacionario con simetría axial, es decir, un espaciotiempo en que el tesor métrico sólo depende de dos coordenadas espaciales y no así del tiempo ni del ángulo azimutal. Tal métrica tetradimensional puede adoptar la forma siguiente

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = f(d\rho^2 + dz^2) + g_{ab}dx^a dx^b, \tag{2.26}$$

donde $\mu,\nu = 0,1,2,3$; $(x^0,x^1,x^2,x^3) = (t,\phi,\rho,z)$, los indices a,b,c,...=0,1 (que corresponden a las coordenadas t y ϕ, respectivamente) y las funciones f y g_{ab} sólo dependen de ρ y z.

Al hacer uso de cierta libertad en la elección de las coordenadas ρ y z se puede, sin perder generalidad, imponer la siguiente condición sobre la matriz g_{ab}:

$$det\, g = -\rho^2. \tag{2.27}$$

Resulta que todo el sistema de ecuaciones de Einstein en el vacío que corresponden a la métrica (2.26) con la condición anterior se divide en dos grupos. El primero determina la matriz g y tiene la siguiente forma

$$(\rho\, g_{,\rho}\, g^{-1})_{,\rho} + (\rho\, g_{,z}\, g^{-1})_{,z} = 0. \tag{2.28}$$

El segundo grupo de ecuaciones determina el coeficiente métrico f una vez que se tiene una solución a (2.28) y se puede representar del modo siguiente

$$(ln f)_{,\rho} = -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{4\rho}\mathrm{Tr}(U^2 - V^2), \qquad (ln f)_{,z} = \frac{1}{2\rho}\mathrm{Tr}(UV), \tag{2.29}$$

donde ahora las matrices U y V están definidas como se indica a continuación

$$U = \rho\, g_{,\rho}\, g^{-1}, \qquad V = \rho\, g_{,z}\, g^{-1}. \quad [3] \tag{2.30}$$

[3] De aquí vemos que (2.28) también se puede escribir como $U_{,\rho} + V_{,z} = 0$.

La integración de la ecuación (2.28) está asociada a las siguientes ecuaciones espectrales

$$D_1\psi = \left(\frac{\rho V - \lambda U}{\lambda^2 + \rho^2}\right)\psi, \qquad D_2\psi = \left(\frac{\rho U + \lambda V}{\lambda^2 + \rho^2}\right)\psi, \tag{2.31}$$

donde los dos operadores diferenciales D_1 y D_2 están definidos por

$$D_1 = \partial_z - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + \rho^2}\partial_\lambda, \qquad D_2 = \partial_\rho + \frac{2\lambda\rho}{\lambda^2 + \rho^2}\partial_\lambda.$$

se puede comprobar que las condiciones de compatibilidad de las relaciones (2.31), para la función matricial generatriz $\psi(\lambda, \rho, z)$, son identicas a las relaciones (2.28) y (2.29) si estas son expresadas (así como sus condiciones de compatibilidad) en términos de las matrices U y V. De este modo, la matriz g es nada más y nada menos que la matriz generatriz $\psi(\lambda, \rho, z)$ evaluada en el punto donde el parámetro espectral se anula, es decir en $\lambda = 0$, por lo que tenemos

$$g(\rho, z) = \psi(0, \rho, z). \tag{2.32}$$

La función ψ puede ser obtenida en la forma

$$\psi = \chi\psi_0 \tag{2.33}$$

donde ψ_0 representa cierta solución conocida del sistema (2.31). De esta manera, el sistema de ecuaciones diferenciales para la matriz χ es el siguiente

$$D_1\chi = \left(\frac{\rho V - \lambda U}{\lambda^2+\rho^2}\right)\chi - \chi\left(\frac{\rho V_0 - \lambda U_0}{\lambda^2+\rho^2}\right),$$

$$D_2\chi = \left(\frac{\rho U + \lambda V}{\lambda^2+\rho^2}\right)\chi - \chi\left(\frac{\rho U_0 + \lambda V_0}{\lambda^2+\rho^2}\right). \tag{2.34}$$

Las soluciones solitónicas para la matriz g corresponden a las divergencias en los polos de la matriz χ en el plano complejo que define el parámetro espectral λ. Si la matriz χ tiene N polos y estos son simples entonces dicha matriz puede expresarse como

$$\chi = I + \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{\lambda - \mu_k}, \tag{2.35}$$

donde R_k y μ_k son matrices (de tamaño $2x2$) y funciones, respectivamente, que dependen de ρ y z. Las trayectorias de cada polo están dadas por

$$\mu_k(\rho, z) = w_k - z \pm [(w_k - z)^2 + \rho^2]^{1/2}, \qquad w_k = \text{const.} \tag{2.36}$$

Las matrices R_k son degeneradas y están dadas por la siguiente expresión

$$(R_k)_{ab} = n_a^k m_b^k, \tag{2.37}$$

los vectores m_b^k tienen dos componentes y pueden ser escritos en términos de la solución particular para la matriz generatriz $\psi_0(\lambda, \rho, z)$ evaluada en

$\lambda = \mu_k$. Tales vectores adoptan la siguiente forma

$$m_a^k = [\psi_0^{-1}(\mu_k, \rho, z)]_{ca} m_{c0}^k, \tag{2.38}$$

donde m_{c0}^k son constantes arbitrarias.

Las soluciones solitónicas que son obtenidas de esta manera no satisfacen la condición (2.27), por lo que no sustentan soluciones físicas. Sin embargo,es importante hacer notar que si g es una solución de la ecuación (2.28), entonces la *matriz física* g^f definida por

$$g^f = -\rho(-det g)^{-1/2} g \tag{2.39}$$

También constituye una solución. De este modo, omitiendo algunos cálculos intermedios, obtenemos la siguiente expresión explícita de la solución n-solitónica para el tensor métrico

$$g_{ab}^f(\rho, z) = -\rho^{-n}(\prod_{p=1}^{n} \mu_p)[(g_0)_{ab} - \sum_{k,l=1}^{n} \Gamma_{kl}^{-1} \mu_k^{-1} \mu_l^{-1} N_a^{(k)} N_b^{(l)}], \tag{2.40}$$

donde

$$N^{(P)} = g_0[\psi_0^{-1}(\mu_p, \rho, z)]^T m_0^{(p)}, \quad \Gamma_{kl} = (\rho^2 + \mu_k \mu_l)^{-1} N^{(k)^T} g_0^{-1} N^{(l)}$$

y las componentes de la columna $m_0^{(p)}$ son constantes arbitrarias:

$$m_0^{(p)} = \begin{pmatrix} C_0^{(p)} \\ \\ C_1^{(p)} \end{pmatrix}.$$

Es importante hacer notar que en calidad de solución inicial se puede emplear una solución trivial aunque ésta no constituya un solitón. Un caso en que se procedió de esta manera, obteniendo un modelo relevante, fue el procedimiento para construir la métrica de Kerr, donde por medio del método de dispersión inversa y tomando como solución inicial el espacio de Minkowski, se generó el modelo de agujero negro rotatorio de Kerr como solución bisolitónica, es decir para el caso $n = 2$ [15].

2.4. Teoría Einstein-Maxwell-Dilatón-Axión.

La Teoría Einstein-Maxwell-Dilatón-Axión (EMDA) surge de la Teoría de Cuerdas Heteróticas a en el límite de bajas energías y toma importancía ya que actualmente se ha enfocado atención hacia modelos gravitatorios que son consecuencia de Teoría de Cuerdas a bajas energías. Algunos de estos modelos pueden ser representados como *matriz quiral* en el caso estacionario, lo cual nos permite aplicar diferentes métodos matemáticos para la construcción de soluciones exactas. Tecnicamente, la Teoría EMDA aparece luego de la omisión de una parte de los campos que se manifiestan durante la compactificación de 6 de 10 dimensiones [16], y la representación quiral en el caso estacionario, en donde estaremos interesados, pertenece a $S_p(4,R)/U(2)$.

El nombre de la Teoría EMDA es explícita en cuanto a los campos que estudia, considerando dilatón, axión y campos de Maxwell acoplados a la gravedad. La acción asociada a la teoría es expresada como sigue

$$S = \int d^4x |g|^{\frac{1}{2}} \left[-R + 2(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2} e^{4\phi} (\partial\kappa)^2 - e^{-2\phi} F^2 - \kappa F \tilde{F} \right], \qquad (2.41)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} E^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}. \qquad (2.42)$$

La teoría describe gravedad a través del escalar de curvatura $R(g_{\mu\nu})$, acoplada al campo escalar dilatónico ϕ, al pseudoescalar axiónico κ y al campo vectorial electromagnético A_μ. Además, el tensor antisimétrico $E^{\mu\nu\lambda\sigma}$ está definido de la siguiente manera: $E^{\mu\nu\lambda\sigma} = |g|^{\frac{-1}{2}} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$, donde las únicas componentes dsitintas de cero están dadas por la relación

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = \begin{cases} 1, & \text{permutaciones pares de } 0123, \\ -1, & \text{permutaciones impares de } 0123. \end{cases}$$

Una amplia clase de soluciones asociadas al caso estacionario axial simétrico han sido encontradas [16], nosotros consideraremos este mismo caso usando como herramienta el método de dispersión inversa para obtener un modelo de tipo agujero en el escenario de la teoría en cuestión.

Capítulo 3

Solución solitónica tipo agujero negro en la Teoría EMDA

3.1. Estructura y simetrías de un modelo estacionário en la Teoría EMDA.

Consideremos el caso estacionario en el cual la métrica y los campos son independientes del tiempo. El elemento de linea tetradimensional puede ser parametrizado de acuerdo a

$$ds^2 = f(dt - \omega_i dx^i)^2 - f^{-1} h_{ij} dx^1 dx^j, \tag{3.1}$$

donde $i = 1, 2, 3$. Como se puede ver en [17], en este caso parte de las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden ser usadas para la transición de las componentes espaciales del vector potencial electromagnético A_i y las funciones métricas ω_i a los potenciales magnético u y rotacional $\tilde{\chi}$, respectivamente. De esta manera, dichas cantidades están conectadas por las relaciones dife renciales

$$\nabla u = f e^{-2\phi}(\sqrt{2}\nabla \times A + \nabla u \times \vec{\omega}) + \kappa \nabla u, \tag{3.2}$$

$$\nabla \tilde{\chi} = u \nabla v - v \nabla u - f^2 \nabla \times \vec{\omega} \tag{3.3}$$

donde v es proporcional al potencial eléctrico $v = \sqrt{2} A_0$, y el operador tridimensional ∇ es el asociado a la métrica h_{ij}. Entonces el modelo tridimensional resultante puede ser descrito por la acción [18]

$$S = \int d^3 x h^{1/2} \left[-R + \frac{1}{4} \mathrm{Tr}(\mathbf{J}^M)^2 \right], \tag{3.4}$$

con $\mathbf{J}^M = \nabla M M^{-1}$, y R es el escalar de curvatura construido a partir de la métrica h_{ij}. La matriz simétrica M tiene la forma

$$M = \begin{pmatrix} P^{-1} & P^{-1}Q \\ QP^{-1} & P + QP^{-1}Q \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

cuyas entradas son matrices de 2×2 que contienen a los campos como se muestra a contiuación

$$P = \begin{pmatrix} f - v^2 e^{-2\phi} & -ve^{-2\phi} \\ -ve^{-2\phi} & -e^{-2\phi} \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\tilde{\chi} + vu & w \\ w & -\kappa \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

y $\quad w = u - \kappa v$.

La matriz M pertenece al grupo cociente $S_p(4, R)/U(2)$, y así, satisface las propiedades simpléctica y simétrica

$$M^T L M = L, \quad \text{y} \quad M^T = M, \tag{3.8}$$

donde

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Ahora, consideremos una configuración con simetría axial. En este caso la métrica y los campos dependen de dos coordenadas espaciales, y el elemento de linea tridimensional pede ser expresado en la forma de Lewis-Papapetrou

$$ds^2 = h_i j dx^i dx^j = e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2. \tag{3.10}$$

La acción del sistema se reduce a

$$S = \frac{1}{4}\int d\rho dz\, \rho \mathrm{Tr}(\mathbf{J}^M)^2, \tag{3.11}$$

entonces la ecuación quiral de Euler-Lagrange queda como sigue

$$\nabla(\rho\, \mathbf{J}^M) = 0. \tag{3.12}$$

Por otro lado, las ecuaciones de Einstein definen la función métrica γ:

$$\begin{aligned} \gamma,_z &= \frac{\rho}{4}\mathrm{Tr}[\mathbf{J}^M_\rho\, \mathbf{J}^M_z], \\ \gamma,_\rho &= \frac{\rho}{8}\mathrm{Tr}[(\mathbf{J}^M_\rho)^2 - (\mathbf{J}^M_z)^2]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

En estas relaciones todas las variables dependen de dos coordenadas ρ y z, y el operador ∇ está asociado con la métrica plana bidimensional δ_{ab}.

En consecuencia, tenemos que en el caso estacionario axialsimétrico el sistema está completamente descrito por las ecuaciones (3.12) y (3.13). En la siguiente sección consideraremos el sistema con la condición de grupo no trivial (3.8) y plantearemos el problema de dispersión inversa para construir una configuración solitónica.

3.2. Problema del método de dispersión inversa

Consideremos el modelo Einstein-Maxwell con campos dilatónico y axionico, con el grupo de isometría $Sp(4,R)$, localmente isomorfo a $SO(2,3)$. Esto hace suponer que el esquema presentado aquí puede ser aplicable a un grupo ortogonal arbitrario de teoría de cuerdas.

Describamos los principales aspectos del esquema usado. Las ecuaciones de movimiento para nuestro caso estacionario y axialsimétrico (3.12) nos dicen que

$$\nabla(\rho\,\mathbf{J}^M) = 0, \qquad \text{donde} \quad \mathbf{J}^M = \nabla M\, M^{-1}, \tag{3.14}$$

$\nabla_i = \partial_i$, $i = \rho$, z. La integración de la ecuación matricial (3.14) está asociada al par de ecuaciones de Belinskiiy Zakharov [19]:

$$D_1\,\psi \;=\; \frac{\rho\tilde{\mathbf{J}}^M_z - \lambda\tilde{\mathbf{J}}^M_\rho}{\lambda^2+\rho^2}\,\psi, \quad D_2\,\psi \;=\; \frac{\rho\tilde{\mathbf{J}}^M_\rho + \lambda\tilde{\mathbf{J}}^M_z}{\lambda^2+\rho^2}\,\psi, \tag{3.15}$$

donde $\tilde{\mathbf{J}}^M = \rho\mathbf{J}^M$ y los operadores diferenciales D_1 y D_2 son

$$D_1 = \partial_z - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2+\rho^2}\partial_\lambda, \quad D_2 = \partial_\rho + \frac{2\lambda\rho}{\lambda^2+\rho^2}\partial_\lambda\,; \tag{3.16}$$

λ es el parámetro espectral complejo y la función $\psi = \psi(\lambda, \rho, z)$. Por lo que las relaciones anteriores son las ecuciones espectrales asociadas a la ecuación (3.14). Entonces la solución a dicha ecuación nos la proporciona ψ evaluada en $= 0$, esto es

$$M(\rho, z) = \psi(0, \rho, z). \tag{3.17}$$

La tarea ahora será encontrar ψ, que puede ser obtenida en la forma

$$\psi = \chi\,\psi_0, \tag{3.18}$$

donde ψ_0 es alguna solución conocida del sistema (3.15), es decir, ψ_0 es nuestra solución inicial. las ecuaciones para χ son

$$D_1\,\chi \;=\; \frac{\rho\tilde{\mathbf{J}}^M_z - \lambda\tilde{\mathbf{J}}^M_\rho}{\lambda^2+\rho^2}\,\chi - \chi\,\frac{\rho(\tilde{\mathbf{J}}^M_z)_0 - \lambda(\tilde{\mathbf{J}}^M_\rho)_0}{\lambda^2+\rho^2} \tag{3.19}$$

$$D_2\,\chi \;=\; \frac{\rho\tilde{\mathbf{J}}^M_\rho + \lambda\tilde{\mathbf{J}}^M_z}{\lambda^2+\rho^2}\,\chi - \chi\,\frac{\rho(\tilde{\mathbf{J}}^M_\rho)_0 + \lambda(\tilde{\mathbf{J}}^M_z)_0}{\lambda^2+\rho^2}. \tag{3.20}$$

Es necesario que la matriz solución sea real, simétrica y que satisfaga la condición (3.8) para pertenecer al grupo. Nos aseguraremos de satisfacer la primer condición al considerar solamente el caso de una matriz real χ, en cuanto el restante par de condiciones puede lograrse despues de que la solución sea obtenida.

Las soluciones solitónicas para la matriz M corresponden a la divergencia polar en el plano complejo definido por el pará metro espectral en las matrices χ y χ^{-1}. Para polos simples, estas matrices pueden ser representadas como

$$\chi = I + \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{\lambda - \mu_k}, \qquad \chi^{-1} = I + \sum_{k=1}^{N} \frac{S_k}{\lambda - \nu_k} \tag{3.21}$$

donde las trayectorias para cada polo están determinadas por

$$\mu_k(\rho, z) = w_{(\mu)} - z \pm [(w_{\mu)} - z)^2 + \rho^2]^{1/2}, \qquad w_\mu = \text{const.} \tag{3.22}$$

para $\mu_k(\rho, z)$ y la misma ecuación para $\nu_k(\rho, z)$ con $w_{(\nu)}$ constante.

De la relación $\chi\chi^{-1} = I$ (en los polos μ_k y ν_k se sigue que

$$R_k \chi^{-1}(\mu_k) = S_k \chi(\nu_k) = 0. \tag{3.23}$$

Esto demuestra que las matrices R_k y S_k son degeneradas y pueden ser presentadas en la forma

$$(R_k)_{ab} = n_a^k m_b^k, \qquad (S_k)_{ab} = p_a^k q_b^k. \tag{3.24}$$

Al sustituir las ecuaciones (3.21) y (3.24) en la ecuación (3.23) obtenemos las siguientes relaciones

$$n_a^k = \sum_{l=1}^{N} p_a^l \Gamma_{kl}^{-1}, \qquad q_a^k = -\sum_{l=1}^{N} m_a^l \Gamma_{kl}^{-1},$$
$$\text{donde} \qquad \Gamma_{kl} = \frac{\sum_c p_c^k m_c^l}{\mu_l - \nu_k}, \tag{3.25}$$

y se puede ver que

$$m_a^k = [\psi_0^{-1}(\mu_k, \rho, z)]_{ca} m_{c0}^k \quad p_a^k = [\psi_0(\nu_k, \rho, z)]_{ac} p_{c0}^k. \tag{3.26}$$

con m_{co}^k y p_{c0}^k como constantes arbitrarias.

ya que la matriz $M(\rho, z)$ pertenece al grupo $Sp(4, R)$, esta debe ser unimodular. Como ya se ha demostrado en [20], para una configuración bisolitònica, es importante que $\mu_1\mu_2 = \nu_1\nu_2$.

Así que consideramos el caso bisolitónico y despues podremos generalizarlo al caso 2N-solitónico.

La solución resultante de la matriz M es unimodular, sin embargo, no satisface los requerimientos en (3.8). La representación en el grupo cociente $Sp(4,R)/U(2)$ se obtendrá al escoger de manera adecuada las constantes arbitrarias en (3.26), de esta manera, se satisfarán las condiciones de grupo despues de construir una solución formal. Esto será parte de lo que expondremos en la siguiente sección.

Por otro lado, hemos visto que el método de dispersión inversa usado en este caso de la Teoría EMDA es similar al que expusimos en el capítulo 3, en ambos tenemos el mismo par de operadores involucrados en las ecuaciones espectráles en donde la función que tenían U y V en el caso gravitatorio ahora la tienen $\tilde{\mathbf{J}}_\rho^M$ y $\tilde{\mathbf{J}}_z^M$, respectivamente. En las conclusiones entraremos más a detalle en cuanto a la comparación de la formulación del método en ambas teorías.

3.3. Solución de tipo agujero negro

Ahora apliquemos el método para la construcción de un modelo estacionario axialsimétrico en el sistema de Einstein-Maxwell con los campos dilatón y axión.

Resulta natural determinar los valores asintóticos de los campos como

$$f_\infty = 1, \qquad \tilde{\chi}_\infty = u_\infty = v_\infty = \phi_\infty = \kappa_\infty, \tag{3.27}$$

y proponemos el valor inicial $M_0 = M_\infty$ para la matriz dada por:

$$M_0 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

Si construimos la solución en coordenadas de Boyer-Lindquist

$$\rho = [(r-m)^2 - \sigma^2]^{1/2} \sin(\theta), \qquad z - z_1 = (r-m)\cos(\theta); \tag{3.29}$$

con las constantes $\sigma = 1/2(w_{(\mu)} - w_{(\nu)})$ y $z_1 = 1/2(w_{(\mu)} + w_{(\nu)})$ [ver ec. (3.22)].

Siguiendo la técnica de dispersión inversa tenemos las expresiones para las trayectorias polares:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 2\sin^2\tfrac{\theta}{2}[r-m+\sigma], \quad & \mu_2 &= -2\cos^2\tfrac{\theta}{2}[r-m-\sigma], \\ \nu_1 &= -2\cos^2\tfrac{\theta}{2}[r-m+\sigma], \quad & \nu_2 &= 2\sin^2\tfrac{\theta}{2}[r-m-\sigma], \end{aligned} \tag{3.30}$$

las cuales satisfacen que $\mu_1\mu_2 = \nu_1\nu_2$.

La matriz resultante M es unimodular, pero ahora necesitamos imponer reestricciones para cumplir con la simetría y el requerimiento del grupo. Para hacer esto debemos notar que como $\psi_0^{-1}(\mu_k, \rho, z) = \psi_0(\nu_k, \rho, z) = M_0$, y de (3.26) son constantes.

Consideremos cuatro vectores columna p_a^k y m_a^k, $k = 1,2$, $a = 0,1,2,3$, sea

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{pongamos} \quad p^1 = \Lambda p^2, \quad m^1 = -\Lambda m^2. \tag{3.31}$$

Estas relaciones nos van a reducir de 16 parámetros que teníamos libres a 8 parámetros independientes. Luego los ordenamos en dos matrices: $p = (p_{\tilde{a}}^k)$ y $\bar{m} = (m_{\tilde{a}}^k)$, con $k = 1,2$, $\tilde{a} = 1,2$. Entonces de las condiciones (3.8) resulta que se debe cumplir

$$\operatorname{Tr} p^T \sigma_1 \bar{m} = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{Tr} \sigma_2 p^T \sigma_1 \bar{m} = 0 \tag{3.32}$$

$$\text{donde} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De esta manera se puede ver que la solución matricial, despues de imponer las condiciones (3.31) y (3.32), pertenece al grupo cociente.

Se pueden determinar las cargas físicas que tiene el sistema, al incluir la masa m, el parámetro NUT b (Newmann-Unti-Tamburino)[1], las cargas

[1]El parámetro NUT es una carga que puede tener un origen "gravitomagnético", sin embargo, no se conoce a ciencia cierta su naturaleza. Al igual que las cargas magnéticas no se ha observado experimentalmente, pero se piensa que en el universo temprano pudo haber existido, pues la teoría lo predice.

elctrica Q_e, magnética Q_m, dilatónica D y axiónica κ. Consideremos la descomposición asintótica de los campos involucrados y el campo métrico f cuando $r \to \infty$:

$$\begin{aligned} v \to \frac{\sqrt{2}Q_e}{r}, \qquad u \to \frac{\sqrt{2}Q_m}{r}, \\ \tilde{\chi} \to \frac{2b}{r}, \qquad \phi \to \frac{D}{r}, \\ \kappa \to \frac{2K}{r}, \qquad f \to 1 - \frac{2m}{r}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Las cargas estan representadas en términos de las componentes constantes $p^k_{\tilde{a}}$ y $m^k_{\tilde{a}}$ como sigue:

$$\begin{aligned} Q_e = \sqrt{2}\sigma(\tilde{p}^2_2 m^2_1 + \tilde{p}^1_2 m^1_1), \qquad \mathcal{Q}_m = \sqrt{2}\sigma(\tilde{p}^2_1 m^1_2 - \tilde{p}^1_1 m^2_2), \\ b = -\sigma(\tilde{p}^2_2 m^2_2 + \tilde{p}^1_2 m^1_2), \qquad D = \sigma(\tilde{p}^1_1 m^2_1 - \tilde{p}^2_1 m^1_1), \\ K = -\sigma(\tilde{p}^1_1 m^1_1 + \tilde{p}^2_1 m^2_1), \qquad m = \sigma(\tilde{p}^2_2 m^1_2 - \tilde{p}^1_2 m^2_2), \end{aligned} \tag{3.34}$$

donde $p^k_{\tilde{a}} = p^k_a / \mathrm{Tr}\bar{m}\sigma_1 p^T$. Adicionalmente determinamos el parámetro de Kerr a como

$$a = \frac{-\sigma \mathrm{Tr}\,\bar{m}\sigma_3 p^T}{\mathrm{Tr}\bar{m}\sigma_1 p^T} = -\sigma \mathrm{Tr}\,\bar{m}\sigma_3 \tilde{p}^T, \tag{3.35}$$

y se puede mostrar que

$$m^2 + b^2 + D^2 + K^2 - Q_e^2 - Q_m^2 - a^2 = \sigma^2. \tag{3.36}$$

Ahora tenemos toda la información para encontrar la matriz M y los campos. Los pasos esenciales a seguir son: primero, vamos a calcular la matriz χ a partir de (3.21) e identificamos las constantes que representan los campos a, b, Q_e, Q_m, D, K, m en términos de las constantes $p^k_{\tilde{a}}$ y $m^k_{\tilde{a}}$; como segundo paso, evaluamos la χ en $\lambda = 0$ (en realidad, esto también se puede hacer antes del primer paso y calcular χ sin dependencia de λ). A continuación, multiplicamos χ evaluada en $\lambda = 0$ por $M_0 = \psi_0$ (nuestra solución inicial) y la matriz resultante es la matriz M que resuelve (3.12). Finalmente, una vez que tenemos M, calculamos las matrices P y Q a partir de (3.5), (3.6) y (3.7), donde tales matrices, como se puede ver, contienen los campos en forma explícita. Hasta este punto sólo podemos conocer f, v, u, χ y ϕ; para determinar los campos restantes A_i, $i = 1, 2, 3$ y ω necesitamos recurrir a (3.2) y (3.3).

Al realizar nuestros cálculos se obtienen los siguientes resultados para la matriz M, la cual tiene 10 componentes independientes ($M_{rs} = M_{sr}$). Pongamos $\Delta = (r - m)^2 - \sigma^2$.

$$M_{11} = \frac{r^2 + (b - a\cos\theta)^2 - D^2 - K^2}{\Delta - a^2\sin^2\theta},$$

$$M_{12} = \frac{-\sqrt{2}[Q_m(a\cos\theta - b + K) + Q_e(r + D)]}{\Delta - a^2\sin^2\theta},$$

$$M_{13}=\frac{-2[am\cos\theta+b(r-m)]}{\Delta-a^2\sin^2\theta},$$
$$M_{14}=\frac{\sqrt{2}[Q_e(b-a\cos\theta+K)+Q_m(r-D)]}{\Delta-a^2\sin^2\theta},$$
$$M_{22}=\frac{2m(r+D)-(r+D)^2-(K+a\cos\theta)^2+b^2}{\Delta-a^2\sin^2\theta},$$
$$M_{23}=\frac{\sqrt{2}[Q_e(a\cos\theta+b+K)-Q_m(r+D-2m)]}{\Delta-a^2\sin^2\theta},$$
$$M_{24}=\frac{2[k(r-m)-aD\cos\theta]}{\Delta-a^2\sin^2\theta},$$
$$M_{33}=\frac{(r-2m)^2+(a\cos\theta+b)^2-D^2-K^2}{\Delta-a^2\sin^2\theta},$$
$$M_{34}=\frac{-\sqrt{2}[Q_e(r-2m-D)+Q_m(a\cos\theta+b-k)]}{\Delta-a^2\sin^2\theta},$$
$$M_{44}=\frac{2m(r-D)+b^2-(r-D)^2-(a\cos\theta-K)^2}{\Delta-a^2\sin^2\theta}.$$

Luego, sea $\delta^2=r^2+(b-a\cos\theta)^2-D^2-K^2$, encontramos que

$$f=\frac{\Delta-a^2\sin^2\theta}{\delta^2}, \tag{3.37}$$

los potenciales eléctrico y magnético resultan ser

$$v=\frac{\sqrt{2}\,[Q_m(a\cos\theta-b+k)+Q_e(r+D)]}{\delta^2}, \tag{3.38}$$

y

$$u=\frac{\sqrt{2}\,[Q_e(b-a\cos\theta+K)+Q_m(r-D)]}{\delta^2}. \tag{3.39}$$

El campo del dilatón está expresado por la función

$$e^{2\phi} = \frac{(r+D)^2 + (b - a\cos\theta - K)^2}{\delta^2}, \tag{3.40}$$

mientras que para el campo pseudoescalar del axión encontramos

$$\kappa = \frac{2\left[Kr + D(b - a\cos\theta)\right]}{(r+D)^2 + (b - a\cos\theta)^2}, \tag{3.41}$$

y finalmente tenemos el potencial rotacional

$$\tilde{\chi} = \frac{2\left[am\cos\theta + b(r-m)\right]}{\delta^2}. \tag{3.42}$$

Se puede ver que efectivamente los campos satisfacen las relaciones de descomposición asintótica (3.33).

Con el uso de la ecuación (3.3), encontramos $\vec{\omega}$ que en este caso consta de una única componente ($\omega_1 = \omega_2 = 0$ y $\omega_3 = \omega_\varphi \neq 0$). Así que la función métrica ω_φ está determinada como

$$\omega_\varphi = \frac{2}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\left[b\cos\theta\Delta - a\sin^2\theta[mr + b^2 - \frac{1}{2}(Q_e^2 + Q_m^2)]\right]. \tag{3.43}$$

Por otro lado, la parte tridimensional de la métrica tiene la forma

$$ds^2 = \frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\Delta}\, dr^2 + (\Delta - a^2\sin^2\theta)\, d\theta^2 + \Delta\sin^2\theta\, d\varphi^2 \tag{3.44}$$

que coincide con la parte espacial de la métrica de Kerr como veremos más tarde.

De esta manera hemos descrito una configuración masiva con simetría axial que posee todas las cargas que estń involucradas en la teoría EMDA, incluyendo el parámetro NUT. Esta última característica no permite interpretar el sistema obtenido como agujero negro de manera estricta, ya que no resulta una solución asintóticamente plana si tenemos el parámetro NUT, más adelante veremos como ocurre tal situación.

Capítulo 4

Modelos Cosmológicos Homogéneos y No Homogéneos

4.1. Ecuaciones de Einstein de los modelos de Gowdy

Para mostrar cuan complicado es, a primera instancia, encontrar soluciones a las ecuaciones de Einstein que corresponden a los denominados modelos cosmológicos de Gowdy (polarizados y no polarizados[1]) compactificados so-

[1] El nombre "polarizado" o "no polarizado" viene del hecho de que para valores pequeños de P las métricas de Gowdy están asociadas a ondas gravitacionales linealmente polariza-

bre una variedad con topología S^1XS^2, haremos referencia tanto a las métricas de Gowdy compactificadas en la variedad con topología T^3 como a los modelos polarizados con topología S^1XS^2.

De este modo, el modelo cosmológico polarizado de Gowdy compactificado sobre una variedad con topología T^3 tiene la forma (los modelos de esta sección están en la notación de Berger y Garfinkle [7])

$$ds^2 = e^{(\tau-\lambda)/2}(-e^{-2\tau}d\tau^2 + d\theta^2) + e^{-\tau}e^P(d\sigma^2 + e^{-2P}d\delta^2), \tag{4.1}$$

donde λ y P son funciones de θ y τ. Dicho modelo está restringido por las condiciones $0 \leq \theta, \sigma, \delta \leq 2\pi$ con la métrica periódica en θ.

Las ecuaciones de Einstein para este modelo constan de una ecuación diferencial lineal para P y dos ecuaciones de primer orden para λ que pueden ser integradas una vez que conocemos una solución de P; tales ecuaciones tienen la siguiente forma

$$\begin{gathered} P_{,\tau\tau} - e^{-2\tau}P_{,\theta\theta} = 0, \\ \lambda_{,\tau} = P_{,\tau}^2 + e^{-2\tau}P_{,\theta}^2, \\ \lambda_{,\theta} = 2P_{,\theta}P_{,\tau} \end{gathered} \tag{4.2}$$

das, mientras que las métricas de los modelos no polarizados están asociadas, obviamente, a ondas no polarizadas cuando P es pequeño.

y se resuelven fácilmente en términos de funciones trigonométricas y funciones ordinarias de Bessel; varias soluciones particulares son ya conocidas.

A su vez, el modelo en T^3 no polarizado está dado por la siguiente expresión

$$ds^2 = e^{(\tau-\lambda)/2}(-e^{-2\tau}d\tau^2 + d\theta^2) + e^{-\tau}e^P[(d\sigma + Qd\delta)^2 + e^{-2P}d\delta^2]; \tag{4.3}$$

aquí, además de λ y P, Q también es función de θ y τ. Las ecuaciones de Einstein para esta métrica constituyen un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo grado acopladas para P y Q, y de nuevo dos ecuaciones de primer orden en λ que pueden ser integradas una vez que P y Q se conocen. A saber, dichas ecuaciones están dadas por las relaciones siguientes

$$\begin{aligned}
P_{,\tau\tau} - e^{-2\tau}P_{,\theta\theta} - e^{2P}(Q_{,\tau}^2 - e^{-2\tau}Q_{,\theta}^2) &= 0,\\
Q_{,\tau\tau} - e^{-2\tau}Q_{,\theta\theta} + 2(P_{,\tau}Q_{,\tau} - e^{-2\tau}P_{,\theta}Q_{,\theta}) &= 0,\\
\lambda_{,\tau} = P_{,\tau}^2 + e^{-2\tau}P_{,\theta}^2 + e^{2P}(Q_{,\tau}^2 + e^{-2\tau}Q_{,\theta}^2)&,\\
\lambda_{,\theta} = 2(P_{,\theta}P_{,\tau} + e^{2P}Q_{,\theta}Q_{,\tau})&.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Nótese que haciendo $Q \equiv 0$ obtenemos las ecuaciones (4.2) para el modelo polarizado, como es de esperarse. En general, se estima que es poco factible resolver analíticamente el sistema de ecuaciones anterior por lo que mayormente se han hecho estudios numéricos al respecto [7]–[8].

Ahora nos concentraremos en los modelos cosmológicos con topología S^1XS^2, cuya forma polarizada es

$$ds^2 = e^{(\tau-\lambda)/2}\left(-e^{-2\tau}d\tau^2 + d\theta^2\right) + L\sin(e^{-\tau})e^P\left(d\delta^2 + e^{-2P}\sin^2\theta d\varphi^2\right), \tag{4.5}$$

donde L es una constante multiplicativa que necesitamos para simplificar la transformación de coordenadas que usaremos para definir las soluciones exactas que obtendremos más adelante.

Las ecuaciones de campo que corresponden a esta métrica consisten de una ecuación diferencial lineal no homogénea para P y dos ecuaciones de primer orden para λ que pueden ser directamente integrables una vez que se conoce P. La ecuación lineal en P puede ser resuelta por separación de variables usando polinomios de Legengre en θ y cierta función de τ. A saber, las ecuaciones son

$$P_{,\tau\tau} - \frac{e^{-2\tau}}{\sin\theta}(\sin\theta P_{,\theta})_{,\theta} - e^{-2\tau} - (e^{-\tau}\cot e^{-\tau} - 1)P_{,\tau} = 0,$$

$$\cot e^{-\tau}\lambda_{,\theta} - 2e^{\tau}P_{,\tau}P_{,\theta} + \cot\theta(-e^{\tau}\lambda_{,\tau} + 2e^{\tau}P_{,\tau} + e^{\tau} + 2\cot e^{-\tau}) = 0, \tag{4.6}$$

$$\cot e^{-\tau}(\lambda_{,\tau}-1)-e^{\tau}(P^2_{,\tau}+e^{-2\tau}P^2_{,\theta})+e^{-\tau}(\cot^2 e^{-\tau}+4)+$$

$$e^{-\tau}(2\cot\theta P_{,\theta}-\cot\theta\lambda_{,\theta})=0.$$

Por otra parte, la métrica no polarizada de Gowdy compactificada en la variedad con topología S^1XS^2 está representada por la siguiente relación

$$ds^2=e^{(\tau-\lambda)/2}(-e^{-2\tau}d\tau^2+d\theta^2)+L\sin(e^{-\tau})e^P\times$$

$$[(d\delta+Qd\varphi)^2+e^{-2P}\sin^2\theta d\varphi^2]. \tag{4.7}$$

Este modelo arroja dos ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden acopladas para P Y Q similares, pero aún más complicadas que las correspondientes al modelo no polarizado con topología T^3, es decir, más difíciles de resolver que las ecuaciones (4.4). Las ecuaciones son

$$\begin{aligned} P_{,\tau\tau}-\frac{e^{-2\tau}}{\sin\theta}(\sin\theta P_{,\theta})_{,\theta}-e^{-2\tau}-(e^{-\tau}\cot e^{-\tau}-1)P_{,\tau}+ \\ -\frac{e^{2P}}{\sin^2\theta}(Q^2_{,\tau}-e^{-2\tau}Q^2_{,\theta})=0, \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$Q_{,\tau\tau}-e^{-2\tau}Q_{,\theta\theta}+2(P_{,\tau}Q_{,\tau}-e^{-2\tau}P_{,\theta}Q_{,\theta})+$$

$$-(e^{-\tau}\cot e^{-\tau}-1)Q_{,\tau}-e^{-2\tau}\cot\theta Q_{,\theta}=0,$$

además, se tienen dos ecuaciones acopladas de primer orden para λ que pueden ser reducidas a dos ecuaciones separadas para $\lambda_{,\tau}$ y $\lambda_{,\theta}$; sin embargo, las ecuaciones que se obtienen resultan ser más complicadas que las originales. Tales ecuaciones tienen la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
&\cot e^{-\tau}\lambda_{,\theta} - 2e^{\tau}(P_{,\tau}P_{,\theta} + e^{2P}\frac{Q_{,\tau}Q_{,\theta}}{\sin^2\theta})+ \\
&\cot\theta(-e^{\tau}\lambda_{,\tau} + 2e^{\tau}P_{,\tau} + e^{\tau} + 2\cot e^{-\tau}) = 0, \qquad (4.9) \\
&\cot e^{-\tau}(\lambda_{,\tau} - 1) - e^{\tau}(P_{,\tau}^2 + e^{-2\tau}P_{,\theta}^2) + e^{-\tau}(\cot^2 e^{-\tau} + 4)+ \\
&e^{-\tau}(2\cot\theta P_{,\theta} - \cot\theta\lambda_{,\theta}) - e^{\tau}\frac{e^{2P}}{\sin^2\theta}(Q_{,\tau}^2 + e^{-2\tau}Q_{,\theta}^2) = 0.
\end{aligned}
$$

El hecho de que las ecuaciones de campo para la métrica (4.7) sean más complicadas que aquellas para la métrica (4.3) nos hace esperar que sólo se puedan obtener soluciones numéricas, no obstante, más adelante mostraremos que al menos una familia de soluciones analíticas se puede encontrar fácilmente al hacer una reinterpretación de la métrica de Kerr dentro de sus horizontes. Este resultado fue obtenido por O. Obregón, H. Quevedo y M. P. Ryan en [9].

El método alternativo que dichos autores usaron para encontrar las soluciones al modelo no polarizado de Gowdy con topología S^1XS^2, está basado en la idea original que implementaron Kantowski y Sachs sobre la solución de Schwarzschild.

4.2. Métrica de Schwarzschild y modelos cosmológicos de Kantowski-Sachs

A mediados de los años sesenta, Kantowsky y Sachs estudiaron modelos cosmológicos representados por la métrica

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + e^{2\sqrt{3}\beta(t)} dr^2 + e^{-2\sqrt{3}\beta(t)} e^{-2\sqrt{3}\Omega(t)} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

para el vacío. Ellos encontraron la siguiente familia de soluciones

$$\begin{aligned} N(t)^2 &= (\alpha/t - 1)^{-1}, \\ e^{2\sqrt{3}\beta(t)} &= \alpha/t - 1, \\ e^{-2\sqrt{3}\Omega(t)} &= t^2(\alpha/t - 1). \end{aligned} \tag{4.10}$$

También se percataron de que esta familia corresponde a la métrica de Schwarzschild dentro del horizonte.

A saber, si escribimos la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -(1 - 2m/r)dt^2 + (1 - 2m/r)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

donde $r = 2m$ corresponde al horizonte de eventos, y realizamos la transformación $t \longleftrightarrow r$ en el interior de dicho horizonte, es decir, para $r < 2m$, obtenemos

$$ds^2 = -(\alpha/t - 1)^{-1}dt^2 + (\alpha/t - 1)dr^2 + t^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

entonces, al identificar los términos correspondientes es fácil ver que

$$N(t)^2 = (\alpha/t - 1)^{-1},$$

$$e^{2\sqrt{3}\beta(t)} = \alpha/t - 1,$$

$$e^{-2\sqrt{3}\Omega(t)} = t^2(\alpha/t - 1),$$

$$2m = \alpha;$$

con lo que llegamos a las ecuaciones (4.10). Podemos ver los puntos singulares en el modelo Kantowsky-Sachs, la singularidad en $t = 0$ corresponde a una curvatura infinita (lo que anteriormente correspondía a $r = 0$ en la solución de Schwarzschild) y la singularidad $t = 2m$ es una superficie isotrópica ("lightlike") donde el escalar de curvatura es regular.

4.3. Solución de Kerr y Modelo de Gowdy con topología $S^1 X S^2$

A partir de ahora, nos referiremos al modelo cosmológico o métrica de Gowdy compactificado en la variedad con topología $S^1 X S^2$ simplemente como modelo o métrica de Gowdy.

Al estudiar los modelos cosmológicos de Gowdy vemos que estos tienen dos vectores de Killing espaciales, hecho que equivale a tener simetrías o independencia con respecto a dos coordenadas espaciales. Esto a su vez, motiva a pensar que se pueden encontrar soluciones exactas para la métrica de Gowdy a partir de una solución de tipo agujero negro que tenga simetrías semejantes a las de los modelos cosmológicos de Gowdy. Resulta que los agujeros negros estacionarios con simetría axial poseen características semejantes, pues no dependen del tiempo y del ángulo azimutal φ y, por lo tanto, se puede establecer una relación del tipo

$$Schwarzschild \longleftrightarrow Kantowski - Sachs$$

al hacer el cambio $r \longleftrightarrow t$ en la región comprendida entre los horizontes de dicha solución.

Como ya habíamos visto antes, la métrica de Gowdy no polarizada está dada por la ecuación (4.7)

$$ds^2 = e^{(\tau-\lambda)/2}\left(-e^{-2\tau}d\tau^2 + d\theta^2\right) + L\sin(e^{-\tau})e^P[(d\delta + Qd\varphi)^2 + e^{-2P}\sin^2\theta d\varphi^2];$$

las simetrías antes mencionadas hacen que ésta dependa sólo de una variable espacial y otra temporal. Para encontrar soluciones a este modelo O. Obregón, H. Quevedo y M. P. Ryan propusieron la solución de Kerr [9], que tiene la particularidad de que es una generalización rotatoria de la métrica de Schwarzschild. La métrica de Kerr, al igual que la de Gowdy, tiene dos vectores de Killing y sólo depende de dos variables espaciales (r y θ), pues es estacionaria y posee simetría axial, es decir, que no depende del tiempo y del ángulo azimutal φ.

La métrica de Kerr es una solución exacta de las ecuaciones de Einstein estacionarias con simetría axial. Por tal razón, podemos expresar dicha métrica de acuerdo a la forma general de una métrica estacionaria, lo que nos facilitará los cálculos.

La forma general de una métrica estacionaria es la siguiente

$$ds^2 = -f(dt + \omega_m dx^m)^2 + f^{-1}g_{mn}dx^m dx^n, \tag{4.11}$$

donde f constituye la norma del vector de Killing temporal que se le impone a la métrica para hacerla estacionaria. De este modo, tanto la función f como el vector ω_m y el tensor g_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$ son independientes del tiempo.

En términos de las coordenadas de Boyer-Linquist la solución de Kerr adopta la suiguiente forma

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\left(dt + \frac{2mra\sin^2\theta}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\,d\varphi\right)^2 +$$

$$+\frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\left[\left(\Delta - a^2\sin^2\theta\right)\left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right) + \Delta\sin^2\theta d\varphi^2\right], \qquad (4.12)$$

donde $\omega_r = \omega_\theta = 0$ y $\omega_\varphi \neq 0$ debido a la simetría axial; a su vez, f, ω_φ y g_{mn} no dependen del tiempo ni del ángulo azimutal φ, es decir, que sólo dependen de r y θ. Podemos ver que

$$\Delta(r) = (r - m)^2 - \sigma^2$$

y

$$f = \frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta},$$

donde $\sigma^2 = m^2 - a^2$.

Entonces,

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2$$

y la componente g_{rr} del tensor métrico adopta la forma

$$g_{rr} = \frac{r^2 + a^2 \cos^2\theta}{\Delta}.$$

El denominador de este último nos determina los horizontes de eventos, es decir, que para las soluciones de $\Delta = 0$ tenemos los siguientes radios

$$r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2} \;\; \text{horizonte exterior,}$$

$$r_- = m - \sqrt{m^2 - a^2} \;\; \text{horizonte interior.}$$

Esta métrica, como ya adelantamos, tiene la propiedad de que al hacer $a = 0$ se reduce a la métrica de Schwarzschild. Una diferencia esencial con respecto a la de Schwarzchild es que la métrica de Kerr posee momento angular, este último está representado por $J = ma$.

Hagamos ahora el cambio $t \longleftrightarrow r$ en la región $r_- < r < r_+$ de la solución de Kerr y tendremos que $\Delta(t) = (t-m)^2 - \sigma^2$. De este modo, Δ se ha transformado en una función de t y en el intervalo señalado con anterioridad (4.12) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{t^2 + a^2\cos^2\theta}\left(dr + \frac{2mta\sin^2\theta}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\,d\varphi\right)^2 + \\ &+\frac{t^2 + a^2\cos^2\theta}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\left[\left(\Delta - a^2\sin^2\theta\right)\left(\frac{dt^2}{\Delta} + d\theta^2\right) + \Delta\sin^2\theta d\varphi^2\right]. \end{aligned}$$

Como habíamos dicho antes, identificaremos esta métrica con el modelo cosmológico de Gowdy no polarizado; para ello aún tenemos que poner la variable t en función de τ, entonces tenemos que se debe cumplir la siguiente relación diferencial cuadrática

$$\frac{dt^2}{\Delta} = -e^{-2\tau} d\tau^2, \tag{4.13}$$

lo que nos lleva a resolver la ecuación

$$\int \frac{dt}{\sqrt{\sigma^2 - (t-m)^2}} = \int e^{-\tau} d\tau,$$

mientras cambiamos r, a y m de una forma conveniente tal que tengamos las siguientes relaciones

$$t = \alpha[1 + \sqrt{1-\beta^2} \cos(e^{-\tau})],$$

$$r = \delta,$$

$$a = \alpha\beta,$$

$$m = \alpha.$$

Esto en particular nos produce la siguiente igualdad

$$\Delta = -\alpha^2(1-\beta^2) \sin^2(e^{-\tau}).$$

Sustituyendo estas últimas cuatro relaciones y la expresión explícita de la Δ en la métrica de Kerr obtenemos

$$
\begin{aligned}
ds^2 = \frac{(1-\beta^2)\sin^2(e^{-\tau}) + \beta^2 \sin^2\theta}{[1+\sqrt{1-\beta^2}\cos(e^{-\tau})]^2 + \beta^2\cos^2\theta} \times \\
\left\{ d\delta + \frac{-2\alpha\beta[1+\sqrt{1-\beta^2}\cos(e^{-\tau})]\sin^2\theta}{(1-\beta^2)\sin^2(e^{-\tau}) + \beta^2\sin^2\theta}\, d\varphi \right\}^2 + \qquad (4.14) \\
+\alpha^2 \left\{ [1+\sqrt{1-\beta^2}\cos(e^{-\tau})]^2 + \beta^2\cos^2\theta \right\} (-e^{-2\tau}d\tau^2 + d\theta^2) + \\
+ \left\{ \frac{(1-\beta^2)\sin^2(e^{-\tau}) + \beta^2\sin^2\theta}{[1+\sqrt{1-\beta^2}\cos(e^{-\tau})]^2 + \beta^2\cos^2\theta} \right\}^{-1} \alpha^2 (1-\beta^2)\sin^2(e^{-\tau})\sin^2\theta d\varphi^2.
\end{aligned}
$$

Para encontrar mas fácilmente los parámetros Q, L, P y λ expresamos la métrica de Gowdy como sigue

$$
\begin{aligned}
ds^2 = L\sin(e^{-\tau})e^P(d\delta + Qd\phi)^2 + e^{(\tau-\lambda)/2}(-e^{-2\tau}d\tau^2 + d\theta^2) + \\
+L\sin(e^{-\tau})e^{-P}\sin^2\theta d\varphi^2. \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

Al comparar (4.14) con (4.15), de inmediato podemos identificar la función que corresponde a la Q

$$
Q = \frac{-2\alpha\beta[1+\sqrt{1-\beta^2}\cos(e^{-\tau})]\sin^2\theta}{(1-\beta^2)\sin^2(e^{-\tau}) + \beta^2\sin^2\theta}; \qquad (4.16)
$$

del mismo modo obtenemos las siguientes relaciones

$$L\sin(e^{-\tau})e^{P}=\frac{(1-\beta^2)\sin^2(e^{-\tau})+\beta^2\sin^2\theta}{[1+\sqrt{1-\beta^2}\cos(e^{-\tau})]^2+\beta^2\cos^2\theta}, \tag{4.17}$$

$$L\sin(e^{-\tau})e^{-P}=\left\{\frac{(1-\beta^2)\sin^2(e^{-\tau})+\beta^2\sin^2\theta}{[1+\sqrt{1-\beta^2}\cos(e^{-\tau})]^2+\beta^2\cos^2\theta}\right\}^{-1}\alpha^2(1-\beta^2)\sin^2(e^{-\tau}).$$

Al multiplicar estas dos ecuaciones obtenemos

$$L=\alpha\sqrt{1-\beta^2} \tag{4.18}$$

y al dividir la primera de ellas entre la segunda obtenemos la expresión explícita para e^P

$$e^{P}=\left\{\frac{(1-\beta^2)\sin^2(e^{-\tau})+\beta^2\sin^2\theta}{[1+\sqrt{1-\beta^2}\cos(e^{-\tau})]^2+\beta^2\cos^2\theta}\right\}\frac{1}{\alpha\sqrt{1-\beta^2}\sin(e^{-\tau})},$$

por lo tanto,

$$P=\ln[(1-\beta^2)\sin^2(e^{-\tau})+\beta^2\sin^2\theta]-\ln[\alpha\sqrt{1-\beta^2}\sin(e^{-\tau})]+$$
$$-\ln\{[1+\sqrt{1-\beta^2}\cos(e^{-\tau})]^2+\beta^2\cos^2\theta\}. \tag{4.19}$$

Finalmente al igual que Q, es muy fácil identificar $e^{(\tau-\lambda)/2}$

$$e^{(\tau-\lambda)/2} = \alpha^2 \left\{[1+\sqrt{1-\beta^2}\cos(e^{-\tau})]^2 + \beta^2\cos^2\theta\right\}$$

y entonces

$$\lambda = \tau - 2\ln(\alpha^2\{[1+\sqrt{1-\beta^2}\cos(e^{-\tau})]^2 + \beta^2\cos^2\theta\}). \tag{4.20}$$

Las ecuaciones (4.16), (4.18), (4.19) y (4.20) son soluciones analíticas de las ecuaciones de Einstein, debido a que la métrica de Kerr es una solución [9].

Capítulo 5

Nuevo modelo cosmológico

5.1. Características de la solución solitónica

La solución que hemos obtenido en la sección 3.3 es una solución solitónica de caracter rotatorio en la Teoría EMDA, a la cual le impusimos ser estacionaria y axialsimétrica.

Siguiendo el formato estacionario con simetría axial y signatura +2, expresamos la métrica determinada por nuestra solución de la siguiente forma

$$ds^2 = -f(dt + \omega_\varphi d\varphi)^2 + f^{-1} ds_3^2, \tag{5.1}$$

donde

$$f = \frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{r^2 + (b - a\cos\theta)^2 - D^2 - K^2},$$

$$\omega_\varphi = \frac{-2}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\left\{\Delta b\cos\theta - a\sin^2\theta[mr + b^2 - 1/2(Q_e^2 + Q_m^2)]\right\},$$

$$\Delta = (r - m)^2 - \sigma^2,$$

$$\sigma^2 = m^2 + b^2 + D^2 + K^2 - Q_e^2 - Q_m^2 - a^2 = \text{cte} \quad \text{y}$$

$$ds_3^2 = \frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\Delta} dr^2 + (\Delta - a^2\sin^2\theta)d\theta^2 + \Delta\sin^2\theta d\varphi^2.$$

Podemos notar que la parte espacial de esta métrica ds_3^2 coincide con la con la parte espacial de la métrica de Kerr, salvo que la σ^2 que se encuentra implícita en la Δ, varía en una constante. Explícitamente, la σ de la solucción solitónica tiene una suma de constantes adicional. Estos parámetros constantes tienen la siguiente interpretacion física: m denota la masa de la configuración gravitacional, D es la carga dilatónica, K es la carga acc axiónica, Q_e y Q_m representan las cargas eléctrica y magnética, respectivamente, a (análogo a la métrica de Kerr) es el momento por unidad de masa de solitón rotatorio y, finalmente a b se le denomina el parámetro NUT la cual, se estima que es una carga de origen gravitomagnético.

La forma genérica de la componente $g_{t\varphi}$ de una métrica estacionaria con simetría axial es la siguiente

$$g_{t\varphi} \equiv \omega_\varphi = -2b\cos\theta + \omega. \tag{5.2}$$

Si hacemos que $r \to 0$ asintóticamente, entonces $\omega \to 0$, pero el primer término permanece invariante porque no depende de r, entonces, en ese límite no obtenemos la solución de Minkowski (que es asintóticamente plana). Los agujeros negros son configuraciones de campo asintóticamente planas por definición, debido a esto no deben contener el parámetro NUT. Por lo tanto, siqueremos tener una solución de agujero negro necesitamos imponer la condición $g_{t\varphi} = \omega$.

El horizonte de eventos de la métrica (5.1) lo determina el denominador de la componente g_{rr}:

$$g_{rr} = \frac{r^2 + (b - a\cos\theta)^2 - D^2 - K^2}{\Delta};$$

si $\Delta = 0$, entonces $(r-m)^2 - \sigma^2 = 0$ tiene las soluciones

$$\begin{aligned} r_+ &= m + \sigma \text{ horizonte exterior,} \\ r_- &= m - \sigma \text{ horizonte interior.} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Si imponemos la condición $b = 0$, tendremos una solución asintóticamente plana, lo cual es equivalente a $g_{t\varphi} = \omega$.

5.2. Modelo cosmológico

Procedamos ahora a obtener un modelo cosmológico al asociar la solución solitónica rotaroria que obtuvimos con el modelo de Gowdy, de manera similar al capítulo anterior. Esto nos dará una cosmología con campos adicionales al gravitatorio.

Si hacemos $b = 0$ en la relación (5.1) se obtiene la siguiente expresión

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta - D^2 - K^2}\left\{dt + \frac{2a\sin^2\theta[mr - 1/2(Q_e^2 + Q_m^2)]}{\Delta - a^2\sin^2\theta}d\varphi\right\}^2 + \\ + \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta - D^2 - K^2}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\left\{[\Delta - a^2\sin^2\theta][\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2] + \Delta\sin^2\theta d\varphi^2\right\}. \tag{5.4}$$

La condición $b = 0$ se necesita para eliminar el parámetro NUT de la solución y obtener, de esta forma, una solución de tipo agujero negro. De este modo se puede hacer uso de la transformación $r \longleftrightarrow t$, en la región comprendida entre los horizontes $r_- < r < r_+$ de manera que podamos "mapear" una configuración de tipo hoyo negro con un modelo cosmológico.

Luego de aplicar la transformación $r \longleftrightarrow t$ en la región $r_- < r < r_+$ obtenemos la relación siguiente

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{t^2 + a^2\cos^2\theta - D^2 - K^2}\left\{dr + \frac{2a\sin^2\theta[mt - 1/2(Q_e^2 + Q_m^2)]}{\Delta - a^2\sin^2\theta}d\varphi\right\}^2 +$$
$$+\frac{t^2 + a^2\cos^2\theta - D^2 - K^2}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\left[(\Delta - a^2\sin^2\theta)(\frac{dt^2}{\Delta} + d\theta^2) + \Delta\sin^2\theta d\varphi^2\right], \tag{5.5}$$

donde la delta ahora es una función de t y $\Delta(t) = (t-m)^2 - \sigma^2$.

Para igualar esta métrica al modelo de Gowdy, como hicimos con la solución de Kerr, compactificaremos la coordenada r de tal manera que $r \equiv \delta$; de esta forma tendremos

$$\begin{aligned} ds^2 = -\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{t^2 + a^2\cos^2\theta - D^2 - K^2}\left\{d\delta + \frac{2a\sin^2\theta[mt - 1/2(Q_e^2 + Q_m^2)]}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\right\}^2 + \\ +(t^2 + a^2\cos^2\theta - D^2 - K^2)\left(\frac{dt^2}{\Delta} + d\theta^2\right) + \\ \left(\frac{t^2 + a^2\cos^2\theta - D^2 - K^2}{\Delta - a^2\sin^2\theta}\right)\Delta\sin^2\theta d\varphi^2. \end{aligned} \tag{5.6}$$

El modelo de Gowdy con el que vamos a igualar la expresión (5.6), es

$$ds^2 = e^{(\tau-\lambda)/2}(-e^{-2\tau}d\tau^2 + d\theta^2) + L\sin(e^{-\tau})e^P(d\delta + Qd\varphi)^2 +$$

$$+L\sin(e^{-\tau})e^{-P}\sin^2\theta d\varphi^2.$$

Podemos igualar los coeficientes correspondientes de estas formas diferenciales cuadráticas, pero tenemos dt^2 en una métrica y en la otra no, sin embargo, debido a que las componentes del tensor métrico deben ser iguales, se tiene una relación que nos proporciona la t como función de τ o viceversa, dicha relación es la misma que ya vimos al comparar el modelo de Kerr con el de Gowdy, es decir la (4.13)

$$\frac{dt^2}{\Delta} = -e^{-2\tau} d\tau^2,$$

con lo que llegamos a la ecuación integral

$$\int \frac{dt}{\sqrt{\sigma^2 - (t-m)^2}} = \int e^{-\tau} d\tau.$$

Al resolver esta ecuación, tenemos a t como habíamos anunciado

$$t = m + \sigma \cos(e^{-\tau}).$$

Ahora si estamos listos para encontrar los parámetros (funciones) L, P, Q y λ.

Comparando las métricas vemos que

$$L \sin(e^{-\tau}) e^{P} = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{t^2 + a^2\cos^2\theta - D^2 - K^2} \qquad \text{y} \tag{5.7}$$

$$L \sin(e^{-\tau}) e^{-P} = \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{t^2 + a^2\cos^2\theta - D^2 - K^2} \right)^{-1} \Delta. \tag{5.8}$$

Al multiplicar (5.7) por (5.8) se obtiente

$$L^2 \sin^2(e^{-\tau}) = -\Delta.$$

Pero si sustituimos el valor de Δ en terminos de τ, ya que t es función de τ, tenemos

$$\Delta = (t - m)^2 - \sigma^2 = \sigma^2 \cos^2(e^{-\tau}) - \sigma^2 = -\sigma^2 \sin^2(e^{-\tau}),$$

por lo tanto,

$$L = \sigma. \tag{5.9}$$

Asimismo, de dividir la ecuación (5.7) entre (5.8) obtenemos

$$e^{2P} = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{t^2 + a^2\cos^2\theta - D^2 - K^2}\right)^2 \frac{1}{\Delta}.$$

De la misma manera, al poner t en términos de τ y tomando raíz cuadrada de ambos miembros llegamos a la siguiente expresión

$$e^P = \frac{\sigma^2 \sin^2(e^{-\tau}) + a^2 \sin^2\theta}{[m + \sigma\cos(e^{-\tau})]^2 + a^2\cos^2\theta - D^2 - K^2} \frac{1}{[\sigma \sin(e^{-\tau})]}.$$

Entonces

$$P = \ln[\sigma^2 \sin^2(e^{-\tau}) + a^2 \sin^2\theta] - \ln[\sigma \sin(e^{-\tau})] +$$

$$- \ln\{[m + \sigma\cos(e^{-\tau})]^2 + a^2\cos^2\theta - D^2 - K^2\} \tag{5.10}$$

y, finalmente, las dos relaciones siguientes son inmediatas

$$Q = \frac{-2a\sin^2\theta\,\{m[m + \sigma\cos(e^{-\tau})] - 1/2(Q_e^2 + Q_m^2)\}}{\sigma^2\sin^2(e^{-\tau}) + a^2\sin^2\theta} \tag{5.11}$$

y

$$e^{(\tau-\lambda)/2} = [m + \sigma\cos(e^{-\tau})]^2 + a^2\cos^2\theta - D^2 - K^2.$$

A partir de la ecuación anterior también encontramos el valor explícito de la función λ

$$\lambda = \tau - 2\ln\{[m + \sigma\cos(e^{-\tau})]^2 + a^2\cos^2\theta - D^2 - K^2\}. \tag{5.12}$$

Tenemos entonces, que las ecuaciones (5.9)–(5.12) constituyen un modelo de Gowdy no polarizado construido a partir de la métrica (5.1) bajo la condición de eliminar el parámetro NUT.

Un caso particular de este modelo cosmológico se obtiene al eliminar el parámetro a, que equivale a eliminar la función Q. De este modo llegamos a un modelo cosmológico de Gowdy polarizado con topología S^1XS^2. Si, además, descompactificamos la coordenada δ (de tal manera que $0 \leq \delta < \infty$, por ejemplo), entonces obtenemos una familia de modelos de tipo Kantowski-Sachs con topología R^1XS^2.

Capítulo 6

Conclusiones

La aplicación del método de dispersión inversa para solucionar ecuaciones de campo o bién ecuciones no lineales requiere suspicacia para encontrar tanto las ecuciones espectrales como la solución inicial, la elección de estos elementos depende del contexto en el que se situan las ecuaciones de campo, por ejemplo, la simetría requerida o la física involucrada.

Sin embargo, se observan dos ventajas: la primera es que el problema de valor inicial para una ecuación (o ecuaciones) no lineal se reduce a una ecuación integral (o ecuaciones integrales) lineal. La segunda ventaja es que las soluciones obtenidas son más generales que aquellas encontradas por el método directo, el cual, nos restringe a condiciones iniciales para soluciones particulares.

Durante la costrucción de la configuración rotante obtenida en la teoría EMDA, encontramos que las constantes que representan los campos no necesariamente son independientes, ya que se cumple la reestricción $bD - Q_e Q_m - km = 0$. Al parecer esta "contradicción" a la teoría viene de las simetrás escogidas para la solución de nuestro modelo, por lo que habría que hacer una revisión al mecanismo que usamos al aplicar el método de dispersión inversa.

En el área de la relatividad, Obregón, Quevedo y Ryan implementaron el mismo método para encontrar un modelo de Gowdy no polarizado usando como solución inicial la métrica que corresponde al agujero negro con simetría axial que tiene las mismas simetrías que el modelo cosmológico. De hecho mostraron que es muy difícil resolver las ecuaciones de campo que arroja el modelo en el contexto de la relatividad general.

En este trabajo de investigación hemos encontrado soluciones al modelo cosmológico de Gowdy no polarizado con topología S^1XS^2. Con el método usado (descubierto por Kantowski y Sachs) no fue necesario resolver las ecuaciones de campo de la teoría de cuerdas heteróticas [10].

Nosotros usamos el método de dispersión inversa para construir una métrica (que es una solución solitónica de la teoría de cuerdas y desde el punto de vista matemático se le puede considerar como una generalización de la solución de Kerr) como solución inicial para construir un modelo cosmológico de Gowdy no polarizado. Este hecho fue motivado debido a que dicha métrica también tiene simetrías semejantes a las de los modelos de Gowdy. El modelo cosmológico así obtenido cuenta con campos adicionales al campo gravitatorio y valdrá la pena en el futuro dar una interpretación adecuada a tal cosmología.

También se obtuvieron dos subclases de soluciones, a saber, un modelo cosmológico de Gowdy polarizado con topología S^1XS^2 cuando el parámetro $a = 0$, y un modelo cosmológico de Kantowski-Sachs con topología R^1XS^2 cuando además descompactificamos la coordenada δ.

Todo esto sugiere que la técnica que descubrieron Kantowski y Sachs también se puede emplear en el sentido inverso, es decir, que dado un modelo cosmológico con ciertas simetrías se puede buscar una nueva solución estacionaria o estática que tenga simetrías semejantes en alguna región de la variedad (espaciotiempo de la métrica en cuestión). En general para llevar a cabo esta inspección matemática se debe tener sumo cuidado en la región donde se hace la comparación de las métricas.

Capítulo 7

Bibliografía

Bibliografía

[1] Sean M. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, (Nov-Dec 1997).

[2] A.A. Logunov, *Curso de Teoría de Relatividad y de la Gravitación*, URSS (Moscú 1998).

[3] J. Foster and J.D. Nightingale, *A Short course in General Relativity*, Springer (New York 1995).

[4] R.Gowdy, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 826 (1971); *Ann. Phys. (N.Y.)* **83**, 203 (1974).

[5] R.Kantowski and R. Sachs, *J. Math. Phys.* **7**, 443 (1966).

[6] M. Yurova, *Phys. Rev. D* **65** 024024 (2001).

[7] B. K. Berger and D. Garfinkle, *Phys. Rev. D*, **57**, 4767 (1998).

[8] B. K. Berger and V. Moncrief, *Phys. Rev. D* **48**, 4676 (1993)

[9] O. Obregón, H. Quevedo and M. P. Ryan, *Phys. Rev. D* **65** 024022 (2001).

[10] T. Cisneros–Pérez, A. Herrera–Aguilar, J.C. Mejía–Ambriz and V. Rojas–Macás, “Gowdy Cosmological Models from Stringy Black Holes”, por aparecer en *Rev. Mex. Fís.*

[11] Sasanka Ghosh, S. Nandy arXiv:solv-int/9904021 v2 (1999).

[12] A. Herrera-Aguilar, J.o.Tellez. *Revista Mexicana de Física* 51(6)549-557.

[13] Erik Infeld and George Rowlands *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*, Cambridge (2000).

[14] Olivier Babelon, D. Bernard. arXiv:hep-th/9309154v1 (1993).

[15] V.A. Belinsky, V.E. Zakharov, *Sov. Phys.* JETP **50** 1, 1979.

[16] A. García, Dmitri Galtsov and O. Kechkin. *Physical Review Letters* **74**, 8 (1995).

[17] D. V. Galtsov, A.A. Garcia, and O. V. Kechkin, *J. Math. Phys.* **36** 5023 (1995).

[18] D.V Galtsov and O.V. Kechkin, *Phys. Rev.* **50**, 7394 (1994); *Phys. Rev. Lett* **74**, 2863 (1995); *Phys. Rev.* **54**, 1656 (1996); *Phys. Lett* **361**, 52 (1995).

[19] V.A. Belinskii and V. E. Zakharov, *Sov. Phys.* JETP **48**, 985 (1978); **50**, 1 (1979).

[20] M. Yurova, *Phys. Rev. D* **64** 024002 (2001).