



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

Diagramas conformes para el colapso gravitacional de polvo en simetría esférica

Tesis

que para obtener el título de

Maestro en Ciencias en el área de Física

presenta:

Néstor Enrique Ortiz Madrigal

Asesor:

Dr. Olivier Charles-Albert Sarbach
Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH.

Morelia, Michoacán. Enero de 2008

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Motivación	6
1.2. Objetivos	8
2. Las ecuaciones dinámicas del colapso de un fluido perfecto en simetría esférica	11
2.1. El espacio-tiempo esféricamente simétrico y las Ecuaciones de Einstein	11
2.1.1. Las Ecuaciones de Einstein	12
2.2. El modelo para un fluido perfecto autogravitante	15
3. Colapso gravitacional de una nube de polvo	21
3.1. La solución analítica de las ecuaciones dinámicas	22
3.2. Propiedades de la solución	25
3.2.1. La trayectoria de las partículas	25
3.2.2. Condiciones para evitar la singularidad de cruzamiento	26
3.2.3. La singularidad central	28
3.2.4. El horizonte aparente	31
3.3. El agujero negro y la Censura Cósmica de la singularidad	36
3.4. El modelo con densidad de materia uniforme y velocidad nula	39
3.4.1. El horizonte de eventos	40
3.4.2. El horizonte aparente	43
4. Diagramas conformes	47
4.1. Primera construcción numérica de las coordenadas conformes	48
4.2. El diagrama conforme para el modelo de densidad uniforme con velocidad inicial nula	50
4.3. El diagrama conforme para el modelo con densidad no uniforme	54
5. Conclusiones	61

Capítulo 1

Introducción

El presente trabajo es un tratado sobre el fenómeno conocido como *colapso gravitacional*. Tal fenómeno consiste en la contracción de un objeto masivo sobre sí mismo, disminuyendo su volumen y aumentando su densidad de masa. Un colapso de este tipo ocurre cuando la fuerza gravitacional sobrepasa a cualquier otra fuerza repulsiva que pudiera contrarrestar a la gravedad y mantener el equilibrio hidrostático. Si eventualmente se alcanza tal equilibrio, el colapso se detiene.

El estudio del tema es de gran interés puesto que este fenómeno es el responsable, al menos en primera instancia, de la formación de las estructuras que se conocen en el universo, desde las escalas cosmológicas -cúmulos y supercúmulos de galaxias, etcétera-, pasando por la formación de galaxias, hasta escalas astrofísicas -estrellas, planetas, etcétera-. Por ejemplo, el eventual colapso gravitacional de una nube de hidrógeno y polvo interestelar es el comienzo del nacimiento de una estrella. Cuando a causa del colapso aumenta la temperatura del gas y las enormes presiones provocan la fusión nuclear del hidrógeno, entonces se genera una presión térmica que contrarresta a la fuerza gravitacional y cuando se alcanza el equilibrio hidrostático, la estrella es un objeto estable. Sin embargo cuando se termina el combustible para la fusión nuclear, la gravedad vuelve a provocar el colapso y el resultado ahora depende de la masa total de la estrella: puede ser una *enana blanca*, una *estrella de neutrones* o una *singularidad* espacio-temporal.

Una enana blanca es una estrella cuyo radio típico es de 10^4 Km y su masa es de alrededor de una masa solar. Uno de estos objetos es tan denso que los núcleos de sus moléculas se fusionan y los electrones se mueven libremente formando un gas de electrones que se *degenera* a causa de la alta densidad obedeciendo el Principio de Exclusión y da lugar a una *presión de degeneración* que contrarresta la fuerza de gravedad.

Una estrella de neutrones es aún más densa que una enana blanca, pues tiene un radio típico de 10Km y su masa es de alrededor de una masa solar. Esta densidad es tal que los mismos electrones y protones se fusionan formando ahora un gas de neutrones, que también están sujetos al Principio de Exclusión y se degeneran. Una vez más es la presión de esta degeneración la que detiene el colapso gravitacional.

En cambio una singularidad espacio-temporal es el resultado del colapso gravitacional total, cuando ningún tipo de presión es capaz de detener la contracción y la estrella se reduce a un punto de densidad infinita, donde no se sabe con certeza si las leyes

de la física conocidas hasta ahora siguen siendo válidas o no. El hecho importante es que el estado final de la estrella depende de su masa total. Al respecto un resultado bastante fuerte es el publicado por el físico indio S. Chandrasekhar en 1930, que condiciona la existencia de una estrella como enana blanca a que su masa no exceda las 1.4 masas solares -*límite de Chandrasekhar*-. Si así ocurriera, entonces la presión de degeneración de los electrones sería insuficiente para detener el colapso gravitacional y la estrella se convertiría en candidata ser una estrella de neutrones, siempre que su masa sea menor que tres masas solares -*límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff*-. Para masas mayores que eso, la formación de una singularidad es inevitable, y precisamente este trabajo explora exclusivamente ese caso.

Al respecto de la singularidad formada por el colapso gravitacional puede hacerse una clasificación: ésta pudiera resultar *desnuda*, lo cual significa que un observador en el infinito nulo futuro puede detectar un rayo de luz provenientes de la singularidad, y por lo tanto también puede hacerlo cualquier observador a una distancia finita de ella. La otra opción para el resultado es un *agujero negro*, es decir, una singularidad *censurada* detrás de un *horizonte de eventos*, en el sentido de que éste impide que un observador en el infinito nulo futuro detecte rayos de luz salidos desde ella. En ese caso la singularidad se llama *globalmente oculta* o *débilmente censurada*. Sin embargo cabe la posibilidad de que aún siendo globalmente oculta, existan regiones detrás del horizonte de eventos donde puedan ser detectados rayos de luz salientes desde la singularidad. Si ningún observador puede detectar rayos de luz salientes de la singularidad, ni siquiera localmente, ésta se llama *localmente oculta* o *fuertemente censurada*.

En esta Tesis se estudia cuidadosamente un escenario esféricamente simétrico donde ocurre el colapso gravitacional total de una estrella constituida por un fluido perfecto sin presión -*polvo*-, para estudiar las condiciones que determinan la naturaleza de la singularidad resultante.

En lo que resta de este capítulo se da una motivación detallada al estudio de la singularidad y se definen los objetivos globales del trabajo. En el segundo capítulo se deducen rigurosamente las ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica del colapso de un fluido perfecto en simetría esférica. En el tercero se resuelven tales ecuaciones para el caso particular en que la presión es nula y en el cuarto se estudia con más detenimiento, usando herramientas más adecuadas, la censura de la singularidad en varios casos. En el quinto capítulo se concluye el trabajo.

1.1. Motivación

En 1969 el físico británico Roger Penrose formuló la siguiente conjetura:

El resultado final del colapso gravitacional total de un objeto es un agujero negro y no una singularidad desnuda.

Ésta se conoce como la *Conjetura de la Censura Cósmica*, y significa que la singularidad resultante debe ser al menos globalmente oculta, aunque bien pudiera ser localmente oculta. Para evitar complicaciones semánticas, la conjetura se precisa así:

Conjetura de la Censura Cósmica Débil: *El resultado final del colapso gravita-*

cional total de un objeto es una singularidad globalmente oculta -un agujero negro- y no una singularidad desnuda.

Conjetura de la Censura Cósmica Fuerte: *El resultado final del colapso gravitacional total de un objeto es una singularidad localmente oculta y no una singularidad desnuda.*

Los calificativos *débil* y *fuerte* hacen clara referencia al orden de restricción sobre la censura de la singularidad. Ahora es claro por qué en la sección anterior se han llamado singularidades *débilmente censuradas* a las globalmente ocultas y *fuertemente censuradas* a las localmente ocultas.

Hasta hoy no existe una prueba definitiva de la validez o la invalidez generales de esta conjetura, sin embargo se tiene acumulada cierta evidencia que indica su certeza en varios casos [1], [2], es decir, las singularidades desnudas no aparecen genéricamente; si acaso aparece una, es por cierta particularidad de las condiciones iniciales, por lo que una pequeña perturbación a los parámetros del sistema es suficiente para que se forme un horizonte de eventos. Por eso estas no son pruebas generales y tema de investigación sigue abierto.

La razón por la que la Conjetura de la Censura Cósmica resulta tan relevante es que su posible invalidez implica cruciales aspectos teóricos sobre la gravitación. Si esta conjetura no fuera verdadera, es decir, si a partir de condiciones iniciales genéricas fuera posible obtener singularidades desnudas, entonces la teoría clásica de la Relatividad General tendría un problema serio en su fundamentación, pues dejaría de ser una teoría determinista en el siguiente sentido:

Considérese un espacio-tiempo arbitrario M y un dato inicial suave para una evolución temporal que atravesará una singularidad espacio-temporal en algún momento, obedeciendo las leyes de la Relatividad General. Ver el diagrama esbozado en la figura (1.1).

Si se supone que la singularidad es localmente oculta, entonces hay una región de M delimitada por el llamado *horizonte de Cauchy*, la cual queda censurada porque un observador en esa región no recibe información del dato inicial. Si en cambio el observador en esa región puede recibir información relacionada con la evolución, necesariamente proviene de la singularidad -desnuda entonces-, pero tal información definitivamente depende de las particularidades y naturaleza de la singularidad y no solamente del dato inicial, por lo tanto la Relatividad General deja de ser una teoría determinista.

Por otro lado sería interesante encontrar casos genéricos en los que se obtengan singularidades desnudas, pues ello implicaría la posibilidad de acceder observacionalmente a objetos que aún no han revelado información sobre las misteriosas leyes físicas que los rigen. Esto constituiría una fuente fenomenológica para las teorías de gravedad cuántica.

En resumen la cuestión que sigue abierta es la siguiente: *dado un dato inicial genérico, suave, para un colapso gravitacional total, ¿es posible obtener una singularidad desnuda?* La motivación fundamental para este trabajo es esta pregunta, y aunque al

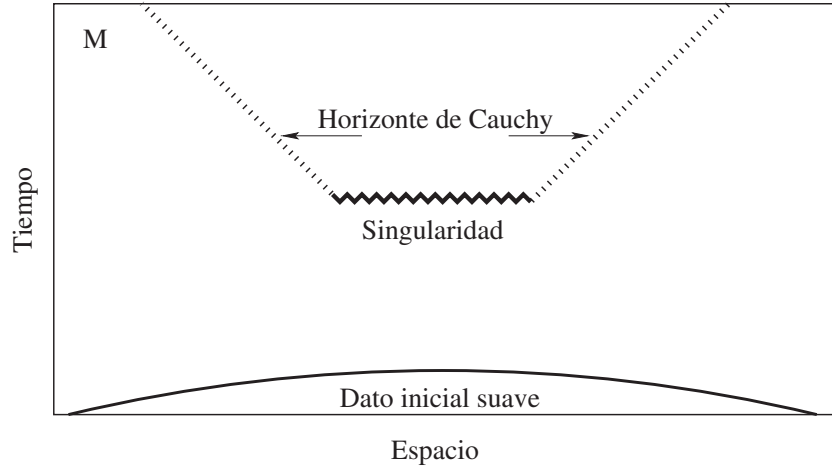


Figura 1.1: Si la singularidad es desnuda, la Relatividad General deja de ser determinista.

final no queda respondida definitivamente, se estudia detalladamente la censura de la singularidad al final del colapso gravitacional del modelo de una estrella de polvo en simetría esférica, lo cual constituye un ejercicio académico muy nutritivo por la variedad de situaciones explorables al variar los parámetros libres y por la riqueza de física relativista involucrada. No obstante es necesario decir que el estudio del colapso del polvo en simetría esférica ya se ha realizado anteriormente [3], aunque no con se ha hecho el análisis con las heramientas numéricas que se aplicarán en este trabajo. Por eso la presente Tesis, además de ser una revisión exhaustiva, contribuye a aclarar los resultados y explora numéricamente varios escenarios.

A continuación se establecen los objetivos generales.

1.2. Objetivos

Como se ha anticipado, con esta Tesis se pretende estudiar la censura cósmica de la singularidad resultante de un colapso gravitacional. Lo que hay que aclarar es que el modelo particular que se explora es el de una estrella constituida por un fluido perfecto con presión nula, es decir, polvo. Esto constituye una simplificación termodinámica muy significativa: por un lado eliminar la presión garantiza *a priori* que ocurrirá el colapso total, pues no hay nada que pudiera detenerlo; por otro lado es un modelo poco realista de la naturaleza, sin embargo la principal ventaja académica de su estudio es la posibilidad de resolver analíticamente las ecuaciones dinámicas, para lo cual otro ingrediente primordial que se pide es un espacio-tiempo esféricamente simétrico, lo cual tampoco es del todo realista, pues una estrella no siempre es perfectamente simétrica, pero es válido asumirlo es una primera aproximación.

Los objetivos particulares son:

a) Deducir formalmente las ecuaciones diferenciales que determinan la dinámica del colapso gravitacional de un fluido perfecto en simetría esférica, partiendo de las ecua-

ciones de Einstein y el tensor de energía-impulso correspondiente a este fluido.

b) Tomar el caso particular en que la presión del fluido es nula -polvo- y resolver analíticamente las ecuaciones deducidas y explorar la validez de la solución y de los parámetros involucrados. Estudiar la causalidad de espacio tiempo-resultante y la censura de la singularidad.

c) Simplificar un poco más el modelo imponiendo inicialmente un perfil de densidad de masa uniforme a lo largo de la estrella. Estudiar la cuasalidad del espacio tiempo resultante y la censura de la singularidad.

d) Para cada caso desarrollar una estrategia para generar un diagrama donde las coordenadas sean conformes, lo cual constituye una herramienta más poderosa para determinar la censura de la singularidad. Determinar los casos en que se obtiene una singularidad desnuda.

Impuestos los objetivos puede comenzarse ahora con el desarrollo del trabajo.

Capítulo 2

Las ecuaciones dinámicas del colapso de un fluido perfecto en simetría esférica

El presente capítulo está dedicado a la deducción de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica del colapso gravitacional de un fluido perfecto en un espacio-tiempo con simetría esférica. En la primera sección se construye geoméricamente dicho espacio-tiempo y se obtiene la forma que toman las Ecuaciones de Einstein ahí para un tensor de energía-impulso general. En la segunda se introduce el tensor de energía-impulso correspondiente a un fluido perfecto y, en base a las Ecuaciones de Einstein, se deducen las ecuaciones que describen su dinámica.

2.1. El espacio-tiempo esféricamente simétrico y las Ecuaciones de Einstein

Considérese un espacio-tiempo (M, g) de dimensión cuatro, donde g es una métrica lorentziana. En este trabajo se requiere que M sea esféricamente simétrico, esto significa que pueda escribirse como el producto cartesiano

$$M = \tilde{M} \times S^2,$$

y entonces

$$g = \tilde{g} + r^2 \hat{g},$$

de tal manera que $(\tilde{M}, \tilde{g})$ es un variedad pseudo-Riemmaniana de dimensión dos y $(S^2, \hat{g})$ es la 2-esfera unitaria, o sea que $\hat{g} = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Además $r \geq 0$ es una función real sobre $\tilde{M}$ definida a partir del área de una esfera que pasa por un punto arbitrario $p \in \tilde{M}$. Dado que el área de dicha esfera es $A(p) = 4\pi r^2(p)$, se define

$r(p) := \sqrt{\frac{A(p)}{4\pi}}$ y se llama *radio de área*.

Un ejemplo de espacio esféricamente simétrico que vale la pena escribir es el de Schwarzschild, para el que la métrica de $\tilde{M}$ es:

$$\tilde{g} = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}}, \quad r > 2m,$$

y describe la geometría del espacio tiempo en el vacío en presencia de un objeto perfectamente esférico de masa m . Pronto se verá que ésta es la única solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío, por lo tanto el exterior de una estrella colapsando debe estar descrito por esta métrica.

2.1.1. Las Ecuaciones de Einstein

Para los sucesivos se introducen coordenadas locales sobre M , clasificadas en dos conjuntos: las coordenadas sobre $\tilde{M}$ serán $\{x^a\} := \{\tau, R\}$ y sobre S^2 serán $\{x^A\} := \{\theta, \varphi\}$. Entonces la métrica se escribe como:

$$g = \tilde{g}_{ab} dx^a dx^b + r^2 (x^a) \hat{g}_{AB} dx^A dx^B.$$

El problema global es encontrar la forma de los coeficientes de $\tilde{g}$ y $\hat{g}$. Lo que puede notarse desde ahora y será muy útil, es que g es simétrica por bloques:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{ab} & 0 \\ 0 & r^2 \hat{g}_{AB} \end{pmatrix},$$

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \tilde{g}^{ab} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \hat{g}^{AB} \end{pmatrix}.$$

El primer paso es calcular los Símbolos de Christoffel, dados por:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_{\alpha} g_{\beta\nu} + \partial_{\beta} g_{\alpha\nu} - \partial_{\nu} g_{\alpha\beta}).$$

En total hay 40 de éstos símbolos, pero afortunadamente no es necesario calcularlos todos porque algunos se anulan y gracias a la simetría algunos serán iguales entre sí. Sólo habrá que hacer 6 cálculos: Γ_{bc}^a , Γ_{bC}^a , Γ_{BC}^a , Γ_{bc}^A , Γ_{Bc}^A y Γ_{BC}^A .

En términos del gradiente de $r(x^a)$, definido por $r_a := \tilde{\nabla}_a r$ (y por lo tanto $r^a = \tilde{g}^{ab} r_b$), donde $\tilde{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita respecto a $\tilde{g}$, los Símbolos de Christoffel son tales que:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{bc}^a &= \tilde{\Gamma}_{bc}^a, \\
 \Gamma_{bC}^a &= 0, \\
 \Gamma_{BC}^a &= -rr^a \hat{g}_{BC}, \\
 \Gamma_{bc}^A &= 0, \\
 \Gamma_{Bc}^A &= \delta_B^A \frac{r_c}{r}, \\
 \Gamma_{BC}^A &= \hat{\Gamma}_{BC}^A.
 \end{aligned}$$

El siguiente paso es encontrar el tensor de curvatura, el cual está dado por:

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\mu + \Gamma_{\beta\nu}^\sigma \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\nu}^\mu - \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\mu,$$

y satisface las simetrías algebraicas

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}.$$

Después de hacer los cálculos correspondientes se obtiene:

$$\begin{aligned}
 R_{dab}^c &= \tilde{R}_{dab}^c = \tilde{k}(\delta_a^c \tilde{g}_{bd} - \delta_b^c \tilde{g}_{ad}), \\
 R_{DaB}^c &= -r(\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^m r) \hat{g}_{DB}, \\
 R_{DAB}^C &= (1-N)(\delta_A^C \hat{g}_{DB} - \delta_B^C \hat{g}_{DA}), \\
 R_{Dab}^c &= 0 = R_{dAB}^c = R_{DAB}^c,
 \end{aligned}$$

donde

$$N := r^d r_d = \tilde{g}^{ab}(\tilde{\nabla}_a r)(\tilde{\nabla}_b r),$$

y $\tilde{k}$ es la curvatura de Gauss de $(\tilde{M}, \tilde{g})$.

El escalar de Ricci, definido como la contracción: $R_{\nu\beta} = R_{\nu\mu\beta}^\mu$, para las diferentes combinaciones de coordenadas es:

$$\begin{aligned}
 R_{ab} &= R_{a\mu b}^\mu = R_{adb}^d + R_{aDb}^D = \tilde{k} \tilde{g}_{ab} - \frac{1}{r} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r, \\
 R_{aB} &= R_{a\mu B}^\mu = R_{adB}^d + R_{aDB}^D = 0, \\
 R_{AB} &= R_{A\mu B}^\mu = R_{AdB}^d + R_{ADB}^D = -r(\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^a r) \hat{g}_{AB} + (1-N) \hat{g}_{AB},
 \end{aligned}$$

esto porque

$$\begin{aligned} R_{adb}^d &= \tilde{k}(2\tilde{g}_{ab} - \tilde{g}_{ab}) = \tilde{k}\tilde{g}_{ab}, \\ R_{aDb}^D &= g^{DE}R_{DaEb} = g^{DE}R_{aDbE} = \frac{1}{r^2}\hat{g}^{DE}(-r\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_br\hat{g}_{DE}) = -\frac{2}{r}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_br. \end{aligned}$$

El escalar de Ricci, definido como $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, queda:

$$\begin{aligned} R &= \tilde{g}^{ab}R_{ab} + \frac{1}{r^2}\hat{g}^{AB}R_{AB} \\ &= 2\tilde{k} - \frac{2}{r}(\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}^ar) + \frac{2}{r^2}\left[-r(\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}^ar) + 1 - N\right] \\ &= 2\tilde{k} - \frac{4}{r}(\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}^ar) + \frac{2(1-N)}{r^2}. \end{aligned}$$

Luego el Tensor de Einstein, el cual se define como $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, para las diferentes combinaciones de coordenadas queda:

$$\begin{aligned} G_{ab} &= -\frac{2}{r}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_br - \frac{1}{r^2}(1 - N - 2r\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}^cr)\tilde{g}_{ab}, \\ G_{aB} &= 0, \\ G_{AB} &= (r\tilde{\nabla}^c\tilde{\nabla}_cr - r^2\tilde{k})\hat{g}_{AB}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sea $T_{\mu\nu}$ un tensor de energía-impulso arbitrario por ahora y tal que $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$. La solución de las Ecuaciones de Einstein, $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$, serán los coeficientes buscados de la métrica g . El problema se separa estrictamente en las tres partes en las que puede separarse el Tensor de Einstein arriba, sin embargo la identidad de Bianchi, $\nabla_\mu G_b^\mu = 0$, simplifica considerablemente el problema.

Por un lado, no es difícil encontrar que:

$$0 = \nabla_\mu G_b^\mu = \frac{1}{r^2}\tilde{\nabla}_a(r^2G_b^a) - \frac{r_b}{r^3}\hat{g}^{AB}G_{AB},$$

por otro lado:

$$0 = \nabla_\mu T_b^\mu = \frac{1}{r^2}\tilde{\nabla}_a(r^2T_b^a) - \frac{r_b}{r^3}\hat{g}^{AB}T_{AB}.$$

Multiplicando esta última por $8\pi G$, donde G es la constante universal de la gravitación, y tomando la diferencia resulta:

$$0 = \frac{1}{r^2}\tilde{\nabla}_a(r^2[G_b^a - 8\pi GT_b^a]) - \frac{r_b}{r^3}\hat{g}^{AB}[G_{AB} - 8\pi GT_{AB}],$$

si satisface $G_b^a = 8\pi GT_b^a$, y si además se asume que $r_b \neq 0$, entonces necesariamente la parte angular de las ecuaciones de Einstein se satisface automáticamente:

$$\hat{g}^{AB}(G_{AB} - 8\pi GT_{AB}) \equiv 0,$$

por lo tanto el problema se reduce a resolver solamente:

$$\begin{aligned} G_b^a - 8\pi GT_b^a &= 0, \\ \nabla_a(r^2 T_b^a) &= 0, \end{aligned}$$

que explícitamente se ve:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{r}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_br - \frac{1}{r^2}(1 - N - 2r\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}^cr)\tilde{g}_{ab} &= 8\pi GT_b^a, \\ \nabla_a(r^2 T_b^a) &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.2. El modelo para un fluido perfecto autogravitante

En esta sección se deducen las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico de un fluido perfecto autogravitante en un espacio-tiempo esféricamente simétrico. Esta será una primera aproximación al estudio general de la dinámica de una estrella no-rotante, y constituida por un gas cuyos componetes no interaccionan entre sí. El objetivo es resolver las ecuaciones (2.2) tomando el tensor de energía-impulso que corresponde a un fluido perfecto e isotrópico:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + Pg_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

donde el campo vectorial u , definido en general sobre M , es la cuadrivelocidad de los elementos de fluido y es tal que $g(u, u) = -1$. Además ρ y P son campos escalares definidos en general sobre M que corresponden a la densidad de masa y presión del fluido, respectivamente. Sin embargo es importante decir que la simetría esférica implica que u , ρ y P están definidos sólo en $\tilde{M}$.

La segunda de las ecuaciones (2.2) es una generalización de la ley de conservación de energía-momento. Si ésta se escribe en términos de las nuevas cantidades:

$$\begin{aligned} \theta &:= \frac{1}{r^2}\tilde{\nabla}^a(r^2 u_a), \\ a_b &:= \tilde{\nabla}_u u_b, \end{aligned}$$

y luego se contraen una vez con u_ν y otra vez con el proyector ortogonal $h_\nu^\alpha := \delta_\nu^\alpha + u^\alpha u_\nu$, se obtienen las ecuaciones:

$$\tilde{\nabla}_u \rho + (\rho + P)\theta = 0, \quad (2.4)$$

$$(\rho + P)a_b + (\tilde{g}_{ab} + u_a u_b)\tilde{\nabla}^a P = 0. \quad (2.5)$$

El coeficiente θ suele llamarse *coeficiente de expansión*, mientras que a es el campo vectorial de aceleración del fluido.

Por otro lado, definiendo $k := 8\pi G$, y tomando en cuenta las ecuaciones (2.1) y (2.3), la primera ecuación de (2.2) se escribe como:

$$-\frac{2}{r}(\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r)^{tf} = k(\rho + P)(u_a u_b + \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}), \quad (2.6)$$

$$\frac{2}{r^2} \left[r\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r - (1 - N) \right] = -k(\rho + P), \quad (2.7)$$

donde el superíndice tf denota la parte sin traza de $\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r$. Agregando una ecuación de estado $\rho = \rho(P)$, el sistema (2.4 - 2.7) constituye el problema inmediato a resolver, donde las variables desconocidas son $\tilde{g}$, r , ρ , P y u .

El siguiente paso es elegir las coordenadas adecuadas para el estudio del colapso. Para la variedad $\tilde{M}$ es conveniente tomar un sistema de coordenadas (τ, R) lagrangianas, es decir, unas que sean *comóviles sincronizadas* para permitir el seguimiento de los elementos de fluido a lo largo de su evolución dinámica, ello implica que las curvas correspondientes a R constante sean trayectorias de dichos elementos. Siempre se puede hacer esta elección puesto que un corolario del Teorema de Frobenius [4] garantiza que para el campo vectorial $u \neq 0$ definido en $\tilde{M}$ siempre existen dos funciones f y h tales que puede escribirse $u^a = f\tilde{\nabla}^a h$. Luego u^a debe ser ortogonal a las superficies de h constante, entonces se identifica a la coordenada temporal τ con la función $-h$ y la radial R , como ya se dijo, es tal que las curvas de R constante son las trayectorias de las partículas.

En estas coordenadas la forma que se propone para la métrica y la cuadrivelocidad es la siguiente:

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= -e^{2\phi(\tau, R)} d\tau^2 + \frac{1}{\gamma(\tau, R)^2} dR^2, \\ u &= e^{-\phi(\tau, R)} \frac{\partial}{\partial \tau}, \end{aligned}$$

donde $\phi(\tau, R)$ y $\gamma(\tau, R)$ son funciones por determinar. Nótese que aún queda la libertad de re-definir las coordenadas mediante transformaciones $\tau \rightarrow \tilde{\tau}(\tau)$ y $R \rightarrow \tilde{R}(R)$, sin embargo (τ, R) quedan fijas cuando se establecen las condiciones:

$$\begin{aligned} r(\tau = 0, R) &= R, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \phi(\tau, R) &= 0. \end{aligned}$$

Ambas son naturales, pues la primera significa que al inicio del colapso la coordenada radial R se identifica con el radio de área inicial de la partícula en cuestión. La segunda garantiza que asintóticamente la traslación temporal coincide con la del espacio-tiempo de Minkowski.

A estas alturas se hace necesario también precisar un concepto de masa para el modelo que se está construyendo. Se usará el que sigue.

Definición 2.2.1 Sea $m : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $m(x^a) := \frac{r}{2}(1 - N)$, con $N = r^d r_d = \tilde{g}^{ab}(\tilde{\nabla}_a r)(\tilde{\nabla}_b r)$. La función m se llama Masa de Misner-Sharp [5].

La definición anterior se motiva de la relación existente entre N y la masa de Schwarzschild: $N = 1 - \frac{2m}{r}$, de tal manera que en el vacío ambas coinciden.

Proposición 2.2.1 La masa de Misner-Sharp cumple con:

$$\tilde{\nabla}_a m = \frac{k}{2} r^2 \rho (r_a + u_a u_b r^b) + \frac{k}{2} r^2 P u_a u_b r^b$$

Notar que la proposición anterior es consistente con el hecho de que si $\rho = 0 = P$, entonces se tiene $\tilde{\nabla}_a m = 0$ y por lo tanto m constante, lo cual debe ser así porque en este caso la única solución es la de Schwarzschild.

Demostración. Partiendo de la definición de la masa de Misner-Sharp:

$$2\tilde{\nabla}_a m = \tilde{\nabla}_a [r(1 - N)] = r_a(1 - N) - r\tilde{\nabla}_a N,$$

como $\tilde{\nabla}_a N = 2r^b \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r$, entonces:

$$2\tilde{\nabla}_a m = r_a(1 - N) - 2r r^b \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r,$$

ahora se descompone $\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r$ en sus partes con y sin traza:

$$2\tilde{\nabla}_a m = r_a(1 - N) - 2r r^b [(\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r)^{tf} + \frac{1}{2} \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r],$$

se ha re-escrito la igualdad quitando la traza de este término y volviendo a sumarla. Ahora se usan las ecuaciones (2.6 - 2.7) y se obtiene:

$$\begin{aligned} 2\tilde{\nabla}_a m &= r_a(1 - N) - 2r r^b \left[-\frac{kr}{2}(\rho + P)(u_a u_b + \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab}) + \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} \left(\frac{1 - N}{r} - \frac{kr}{2}(\rho - P) \right) \right] \\ &= kr^2 \rho (u_a u_b r^b + r^a) + kr^2 P u_a u_b r^b \quad \mathbf{QED.} \end{aligned}$$

Una vez provistos los ingredientes necesarios, se está en posición de tomar la métrica propuesta $\tilde{g}$ y la cuadrivelocidad u y usarlas en la ecuación anterior y además en las ecuaciones provenientes de (2.4-2.7). El resultado es el siguiente sistema:

$$\theta = \frac{\gamma}{r^2} \left(\frac{r^2}{\gamma} \right) \cdot, \quad (2.8)$$

$$a_\tau = 0, \quad (2.9)$$

$$a_R = \phi', \quad (2.10)$$

$$\dot{\rho} + (\rho + P) \frac{\gamma}{r^2} \left(\frac{r^2}{\gamma} \right) \cdot = 0, \quad (2.11)$$

$$P' + (\rho + P)\phi' = 0, \quad (2.12)$$

$$\dot{m} = -\frac{k}{2} r^2 \dot{r} P, \quad (2.13)$$

$$m' = \frac{k}{2} r^2 r' \rho, \quad (2.14)$$

$$\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} = -\frac{(\dot{r})'}{r'}, \quad (2.15)$$

$$\gamma \left(\frac{\dot{r}}{\gamma} \right) \cdot - \frac{\gamma}{e^\phi} (\gamma e^\phi r')' + \frac{2m}{r^2} = \frac{kr}{2} (\rho - P), \quad (2.16)$$

$$\ddot{r} = -\frac{m}{r^2} + \gamma^2 r' \phi' - \frac{kr}{2} P, \quad (2.17)$$

$$N = 1 - \frac{2m}{r} = -\dot{r}^2 + \gamma^2 r'^2, \quad (2.18)$$

donde el punto denota la operación $e^{-\phi} \frac{\partial}{\partial \tau}$ y el apóstrofe $\frac{\partial}{\partial R}$.

De la última resultará muy útil definir:

$$\Gamma^2 := 1 - \frac{2m}{r} + \dot{r}^2,$$

de donde resulta que $\gamma^2 = \frac{\Gamma^2}{r'^2}$.

Además no todas las demás ecuaciones son independientes, por ejemplo puede usarse la razón (2.15) para eliminar $\dot{\gamma}$ del sistema. En resumen el sistema de ecuaciones independientes son las siguientes:

$$\ddot{r} = -\frac{m}{r^2} + \Gamma^2 \frac{\phi'}{r'} - \frac{k}{2} r P \quad (2.19)$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho + P} = -\frac{2\dot{r}}{r} - \frac{(\dot{r})'}{r'} \quad (2.20)$$

$$m' = \frac{k}{2} r^2 r' \rho \quad (2.21)$$

$$\dot{m} = -\frac{k}{2} r^2 \dot{r} P \quad (2.22)$$

$$\phi' = -\frac{P'}{\rho + P}, \quad (2.23)$$

$$(2.24)$$

con

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= 1 - \frac{2m}{r} + \dot{r}^2, \\ \dot{\Gamma} &= \Gamma \dot{r} \frac{\phi'}{r'}, \end{aligned}$$

Como último ingrediente, este sistema requiere de una ecuación de estado:

$$P = P(\rho).$$

Por último la expresión para la métrica resulta ser:

$$g = -e^{2\phi(\tau, R)} d\tau^2 + \left(\frac{r'(\tau, R)}{\Gamma(\tau, R)} \right)^2 dR^2 + r(\tau, R)^2 \hat{g}, \quad (2.25)$$

con la cuadrivelocidad $u = e^{-\phi(\tau, R)} \frac{\partial}{\partial \tau}$, donde se pide que la función $\phi(\tau, R)$ sea tal que $\phi(\tau, R) \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$.

Es importante ahora mencionar que un resultado sumamente fuerte para espacios esféricamente simétricos es el enunciado y probado por G. D. Birkhoff en 1923 [4], el cual garantiza que la única solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío alrededor de una distribución de masa esféricamente simétrica es la métrica de Schwarzschild. Entonces la métrica (2.25) fuera de la nube de polvo necesariamente debe reducirse a la de Schwarzschild.

En conclusión a este capítulo se tiene que el problema concreto a resolver es el sistema (2.19) - (2.23), conocidas como ecuaciones de Misner-Sharp [5]. En el siguiente capítulo se dan los datos iniciales necesarios para emprender esta empresa.

Capítulo 3

Colapso gravitacional de una nube de polvo

En el presente capítulo se estudian las generalidades del colapso en simetría esférica de un fluido perfecto muy particular: el polvo, que se define matemáticamente en esta primera sección. En esta misma se obtiene la solución analítica completa para las ecuaciones que describen el colapso bajo ciertas suposiciones razonables sobre la densidad de masa. La segunda sección está dedicada al estudio de las propiedades generales de la solución, analizando a detalle la trayectoria de las partículas, la singularidad central y el horizonte aparente. En la tercera sección se estudia la censura cósmica de la singularidad. En la última sección se presenta el estudio cuidadoso de un caso particular que vale la pena tratar porque resulta didáctico y todos los resultados pueden obtenerse analíticamente. Ese caso es aquel en que la densidad de materia de la estrella es uniforme y la velocidad inicial de las partículas es nula.

Para comenzar en la tarea de obtener la solución a las ecuaciones, considérense las ecuaciones dinámicas para un fluido perfecto en simetría esférica (2.19-2.19) obtenidas en el capítulo anterior.

En la presente sección se analiza un caso particular de materia. Se define el *polvo* como un fluido perfecto con presión nula: $P = 0$ en toda su extensión. Las ecuaciones dinámicas en este caso se reducen a:

$$\ddot{r} = -\frac{m}{r^2} \quad (3.1)$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{2\dot{r}}{r} - \frac{(\dot{r})'}{r'} \quad (3.2)$$

$$m' = \frac{k}{2} r^2 r' \rho \quad (3.3)$$

$$\dot{m} = 0 \quad (3.4)$$

$$\phi' = 0, \quad (3.5)$$

y son precisamente éstas las que describen el colapso gravitacional para el polvo,

ahora con

$$\begin{aligned}\Gamma^2 &= 1 - \frac{2m}{r} + \dot{r}^2, \\ \dot{\Gamma} &= 0.\end{aligned}$$

Además cabe aclarar que $P = 0$ constituye por sí misma la ecuación de estado.

3.1. La solución analítica de las ecuaciones dinámicas

Las soluciones a las ecuaciones del caso de interés pueden obtenerse analíticamente. Para hacerlo nótese primero que (3.4) implica que m sólo es una función de R , es decir $m = m(R)$. Ahora, suponiendo que al tiempo $\tau = 0$ se tiene como dato inicial un perfil de densidad $\rho(\tau = 0, R) := \rho_0(R)$, la ecuación (3.3) al tiempo inicial indica que $m(R) = \int_0^R \frac{k}{2} \bar{R}^2 \rho_0(\bar{R}) d\bar{R}$, pues también se supone que $r(\tau = 0, R) = R$, es decir: el radio de área coincide inicialmente con el radio R del cascarón esférico en cuestión. De ahí que $r'(0, R) = 1$.

Enseguida se despeja $\rho(\tau, R)$ de (3.3), y en virtud de que $m'(R) = \frac{k}{2} R^2 \rho_0(R)$, se tiene que $\rho(\tau, R) = \rho_0(R) \frac{R^2}{r^2(\tau, R) r'(\tau, R)}$.

Por otro lado (3.5) implica que $\phi = \phi(\tau)$, pero al construir las coordenadas comóviles sincronizadas en el capítulo anterior se pidió que $\lim_{R \rightarrow \infty} \phi(\tau, R) = 0$. Como ϕ es independiente de R se concluye que $\phi(\tau) = 0$ para todo τ . Notar que si ϕ es cero, el coeficiente de $d\tau^2$ en la métrica es -1 , lo cual significa que τ mide el tiempo propio del cascarón esférico en cuestión.

Finalmente considérese $\dot{\Gamma} = 0$; ello implica que $\Gamma = \Gamma(R)$. Por otra parte se tiene que $\Gamma^2 = 1 - \frac{2m(R)}{r(\tau, R)} + \dot{r}(\tau, R)^2$. Evaluando esto último en $\tau = 0$ se obtiene $\Gamma^2 = 1 - \frac{2m(R)}{R} + V_0(R)^2$, donde $V_0(R) := \dot{r}(\tau = 0, R)$ es otro dato inicial. Es razonable pedir $V_0 \leq 0$ puesto que las partículas se dirigen hacia el centro de la nube. Así se concluye que $\dot{r}(\tau, R)^2 - \frac{2m(R)}{r(\tau, R)} = V_0(R)^2 - \frac{2m(R)}{R}$. Definiendo por último $E(R) := \frac{1}{2} V_0(R)^2 - \frac{m(R)}{R}$, los resultados se resumen como sigue:

$$m(R) = \int_0^R \frac{k}{2} \bar{R}^2 \rho_0(\bar{R}) d\bar{R} \quad (3.6)$$

$$\rho(\tau, R) = \rho_0(R) \frac{R^2}{r^2(\tau, R) r'(\tau, R)} \quad (3.7)$$

$$\phi(\tau) = 0 \quad (3.8)$$

$$E(R) = \frac{1}{2} \dot{r}(\tau, R)^2 - \frac{m(R)}{r(\tau, R)}. \quad (3.9)$$

Lo cual es consistente con el sistema (3.1 - 3.5). En este caso la cuatrivelocidad se

reduce a $u = \frac{\partial}{\partial \tau}$ y la métrica resulta ser:

$$g = -d\tau^2 + \left(\frac{r'(\tau, R)}{\Gamma(R)} \right)^2 dR^2 + r(\tau, R)^2 \hat{g}, \quad (3.10)$$

donde

$$\Gamma^2 = 1 - \frac{2m(R)}{R} + V_0(R)^2 = 1 + 2E(R).$$

Es muy importante tener en mente que la única componente no nula del tensor de energía-impulso correspondiente al polvo es proporcional a la densidad de materia, esto puede verse de la ecuación (2.3) con $P = 0$. Entonces las Ecuaciones de Einstein predicen una singularidad geométrica cuando $\rho(\tau, R)$ diverja, pues si $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$, entonces $G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = T^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = -\rho^2$.

Ahora de la ecuación (3.7) puede inferirse que $\rho(\tau, R) \rightarrow \infty$ cuando $\bar{r}(\tau, R) \rightarrow 0$ ó bien cuando $r'(\tau, R) \rightarrow 0$. El primer caso genera una singularidad conocida en la literatura como *singularidad central*, provocada por la aglomeración de todos los cascarones esféricos de materia en el centro de la estrella, lo cual suele designarse con el término anglosajón *shell-focusing*. En cambio el segundo caso genera una *singularidad de cruzamiento*, llamada así porque es provocada por un cruzamiento de cascarones esféricos de materia durante el colapso, lo que se conoce como *shell-crossing*. Esto se precisa a continuación: dados inicialmente dos cascarones, el primero a una distancia de la singularidad R_1 y el segundo a una distancia R_2 , tales que $R_2 > R_1$, se dice que ocurre el *cruzamiento de cascarones* si para algún tiempo τ ocurre que $r(\tau, R_2) = r(\tau, R_1)$. Dado que inicialmente se pide $r(0, R) = R$ para toda R , es claro que la función $r(\tau, R)$ es creciente. Entonces no habrá dicho cruzamiento si y sólo si la función se mantiene creciente, es decir $r'(\tau, R) > 0$ para toda τ . Enseguida surge una pregunta natural: ¿Cuáles son las condiciones sobre los datos iniciales para que no haya cruzamiento de cascarones a lo largo del colapso? La respuesta se investiga un poco más adelante. Por lo pronto valga anunciar que en el presente trabajo se estudiarán exclusivamente las singularidades centrales y quedarán excluidas las de cruzamiento.

Por lo pronto es importante señalar que la ecuación clave para obtener la solución al problema es (3.9), que claramente corresponde al problema de la mecánica clásica para una partícula con cierta energía en un potencial central. La estrategia es la siguiente: dados los datos iniciales

$$\begin{aligned} r(0, R) &= R, \\ \dot{r}(0, R) &= V_0(R), \\ \rho(0, R) &= \rho_0(R) \geq 0, \end{aligned}$$

se calcula primero $m(R)$ integrando (3.6), luego se integra (3.9) para obtener $r(\tau, R)$ y finalmente se calcula $\rho(\tau, R)$ de (3.7).

La integración de (3.9) comienza escribiendo esta misma como (omitiendo la dependencia de las funciones por simplicidad)

$$\dot{r} = -\sqrt{2m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + V_0^2},$$

donde se elige el signo negativo delante de la raíz para establecer que las partículas de polvo se dirigen hacia el centro de la estrella al colapsar ésta. Después de un poco de álgebra se llega a:

$$-\sqrt{\frac{2m}{R}} d\tau = \frac{dr}{\sqrt{\frac{R}{r} - p}}, \quad (3.11)$$

donde se ha definido $p := \frac{E(R)}{V(R)}$ con la función de potencial $V(R) := -\frac{m(R)}{R}$, de tal manera que $p = 1 - \frac{RV_0^2}{2m}$. Notar que cuando $V_0 = 0$, se tiene $p = 1$. Además en este trabajo se asume que siempre las partículas de polvo se encuentran en un estado ligado, es decir $E(R) < 0$, lo cual implica que $0 < p$. Por lo tanto se asume $0 < p \leq 1$.

Para efectuar la integración se introduce una nueva variable β tal que $\frac{r}{R}p = \cos^2\beta$, de tal manera que $\frac{R}{r} - p = p \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$. Además $dr = \frac{-2R\cos\beta\sin\beta d\beta}{p}$. Entonces (3.11) se reescribe como:

$$p^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2m}{R^3}} d\tau = 2\cos^2\beta d\beta.$$

Integrando de $\beta_0 := \beta(r = R) = \text{Arccos}\sqrt{p}$ a $\beta(r) = \text{Arccos}\sqrt{p\frac{r}{R}}$:

$$\begin{aligned} p^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2m}{R^3}} \tau &= (\cos\beta\sin\beta + \beta) \Big|_{\beta_0}^{\beta(r)} \\ &= \cos\beta\sin\beta + \beta - (\cos\beta_0\sin\beta_0 + \beta_0) \\ &= \left[\sqrt{p\frac{r}{R}} \sqrt{1 - p\frac{r}{R}} + \text{Arccos}\sqrt{p\frac{r}{R}} \right] - \left[\sqrt{p} \sqrt{1 - p} + \text{Arccos}\sqrt{p} \right]. \end{aligned}$$

Sea $F : [0, 1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow [0, \frac{\pi}{2}] \subset \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \sqrt{x}\sqrt{1-x} + \text{Arccos}\sqrt{x}$. Notar que $F(0) = \frac{\pi}{2}$ y $F(1) = 0$, además F es monótonamente decreciente. En términos de ésta se tiene:

$$\sqrt{\frac{2mp^3}{R^3}} \tau = F\left(p\frac{r}{R}\right) - F(p). \quad (3.12)$$

Notar que F es uno a uno en su dominio, precisamente por ser monótonamente decreciente, entonces existe su inversa F^{-1} , y puede despejarse:

$$r(\tau, R) = \frac{R}{p} \left[F^{-1} \left(F(p) + \sqrt{\frac{2m(R)p(R)^3}{R^3}} \tau \right) \right].$$

Hasta ahora se ha especificado completamente la solución al problema de describir analíticamente el colapso gravitacional del polvo en simetría esférica, pues se conocen $r(\tau, R)$, $m(R)$, $\rho(\tau, R)$ y la función métrica $\phi(\tau)$.

3.2. Propiedades de la solución

Enseguida se hace un análisis de varios aspectos de la solución recién obtenida. Para simplificar la notación y los cálculos posteriores se definen un par de nuevas funciones:

$$\begin{aligned} c(R) &:= \frac{2m(R)}{R^3} \geq 0, \\ \bar{r}(\tau, R) &:= \frac{r(\tau, R)}{R}, \quad 0 \leq \bar{r}(\tau, R) \leq 1. \end{aligned}$$

Notar que $c(R)$ es proporcional a la densidad promedio de materia en un cascarón de radio R , pues ésta se define por $\bar{\rho} = \frac{m(R)}{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

Ahora se pretende escribir todas las ecuaciones en términos solamente de $c(R)$ y $\bar{r}$. Es incluso conveniente poner al perfil de velocidad inicial en términos de c y p . Como $p = 1 - \frac{RV_0^2}{2m} = 1 - \frac{V_0^2}{cR^2}$, entonces $V_0^2 = cR^2 - cpR^2$, de tal forma que la solución para $\bar{r}(\tau, R)$ y $\Gamma(R)$ se escribe:

$$\begin{aligned} \bar{r}(\tau, R) &= \frac{1}{p} \left[F^{-1} \left(F(p) + \sqrt{c(R)p(R)^3} \tau \right) \right], \\ \Gamma(R)^2 &= 1 - c(R)p(R)R^2. \end{aligned}$$

Como herramienta para las secciones siguientes también conviene estudiar las primeras dos derivadas de la función F :

$$F'(x) = -\sqrt{\frac{x}{1-x}}.$$

Notar que $F' : [0, 1) \subset \mathbb{R} \longrightarrow [0, -\infty) \subset \mathbb{R}$, en otras palabras $F'(x) \leq 0$ para toda x y F' diverge para $x = 1$. Enseguida puede calcularse la segunda derivada:

$$F''(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)^3}} \leq 0 \text{ para } 0 < x < 1,$$

En este caso $F''(x) < 0$ para toda x , es decir F es cóncava, pues $F'' : (0, 1) \subset \mathbb{R} \longrightarrow [-\frac{8}{\sqrt{27}}, -\infty) \subset \mathbb{R}$, lo cual puede comprobarse calculando $F'''(x) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{x^3(1-x)^3}} - \frac{3}{\sqrt{x(1-x)^5}} \right]$ y calculando la raíz de $F'''(x) = 0$, que resulta ser $x = \frac{1}{4}$, luego $F''(\frac{1}{4}) = -\frac{8}{\sqrt{27}}$.

3.2.1. La trayectoria de las partículas

El objetivo es mostrar propiedades de la solución en un diagrama (R, τ) . Naturalmente la primera pregunta es ¿cómo se ve en estas coordenadas la trayectoria hacia la singularidad de una partícula que inicialmente se encuentra en un cascarón esférico de radio R ? Una vez que se conoce la función de radio de área, puede despejarse $\tau(R)$:

$$\tau(R) = \frac{1}{\sqrt{cp^3}} [F(\bar{r}p) - F(p)], \quad (3.13)$$

donde se han omitido las dependencias de las funciones $c(R)$, $p(R)$ y $\bar{r}(R)$ para simplificar la notación.

De antemano es de esperarse que estas trayectorias sean líneas rectas verticales en el diagrama (R, τ) , pues se trata de coordenadas comóviles sincronizadas, es decir, se está siguiendo a las partículas desde su marco de referencia comóvil, por lo tanto su posición espacial es siempre la misma y el tiempo que se mide en ese marco es el tiempo propio.

3.2.2. Condiciones para evitar la singularidad de cruzamiento

Como se mencionó en la sección (3.1), en el colapso gravitacional más genérico tiene lugar un fenómeno importante que consiste en el cruzamiento de cascarones esféricos, se explicó el fenómeno y se concluyó que no hay tal cruzamiento sí y sólo si $r'(\tau, R) > 0$ para toda τ . Como en este trabajo no hay interés por tal fenómeno, enseguida se investigan las condiciones sobre los datos iniciales para evitar este tipo de singularidad.

Considérese la ecuación (3.12) en términos de $c(R)$ y $\bar{r}(\tau, R)$:

$$\sqrt{cp^3}\tau = F(p\bar{r}) - F(p).$$

Derivando con respecto a R a ambos lados y simplificando un poco se obtiene:

$$\begin{aligned} r'(\tau, R) &= \bar{r}(\tau, R) + \frac{R}{pF'(p\bar{r})} \left[p' \left(F'(p) + \frac{3}{2}\sqrt{cp}\tau - \bar{r}F'(p\bar{r}) \right) + \frac{c'}{2}\sqrt{\frac{p^3}{c}}\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Si esto último es positivo, entonces no habrá *shell-crossing*, pero antes de verificar que así es, se probará un resultado muy útil:

Lema 3.2.1 Sean $0 \leq \bar{r} \leq 1$ y $0 < p < 1$, entonces

$$F'(p) + \frac{3}{2p} [F(\bar{r}p) - F(p)] - \bar{r}F'(\bar{r}p) \leq 0. \quad (3.15)$$

Demostración. Sea $0 \leq \bar{r} \leq 1$ fija y $z(p) := F(\bar{r}p) - F(p)$. Notar que $\frac{dz}{dp}(p) = F'(\bar{r}p)\bar{r} - F'(p)$ y $\frac{d^2z}{dp^2}(p) = F''(\bar{r}p)\bar{r}^2 - F''(p)$. No es difícil comprobar que

$$F'(p) + \frac{3}{2p} [F(\bar{r}p) - F(p)] - \bar{r}F'(\bar{r}p) = \frac{-1}{2p} \left(2p \frac{dz}{dp}(p) - 3z(p) \right). \quad (3.16)$$

Ahora definase $X(p) := 2p \frac{dz}{dp}(p) - 3z(p)$. Notar que (3.15) es equivalente a $X(p) \geq 0$. La idea es la siguiente: como $X(0) = 0$, si acaso $\frac{dX}{dp}(p) \geq 0$ para $p > 0$, entonces $X(p)$ es monótonamente creciente y por lo tanto $X(p) \geq 0$ para $p \geq 0$. A continuación se describe la prueba explícita:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dp}(p) &= 2p \frac{d^2z}{dp^2}(p) - \frac{dz}{dp}(p) \\ &= 2p [F''(\bar{r}p)\bar{r}^2 - F''(p)] - [F'(\bar{r}p)\bar{r} - F'(p)] \\ &= 2p \left[\frac{-\bar{r}^2}{2\sqrt{\bar{r}p(1-\bar{r}p)^3}} + \frac{1}{2\sqrt{p(1-p)^3}} \right] + \frac{\bar{r}^2p}{\sqrt{\bar{r}p(1-\bar{r}p)}} - \frac{p}{\sqrt{p(1-p)}} \\ &= p^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{(1-p)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\bar{r}^{\frac{5}{2}}}{(1-\bar{r}p)^{\frac{3}{2}}} \right]. \end{aligned}$$

Como $r \leq R$, entonces $\frac{r}{R} = \bar{r} \leq 1$ y $\bar{r}^{\frac{5}{2}} \leq 1$. Por otro lado $p \geq 0$ y $\bar{r} \leq 1$ implican que $\bar{r}p \leq p$, luego $\frac{1}{(1-p)^{\frac{3}{2}}} \geq \frac{1}{(1-\bar{r}p)^{\frac{3}{2}}}$. Combinando esto con $1 \geq \bar{r}^{\frac{5}{2}}$ se concluye que:

$$\frac{1}{(1-p)^{\frac{3}{2}}} \geq \frac{\bar{r}^{\frac{5}{2}}}{(1-\bar{r}p)^{\frac{3}{2}}},$$

lo cual demuestra que $\frac{dX}{dp}(p) \geq 0$ para $p > 0$. **QED.**

Ahora se tienen las herramientas para probar la siguiente

Proposición 3.2.1 *Supóngase que $c' \leq 0$ y $p' \geq 0$. Entonces $r'(\tau, R) > 0$ para todo $0 < \bar{r} \leq 1$ y $0 < p \leq 1$.*

La suposición $c' \leq 0$ es físicamente razonable, pues se ha visto que c es proporcional a la densidad promedio de materia $\bar{\rho} > 0$, entonces $c' \leq 0$ equivale a pedir que la estrella sea menos densa en regiones cada vez más lejanas al centro.

La otra suposición, $p' \geq 0$, es razonable puesto que el potencial $V(R)$ de una partícula decrece cuando ésta se encuentra más lejos del centro de la estrella, entonces la razón $p = \frac{E(R)}{V(R)}$ debe ser creciente.

Demostración. Caso 1) $p = 1$. En este caso, el cual corresponde a la situación particular en que las partículas de polvo se encuentran inicialmente en reposo, puede verse directamente de la ecuación (3.14) que:

$$r'(\tau, R) = \bar{r} + \frac{R}{F'(\bar{r})} \left(\frac{c'}{2\sqrt{c}} \tau \right) > 0,$$

pues $1/F'(x) \leq 0$ para toda $x \in [0, 1)$.

Caso 2) $0 < p < 1$. Inspeccionando (3.14) se concluye que $r'(\tau, R) > 0$ siempre que

$$F'(p) + \frac{3cp^2}{2\sqrt{cp^3}}\tau - \bar{r}F'(p\bar{r}) \leq 0.$$

Usando (3.13) lo anterior se traduce en:

$$F'(p) + \frac{3}{2p} [F(\bar{r}p) - F(p)] - \bar{r}F'(\bar{r}p) \leq 0,$$

pero justamente el Lema (3.2.1) garantiza que así sucede. **QED**.

Hasta ahora se tienen condiciones suficientes ($c' \leq 0$ y $p' \geq 0$) para que evitar el *shell-crossing*, sin embargo no puede afirmarse que $r' > 0$ implica $c' \leq 0$ y $p' \geq 0$. Esto puede notarse al considerar nuevamente la ecuación (3.14). Como $F'(x) \leq 0$ para toda $0 \leq x < 1$, $r' > 0$ es equivalente a:

$$p' \left[F'(p) + \frac{3cp^2}{2\sqrt{cp^3}}\tau - \bar{r}F'(p\bar{r}) \right] + \frac{c'p^3}{2\sqrt{cp^3}}\tau + \frac{p\bar{r}}{R}F'(p\bar{r}) < 0.$$

Enseguida considérese el límite en que $\tau \rightarrow \tau_s = \frac{\frac{\pi}{2} - F(p)}{\sqrt{cp^3}}$. En tal caso $\bar{r} \rightarrow 0$ y la desigualdad anterior se reduce a:

$$p' \left[F'(p) + \frac{3}{2p} \left(\frac{\pi}{2} - F(p) \right) \right] + \frac{c'}{2c} \left(\frac{\pi}{2} - F(p) \right) \leq 0. \quad (3.17)$$

Por otro lado se tiene que $0 < F(p) \leq \frac{\pi}{2}$, entonces $\frac{\pi}{2} - F(p) \geq 0$ y $\frac{c'}{2c} \left(\frac{\pi}{2} - F(p) \right) \leq 0$. Pero la desigualdad (3.17) puede cumplirse sin que necesariamente $p' \geq 0$. Lo más que puede decirse es que para c' suficientemente pequeño debe suceder que $p' \geq 0$.

Reiterando que en este trabajo no hay interés por las singularidades de cruzamiento, y conociendo la condición suficiente para que no ocurra tal fenómeno, ahora puede continuarse con el estudio de las singularidades centrales.

3.2.3. La singularidad central

La siguiente pregunta es ¿cuál es el tiempo propio que tarda una partícula en alcanzar la singularidad si inicialmente se encuentra en un cascararón esférico de radio R ?, ¿cómo se ve la gráfica de esa función para toda R dentro de la estrella? La respuesta se obtiene al tomar la ecuación (3.13) y evaluar en $\bar{r} = 0$, pues la singularidad se

alcanza precisamente en bajo esa condición.

Si se denota con $\tau_s := \tau(R)$ tal que $\bar{r} = 0$ se obtiene:

$$\tau_s(R) = \frac{1}{\sqrt{cp^3}} \left[\frac{\pi}{2} - F(p) \right]. \quad (3.18)$$

Proposición 3.2.2 *Si $c' \leq 0$ y $p' \geq 0$ entonces $\tau_s(R)$ es una función monótonamente creciente, es decir,*

$$\frac{d\tau_s}{dR}(R) \geq 0, \quad R > 0$$

Demostración. El problema puede dividirse en dos casos: 1) $p = 1$ y 2) $0 < p < 1$.

Caso 1) Cuando $p = 1$ (lo cual corresponde a $V_0(R) = 0$ para toda R , es decir, la nube se encuentra inicialmente en reposo), $F(p) = 0$ y $\tau_s(R) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{c}}$, luego

$$\frac{d\tau_s}{dR} = -\frac{\pi}{4} \frac{c'}{c^{\frac{3}{2}}},$$

lo anterior es positivo o cero e virtud de que $c' \leq 0$.

Caso 2) Cuando $0 < p < 1$ se tiene:

$$\frac{d\tau_s}{dR} = \frac{1}{cp^3} \left[-F'(p)p'\sqrt{cp^3} - \left(\frac{\pi}{2} - F(p) \right) \frac{(cp^3)'}{2\sqrt{cp^3}} \right],$$

que después de un poco de álgebra toma la siguiente forma:

$$\frac{d\tau_s}{dR} = -\frac{1}{\sqrt{cp^3}} \left[p' \left(F'(p) + \frac{3}{2p} \left(\frac{\pi}{2} - F(p) \right) \right) + \frac{c'}{2c} \left(\frac{\pi}{2} - F(p) \right) \right].$$

Considerando la tesis del Lema (3.2.1) en particular cuando se alcanza la singularidad, es decir $\bar{r} = 0$, se tiene que:

$$F'(p) + \frac{3}{2p} \left(\frac{\pi}{2} - F(p) \right) \leq 0,$$

además $\frac{\pi}{2} - F(p) > 0$, $c \geq 0$ y $c' \leq 0$ implican que el segundo término entre corchetes es negativo o nulo. Agregando que $p' \geq 0$ y $\sqrt{cp^3} > 0$ se concluye que $\frac{d\tau_s}{dR} \geq 0$. **QED.**

Enseguida se investiga el comportamiento de τ_s para R cercana al origen. Esto será útil un poco más adelante para estudiar la censura cósmica de la singularidad central.

Para comenzar se supone que las funciones $p(R)$ y $c(R)$ tienen expansiones en serie de Taylor alrededor de $R = 0$ y que satisfacen condiciones de regularidad en el origen, es decir que no contienen potencias impares de R :

$$\begin{aligned} p(R) &= p(0) + \frac{1}{2}p''(0)R^2 + O(R^4) := p_0 + \frac{1}{2}p_0''R^2 + O(R^4), \\ c(R) &= c(0) + \frac{1}{2}c''(0)R^2 + O(R^4) := c_0 + \frac{1}{2}c_0''R^2 + O(R^4), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} p_0 &> 0, \\ p_0'' &\geq 0, \\ c_0 &\geq 0, \\ c_0'' &\leq 0. \end{aligned}$$

El análisis puede dividirse en dos casos: 1) $p_0 = 1$, que implica $p = 1$, pues p es creciente, pero no puede ir más allá de 1, y 2) $0 < p_0 < 1$.

En el caso 1) se tiene $F(p) = 0$ y $\tau_s(R) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{c}}$, luego τ_s se expande como:

$$\begin{aligned} \tau_s(R) &= \frac{\pi}{2} \left(c_0 + \frac{1}{2}c_0''R^2 + O(R^4) \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{c_0}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{c_0''}{c_0} R^2 + O(R^4) \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

En el caso 2), $0 < p_0 < 1$. Se sabe que F es analítica y su expansión en serie de Taylor alrededor de p_0 se escribe:

$$\begin{aligned} F(p) &= F(p_0) + F'(p_0)(p - p_0) + O(p - p_0)^2 \\ &= F(p_0) + F'(p_0) \left(\frac{1}{2}p_0''R^2 + O(R^4) \right) + O(R^4) \\ &= F(p_0) + \frac{1}{2}p_0''F'(p_0)R^2 + O(R^4), \end{aligned}$$

Ahora por separado:

$$\begin{aligned} p^3 &= p_0^3 + \frac{3}{2}p_0^2p_0''R^2 + O(R^4), \\ cp^3 &= c_0p_0^3 + \frac{p_0^2}{2}(3c_0p_0'' + c_0''p_0)R^2 + O(R^4), \\ \sqrt{cp^3} &= \sqrt{c_0p_0^3} \left(1 + \frac{1}{4c_0p_0} (3c_0p_0'' + c_0''p_0) R^2 + O(R^4) \right). \end{aligned}$$

Entonces τ_s tiene la siguiente expansión:

$$\begin{aligned}
\tau_s(R) &= \frac{1}{\sqrt{cp^3}} \left[\frac{\pi}{2} - F(p) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{c_0 p_0^3}} \left(\frac{\pi}{2} - F(p_0) - \frac{1}{2} p_0'' F'(p_0) R^2 + O(R^4) \right) \left(1 + \frac{1}{4c_0 p_0} (3c_0 p_0'' + c_0'' p_0) R^2 + O(R^4) \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{c_0 p_0^3}} \left(\frac{\pi}{2} - F(p_0) - \frac{1}{2} p_0'' F'(p_0) R^2 + O(R^4) \right) \left(1 - \frac{1}{4c_0 p_0} (3c_0 p_0'' + c_0'' p_0) R^2 + O(R^4) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{c_0 p_0^3}} \left(\frac{\pi}{2} - F(p_0) - \left(\frac{\pi}{2} - F(p_0) \right) \frac{(3c_0 p_0'' + c_0'' p_0)}{4c_0 p_0} + \frac{1}{2} p_0'' F'(p_0) R^2 + O(R^4) \right).
\end{aligned}$$

Definiendo $\tau_s^0 = \frac{1}{\sqrt{c_0 p_0^3}} \left(\frac{\pi}{2} - F(p_0) \right)$:

$$\begin{aligned}
\tau_s(R) &= \tau_s^0 \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{3p_0''}{p_0} + \frac{c_0''}{c_0} + \frac{2p_0'' F'(p_0)}{\frac{\pi}{2} - F(p_0)} \right) R^2 + O(R^4) \right], \\
&= \tau_s^0 \left[1 + \frac{\sigma}{2} R^2 + O(R^4) \right],
\end{aligned} \tag{3.20}$$

donde

$$\frac{\sigma}{2} := -\frac{1}{4} \left(\frac{3p_0''}{p_0} + \frac{c_0''}{c_0} + \frac{2p_0'' F'(p_0)}{\frac{\pi}{2} - F(p_0)} \right).$$

Notar que de la Proposición 3.1 se sigue $\frac{\sigma}{2} \geq 0$. Este resultado, en conjunto con uno que se obtiene en la siguiente sub-sección, serán útiles más adelante.

Además el resultado es consistente con el caso en que $p = 1$, es decir $p_0 = 1$, pues $\frac{\sigma}{2} = -\frac{1}{4} \frac{c_0''}{c_0}$ y entonces la expansión para $\tau_s(R)$ coincide con (3.19).

3.2.4. El horizonte aparente

Dada la magnitud de los efectos gravitacionales en la región del espacio-tiempo donde ocurre el colapso, sucede que el radio de área de un rayo de luz que sigue una geodésica nula saliente -aunque no se diga explícitamente, a lo largo de todo el trabajo se hará referencia sólo a geodésicas nulas radiales- y que tiende a crecer, eventualmente deja de hacerlo, y precisamente el horizonte aparente se define como la hipersuperficie tal que $\frac{d}{d\tau} r(\tau, R) = 0$ a lo largo de curvas geodésicas nulas salientes. Haciendo explícita esta condición se tiene

$$0 = \frac{d}{d\tau} r(\tau, R) = \dot{r} \frac{d\tau}{dR} + r',$$

al tratarse de geodésicas nulas salientes, entonces $ds^2 = 0$, lo cual implica que $\frac{d\tau}{dR} = \frac{r'}{\Gamma}$, entonces la condición del horizonte aparente se vuelve:

$$\dot{r} + \Gamma = 0,$$

donde se ha supuesto que no hay *shell-crossing*, y por lo tanto $r' \neq 0$.

Recordando la relación de energía $\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{m}{r} = \frac{1}{2}V_0^2 - \frac{m}{R}$, se obtiene $\dot{r} = -\sqrt{V_0^2 + \frac{2m}{r} - \frac{2m}{R}}$, que en términos de c y p queda $\dot{r} = -\sqrt{\frac{cR^3}{r} - cpR^2}$. Por otro lado hay que recordar que $\Gamma = \sqrt{1 - cpR^2}$. Entonces la condición que define al horizonte aparente es:

$$-\sqrt{\frac{cR^3}{r} - cpR^2} + \sqrt{1 - cpR^2} = 0,$$

la cual se satisface cuando $\frac{cR^3}{r} = 1$. Sea $\tau_{ah}(R)$ la función que devuelve el tiempo propio que tarda en alcanzar el horizonte aparente una partícula que inicialmente se encuentra en un cascarón esférico de radio R . $\tau_{ah}(R) := \tau(R)$ tal que $\frac{cR^3}{r} = 1$, esto puede obtenerse de la ecuación (3.13) con $\bar{r} = \frac{r}{R} = cR^2$:

$$\tau_{ah}(R) = \frac{1}{\sqrt{cp^3}} [F(cpR^2) - F(p)].$$

Notar que en $R = 0$, $\tau_{ah} = \tau_s$, en cambio para $R > 0$, $\tau_{ah} < \tau_s$ -ver la ecuación (3.18)-. Para estudiar el comportamiento de τ_{ah} cerca de $R = 0$ se vuelven a tomar las expansiones en serie de Taylor para la $p(R)$ y $c(R)$ con las correspondientes condiciones de regularidad en el origen de coordenadas. Hasta ahora se tienen:

$$\begin{aligned} F(p) &= F(p_0) + \frac{1}{2}p_0''F'(p_0)R^2 + O(R^4), \\ \sqrt{cp^3} &= \sqrt{c_0p_0^3} \left(1 + \frac{1}{4c_0p_0} (3c_0p_0'' + c_0''p_0) R^2 + O(R^4) \right). \end{aligned}$$

Sin embargo es más sencillo determinar la expansión de $F(cpR^2)$ si primero se define la nueva función $h(R) := F(cpR^2)$ y luego se expande ésta. Para ello hay que notar que $h(0) = \frac{\pi}{2}$, además

$$\begin{aligned} h'(R) &= F'(cpR^2)(cpR^2)', \\ h''(R) &= F''(cpR^2)(cpR^2)'^2 + F'(cpR^2)(cpR^2)'', \end{aligned}$$

pero como $F''(0)$ no está definida, la estrategia es expandir mejor $h'(R)$ alrededor de $R = 0$ escribiendo $F'(cpR^2)$ explícitamente. Al final se obtiene la expansión de $h(R)$ por integración. Sea $g(R) := h'(R)$,

$$\begin{aligned}
g(R) &= -R\sqrt{\frac{cp}{1-cpR^2}}(cpR^2)', \\
g(0) &= 0, \\
g'(R) &= -\sqrt{\frac{cp}{1-cpR^2}}(cpR^2)' - R\left(\sqrt{\frac{cp}{1-cpR^2}}\right)'(cpR^2)' - R\sqrt{\frac{cp}{1-cpR^2}}(cpR^2)'', \\
g'(0) &= 0, \\
g''(R) &= -2\left(\sqrt{\frac{cp}{1-cpR^2}}\right)'(cpR^2)' - 2\sqrt{\frac{cp}{1-cpR^2}}(cpR^2)'' \\
&\quad - 2R\left(\sqrt{\frac{cp}{1-cpR^2}}\right)'(cpR^2)'' - R\left(\sqrt{\frac{cp}{1-cpR^2}}\right)''(cpR^2)' - R\sqrt{\frac{cp}{1-cpR^2}}(cpR^2)''', \\
g''(0) &= -4(c_0p_0)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

La expansión en serie de Taylor para $g(R)$ alrededor de $R = 0$ es

$$g(R) = -2(c_0p_0)^{\frac{3}{2}}R^2 + O(R^3).$$

Integrando esta última se obtiene la correspondiente expansión para $h(R)$:

$$h(R) = F(cpR^2) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}(c_0p_0)^{\frac{3}{2}}R^3 + O(R^4),$$

y análogamente a τ_s , la expansión para τ_{ah} es:

$$\tau_{ah}(R) = \tau_s^0 \left[1 + \frac{\sigma}{2}R^2 + \frac{\rho}{6}R^3 + O(R^4) \right], \quad (3.21)$$

donde σ es la misma cantidad definida en la sección 3.2.3 y

$$\frac{\rho}{6} := -\frac{2(c_0p_0)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\pi}{2} - F(p_0)} < 0.$$

Notar que las expansiones (3.20) y (3.21), sólo difieren en el término cúbico. En la siguiente sección se discutirán con más detalles algunas propiedades de la singularidad y el horizonte aparente, en particular la visibilidad de la singularidad.

Por lo pronto en la siguiente figura se muestran simultáneamente las funciones $\tau_s(R)$ y $\tau_{ah}(R)$. También la trayectoria de una partícula con velocidad inicial $V_0 \neq 0$ y radio inicial $R = 0.7R_1$, donde R_1 es el radio del cascarón esférico más externo, o sea, la superficie de la estrella. En este caso se ha elegido $R_1 \equiv 1$. Para generar este diagrama se han tomado las funciones particulares:

$$c(R) = c_0(1 - \frac{6}{5}aR^2 + \frac{3}{7}bR^4), \quad (3.22)$$

$$p(R) = 0,6R + 0,2, \quad (3.23)$$

con $a \equiv 1$, $b \equiv 0$ y $c_0 = 0,5$. Notar que las funciones $c(R)$ y $p(R)$ cumplen con las condiciones mencionadas a lo largo de este capítulo: $c > 0$, $c' \leq 0$, $0 < p \leq 1$ y $p' \geq 0$. La justificación de la forma de estas funciones viene de suposiciones razonables sobre el perfil inicial de densidad de masa ρ_0 . Éstas son:

$$\rho_0(R) \geq 0, \quad (3.24)$$

$$\rho'_0(R) \leq 0, \quad (3.25)$$

$$\rho_0(1) = 0. \quad (3.26)$$

La primera y segunda condiciones garantizan que no se considere materia exótica, pues el perfil de densidad es positivo y decae conforme la posición respecto al centro de la estrella es mayor. La tercera garantiza que el salto a la región vacía será suave. Se propone un modelo con un perfil de densidad que tiene la siguiente forma:

$$\rho_0(R) = \rho_c(1 - 2aR^2 + bR^4),$$

donde $\rho_c := \rho_0(0)$ es la densidad central, a y b son parámetros reales que deberán ser tales que se cumplan las condiciones (3.24 - 3.26).

Notar que no se han elegido potencias impares para procurar la regularidad de las coordenadas en el origen.

La condición (3.26) implica que:

$$b = 2a - 1.$$

Mientras que (3.25), junto con $0 \leq R \leq 1$, implican:

$$0 \leq a \leq 1.$$

Si además si se pide $\rho_c > 0$, se satisface (3.24). Enseguida puede calcularse la función $c(R)$, la cual fue definida como:

$$c(R) = \frac{2m(R)}{R^3} = \frac{8\pi G}{R^3} \int_0^R \rho_0(\bar{R}) \bar{R}^2 d\bar{R},$$

y después de integrar se obtiene precisamente la ecuación (3.22) con $c_0 = \frac{8}{3}\pi G\rho_c$.

Una última condición que debe cumplirse es $\Gamma^2 = 1 - cpR^2 > 0$, pero como $0 < p \leq 1$, la condición se reduce a $cR^2 < 1$, y ésta se satisface si $c(R) < 1$, lo cual implica que $c_0(1 - \frac{6}{5}aR^2 + \frac{3}{7}bR^4) < 1$. Al evaluar en $R = 1$ se obtiene la condición:

$$c_0 < \frac{7}{6a + 4}.$$

La velocidad $V_0(R)$ puede calcularse a partir de la relación $p(R) = 1 - \frac{RV_0(R)^2}{2m(R)}$ con $2m(R) = c(R)R^3$ y resulta:

$$V_0(R) = R\sqrt{c(R)(1 - p(R))},$$

entonces para la partícula en $R = 0,7$ se tiene $V_0 \simeq 0,5652$.

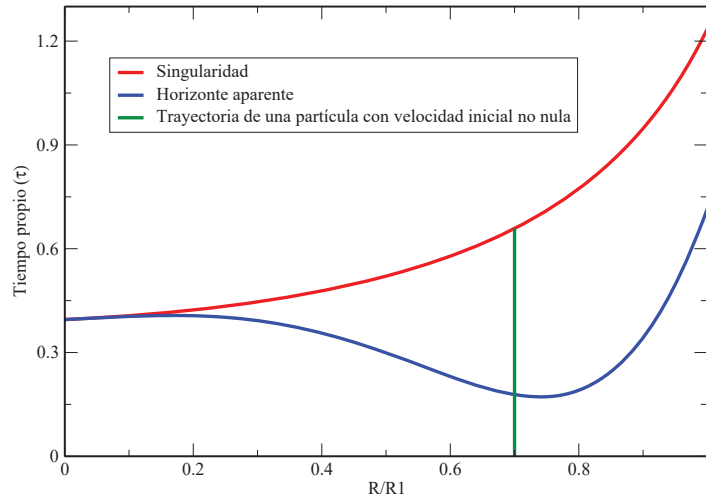


Figura 3.1: Solución a las ecuaciones del colapso de una estrella de polvo en simetría esférica.

3.3. El agujero negro y la Censura Cósmica de la singularidad

Uno de los objetivos primordiales de este trabajo es estudiar la censura de la singularidad que se forma a partir del colapso de una estrella de polvo en simetría esférica. A propósito se presenta el siguiente

Lema 3.3.1 . *La singularidad central, definida por la curva $(R, \tau_s(R))$, con $R > 0$, generada a partir del colapso de una estrella de polvo en simetría esférica es localmente oculta en el intervalo $(0, R_1]$, donde R_1 es el radio inicial de la superficie de la estrella.*

Para $R > R_1$ vale la solución se Schwarzschild y por lo tanto la singularidad también es localmente oculta.

Demostración. Sea $\tau_s(R)$ la curva que determina la singularidad central. Sea $R_0 \in (0, R_1]$. Supóngase que la singularidad es desnuda en R_0 , es decir, existe un rayo de luz que sale de $\tau_s(R_0)$ y sigue como trayectoria una geodésica nula $\tau^0(R)$ definida por $\frac{d\tau^0}{dR}(R) = \frac{r'(R, \tau)}{r(R)}$ al menos en un intervalo arbitrariamente pequeño $[R_1, R_1 + \epsilon]$. Si se deja de lado el caso en que ocurre algún cruzamiento de cascarones esféricos, entonces se supone que $r'(R, \tau) > 0$, y por lo tanto $\tau^0(R)$ es una función monótonamente creciente y tal que $\tau_{ah}(R) < \tau^0(R) < \tau_s(R)$ para toda $R \in [R_1, R_1 + \epsilon]$, con I suficientemente pequeño. La desigualdad anterior indica que $\tau^0(R)$ se encuentra detrás del horizonte aparente y entonces para todo punto a lo largo de la geodésica nula se cumple $\frac{dr}{dR} < 0$. Pero sucede que tal geodésica no puede existir puesto que $r(R)$ es una función decreciente, en particular en R_0 , pero justo ahí se tiene $r = 0$, lo que implica que para $R > R_0$, r es negativo, pero eso no está permitido físicamente. Por lo tanto la singularidad es localmente oculta en $(0, R_1]$. **QED.**

Se habrá notado que el Lema anterior no considera el punto $R = 0$ y geodésicas nulas a partir de $\tau_s(R = 0)$. Esto es así porque la demostración anterior no aplica en general para ese punto y enseguida se muestra la razón. Es aquí donde se hacen útiles las expansiones en serie de Taylor de la singularidad y el horizonte aparente calculadas en las secciones 3.2.3 y 3.2.4. Las expansiones para τ_s y τ_{ah} cerca de $R = 0$ son:

$$\tau_s(R) = \tau_s^0 \left[1 + \frac{\sigma}{2} R^2 + O(R^4) \right], \quad (3.27)$$

$$\tau_{ah}(R) = \tau_s^0 \left[1 + \frac{\sigma}{2} R^2 + \frac{\rho}{6} R^3 + O(R^4) \right], \quad (3.28)$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{2} &= -\frac{1}{4} \left(\frac{3p_0''}{p_0} + \frac{c_0''}{c_0} + \frac{2p_0''F'(p_0)}{\frac{\pi}{2} - F(p_0)} \right) \geq 0, \\ \frac{\rho}{6} &= -\frac{2(c_0 p_0)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\pi}{2} - F(p_0)} < 0, \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} 0 < p_0 &\leq 1, \\ p_0'' &\geq 0, \\ c_0 &\geq 0, \\ c_0'' &\leq 0, \\ p_0'' F'(p_0) &\leq 0. \end{aligned}$$

Proposición 3.3.1 *Si $\sigma \equiv 0$, entonces vale la Censura Cósmica Fuerte para la singularidad central.*

Demostración. En el caso en que $\sigma \equiv 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} \tau_s(R) &= \tau_s^0 [1 + O(R^4)], \\ \tau_{ah}(R) &= \tau_s^0 \left[1 + \frac{\rho}{6} R^3 + O(R^4) \right], \quad \rho < 0 \end{aligned}$$

Como $\tau_{ah} < \tau_s$, entonces vale un argumento análogo al expuesto en la demostración del Lema (3.3.1) para probar que en este caso la singularidad es localmente oculta en $R = 0$, es decir: no existen geodésicas nulas que salgan del punto $\tau_s(R = 0)$. Entonces se tiene que la singularidad es localmente oculta para toda $R \in [0, R_1]$, por lo tanto vale la Censura Cósmica Fuerte. **QED.**

Ahora es claro por qué razón no vale la prueba en general para $R = 0$, pues si $\sigma > 0$, las expansiones (3.27) y (3.28) muestran que en una vecindad arbitrariamente pequeña de $R = 0$ no puede garantizarse que $\tau_{ah} < \tau_s$.

De paso valga anotar que también vale la Censura Cósmica Débil, pues ésta es un caso particular de la Fuerte, es decir, si un observador a una distancia finita de la singularidad no puede detectar rayos de luz salidos desde ella, tampoco podrá hacerlo un observador en el infinito nulo.

Es importante aclarar que si $\frac{\sigma}{2} \neq 0$, queda abierta la posibilidad de que la singularidad sea visible en $R = 0$. Por ahora no puede decirse mucho sobre este caso, pues se requiere un análisis [3] que no se llevará a cabo en este trabajo. Por lo pronto se tiene suficiente evidencia numérica de que pueden salir varios rayos nulos del punto $\tau_s(R = 0)$. Esto puede verse en la siguiente figura, donde $\frac{\sigma}{2} \neq 0$. Se muestran varias geodésicas nulas salientes que terminan en la singularidad central. El hecho relevante es que hay varios rayos nulos que provienen del punto $\tau_s(0)$, lo que hace evidente que la singularidad es desnuda y además la comprensión de esto no es sencilla, pues hay

más de una geodésica nula que sale de este punto.

Por ahora no se darán los detalles técnicos para generar este diagrama, pero baste decir que la estrategia consiste en poner una malla numérica uniforme sobre la singularidad y en cada punto integrar las ecuaciones características de las geodésicas nulas salientes hacia el pasado, lo que da como resultado que varias de esas geodésicas provienen de $\tau_s(0)$. El algoritmo detallado se expone en el siguiente capítulo y se utilizará ampliamente para analizar numéricamente la censura local y global de la singularidad.

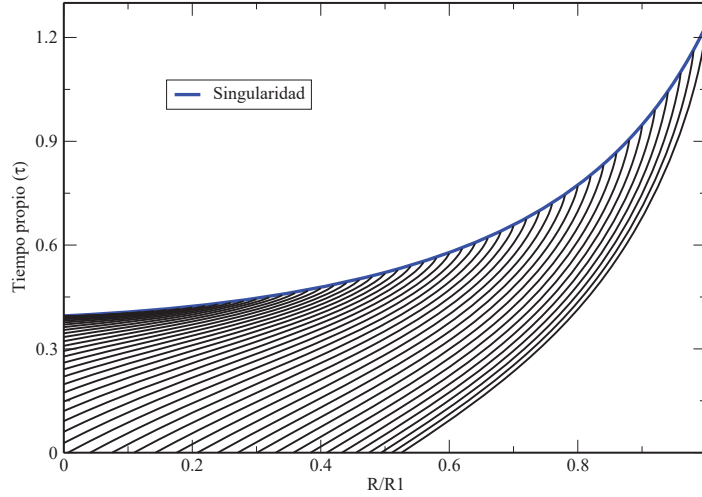


Figura 3.2: Evidencia numérica de que la singularidad es localmente visible en $\tau_s(0)$.

Ahora puede hacerse un avance importante acerca del agujero negro que resulta del colapso aún prescindiendo del horizonte de eventos.

Proposición 3.3.2 *El horizonte aparente se encuentra dentro del agujero negro.*

Demostración. Considerando de la sección 3.2.4 la condición que determina el horizonte aparente: $\frac{cR^3}{r} = 1$ y recordando la definición $c(R) = \frac{2m(R)}{R^3}$, se tiene que la superficie de dicho horizonte es tal que $r(\tau, R) = 2m(R)$. Como se supone que la masa total de la estrella $m_1 = m(R_1)$ es mayor que la masa contenida en cualquier cascarón esférico más interno, se cumple que $m(R) \leq m(R_1)$ para $R \leq R_1$, pero a partir de la superficie de la estrella el espacio-tiempo es justo el de Schwarzschild, entonces $2m(R_1) = 2m_1 =: r_{Schw}$, donde esto último denota al radio de Schwarzschild, el cual delimita el agujero negro. Enseguida se obtiene $r(\tau, R) \leq r_{Schw}$ para el horizonte aparente. Como la región detrás de este horizonte está marginalmente atrapada, todo rayo de luz saliente desde ahí debe tener un radio de área menor o igual que el horizonte de eventos en la superficie de la estrella. Esto garantiza que la

región detrás del horizonte aparente y éste mismo se encuentra dentro del agujero negro, es decir, ningún un rayo de luz salido de esa región o del horizonte aparente puede llegar al infinito nulo futuro. **QED**.

3.4. El modelo con densidad de materia uniforme y velocidad nula

A continuación se estudia el caso particular en que el perfil de densidad de materia ρ_0 de la estrella de polvo es uniforme y las partículas se encuentran inicialmente en reposo, es decir $V_0(R) \equiv 0$ para toda R , y se resuelven analíticamente las ecuaciones que describen la dinámica del sistema. A pesar de todas las simplificaciones acumuladas, este problema resulta ser de suma importancia porque ilustra varios resultados importantes. Para comenzar se establece la densidad uniforme suponiendo que la superficie de la nube tiene un radio inicial R_1 :

$$\rho_0(R) = \begin{cases} \rho_1 & , R < R_1 \\ 0 & , R \geq R_1, \end{cases}$$

donde ρ_1 es constante. Si se supone que la masa total de la nube es m_1 , integrando (3.6) de 0 a R_1 , puede escribirse la densidad ρ_1 en términos de m_1 de la siguiente manera: $\rho_1 = \frac{2}{k} \frac{3m_1}{R_1^3}$, luego la masa para $R < R_1$ en función de m_1 y R_1 es $m_1 \frac{R^3}{R_1^3}$, en resumen:

$$m(R) = \begin{cases} m_1 \frac{R^3}{R_1^3} & , R < R_1 \\ m_1 & , R \geq R_1. \end{cases}$$

Enseguida considérese la solución para la posición radial de las partículas en función de τ y de R :

$$r(\tau, R) = \frac{R}{p} \left[F^{-1} \left(F(p) + \sqrt{c(R)p(R)^3 \tau} \right) \right],$$

donde, como se estableció previamente, $p(R) = 1 - \frac{RV_0^2}{2m}$ y $c(R) = \frac{2m(R)}{R^3}$. En este caso se tiene $V_0 = 0$ y por lo tanto $p = 1$, entonces

$$c(R) = \begin{cases} \frac{2m_1}{R_1^3} & , R < R_1 \\ \frac{2m_1}{R^3} & , R \geq R_1, \end{cases}$$

además en virtud de que $F(1) = 0$,

$$r(\tau, R) = RF^{-1} \left(\sqrt{c(R)\tau} \right).$$

Recordando que dentro de la nube $c(R)$ es constante, la derivada resulta:

$$r'(\tau, R) = F^{-1} \left(\sqrt{c(R)\tau} \right) > 0, \quad (3.29)$$

lo cual garantiza que en este caso no habrá *shell-crossing*.

De paso puede calcularse el tiempo que tarda una partícula en llegar a la singularidad, esto es τ_s tal que $r(\tau_s, R) = 0$, recordando que $F(0) = \frac{\pi}{2}$,

$$\tau_s(R) = \frac{\pi}{2\sqrt{c(R)}}.$$

El resultado importante es que todas las partículas llegan a la singularidad al mismo tiempo, pues dentro de la nube en realidad τ_s no depende de R porque, de nuevo, $c(R)$ es una constante. En cambio para $R \geq R_1$, $\tau_s(R) \sim R^{\frac{3}{2}}$.

3.4.1. El horizonte de eventos

En base al Teorema de Birkhoff, enunciado al final del capítulo anterior, puede asumirse que habrá un horizonte de eventos justo en el radio de Schwarzschild fuera de la estrella. Luego surge una pregunta natural: ¿Cuánto tiempo tarda una partícula de polvo en llegar al horizonte de eventos si inicialmente se encuentra fuera de la nube de polvo? Para contestarla se recurre al Teorema de Birkhoff, entonces para $R > R_1$ (el vacío), el horizonte de eventos se encuentra precisamente en $r = 2m_1$. Esto último es consistente puesto que en el vacío la masa de Misner y la de Schwarzschild coinciden. Sea τ_{EH} el tiempo que le toma a la partícula llegar al horizonte de eventos, es decir, tal que $r(\tau_{EH}, R) = 2m_1$, entonces

$$\frac{2m_1}{R} = F^{-1} \left(\sqrt{\frac{2m_1}{R^3}} \tau_{EH} \right),$$

luego:

$$\tau_{EH}(R) = \sqrt{\frac{R^3}{2m_1}} F \left(\frac{2m_1}{R} \right).$$

Se sabe que $0 \leq F(x) \leq \frac{\pi}{2}$ y que su dominio es $[0, 1]$. Como se supone que al menos la frontera de la nube se encuentra inicialmente fuera del agujero negro, esto es $R_1 > 2m_1$, entonces tiene sentido evaluar F en $\frac{2m_1}{R_1}$. Luego viene un bonito resultado: en particular se cumple $F\left(\frac{2m_1}{R_1}\right) \leq \frac{\pi}{2}$, lo cual es equivalente a $\sqrt{\frac{R_1^3}{2m_1}} F\left(\frac{2m_1}{R_1}\right) < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R_1^3}{2m_1}}$, pero el lado derecho de la desigualdad es precisamente $\tau_s(R_1)$ y el izquierdo $\tau_{EH}(R_1)$, esto significa que una partícula inicialmente en la superficie de la estrella llega antes al horizonte de eventos que a la singularidad.

Ahora si se toma una partícula de prueba que inicialmente se encuentra dentro de la nube, es decir $0 < R < R_1$, no se sabe *a priori* en qué momento del colapso se desconectará causalmente del resto del espacio-tiempo, o en otras palabras no se sabe dónde se encuentra el horizonte de eventos. Para determinarlo se debe analizar

precisamente la estructura causal del espacio-tiempo y para ello se debe recordar la métrica que satisface las ecuaciones de Einstein en simetría esférica para el polvo (3.10)

La causalidad está determinada por los conos de luz, es decir, por las geodésicas nulas radiales, las cuales satisfacen $\tilde{g} = 0$, esto es:

$$d\tau = \pm \frac{r'(\tau, R)}{\Gamma(R)} dR.$$

Se toma el signo positivo para describir las geodésicas salientes. De aquí es claro que $\frac{d\tau}{dR}$ es positiva para estas curvas, en otras palabras, ningún rayo de luz emitido en la singularidad puede ser detectado localmente fuera de ella, pues necesariamente su geodésica nula saliente debiera ser tal que $\frac{d\tau}{dR} < 0$, lo cual nunca ocurre. Por lo tanto se cumple la Censura Cósmica Fuerte en este caso y de paso también la débil, pues la singularidad es globalmente oculta.

Teniendo en cuenta que en este caso valen (3.29) y

$$\Gamma(R) = \sqrt{1 - 2m_1 \frac{R^2}{R_1^3}},$$

la integración sobre toda la nube es:

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d\tau}{F^{-1}(\sqrt{c\tau})} = \int_{R_0}^{R_1} \frac{dR}{\sqrt{1 - 2m_1 \frac{R^2}{R_1^3}}},$$

Para efectos prácticos se hacen algunos cambios de variable convenientes:

$$\begin{aligned} x &:= \frac{R}{R_1}, \\ \nu^2 &:= \frac{2m_1}{R_1} = cR_1^2, \\ y^2 &:= F^{-1}(\sqrt{c\tau}) = F^{-1}\left(\nu \frac{\tau}{R_1}\right). \end{aligned}$$

Así las integrales a ambos lados quedan como:

$$\frac{-2}{\nu} \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1 - \nu^2 x^2}},$$

donde

$$\begin{aligned}
y_0^2 &= F^{-1} \left(\nu \frac{\tau_0}{R_1} \right), \\
y_1^2 &= F^{-1} \left(\nu \frac{\tau_1}{R_1} \right), \\
x_0 &= \frac{R_0}{R_1}, \\
x_1 &= 1.
\end{aligned}$$

Integrando:

$$\begin{aligned}
\frac{-2}{\nu} \text{Arcsen}(y) \Big|_{y_0}^{y_1} &= \frac{1}{\nu} \text{Arcsen}(\nu x) \Big|_{x_0}^{x_1}, \\
-2 \text{Arcsen}(y_1) + 2 \text{Arcsen}(y_0) &= \text{Arcsen}(\nu) - \text{Arcsen}(\nu x_0).
\end{aligned}$$

Se busca hacer coincidir las soluciones en la frontera de la nube, ello equivale a pedir que $\tau_1 = \sqrt{\frac{R_1^3}{2m_1}} F \left(\frac{2m_1}{R_1} \right)$, pues basta recordar que éste es precisamente el tiempo propio que tarda una partícula en la frontera de la nube en llegar al horizonte de eventos. Notar que $\tau_1 = \sqrt{\frac{R_1^3}{2m_1}} F \left(\frac{2m_1}{R_1} \right) = \frac{R_1}{\nu} F(\nu^2)$, entonces $y_1^2 = F^{-1} \left(\nu \frac{\tau_1}{R_1} \right) = \nu^2$, así que la solución para la ecuación de las geodésicas nulas satisface:

$$-2 \text{Arcsen}(\nu) + 2 \text{Arcsen}(y_0) = \text{Arcsen}(\nu) - \text{Arcsen}(\nu x_0),$$

entonces y_0 en función de x_0 queda:

$$y_0 = \text{Sen} \left[\frac{1}{2} (3 \text{Arcsen}(\nu) - \text{Arcsen}(\nu x_0)) \right],$$

o bien τ_0 en términos de R_0 :

$$\tau_0 = \frac{R_1}{\nu} F \left[\text{Sen}^2 \left[\frac{1}{2} \left(3 \text{Arcsen}(\nu) - \text{Arcsen}(\nu \frac{R_0}{R_1}) \right) \right] \right]. \quad (3.30)$$

Es interesante analizar cómo la forma del horizonte de eventos dentro de la nube depende de ν , el cual está íntimamente relacionado con el radio de Schwarzschild, pues involucra la razón entre $2m_1$ y R_1 : $\nu = \sqrt{\frac{2m_1}{R_1}} > 0$. De entrada se ha supuesto que al menos la superficie de la estrella se encuentra inicialmente fuera del agujero negro, es decir $R_1 > 2m_1$, esto implica que $\nu < 1$.

Enseguida puede investigarse cómo debe ser ν cuando el horizonte de eventos sale del origen de coordenadas, esto es $R_0 = 0 = \tau_0$, y no es difícil encontrar de (3.30) que $\nu = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Entonces para $1 > \nu > \frac{\sqrt{3}}{2}$ el horizonte de eventos comienza en $\tau_0 = 0$ y $0 < R_0 < R_1$, mientras que para $0 < \nu < \frac{\sqrt{3}}{2}$ comienza en $R_0 = 0$ y $0 < \tau_0 \leq \tau_s(R_0)$

en principio, sin embargo en párrafos anteriores se ha aclarado que no pueden haber geodésicas nulas salientes desde la singularidad, lo cual significa que ésta debe permanecer oculta detrás del horizonte de eventos, por lo tanto para $0 < \nu < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $R_0 = 0$ y $0 < \tau_0 < \tau_s(R_0)$.

Vale la pena remarcar que siempre para $1 > \nu > \frac{\sqrt{3}}{2}$, hay una parte de la estrella que se encuentra dentro del agujero negro incluso al tiempo inicial del colapso.

Los resultados anteriores se ilustran con las siguientes gráficas. Todas muestran la singularidad y el horizonte de eventos. La primera corresponde al caso $\nu = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($R_1 = 1$ y $m_1 = 0,375$), la segunda a $\nu = \sqrt{0,8} > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($R_1 = 1$ y $m_1 = 0,4$) y la tercera a $\nu = \sqrt{0,6} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($R_1 = 1$ y $m_1 = 0,3$).

En la siguiente sección se complementa y termina el estudio del caso particular de densidad uniforme de materia.

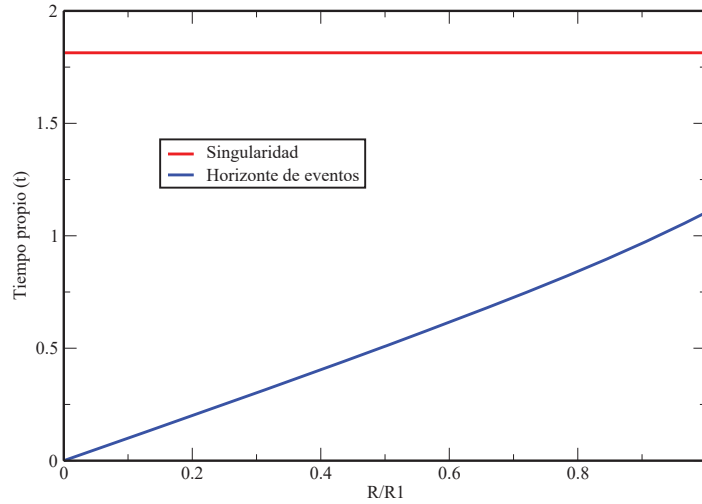


Figura 3.3: Singularidad y horizonte de eventos para el caso $\nu = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3.4.2. El horizonte aparente

En la sección 3.2.4 se obtuvo la condición general que determina el horizonte aparente: $\frac{2m}{r} = 1$. En el caso particular que ahora se estudia se tiene

$$r(\tau, R) = RF^{-1} \left(\sqrt{c(R)}\tau \right).$$

Considérese el caso $R \geq R_1$. En esa región se tiene $c = \frac{2m_1}{R^3}$ y $m = m_1$, entonces en el horizonte aparente se cumple:

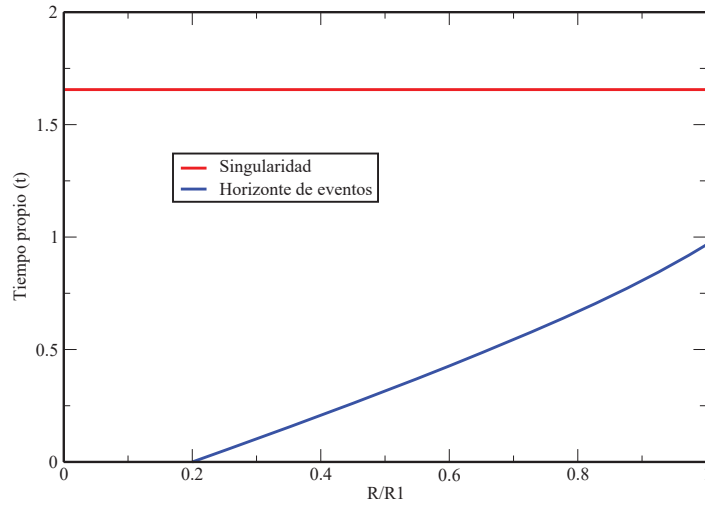


Figura 3.4: Singularidad y horizonte de eventos para el caso $\nu = \sqrt{0,8} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

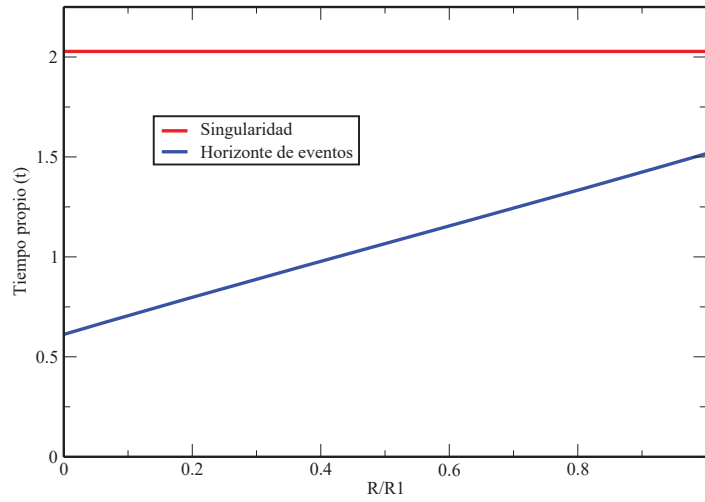


Figura 3.5: Singularidad y horizonte de eventos para el caso $\nu = \sqrt{0,6} < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{2m_1}{RF^{-1}\left(\sqrt{\frac{2m_1}{R^3}}\tau_{AH}\right)} = 1,$$

donde τ_{AH} denota el tiempo en el que se alcanza dicho horizonte. De lo anterior resulta:

$$\tau_{AH} = \sqrt{\frac{R^3}{2m_1}} F\left(\frac{2m_1}{R}\right),$$

lo cual coincide exáctamente con τ_{EH} fuera de la nube. De aquí se concluye que en el vacío los horizontes aparente y de eventos coinciden.

Ahora considérese en caso $0 < R < R_1$. Se tiene $c = \frac{2m_1}{R_1^3}$ y $m = m_1 \frac{R^3}{R_1^3}$, entonces el horizonte aparente dentro de la nube es tal que:

$$\frac{2m_1 \frac{R^3}{R_1^3}}{RF^{-1}\left(\sqrt{\frac{2m_1}{R_1^3}}\tau_{AH}\right)} = 1,$$

de aquí:

$$\tau_{AH} = \sqrt{\frac{R_1^3}{2m_1}} F\left(\frac{2m_1 R^2}{R_1^3}\right),$$

o en términos de ν :

$$\tau_{AH} = \frac{R_1}{\nu} F\left(\nu^2 \left(\frac{R}{R_1}\right)^2\right).$$

La siguiente figura complementa las tres anteriores con $\nu = 0,3$ ($R_1 = 1$ y $m_1 = 0,45$), mostrando el horizonte aparente. Notar que, como era de esperarse, el horizonte aparente y el de eventos coinciden en la superficie de la estrella, pues a partir de ahí hacia el vacío la solución es la de Schwarzschild.

Como conclusión a esta sección vale la pena decir que las figuras muestran claramente que en este caso son válidos los resultados de las proposiciones (3.3.1) y (3.3.2). En el próximo capítulo se estudiarán casos más generales y se comprobará la validez de tales resultados.

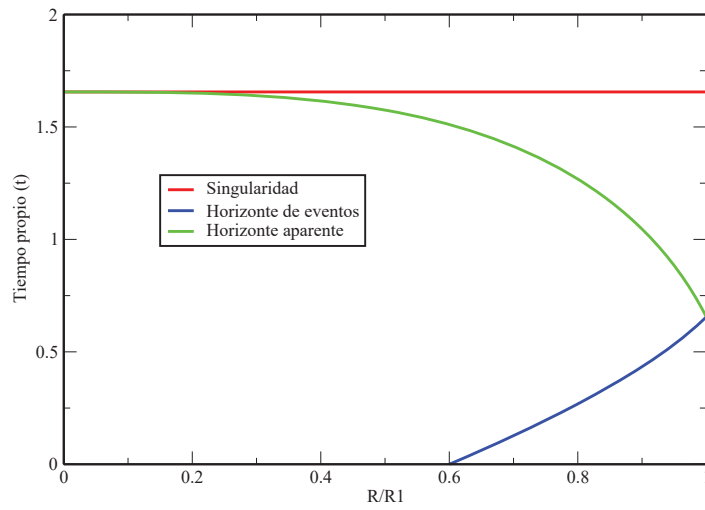


Figura 3.6: Singularidad, horizonte de eventos y horizonte aparente para el caso $\nu = 0,3$.

Capítulo 4

Diagramas conformes

El siguiente paso en la tarea de comprender la naturaleza de la singularidad del espacio-tiempo generada a partir de un colapso gravitacional es hacer un cambio de coordenadas conveniente de tal manera que las trayectorias nulas se simplifiquen al máximo, lo cual tiene importantes ventajas. Las nuevas se llaman *coordenadas conformes* y son tales que la métrica toma la forma:

$$\tilde{g} = \Omega(T, X)^2 (-dT^2 + dX^2),$$

donde $T = T(\tau, R)$, $X = X(\tau, R)$. La función $\Omega(T, X)$ se llama *factor conforme*. Naturalmente un *diagrama conforme* es uno donde las coordenadas usadas son conformes. La primera ventaja que se consigue al trabajar con ellas es que, al igual que en el espacio de Minkowski, las trayectorias nulas son líneas rectas a $\pm 45^\circ$ y por lo tanto se simplifica enormemente el estudio de la causalidad en el espacio-tiempo. Otra ventaja importante y que es precisamente la motivación esencial para cambiar de coordenadas es entender lo que sucede con las geodésicas nulas que provienen del punto correspondiente a $R = 0$ en la figura (3.2), pues como se concluyó en la sección 3.3, la singularidad pudiera ser desnuda a causa de ese punto y es crucial estudiarlo con detenimiento.

En la primera sección de este capítulo se presenta una primera forma de construir numéricamente el diagrama conforme a partir de las propiedades de la métrica. Este método es elegante y relativamente simple de implementar, por lo que será muy ilustrativo en la segunda sección, donde se aplica al caso particular del modelo de densidad de masa uniforme, además se muestra que existe una transformación exacta de coordenadas para este caso, por lo que pueden probarse rigurosamente los resultados numéricos. En la tercera sección se muestra una segunda forma de construir numéricamente el diagrama conforme y se aplica el algoritmo al caso general del colapso de una estrella de polvo en simetría esférica con velocidad inicial no nula. Entonces será más claro lo que ocurre con las geodésicas nulas que salen del punto correspondiente a $R = 0$ en la figura (??) y podrá formularse una conclusión sobre la censura de la singularidad.

4.1. Primera construcción numérica de las coordenadas conformes

Considérese la parte temporal-radial de la métrica de Tolman-Bondi:

$$\tilde{g} = -d\tau^2 + \frac{dR^2}{\gamma(\tau, R)^2}, \quad (4.1)$$

donde $\gamma(\tau, R) := \frac{\Gamma(R)}{r'(\tau, R)}$. Se pretende hacer un cambio de coordenadas tal que la métrica se escriba:

$$\tilde{g} = \Omega(T, X)^2 (-dT^2 + dX^2), \quad (4.2)$$

donde $T = T(\tau, R)$ y $X = X(\tau, R)$. Para construirlas numéricamente puede procederse de la siguiente manera: si T y X han de satisfacer (4.1), entonces al evaluar los gradientes dT y dX en $\tilde{g}$ debe cumplirse:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(dT, dT) &= -\dot{T}^2 + \gamma^2 T'^2, \\ \tilde{g}(dX, dX) &= -\dot{X}^2 + \gamma^2 X'^2, \end{aligned}$$

por otro lado, si T y X han de satisfacer (4.2), entonces al evaluar los gradientes dT y dX en $\tilde{g}$ debe cumplirse:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(dT, dT) &= -\Omega^2, \\ \tilde{g}(dX, dX) &= +\Omega^2, \end{aligned}$$

luego es claro que $\tilde{g}(dT, dT) = -\tilde{g}(dX, dX)$, y esto implica que

$$-\dot{T}^2 + \gamma^2 T'^2 = \dot{X}^2 - \gamma^2 X'^2,$$

lo cual puede escribirse convenientemente como sigue:

$$\dot{T}^2 + \dot{X}^2 = \gamma^2 (T'^2 + X'^2). \quad (4.3)$$

Enseguida nótese que por un lado $\tilde{g}(dT, dX) = -\dot{T}\dot{X} + \gamma^2 T'X'$ y por otro $\tilde{g}(dT, dX) = 0$, esto implica que

$$2\dot{T}\dot{X} = 2\gamma^2 T'X'. \quad (4.4)$$

Sumando o restando esta última igualdad a (4.3):

$$\left(\dot{T} \pm \dot{X}\right)^2 = \gamma^2 \left(T'^2 \pm X'^2\right)^2. \quad (4.5)$$

Sean U y V dos coordenadas nulas definidas por

$$\begin{aligned} U &:= T - X, \\ V &:= T + X, \end{aligned}$$

entonces (4.5) se traduce en las siguientes ecuaciones de advección:

$$\dot{U} = \pm \gamma U', \quad (4.6)$$

$$\dot{V} = \pm \gamma V'. \quad (4.7)$$

Para deshacer la ambigüedad de los signos basta establecer un par de condiciones razonables a la superficie inicial, la cual corresponde a $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} T(\tau = 0, R) &= 0, \\ X(\tau = 0, R) &= R. \end{aligned}$$

Dado que ambas τ y T son coordenadas temporales se tiene la libertad de hacerlas coincidir en particular cuando el tiempo propio es cero. Lo mismo para R y X : se pide que al inicio del colapso ambas midan el radio de área inicial de cada cascarón esférico de materia.

Por lo pronto se tiene

$$\begin{aligned} T'_0(R) &:= \frac{\partial T}{\partial R}(0, R) = 0, \\ X'_0(R) &:= \frac{\partial X}{\partial R}(0, R) = 1, \end{aligned}$$

y quedan por determinar $\dot{X}_0 := \frac{\partial X}{\partial \tau}(0, R)$ y $\dot{T}_0 := \frac{\partial T}{\partial \tau}(0, R)$. Lo que se sabe al menos es que $\dot{T}_0$ debe ser no nula, pues si tal fuera el caso y dada la condición que se impuso previamente ($T(\tau = 0, R) = 0$), se tendría $T(\tau, R) = 0$ para todo τ y no habría evolución en la coordenada temporal, lo cual no es razonable.

Sin embargo puede tomarse la igualdad (4.4), evaluarse en $\tau = 0$ y aprovecharse $\dot{T}_0 \neq 0$, junto con $T'_0 = 0$ y $X'_0 = 1$ para deducir que $\dot{X}_0 = 0$.

Si enseguida se evalúa (4.3) en $\tau = 0$ se deduce que $\dot{T}_0 = \pm \gamma$. El signo se elige de tal forma que $T(\tau, R)$ sea creciente, y dado que $\gamma > 0$, la elección es $\dot{T}_0 = \gamma$. En resumen se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{T}_0 &= \gamma \\ T'_0 &= 0, \\ \dot{X}_0 &= 0 \\ X'_0 &= 1. \end{aligned}$$

De manera consistente se definen:

$$\begin{aligned}\dot{U}_0 &:= \dot{T}_0 - \dot{X}_0 = \gamma, \\ U'_0 &:= T'_0 - X'_0 = -1, \\ \dot{V}_0 &:= \dot{T}_0 + \dot{X}_0 = \gamma, \\ V'_0 &:= T'_0 + X'_0 = +1,\end{aligned}$$

y ahora no es difícil deshacerse de la ambigüedad de los signos en 4.6 y 4.7, pues éstas deben cumplirse en particular al ser evaluadas en $\tau = 0$. La conclusión es que

$$\dot{U} = -\gamma U', \quad (4.8)$$

$$\dot{V} = +\gamma V', \quad (4.9)$$

las cuales pueden resolverse numéricamente. Los datos iniciales para T y X se traducen sin problemas a $U(0, R) = -R$ y $V(0, R) = R$. Las condiciones de frontera apropiadas se discuten en cada uno de los siguientes casos donde se aplica este método de construcción de las coordenadas conformes, que por cierto finalmente se calculan mediante:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}(V + U), \\ X &= \frac{1}{2}(V - U).\end{aligned}$$

4.2. El diagrama conforme para el modelo de densidad uniforme con velocidad inicial nula

A continuación se presenta una transformación exacta entre las coordenadas (τ, R) y las conformes $(T(\tau, R), X(\tau, R))$ dentro de la región interior de una nube de polvo con densidad de materia uniforme y un perfil inicial de velocidad $V_0(R) \equiv 0$ para toda R . Para este caso en particular ya se ha mostrado la solución analítica a las ecuaciones dinámicas en la sección 3.4. Enseguida se reescriben los resultados sólo para retomar los ingredientes necesarios para la transformación de coordenadas:

$$\begin{aligned}r(\tau, R) &= RF^{-1}(\sqrt{c_1}\tau), \\ r'(\tau, R) &= F^{-1}(\sqrt{c_1}\tau), \\ \Gamma(R)^2 &= 1 - \frac{2m(R)}{R},\end{aligned}$$

donde c_1 es constante, pues al tratarse del interior de la nube se tiene:

$$\begin{aligned} c(R) &= \frac{2m_1}{R_1^2} := c_1, \\ m(R) &= m_1 \frac{R^3}{R_1^2}, \end{aligned}$$

donde R_1 es el radio inicial de la superficie de la estrella y m_1 su masa total. Entonces las ecuaciones de interés se escriben:

$$\begin{aligned} r(\tau, R) &= RF^{-1}(\sqrt{c_1}\tau), \\ r'(\tau, R) &= F^{-1}(\sqrt{c_1}\tau), \\ \Gamma(R)^2 &= 1 - c_1 R^2. \end{aligned}$$

Para simplificar la notación y cálculos siguientes se hacen tres cambios de variables provisionales:

$$\begin{aligned} x &:= \frac{R}{R_1}, \\ y^2 &:= \frac{r}{R} = F^{-1}(\sqrt{c_1}\tau), \\ \nu^2 &:= c_1 R_1^2. \end{aligned}$$

En términos de éstas se tiene

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\sqrt{c_1}} F(y^2), \\ d\tau &= \frac{1}{\sqrt{c_1}} F'(y^2) 2y dy = -\frac{2y^2}{\sqrt{c_1}(1-y^2)} dy, \\ r' &= y^2, \\ \Gamma^2 &= 1 - \nu^2 x^2, \end{aligned}$$

entonces la parte radial-temporal de la Métrica de Tolman-Bondi $\tilde{g} = -d\tau^2 + \frac{r'^2}{\Gamma^2} dR^2$ toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= -\frac{4y^4}{c_1(1-y^2)} dy^2 + \frac{y^4 R_1^2}{1-\nu^2 x^2} dx^2 \\ &= \frac{y^4}{c_1} \left[-\frac{4dy^2}{1-y^2} + \frac{\nu^2 dx^2}{1-\nu^2 x^2} \right]. \end{aligned}$$

Sean:

$$\begin{aligned}
y &:= \cos\left(\frac{T}{2}\right), \quad 0 \leq T < \pi, \\
\nu x &:= \operatorname{sen}(X), \quad 0 \leq X \leq \operatorname{Arcsen}(\nu),
\end{aligned}$$

entonces se obtiene explícitamente la deseada métrica conformemente plana:

$$\tilde{g} = \frac{1}{c_1} \cos^4\left(\frac{T}{2}\right) [-dT^2 + dX^2].$$

Las coordenadas conformes resultan ser $T = 2\operatorname{Arccos}(y)$ y $X = \operatorname{Arcsen}(\nu x)$. En términos de las variables originales se tiene:

$$T(\tau, R) = 2\operatorname{Arccos}\sqrt{F^{-1}(\sqrt{c_1}\tau)}, \quad (4.10)$$

$$X(\tau, R) = \operatorname{Arcsen}(\sqrt{c_1}R). \quad (4.11)$$

De manera independiente pueden construirse estas coordenadas conformes numéricamente, es decir, integrando simultáneamente las ecuaciones (4.8) y (4.9) usando un esquema explícito de diferencias finitas -Método de Euler [6]- con una malla espacio-temporal uniforme que aproxima la solución a primer orden. Para U el esquema consta de diferencias finitas atrasadas y para V de diferencias adelantadas. La solución numérica podrá probarse rigurosamente comparando con la solución exacta (4.10-4.11). Precisamente ésta dicta los datos iniciales que deben usarse en la evolución numérica de U y V :

$$\begin{aligned}
U(0, R) &= T(0, R) - X(0, R) = -\operatorname{Arcsen}(\sqrt{c_1}R), \\
V(0, R) &= T(0, R) + X(0, R) = +\operatorname{Arcsen}(\sqrt{c_1}R).
\end{aligned}$$

Además es necesario imponer condiciones de frontera para U y V , sin embargo es valioso darse cuenta de que no es necesario imponer ni $U(R_1)$ ni $V(0)$. Lo anterior es así porque para U las diferencias finitas son atrasadas: esto significa que se tienen los todos datos necesarios para calcular la solución en la frontera $R = R_1$ y sólo hace falta imponer $U(0)$. Al contrario sucede con V : dado que las diferencias finitas correspondientes son adelantadas se tienen los datos necesarios para calcular la solución en $R = 0$ y sólo falta imponer $V(R_1)$. A continuación se investiga cuáles deben ser las condiciones faltantes.

Dado que R y X son coordenadas espaciales, es razonable hacerlas coincidir entre ellas en la superficie inicial de la evolución, esto es: $X(\tau, R = 0) = 0$. Esta suposición implica que $U(\tau, 0) = T(\tau, 0)$ y $V(\tau, 0) = T(\tau, 0)$, lo cual se traduce a $U(\tau, 0) = V(\tau, 0)$, y es ésta precisamente la condición en la frontera $R = 0$ para U , pues $V(\tau, 0)$ puede calcularse sin problemas. Como agregado puede anotarse que entonces se tiene

$\dot{U}(\tau, 0) = \dot{V}(\tau, 0)$ y de (4.8) y (4.9) se sigue que necesariamente $T'(\tau, 0) = 0$.

Sólo resta establecer $V(\tau, R_1)$, la cual puede deducirse de la solución exacta:

$$V(\tau, R_1) = T(\tau, R_1) + X(\tau, R_1) = 2\text{Arccos}\sqrt{F^{-1}(\sqrt{c_1}\tau)} + \text{Arcsen}(\sqrt{c_1}R_1).$$

En resumen las dos únicas condiciones de frontera a implementar son las siguientes:

$$\begin{aligned} U(\tau, 0) &= V(\tau, 0), \\ V(\tau, R_1) &= 2\text{Arccos}\sqrt{F^{-1}(\sqrt{c_1}\tau)} + \text{Arcsen}(\sqrt{c_1}R_1). \end{aligned}$$

Una vez obtenida la solución numérica se tienen varias opciones para comprobar la convergencia a la solución exacta. La que se usa en este trabajo es la *norma infinito*. Para U por ejemplo, en cada tiempo t^n se calcula la solución exacta en cada punto R_j de la malla: $U^{exacta}(t^n, R_j)$, luego en ese n -ésimo paso temporal se calcula el error global cometido al calcular la solución numérica mediante:

$$E_U(t_n) = \max_j |U_j^n - U^{exacta}(t_n, R_j)|,$$

donde U_j^n es la solución numérica calculada en R_j al tiempo t^n . Análogamente se calcula el error global para V , $E_V(t_n)$. El criterio de convergencia es el siguiente: si al aumentar la resolución de la malla el nuevo error global es estrictamente menor que el anterior para todo tiempo, entonces puede afirmarse que la solución numérica converge a la exacta. En este caso el factor de convergencia será 2, pues el Método de Euler aproxima la solución a primer orden.

Los resultados obtenidos numéricamente se presentan en la figura (4.1), donde se aprecia la región interior de la estrella en un diagrama conforme. Es claro que la singularidad es fuertemente censurada, pues ningún rayo de luz saliente de ella puede ser detectado por algún observador. En general se cumplen las predicciones de las proposiciones 3.3.1 y 3.3.2. Al respecto hay que decir que al aumentar la resolución numérica el horizonte aparente y la singularidad convergen a un origen común en $X = 0$. Otro hecho importante es que el horizonte de eventos y el aparente coinciden en la superficie de la singularidad, cosa que era de esperarse, pues se sabe que la solución exterior es la métrica de Schwarzschild.

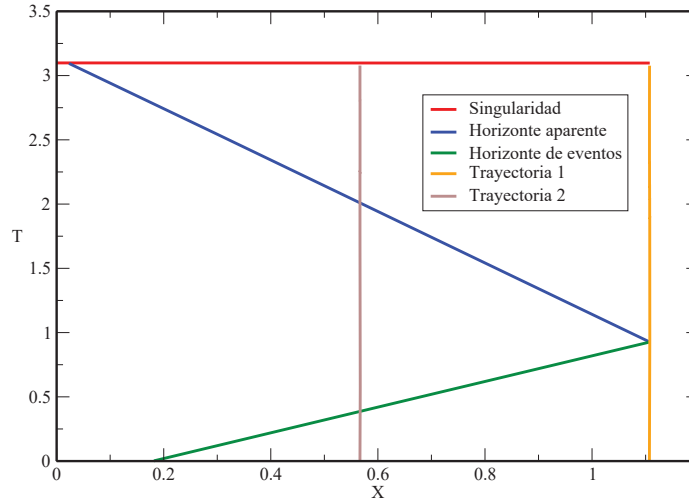


Figura 4.1: Diagrama conforme para el modelo de densidad uniforme con $V_0 = 0$

4.3. El diagrama conforme para el modelo con densidad no uniforme

Sucede el que método de construcción numérica del diagrama conforme presentado en la primera sección de este capítulo no necesariamente facilita el estudio del punto especial correspondiente a $R = 0$ en el caso general del polvo con densidad no uniforme. La razón es que no hay manera de distinguir las diferentes geodésicas nulas que salen del punto $\tau_s(R = 0)$, donde $\tau_s(R)$ es la curva de que describe la singularidad. Enseguida se presenta una estrategia diferente para construir el diagrama conforme y estudiar con detenimiento el mencionado punto.

A pesar de que habrá algunos cambios, la idea fundamental sigue siendo la de usar las propiedades de las coordenadas nulas U y V . La principal consideración es que dada una geodésica nula arbitraria en el espacio-tiempo, el valor de U ó V permanece constante a lo largo de la curva, dependiendo de su orientación. Este hecho puede aprovecharse para construir una malla numérica uniforme a lo largo de la superficie de la estrella, que corresponde a $R = R_1$, luego dar un dato inicial $U(\tau, R_1)$ e integrar hacia el pasado la ecuación diferencial de las curvas nulas salientes a partir de cada punto de la malla. El objetivo es encontrar el origen de tales curvas. Hay dos posibilidades: las curvas provienen de la superficie $R = 0$ ó de $\tau = 0$, lo que importa es que al punto de donde provengan corresponde un valor de U igual al que se asignó en $R = R_1$. La siguiente figura ilustra la construcción:

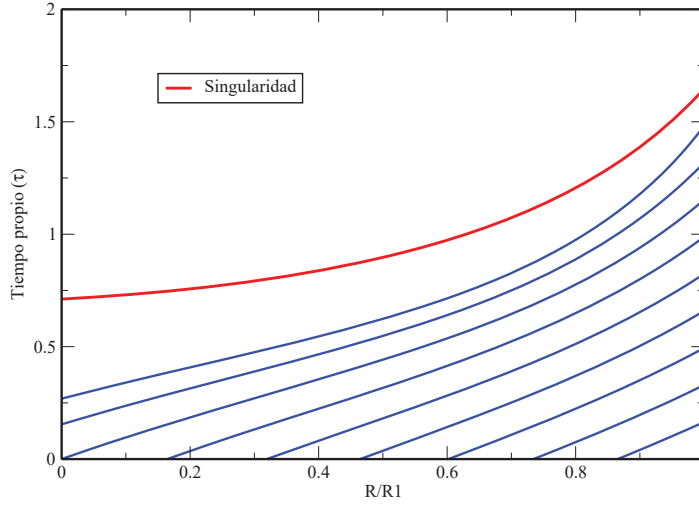


Figura 4.2: Geodésicas nulas que provienen de $R = 0$ y $\tau = 0$ y pasan por la superficie $R = R_1$

Como U es constante a lo largo de una geodésica nula saliente dada, cada curva de la figura que inicia en $R = 0$, por ejemplo, tiene ya definido su correspondiente valor de U , éste fue asignado al comenzar la construcción de la curva en $R = R_1$. Si ahora por ejemplo se define una función $V(\tau, R = 0)$, puede saberse qué valor de V corresponde a cada curva conociendo su punto de origen en la superficie $R = 0$. Entonces cada punto a partir del cual se integró en $R = R_1$ tiene asignada una pareja (U, V) , y por lo tanto pueden calcularse sus correspondientes coordenadas conformes (T, X) mediante

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(V + U), \\ X &= \frac{1}{2}(V - U). \end{aligned}$$

Otra posibilidad es la construcción de geodésicas nulas entrantes que parten de $R = R_1$. En este caso se integra la ecuación de las curvas nulas hacia el futuro. En la figura se muestran las curvas que llegan a la singularidad.

Una vez más, como para una curva dada su valor de U permanece constante, basta definir una función $V(\tau, R)$ a lo largo de $\tau_s(R)$, entonces puede saberse qué valor de V corresponde a cada curva si se conoce el punto a donde llega en la singularidad. Luego cada punto a partir del cual se construyó cada geodésica tendrá asignada una pareja (U, V) y por lo tanto sus coordenadas conformes (X, T) .

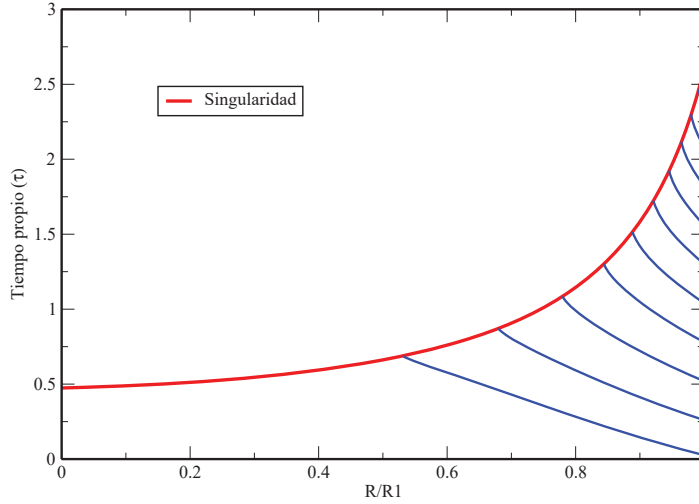


Figura 4.3: Geodésicas nulas que provienen de $R = R_1$ y llegan a la singularidad.

El último y más importante ejemplo consiste en construir una malla numérica uniforme ahora a lo largo de la singularidad, y a partir de cada punto integrar hacia al pasado la ecuación de las curvas nulas salientes. Hay dos posibilidades: puede resultar que las geodésicas provengan de $\tau = 0$ ó de $R = 0$, como se muestra en la figura (4.4):

Como en los otros casos, se da el dato inicial U a lo largo de la singularidad. En la superficie $R = 0$, por ejemplo, se define la función $V(\tau, 0)$, de tal manera que cada punto de donde sale una geodésica tenga asignada una pareja (U, V) y por lo tanto sus coordenadas (X, T) .

La importancia de este ejemplo radica en el hallazgo de que hay varias geodésicas nulas que salen del punto $\tau_s(R = 0)$ y llegan a distintos puntos en la singularidad. Lo que puede decirse al respecto es que existen varias curvas las cuales tienen un mismo valor para V y distintos valores para U . Por lo tanto al punto $\tau_s(0)$ corresponden varias parejas de coordenadas (T, X) que pueden graficarse en un diagrama conforme. Esto ayudará enormemente a aclarar lo que sucede en este punto, lo cual es el objetivo principal de esta sección.

Antes de escribir los detalles del algoritmo para generar el diagrama conforme, es necesario aclarar cuáles son las ecuaciones diferenciales que satisfacen las curvas nulas. Considérese la parte temporal-radial de la métrica de Tolman-Bondi:

$$\tilde{g} = -d\tau + \frac{1}{\gamma(\tau, R)^2} dR^2,$$

donde $\gamma = \frac{r'(\tau, R)}{\Gamma(R)}$. Sean $\frac{\partial}{\partial \tau}$ y $\frac{\partial}{\partial R}$ los vectores de la base de coordenadas (τ, R) . Sea

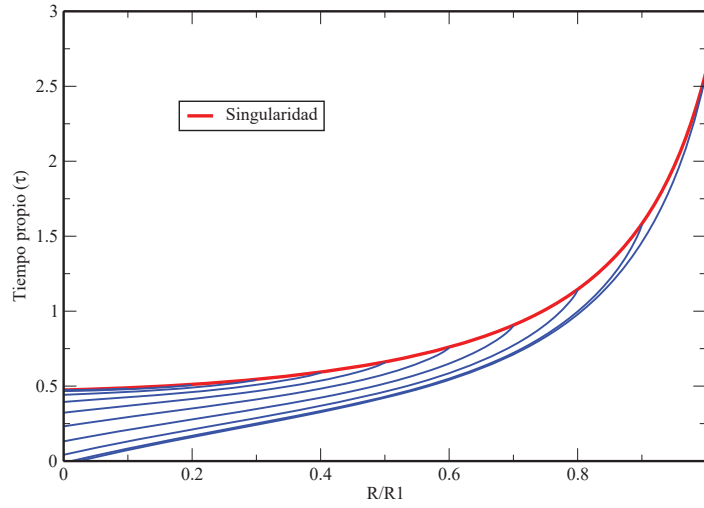


Figura 4.4: Geodésicas nulas salientes que provienen de $\tau = 0$ ó $R = 0$ y llegan a la singularidad.

k un vector nulo saliente y que apunta hacia el futuro, con componentes k_τ , k_R :

$$k = k_\tau \frac{\partial}{\partial \tau} + k_R \frac{\partial}{\partial R}.$$

Elijiendo arbitrariamente $k_\tau \equiv 1$ y dado que k satisface $\tilde{g}(k, k) = 0$, se obtiene $k_R = \gamma$, entonces:

$$k = \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma \frac{\partial}{\partial R}.$$

Se pretende encontrar las curvas integrales de k , es decir, aquellas que con tangentes a en todo punto a este campo vectorial. Sean (τ, R) las coordenadas de tales curvas. Si éstas se parametrizan por una variable real λ : $\tau = \tau(\lambda)$, $R = R(\lambda)$, y se asume que son tangentes a k , entonces se satisface:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d\lambda} &= 1, \\ \frac{dR}{d\lambda} &= \gamma. \end{aligned}$$

Finalmente, para procurar que las soluciones sean del mismo orden de magnitud, en particular cuando γ es mucho mayor que uno, se re-escalan las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{d\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \\ \frac{dR}{d\lambda} &= \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}},\end{aligned}\tag{4.12}$$

y serán éstas las que satisfagan las curvas nulas que se utilizarán para construir el diagrama conforme. Para lo cual se adoptará el siguiente algoritmo:

a) Se tiene la libertad de elegir las coordenadas nulas $U(\tau, R)$ y $V(\tau, R)$ sobre la singularidad, y se han tomado de tal manera que la imagen de la singularidad en el diagrama conforme sea una recta horizontal. En particular a lo largo de la singularidad se toman

$$\begin{aligned}U &= 1 - R, \\ V &= 1 + R,\end{aligned}\tag{4.13}$$

de tal manera que $T_s(X) = 1$ para toda X , donde T_s es la curva que describe la singularidad en el diagrama conforme. Esta simple elección es sugerida naturalmente por las definiciones generales $U = T - X$ y $V = T + X$.

b) Enseguida se construye la imagen de la superficie $R = R_1$ definiendo una malla numérica uniforme en ésta y construyendo curvas nulas entrantes hacia el futuro a partir de cada punto de la malla. Las ecuaciones a integrar son:

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{d\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \\ \frac{dR}{d\lambda} &= -\frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

El dato inicial se establece como:

$$U(\tau, R_1) = \tau/\tau_s(R_1) - R_1,$$

motivado por que las curvas pueden llegar a la singularidad o a la superficie $R = 0$. Si ocurre lo primero, el valor de U se reduce a (4.13) con $R = R_1$. Previendo el segundo caso se define

$$V(\tau, 0) = \tau/\tau_s(0),\tag{4.15}$$

de tal manera que pueda asignarse un valor de V a cada curva conociendo el punto a donde llega en la superficie $R = 0$, y por lo tanto se tiene la deseada pareja (U, V)

para los puntos de la malla en $R = R_1$ y por consiguiente sus coordenadas conformes. Si ocurre el caso en que alguna curva llegue a la singularidad, su valor asociado de V se calcula de (4.13).

c) La imagen de la superficie $R = 0$ se construye definiendo la malla sobre la singularidad integrando hacia el pasado para construir curvas nulas salientes a partir de cada punto. Las ecuaciones en este caso serán:

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{d\lambda} &= -\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \\ \frac{dR}{d\lambda} &= -\frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}.\end{aligned}$$

Aquellas curvas que resulten provenir de $R = 0$ tendrán asociado un valor para V , pues antes se ha definido $V(\tau, 0)$ en (4.15), entonces cada punto de donde sale una geodésica en esa superficie tendrá asociada una pareja (U, V) y sus coordenadas conformes.

d) La imagen del punto $\tau_s(0)$ en el diagrama conforme se obtiene al integrar hacia el pasado para construir curvas nulas salientes a partir de la malla de la singularidad y considerar las curvas que llegan al punto en cuestión; para decidir cuándo estas curvas lo han alcanzado, se establece una tolerancia numérica arbitrariamente pequeña. Todas estas curvas tendrán asociado el valor $V = 1$, lo cual se ve de (4.15) y es consistente con (4.13). Al mismo tiempo estas curvas tendrán asociados diferentes valores de U , los cuales vienen también del dato inicial (4.13).

e) La imagen del horizonte aparente se obtiene de tomar cada punto de la curva $\tau_{ah}(R)$ e integrar hacia el futuro a partir de ellos para construir dos curvas nulas, una entrante y una saliente. La entrante satisface (4.14) y la saliente (4.12). Para la entrante hay dos opciones: llega a la superficie $R = 0$ ó a la singularidad, pero en ambos casos se sabe cómo calcular el valor de V asociado a la curva y por lo tanto para el punto del que ha partido. Para la geodésica saliente hay otras dos opciones: llega a la superficie $R = 1$ o bien a la singularidad, y otra vez, ya se sabe cómo calcular el correspondiente valor de U a la curva y por lo tanto al punto de donde ha salido. Siguiendo este algoritmo puede obtenerse la pareja (U, V) para un punto arbitrario en el espacio tiempo dentro de la estrella, en particular para los puntos de la curva $\tau_{ah}(R)$.

f) La imagen en el diagrama conforme de la trayectoria de una partícula se obtiene bajo la misma idea que se ha seguido en el inciso anterior.

A continuación se muestra el diagrama conforme para el caso general de la nube de polvo con densidad no necesariamente uniforme y con velocidad inicial distinta de cero. Los parámetros son los mismos que los expuestos en la sección ?? del capítulo tercero.

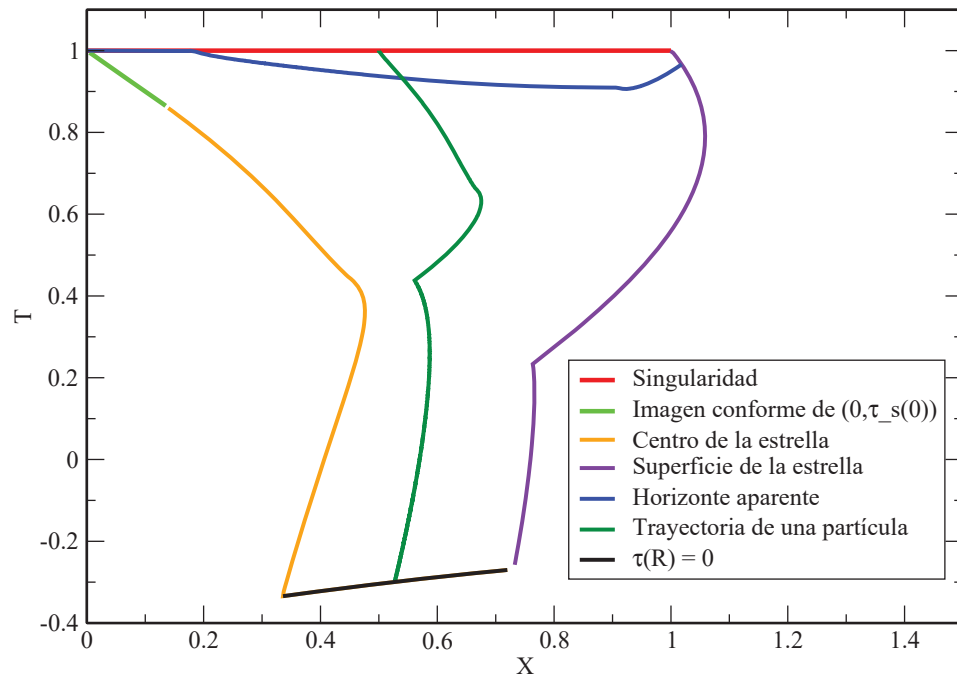


Figura 4.5: Diagrama conforme para el caso para el modelo con densidad inicial no uniforme y velocidad inicial nula. Notar que la singularidad es oculta.

Los rayos de luz en este diagrama son líneas a 45° . Notar que un rayo de luz saliente de línea verde correspondiente a la imagen conforme del punto especial $0, \tau_s(0)$ tiene como destino final la singularidad, por lo tanto ésta es débilmente censurada.

Capítulo 5

Conclusiones

El presente trabajo termina al haberse cumplido a cabalidad los objetivos planteados en el capítulo 1. Se ha procurado mantener un orden didáctico en la exposición y sobre todo la consistencia temática de la obra. En aquel primer capítulo se ha tenido la mejor disposición por facilitar al lector la introducción al estudio de la singularidad que resulta del colapso gravitacional de una estrella, luego se ha motivado la realización de esta Tesis citando la Conjetura de la Censura Cósmica y explicando el por qué de su gran interés científico y mostrando las consecuencias que tendría su posible invalidez. Una vez motivado el trabajo, en el segundo capítulo se emprendió la tarea de concretar un modelo para estudiar el colapso gravitacional; se hizo mediante un fluido perfecto en un espacio-tiempo esféricamente simétrico y se dedujeron las ecuaciones diferenciales dinámicas para el colapso a partir de las ecuaciones de Einstein, cumpliendo así con el objetivo *a)*. En el tercer capítulo se consideró el caso particular en el que la presión del fluido es nula -polvo- y se resolvieron analíticamente las ecuaciones, lo cual permitió obtener importantes resultados generales acerca de la censura de la singularidad, cumpliendo con el objetivo *b)*. Para ejemplificar tales resultados se expuso el caso aún más simplificado en el que el perfil inicial de masa es uniforme y la velocidad inicial del polvo es cero. Al respecto se contruyó numéricamente un diagrama conforme que muestra claramente que la singularidad es fuertemente censurada en este caso, así se cumplió el objetivo *c)*. La consecución del último objetivo se llevó a cabo en el capítulo cuarto, donde se abordó el problema de construir numéricamente diagramas conformes para casos más generales donde el modelo para el perfil inicial de densidad no es necesariamente uniforme y la velocidad inicial del polvo no es cero, cosa de la que no se tienen antecedentes en la literatura. El propósito fue determinar la censura de la singularidad en el punto muy particular correspondiente al centro de la estrella, el cual presenta dificultades teóricas considerables. La construcción de estos diagramas se ha llevado a cabo mediante una audaz estrategia que involucra la construcción de curvas nulas hacia el pasado o el futuro a partir del centro de la estrella, de su superficie y de la misma singularidad, además de las propiedades de una pareja de coordenadas nulas. El algoritmo numérico permite estudiar la naturaleza de la singularidad en varios casos al variar los parámetros del modelo, siendo el resultado más relevante el haber encontrado un caso en el que la densidad central de la estrella es suficientemente pequeña para que el colapso termine con una singularidad desnuda.

Para trabajos posteriores se pretende generalizar el algoritmo numérico para estudiar casos más generales que el polvo, es decir, con presión no nula, además de analizar la estabilidad del diagrama conforme bajo perturbaciones no necesariamente esféricas en los datos iniciales. Estas pretensiones no resultan triviales y representan una fuente de trabajo intenso. Por lo pronto queda la satisfacción de haber realizado un trabajo serio y consistente que termina dejando muy valiosas lecciones académicas.

Bibliografía

- [1] Robert M. Wald. Gravitational collapse and cosmic censorship. *Class. Quantum Grav*, 3:527–539, 2004.
- [2] Pankaj Joshi. Gravitational collapse: The story so far. *Praman, journal of physics*, 55:529–544, 2000.
- [3] R P A C Newman. Strengths of naked singularities in tolmán-bondi spacetimes. *Class. Quantum Grav*, 3:527–539, 1986.
- [4] R.M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, London, 1984.
- [5] C. W. Misner and D. H. Sharp. Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse. *Physical Review*, 136-2B:571–576, 1964.
- [6] W. T. Watterling W. H. Press, S. A. Teukolsky and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.