UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO FINITO DE ALGUNOS SISTEMAS CONTROLABLES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

JOHANNA DENISE GARCÍA SALDAÑA

ASESOR

DR. ABDON EDDY CHOQUE RIVERO

FEBRERO DE 2008

Dedicada a:

mi mayor tesoro: mi familia.

mi amado esposo Salomón,

mis hijos Ana Sofía y Diego Emilio,

mis padres y hermanos.

Agradecimientos.

Le doy las gracias a mi asesor el Dr. Abdón E. Choque Rivero por compartirme sus conocimientos y guiarme en la elaboración de esta tesis.

También le doy las gracias al Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y al Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, campus Morelia, por todo el apoyo que me brindaron durante mis estudios de Maestría.

Agradezco también a los sinodales de esta tesis: Dr. Anatoli Merzon, Dr. Osvaldo Osuna Castro, Dra. Tatjana Vukasinac Jovanov y Dr. Eugenio Pacelli Balanzario, por su apoyo.

Agradezco al CONACYT por haberme otorgado la beca para mis estudios de posgrado.

Contenido

Introducción.

Los objetos controlables se ven literalmente a cada paso, el automóvil, avión, todos los instrumentos eléctricos, equipados con reguladores (por ejemplo, un refrigerador eléctrico), etc. Lo común en todos estos objetos es que podemos "controlarlos", podemos de una u otra forma influir en su conducta.

Es necesario aclarar que en el presente trabajo consideraremos modelos matemáticos de procesos controlables y no así de objetos reales. Por ejemplo, consideremos un movimiento rectilineo de un automóvil. En cada momento de tiempo el estado del automóvil se puede caracterizar con dos magnitudes: la distancia recorrida s y la velocidad del movimiento v. Estas dos magnitudes cambian con el transcurrir del tiempo, pero no arbitrariamente, sino de acuerdo a la voluntad del conductor, el que puede, de acuerdo a su criterio, controlar el trabajo del motor, aumentando o disminuyendo la fuerza F desarrollada por el motor. Las magnitudes s, v que caracterizan las magnitudes del estado del automóvil, se llaman *coordenadas de fase*, y la magnitud F, representa el *parámetro de control*.

Lo dicho, induce de manera natural la siguiente descripción matemática del objeto controlable. La *posición* del objeto está dada (en cada momento de tiempo) mediante dos magnitudes x^1, x^2, los cuales se llaman coordenadas de fase del objeto. Es conveniente suponer que las magnitudes x^1, x^2 son coordenadas de algún vector (o punto) $x = (x^1, x^2)$ en el espacio de $\mathbb{R}^2$. Este punto se llama *posición de fase* del objeto, mientras que el espacio $\mathbb{R}^2$ se llama *espacio de fase* del objeto considerado.

El *movimiento* del objeto consiste, desde el punto de vista matemático, en que su estado cambia con el transcurso del tiempo, es decir, $x = x(t) = (x^1(t), x^2(t))$ es una magnitud variable. El movimiento del objeto no se lleva a cabo arbitrariamente, éste se puede controlar asignando valores al parámetro de control u; estas magnitudes se llaman parámetros de control. En otras palabras, podemos escoger una función $u = u(t)$, que describa el cambio del parámetro controlable en el transcurso del tiempo de acuerdo a nuestras necesidades. La asignación de la posición inicial de fase $x_0 = x(t_0)$ y del control $u(t)$, de manera unívoca determina el movimiento posterior del objeto. Este movimiento consiste en que el punto de fase $x(t)$ que representa la posición del objeto, se mueve al transcurrir el tiempo, describiendo en el espacio de fase una curva, que se llama *trayectoria de fase* del movimiento del objeto considerado.

Con relación a objetos controlables, es frecuente el siguiente **problema de control**: en el momento inicial de tiempo t_0 un objeto se encuentra en la posición de fase x_0; se requiere encontrar un control $u(t)$ tal que traslade el objeto a una posición de fase predetermitada x_1.

La ecuación de movimiento del objeto es la ley de cambio de las coordenadas de fase respecto del tiempo (tomando en cuenta la influencia del parámetro de control) y se decribe mediante ecuaciones diferenciales o ecuaciones en diferencias. Nosotros consideraremos el primer caso, es decir trataremos con ecuaciones de la forma,

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{0.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y f es una función suave.

Recalquemos que a diferencia de los resultados principales del estudio de ecuaciones con parámetros, los cuales se refieren a la continuidad y diferenciabilidad de las soluciones del sistema (0.1) que dependen del parámetro, en la teoría de control el parámetro u es una función $u : [t_0, \infty) \to \Omega$ continua a trozos (por la izquierda), que depende del tiempo, llamada **control** del sistema (0.1).

Conociendo la conducta del parámetro de control u, es decir, conociendo las funciones de control $u(t)$ para $t > t_0$, del sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = f(x, u(t)) \tag{0.2}$$

podemos unívocamente determinar el movimiento del objeto (para $t > t_0$), si conocemos la posición de fase del objeto en el momento $t = t_0$. Es decir, mediante la función dada $u(t)$ y la posición fase inicial x_0 de manera unívoca se determina la trayectoria de fase $x(t)$, $t > t_0$.

Con frecuencia el parámetro de control u no puede admitir valores completamente arbitrarios, sino están sujetos a algunas restricciones, denominados **controles admisibles**. Así, por ejemplo, en el caso del objeto descrito en la página 1, es natural asumir que la fuerza u, que desarrolla el motor, no puede ser tan grande como se quiera, sino que ésta sujeta a la restricción $\alpha \leq u \leq \beta$, donde α y β son constantes, que caracterizan al motor. En particular, para $\alpha = -1$, $\beta = 1$, obtenemos la restricción $-1 \leq u \leq 1$, lo cual significa que el motor puede desarrollar una fuerza a lo largo del eje x^1 tanto en dirección positiva como negativa pero cuyo valor absoluto no excede uno.

Un sentido similar tienen las restricciones en los casos cuando los parámetros de control representan la cantidad de combustible que se transmite al motor, la temperatura, fuerza de tensión, presión etc, los cuales en virtud a la construcción del objeto en condiciones de explotación no puede tomar magnitudes tan grandes como se desee. Por ejemplo, para el automóvil que se mueve en el plano, uno de los parámetros de control representa el ángulo de giro del volante; sin embargo, precisamente debido a particularidades de construcción del automóvil este parámetro está sujeto a restricciones.

El objeto principal de este trabajo son los sistemas de ecuaciones diferenciales que dependen de un parámetro u, control del sistema, tales sistemas se llaman sistemas de ecuaciones diferenciales controlables, los cuales, en general, describen procesos dinámicos de fenómenos físicos. Así, consideramos sistemas del tipo

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r. \tag{0.3}$$

donde $\mathbb{R}^n$ representa el espacio vectorial de estados x del sistema; R^r representa el espacio de controles; $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ representa el conjunto de restricción sobre u. El vector control u, que en particular puede ser escalar, puede también depender de la posición x, es decir $u = u(x)$. Este tipo de control, conocido como control de retroalimentación (feedback control) o **control posicional**, en el caso de perturbaciones, tiende a corrigirlos automáticamente, a diferencia del *control preprogramado* $u = u(t)$.

En el presente trabajo asumiremos que la función f está definida y es suficientemente suave en un dominio $D \subset \mathbb{R}^{n+r}$, el origen pertenece a D, además se cumple $f(0,0) = 0$, es decir, el origen es un punto de equilibrio del sistema.

En esta tesis consideramos el problema de estabilizar sistemas controlables en tiempo finito, este problema es conocido en la teoría de control como el **problema de síntesis**, el cual consiste en:

Construir un conjunto de controles posicionales $u(x)$ tales que:

i) $u(x)$ sea una función continua en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, y cumpla con la restricción $| u(x) |\leq d$

ii) La trayectoria del sistema cerrado $\dot{x} = f(x, u(x))$, que comienza en $x(0) = x_0$ termine en el origen en tiempo finito $T(x_0) < \infty$.

Para la resolución del problema citado utilizaremos el método de la *función de controlabilidad* $\theta(x)$ (CF) [12], que representa una función del tipo de Lyapunov. Con ayuda del método de (FC), el problema de síntesis de sistemas lineales controlables ha sido resuelto en [12], [14], [15], y se demuestra que $T(x_0)$ es tiempo finito mediante una estimación.

En la presente tesis estudiamos los resultados presentados en [3], [4] en los cuales no sólo se dió solución al problema de síntesis para sistemas lineales, sino se obtuvo $T(x_0)$ en forma exacta. Además se obtienen los controles posicionales restringidos expresados en forma *explícita*, es decir, estos dependen de las condiciones iniciales x_0 y de la función f. Esto es posible gracias al uso del método de la Función de Controlabilidad.

En el capítulo 1 estudiaremos lo referente a la estabilidad de los *puntos de equilibrio* de sistemas de ecuaciones y mencionaremos los métodos en los cuales nos basaremos para decir que un *punto de equilibrio* es estable o inestable.

En el capítulo 2 daremos los conceptos básicos en el estudio de sistemas controlables y los métodos de estabilización de tales sistemas.

Finalmente en el capítulo 3 discutiremos sobre las propiedades de la función de controlabilidad y daremos solución al problema de síntesis, y para terminar analizamos unos ejemplos del problema planteado.

Notación.

El conjunto de todas las matrices $n \times m$ en el campo de los números reales lo denotaremos por $\mathbf{M}(n,m)$ y la matriz identidad la denotaremos por I.

El producto escalar $\langle x, y \rangle$ y la norma $|x|$, de elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$ con coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, \ldots, y_n$, son definidos como

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \qquad |x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}.$$

La transpuesta de una matriz A es denotada por A^*. Una matriz $A \in \mathbf{M}(n,n)$ es llamada simétrica si $A = A^*$.

Si A es una matriz simétrica y $\langle Ax, x \rangle > 0$ para $x \neq 0$ entonces A es llamada positiva definida y escribimos $A > 0$. Tratando $x \in \mathbb{R}^n$ como un elemento de $\mathbf{M}(n,1)$ tenemos $x^* \in \mathbf{M}(1,n)$ así podemos escribir $\langle x, y \rangle = x^* y$ y $|x|^2 = x^* x$.

La inversa de una matriz A la denotaremos por A^{-1}. El rango de la matriz A se denota como $\operatorname{rang}(A)$.

Si $F(t) = (f_{ij}) \in \mathbf{M}(n,m)$, $t \in [0,T]$ entonces por definición

$$\int_0^T F(t)dt = \left(\int_0^T f_{ij} dt \right),$$

bajo la condición de que cada $f_{ij}(t)$ es integrable.

La primera y segunda derivadas de una función $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ serán denotadas por $\dot{x}$, $\ddot{x}$ y la derivada de orden n será denotada por $x^{(n)}$.

Por W representaremos un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

$C^n(W)$ representa el conjunto de funciones con valores reales de clase C^n en el abierto W. El rango de una matriz A se denota como $\operatorname{rang}(A)$.

1

Estabilidad en el sentido de Lyapunov.

La noción de estabilidad que consideraremos en este trabajo es la postulada por el matemático ruso A. M. Lyapunov.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $f : W \to \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in C^1(W)$.

Definición 1.1. Un punto $x_0 \in W$ se llama **punto de equilibrio** del sistema (1.1) si $f(x_0) = 0$.

Ejemplo 1.1. Sea $n = 2$ y consideremos el sistema (1.1) con

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Claramente $f(x) = 0$ en los puntos $x = (1, 0)^*$ y $x = (-1, 0)^*$, estos son los únicos puntos de equilibrio de (1.1).

El análisis de las soluciones del sistema (1.1) cerca de los puntos de equilibrio es uno de los principales objetivos en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Un punto de equilibrio, sin embargo, ha de satisfacer un cierto criterio de *estabilidad* para ser relevante físicamente.

Definición 1.2. Sea $x_0 \in W$ un punto de equilibrio del sistema (1.1). Se dice que:

a) x_0 es **estable según Lyapunov** (ó simplemente estable) si para toda vecindad U de x_0 existe una vecindad $U_1 \subset U$ de x_0 tal que toda solución $x(t)$ con $x(0)$ en U_1 está definida y permanece en U para todo $t > 0$.

b) x_0 es **asintóticamente estable** si es estable y cada vecindad U_1 se puede elegir de modo que para toda solución $x(t)$ con $x(0)$ en U_1 se cumple $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$.

c) x_0 es **inestable** si no es estable.

Para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio x_0 del sistema (1.1), utilizaremos los métodos indirecto y directo de Lyapunov.

1.1 Método indirecto de Lyapunov.

El método indirecto de Lyapunov permite analizar la estabilidad en el punto de equilibrio x_0 mediante la **linealización** de (1.1) alrededor de x_0, esto es, estudiando la estabilidad cerca del origen del sistema lineal

$$\dot{x} = Ax, \qquad \text{donde} \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(x)\Big|_{x=x_0}. \tag{1.2}$$

El sistema lineal (1.2) tiene al origen $x = 0$ como punto de equilibrio y el comportamiento de las soluciones de este sistema está completamente determinado por los valores propios de la matriz A (ver Teorema 1.1 en [19], pág. 55). En particular se tiene que el origen es asintóticamente estable si y sólo si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa (ver Teorema 2 en [19], pág 56).

Si una matriz A tiene todos sus valores propios con parte real negativa, entonces A es llamada matriz **de Hurwitz**. Por lo tanto el origen del sistema (1.2) es asintóticamente estable si y sólo si A es de Hurwitz.

Teorema 1.1. (Método indirecto de Lyapunov). *El punto de equilibrio x_0 del sistema no lineal (1.1) es asintóticamente estable si el origen del sistema lineal (1.2) es asintóticamente estable, esto es, si* *todos los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa. El punto de equilibrio x_0 es inestable si al menos un valor propio de A tiene parte real positiva.*

Ejemplo 1.2. Consideremos el sistema no lineal en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 - (x_2 - 1)^2\\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 - (x_2 - 1).\end{aligned}$$

Este sistema tiene un punto de equilibrio en $x_0 = (0, 1)^*$ y su linealización en x_0 está dada por

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz A son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -1$. Por lo tanto utilizando el método indirecto de Lyapunov concluimos que x_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Notemos que el método indirecto de Lyapunov no establece condición alguna para cuando algún valor propio de la matriz A tiene parte real igual a cero, en este caso la linealización no es suficiente para determinar la estabilidad del punto de equilibrio del sistema no lineal. En la siguiente sección describiremos otro método, desarrollado también por Lyapunov, que en algunas ocasiones resuelve esta dificultad.

1.2 Método directo de Lyapunov.

A finales del siglo XIX Lyapunov desarrolló otro método para el análisis de la estabilidad en los puntos de equilibrio del sistema (1.1), este método considera una nueva función con ayuda de la cual se establece si el sistema estudiado es estable o asintóticamente estable, el cuál fué denominado método directo de Lyapunov o también conocido como teorema de Lyapunov sobre la estabilidad.

Teorema 1.2. (**Método directo de Lyapunov**). *Sea $x_0 \in W$ un punto de equilibrio de (1.1). Si existe $V : U \to \mathbb{R}$ una función continua definida en una vecindad $U \subset W$ de x_0, derivable en $U \setminus \{x_0\}$, tal que:*

a) $V(x_0) = 0$, $V(x) > 0$ *en* $U \setminus \{x_0\}$ *y* *b)* $\dot{V}|_{(1.1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k \leq 0$ *en* $U \setminus \{x_0\}$,

entonces x_0 *es estable, si además*

c) $\dot{V}|_{(1.1)} < 0$ *en* $U \setminus \{x_0\}$,

entonces x_0 *es asintóticamente estable.*

Definición 1.3. Una función $V : U \to \mathbb{R}$ que satisface las condiciones a) y b) del teorema, se llama **función de Lyapunov** para x_0. Una función V que satisface la condición a) del teorema con $x_0 = 0$ se dice que es **positiva definida**.

Los métodos directo e indirecto de Lyapunov son clásicos, su demostración puede consultarse en la mayoria de los textos de ecuaciones diferenciales ordinarias, ver por ejemplo [8], [11], [19].

Ejemplo 1.3. Consideremos el sistema en $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_2(x_3 - 1) \\ \dot{x}_2 &= -x_1(x_3 - 1) \\ \dot{x}_3 &= -x_3^3. \end{aligned}$$

El único punto de equilibrio es el origen. La linealización de este sistema en $x_0 = (0, 0, 0)$ es:

$$\dot{x} = Ax \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

La matriz A tiene dos valores propios imaginarios y un valor propio igual a cero. Por lo tanto no podemos decidir sobre la estabilidad utilizando el método indirecto de Lyapunov. Sin embargo, si utilizamos la función positiva definida $V = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$, obtenemos:

$$\dot{V} = 2(x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 + x_3\dot{x}_3)$$

de modo que

$$\frac{1}{2}\dot{V} = 2x_1x_2(x_3 - 1) - 2x_1x_2(x_3 - 1) - x_3^4 = -x_3^4.$$

Así $\dot{V} \leq 0$, por lo tanto aplicando el método directo de Lyapunov concluimos que el origen es estable.

Ejemplo 1.4. El sistema de ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}^2$ dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 3x_2^3, \end{aligned}$$

tiene al origen como punto de equilibrio y considerando la función positiva definida $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, obtenemos que

$$\dot{V} = 2x_1(x_2 - x_1^3) + 2x_2(-x_1 - 3x_2^3) = -2(x_1^4 + 3x_2^4).$$

Así $\dot{V} < 0$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, entonces utilizando el método directo de Lyapunov, el origen es asintóticamente estable.

Una desventaja que se presenta al tratar de aplicar el método directo de Lyapunov es que no existe un método generalizado para hallar funciones de Lyapunov, por lo que es necesario proponer una función positiva definida y probar si ésta cumple las condiciones *b*) o *c*) del Teorema 1.2.

Para sistemas lineales, las funciones positivas definidas V más simples, que son buenas candidatas a ser funciones de Lyapunov, son las formas cuadráticas positivas definidas, esto es,

$$V(x) = x^T P x$$

donde $P \in \mathbf{M}(n, n)$ simétrica y positiva definida. Recordemos que una matriz P es positiva definida y escribimos $P > 0$ si y sólo si todos los valores propios de P son positivos, de manera equivalente si y sólo si todos sus menores diagonales principales son positivos (ver apendice).

Ejemplo 1.5. Sea a un parámetro real y consideremos

$$\begin{aligned} V(x) &= ax_1^2 + 2x_1x_3 + ax_2^2 + 4x_2x_3 + ax_3^2 \\ &= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x^T P x. \end{aligned}$$

los menores diagonales principales de P son a, a^2 y $a(a^2 - 5)$. Por lo tanto, $V(x)$ es positiva definida si $a > \sqrt{5}$.

La estabililidad asintótica del origen del sistema (1.2) también puede ser estudiada usando el método directo de Lyapunov. Consideremos una función cuadrática positiva definida $V(x) = x^T P x$. La derivada de V respecto del sistema (1.2) está dada por:

$$\dot{V}(x)\big|_{(1.2)} = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (A^T P + PA) x = -x^T Q x$$

donde Q es la matriz simétrica definida por:

$$A^T P + PA = -Q \tag{1.3}$$

Si Q es positiva definida, el origen es asintóticamente estable. La ecuación (1.3) es llamada **ecuación de Lyapunov.**

El siguiente teorema caracteriza la estabilidad asintótica del origen del sistema lineal (1.2) en términos de la solución de la ecuación de Lyapunov.

Teorema 1.3. *Una matriz A es de Hurwitz si y sólo si dada cualquier matriz simétrica y positiva definida Q existe una matriz simétrica y positiva definida P, tales que satisfacen la ecuación de Lyapunov (1.3). Además, si A es de Hurwitz, entonces P es la única solución de (1.3).*

La prueba de este teorema puede consultarse en [11], pág. 136.

2

Sistemas controlables y su estabilización.

En este capítulo introduciremos conceptos básicos de la teoría de control que permitirán el desarrollo de este trabajo. En la sección 1 hablaremos sobre los sistemas lineales controlables, definiremos los conceptos de controlabilidad y estabilización para este tipo de sistemas. En la sección 2 extendemos los conceptos dados en la sección 1 a sistemas no lineales.

2.1 Sistemas lineales controlables.

El objeto básico en el estudio de la teoría de control es un sistema lineal de la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r \tag{2.1}$$

donde $A \in \mathbf{M}(n,n)$ y $B \in \mathbf{M}(n,r)$ y el parámetro de control u como una función $u = u(t)$ definida en $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}^r$ continua a trozos (por la izquierda), se llama control admisible o simplemente **control** del sistema (2.1).

Definición 2.1 . Si para un par de puntos x_0, $x_1 \in \mathbb{R}^n$ existe un control $u : [0,T] \to \mathbb{R}^r$ tal que la solución $x(t)$ del problema de valor inicial

$$\dot{x} = Ax + Bu(t), \qquad x(0) = x_0, \tag{2.2}$$

satisface que $x(T) = x_1$ entonces se dice que el control $u(t)$ traslada x_0 a x_1 en tiempo T.

Definición 2.2 . El sistema (2.1) se llama **completamente controlable** en el intervalo $[0,T]$ si para cualesquiera dos puntos x_0 y x_1 de $\mathbb{R}^n$ existe un control $u:[0,T]\to\mathbb{R}^r$ que traslada x_0 a x_1 en tiempo T.

Ejemplo 2.1 . Consideremos el sistema:

$$\dot{x}=u.$$

Si tomamos $u(t)=\frac{2(x_1-x_0)}{T^2}t$, entonces para cualesquiera dos puntos x_0, $x_1\in\mathbb{R}$ se tiene que la trayectoria solución $x(t)=\frac{(x_1-x_0)}{T^2}t^2+x_0$ satisface $x(0)=x_0$ y $x(T)=x_1$. Por lo tanto, el sistema es completamente controlable.

Ejemplo 2.2 . Consideremos el sistema:

$$\dot{x}=\alpha x+u. \quad \text{donde} \quad \alpha\neq 0 \quad \text{y} \quad u\in[-1,1]$$

Consideremos el caso $\alpha>0$. Sea u un control arbitrario y $x(t)$ la trayectoria solución, la cual sabemos es:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t}x(0)+e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha t}u(s)ds \\ &\geq x(0)-e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha t}ds \\ &= x(0)+\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha} \\ &> x(0), \end{aligned}$$

para $t>0$. Por lo tanto los puntos menores que $x(0)$ no pueden ser alcanzados desde $x(0)$ por lo tanto el sistema no es controlable.

Uno de los principales resultados para la controlabilidad del sistema lineal (2.1) es el siguiente

Teorema 2.1 . *El sistema lineal (2.1) es completamente controlable en el intervalo $[0,T]$ si y sólo si se cumple una de las siguientes condiciones:*

1. *rang*$(B,\, AB,\, A^2B,\, \cdots, A^{n-1}B)=n$ *(criterio de Kalman)*

2. *$N(T) > 0$ donde $N(T) = \int_0^T e^{-At} BB^* e^{-A^*t} dt$.*
Además la función

$$u(t) = B^* e^{-A^*t} N^{-1}(T)(e^{-At} x_1 - x_0)$$

es uno de los posibles controles que translada el punto x_0 al punto x_1 en tiempo T.

Ejemplo 2.3. Consideremos el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando el criterio de Kalman se tiene que

$$\text{rang}(B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

por lo tanto el sistema es completamente controlable.

2.1.1 Sistema canónico

Sean $A, \tilde{A} \in \mathbf{M}(n,n)$ y $B, \tilde{B} \in \mathbf{M}(n,r)$. Decimos que los sistemas:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \text{y} \qquad \dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u$$

son **equivalentes** si existen matrices $P \in \mathbf{M}(n,n)$ y $S \in \mathbf{M}(r,r)$ tales que

$$\tilde{A} = PAP^{-1} \qquad \text{y} \qquad \tilde{B} = SBS^{-1}.$$

En el conjunto de todos los sistemas lineales de la forma (2.1) podemos definir la relación: dos sistemas estan relacionados si ellos son equivalentes y es fácil de ver que esta es una relación de equivalencia. Además es claro que si dos sistemas son equivalentes y uno de ellos es controlable el otro también lo será.

El caso más sencillo para dar una descripción completa de las clases de equivalencia de la relación anterior es cuando $B \in \mathbf{M}(n,1)$ $(r = 1)$, es decir, cuando tenemos un solo parámetro de control. Bajo esta suposición, la matriz B puede ser considerada como un vector, por lo que cambiaremos la notación B en (2.1) por b.

La descripción de las clases de equivalencia de los sistemas lineales controlables esta dada por el siguiente:

Lema 2.1 . *Todo sistema lineal completamente controlable de la forma (2.1) es equivalente al sistema lineal*

$$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{b}u, \tag{2.3}$$

donde:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \end{pmatrix}, \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

y los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los coeficientes del polinomio característico de la matriz A:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n - a_n\lambda^{n-1} - \cdots - a_1.$$

Para la prueba de este lema ver [10], pág. 23.

Dentro de las representaciones canónicas (2.3) de los sistemas controlables existe una muy especial, la que corresponde al sistema:

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{2.4}$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Este particular sistema es llamado el **sistema canónico**.

Observación 2.1 . La representación canónica de un sistema controlable se puede llevar a un sistema canónico introduciendo un nuevo control $v = -\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + u$.

El sistema canónico será uno de los objetos básicos en este trabajo.

2.1.2 Estabilización.

El problema de estabilización para el sistema (2.1) consiste en hallar un **control posicional** $u = u(x)$, es decir un control que depende de las coordenadas del espacio fase, tal que $u(0) = 0$ y el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu(x), \tag{2.5}$$

sea asintóticamente estable en el origen.
El sistema (2.5) es conocido como **sistema cerrado**.

El criterio de estabilización (de existencia del control estabilizador) para sistemas lineales controlables (2.1) sin restricción en el control, consiste en que el subespacio K^+ generado por los vectores propios con parte real mayor ó igual a cero, de la matriz A satisfaga

$$K^+ \subset span(B, AB, \ldots, A^{n-1}B).$$

donde *span* denota el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores columna de la matriz $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$. La construcción del control estabilizador se lleva a cabo de la siguiente manera: Primero escogemos una forma cuadrática $V(x) = \langle Fx, x\rangle$ como posible candidata a función de Lyapunov. Después buscamos un control de la forma $u(x) = -Px$ tal que la solución trivial $(x(t) \equiv 0)$ del sistema cerrado $\dot{x} = (A - BP)x$ sea asintóticamente estable.
Para esto, sea Q cualquier matriz simétrica positiva definida y resolvemos para F la ecuación de Lyapunov

$$(A - BP)^*F + F(A - BP) = -Q$$

De esto, si $(A - BP)$ es Hurwitz, la ecuación de Lyapunov tiene una única solución positiva definida. La función cuadrática $V(x) = \langle Fx, x\rangle$ es una función de Lyapunov para el sistema cerrado en una vecindad del origen.

Definición 2.3. El sistema lineal (2.1) se llama **estabilizable** si existe un control $u = Px$ donde P es una matriz $r \times n$ tal que todas las soluciones $x(t)$ del sistema

$$\dot{x} = Ax + BPx, \tag{2.6}$$

tienden a cero cuando t tiende a infinito.

Es importante mencionar que se puede tener sistemas estabilizables que no son completamente controlables como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. Consideremos el sistema lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \qquad \Leftrightarrow \ \dot{x} = Ax + bu, \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned}$$

donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Queremos ver que este sistema es estabilizable, para esto, buscamos un control posicional $u = u(x)$ tal que la solución trivial del sistema dado para $u = u(x)$ sea asintóticamente estable.
Tomamos $u(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$, en este caso, el sistema toma la forma:

$$\dot{x} = A_1 x, \qquad \text{donde} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix},$$

donde los números reales a_1, a_2, a_3 los escogemos de tal manera que la ecuación característica $(\lambda+1)(\lambda^2 - a_3\lambda - a_2) = 0$ tenga raíces con parte real negativa, (por ejemplo, $a_2 = -1$ y $a_3 = -2$) y así garantizar que la solución trivial será asintóticamente estable.

De esta manera el control resuelve el problema de estabilización del sistema en todo el espacio. Sin embargo, este sistema no es completamente controlable, pues

$$\operatorname{rang}(b, Ab, A^2b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

y por el criterio de Kalman (Teorema 2.1) concluimos que el sistema no es controlable.

Lema 2.2. *El sistema canónico (2.4) es estabilizable.*

Demostración. El sistema canónico (2.4) se puede escribir como el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= u. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Mediante el cambio de variables $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $\ldots$, $x_n = y^{(n-1)}$, el sistema (2.7) es equivalente a la ecuación diferencial de orden n:

$$y^{(n)} = u. \tag{2.8}$$

Si colocamos

$$u = a_1 y + a_2 \dot{y} + \cdots + a_n y^{(n-1)} \tag{2.9}$$

en la ecuación (2.8), entonces obtenemos la ecuación:

$$y^{(n)} - a_n y^{(n-1)} - a_{n-1} y^{(n-2)} - \cdots - a_1 y = 0, \tag{2.10}$$

cuya ecuación característica es:

$$\varphi(\lambda) := \lambda^n - a_n \lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \cdots - a_1.$$

Si elegimos los coeficientes a_j de tal forma que

$$\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j),$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ números negativos distintos, entonces la solución general de (2.10) esta dada por

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}. \tag{2.11}$$

Por lo tanto, como $\lambda_j < 0$, en (2.11) tenemos que $y(t)$ y todas sus derivadas tienden a cero cuando t tiende a infinito.

Debido a que la solución del sistema (2.7) está dada por:

$$x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

entonces $x(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, donde el control $u(t)$ esta dado en (2.9) con $y = y(t)$ la solución (2.11).

□

2.2 Sistemas no lineales.

Ahora queremos extender los conceptos y propiedades anteriores para un sistema no lineal.

$$\dot{x} = f(x, u), \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{2.12}$$

donde $f \in C^1(W)$ y $u : [0, T] \to \mathbb{R}^r$ es el control del sistema (2.12).

El concepto de traslación de puntos es el mismo que para sistemas lineales, esto es, se dice que un control $u(t)$ traslada un punto arbitrario $x_0 \in W$ en otro punto cualquiera $x_1 \in W$ en tiempo T, si la solución $x(t)$ del problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \qquad x(0) = x_0, \tag{2.13}$$

satisface que $x(T) = x_1$.

Definición 2.4. El sistema (2.12) se llama **localmente controlable** en $\bar{x}$ y en tiempo T si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta \in (0, \epsilon)$ tal que para cualesquiera dos puntos x_0 y x_1 de $B(\bar{x}, \delta)$ existe control $u(t)$ definido en el intervalo $[0, t] \subset [0, T]$ tal que traslada x_0 en x_1 y la solución $x(t)$ del sistema (2.13) es tal que $x(s) \in B(\bar{x}, \epsilon)$ para todo $s \in [0, t]$.

En lo que sigue vamos a suponer que $x_1 = 0$ y $f(0, 0) = 0$.

2.2.1 Estabilización.

La estabilización de un sistema no lineal controlable se puede llevar a cabo mediante la estabilización de su linealización dada por el siguiente sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{2.14}$$

donde

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x, u)\Big|_{x=0,\, u=0}; \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u)\Big|_{x=0,\, u=0}.$$

Ejemplo 2.5. Queremos estabilizar el sistema

$$\dot{x} = x^2 + u,$$

usando un control posicional. La linealización en el origen nos da el sistema lineal $\dot{x} = u$, el cual puede ser estabilizado usando $u = -kx$ con $k > 0$. Cuando este control se aplica al sistema no lineal, tenemos

$$\dot{x} = x^2 - kx,$$

cuya linealización en el origen es $\dot{x} = -kx$. Entonces por el Teorema 1.1, el origen es asintóticamente estable, y decimos que $u = -kx$ es un control estabilizador.

3

Estabilización en tiempo finito.

3.1 Problema de síntesis.

El problema de estabilización en tiempo finito de sistemas lineales controlables con control restringido, es clásico en la teoría de control, se conoce como problema de síntesis y es planteado de la siguiente manera.

Problema de síntesis: Consideremos un sistema controlable

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in W \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r, \tag{3.1}$$

se quiere construir un conjunto de controles posicionales $u(x)$ tales que:

i) $u(x)$ sea una función continua en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, y cumpla con la restricción $\mid u(x) \mid \leq d$

ii) La trayectoria del sistema cerrado $\dot{x} = f(x, u(x))$, que comienza en $x(0) = x_0$ termine en el origen en tiempo finito $T(x_0) < \infty$.

Entre las particularidades de este problema se tiene la siguiente:

El sistema cerrado no satisface las condiciones del Teorema de Picard sobre existencia y unicidad (ver Apéndice) en la región donde se resuelve el problema de síntesis, ya que a través del punto $x = 0$ pasan un conjunto infinito de trayectorias. Esta dificultad se puede omitir si:

a) consideramos controles continuos para $x \neq 0$, que satisfagan la condición de Lipschitz en cada anillo $\{x : 0 < \rho_1 \leq ||x|| \leq \rho_2\}$ y tales que para $\rho_1 \to 0$ la condición de Lipschitz crezca sin cota.

b) ó consideramos controles discontinuos, los cuales requieren de una nueva definición de solución de sistemas de ecuaciones diferenciales con parte derecha discontinua(ver [1]). Este caso no lo consideraremos en este trabajo.

c) además ya que el control $u(x)$ satisface la restricción $u \in \Omega$, entonces aún en el caso lineal el sistema cerrado es no lineal.

V.I. Korobov sugirió en [12] un método de resolución del problema de síntesis para sistemas lineales y algunos no lineales, este método está basado en la construcción de una función $\theta(x)$ mediante la cual se construye el control posicional buscado $u(x) = \tilde{u}(x, \theta(x))$. La función $\theta(x)$ es una función del tipo de Lyapunov y se describe en el siguiente Teorema.

3.2 Función de controlabilidad

Teorema 3.1. **(teorema fundamental de la función de controlabilidad)**-[Korobov, 1979]. *Consideremos el sistema controlable dado por:*

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r, \quad f : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n, \tag{3.2}$$

Supongamos que la función f satisface la condición de Lipschitz

$$||f(x'', u'') - f(x', u')|| \leq L_1(\rho, \rho_1)(||x'' - x'|| + ||u'' - u'||)$$

en cada región $(x, u) : 0 < \rho \leq ||x|| < \rho_1, \quad u \in \Omega$.

Si existe una función $\theta(x)$ continua en una vecindad G del origen y un control $u(x)$ con $x \in Q$ donde $Q = \{x : \theta(x) \leq C, \quad C > 0\}$ (C es tal que el conjunto Q es acotado) tales que:

1. *$\theta(x)$ es continuamente diferenciable en $G \setminus \{0\}$.*

2. *$\theta(0) = 0$, $\theta(x) \geq 0$ para $x \in G \setminus \{0\}$.*

3. *El control $u(x)$, cumple la condición de Lipschitz es decir, se tiene*

   $$||u(x'') - u(x')|| \leq L_2(\rho, \rho_1)||x'' - x'||$$

   para $x \in Q$ y $0 < \rho \leq ||x|| < \rho_1$.

4. Se satisface la desigualdad:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}|_{(3.2)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \leq -\beta \theta^{1-1/\alpha}(x) \qquad (3.3) \\ & \quad \textit{para} \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \end{aligned}$$

Entonces la trayectoria del sistema $\dot{x} = f(x, u(x))$, que comienza en un punto $x(0) = x_0 \in Q$, termina en el origen en tiempo finito:

$$T(x_0) \leq \frac{\alpha}{\beta} \theta^{1/\alpha}(x_0). \qquad (3.4)$$

Demostración. Calculamos la derivada de $\theta(x)$ respecto al tiempo, evaluada en el sistema $\dot{x} = f(x, u(x))$ sobre la trayectoria $x(t)$ que comienza en el punto $x_0 \in Q$. Tenemos:

$$\dot{\theta}(x(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta(x(t))}{\partial x_i} f_i(x(t), u(x(t)))$$

ya que se satisface la desigualdad (3.3), se tiene:

$$\dot{\theta}(x(t)) \leq -\beta \theta^{1-1/\alpha}(x(t)).$$

Si la trayectoria $x(t) \neq 0$ entonces

$$\frac{d}{dt} \theta^{1/\alpha}(x(t)) = \frac{\dot{\theta}(x(t))}{\alpha \theta^{1-1/\alpha}(x(t))} \leq \frac{\beta \theta^{1-1/\alpha}(x(t))}{\alpha \theta^{1-1/\alpha}(x(t))} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Sea $\tau > 0$ cualquier número tal que la solución $x(t)$ está bien definida en $[0, \tau]$. Integramos la última desigualdad de 0 a τ, entonces:

$$\theta^{1/\alpha}(x(\tau)) - \theta^{1/\alpha}(x_0) \leq -\frac{\beta}{\alpha} \tau$$

o equivalentemente:

$$\theta^{1/\alpha}(x(\tau)) \leq \theta^{1/\alpha}(x_0) - \frac{\beta}{\alpha} \tau \qquad (3.5)$$

Denotemos por $B(0, \epsilon)$ y $B(0, \rho_0)$ las bolas con centro en 0 y radios ϵ y ρ_0 respectivamente y $\epsilon \leq ||x_0||$, ρ_0 tal que $Q \subset B(0, \rho_0)$. Como cualquier solución que comienza en un punto $x_0 \in Q$ se queda en Q (debido a que $\dot{\theta}(x(t)) \leq 0$) y si $x', x'' \in Q \setminus B(0,\epsilon)$ tiene lugar la desigualdad:

$$||f(x'', u(x'')) - f(x', u(x'))|| \leq L_1(\epsilon, \rho_0)\,(1 + L_2(\epsilon, \rho_0))\,||x'' - x'||$$

Entonces la solución $x(t)$ que empieza en $x_0 \in Q$, se puede extender al segmento $[0, T_1]$ tal que si $t \in [0, T_1]$ entonces $||x(t)|| > \varepsilon$, por eso para esos valores de t, la desigualdad (3.5) es cierta.

Probemos que en el tiempo $T(\varepsilon) \leq \frac{\alpha}{\beta}\theta^{1/\alpha}(x_0)$ la trayectoria $x(t)$ llega a la frontera de la bola $S(\varepsilon)$. Suponiendo lo contrario, obtenemos que $||x(t)|| > \varepsilon$ para $0 \leq t \leq T$ y $T > \frac{\alpha}{\beta}\theta^{1/\alpha}(x_0)$ pero si $\tau \neq T$, la parte derecha de la desigualdad (3.5) es no positiva, pero la parte izquierda de la misma desigualdad cuando $\tau \neq T$, es positiva ya que $||x(t)|| > \varepsilon$. Como el tiempo de llegada a la frontera de la bola de radio ε crece monotonamente si ε decrece y como $T(\varepsilon) \leq \frac{\alpha}{\beta}\theta^{1/\alpha}(x_0)$, entonces existe $\lim_{\varepsilon\to 0} = \tau \leq \frac{\alpha}{\beta}\theta^{1/\alpha}(x_0)$ pero $\lim_{t\to T} x(t) = 0$ □

La función $\theta(x)$ es llamada **función de controlabilidad**.

Observación 3.1. Notemos que para $\alpha = \infty$ en caso de cumplirse la desigualdad (3.3), la función $\theta(x)$ es la función de Lyapunov.

3.2.1 Construcción en forma integral.

Fué sugerido en [14] un método suficientemente general de construcción de la función de controlabilidad $\theta(x)$ y el control u que resuelve el problema de síntesis para el sistema lineal completamente controlable

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \{u : ||u|| \leq d\} \subset \Omega, \tag{3.6}$$

donde $A \in \mathbf{M}(n,n)$ y $B \in \mathbf{M}(n,r)$. En esta sección daremos una breve descripción de ese método.

Sean m el grado del polinomio mínimo de A, λ_0 la parte real mínima de los valores propios de A y $\lambda_0' = \min\{0, \lambda_0\}$. Denotemos por $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones $f(s) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tales que son no negativas, decrecientes, con al menos m puntos de decrecimiento y satisfacen que:

$$\int_0^\infty s^{2m+1} e^{-2\lambda_0' s\theta} f(s)\,ds < \infty, \qquad \text{para} \quad 0 \leq \theta \leq \overline{\theta}_f.$$

Para cada $f \in \mathcal{F}$ y cada θ, con $0 \leq \theta \leq \overline{\theta}_f$, definimos la matriz:

$$N_f(\theta) := \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\theta}\right) e^{-At} BB^* e^{-A^*t} dt. \tag{3.7}$$

Para todo $x \in Q^1 \setminus \{0\}$ ($Q^1 = \{x : ||x|| \leq R\}$) la ecuación

$$2a_0\theta = \langle N_f^{-1}(\theta)x, x\rangle, \qquad a_0 > 0, \tag{3.8}$$

tiene una solución única positiva continuamente diferenciable $\theta = \theta(x)$. Definiendo $\theta(x)$ en $x = 0$ como $\theta(0) = 0$, la función $\theta(x)$ resulta ser continua en cero. Existe una constante $C = 0$ tal que el conjunto $Q = \{x : ||x|| \leq C\}$ es acotado y $Q \subset int\, Q^1$. El control $u(x)$ se define mediante la fórmula:

$$u(x) = -\frac{1}{2} f(0) B^* N_f^{-1}(\theta(x))x, \qquad x \in Q^1 \setminus \{0\}. \tag{3.9}$$

El siguiente Teorema resuelve el problema de síntesis del sistema (3.6).

Teorema 3.2. *Para valores suficientemente pequeños de* $a_0 : 0 < a_0 \leq a_f$ *el control de la forma (3.9) resuelve el problema de síntesis en una vecindad del origen del sistema (3.6) mediante controles continuos que satisfacen la condición* $u \in \{u : ||u|| \leq d\} \subset \Omega$.

Ejemplo 3.1. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \qquad |u| \leq 1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u \end{aligned}$$

o equivalentemente en su forma matricial

$$\dot{x} = Ax + bu, \qquad |u| \leq 1 \tag{3.10}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De la forma de A y b obtenemos que

$$bb^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e^{-At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad e^{-A^*t} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que si consideramos la función $f(s) = e^{-s}$ y sustituimos en (3.7) obtenemos

$$N_f(\theta) = \frac{1}{1+4\theta^2}\begin{pmatrix} 2\theta^3 & -\theta^2 \\ -\theta^2 & \theta + 2\theta^3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N_f^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1+2\theta^2}{\theta^3} & \frac{1}{\theta^2} \\ \frac{1}{\theta^2} & \frac{2}{\theta} \end{pmatrix}.$$

Escojamos la constante $a_0 > 0$ de la ecuación (3.8) tal que se cumpla la restricción $u(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Tenemos

$$||u(x)||^2 = \frac{a_0}{2} \cdot \frac{\theta ||b^* x||^2}{\langle N_f(\theta)x, x\rangle} = \frac{a_0}{2} \cdot \frac{\langle b^* x, b^* x\rangle}{\langle \frac{1}{\theta} N_f(\theta)x, x\rangle}$$

Tomando en cuenta que las matrices bb^* y $\frac{1}{\theta}N_f(\theta)$ satisfacen las condiciones del Teorema A.1 (ver apéndice), hallamos el máximo de la relación

$$\frac{\langle bb^* x, x\rangle}{\langle \frac{1}{\theta} N_f(\theta)x, x\rangle}$$

el cuál denotaremos $\lambda_{\max}$. Del Teorema A.1 del apéndice sabemos que $\lambda_{\max}$ es la raíz de la ecuación

$$\left| bb^* - \lambda \frac{1}{\theta} N_f(\theta) \right| = \begin{vmatrix} -\frac{2\theta^2\lambda}{4\theta^2+1} & \frac{\theta\lambda}{4\theta^2+1} \\ \frac{\theta\lambda}{4\theta^2+1} & 1 - \frac{(\theta+2\theta^3)\lambda}{\theta(4\theta^2+1)} \end{vmatrix} = \frac{\theta^2\lambda(\lambda-2)}{4\theta^2+1} = 0$$

Así que $\lambda_{\max} = 2$, entonces

$$||u||^2 \leq \frac{a_0}{2}\lambda_{\max}$$

Por lo tanto, tomando $a_0 \leq 1$ se satisface $||u|| \leq 1$.

Usamos $a_0 = \frac{1}{4}$ entonces la ecuación (3.8), en nuestro caso, se puede escribir como:

$$\frac{\theta^4}{2} - (1 + 2\theta^2)x_1^2 - 2x_1x_2\theta - 2x_2^2\theta^2 = 0. \tag{3.11}$$

y la función $\theta(x_1, x_2)$ para $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ será la solución positiva de la ecuación (3.11). El control, de acuerdo a (3.9), tiene la forma:

$$u(x_1, x_2) = -\frac{x_1}{\theta^2(x_1, x_2)} - \frac{2x_2}{\theta(x_1, x_2)}. \tag{3.12}$$

Para tal a_0 el control (3.12) resuelve el problema de síntesis globalmente ya que $u(x_1, x_2)$ satisface la restricción dada en todo el espacio $\mathbb{R}^2$. De

(3.11) tenemos que la derivada de la función $\theta(x_1, x_2)$ con respecto al sistema (3.10) con el control (3.12), es decir:

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \frac{x_1}{\theta^2(x_1,x_2)} - \frac{2x_2}{\theta(x_1,x_2)} \end{array}$$

está dada por la ecuación:

$$\dot{\theta}(x_1, x_2) = -\frac{(1+\theta^2(x_1,x_2))x_1^2 + 3\theta(x_1,x_2)x_1x_2 + 3\theta^2(x_1,x_2)x_2^2}{2(1+\theta^2(x_1,x_2))x_1^2 + 3\theta(x_1,x_2)x_1x_2 + 2\theta^2(x_1,x_2)x_2^2}. \tag{3.13}$$

Estimemos por abajo y por arriba la expresión para $\dot{\theta}(x_1, x_2)$. La parte derecha de (3.13) la transformamos en una relación de dos formas cuadráticas respecto de $y_1 = x_1$ y $y_2 = \theta x_2$, es decir:

$$\dot{\theta}(x_1, x_2) = -\frac{\langle Wy, y\rangle}{\langle Vy, y\rangle}, \quad W = \begin{pmatrix} 1+\theta^2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 2+2\theta^2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix},$$

La relación $-\frac{\langle Wy,y\rangle}{\langle Vy,y\rangle}$ se puede estimar utilizando las siguientes desigualdades:

$$-\lambda_{max} \leq -\frac{\langle Wy, y\rangle}{\langle Vy, y\rangle} \leq -\lambda_{min}$$

donde λ_{min}, λ_{max} son las raíces mínima y máxima de la ecuación $\det(W - \lambda V) = 0$.

Ya que $\lambda_{max} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{7}}$ y $\lambda_{min} \geq 1 - \frac{2}{\sqrt{7}}$ entonces $-(1 + \frac{2}{\sqrt{7}}) \leq \dot{\theta}(x_1, x_2) \leq -(1 - \frac{2}{\sqrt{7}})$ de donde se tiene que el tiempo de movimiento de cualquier punto x_0 al origen de coordenadas satisface la estimación:

$$\frac{7}{7+2\sqrt{7}}\theta(x_1^0, x_2^0) \leq T(x_1^0, x_2^0) \leq \frac{7}{7-2\sqrt{7}}\theta(x_1^0, x_2^0)$$

donde $\theta(x_1^0, x_2^0)$ es la solución positiva de la ecuación (3.11) para $x = x_0$.

Ejemplo 3.2 . Construimos el control posicional que resuelve el problema de síntesis, i.e, estabiliza en tiempo finito el sistema

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & u_1, \\ \dot{x}_2 & = & x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 & = & -x_2 + u_2, \end{array} \tag{3.14}$$

$(u_1, u_2) \in \Omega = \{u = (u_1, u_2) : |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1, \}$.

Escogemos $f(s)=e^{-s}$. Entonces

$$N_f(\theta)=\begin{pmatrix} \theta & \frac{\theta}{\theta^2+1} & \frac{\theta^2}{\theta^2+1} \\ \frac{\theta}{\theta^2+1} & \theta & 0 \\ \frac{\theta^2}{\theta^2+1} & 0 & \theta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N_f^{-1}(\theta)=\begin{pmatrix} \frac{\theta^2+1}{\theta^3} & -\frac{1}{\theta^3} & -\frac{1}{\theta^2} \\ -\frac{1}{\theta^3} & \frac{\theta^4+\theta^2+1}{(\theta^2+1)\theta^3} & \frac{1}{(\theta^2+1)\theta^2} \\ -\frac{1}{\theta^2} & \frac{1}{(\theta^2+1)\theta^2} & \frac{\theta^2+2}{(\theta^2+1)\theta} \end{pmatrix}.$$

Estas matrices están definidas para todo $\theta>0$. La ecuación (3.8), en este caso, tiene la forma

$$\begin{aligned} 2a_0\theta^4(\theta^2+1) \;&=\; (\theta^2+1)x_1^2+(\theta^4+\theta^2+1)x_2^2+(\theta^2+2)x_3^2- \\ &\quad\; 2(\theta^2+1)x_1x_2-2\theta(\theta^2+1)x_1x_3+2\theta x_2x_3 \quad (3.15) \end{aligned}$$

y determina para cada $a_0>0$ la función de controlabilidad $\theta(x)$ en todo el espacio $\mathbb{R}^3$. El control posicional (3.9) tiene la forma

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{2\theta(x)}x_1-\frac{\theta(x)}{2(\theta^2(x)+1)}x_2+\frac{1}{2(\theta^2(x)+1)}x_3, \\ u_2 &= -\frac{1}{2\theta^2(x)}x_1-\frac{1}{2\theta^2(x)(\theta^2(x)+1)}x_2-\frac{\theta^2(x)+2}{2(\theta^2(x)+1)\theta(x)}x_3,\ x\neq 0, \end{aligned}$$

y resuelve el problema de síntesis posicional en todo el espacio $\mathbb{R}^3$. Escojamos la constante $a_0>0$ tal que se cumpla la restricción $u(x)\in\Omega$, $x\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$. Tenemos

$$||u(x)||^2=\frac{a_0}{2}\cdot\frac{\theta||B^*x||^2}{\langle N_f(\theta)x,x\rangle}=\frac{a_0}{2}\cdot\frac{\langle B^*x,B^*x\rangle}{\langle\frac{1}{\theta}N_f(\theta)x,x\rangle}$$

Como en el ejemplo anterior, tomando en cuenta que las matrices BB^* x $\frac{1}{\theta}N_f(\theta)$ satisfacen las condiciones del Teorema A.1 (ver apéndice), hallamos $\lambda_{\max}$ de la relación

$$\frac{\langle B^*x,B^*x\rangle}{\langle\frac{1}{\theta}N_f(\theta)x,x\rangle}$$

que es la raíz de la ecuación

$$\left|BB^*-\lambda\frac{1}{\theta}N_f(\theta)\right|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\frac{\lambda}{\theta^2+1} & -\frac{\theta\lambda}{\theta^2+1} \\ 1-\frac{\lambda}{\theta^2+1} & 1-\lambda & 0 \\ -\frac{\theta\lambda}{\theta^2+1} & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=-\frac{\theta^2\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{\theta^2+1}=0$$

Así que $\lambda_{\max}=2$, entonces

$$||u||^2\leq\frac{a_0}{2}\lambda_{\max}$$

Por lo tanto, tomando $a_0 \leq 1$ la restricción sobre el control se satisface, esto es $||u|| \leq 1$.

Ejemplo 3.3. Buscamos el control posicional que estabilice en tiempo finito el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= u_1, \\ \dot{x}_3 &= x_2 + u_2, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$(u_1, u_2) \in \Omega = \{u = (u_1, u_2) : |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1, \}$. o equivalentemente escrito en su forma matricial:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad |u| \leq 1$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la forma de A y B obtenemos que

$$BB^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e^{-At} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & -t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \end{pmatrix} \quad e^{-A^*t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & 1 & -t \\ -t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A diferencia de los ejemplos anteriores, ahora consideremos la función $f(s) = 1 - s$. Entonces

$$N_f(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{120}\theta(60 + 20\theta^2 + \theta^4) & \frac{1}{24}\theta(12 + \theta^2) & \frac{1}{120}\theta^2(40 + 3\theta^2) \\ \frac{1}{24}\theta(12 + \theta^2) & \frac{\theta}{2} & -\frac{\theta^2}{6} \\ \frac{1}{120}\theta^2(40 + 3\theta^2) & -\frac{\theta^2}{6} & \frac{1}{12}\theta(6 + \theta^2) \end{pmatrix}$$

$$N_f^{-1}(\theta) = \frac{1}{1200 + 90\theta^2 + \theta^4} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2400(\theta^2+18)}{\theta^3} & \frac{120(-360-10\theta^2+\theta^4)}{\theta^3} & \frac{960(15+\theta^2)}{\theta^2} \\ \frac{120(-360-10\theta^2+\theta^4)}{\theta^3} & \frac{12(3600+200\theta^2+20\theta^4+\theta^5}{\theta^3} & \frac{60(-240+4\theta^2+\theta^4)}{\theta} \\ \frac{960(15+\theta^2)}{\theta^2} & \frac{60(-240+4\theta^2+\theta^4)}{\theta^2} & \frac{60(7\theta^2+120)}{\theta} \end{pmatrix}.$$

Estas matrices están definidas para todo $\theta > 0$. La ecuación (3.8), en este caso, tiene la forma

$$\begin{aligned}2a_0\theta^4 &= \frac{1}{1200+90\theta^2+\theta^4}(12(200(18+\theta^2)x_1^2+(3600+200\theta^2+20\theta^4+\theta^6)x_2^2 \\ &\quad +10\theta(-240+4\theta^2+\theta^4)x_2x_3+5\theta^2(120+7\theta^2)x_3^2 \\ &\quad +20x_1((-360-10\theta^2+\theta^4)x_2+8\theta(15+\theta^2)x_3)))\end{aligned}$$

y determina para cada $a_0 > 0$ la función de controlabilidad $\theta(x)$ en todo el espacio $\mathbb{R}^3$. El control posicional (3.9) tiene la forma

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{-6(10(10+\theta(x)^2)x_1+(100+30\theta(x)^2+\theta(x)^4)x_2+5\theta(x)(20+\theta(x)^2)x_3)}{\theta(x)(1200+90\theta(x)^2+\theta(x)^4)}, \\ u_2 &= \frac{-30(16(15+\theta(x)^2)x_1+(-240+4\theta(x)^2+\theta(x)^4)x_2+\theta(x)(120+7\theta(x)^2)x_3)}{\theta(x)^2(1200+90\theta(x)^2+\theta(x)^4)},\end{aligned}$$

$x \neq 0$, y resuelve el problema de síntesis posicional en todo el espacio $\mathbb{R}^3$. Escojamos la constante $a_0 > 0$ tal que se cumpla la restricción $u(x) \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Tenemos

$$||u(x)||^2 = \frac{a_0}{2} \cdot \frac{\langle B^*x, B^*x\rangle}{\langle \frac{1}{\theta}N_f(\theta)x, x\rangle}$$

Análogamente a los ejemplos anteriores, buscamos $\lambda_{\max}$, el cuál para este ejemplo tiene el valor $\lambda_{\max} = \frac{2}{727}(2021+2\sqrt{811189})$ y dado que

$$||u||^2 \leq \frac{a_0}{2}\lambda_{\max}$$

tomando $a_0 \leq \frac{1}{6}$ la restricción sobre el control se satisface, esto es, se tiene $||u|| \leq 1$. Mediante calculos llegamos a que en este caso, que tomamos la función $f(s) = 1 - s$, se tiene que la derivada de la función $\theta(x)$ con respecto al sistema (3.16), con el control antes definido, está dada por la ecuación:

$$\dot{\theta}(x) = -1.$$

esto quiere decir que la función $\theta(x)$ representa exactamente el tiempo de recorrido desde el punto x_0 al origen de coordenadas.

La función $f(s) = 1 - s$ con $s \in [0,1], f(s) = 0$ para $s > 1$ en (3.7) genera una función de controlabilidad correspondiente $\theta_f(x)$, que representa el tiempo exacto de recorrido del punto x al origen respecto del sistema (3.6) con el control $u_f(x)$.

En la actualidad además de resolver el problema de síntesis, se busca construir un conjunto de pares $(u(x), \theta(x))$ tales que:

- El control $u(x)$ solucione el problema de síntesis.
- La función $\theta(x)$ sea tal que $\theta(x_0)$ represente exactamente el tiempo de recorrido desde el punto $x(0) = x_0$ al origen.

De aquí surge el interés de hallar un conjunto más amplio de pares de funciones: la función de controlabilidad $\theta(x)$, que representa el tiempo exacto de recorrido y el control $u(x)$, que resuelve el problema de síntesis.

3.3 Problema de síntesis para el sistema canónico.

Recordemos que el sistema canónico está dado por el sistema

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{3.17}$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A diferencia de la forma integral de construcción de la función de controlabilidad $\theta(x)$ y del control $u(x)$ ahora se construye una función $\theta(x)$ para el sistema canónico (3.17), como la única solución positiva (ver apéndice) de la ecuación:

$$2a_0\theta = \langle D_\theta F D_\theta x, x \rangle. \tag{3.18}$$

donde D_θ está dada por la matriz diagonal:

$$D_\theta = diag\left(\theta^{-\frac{2(n-i)+1}{2}}\right)_{i=1}^{n}, \tag{3.19}$$

a_0 es un número positivo y F una matriz positiva definida.

Si definimos $\theta(0) = 0$ entonces de la ecuación (3.18) se sigue que $\theta(x)$ es una función continua y es continuamente diferenciable para $x \neq 0$.

Una vez determinada $\theta(x)$ buscaremos un control $u(x)$ de la forma

$$u(x) = \theta^{-1/2}(x)a^* D_{\theta(x)}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k x_k}{\theta^k(x)}. \tag{3.20}$$

El objetivo de esta sección será determinar condiciones sobre el número a_0, el vector a y la matriz F de tal manera que la función $\theta(x)$ sea una función de controlabilidad que represente el tiempo exacto de recorrido del punto x al origen ($\dot{\theta}(x) = -1$) y que el control $u(x)$ resuelva el problema de síntesis del sistema canónico.

3.3.1 Construcción de la función de controlabilidad.

La condición $\dot{\theta}(x) = -1$ permite obtener una primer propiedad del vector a como lo establece el lema siguiente.

Lema 3.1. *Supongamos que la función de controlabilidad $\theta(x)$ satisface la igualdad $\dot{\theta}(x) = -1$. Entonces:*

$$a_n = -\frac{n(n+1)}{2}. \tag{3.21}$$

Demostración. Coloquemos $y(\theta, x) = D_\theta x$. Entonces la función de controlabilidad $\theta(x)$ para $x \neq 0$ satisface la ecuación:

$$2a_0\theta(x) = \langle Fy(\theta(x), x), y(\theta(x), x)\rangle, \tag{3.22}$$

Mientras que el control (3.20) toma la forma:

$$u(x) = \theta^{-1/2}(x)a^* y(\theta(x), x). \tag{3.23}$$

En base a las siguientes identidades:

$$D_\theta A D_\theta^{-1} = \theta^{-1}A, \qquad D_\theta b = \theta^{-1/2}b$$

la derivada de la función $y(\theta(x), x)$ respecto al sistema (2.4) con este control tiene la forma:

$$\dot{y}(\theta(x), x) = \theta^{-1}(x)\left(\dot{\theta}(x)H + A + ba^*\right) y(\theta(x), x).$$

donde

$$H = diag\left(-\frac{2(n-i)+1}{2}\right)_{i=1}^{n}. \tag{3.24}$$

Entonces de la ecuación (3.22) obtenemos que la derivada de la función de controlabilidad respecto al sistema (2.4) con el control $u(x)$ de la forma (3.23) se da mediante la igualdad:

$$\dot{\theta}(x) = \frac{\langle (F(A+ba^*) + (A+ba^*)^* F) y(\theta(x), x), y(\theta(x), x)\rangle}{\langle (F - HF - FH) y(\theta(x), x), y(\theta(x), x)\rangle}. \quad (3.25)$$

de donde en base a la suposición del lema (i.e $\dot{\theta}(x) = -1$) obtenemos la igualdad:

$$F\left(A + ba^* + \frac{1}{2}I - H\right) + \left(A + ba^* + \frac{1}{2}I - H\right)^* F = 0. \quad (3.26)$$

De esta igualdad obtenemos que la matriz $F^{\frac{1}{2}}(A + ba^* + \frac{1}{2}I - H)F^{-\frac{1}{2}}$ es antisimétrica y por eso las raíces de su ecuación característica:

$$\det\left(F^{\frac{1}{2}}(A + ba^* + \frac{1}{2}I - H)F^{-\frac{1}{2}} - \lambda I\right)$$

$$= (\det\ F^{-\frac{1}{2}})^2 \det\left(F\left(A + ba^* + \frac{1}{2}I - H\right) - \lambda F\right) = 0,$$

y consecuentemente de la ecuación:

$$\det\left(\left(A + ba^* + \frac{1}{2}I - H\right) - \lambda I\right) = 0 \quad (3.27)$$

tienen partes reales iguales a cero. La ecuación (3.27) la escribimos en la forma:

$$0 = \det\begin{pmatrix} \lambda - n & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - 2 & -1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & \lambda - 1 - a_n \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{j=1}^{n}(\lambda - j) - \sum_{j=1}^{n} a_j \prod_{i=j+1}^{n}(\lambda - i) - a_1 = \lambda^n - \left(a_n + \frac{n(n+1)}{2}\right)\lambda^{n-1} - \dots$$

Tomando en cuenta que las raíces de esta ecuación tienen parte real igual a cero y cuentan con su adjunta compleja entonces se tiene que $a_n = -n(n+1)/2$.

$\square$

En adelante nuestra meta es hallar un vector a y una matriz F que satisfagan la ecuación (3.26) ya que en tal caso el lado derecho de (3.25) será identicamente -1, es decir habremos construido una función $\theta(x)$ tal que $\dot{\theta}(x) = -1$.

De la ecuación (3.26) tenemos

$$\left(A + ba^* + \frac{1}{2}I - H\right) F^{-1} + F^{-1}\left(A + ba^* + \frac{1}{2}I - H\right)^* = 0. \quad (3.28)$$

Vamos a proponer una matriz F tal que $F^{-1} = D_n C D_n$, donde C es una matriz hankeliana ($C = (c_{2n-i-j})_{i,j=1}^n$) por hallar y

$$D_n = diag\left(\frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!}\right)_{i=1}^n. \quad (3.29)$$

Para buscar la matriz C notemos que la parte izquierda de la ecuación (3.28) la podemos escribir de la siguiente forma

$$\left(\frac{1}{2}I - H + D_n^{-1}AD_n + D_n^{-1}ba^*D_n\right) C + C\left(\frac{1}{2}I - H + D_n^{-1}AD_n + D_n^{-1}ba^*D_n\right)^*.$$

Esta es una matriz simétrica $Q = (q_{ij})_{i,j=1}^n$, la cual se puede escribir como

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{array}{rclcl} Q_{11} & = & (q_{ij})_{i,j=1}^{n-1}, & & Q_{21} = (q_{n1}, q_{n2}, \ldots, q_{n(n-1)}), \\ Q_{12} & = & Q_{21}^*, & & Q_{22} = q_{nn}. \end{array}$$

De esta manera los elementos de la matriz Q estan dados por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} &q_{ij} = (2n-i-j+2)c_{2n-i-j} - (2n-i-j)c_{2n-i-j-1}, \\ &\qquad i = 1, \ldots, n-1, \quad j = 1, \ldots, n-1, \\ &q_{nj} = -(n-j)c_{n-j-1} + (n-j+2+\tilde{a}_n)c_{n-j} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \tilde{a}_{n-\nu} c_{n-j+\nu}, \\ &\qquad j = 1, \ldots, n-1, \\ &q_{nn} = 2(1+\tilde{a}_n)c_0 + 2\sum_{\nu=1}^{n-1} \tilde{a}_{n-\nu} c_\nu, \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$ son componentes del vector $\tilde{a} = D_n a$.

Se sigue de (3.26) que Q es la matriz cero entonces de las igualdades $Q_{11} = 0$ tenemos

$$c_\mu = \frac{(2n-1)2n}{(\mu+1)(\mu+2)} c_{2n-2}, \qquad \mu = 1, \ldots, 2n-3,$$

y la ecuación (3.30) toma la forma

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{a}_n}{n(n+1)} \quad &+ \quad \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\tilde{a}_{n-\nu}}{(\nu+n)(\nu+n+1)} = 0, \\
\vdots \qquad & \qquad \qquad \qquad \vdots \\
\frac{\tilde{a}_n}{3 \cdot 4} \quad &+ \quad \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\tilde{a}_{n-\nu}}{(\nu+3)(\nu+4)} = 0, \\
-\frac{c_0}{(2n-1)2nc_{2n-2}} + \frac{3+\tilde{a}_n}{2 \cdot 3} \quad &+ \quad \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\tilde{a}_{n-\nu}}{(\nu+2)(\nu+3)} = 0, \\
\frac{(1+\tilde{a}_n)c_0}{(2n-1)2nc_{2n-2}} \quad &+ \quad \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\tilde{a}_{n-\nu}}{(\nu+1)(\nu+2)} = 0,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Donde $\tilde{a}_n = a_n$ está definido mediante la ecuación (3.21). Consideremos la ecuación (3.31) como un sistema lineal de ecuaciones respecto de las incognitas

$$\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{n-1}, \qquad \frac{c_0}{(2n-1)2nc_{2n-2}},$$

la cual en forma vectorial tiene la forma

$$Py = y_0, \tag{3.32}$$

donde P es la matriz de dimensión $n \times n$ definida como

$$P = \begin{pmatrix}
\frac{1}{2n(2n-1)} & \cdots & \frac{1}{(n+2)(n+1)} & 0 \\
\frac{1}{(2n-1)(2n-2)} & \cdots & \frac{1}{(n+1)n} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{(n+2)(n+1)} & \cdots & \frac{1}{4 \cdot 3} & -1 \\
\frac{1}{(n+1)n} & \cdots & \frac{1}{3 \cdot 2} & 1 - \frac{n(n+1)}{2}
\end{pmatrix}$$

mientras que y, y_0 son vectores de la forma

$$y = \left(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{n-1}, \frac{c_0}{(2n-1)2nc_{2n-2}} \right)^*,$$

$$y_0 = \left(-\frac{a_n}{(n+1)n}, \cdots, -\frac{a_n}{4\cdot 3}, -\frac{3+a_n}{3\cdot 2}, 0 \right)^* .$$

Este es un sistema congruente ya que si tomamos la matriz Hankeliana $C = (\frac{1}{(2n-i-j+2)(2n-i-j+1)})_{i,j=1}^n$ entonces la matriz F y el vector a^* definidos por $F = D_n^{-1}C^{-1}D_n^{-1}$ y $a^* = -\frac{1}{2}b^*F$ satisfacen la ecuación (3.28). Lo cual se verifica por simple sustitución. De esta manera rang$P$ =rang(P, y_0). Por otro lado sabemos que rang$P = n-1$ (ver *iii*) del Lema A.2 en Apéndice). Por lo tanto hay una infinidad de soluciones del sistema (3.32). Este conjunto de soluciones se halla de la siguiente manera.

Consideremos la matriz $\tilde{P}$ de dimensión $(n-1)\times(n-1)$ de la forma

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(2n-1)(2n-2)} & \cdots & \frac{1}{(n+2)(n+1)} & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(n+2)(n+1)} & \cdots & \frac{1}{5\cdot 4} & 0 \\ \frac{1}{(n+1)n} & \cdots & \frac{1}{4\cdot 3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es no degenerada (ver *ii* del Lema A.2 del Apéndice, con $k = 4$ y $s = n-2$).

Denotemos mediante $\tilde{y}_0 = \tilde{a}_1 d' + d''$, donde

$$\begin{aligned} d' &= \left(-\frac{1}{(2n-1)2n}, \ldots, -\frac{1}{(n+2)(n+3)}, -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)^*, \\ d'' &= \left(-\frac{a_n}{n(n+1)}, \ldots, -\frac{a_n}{3\cdot 4}, -\frac{3+a_n}{2\cdot 3} \right)^*, \end{aligned}$$

y mediante $\tilde{y}$ el vector de dimensión $n-1$ de la forma

$$\tilde{y} = \left(\tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_{n-1}, \frac{c_0}{(2n-1)2nc_{2n-2}} \right)^*,$$

y consideremos el sistema de ecuaciones $\tilde{P}\tilde{y} = \tilde{y}_0$ respecto de $\tilde{y}$. Este sistema tiene una única solución $\tilde{y} = \tilde{P}^{-1}\tilde{y}_0$, esto es

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{(2n-1)2nc_{2n-2}} &= \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_1'\tilde{a}_1 + \Delta_1''\right) = \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_1' \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}a_1 + \Delta_1''\right), \\ \tilde{a}_{n+1-j} &= \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_j'\tilde{a}_1 + \Delta_j''\right) = \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_j' \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}a_1 + \Delta_j''\right), \quad (3.33) \\ & j = 2, \ldots, n-1, \end{aligned}$$

donde $\Delta = \det\ \tilde{P}$, mientras que Δ'_j y Δ''_j, para $j = 1, \ldots, n-1$, son los determinantes de las matrices que se obtienen después de sustituir en lugar de la columna j-ésima de la matriz $\tilde{P}$, las columnas d' y d'' respectivamente.

Debido a que $\operatorname{rang} P = \operatorname{rang}(P, y_0) = n - 1$ las relaciones (3.33) describen todas las soluciones del sistema (3.32). Por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación (3.28) están dadas por el vector

$$a = \Bigg(a_1, (-1)^{n-2}(n-2)! \frac{1}{\Delta} \left(\Delta'_{n-1} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} a_1 + \Delta''_{n-1} \right), \ldots \\ \ldots, -\frac{1}{\Delta} \left(\Delta'_2 \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} a_1 + \Delta''_2 \right), -\frac{n(n+1)}{2} \Bigg)^* \quad (3.34)$$

y la matriz $F = D_n^{-1} C^{-1} D_n^{-1}$, donde

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2n(2n-1)} & \cdots & \frac{1}{(n+2)(n+1)} & \frac{1}{(n+1)n} \\ \frac{1}{(2n-1)(2n-2)} & \cdots & \frac{1}{(n+1)n} & \frac{1}{n(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(n+2)(n+1)} & \cdots & \frac{1}{4\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 2} \\ \frac{1}{(n+1)n} & \cdots & \frac{1}{3\cdot 2} & c_0 \end{pmatrix} (2n-1)2nc_{2n-2} \quad (3.35)$$

y

$$c_0 = \frac{1}{\Delta} \left(\Delta'_1 \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} a_1 + \Delta''_1 \right).$$

3.3.2 Solución al problema de síntesis.

Lema 3.2. *Sea C la matriz definida por (3.35). Si $c_{2n-2} > 0$, y $c_0 > \xi_0$, donde ξ_0 es la raíz de la ecuación* $\det \tilde{C}(\xi) = 0$, *donde*

$$\tilde{C}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2n(2n-1)} & \cdots & \frac{1}{(n+2)(n+1)} & \frac{1}{(n+1)n} \\ \frac{1}{(2n-1)(2n-2)} & \cdots & \frac{1}{(n+1)n} & \frac{1}{n(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(n+2)(n+1)} & \cdots & \frac{1}{4\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 2} \\ \frac{1}{(n+1)n} & \cdots & \frac{1}{3\cdot 2} & \xi \end{pmatrix} (2n-1)2nc_{2n-2}.$$

entonces la matriz C es positiva definida.

Demostración. Se sigue del Corolario A.1 del Apéndice aplicado a la matriz $\tilde{C}(\xi)$ bajo la condición $c_{2n-2} > 0$.

□

Observación 3.2. La ecuación $\det \tilde{C}(\xi) = 0$ se puede escribir en la forma

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2n-1} & \cdots & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2n-2} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{2} & (1+\frac{1}{n})\xi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.36}$$

Para establecer este hecho, a cada fila i-ésima se añaden todas las filas siguientes y después de las filas y columnas del determinante obtenido se sacan factores iguales. Para los casos $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ la raíz ξ_0 de $\det \tilde{C}(\xi) = 0$ es igual a $\frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{9}{20}, \frac{7}{15}, \frac{10}{21}, \frac{27}{56}$ respectivamente.

Lema 3.3. *La matriz $C^1 := C - CH - HC$ es positiva definida para $c_{2n-2} > 0$, y $c_0 > \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)\xi_0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4n}$, donde ξ_0 es la raíz de (3.36).*

Demostración. Es fácil ver que C^1 tiene la forma

$$C^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2n-1} & \cdots & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2n-2} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{2} & 2c_0 \end{pmatrix} (2n-1)2nc_{2n-2} \tag{3.37}$$

En base al punto i) del Lema A.2 para $s = n$ y $k = 1$ la matriz C^1 es positiva definida si c_0 satisface que $2c_0 = 1$. Se sigue del Corolario A.1 (ver apéndice) que para $c_{2n-2} > 0$ la matriz

$$\tilde{C}^1(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2n-1} & \cdots & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2n-2} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{2} & \xi \end{pmatrix} (2n-1)2nc_{2n-2} \tag{3.38}$$

es definida positiva para todos los

$$\xi > \xi_1, \tag{3.39}$$

donde ξ_1 es la raíz de la ecuación $\det\ \tilde{C}^1(\xi) = 0$. Se sigue de (3.36) que

$$\det \tilde{C}^1\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)\xi_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = 0,$$

por lo cual concluimos que

$$\xi_1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\xi_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}. \tag{3.40}$$

Por lo tanto, si $c_0 > \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)\xi_0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4n}$ y $c_{2n-2} > 0$, entonces la matriz $C^1 = \tilde{C}^1(2c_0)$ es positiva definida.

□

La solución al problema de síntesis para el sistema canónico (2.4) en el caso cuando la función de controlabilidad representa el tiempo de movimiento la da el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Consideremos la matriz C y el vector a definidos por las igualdades (3.35) y (3.34). Si*

$$c_{2n-2} > 0, \quad c_0 > \max\left\{\xi_0,\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)\xi_0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4n}\right\}, \tag{3.41}$$

donde ξ_0 es la raíz de (3.36) y el número a_0 satisface la condición

$$0 < a_0 \leq \frac{d^2}{2\langle F^{-1}a, a\rangle}; \quad F^{-1} = D_n C D_n, \tag{3.42}$$

Entonces

1. *Para $x \neq 0$ la ecuación (3.18) tiene una única solución positiva $\theta(x)$ y si definimos $\theta(0) = 0$ entonces $\theta(x)$ es una función de controlabilidad.*

2. *El control $u(x)$ de la forma (3.20) translada cualquier punto inicial $x \in \mathbb{R}^n$ al origen a través de la trayectoria del sistema $\dot{x} = Ax + bu(x)$ en tiempo $T(x) = \theta(x)$ y satisface la restricción $|u(x)| \leq d$.*

Demostración. Usando las condiciones (3.41) y aplicando el Lema 3.2 obtenemos que la matriz C es positiva definida, de donde se sigue que la matriz $F^{-1} = D_n C D_n$ es positiva definida y por consecuencia la matriz F también lo es.

Si la matriz $F - FH - HF > 0$ entonces la ecuación (3.18) para $x \neq 0$ tiene una única solución $\theta(x)$ continuamente diferenciable.

Establezcamos los valores de los parámetros a_1 y c_{2n-2} para los cuales la matriz $F - FH - HF$ va a ser positiva definida. La positividad de esta matriz se va a seguir de la positividad de la matriz $F^{-1} - HF^{-1} - F^{-1}H$. Y ya que la matriz $F^{-1} = D_n C D_n$, mientras que D_n y H conmutan entonces es válida la siguiente igualdad

$$F^{-1} - HF^{-1} - F^{-1}H = D_n \left(C - HC - CH\right) D_n.$$

En virtud al Lema 3.3 y en base a las condiciones (3.41) la matriz $C - HC - CH$ es positiva definida. Por eso la matriz $F - FH - HF$ también es positiva definida de esta manera cuando se cumplen las condiciones (3.41), la ecuación (3.18) para $x \neq 0$ tiene una única solución $\theta(x)$ continuamente diferenciable. Colocando $\theta(0) = 0$, obtenemos que la función $\theta(x)$ es continua para todo x.

Establezcamos ahora la restricción del control. Encontremos una estimación para la expresión $a^* y(\theta, x)\theta^{-\frac{1}{2}}$. Para esto, para un θ fijo resolvamos el problema de encontrar el extremo de la función $a^* y(\theta, x)\theta^{-\frac{1}{2}}$ sujeto a las restricciones del tipo

$$\langle F y(\theta, x), y(\theta, x)\rangle - 2a_0\theta = 0. \tag{3.43}$$

Este problema lo resolvemos con ayuda de los multiplicadores de Lagrange, aquí la función de Lagrange tiene la forma

$$a^* y(\theta, x)\theta^{-\frac{1}{2}} - \lambda \left\langle F y(\theta, x), y(\theta, x)\right\rangle + 2\lambda a_0 \theta.$$

Sea y_0 el punto de extremo. La condición necesaria del extremo nos da $a\theta^{-\frac{1}{2}} - 2\lambda F y_0 = 0$, de donde tenemos que $y_0 = 1/(2\lambda)\theta^{-\frac{1}{2}} F^{-1} a$. Colocando y_0 en la restricción (3.43), obtenemos $1/(2\lambda) = \pm\sqrt{2a_0/\langle F^{-1}a, a\rangle}\,\theta$. Consecuentemente tenemos $(a, y_0)\theta^{-\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{2a_0\langle F^{-1}a, a\rangle}$. Entonces usando la forma del control $u(x)$ obtenemos

$$|u(x)| \leq \sqrt{2a_0\langle F^{-1}a, a\rangle}. \tag{3.44}$$

Escogiendo el número a_0 de la condición (3.42), de la desigualdad (3.44) se sigue que el control $u(x)$ satisface las restricciones dadas en todo el espacio.

De esta manera, de acuerdo al Teorema fundamental de la función de controlabilidad, el control $u(x)$ resuelve el problema de síntesis del control restringido en todo el espacio y el tiempo de recorrido desde cualquier punto x al origen es igual al valor de la función de controlabilidad en el punto x es decir $T(x) = \theta(x)$.

$\square$

3.3.3 Ejemplos.

Ejemplo 3.4. Encontrar la solución al problema de síntesis en el sistema canónico:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u, \qquad |u| \leq \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Ya que $\Delta = -1$, $\Delta_1' = -\frac{1}{12}$, $\Delta_1'' = 0$, entonces el vector a de (3.34), la matriz C de (3.35) y la matriz D_2 tienen la forma

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -a_1 \end{pmatrix} c_2, \quad D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Entonces la matriz F^{-1} y su inversa son las siguiente:

$$F^{-1} = D_2 C D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -a_1 \end{pmatrix} c_2, \qquad F = \frac{1}{(4+a_1)c_2^2} \begin{pmatrix} a_1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

de la ecuación (3.36) hallamos que $\xi_0 = \frac{1}{3}$. Entonces (3.41) tiene la forma

$$c_2 > 0, \quad -\frac{a_1}{12} > \frac{3}{8} \quad \text{de donde} \quad a_1 < -\frac{9}{2}$$

de acuerdo con lo anterior tomamos $c_2 = 1$, $a_1 = -6$. Entonces

Entonces la matriz F y el vector a tienen la forma:

$$a = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Escojamos el valor de a_0 en la ecuación (3.18) usando la condición (3.42), el cual en nuestro caso toma la forma $0 < a_0 \leq 1/3600$. Escojamos la función de controlabilidad $\theta(x)$ para $x \neq 0$ como la única solución positiva de la ecuación (3.18), entonces recordando que $D_\theta = \begin{pmatrix} \theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & \theta^{-1/2} \end{pmatrix}$ tenemos que la ecuación $2a_0\theta = \langle D_\theta F D_\theta x, x \rangle$ tiene la forma:

$$2a_0\theta = \langle D_\theta F D_\theta x, x \rangle = x^T D_\theta F D_\theta x$$

$$\frac{1}{1800}\theta = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & \theta^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & \theta^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{1800}\theta = \frac{1}{2\theta}x_1^2 + \frac{2}{\theta^2}x_1x_2 + \frac{3}{\theta^3}x_2^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{900}\theta^4 = \theta^2 x_1^2 + 4\theta x_1 x_2 + 6x_2^2.$$

Para la condición inicial $x_0 = (x_1^0, 0)$, tenemos que $\theta_0 = \theta(x_0) = 30x_1^0$.

El control $u(x)$ de la forma (3.20), el cual resuelve el problema de síntesis para el sistema (3.46) y que satisface las condiciones $|u(x)| \leq \frac{1}{10}$, se da mediante la fórmula

$$u(x) = -\frac{6x_1}{\theta^2(x_1, x_2)} - \frac{3x_2}{\theta(x_1, x_2)} \tag{3.45}$$

y satisface $|u(x)| \leq \frac{1}{10}$.
Para condiciones iniciales $x_0 = (x_1^0, 0)$, el tiempo de recorrido es $\theta(x_0) = 30x_1^0$.

Encontremos la trayectoria del sistema (3.46), que corresponde al control $u = u(x)$ de la forma (3.45) y comienza en el punto $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$. Esta trayectoria es la solución del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{6x_1}{\theta^2(x_1, x_2)} - \frac{3x_2}{\theta(x_1, x_2)}, \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, encontramos que la trayectoria del sistema canónico usando el control posicional $u(x)$ es:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{1}{30}(t - 30x_1^0)\left(\cos\ln\left(1 - \frac{t}{30x_1^0}\right) + 2\sin\ln\left(1 - \frac{t}{30x_1^0}\right)\right) \\ x_2(t) &= -\frac{1}{30}(t - 30x_1^0)^2 \sin\ln\left(1 - \frac{t}{30x_1^0}\right) \end{aligned}$$

El control $u(x)$ sobre la trayectoria $(x_1(t), x_2(t))$ está dado por

$$u(x(t)) = -\frac{1}{10}\cos\ln\left(1 - \frac{t}{30x_1^0}\right).$$

Figura 1: Trayectoria en el plano (x_1, x_2) para $(x_1^0, x_2^0) = (\frac{9}{10}, 0)$. El tiempo de recorrido es $\theta(x_0) = 27$.

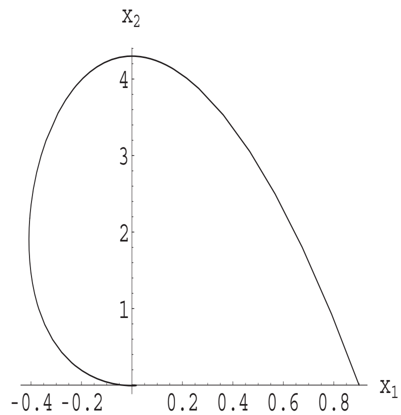
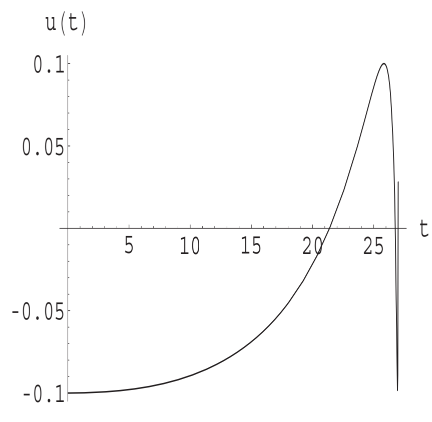


Figura 2: Gráfica del control $u(x(t))$



Ejemplo 3.5. Resolvamos el problema de síntesis para el sistema controlable con control restringido

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= u, \qquad |u| \le 1. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Ya que $\Delta = -\frac{1}{20}$, $\Delta_1' = \frac{1}{3600}$, $\Delta_1'' = -\frac{1}{60}$, $\Delta_2' = \frac{1}{30}$, $\Delta_2'' = -\frac{1}{2}$, entonces el vector a de (3.34), la matriz C de (3.35) y la matriz D_3 tienen la forma

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \frac{a_1}{3} - 10 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 5 \\ \frac{5}{2} & 5 & 10 - \frac{a_1}{12} \end{pmatrix} c_4, \quad D_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

entonces $F^{-1} = D_3 C D_3$ y su inversa tiene la forma

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{2} & -5 \\ \frac{5}{4} & -5 & 10 - \frac{a_1}{12} \end{pmatrix} c_4,$$

$$F = -\frac{c_4}{30 + a_1} \begin{pmatrix} -40a_1 & 240 - 12a_1 & 120 \\ 240 - 12a_1 & 180 - 4a_1 & 60 \\ 120 & 60 & 12 \end{pmatrix}.$$

de la ecuación (3.36) hallamos que $\xi_0 = \frac{5}{12}$. Entonces (3.41) tiene la forma

$$c_4 > 0, \qquad \frac{1}{3} - \frac{a_1}{360} > \frac{4}{9},$$

de acuerdo con lo anterior coloquemos $c_4 = 1$, $a_1 = -45$. Entonces

$$a = \begin{pmatrix} -45 \\ -25 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad F^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 10 & -20 \\ 5 & -20 & 55 \end{pmatrix}, \quad F = 4 \begin{pmatrix} 30 & 13 & 2 \\ 13 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Escojamos el valor de a_0 en la ecuación (3.18) usando la condición (3.42), el cual en nuestro caso toma la forma $0 < a_0 \leq 2/205$. Escojamos la función de controlabilidad $\theta(x)$ para $x \neq 0$ como la única solución positiva de la ecuación (3.18), entonces la ecuación en nuestro caso tiene la forma

$$\theta^6 = 6150x_1^2 + 5330\theta x_1 x_2 + 820\theta^2 x_1 x_3 + 410\theta^3 x_2 x_3 + 1230\theta^2 x_2^2 + 41\theta^4 x_3^2. \quad (3.47)$$

El control $u(x)$ de la forma (3.20), el cual resuelve el problema de síntesis para el sistema (3.46) y que satisface las condiciones $|u(x)| \leq 1$, se da mediante la fórmula

$$u(x) = -\frac{45}{\theta^3(x)} x_1 - \frac{25}{\theta^2(x)} x_2 - \frac{6}{\theta(x)} x_3. \qquad (3.48)$$

Encontremos la trayectoria del sistema (3.46), que corresponde al control $u = u(x)$ de la forma (3.48) y comienza en el punto $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^3$. Esta trayectoria es la solución del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\frac{45}{\theta^3(x)}x_1 - \frac{25}{\theta^2(x)}x_2 - \frac{6}{\theta(x)}x_3.\end{aligned}$$

Ya que $\theta(x)$ representa el tiempo de movimiento de x_0 al origen entonces se cumple $\dot{\theta}(x(t)) = -1$, entonces $\theta(x(t)) = \theta_0 - t$, donde θ_0 es la raíz positiva de la ecuación (3.47) para $x = x_0$. Consecuentemente la trayectoria buscada es solución del problema de Cauchy de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\frac{45}{(\theta_0 - t)^3}x_1 - \frac{25}{(\theta_0 - t)^2}x_2 - \frac{6}{\theta_0 - t}x_3,\end{aligned}$$

$$x_1(0) = x_1^0, \qquad x_2(0) = x_2^0, \qquad x_3(0) = x_3^0.$$

Este sistema se lleva a la ecuación diferencial de la forma

$$(\theta_0 - t)^3 x_1^{(3)} + 6(\theta_0 - t)^2 \ddot{x}_1 + 25(\theta_0 - t)\dot{x}_1 + 45x_1 = 0,$$

con condiciones iniciales $x_1(0) = x_1^0$, $\dot{x}_1(0) = x_2^0$, $\ddot{x}_1(0) = x_3^0$. Con el cambio $t = \theta_0 - e^\tau$ esta ecuación diferencial de Euler se reduce a la ecuación diferencial con coeficientes constantes respecto de la función $y(\tau) = x_1(\theta_0 - e^\tau)$, el cual tiene la forma $y''' - 9y'' + 33y' - 45y = 0$. De donde tenemos

$$y(\tau) = e^{3\tau}\left(c_1 + c_2 \cos\sqrt{6}\ \tau + c_3 \sin\sqrt{6}\ \tau\right),$$

con coeficientes constantes c_1, c_2, c_3 que se hallan de las condiciones iniciales

$$y(\tau_0) = x_1^0, \quad y'(\tau_0) = -\theta_0 x_2^0, \quad y''(\tau_0) - y'(\tau_0) = \theta_0^2 x_3^0, \quad \tau_0 = \ln\theta_0,$$

estas son iguales a

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{1}{6\theta_0}\left(\frac{15}{\theta_0^2}x_1^0 + \frac{5}{\theta_0}x_2^0 + x_3^0\right), \\ c_2 &= \zeta_1\cos(\sqrt{6}\ \ln\theta_0) - \zeta_2\sin(\sqrt{6}\ \ln\theta_0), \\ c_3 &= \zeta_1\sin(\sqrt{6}\ \ln\theta_0) + \zeta_2\cos(\sqrt{6}\ \ln\theta_0).\end{aligned}$$

Aquí

$$\zeta_1 = -\frac{1}{6\theta_0}\left(\frac{9}{\theta_0^2}x_1^0 + \frac{5}{\theta_0}x_2^0 + x_3^0\right), \quad \zeta_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}\,\theta_0^2}\left(\frac{3}{\theta_0}x_1^0 + x_2^0\right).$$

Ya que $x_1(t) = y(\ln(\theta_0 - t))$, las funciones $x_2(t)$ y $x_3(t)$ se encuentran diferenciando la función $x_1(t)$, entonces

$$x(t) = \begin{pmatrix} (\theta_0 - t)^3\,(c_1 + \zeta_1 \cos\alpha(t) + \zeta_2 \sin\alpha(t)) \\ (\theta_0 - t)^2\left(-3c_1 - (3\zeta_1 + \sqrt{6}\,\zeta_2)\cos\alpha(t) + (-3\zeta_2 + \sqrt{6}\,\zeta_1)\sin\alpha(t)\right) \\ (\theta_0 - t)\left(6c_1 + 5\sqrt{6}\,\zeta_2 \cos\alpha(t) - 5\sqrt{6}\,\zeta_1 \sin\alpha(t)\right) \end{pmatrix},$$

donde $\alpha(t) = \sqrt{6}\ln(1 - \frac{t}{\theta_0})$. Obviamente $x(t) \to 0$ cuando $t \to \theta_0$. El control $u(x)$ en la trayectoria $x(t)$ tiene la forma

$$u(x(t)) = -6c_1 + 5(6\zeta_1 - \sqrt{6}\,\zeta_2)\cos\alpha(t) + 5(\sqrt{6}\,\zeta_1 + 6\zeta_2)\sin\alpha(t).$$

Para facilitar los cálculos y evidenciar los resultados resolvamos el problema de arribar al origen desde los puntos de la curva $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{41x_3^2}{121}$, $x_3 > 0$. En este caso como se sigue de la ecuación (3.47), el tiempo de recorrido θ_0 del punto $x_0 = (0, -\frac{41(x_3^0)^2}{121}, x_3^0)^*$ es igual a $\frac{41x_3^0}{11}$. La trayectoria del sistema que comienza en este punto tiene la forma

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{41x_3^0 - 11t}{451}\left(6 + 5\cos\alpha(t) + 5\sqrt{6}\,\sin\alpha(t)\right) \\ \frac{(41x_3^0 - 11t)^2}{9922}\left(-6 + 4\cos\alpha(t) - 3\sqrt{6}\,\sin\alpha(t)\right) \\ \frac{(41x_3^0 - 11t)^3}{327426}\left(6 - 6\cos\alpha(t) + \sqrt{6}\,\sin\alpha(t)\right) \end{pmatrix},$$

donde $\alpha(t) = \sqrt{6}\,\ln(1 - \frac{11t}{41x_3^0})$. En esta trayectoria el control se define mediante la fórmula

$$u(t) = -\frac{1}{41}(6 + 35\cos\alpha(t))$$

y como es fácil de ver, satisface la restricción dada.

Figura 1: Trayectoria solución para $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0, -\frac{41}{121}, 1)$. El tiempo de recorrido es $\theta(x_0) = \frac{41}{11}$.

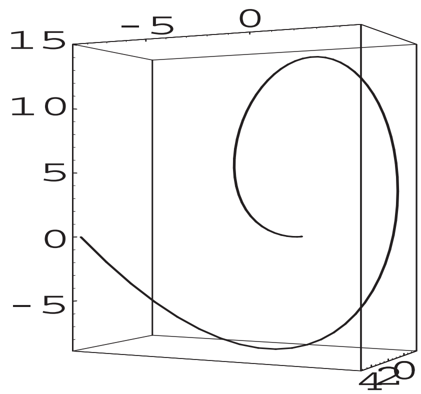
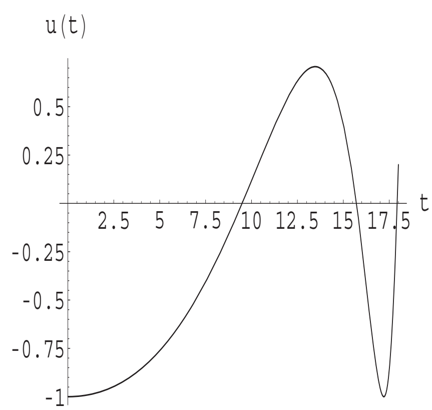


Figura 2: Gráfica del control $u(x(t))$



Apéndice A

A.1 Algunos resultados auxiliares

Una **forma cuadrática** es un polinomio homogéneo de segundo grado en n variables $x_1, \ldots, x_n$. Una forma cuadrática siempre tiene una representación

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad (a_{ij} = a_{ji};\ i, j = 1, \ldots, n)$$

donde $A = ||a_{ij}||_1^n$ es una matriz simétrica.

Si denotamos la matriz columna $(x_1, \ldots, x_n)$ por x y denotamos la forma cuadrática por

$$\langle Ax, x\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

entonces podemos escribir

$$\langle Ax, x\rangle = x^* Ax$$

Dos formas cuadráticas

$$\langle Ax, x\rangle \qquad \text{y} \qquad \langle Bx, x\rangle$$

determinan un haz de formas $\langle Ax, x\rangle - \lambda\langle Bx, x\rangle$ (con λ un párametro). Si la forma $\langle Bx, x\rangle$ es positiva definida, el haz $\langle Ax, x\rangle - \lambda\langle Bx, x\rangle$ es llamado **regular**.

La ecuación

$$|A - \lambda B| = 0$$

es llamada la ecuación caracteristica del haz de formas $\langle Ax, x\rangle - \lambda\langle Bx, x\rangle$.

Teorema A.1. El valor caracteristico más grande del haz regular $\langle Ax, x\rangle - \lambda\langle Bx, x\rangle$ es el máximo de la relación de las formas $\langle Ax, x\rangle$ y $\langle Bx, x\rangle$

$$\lambda_{\max} = \max \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle Bx, x\rangle}.$$

Ahora daremos algunos resultados que nos ayudarán a desarrollar el capítulo 3 de nuestro trabajo.

Lema A.1. *Sea $F = (f_{ij})_{i,j=1}^n$ una matriz simétrica positiva definida entonces la matriz:*

$$G(\xi) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & \xi \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

para $\xi \geq f_{nn}$ es positiva definida.

Demostración. Consideremos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1\,n-1} \\ f_{21} & \dots & f_{2\,n-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f_{n-1\,1} & \dots & f_{n-1\,n-1} \end{pmatrix}$$

Supongamos que el vector $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ satisface que $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \neq 0$ entonces tiene lugar la relación $0 < \langle Fx, x\rangle = \langle My, y\rangle$ donde $y^* = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Así, la matriz M es positiva definida, entonces todos los menores de esquina M_{1s} de esta matriz son positivos definidos, es decir:

$$M_{1s} = \det(f_{ij})_{i,j=1}^s > 0 \qquad s = 1, \dots, n-1 \tag{A.2}$$

Ya que la derivada respecto de ξ de los menores principales de esquina G_{1s} de la matriz G, i.e. la derivada de los determinantes de la forma:

$$G_{nn}(\xi) = det(\xi) = \xi \qquad G(\xi) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & \xi \end{vmatrix} \qquad s = 1, \dots n-1$$

son correspondientemente iguales a 1 y M_{1s} $s = 1, \ldots, n-1$ entonces en base a las relaciones (A.2) cada uno de los determinantes G_{1s} $s = 1, \ldots, n-1$ crecen cuando ξ crece. Ya que para $\xi = f_{nn}$ estos eran definidos positivos entonces para $\xi > f_{nn}$ siguen siendo positivos definidos por eso para $\xi > f_{nn}$ la matriz $G(\xi)$ cumple el criterio de Sylvester de esta manera la matriz $G(\xi)$ de la forma (A.3) es definida positiva para $\xi > f_{nn}$.

□

Corolario A.1. *La matriz simétrica $G(\xi)$ definida por la ecuación (A.3) es positiva definida sólo para $\xi > \xi_0$ donde* $\det G(\xi_0) = 0$.

Demostración. Cuando ξ decrece desde f_{11} hasta cero, los menores diagonales principales de $G_{1s}(\xi)$, $s = 1, \ldots, n$, decrecen. Sea $\xi_0 \geq 0$ tal que uno de los menores diagonales principales de la matriz G_{1k} de la matriz $G(\xi)$ se anulan mientras que para $\xi > \xi_0$ todos los menores de esquina $G_{1s}(\xi)$, $s = 1, \ldots, n$, son positivos. Entonces para $\xi > \xi_0$ la matriz $G(\xi)$ es positiva definida, mientras que para $\xi = \xi_0$ la matriz $G(\xi_0)$ es negativa definida. Ya que los menores diagonales principales restantes son positivos existe un vector $x_0 \neq 0$ tal que $\langle G(\xi_0)x_0, x_0 \rangle = 0$ es decir, $G(\xi_0)x_0 = 0$ y $\det G(\xi_0) = 0$. En calidad del vector x_0 tomamos el vector $x_0 = (\overline{x}, 0)$, donde $\overline{x} - k$ es un vector de dimensión k distinto de cero que satisface la ecuación $G_k(\xi_0)\overline{x} = 0$ donde $G_k(\xi_0)$ es una matriz cuyos elementos son los elementos del menor $G_{ik}(\xi_0)$.

□

Lema A.2. *i) Las matrices de dimensión $s \times s$ dadas por:*

$$P_{s,k} = \left(\frac{1}{2s+k-i-j} \right)_{i,j=1}^{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2s+k-2} & \frac{1}{2s+k-3} & \cdots & \frac{1}{s+k-1} \\ \frac{1}{2s+k-3} & \frac{1}{2s+k-4} & \cdots & \frac{1}{s+k-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{s+k-1} & \frac{1}{k+1} & \cdots & \frac{1}{k} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N},$$

son positivas definidas.

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\Delta_{s,k} = \det \left(\frac{1}{2s+k-i-j} \cdot \frac{1}{2s+k-i-j+1} \right)_{i,j=1}^{s} > 0.$$

iii) El determinante de la matriz P de dimensión $n \times n$ dada por

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2n(2n-1)} & \cdots & \frac{1}{(n+2)(n+1)} & 0 \\ \frac{1}{(2n-1)(2n-2)} & \cdots & \frac{1}{(n+1)n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(n+2)(n+1)} & \cdots & \frac{1}{4\cdot 3} & -1 \\ \frac{1}{(n+1)n} & \cdots & \frac{1}{3\cdot 2} & 1 - \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

es igual a cero y su rango es $n-1$.

Demostración.

i) El hecho de que la matriz $P_{s,k}$ es positiva definida se sigue del hecho de que la matriz de Hilbert $\left(\frac{1}{2s-i-j+1}\right)_{i,j=1}^{s}$ es positiva definida. Una demostración directa de esto se sigue de la representación integral

$$P_{s,k} = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^{s-1} \\ t \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} \left(t^{s-1}, t, \ldots, 1\right) d\frac{t^k}{k}.$$

entonces $P_{s,k}$ es positiva definida.

ii) Representemos el determinante $\Delta_{s,k}$ en la forma

$$\Delta_{s,k} = \det\left(\frac{1}{2s+k-i-j} - \frac{1}{2s+k-i-j+1}\right)_{i,j=1}^{s}.$$

Sumamos a cada fila i-ésima ($i \geq 2$) la suma de todas las filas anteriores, es decir las filas $i = 1, \ldots, s$, y factorizamos del resultado obtenido de cada fila i-ésima ($i = 1, \ldots, s$) el valor i, y de cada columna j-ésima el valor $\frac{1}{2s-j+k}$, para $j = 1, \ldots, s$ así obtenemos

$$\Delta_{s,k} = \frac{s!}{(s+k)\ldots(2s+k-1)} \;\det\; P_{s,k}.$$

De donde aplicando el resultado del punto *i)* tenemos $\Delta_{s,k} > 0,\ k \in \mathbb{N}$.

iii) Anotemos el determinante de la matriz P en la forma

$$\det P = \begin{vmatrix} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} & \cdots & \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} & 0 \\ \frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1} & \cdots & \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{3} - \frac{1}{4} & -1 \\ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} & 1 - \frac{n(n+1)}{2} \end{vmatrix} \tag{A.4}$$

Transformemos este determinante de dos maneras. Primero, si añadimos a cada columna j-ésima para $2 \leq j \leq n-1$ de este determinante la suma de todas las columnas anteriores, es decir, las columnas de $1, \ldots, j-1$ entonces obtenemos

$$\det P = \begin{vmatrix} \frac{1}{(2n-1)2n} & \frac{2}{(2n-2)2n} & \cdots & \frac{n-1}{(n+1)2n} & 0 \\ \frac{1}{(2n-2)(2n-1)} & \frac{2}{(2n-3)(2n-1)} & \cdots & \frac{n-1}{n(2n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(n+1)(n+2)} & \frac{2}{n(n+2)} & \cdots & \frac{n-1}{3(n+2)} & -1 \\ \frac{1}{n(n+1)} & \frac{2}{(n-1)(n+1)} & \cdots & \frac{n-1}{2(n+1)} & 1 - \frac{n(n+1)}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n+1)\cdots 2n} \begin{vmatrix} \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n-2} & \cdots & \frac{1}{n+1} & 0 \\ \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-3} & \cdots & \frac{1}{n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{3} & -(n+2) \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{2} & (n+1)\left(1 - \frac{n(n+1)}{2}\right) \end{vmatrix} \tag{A.5}$$

Por otro lado, añadiendo a cada fila i-ésima ($i \geq 2$) del determinante (A.2) las filas anteriores, es decir, las filas desde $1, \ldots, i-1$ obtenemos

$$\det P = \begin{vmatrix} \frac{1}{(2n-1)2n} & \frac{1}{(2n-2)(2n-1)} & \cdots & \frac{1}{(n+1)(n+2)} & 0 \\ \frac{2}{(2n-2)2n} & \frac{2}{(2n-3)(2n-1)} & \cdots & \frac{2}{n(n+2)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{n-1}{(n+1)2n} & \frac{n-1}{n(2n-1)} & \cdots & \frac{n-1}{3(n+2)} & -1 \\ \frac{n}{n(2n)} & \frac{n}{(n-1)(2n-1)} & \cdots & \frac{n}{2(n+2)} & -\frac{n(n+1)}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n!}{(n+2)\cdots 2n} \begin{vmatrix} \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n-2} & \cdots & \frac{1}{n+1} & 0 \\ \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-3} & \cdots & \frac{1}{n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{2} & -\frac{(n+1)}{2} \end{vmatrix} \tag{A.6}$$

Denotemos los menores complementarios de los elementos $(n-1,n)$ y (n,n) que van en la parte derecha de las ecuaciones (A.5) y (A.6) mediante B_1 y B_2, respectivamente. Entonces

$$\det\ P = \left(\left(1-\frac{n(n+1)}{2}\right)B_1 + \frac{n+2}{n+1}B_2\right)\frac{(n-1)!}{(n+1)\ldots 2n},$$

$$\det\ P = \left(-\frac{(n+1)}{2}B_1 + \frac{1}{n-1}B_2\right)\frac{(n-1)!n}{(n+1)\ldots 2n},$$

de donde obtenemos que si

$$B_1 = \frac{2}{n^2-1}B_2, \quad \text{entonces} \quad \det P = 0.$$

Y dado que $B_1 = \det(P_{n-1,3}) \neq 0$, el rango es $P = n-1$. $\square$

A.2 Positividad y unicidad de $\theta(x)$

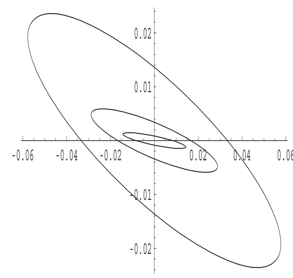
Consideremos la ecuación

$$\theta = \frac{1}{2a_0}\langle D_\theta F D_\theta x, x\rangle \tag{A.7}$$

vamos a demostrar que esta ecuación para $x \neq 0$ tiene una solución única positiva. Primero vamos a demostrar que $\theta(x)$ toma sólo valores positivos, para esto en ambos lados de la ecuación (A.7) colocamos en lugar de θ un valor arbitrario $C > 0$ y consideremos la parte derecha de la ecuación (A.7) la cual escribimos como $\langle D_C F D_C x, x\rangle$ donde D_C es la matrix D_θ, donde en lugar de θ se coloca C. La expresión $\langle D_C F D_C x, x\rangle$ representa una forma cuadratica positiva definida ya que $\langle D_C F D_C x, x\rangle = \langle F D_C x, D_C x\rangle = \langle Fy, y\rangle$. Esta forma toma solo valores no negativos incluyendo C, por esto es posible la igualdad

$$\langle D_C F D_C x, x\rangle = C$$

para cualquier valor $C > 0$. Además todos los valores de x para los cuales es posible esta igualdad forman una superficie de nivel (elipsoidal) de la función θ, es decir, $\theta(x) = C$. Por ejemplo, en el caso del ejemplo 3.4 los elipsoides para $\theta(x)$ igual a 1, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ se muestran en la siguiente figura:



Vamos a demostrar ahora que para cualquier $x \neq 0$ la ecuación (A.7) tiene una solución positiva. De (A.7) se sigue que para $\theta \neq 0$ la función θ cumple

$$2\theta^{2n} - \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}\theta^{i+j-2}x_i x_j = 0. \tag{A.8}$$

Fijemos los valores $x_1, ..., x_n$ y sea $x_1 \neq 0$. Consideremos la función

$$\Phi(\theta) = 2\theta^{2n} - \Psi(\theta)$$

donde

$$\Psi(\theta) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}\theta^{i+j-2}x_i x_j$$

Ya que para valores suficientemente grandes de θ

$$2\theta^{2n} > \Psi(\theta)$$

y ya que para $x_1 \neq 0$ $\Phi(\theta) > 0$ entonces $\Phi(0) < 0$ y $\Phi(\theta) > 0$ para θ suficientemente grande y por eso existe θ^* tal que (A.8) tiene solución positiva. Si $x_1 = \cdots = x_{k-1} = 0$ y $k \neq 0$ entonces la solución no trivial positiva de la ecuación (A.7) coinside con las soluciones no triviales positivas de la ecuación

$$2\theta^{2n-2k+2} - \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}\theta^{i+j-2k+2}x_i x_j = 0$$

La existencia de una solución positiva de esta ecuación se demuestra de manera análoga en el caso cuando $x_1 \neq 0$.

De esta manera la ecuación (A.8) tiene una solución positiva demostremos que para $x \neq 0$ esta solución es única. Para esto demostraremos que las superficies de nivel $L_1 = \{x : \theta(x) \leq C\}$ y $L_2 = \{x : \theta(x) \leq C_1\}$ de la función $\theta(x)$ no tiene puntos comunes y estan incluidos uno en el otro para $C \neq C_1$, es decir, verificaremos la inclusión

$$\{x : \theta(x) \leq C_1\} \subset \{x : \theta(x) \leq C\} \tag{A.9}$$

(asumimos que $C_1 < C$. En virtud a (A.7) la superficie de nivel de θ se define de $\langle D_C F D_C x, x\rangle = C$. En lo que sigue la matriz $D_C F D_C$ la denotaremos mediante F_C. Para verificar (A.9) resolvamos el problema de encontrar el máximo de la función $\langle F_C x, x\rangle$ bajo la restricción $\langle F_{C_1} x, x\rangle = C_1$.

Sea el valor del máximo igual a γ; si γ resulta menor a C entonces la inclusión (A.9) es válida, la solución de este problema se encuentra mediante la función de Lagrange

$$\langle F_C x, x\rangle - \lambda[\langle F_{C_1} x, x\rangle - C_1]$$

Las condiciones necesarias del extremo de la función de Lagrange dan

$$F_C x = \lambda F C_1 x$$

multiplicamos esta ecuación escalarmente por x y usamos la igualdad $\langle F_{C_1} x, x\rangle = C_1$:

$$\gamma = \langle F_C x, x\rangle = \lambda \langle F_{C_1} x, x\rangle = \lambda C_1.$$

El valor λ es la solución de la ecuación

$$\det(F_C - \lambda F_{C_1}) = 0$$

Sea $C_1 = (1-\delta)C$, $\delta > 0$ entonces esta ecuación toma la forma

$$\begin{vmatrix} f_{11}\left[\frac{1}{C^{2n-1}} - \frac{\lambda}{(1-\delta)^{2n-1}C^{2n-1}}\right] & f_{12}\left[\frac{1}{C^{2n-2}} - \frac{\lambda}{(1-\delta)^{2n-2}C^{2n-2}}\right] & \cdots & f_{1n}\left[\frac{1}{C^{n}} - \frac{\lambda}{(1-\delta)^{n}C^{n}}\right] \\ f_{21}\left[\frac{1}{C^{2n-2}} - \frac{\lambda}{(1-\delta)^{2n-2}C^{2n-2}}\right] & f_{22}\left[\frac{1}{C^{2n-3}} - \frac{\lambda}{(1-\delta)^{2n-3}C^{2n-3}}\right] & \cdots & f_{2n}\left[\frac{1}{C^{n-1}} - \frac{\lambda}{(1-\delta)^{n-1}C^{n-1}}\right] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}\left[\frac{1}{C^{n}} - \frac{\lambda}{(1-\delta)^{n}C^{n}}\right] & f_{n2}\left[\frac{1}{C^{n-1}} - \frac{\lambda}{(1-\delta)^{n-1}C^{n-1}}\right] & \cdots & f_{nn}\left[\frac{1}{C} - \frac{\lambda}{(1-\delta)C}\right] \end{vmatrix} = 0 \tag{A.10}$$

Factoricemos de la primer fila del determinante $[(1-\delta)C]^{-n}$ de la segunda fila $[(1-\delta)C]^{-(n-1)}$ etc. (de la última fila $[(1-\delta)C]^{-1}$) y simplificaremos respecto de estos factores ambas partes de esta ecuación. Después de esto factorizamos de la primera columna $[(1-\delta)C]^{-(n-1)}$, de la segunda columna $[(1-\delta)C]^{-(n-2)}$ etc. Simplificando estos factores obtenemos

$$\begin{vmatrix} f_{11}\left[(1-\delta)^{2n-1}-\lambda\right] & f_{12}\left[(1-\delta)^{2n-2}-\lambda\right] & \cdots & f_{1n}\left[(1-\delta)^{n}-\lambda\right] \\ f_{21}\left[(1-\delta)^{2n-2}-\lambda\right] & f_{22}\left[(1-\delta)^{2n-3}-\lambda\right] & \cdots & f_{2n}\left[(1-\delta)^{n-1}-\lambda\right] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}\left[(1-\delta)^{n}-\lambda\right] & f_{n2}\left[(1-\delta)^{n-1}-\lambda\right] & \cdots & f_{nn}\left[(1-\delta)-\lambda\right] \end{vmatrix} = 0$$

Vamos a buscar λ en la forma $\lambda = 1-\delta\nu$. Expandiendo los elementos del determinante en exponentes de δ y factorizando de cada fila $-\delta$ obtenemos

$$\begin{vmatrix} f_{11}\left[2n-1+o(\delta)-\nu\right] & f_{12}\left[2n-2+o(\delta)-\nu\right] & \cdots & f_{1n}\left[n+o(\delta)-\nu\right] \\ f_{21}\left[2n-2+o(\delta)-\nu\right] & f_{22}\left[2n-3+o(\delta)-\nu\right] & \cdots & f_{2n}\left[n-1+o(\delta)-\nu\right] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}\left[n+o(\delta)-\nu\right] & f_{n2}\left[n-1+o(\delta)-\nu\right] & \cdots & f_{nn}\left[1+o(\delta)-\nu\right] \end{vmatrix} = 0$$

Esta ecuación para $\delta = 0$ tiene la forma

$$\begin{vmatrix} f_{11}\left[2n-1-\nu\right] & f_{12}\left[2n-2-\nu\right] & \cdots & f_{1n}\left[n-\nu\right] \\ f_{21}\left[2n-2-\nu\right] & f_{22}\left[2n-3-\nu\right] & \cdots & f_{2n}\left[n-1-\nu\right] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}\left[n-\nu\right] & f_{n2}\left[n-1-\nu\right] & \cdots & f_{nn}\left[1-\nu\right] \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(A.11)}$$

Es fácil de ver que las raices de esta ecuación son reales. Denotemos estas en orden de crecimiento mediante $\nu_1^0, ..., \nu_s^0$ mientras que sus multiplicidades son $p_1, ..., p_s$ $(\sum_{i=1}^{s} p_i = n)$. Entonces para la ecuación (A.2) existen s grupos de raices (el grupo i-ésimo contiene p_i raices y corresponden a la raíz ν_i^0). Existe un $\delta_0 > 0$ tal que para $|\delta| < \delta_0$ la raíz arbitraria ν_i en el i-ésimo grupo tiene la forma

$$\nu_i = \nu_i^0 + \phi_i(\delta);$$

la funcion $\phi(\delta)$ es continua y a cada raíz de ν_i corresponde en general su función $\phi_i(\delta)$, $|\phi_i(\delta)| < \epsilon$ entonces la raíz máxima de la ecuación (A.10) satisface la desigualdad

$$\lambda_{max} \leq 1-\delta(\nu_1^0-\epsilon).$$

La siguiente desigualdad es válida

$$\gamma = \lambda_{max} C_1 = \lambda_{max}(1-\delta)C \leq [1-\delta(\nu_1^0-\epsilon)](1-\delta)C < C. \qquad \text{(A.12)}$$

Entonces de estas desigualdades tenemos

$$[1-\delta(\nu_1^0-\epsilon)](1-\delta) < 1. \qquad \text{(A.13)}$$

De donde se sigue que si tenemos $1 > -\nu_1^0$ entonces para δ suficientemente pequeño (A.13) se cumple. De esta manera queda demostrada la unicidad de la solución positiva.

En el caso estudiado en esta tesis, en el ejemplo 3.4 se tiene que la ecuación (A.11) tiene la forma

$$\begin{vmatrix} 3(3-\nu) & 2-\nu \\ 2-\nu & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{vmatrix} = 0$$

de donde obtenemos que $\nu_1^0 = 2 - \sqrt{3}$ y $\nu_2^0 = 2 + \sqrt{3}$ por lo tanto la desigualdad (A.12) se satisface.

Bibliografía

[1] A. F. Filippov,: *Differential equations with discontinuous right-hand sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.

[2] Choque Rivero A.E.: *Estabilización en tiempo finito de algunos sistemas no lineales.* Memorias del Congreso Nacional de Control Automático, Cuernavaca, 2005.

[3] Choque Rivero A.E., Korobov V.I., Skoryk V.O.: *The controllability function as time of motion I* Mathematical Physics, Analisys and Geometry, No. 2, Vol.11, 2004

[4] Choque Rivero A.E., Korobov V.I., Skoryk V.O.: *The controllability function as time of motion II* Mathematical Physics, Analisys and Geometry, No. 3, Vol.11, 2004

[5] Fliess M.; Levine J.; Martin Ph.; Rouchon P.: *Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples.* Int. J.Control, 1995, Vol. 61 –6, pág. 1327–1361.

[6] F.R. Gantmacher; *Theory of Matrices*; Chelsea Publ., Bronx, NY, 1959.

[7] Gorr G.V.; Ilyulin A.M.; Kovalyov A.M.; Savchenko A.Ya.: *Nelineinij analiz pevednija mehanicheskih sistem.* (in Russian), Kiev: Naukova Dumka, 1984.

[8] M. W. Hirsch, S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra.* Academic Press, New York, (1974).

[9] Isidori A.: *Nonlinear Control Systems*, Third Edition, Springer Verlag, 1995.

[10] Jerzy Zabczyk.: *Mathematical Control Theory: An Introduction*, Birkhäuser, Boston, 1992.

[11] Khalil H.:*Nonlinear Systems*, Third Edition, Prentice Hall, 2002.

[12] Korobov V.I.: *A general approach to the solution of the bounded control synthesis problem in a controllability problem*. Mat. Sb. 109 (1979) 582–606; English translation: USSR–Sb.37(1980).

[13] Korobov V.I.: *Controlabillity, stability of some non linear systems.* Differential'nye Uravnenia T. 9, No.4 (1973) 614–619; English translation: Differential Equations 26 (1990) 1422–1431.

[14] Korobov V.I., Sklyar G.M.: *Methods for constructing of positional controls and an admissible maximum principle*, Differential'nye Uravnenia 26 (1990) 1914–1924; English translation: Differential Equations 26 (1990) 1422–1431.

[15] Korobov V.I., Skoryk V.O.: *Synthesis and restricted inertial controls for systems with multivariate control* J. Math.Anal.Appl. 275 (2002) 84–107.

[16] Korobov V.I., Skorik V.A.:, *Synthesis of restricted inertial controls for systems with multivariate control*, J. Math. Anal. Appl.275 (2002), 84-107

[17] Nijmeijer H, Arjan van der Schaft:*Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer, 1990.

[18] Pandolfi L.:*Linear control systems: controllability with constrained controls*, J. Optim. Theory Applicat., vol. 19, pp. 577585, 1976.

[19] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems.* Third edition. Texts in Applied Mathematics **7**. Springer (2001).

[20] Singh S.N.; Bossart T.C.: *Exact feedback linearization and control of space station using CMG.* IEEE Trans. Autom. Contr. 1993, Vol. 38.1, pg.184–187.

[21] Schmitendorf W.E., Barmish B.R.: *Null controllability of linear systems with constrained controls*, SIAM J. Control Optim., vol. 18, pp. 327345, 1980.