UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

GRUPOS DE FRÉCHET NUMERABLES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

ULISES ARIET RAMOS GARCÍA

ASESOR

DR. MICHAEL HRUŠÁK

FEBRERO DE 2008

GRUPOS DE FRÉCHET NUMERABLES

Ulises Ariet RAMOS GARCÍA
Instituto de Matemáticas Unidad Morelia, UNAM
Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH
ariet@matmor.unam.mx

Director de Tesis: Michael HRUŠÁK

A mis padres
A mis hermanos
A Martha
A mis hijos: Arieth y Danae

Introducción

Indudablemente, los problemas de metrización de ciertas clases de espacios topológicos, han sido siempre de gran interés para la topología general. Así, por ejemplo, para la clase de grupos topológicos G. Birkhoff y S. Kakutani en [**1936**] demuestran (independientemente) que la condición primero numerable es suficiente para garantizar la metrizabilidad de un grupo topológico.

Ahora, si se debilita la condición primero numerable, por la condición de ser Fréchet, es natural preguntarse si todavía se tiene un teorema de metrización. Pues bien, es fácil ver que la suma directa de ω_1 copias del grupo topológico del círculo $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$, es un grupo topológico σ-compacto Fréchet el cual no es primero numerable, y en consecuencia no metrizable. Sin embargo, este ejemplo no es separable, por lo que entonces V. I Malykhin en 1978 hace la siguiente pregunta.

¿Existe un grupo topológico separable Fréchet no metrizable?

Como se verá, existen ejemplos consistentes a esta pregunta. Sin embargo, permanece aún abierto, si es consistente con **ZFC** que cada grupo topológico separable Fréchet sea metrizable. De hecho tampoco se sabe esto último para una clase más pequeña, por ejemplo, para la clase de grupos topológicos booleanos Fréchet numerables.

Pues bien, en esta tesis hemos estudiado y desarrollado lo que hasta el momento se conoce entorno a esta pregunta. El presente trabajo está dividido en cuatro capítulos. En el Capítulo 1 se dan las definiciones, convenciones y notaciones así como algunos resultados que se usarán a lo largo de todo el trabajo.

En el Capítulo 2 nos dedicaremos a estudiar y desarrollar el lenguaje combinatorio que se encuentra detrás de la propiedad de Fréchet en espacios topológicos. Con este lenguaje, el cual usaremos a lo largo todo el trabajo, abordaremos la pregunta de Malykhin. También en este capítulo se analiza el concepto de Fréchet atravéz de las α_i-propiedades de A. V. Arhangel'skiĭ. Mostrando por ejemplo, que estas propiedades se distinguen entre si en la clase de espacios de Fréchet numerables, aunque dos de ellas sólo se puedan distinguir consistentemente. Finalmente, se concluye el capítulo con algunas relaciones que hay entre ciertas α_i-propiedades y algunos juegos topológicos infinitos.

Con los elementos desarrollados en el Capítulo 2, en el Capítulo 3 se estudian los grupos topológicos numerables bajo la propiedad de Fréchet y las α_i-propiedades. Pasando por cierta clase de grupos topológicos booleanos numerables, se dan dos ejemplos consistentes a la pregunta de Malykhin del tipo booleano. A saber, que bajo las siguientes condiciones existen ejemplos para esta pregunta.

- $\mathfrak{p} > \omega_1$
- (Nyikos [**1992**]) $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$

También se analiza la propiedad de Fréchet en los espacios $C_p(X)$, obteniendo así otro ejemplo consistente del tipo $C_p(X)$ dado por J. Gerlits y Zs. Nagy en [**1982**] bajo la existencia de γ-conjuntos.

Finalmente, en el Capítulo 4 analizamos el problema de Malykhin como un problema de grietas en $\mathscr{P}(\omega)$. Así, dado que **OCA** tiene una gran influencia en las estructuras de grietas en $\mathscr{P}(\omega)$, entonces en el capítulo pasamos a desarrollar toda esta influencia, para después tener elementos para proponer ciertos axiomas de "forcing", bajo los cuales tenemos la esperanza de que la pregunta de Malykhin tenga una respuesta en el sentido negativo, y con esto obtener que tal pregunta es independiente de **ZFC**.

Cabe mencionar que el trabajo contenido en la tesis involucra varias técnicas avanzadas de la teoría de conjuntos moderna; desde teoría descriptiva de conjuntos y teoría de juegos (determinación), invariantes cardinales del continuo hasta el método de forcing, y axiomas relacionados como el "Proper Forcing Axiom" de S. Shelah y el "Open Coloring Axiom" de S. Todorčević.

Ulises Ariet Ramos García

Febrero 2008

Índice general

Introducción v

Capítulo 1. Preliminares 1
1. Convenciones y notaciones 1
2. Invariates cardinales del continuo 3

Capítulo 2. Espacios de Fréchet 9
1. Introducción 9
2. Definiciones y propiedades básicas 9
3. La propiedad de Fréchet idealizada 11
4. Espacios construidos a partir de familias casi ajenas 14
5. Las α_i-propiedades en espacios de Fréchet 18

Capítulo 3. Grupos de Fréchet 31
1. Introducción 31
2. Grupos booleanos 34
3. γ-conjuntos y espacios $C_p(X)$ Fréchet 37
4. Más ejemplos consistentes 44

Capítulo 4. El problema de Malykhin y definibilidad 47
1. Introducción 47
2. **PFA** y **OCA** 50
3. Modelo (Axioma) de prueba 55
4. Preguntas a cerca del Modelo (Axioma) de prueba 56

Bibliografía 57

CAPíTULO 1

Preliminares

1. Convenciones y notaciones

1.1. Teoría de conjuntos. La axiomática usual de Zermelo-Frankel más el Axioma de Elección, será denotada por **ZFC**.

Un *ordinal* es el conjunto de todos los ordinales menores que él, y un *cardinal* es un ordinal inicial. ω_0 es ω (el cuál, también es denotado por $\aleph_0$), ω_1 o $\aleph_1$ representa el primer ordinal no numerable y $\mathfrak{c}$ es 2^ω (la cardinalidad de $\mathscr{P}(\omega)$). En este sentido, la hipótesis del continuo (**CH**) afirma que $\mathfrak{c} = \omega_1$.

Por otro lado, dos conjuntos A y B tienen la misma *cardinalidad* o son *equipotentes* si y sólo si existe una función biyectiva $f\colon A \to B$. Intuitivamente, dos conjuntos con la misma cardinalidad tienen el mismo número de elementos. El cardinal que es equipotente con el conjunto A será llamado el *número cardinal* de A o la *cardinalidad* de A, el cual será denotado por $|A|$. Un conjunto A es *finito* si $|A| = n$ para algún $n \in \omega$. Si A es finito o tiene cardinalidad ω, entonces diremos que A es *contable*. Y si A tiene cardinalidad ω, diremos que A es *numerable*. Utilizaremos las letras griegas α, β, γ, δ, etc., para referirnos a números ordinales y las letras griegas κ y λ para referirnos a números cardinales.

Para un conjunto X frecuentemente usaremos las subcolecciones

$$[X]^\omega = \{A \in \mathcal{P}(X)\colon |A| = \omega\}$$

y

$$[X]^{<\omega} = \{A \in \mathcal{P}(X)\colon |A| < \omega\}$$

del conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$ del conjunto X.

Si A es un conjunto, entonces $\mathcal{F} \restriction A$ denotará $\{F \cap A\colon F \in \mathcal{F}\}$, donde $\mathcal{F}$ es una colección de conjuntos, y $f \restriction A$ denotará la restricción de f en A, si f es una función. Usamos el símbolo '$\restriction$' en dos sentidos diferentes, esperando que esto no se preste a confusión.

Para conjuntos A y B, el conjunto de funciones $f\colon A \to B$ es denotado por ${}^A B$, y el dominio y rango de una función f son denotados por $\mathrm{dom}(f)$ y $\mathrm{ran}(f)$. También, la preimagen y la imagen de un conjunto X bajo una función f será denotado por $f^{-1}(X)$ y $f(X)$ respectivamente. Así, $f(X) = \mathrm{ran}(f \restriction X)$.

Como es usual, una función es en sí una gráfica. En particular, $D \times \{d\}$ es la función (constante) con dominio D y rango $\{d\}$.

Un *pre-orden* es una pareja $\langle D, \leqslant \rangle$, de un conjunto D y una relación reflexiva y transitiva $\leqslant$ sobre D. Como es usual escribiremos D en vez de $\langle D, \leqslant \rangle$ si $\leqslant$ es clara en el contexto. Escribimos $x < y$ si $x \leqslant y$ e $y \nleqslant x$. Entonces $x < y$ es al menos tan fuerte como $x \leqslant y$ y $x \neq y$; sin embargo, esto último es más fuerte si y sólo si $\exists\, x, y \in D\ [x \neq y$ y $x \leqslant y$ e $y \leqslant x]$. En particular, $\subset$ denotará la contención *estricta*. Un conjunto $L \subseteq D$ es llamado *cofinal* en $\langle D, \leqslant \rangle$ si $\forall\, x \in D\ \exists\, y \in L\ [x \leqslant y]$; y $\mathrm{cof}(D)$ denotará la cardinalidad más pequeña de un subconjunto cofinal en D.

Sea $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un conjunto no vacío parcialmente ordenado. Dos elementos $p, q \in \mathbb{P}$ son llamados *compatibles*, si ellos tienen una cota inferior común y son llamados *incompatibles* en caso contrario. Una *anticadena* es un conjunto formado por elementos incompatibles por parejas. P satisface la *condición de cadena contable* (ccc) o *condición de anticadena contable*, si todas sus anticadenas son contables.

Un subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ es *denso* si cada elemento de $\mathbb{P}$ es $\geqslant$ a un elemento de D. Si $\mathscr{D}$ es una familia de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, entonces $G \subseteq \mathbb{P}$ es llamado *$\mathscr{D}$-genérico*, si este es cerrado superiormente, si cualesquiera dos elementos de este son compatibles, y si este intersecta a cada $D \in \mathscr{D}$.

El *axioma de Martin* (**MA**) afirma que si $\mathscr{D}$ es una familia de subconjuntos densos de un parcialmente ordenado $\mathbb{P}$ con la ccc y $|\mathscr{D}| < \mathfrak{c}$, entonces existe un filtro $\mathscr{D}$-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$. Más en general, si κ es un cardinal y $\mathscr{K}$ es la clase de los conjuntos no vacíos parcialmente ordenados, entonces escribimos $\mathbf{MA}_\kappa(\mathscr{K})$ para la afirmación que asegura que cada familia de κ subconjuntos densos en un miembro $\mathbb{P}$ de $\mathscr{K}$ admite un genérico $G \subseteq \mathbb{P}$. $\mathbf{MA}_{<\kappa}(\mathscr{K})$ es definida de una manera análoga. Uno omite el subíndice cuando este es "$< \mathfrak{c}$" y uno omite la clase $\mathscr{K}$ cuando esta es la clase de los parcialmente ordenados con la ccc.

Así, **MA** es $\mathbf{MA}_{<\mathfrak{c}}(\mathrm{ccc})$. Algunos autores escriben $\mathbf{MA}_\kappa$ para entender lo que nosotros llamamos $\mathbf{MA}_{<\kappa}$.

Las definiciones y propiedades de teoría descriptiva de conjuntos que se utilizen en lo subsecuente y no se hayan establecido de manera explícita a lo largo del trabajo, pueden consultarse en A. S. Kechris [**1995**].

1.2. Topología. Todos los espacios considerados son al menos regulares T_1, y ocasionalmente completamente regulares; esto será claro por el contexto.

Si A es un conjunto y X es un espacio, entonces X^A tendrá la topología producto. Ahora, para $x \in X$, denotamos por $\eta(x)$ a la colección de todos los subconjuntos abiertos en X alrededor de x, y por $\chi(x, X)$ a la mínima cardinalidad de una base local para x en X.

Para un espacio topológico X y un punto $x \in X$, decimos que $A \subseteq X$ *converge* a x ($A \to x$), si cada vecindad de x contiene a todos los puntos de A salvo una cantidad finita. Ahora, si $A \subseteq X$, denotaremos a la cerradura de A en X por $\mathrm{Cl}_X(A)$ o bien por $\overline{A}$ si esto no se presta a confunsión.

Si $\langle X_i \colon i \in I \rangle$ es una familia de espacios topológicos y $X = \Pi_{i\in I} X_i$ es su producto cartesiano, $\pi_i \colon X \to X_i$ representará la i-ésima proyección de X para cada $i \in I$.

Las definiciones y propiedades topológicas que se utilizen en lo subsecuente y no se hayan establecido de manera explícita en esta sección o a lo largo del trabajo, pueden consultarse en R. Engelking [**1989**].

2. Invariates cardinales del continuo

En esta sección, introducimos los invariantes cardinales del continuo así como algunas propiedades de estos, que se usarán a lo largo de todo el trabajo.

Sea $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$, decimos que $\mathscr{A}$ es una familia *casi ajena* (AD) si para cada dos elementos de $\mathscr{A}$ su itersección es finita, y es maximal (MAD), si esta es maximal con esta propiedad e infinita.

Definimos el pre-orden $\leqslant^*$ sobre ${}^\omega\omega$ como

$$f \leqslant^* g \text{ si } f(n) \leqslant g(n) \text{ para toda } n \in \omega \text{ salvo una cantidad finita.}$$

Nótese que $\langle {}^\omega\omega, \leqslant^* \rangle$ no tiene elementos maximales. Diremos que un subconjunto de ${}^\omega\omega$ es *no acotado* si este no es acotado en $\langle {}^\omega\omega, \leqslant^* \rangle$. Los subconjuntos de ${}^\omega\omega$ que son cofinales en $\langle {}^\omega\omega, \leqslant^* \rangle$ son llamados *dominantes*, y los que son dominantes y bien ordenados por $\leqslant^*$ son llamados *escalonados*.

Definimos el pre-orden $\subseteq^*$ sobre $\mathscr{P}(\omega)$ (y ocasionalmente sobre $\mathscr{P}(X)$, para X un conjunto numerable), como $F \subseteq^* G$, si $F \setminus G$ es finito.

Diremos que A es una *pseudo–intersección* de la familia $\mathscr{F}$, si $A \subseteq^* F$ para cada $F \in \mathscr{F}$; notemos que cualquier conjunto es una pseudo-intersección de la familia vacía. Llamaremos a una familia $\mathscr{T} \subseteq [\omega]^\omega$ una *torre* (decreciente) si $\mathscr{T}$ es bien ordenado por ${}^*\supseteq$ y no tiene pseudo-intersección infinita. Diremos que una familia $\mathscr{F} \subseteq [\omega]^\omega$ tiene la *propiedad fuerte de la intersección finita* (que abreviaremos por *pfif*), si cada subfamilia finita tiene intersección infinita.

Con estas definiciones en mente, demos a continuación la definición canónica del cardinal $\mathfrak{a}$ introducido por S. H. Hechler en [**1972**] y R. C. Solomon, de los cardinales $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{p}$ introducidos por F. Rothberger en [**1939**] y [**1948**] respectivamente, y del cardinal $\mathfrak{d}$ introducido por M. Katětov en [**1960**].

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= \min\{|\mathscr{A}|\colon \mathscr{A} \text{ es una familia MAD sobre } \omega\},\\
\mathfrak{b} &= \min\{|B|\colon B \text{ es un subconjunto no acotado de } {}^{\omega}\omega\},\\
\mathfrak{d} &= \min\{|D|\colon D \text{ es un subconjunto } \mathfrak{d}\text{ominante de } {}^{\omega}\omega\},\\
\mathfrak{p} &= \min\{|\mathscr{F}|\colon \mathscr{F} \text{ es una subfamilia de } [\omega]^{\omega} \text{ con la } \textit{pfif}, \text{ la cual no tiene}\\
&\qquad\qquad \mathfrak{p}\text{seudo-intersección infinita}\}.
\end{aligned}$$

Es bien conocido y no muy difícil de probar que $\omega_1 \leqslant \mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$ y que $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{d}$.

El cardinal $\mathfrak{b}$ es llamado el *número de (no)acotación*. La letra $\mathfrak{b}$ proviene de la palabra en francés 'non $\mathfrak{b}$ornée' (no acotado). El cardinal $\mathfrak{d}$ es llamado el *número de $\mathfrak{d}$ominación*.

Frecuentemente la información combinatoria de los invariantes cardinales del continuo es muy usada en topología de conjuntos. Por lo que a continuación daremos la información combinatoria de los cardinales $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$ que usaremos a lo largo de este trabajo.

Para nuestro siguiente resultado necesitaremos de una terminología adicional. Si $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son familias de conjuntos numerables, escribiremos $\mathscr{F} \perp \mathscr{G}$ si $\forall\, F \in \mathscr{F}\ \forall\, G \in \mathscr{G}\ [|F \cap G| < \omega]$, y diremos que $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ se pueden *separar* si existe un conjunto S para el cual $\forall\, F \in \mathscr{F}\ [F \subseteq^* S]$ y $\forall\, G \in \mathscr{G}\ [|G \cap S| < \omega]$; nótese que si S separa a $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$, entonces $\left(\bigcup(\mathscr{F} \cup \mathscr{G})\right) \setminus S$ separa a $\mathscr{G}$ y $\mathscr{F}$, de aquí que 'se pueden separar' es una relación simétrica. Escribirémos $F \perp \mathscr{G}$ si $\{F\} \perp \mathscr{G}$. Finalmente, si $B \subseteq {}^{\omega}\omega$ e $I \in [\omega]^{\omega}$, diremos que B es *no acotado en I* si

$$\forall\, f \in {}^{\omega}\omega \quad \exists\, g \in B \quad [|\{n \in I\colon f(n) < g(n)\}| = \omega],$$

i.e., si $\{f \restriction I\colon f \in B\}$ es no acotado en $\langle {}^{I}\omega, \leqslant^* \rangle$.

1.1. Teorema (Rothberger [**1939**], [**1941**] y [**1948**], Hechler [**1970**], Burke y van Douwen [**1977**]). *Sea $\mathscr{V}$ la colección formada por las líneas verticales de $\omega \times \omega$, i.e., $\mathscr{V} = \{\{k\} \times \omega\colon k \in \omega\}$. Entonces $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_i$ para $i \in$*

$\{1, \ldots, 7\}$, *donde*

$$\mathfrak{b}_1 = \text{mín}\{|B| \colon B \text{ es un subconjunto no acotado de } {}^\omega\omega \text{ formado por funciones estrictamente crecientes, el cual es bien ordenado por } <^*\},$$

$$\mathfrak{b}_2 = \text{mín}\{|B| \colon B \subseteq {}^\omega\omega, \text{ y } B \text{ es no acotado sobre cada subconjunto infinito de } \omega\},$$

$$\mathfrak{b}_3 = \text{mín}\{|\mathscr{B}| \colon \mathscr{B} \subseteq [\omega \times \omega]^\omega \text{ es bien ordenado por } \subset^*, \mathscr{B} \perp \mathscr{V}, \text{ y } \forall X \in [\omega \times \omega]^\omega\, [X \perp \mathscr{V} \Rightarrow \exists B \in \mathscr{B}\, [|X \cap B| = \omega]]\},$$

$\mathfrak{b}_4$: *es como* $\mathfrak{b}_3$ *pero sin el "bien ordenado por* $\subset^*$*"*,

$$\mathfrak{b}_5 = \text{mín}\{|\mathscr{B}| \colon \mathscr{B} \subseteq [\omega]^\omega, \exists \mathscr{C} \subseteq [\omega]^\omega\, [|\mathscr{C}| = \omega, \mathscr{B} \cap \mathscr{C} = \emptyset, \mathscr{B} \cup \mathscr{C} \text{ es casi ajena, y } \forall \mathscr{D} \in [\mathscr{C}]^\omega\, [\mathscr{B} \text{ y } \mathscr{D} \text{ no se pueden separar}]]\},$$

$$\mathfrak{b}_6 = \text{mín}\{|\mathscr{B}| \colon \mathscr{B} \subseteq [\omega]^\omega, \text{ y} \exists \mathscr{C} \subseteq [\omega]^\omega\, [|\mathscr{C}| = \omega, \mathscr{B} \perp \mathscr{C}, \mathscr{B} \text{ y } \mathscr{C} \text{ son bien ordenados por } \subseteq^*, \text{ y } \mathscr{B} \text{ y } \mathscr{C} \text{ no se pueden separar}]\},$$

$\mathfrak{b}_7$: *es como* $\mathfrak{b}_6$ *pero sin el "*$\mathscr{B}$ *y* $\mathscr{C}$ *son bien ordenados por* $\subseteq^*$*".*

Demostración. Las desigualdades $\mathfrak{b}_2 \geqslant \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_3 \geqslant \mathfrak{b}_4$, y $\mathfrak{b}_6 \geqslant \mathfrak{b}_7$ son obvias, entonces es suficiente con probar que $\mathfrak{b} \geqslant \mathfrak{b}_1 \geqslant \mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_1 \geqslant \mathfrak{b}_3 \geqslant \mathfrak{b}_6$, y $\mathfrak{b}_4 \geqslant \mathfrak{b}_7 \geqslant \mathfrak{b}$.

Para $f \in {}^\omega\omega$ definimos L_f como $\{\langle k, n\rangle \in \omega \times \omega \colon n \leqslant f(k)\}$, y notemos que

$$\forall f, g \in {}^\omega\omega \quad [f <^* g \Leftrightarrow L_f \subset^* L_g]. \tag{1}$$

También, para $X \in [\omega \times \omega]^\omega$ definimos $K_X = \{k \in \omega \colon X \cap \{k\} \times \omega \neq \emptyset\}$, y si $X \perp \mathscr{V}$ definimos $f_X \in {}^\omega\omega$ como $f_X(k) = \text{máx}\{n \in \omega \colon n = 0 \text{ o } \langle k, n\rangle \in X\}$, y nótese que

$$X \subseteq L_{f_X} \cap K_X \times \omega. \tag{2}$$

Demostración de $\mathfrak{b} \geqslant \mathfrak{b}_1$. Sea $F = \{f_\xi \colon \xi \in \mathfrak{b}\}$ un conjunto no acotado de ${}^\omega\omega$. Dado que el conjunto S de funciones estrictamente crecientes es un conjunto dominante, podemos elegir por recursión $\mathfrak{b}_\eta \in S$ para $\eta \in \mathfrak{b}$, tal que $\forall f \in \{\mathfrak{b}_\xi \colon \xi \in \eta\} \cup \{f_\eta\}\ [f <^* \mathfrak{b}_\eta]$. Entonces $B = \{\mathfrak{b}_\eta \colon \eta \in \mathfrak{b}\}$ demuestra que $\mathfrak{b} \geqslant \mathfrak{b}_1$.

Demostración de $\mathfrak{b}_1 \geqslant \mathfrak{b}_2$. Es suficiente con probar la siguiente afirmación.

Afirmación. Si $B \subseteq {}^\omega\omega$ es un conjunto no acotado formado por funciones no decrecientes, entonces B no es acotado en ningún subconjunto infinito de ω.

Demostración de la afirmación. En efecto, consideremos cualquier $f \in {}^\omega\omega$ e $I \in [\omega]^\omega$. Podemos definir $\widehat{f} \in {}^\omega\omega$ como

$$\widehat{f}(k) = \text{máx}\{f(n) \colon n \leqslant \text{mín}\{i \in I \colon i \geqslant k\}\}.$$

Ahora, existe $g \in B$ tal que $g \nleq^* \widehat{f}$, *i.e.* $J = \{j \in \omega \colon \widehat{f}(j) < g(j)\}$ es infinito. Para cada $j \in J$, si $i = \text{mín}\{k \in I \colon k \geqslant j\}$, entonces $g(i) \geqslant g(j) > \widehat{f}(j) \geqslant f(i)$, ya que g es no decreciente, de donde $\{i \in I \colon f(i) < g(i)\}$ es infinito. $\square$

Demostración de $\mathfrak{b}_1 \geqslant \mathfrak{b}_3$. Sea B como en la definición de $\mathfrak{b}_1$, y pongamos $\mathscr{B} = \{L_f : f \in B\}$. De (1) se sigue que $\mathscr{B}$ es bien ordenado por $\subset^*$, y claramente $\mathscr{B} \perp \mathscr{V}$. Consideremos cualquier $X \in [\omega \times \omega]^\omega$ con $X \perp \mathscr{V}$. Claramente K_X es infinito. Entonces, por la afirmación, existe $g \in B$ tal que $J = \{k \in K_X : f_X(k) \leqslant g(k)\}$ es infinito. Entonces $f_X \restriction J$ es un subconjunto infinito tanto de X como de L_g.

Demostración de $\mathfrak{b}_1 \geqslant \mathfrak{b}_5$. Definimos $\mathfrak{b}_5'$ como $\mathfrak{b}_5$, pero con '$[\omega \times \omega]^\omega$' en lugar de '$[\omega]^\omega$'. Entonces $\mathfrak{b}_5' = \mathfrak{b}_5$, por lo que es suficiente con probar $\mathfrak{b}_1 \geqslant \mathfrak{b}_5'$. Sea B como en la definición de $\mathfrak{b}_1$, y pongamos $\mathscr{B} = B$ y $\mathscr{C} = \mathscr{V}$. Obviamente $|\mathscr{C}| = \omega$, $\mathscr{B} \cap \mathscr{C} = \emptyset$, y $\mathscr{B} \cup \mathscr{C}$ es casi ajena. (Aquí es donde usaremos el hecho de que $\mathscr{B}$ es bien ordenado por $<^*$.) Consideremos cualquier conjunto S tal que $\forall\, C \in \mathscr{C}\ [C \subseteq^* S]$ y cualquier $\mathscr{D} \in [\mathscr{V}]^\omega$. Sea $D = \{k \in \omega : \{k\} \times \omega \in \mathscr{D}\}$. Claramente, existe $f \in {}^\omega\omega$ tal que $\forall\, k, n \in \omega\ [n \geqslant f(k) \Rightarrow \langle k, n\rangle \in S]$, *e.g.*, definamos f como $f(k) = \text{máx}\{n \in \omega : n = 0 \text{ ó } (n \geqslant 1 \text{ y } \langle k, n-1\rangle \notin S)\}$, para $k \in \omega$. Por la afirmación, existe $g \in B$ tal que $I = \{k \in D : g(k) \geqslant f(k)\}$ es infinito. Claramente, $g \restriction I \subseteq S$, de donde $S \cap B$ es infinito. Por lo tanto $\mathscr{B}$ y $\mathscr{D}$ no se pueden separar.

Demostración de $\mathfrak{b}_3 \geqslant \mathfrak{b}_6$. Ésta es semejante a la demostración de $\mathfrak{b}_1 \geqslant \mathfrak{b}_5$, pero con $\mathscr{C} = \{k \times \omega : 1 \leqslant k \in \omega\}$. (Recordemos que $k = \{0, \ldots, k-1\}$ si $1 \leqslant k \in \omega$.)

Demostración de $\mathfrak{b}_4 \geqslant \mathfrak{b}_7$. Ésta es semejante a la demostración de $\mathfrak{b}_3 \geqslant \mathfrak{b}_6$.

Demostración de $\mathfrak{b}_5 \geqslant \mathfrak{b}_7$. Si $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ son como en la definición de $\mathfrak{b}_5$, entonces $\mathscr{B} \perp \mathscr{C}$.

Demostración de $\mathfrak{b}_7 \geqslant \mathfrak{b}$. Definimos $\mathfrak{b}_7'$ como $\mathfrak{b}_7$, pero con '$[\omega \times \omega]^\omega$' en lugar de '$[\omega]^\omega$'. Pongamos $\mathscr{A} = \{\cup \mathscr{F} : \mathscr{F} \in [\mathscr{C}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$. Ahora bien, ningún miembro de $\mathscr{A}$ separa a $\mathscr{C}$ y $\mathscr{B}$, entonces existe $\alpha : \omega \to \mathscr{A}$ tal que

$$\forall\, k \in \omega\ [\alpha(k) \subset \alpha(k+1) \text{ y } |\alpha(k+1) \setminus \alpha(k)| = \omega],$$

y

$$\forall\, C \in \mathscr{C}\ \exists\, k \in \omega\ [C \subseteq \alpha(k)].$$

Entonces es claro que el $\text{ran}(\alpha) \perp \mathscr{B}$, y que el $\text{ran}(\alpha)$ y $\mathscr{B}$ no se pueden separar, por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $\mathscr{C} = \text{ran}(\alpha)$. También podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha(k) = (k+1) \times \omega$, para $k \in \omega$. Bajo estas suposiciones, $\mathscr{V} \perp \mathscr{B}$ y $\mathscr{V}$ y $\mathscr{B}$ no se pueden separar. Entonces f_X está bien definida para toda $X \in \mathscr{B}$; luego entonces podemos definir $B = \{f_X : X \in \mathscr{B}\}$. Si hacemos $\mathscr{B}' = \{L_f : f \in B\}$ obtenemos trivialmente que $\mathscr{B}' \perp \mathscr{V}$, y por (2) se obtiene que $\mathscr{B}'$ y $\mathscr{C}$ no se pueden separar.

Probemos ahora que B es no acotado: consideremos cualquier $f \in {}^{\omega}\omega$. Entonces $L_f \perp \mathscr{V}$. Dado que $\mathscr{B}'$ y $\mathscr{V}$ no se pueden separar, debe existir una $g \in B$ tal que $L_g \nsubseteq^* L_f$. Así, por (1), se tiene que $g \nleqslant^* f$. $\square$

1.2. Corolario (de la demostración de $\mathfrak{b} \geqslant \mathfrak{b}_1$). $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ *si y sólo si* ${}^{\omega}\omega$ *tiene una escala.* $\square$

En el siguiente teorema, diremos que $D \subseteq {}^{\omega}\omega$ es *cofinal sobre* $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ si

$$\forall f \in {}^{\omega}\omega \quad \exists g \in D\, \exists A \in \mathscr{A}\ [f \leqslant g \text{ sobre } A, \textit{i.e.}\ \forall a \in A\ [f(a) \leqslant g(a)]].$$

1.3. Teorema (Katětov [**1960**] y Roitman). $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_2$, *donde*

$$\mathfrak{d}_1 = \min\{|D| \colon D \text{ es cofinal en } \langle {}^{\omega}\omega, \leqslant\rangle\};$$
$$\mathfrak{d}_2 = \min\{|D| + |\mathscr{A}| \colon D \subseteq {}^{\omega}\omega,\ \mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega} \text{ y } D \text{ es cofinal sobre } \mathscr{A}\}.$$

Demostración. La desigualdad $\mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{d}_1$ es inmediata, y la desigualdad $\mathfrak{d}_2 \leqslant \mathfrak{d}$ se sigue del hecho de que $D \subseteq {}^{\omega}\omega$ es dominante si y sólo si es cofinal sobre $\{A \subseteq \omega \colon \omega \setminus A \text{ es finito}\}$. (En este contexto notemos que D es cofinal en $\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant\rangle$ si y sólo si D es cofinal sobre $\{\omega\}$.)

Demostración de $\mathfrak{d}_1 \leqslant \mathfrak{d}_2$. Sea $D \subseteq {}^{\omega}\omega$ cofinal sobre $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$, con $|D| + |\mathscr{A}| = \mathfrak{d}_2$. Para $d \in D$ y $A \in \mathscr{A}$ definimos $d_A \in {}^{\omega}\omega$ como: $d_A(k) = d(\min\{a \in A \colon k \leqslant a\})$, para $k \in \omega$. Claramente el conjunto $\{d_A \colon d \in D,\ A \in \mathscr{A}\}$ tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{d}_2$. Probemos que este conjunto es cofinal en $\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant\rangle$: consideremos cualquier $f \in {}^{\omega}\omega$, y para esta función sea g una función no decreciente con $f \leqslant g$. Por otro lado existe $d \in D$ y $A \in \mathscr{A}$ tal que $g \leqslant d$ sobre A. Entonces $f \leqslant d_A$; en efecto, si $k \in \omega$ y $n = \min\{a \in A \colon k \leqslant a\}$, entonces, dado que g es no decreciente, se obtiene que $d_A(k) = d(n) \geqslant g(n) \geqslant g(k) \geqslant f(k)$. $\square$

Para finalizar esta sección, introduciremos la estructura de grieta en los órdenes parciales $\langle {}^{\omega}\omega, <^*\rangle$ y $\langle [\omega]^{\omega}, \subset^*\rangle$, que se utilizarán a lo largo de este trabajo.

Una *pregrieta* en $\langle {}^{\omega}\omega, <^*\rangle$ es una pareja $\langle F, G\rangle$ de subconjuntos de ${}^{\omega}\omega$ tal que $F \cup G$ es una cadena bajo $<^*$ y $f <^* g$ para cada $f \in F$ y cada $g \in G$, y ésta es a su vez una *grieta* si satisface además que no existe $h \in {}^{\omega}\omega$ tal que $f <^* h <^* g$ para toda $f \in F$ y toda $g \in G$. A las funciones que hagan que una pregrieta no sea una grieta son llamadas *interpoladoras* de la pregrieta. Si κ es la cofinalidad de $\langle F, <^*\rangle$ y λ es la cofinalidad de $\langle G, <^*\rangle$ entonces $\langle \kappa, \lambda\rangle$ es llamado el *tipo* de $\langle F, G\rangle$. Grietas de tipo $\langle \omega_1, \omega_1\rangle$ son llamadas *grietas de Hausdorff*, ya que es F. Hausdorff en [**1909**] y [**1930**] el primero en probar la existencia de estas grietas. Grietas del tipo $\langle \kappa, \omega\rangle$ o $\langle \omega, \lambda\rangle$ son llamadas *grietas de Rothberger*. Su existencia también fue probada primero por F. Hausdorff en [**1909**], y redescubiertos después por F. Rothberger en [**1941**]. Por ejemplo, ellos probaron que siempre existe una $\langle \mathfrak{b}, \omega\rangle$-grieta en $\langle {}^{\omega}\omega, <^*\rangle$. Ellos también probaron que si existe una $\langle \kappa, \omega\rangle$-grieta entonces existe una κ-cadena no acotada en $\langle {}^{\omega}\omega, <^*\rangle$, deduciendose de aquí que $\mathfrak{b} = \text{mín}\,\{\kappa\colon \text{existe una } \langle \kappa, \omega\rangle\text{-grieta en } \langle {}^{\omega}\omega, <^*\rangle\}$ (véase también $\mathfrak{b}_6$ en el Teorema 1.1).

La noción de grieta también puede ser considerada en $\langle [\omega]^{\omega}, \subset^*\rangle$ de una manera semejante a la que se tiene en $\langle {}^{\omega}\omega, <^*\rangle$. Una $\langle \kappa, \lambda\rangle$-grieta (para cardinales regulares κ y λ) en $\langle [\omega]^{\omega}, \subset^*\rangle$ es una pareja de cadenas de subconjuntos de $[\omega]^{\omega}$, $\langle \{a_\alpha\colon \alpha < \kappa\}, \{b_\beta\colon \beta < \lambda\}\rangle$, tal que cada a_α es casi ajeno con cada b_β y para cualquier a que satisfaga que $a_\alpha \subset^* a$ para toda $\alpha < \kappa$, existe $\beta < \lambda$ tal que $a \cap b_\beta$ es infinito. Ahora, notemos que $\langle [\omega]^{\omega}, \subset^*\rangle$ y $\langle {}^{\omega}\omega, <^*\rangle$ tienen el mismo tipo de grietas, entonces para nuestros propósitos aquí no haremos diferencia alguna en cual de estas dos estructuras estamos considerando.

CAPíTULO 2

Espacios de Fréchet

1. Introducción

Una de las generalizaciones más naturales y antigüas del concepto de primero numerable en un espacio topológico, es sin duda la propiedad de Fréchet (o Fréchet-Urysohn): dado un punto x en la cerradura de un conjunto A, existe una sucesión (no trivial) en A que converge a x. Para nuestra comodidad abreviaremos y llamaremos a tales espacios simplemente espacios de Fréchet.

Pues bien, en este capítulo estudiaremos y desarrollaremos el lenguaje combinatorio que se encuentra detrás de la propiedad de Fréchet, siendo este el lenguaje que se usará a lo largo de todo el trabajo. También, se analizará el concepto de Fréchet atravéz de las α_i-propiedades de A. V. Arhangel'skiĭ. Mostrando por ejemplo, que estas propiedades se distinguen entre si en la clase de espacios de Fréchet numerables, aunque dos de ellas sólo se puedan distinguir consistentemente. Finalmente, concluimos el capítulo con algunas relaciones que hay entre ciertas α_i-propiedades y algunos juegos topológicos infinitos.

2. Definiciones y propiedades básicas

2.1. Definición. Sea X un conjunto no vacío. Un conjunto $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es un *ideal*, si satisface las siguientes condiciones:

1. si $A, B \in \mathscr{I}$, entonces $A \cup B \in \mathscr{I}$ y
2. si $A \in \mathscr{I}$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathscr{I}$.

A su vez este es *propio* si:

3. $X \notin \mathscr{I}$.

Un conjunto $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es un *filtro (propio)* si $\mathscr{F}^* = \{X \setminus A \colon A \in \mathscr{F}\}$ es un ideal (propio). Al ideal $\mathscr{F}^*$ se le conoce como el *ideal dual* del filtro $\mathscr{F}$, y de una manera análoga podemos definir $\mathscr{I}^*$, como el *filtro dual* del ideal $\mathscr{I}$.

Ahora, para un conjunto infinito X, el símbolo $\mathrm{Fin}(X)$ denotará al ideal de todos los subconjuntos finitos de X. Para X numerable $\mathrm{Fin}(X)$ será abreviado simplemente por Fin, el cual se conoce también como *ideal de Fréchet*. Cabe mencionar que a lo largo de este trabajo normalmente sólo consideraremos ideales propios que contengan a $\mathrm{Fin}(X)$, también nos será útil considerar al conjunto, $\emptyset$, como un ideal, ya que nos servirá como bloque para construir algunos ideales importantes.

Los conjuntos $A, B \subseteq \omega$ son *casi ajenos* ($A \perp B$) si $A \cap B \in \mathrm{Fin}$ y A *casi contiene a* B ($A \supseteq^* B$) si $B \setminus A \in \mathrm{Fin}$. Los conjuntos A y B son *casi iguales* ($A =^* B$) si su diferencia simétrica, $A \Delta B$, es finito. Si $\mathscr{I}$ es un ideal, entonces también podemos definir la relaciones $A \subseteq^{\mathscr{I}} B$, y $A =^{\mathscr{I}} B$ de una manera análoga.

Un ideal $\mathscr{I}$ es un *P-ideal* si para cada sucesión $\langle A_n \rangle_{n\in\omega}$ de conjuntos en $\mathscr{I}$ existe un conjunto A_∞ en $\mathscr{I}$ tal que $A_n \subseteq^* A_\infty$ para toda n. Equivalentemente, $\mathscr{I}$ es un P-ideal si el orden parcial $\langle \mathscr{I}, \subseteq^* \rangle$ es σ-dirigido.

Para $A \subseteq \omega^2$ y $m \in \omega$ denotamos por A_m la sección vertical de A en m:

$$A_m = \{n \colon \langle m, n \rangle \in A\}.$$

Para dos ideales $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ definimos la *suma*, $\mathscr{I} \oplus \mathscr{J}$, como el ideal en $\omega \times \{0,1\}$ dado por:

$$A \in \mathscr{I} \oplus \mathscr{J} \quad \iff \quad \{n \colon \langle n, 0 \rangle \in A\} \in \mathscr{I} \quad \text{y} \quad \{n \colon \langle n, 1 \rangle \in A\} \in \mathscr{J}$$

Similarmente, definimos el *producto de Fubini*, $\mathscr{I} \times \mathscr{J}$, de $\mathscr{I}$ y $\mathscr{J}$ como el ideal en $\omega \times \omega$ dado por:

$$A \in \mathscr{I} \times \mathscr{J} \quad \iff \quad \{i \colon A_i \notin \mathscr{J}\} \in \mathscr{I}.$$

Para $A \subseteq \omega$ definimos $\mathscr{I} \restriction A = \{B \cap A \colon B \in \mathscr{I}\}$. Esta definición también se aplica aún cuando $\mathscr{I}$ es un subconjunto de $\mathscr{P}(\omega)$ y no necesariamente un ideal.

Por $\forall^\infty$ y $\exists^\infty$ denotamos los cuantificadores "para todos salvo una cantidad finita" y "existe una cantidad infinita", respectivamente. Ahora veamos algunos ejemplos de ideales que nos van a interesar.

2.2. Ejemplos.

1. El ideal $\mathrm{Fin} \times \emptyset$ es el producto de Fubini de los ideales Fin y $\emptyset$, luego un $A \subseteq \omega^2$ esta en $\mathrm{Fin} \times \emptyset$ si $\forall^\infty n (A_n = \emptyset)$. Esto es, en algún sentido, un ideal mínimo que no es un P-ideal, ya que este es generado por una sucesión creciente númerable de conjuntos.
2. El ideal $\emptyset \times \mathrm{Fin}$ es el producto de Fubini de los ideales $\emptyset$ y Fin, por lo que un $A \subseteq \omega^2$ esta en $\emptyset \times \mathrm{Fin}$ si $\forall n (A_n \in \mathrm{Fin})$. Ahora no es difícil ver que este ideal es un P-ideal.

Para un ideal $\mathscr{I}$ en X, el ideal

$$\mathscr{I}^\perp = \{A \subseteq X : A \cap B \text{ es finito para toda } B \in \mathscr{I}\}$$

es llamado el *ideal ortogonal* de $\mathscr{I}$. Luego $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{I}^{\perp\perp}$ y $\mathscr{I}^\perp = \mathscr{I}^{\perp\perp\perp}$.

Introducimos ahora las nociones de grieta débilmente estrecha y de grieta estrecha, con las cuales abordaremos más adelante la propiedad de Fréchet en espacios topológicos.

2.3. Definición. Sean $\mathscr{I}$ y $\mathscr{J}$ dos ideales en X, decimos que el par $\langle \mathscr{I}, \mathscr{J} \rangle$ forma una *grieta débilmente estrecha*, si satisface las siguientes condiciones:

1. $\mathscr{I}$ y $\mathscr{J}$ son *ortogonales* ($\mathscr{I} \perp \mathscr{J}$), es decir, para cada $A \in \mathscr{I}$ y $B \in \mathscr{J}$ se tiene que $A \cap B$ es finito, y
2. $(\mathscr{I} \cup \mathscr{J})^{\perp} = \mathrm{Fin}(X)$.

Ahora, una grieta débilmente estrecha $\langle \mathscr{I}, \mathscr{J} \rangle$, forma una *grieta estrecha*, si la condición 2 es sustituida por una condición más fuerte, a saber:

2′. $\mathscr{I}$ y $\mathscr{J}$ son *mutuamente ortogonales*, es decir,

$$\mathscr{I} = \mathscr{J}^{\perp} \quad \text{y} \quad \mathscr{J} = \mathscr{I}^{\perp}.$$

Luego, por ejemplo, el par $\langle \emptyset \times \mathrm{Fin}, \mathrm{Fin} \times \emptyset \rangle$ forma una grieta estrecha.

Ahora, a partir de una grieta débilmente estrecha es posible definir una grieta estrecha.

2.4. Proposición. *Sea $\langle \mathscr{I}, \mathscr{J} \rangle$ un grieta débilmente estrecha, entonces $\langle \mathscr{I}^{\perp}, \mathscr{J}^{\perp} \rangle$ forma una grieta estrecha.*

Demostración. Empezemos con notar que $\mathscr{I}^{\perp} \cap \mathscr{J}^{\perp} = (\mathscr{I} \cup \mathscr{J})^{\perp} = \mathrm{Fin}(X)$, luego $\mathscr{I}^{\perp} \perp \mathscr{J}^{\perp}$. Y de esto último se sigue fácilmente que $\mathscr{I}^{\perp} \subseteq \mathscr{J}^{\perp\perp}$ y $\mathscr{J}^{\perp} \subseteq \mathscr{I}^{\perp\perp}$. Ahora bien, del hecho de que $\mathscr{I} \perp \mathscr{J}$ se tiene también que $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{J}^{\perp}$ y $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{I}^{\perp}$, luego $\mathscr{I}^{\perp\perp} \subseteq \mathscr{J}^{\perp}$ y $\mathscr{J}^{\perp\perp} \subseteq \mathscr{I}^{\perp}$. Así, $\mathscr{I}^{\perp} = \mathscr{J}^{\perp\perp}$ y $\mathscr{J}^{\perp} = \mathscr{I}^{\perp\perp}$, es decir, $\mathscr{I}^{\perp}$ y $\mathscr{J}^{\perp}$ son mutuamente ortogonales. Por lo tanto $\langle \mathscr{I}^{\perp}, \mathscr{J}^{\perp} \rangle$ forma una grieta estrecha. □

3. La propiedad de Fréchet idealizada

Para un espacio topológico X y un punto $x \in X$, consideremos en $X^{\circ} = X \setminus \{x\}$ los ideales:

$$\mathscr{I}_x = \{A \subseteq X^{\circ} \colon x \notin \overline{A}\}$$

y

$$\mathscr{C}_x = \{A \subseteq X^{\circ} \colon A \to x\}.$$

Algunas de las relaciones que podemos notar entre estos dos ideales estan incluidas en la siguiente proposición.

2.5. Proposición. *Para un espacio topológico X y un punto $x \in X$, se tiene que:*

(1) $\mathscr{C}_x \subseteq \mathscr{I}_x^\perp$ *y* $\mathscr{I}_x \subseteq \mathscr{C}_x^\perp$.
(2) $\mathscr{I}_x^\perp \subseteq \mathscr{C}_x$, *luego* $\mathscr{I}_x^\perp = \mathscr{C}_x$.
(3) $\mathscr{C}_x^\perp \subseteq \mathscr{I}_x$ *(luego* $\mathscr{C}_x^\perp = \mathscr{I}_x$*) si y sólo si* X *es Fréchet en* x.
(4) $\mathscr{I}_x \cap \mathscr{C}_x = Fin(X^\circ)$, *luego* $\mathscr{I}_x \perp \mathscr{C}_x$.
(5) $(\mathscr{I}_x \cup \mathscr{C}_x)^\perp = Fin(X^\circ)$.

Demostración. (1) Sea $A \in \mathscr{I}_x$ y $B \in \mathscr{C}_x$, entonces $U = X \setminus \overline{A}$ es un abierto en x, luego $B \setminus U$ es finito, pero $A \cap U = \emptyset$, entonces $A \cap B$ es finito, es decir, $\mathscr{C}_x \subseteq \mathscr{I}_x^\perp$. Y por simetría de esta demostración, se sigue también que $\mathscr{I}_x \subseteq \mathscr{C}_x^\perp$.

(2) Sea $A \in \mathscr{I}_x^\perp$ y U un abierto alrededor de x, luego $X \setminus U \in \mathscr{I}_x$, por lo que $A \setminus U$ es finito, entonces $A \to x$, es decir, $A \in \mathscr{C}_x$.

(3) Sea $A \subseteq X$ tal que $x \in \overline{A}$, y supongamos que $\mathscr{C}_x^\perp \subseteq \mathscr{I}_x$, entonces $A \notin \mathscr{I}_x$ y como $\mathscr{C}_x^\perp \subseteq \mathscr{I}_x$ existe $B \in \mathscr{C}_x$ tal que $C = B \cap A$ es infinito, pero $C \subseteq B \in \mathscr{C}_x$ y $C \subseteq A$, entonces C es un sucesión en A que converge a x. Por lo tanto X es Fréchet en x.

Para el otro sentido, sea $A \in \mathscr{C}_x^\perp$, y supongamos que X es Fréchet en x. Si $A \notin \mathscr{I}_x$ entonces $x \in \overline{A}$, y como X es Fréchet en x, debe existir $B \subseteq A$ infinito tal que $B \in \mathscr{C}_x$, pero $B = A \cap B$, lo cual contradice el hecho de que $A \in \mathscr{C}_x^\perp$, luego entonces $\mathscr{C}_x^\perp \subseteq \mathscr{I}_x$.

(4) $\mathscr{I}_x \cap \mathscr{C}_x \overset{(2)}{=} \mathscr{I}_x \cap \mathscr{I}_x^\perp = \mathrm{Fin}(X^\circ)$.

(5) $(\mathscr{I}_x \cup \mathscr{C}_x)^\perp = \mathscr{I}_x^\perp \cap \mathscr{C}_x^\perp \overset{(2)}{=} \mathscr{C}_x \cap \mathscr{C}_x^\perp = \mathrm{Fin}(X^\circ)$. □

De lo anterior se sigue entonces que el par $\langle \mathscr{I}_x, \mathscr{C}_x \rangle$ forma una grieta débilmente estrecha, y que esta grieta es estrecha si y sólo si X es Fréchet en x. Así, la noción de grieta estrecha recoge en lo fundamental la propiedad de ser Fréchet en un punto.

Ahora bien, a partir de un espacio topológico Fréchet en un punto, hemos definido de una manera natural una grieta estrecha, entonces para cerrar la relación entre espacios Fréchet y grietas estrechas, debemos poder definir a partir de una grieta estrecha, un espacio Fréchet en un punto, cuya grieta estrecha asociada a este espacio en tal punto, sea la grieta estrecha con la que partimos. Pues bien, para dar respuesta a este punto, veamos que dado un ideal $\mathscr{I}$ en un conjunto X, podemos asociarle de una manera natural, un espacio topológico $X_{\mathscr{I}}$ como sigue: el conjunto base es $X \cup \{\mathscr{I}\}$, los elementos de X son aislados y las vecindades básicas de $\mathscr{I}$ son de la forma $\{\mathscr{I}\} \cup (X \setminus I)$, con $I \in \mathscr{I}$. Con esta asociación en mente, tenemos la siguiente proposición.

2.6. Proposición. *Sea* $\mathscr{I}$ *un ideal en un conjunto* X, *entonces* $X_{\mathscr{I}}$ *es Fréchet si y sólo si* $\mathscr{I} = \mathscr{I}^{\perp\perp}$.

DEMOSTRACIÓN. Para ver esto, notemos que los ideales $\mathscr{I}_{\mathscr{I}}$ y $\mathscr{C}_{\mathscr{I}}$, asociados al punto $\mathscr{I}$ del espacio $X_{\mathscr{I}}$, toman la forma $\mathscr{I}$ y $\mathscr{I}^{\perp}$ respectivamente. Así, según la Proposición 2.5 (3), se tiene que $X_{\mathscr{I}}$ es Fréchet si y sólo si $\mathscr{I}_{\mathscr{I}} = \mathscr{C}_{\mathscr{I}}^{\perp}$, lo cual es equivalente a $\mathscr{I} = \mathscr{I}^{\perp\perp}$. □

Así, si partimos de una grieta estrecha $\langle \mathscr{I}, \mathscr{J} \rangle$, entonces el espacio $X_{\mathscr{I}}$ asociado al ideal $\mathscr{I}$ es Fréchet. Con esto damos respuesta al punto tratado en el parrafo anterior.

Por otro lado, la última proposición nos motiva la siguiente definición.

2.7. DEFINICIÓN. Sea $\mathscr{I}$ un ideal en un conjunto X, decimos que el ideal $\mathscr{I}$ es de *Fréchet*, si $\mathscr{I} = \mathscr{I}^{\perp\perp}$. Ahora, esto es equivalente a decir que para cada $X \in \mathscr{I}^{+}$, existe $C \in [X]^{\omega}$ tal que $C \in \mathscr{I}^{\perp}$, donde $\mathscr{I}^{+} = \mathscr{P}(X) \setminus \mathscr{I}$.

Por otro lado, llamamos al ideal $\mathscr{I}$ *alto*, si para cada $X \in [\omega]^{\omega}$ existe $C \in [X]^{\omega}$ tal que $C \in \mathscr{I}$.

De esta última definición, notemos lo siguiente.

2.8. OBSERVACIÓN. (1) *Todo ideal numerablemente generado es Fréchet.*
(2) *Si $\mathscr{I}$ es alto, entonces $\mathscr{I}$ no es Fréchet.*
(3) *$\mathscr{I}^{\perp}$ es siempre Fréchet.*

Recordemos ahora que los ideales $\emptyset \times \mathrm{Fin}$ y $\mathrm{Fin} \times \emptyset$ son mutuamente ortogonales, luego entonces ambos ideales son Fréchet y en consecuencia los espacios respectivos $X_{\emptyset\times\mathrm{Fin}}$ y $X_{\mathrm{Fin}\times\emptyset}$ son Fréchet. Para el espacio $X_{\emptyset\times\mathrm{Fin}}$ tenemos lo siguiente.

2.9. DEFINICIÓN. El *abanico de Fréchet* S_{ω} es el cociente topológico que se obtiene al identificar los puntos límite de la suma topológica de $\aleph_0$ sucesiones convergentes.

2.10. PROPOSICIÓN. (1) *S_{ω} es homeomorfo a $X_{\emptyset\times Fin}$.*
(2) $\chi(S_{\omega}) = \mathfrak{d}$.

DEMOSTRACIÓN. (1) A la identificación de los puntos límite de las sucesiones, le asociamos el ideal $\emptyset \times \mathrm{Fin}$, y a los demas puntos de la suma topológica los asociamos con los puntos de $\omega \times \omega$. Pues bien, es fácil ver que esta asociación resulta ser un homeomorfismo entre S_{ω} y $X_{\emptyset\times\mathrm{Fin}}$.

(2) Para cada $f \in {}^{\omega}\omega$ tenemos $I_f \in \emptyset \times \mathrm{Fin}$ con $I_f = \{\langle n, m\rangle \in \omega \times \omega \colon m \leqslant f(n)\}$, es decir, el subconjunto de $\omega \times \omega$ que se encuentra debajo de la gráfica de f. Ahora, el conjunto $\{X_{\emptyset\times\mathrm{Fin}} \setminus I_f \colon f \in {}^{\omega}\omega\}$ forma una base local para $\emptyset \times \mathrm{Fin}$. Así, $\chi(\emptyset\times\mathrm{Fin}, X_{\emptyset\times\mathrm{Fin}})$ será la mínima cardinalidad de un subconjunto dominante de ${}^{\omega}\omega$, luego $\chi(\emptyset \times \mathrm{Fin}, X_{\emptyset\times\mathrm{Fin}}) = \mathfrak{d}$. Por lo tanto $\chi(S_{\omega}) = \mathfrak{d}$. □

2.11. PROPOSICIÓN. *Para un espacio de Fréchet X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *Para cualquier espacio Y de Fréchet, $X \times Y$ es un espacio de Fréchet.*
(2) *$X \times S_\omega$ es un espacio de Fréchet.*
(3) *X es discreto.*

DEMOSTRACIÓN. (1) $\Rightarrow$ (2). Es clara.

(2) $\Rightarrow$ (3). Supongamos que X no es discreto, entonces X tiene almenos un punto que no es aislado, luego por ser X Fréchet, existe una sucesión en X convergente a tal punto. Esto es, X admite como subespacio al espacio $\omega+1$. Pues bien, el producto $(\omega+1)\times X_{\emptyset\times\mathrm{Fin}}$ no es Fréchet. En efecto, sea $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ con $A_n = \{n\}\times(\{n\}\times\omega)$, es claro entonces que $(\omega, \emptyset\times\mathrm{Fin}) \in \overline{A}$. Ahora, sea $N \in [A]^\omega$, si $N\cap A_n$ es infinito para alguna $n \in \omega$, entonces fuera de $(\omega+1\setminus n+1)\times X_{\emptyset\times\mathrm{Fin}}$ hay una cantidad infinita de puntos de N, luego N no converge a $(\omega, \emptyset \times \mathrm{Fin})$, ahora si $N \cap A_n$ es finito para cada $n \in \omega$, entonces la proyección $\pi_2(N)$ del conjunto N en el espacio $X_{\emptyset\times\mathrm{Fin}}$ es un elemento del ideal $\emptyset \times \mathrm{Fin}$, entonces N se encuentra fuera de $(\omega + 1) \times (X_{\emptyset\times\mathrm{Fin}} \setminus \pi_2(N))$, por lo que en este caso también N no converge a $(\omega, \emptyset \times \mathrm{Fin})$. Así, el producto $(\omega + 1) \times X_{\emptyset\times\mathrm{Fin}}$ no es Fréchet, y en consecuencia también, el producto $X \times S_\omega$ no es Fréchet.

(3) $\Rightarrow$ (1). Es clara también. $\square$

2.12. COROLARIO. *El producto $X_{\emptyset\times Fin} \times X_{Fin\times\emptyset}$ no es Fréchet.* $\square$

4. Espacios construidos a partir de familias casi ajenas

Para una familia AD tenemos de una manera natural el ideal $\mathscr{I}(\mathscr{A})$ de todos los subconjuntos de ω que se pueden cubrir, salvo por una cantidad finita, con una cantidad finita de elementos de $\mathscr{A}$, así como el ideal $\mathscr{I}^+(\mathscr{A}) = \mathscr{P}(\omega)\setminus\mathscr{I}(\mathscr{A})$, el cual podemos pensar como el ideal de los conjuntos $\mathscr{I}$-positivos. En este mismo sentido, tenemos también el ideal $\mathscr{I}^{++}(\mathscr{A}) = \{X \subseteq \omega\colon \exists^\infty A \in \mathscr{A}$ tal que $A \cap X$ es infinito$\}$, el cual recoge en cierto sentido una noción más fuerte de conjunto positivo. Las relaciones entre $\mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ y $\mathscr{I}^{++}(\mathscr{A})$, asi como la justificación de lo anterior, se engloba en la siguiente proposición.

2.13. PROPOSICIÓN. *Para una familia AD $\mathscr{A}$, se tiene lo siguiente:*

(1) *$\mathscr{I}^{++}(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$, y*
(2) *$\mathscr{I}^{++}(\mathscr{A}) = \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ si y sólo si $\mathscr{A}$ es una familia MAD.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Sea $X \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$, entonces $X \subseteq^* \bigcup\mathscr{F}$ con $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{A}$ un conjunto finito. Ahora bien, supongamos que existe $A \in \mathscr{A}\setminus\mathscr{F}$ tal que $A\cap X$ es infinito, entonces también sucede que $A \cap X \subseteq^* \bigcup\mathscr{F}$, pero por ser $\mathscr{F}$ un conjunto finito, debe existir $F \in \mathscr{F}$ tal que $(A \cap X) \cap F$ es infinito, teniendo en particular que $A \cap F$ es infinito, luego $\mathscr{A}$ no podría ser una familia AD. De aquí se sigue en particular que si $X \in \mathscr{I}^{++}(\mathscr{A})$ entonces $X \notin \mathscr{I}(\mathscr{A})$, es decir, $X \in \mathscr{I}^{+}(\mathscr{A})$.

(2) Supongamos que $\mathscr{I}^{+}(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{I}^{++}(\mathscr{A})$ y que $X \in [\omega]^{\omega}$. Si $X \in \mathscr{I}(\mathscr{A})$, entonces $X \subseteq^{*} \bigcup \mathscr{F}$ con $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{A}$ un conjunto finito, luego existe $F \in \mathscr{F}$ tal que $F \cap X$ es infinito, y si $X \in \mathscr{I}^{+}(\mathscr{A})$ entonces $X \in \mathscr{I}^{++}(\mathscr{A})$, por lo que en particular también tenemos que existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $A \cap X$ es infinito. Luego entonces $\mathscr{A}$ es una familia MAD.

En el otro sentido, supongamos que $\mathscr{A}$ es una familia MAD y que $X \in \mathscr{I}^{+}(\mathscr{A})$. Sea $\mathscr{A}_X = \{A \in \mathscr{A} : A \cap X \text{ es infinito}\}$, si $\mathscr{A}_X$ fuése un conjunto finito, como $X \in \mathscr{I}^{+}(\mathscr{A})$ entonces se tendría también que $X \setminus \bigcup \mathscr{A}_X \in \mathscr{I}^{+}(\mathscr{A})$, luego por la maximalidad de $\mathscr{A}$, existiría $A \in \mathscr{A}$ tal que $A \cap (X \setminus \bigcup \mathscr{A}_X)$ es infinito, lo cual es una contradicción, por la definición de $\mathscr{A}_X$. Así, $\mathscr{A}_X$ debe ser infinito, es decir, $X \in \mathscr{I}^{++}(\mathscr{A})$. $\square$

2.14. Lema (Dočkálková [**1980**]). *Sea $\mathscr{A}$ una familia MAD y $\langle X_n \rangle_{n\in\omega}$ una sucesión en $\mathscr{I}^{++}(\mathscr{A})$ con $X_{n+1} \subseteq X_n$ para cada $n \in \omega$, entonces existe $X \in \mathscr{I}^{++}(\mathscr{A})$ tal que $X \subseteq^{*} X_n$ para toda $n \in \omega$.*

Demostración. Por inducción, construimos una sucesión $\langle A_n \rangle_{n\in\omega}$ en $\mathscr{A}$ y una sucesión $\langle D_n \rangle_{n\in\omega}$ en $[\omega]^{\omega}$ tal que:

(1) $A_n \cap D_n$ es infinito para cada $n \in \omega$;
(2) D_n es una pseudo-intersección de $\langle X_{n+m} \setminus \bigcup_{k\in n} A_k \rangle_{m\in\omega}$ para cada $n \in \omega$ con $D_n \subseteq X_n \setminus \bigcup_{k\in n} A_k$.

Para el caso base, sea $D_0 \subseteq X_0$ una pseudo-intersección de $\langle X_n \rangle_{n\in\omega}$, por la maximalidad de $\mathscr{A}$, existe $A_0 \in \mathscr{A}$ tal que $A_0 \cap D_0$ es infinito.

Supongamos ahora que hemos construido nuestras sucesiones hasta el paso n, entonces consideremos la sucesión $\langle X_{n+1+m} \setminus \bigcup_{k\in n+1} A_k \rangle_{m\in\omega}$, la cual también es una sucesión decreciente de conjuntos en $\mathscr{I}^{++}(\mathscr{A})$. Así, sea $D_{n+1} \subseteq X_{n+1} \setminus \bigcup_{k\in n+1} A_k$ una pseudo-intersección de tal sucesión, y usando nuevamente la maximalidad de $\mathscr{A}$, existe $A_{n+1} \in \mathscr{A}$ tal que $A_{n+1} \cap D_{n+1}$ es infinito.

Pues bien, sea $X = \bigcup_{n\in\omega} A_n \cap D_n$, entonces $X \cap A_n$ es infinito para cada $n \in \omega$ por lo que $X \in \mathscr{I}^{++}(\mathscr{A})$. Ahora por (2), se sigue fácilmente que $X \subseteq^{*} X_n$ para toda $n \in \omega$. $\square$

2.15. Observación. *El lema anterior también se verifica, si sólo se pide que $\mathscr{A}$ sea una familia AD y si se considera el ideal $\mathscr{I}^{+}(\mathscr{A})$ en lugar del ideal $\mathscr{I}^{++}(\mathscr{A})$, siendo su demostración no muy distinta a la hecha en el caso que $\mathscr{A}$ sea una familia MAD.*

2.16. Definición (Simon [**1980**]). Sea $\mathscr{A}$ una familia AD, decimos que $\mathscr{A}$ es *maximal en ningún lado* si para cada $X \subseteq \omega$, si $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ entonces $\mathscr{A} \restriction X$ no es una familia MAD sobre X.

2.17. Teorema (Simon [**1980**]). *Existe una familia MAD $\mathscr{A}$ y existen familias AD maximales en ningún lado $\mathscr{A}_0$ y $\mathscr{A}_1$ tales que $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 \cup \mathscr{A}_1$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, para cada familia MAD $\mathscr{A}$ y cada descomposición $\mathscr{A}_0 \cup \mathscr{A}_1$ de $\mathscr{A}$, se tiene que $\mathscr{A}_0$ o $\mathscr{A}_1$ no es maximal en ningún lado.

Así, sea $\mathscr{A}$ una familia MAD e indiquemos esta familia con un subconjunto de reales $Y \subseteq {}^{\omega}2$, esto es, $\mathscr{A} = \{A_f : f \in Y\}$.

Por inducción, construimos una sucesión $\langle X_n \rangle_{n\in\omega}$ en $\mathscr{I}^{++}(\mathscr{A})$, una sucesión $\langle \mathscr{A}_n \rangle_{n\in\omega}$ de subconjuntos de $\mathscr{A}$, y una función $g \colon \omega \to 2$ tal que:

(1) $X_{n+1} \subseteq X_n$ y $\mathscr{A}_{n+1} \subseteq \mathscr{A}_n$ para cada $n \in \omega$;
(2) $\mathscr{A}_n \restriction X_n$ es una familia MAD sobre X_n;
(3) $\mathscr{A}_n \subseteq \{A_f \in \mathscr{A} : f \restriction n+1 = g \restriction n+1\}$.

Para el caso base, tomemos la descomposición $\mathscr{A}_0^0 \cup \mathscr{A}_1^0$ de $\mathscr{A}$ dada por:

$$\mathscr{A}_0^0 = \{A_f \in \mathscr{A} : f(0) = 0\} \quad \text{y} \quad \mathscr{A}_1^0 = \{A_f \in \mathscr{A} : f(0) = 1\}.$$

Luego por hipótesis existe $X_0 \in \mathscr{I}^{++}(\mathscr{A})$ y $g(0) \in 2$ tal que $\mathscr{A}_{g(0)}^0 \restriction X_0$ es una familia MAD sobre X_0. Haciendo $\mathscr{A}_0 = \{A \in \mathscr{A} : A \cap X_0 \text{ es infinito}\}$, entonces $\mathscr{A}_0 \restriction X_0 = \mathscr{A}_{g(0)}^0 \restriction X_0$.

Supongamos ahora que hemos construido nuestras sucesiones y nuestra función hasta el paso n, entonces tomemos la descomposición $\mathscr{A}_0^{n+1} \cup \mathscr{A}_1^{n+1}$ de $\mathscr{A}_n$ dada por:

$$\mathscr{A}_0^{n+1} = \{A_f \in \mathscr{A}_n : f(n+1) = 0\} \quad \text{y} \quad \mathscr{A}_1^{n+1} = \{A_f \in \mathscr{A}_n : f(n+1) = 1\}.$$

Esta a su véz, nos genera una descomposición de $\mathscr{A}_n \restriction X_n$, a saber, $\mathscr{A}_0^{n+1} \restriction X_n \bigcup \mathscr{A}_1^{n+1} \restriction X_n$. Luego por hipótesis existe $X'_{n+1} \in \mathscr{I}^{++}(\mathscr{A}_n \restriction X_n)$ y $g(n+1) \in 2$ tal que $\mathscr{A}_{g(n+1)}^{n+1} \restriction (X_n \cap X'_{n+1})$ es una familia MAD sobre $X_n \cap X'_{n+1}$. Haciendo $X_{n+1} = X'_{n+1} \cap X_n$ y $\mathscr{A}_{n+1} = \{A \in \mathscr{A}_n : A \cap X_n \text{ es infinito}\}$, entonces tenemos que $X_{n+1} \in \mathscr{I}^{++}(\mathscr{A})$, $X_{n+1} \subseteq X_n$, y $\mathscr{A}_{n+1} \restriction X_{n+1} = \mathscr{A}_{g(n+1)}^{n+1} \restriction X_{n+1}$.

Por otro lado, por el Lema 2.14, existe $X \in \mathscr{I}^{++}(\mathscr{A})$ tal que $X \subseteq^* X_n$ para toda $n \in \omega$. Dado que $X \in \mathscr{I}^{++}(\mathscr{A})$, entonces $\exists^\infty A \in \mathscr{A}$ tal que $A \cap X$ es infinito, luego entonces existe $f \in Y$ con $f \neq g$ tal que $A_f \cap X$ es infinito. Sea $n = \text{mín}\,\{k \in \omega : f(k) \neq g(k)\}$, como $X \subseteq^* X_n$ y $\mathscr{A}_n \restriction X_n$ es una familia MAD sobre X_n, entonces se tiene también que $\mathscr{A}_n \restriction X$ es una familia MAD sobre X. Ahora, como $A_f \cap X$ es infinito, se sigue que $A_f \in \mathscr{A}_n$. Pero esto contradice la condición (3) dada arriba, ya que por la elección de n, $f(n) \neq g(n)$. $\square$

Ahora bien, para ver el papel que juega la noción de maximal en ningún lado en la construcción de espacios de Fréchet compactos, es necesario introducir los Ψ-espacios.

2.18. Definición (Mrówka, Isbell). Sea $\mathscr{A}$ una familia AD. Definimos el Ψ-*espacio de* $\mathscr{A}$, denotado por $\Psi(\mathscr{A})$, como el espacio (localmente compacto) $\omega \cup \mathscr{A}$, donde los elementos de ω son aislados y las vecindades básicas de $A \in \mathscr{A}$ son de la forma $\{A\} \cup (A \setminus F)$, con F finito.

2.19. Observación. *De la definición de* Ψ*-espacio, se sigue que el conjunto* $\mathscr{A}$*, visto como subespacio de* $\Psi(\mathscr{A})$*, es discreto. Así* $K \subseteq \Psi(\mathscr{A})$ *es compacto si y sólo si* $K \cap \mathscr{A}$ *es finito y* $(K \cap \omega) \subseteq^* \bigcup (K \cap \mathscr{A})$*.*

Ahora, denotemos por $F(\mathscr{A})$ al espacio de Franklin asociado a la familia AD $\mathscr{A}$, es decir, la compactación de Alexandroff del espacio $\Psi(\mathscr{A})$ que resulta de agregarle un punto ∞. Entonces tenemos la siguiente caracterización.

2.20. Teorema (Simon [**1980**]). *Sea* $\mathscr{A}$ *una familia AD, entonces* $F(\mathscr{A})$ *es Fréchet si y sólo si* $\mathscr{A}$ *es maximal en ningún lado.*

Demostración. Sea $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$ y supongamos que $F(\mathscr{A})$ es Fréchet. De la Observación 2.19 y del hecho de que $X \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$, se sigue fácilmente que $\infty \in \overline{X}$, luego por ser $F(\mathscr{A})$ Fréchet en ∞, existe $B \in [X]^\omega$ tal que $B \to \infty$, por lo que en particular para cada $A \in \mathscr{A}$ el compacto $\{A\} \cup A$ tiene intersección finita con B, de donde $B \cap A$ es finito para cada $A \in \mathscr{A}$, es decir, $\mathscr{A} \restriction X$ no es una familia MAD sobre X.

Para el otro sentido, dado que $F(\mathscr{A})$ es primero numerable en cada punto excepto en el punto ∞, resta ver que $F(\mathscr{A})$ es Fréchet en ∞. Así, sea $X \subseteq F(\mathscr{A})$ con $\infty \in \overline{X}$, y supongamos que la familia $\mathscr{A}$ es maximal en ningún lado. En caso de que $X \cap \mathscr{A}$ sea infinito, sea $B \in [X \cap \mathscr{A}]^\omega$ y entonces $B \to \infty$. En caso contrario tenemos que $X \cap \omega$ es infinito, y dado que $\infty \in \overline{X}$, se sigue que $(X \cap \omega) \in \mathscr{I}^+(\mathscr{A})$, luego por la maximalidad en ningún lado de $\mathscr{A}$, existe $B \in [X \cap \omega]^\omega$ con $B \cap A$ finito para cada $A \in \mathscr{A}$, por lo que también se tiene que $B \to \infty$. Por lo tanto $F(\mathscr{A})$ es Fréchet. □

Los Teoremas 2.17 y 2.20 nos proven el siguiente corolario.

2.21. Corolario (Simon [**1980**]). *Existen espacios compactos Fréchet* X_0 *y* X_1 *tales que el producto* $X_0 \times X_1$ *no es Fréchet.*

Demostración. Del Teorema 2.17, existe una familia MAD $\mathscr{A}$ y existen familias AD maximales en ningún lado $\mathscr{A}_0$ y $\mathscr{A}_1$ tales que $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 \cup \mathscr{A}_1$. Así, según el Teorema 2.20, los compactos de Franklin asociados $F(\mathscr{A}_0)$ y $F(\mathscr{A}_1)$ son espacios de Fréchet. Pues bien, el producto $F(\mathscr{A}_0)\times F(\mathscr{A}_1)$ no es Fréchet. Para poder ver esto, empecemos por definir para cada $X\subseteq\omega$ el conjunto $\Delta_X=\{\langle n,n\rangle\colon n\in X\}$. Ahora, si denotamos por ∞_i para $i\in 2$, al punto que agregamos a $\Psi(\mathscr{A}_i)$ para formar a $F(\mathscr{A}_i)$, entonces $\langle\infty_0,\infty_1\rangle\in\overline{\Delta}_\omega$. En efecto, dado que $\mathscr{A}$ es infinita entonces $\omega\in\mathscr{I}^+(\mathscr{A})$, luego de la Observación 2.19 se sigue fácilmente que $\langle\infty_0,\infty_1\rangle\in\overline{\Delta}_\omega$. Ahora sea $X\in[\omega]^\omega$, por la maximalidad de $\mathscr{A}$ existe $A_0\in\mathscr{A}$ tal que $A_0\cap X$ es infinito. Ahora bien, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A_0\in\mathscr{A}_0$, entonces consideremos en $F(\mathscr{A}_0)$ el compacto $K_0=\{A_0\}\cup A_0$. Así, si $X_0=A_0\cap X$ entonces $\Delta_{X_0}\subseteq K_0\times F(\mathscr{A}_1)$, luego Δ_X no converge a $\langle\infty_0,\infty_1\rangle$. Por lo tanto $F(\mathscr{A}_0)\times F(\mathscr{A}_1)$ no es Fréchet en $\langle\infty_0,\infty_1\rangle$. $\square$

5. Las α_i-propiedades en espacios de Fréchet

Con el objetivo de estudiar la propiedad de Fréchet en el producto topológico, A. V. Arhangel'skiĭ en [**1972**] y [**1979**], introduce como una herramienta para su estudio, las α_i-propiedades.

2.22. Definición (Arhangel'skiĭ [**1972**] y [**1979**]). Un espacio X es un α_i-*espacio*, para $i\in\{1,2,3,4\}$, si para cada $x\in X$ y cada sucesión $\langle I_n\rangle_{n\in\omega}\subseteq\mathscr{I}_x^\perp\setminus\mathrm{Fin}(X^\circ)$, existe $I\in\mathscr{I}_x^\perp$ tal que:

- α_1**:** Para cada $n\in\omega$, $I_n\subseteq^* I$, es decir, $\mathscr{I}_x^\perp$ es un P-ideal.
- α_2**:** Para cada $n\in\omega$, $I_n\cap I$ es infinito. (Equivalentemente, $I_n\cap I\neq\emptyset$ para cada $n\in\omega$)
- α_3**:** Existe una infinidad de n's en ω tal que $I_n\cap I$ es infinito.
- α_4**:** Existe una infinidad de n's en ω tal que $I_n\cap I\neq\emptyset$.

Notemos que estas definiciones tienen sentido también en cualquier ideal sobre un conjunto arbitrario.

Aunque las definiciones de las α_i-propiedades tienen sentido en cualquier espacio topológico, nosotros sólo las consideraremos en la clase de los espacios Fréchet, los cuales en general serán numerables.

Unas consecuencias inmediatas que podemos notar, son las siguientes:

$$\begin{tikzcd}
 & & \alpha_1 \arrow[r] & \alpha_2 \arrow[r] & \alpha_3 \arrow[r] & \alpha_4 \\
\text{Métrico} \arrow[r] & \text{Primero numerable} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & & \text{Fréchet} & & &
\end{tikzcd}$$

Ahora, podemos tener espacios que sean α_1 y que no sean Fréchet. En efecto, por lo hecho en la sección 3, es suficiente con encontrar un ideal sobre ω que sea un P-ideal y que este no sea Fréchet. Para esto consideremos una partición de ω en dos conjuntos infinitos A y $\omega \setminus A$, y tomemos una familia MAD $\mathscr{A}$ sobre A, entonces el ideal $\mathscr{I}(\mathscr{A})$ definido sobre ω, es un ideal que satisface lo deseado.

Por otro lado, podemos tener también espacios que sean Fréchet y no α_4. Por ejemplo, el abanico de Fréchet S_ω es uno de tales espacios. Más aun, S_ω juega un papel importante en los espacios Fréchet que son α_4. Esta relación la presenta la siguiente proposición.

2.23. Proposición. *Sea X un espacio de Fréchet, entonces X es α_4 si y sólo si X no admite un subespacio homeomorfo a S_ω.*

Demostración. Sea X un espacio Fréchet, y supongamos que X es α_4. Dado que las propiedades α_i son propiedades hereditarias, entonces para ver que X no admite un subespacio homeomorfo a S_ω, es suficiente con probar que el espacio de Fréchet S_ω no es α_4. Pero como S_ω es homeomorfo al espacio $X_{\emptyset\times\mathrm{Fin}}$, entonces basta probar que el ideal $\emptyset \times \mathrm{Fin}$ no es α_4. Pues bien, la sucesión $\langle I_n\rangle_{n\in\omega} \subseteq (\emptyset\times\mathrm{Fin})^\perp$, dada por $I_n = \{n\}\times\omega$ para cada $n\in\omega$, satisface que para cada $I \in (\emptyset\times\mathrm{Fin})^\perp = \mathrm{Fin}\times\emptyset$, $\forall^\infty n(I\cap I_n=\emptyset)$, por lo que $\emptyset\times\mathrm{Fin}$ no es α_4.

Para el otro sentido, supongamos que X no es α_4, luego existe $x \in X$ y $\langle I_n\rangle_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{I}_x^\perp\setminus\mathrm{Fin}(X^\circ)$ tal que para cada $I \in \mathscr{I}_x^\perp\setminus\mathrm{Fin}(X^\circ)$, se tiene que $\forall^\infty n(I\cap I_n=\emptyset)$. La primera reducción que podemos hacer sin pérdida de generalidad es que los I_n's sean ajenos por parejas.

Ahora bien, si tomamos $F_n \subseteq I_n$ finito para cada $n\in\omega$, entonces $x \notin \overline{\bigcup_{n\in\omega} F_n}$. En efecto, en caso contrario $x \in \overline{\bigcup_{n\in\omega} F_n}$, y por ser X Fréchet en x entonces existiría $I \in \mathscr{I}_x^\perp \setminus \mathrm{Fin}(X^\circ)$ con $I \subseteq \bigcup_{n\in\omega} F_n$, luego $\exists^\infty n(I\cap I_n \neq \emptyset)$ contradiciendo lo supuesto.

Finalmente, es fácil ver que el conjunto $\{x\}\cup(\bigcup_{n\in\omega} I_n)$ dotado con la topología de subespacio de X, resulta ser homeomorfo a S_ω. □

Veamos ahora, que las propiedades α_4, α_3, α_2 y α_0, se distinguen entre si en la clase de los espacios Fréchet numerables, teniendo que las propiedades α_2 y α_1 sólo se distinguen consistentemente así como también para las propiedades α_1 y α_0.

Empecemos con dar un ejemplo de un ideal Fréchet que sea α_4 pero no sea α_3. Para esto, el Teorema 2.17 nos provee de una familia MAD $\mathscr{A}$, y de una descomposición $\mathscr{A}_0\cup\mathscr{A}_1$ de $\mathscr{A}$ en familias AD maximales en ningún lado. Pues bien, tenemos la siguiente proposición.

2.24. Proposición. *El par $\langle \mathscr{I}(\mathscr{A}_0), \mathscr{I}(\mathscr{A}_1)\rangle$ forma una grieta estrecha, en consecuencia los ideales $\mathscr{I}(\mathscr{A}_0)$ y $\mathscr{I}(\mathscr{A}_1)$ son Fréchet, además estos ideales son α_4 y no α_3.*

Demostración. Dado que $\mathscr{A}$ es una familia AD y $\mathscr{A}_0 \cup \mathscr{A}_1$ es una descomposición de $\mathscr{A}$, se sigue entonces que $\mathscr{I}(\mathscr{A}_0) \perp \mathscr{I}(\mathscr{A}_1)$.

Veamos ahora que $\mathscr{I}(\mathscr{A}_0) = \mathscr{I}(\mathscr{A}_1)^{\perp}$. De la ortogonalidad de los ideales $\mathscr{I}(\mathscr{A}_0)$ y $\mathscr{I}(\mathscr{A}_1)$, se sigue en particular que $\mathscr{I}(\mathscr{A}_0) \subseteq \mathscr{I}(\mathscr{A}_1)^{\perp}$. Ahora, sea $I \in \mathscr{I}(\mathscr{A}_1)^{\perp}$, si $I \notin \mathscr{I}(\mathscr{A}_0)$ entonces $I \in \mathscr{I}^{+}(\mathscr{A}_0)$, luego por la maximalidad en ningún lado de $\mathscr{A}_0$, existe $J \in [I]^{\omega}$ tal que $J \cap A$ es finito para cada $A \in \mathscr{A}_0$, de donde se sigue que $J \in \mathscr{I}(\mathscr{A}_0)^{\perp}$, ahora $\mathscr{A}$ es una familia MAD entonces existe $A_J \in \mathscr{A}_1$ con $A_J \cap J$ infinito, pero esto contradice la elección de I. Así $I \in \mathscr{I}(\mathscr{A}_0)$, luego entonces $\mathscr{I}(\mathscr{A}_0) = \mathscr{I}(\mathscr{A}_1)^{\perp}$. Ahora, por la simetría de los argumentos anteriores, también podemos obtener que $\mathscr{I}(\mathscr{A}_1) = \mathscr{I}(\mathscr{A}_0)^{\perp}$. Por lo tanto $\langle \mathscr{I}(\mathscr{A}_0), \mathscr{I}(\mathscr{A}_1)\rangle$ forma una grieta estrecha.

Probemos ahora que el ideal $\mathscr{I}(\mathscr{A}_0)$ es α_4 pero no α_3. Sea $\langle I_n\rangle_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{I}(\mathscr{A}_0)^{\perp} \setminus \mathrm{Fin} = \mathscr{I}(\mathscr{A}_1) \setminus \mathrm{Fin}$, entonces consideremos $I = \bigcup_{n\in\omega} I_n$. Si $I \in \mathscr{I}(\mathscr{A}_1)$ entonces claramente $\exists^{\infty} n \in \omega$ tal que $I_n \cap I \neq \emptyset$. Ahora, en caso contrario $I \in \mathscr{I}^{+}(\mathscr{A}_1)$, luego por la maximalidad en ningún lado de $\mathscr{A}_1$, existe $J \in [I]^{\omega}$ tal que $J \cap A$ es finito para cada $A \in \mathscr{A}_1$, luego $J \in \mathscr{I}(\mathscr{A}_1)^{\perp} = \mathscr{I}(\mathscr{A}_0)$. Así, $J \cap I_n$ es finito para cada $n \in \omega$, luego entonces $\exists^{\infty} n \in \omega$ tal que $I_n \cap J \neq \emptyset$, y en consecuencia también $\exists^{\infty} n \in \omega$ tal que $I_n \cap I \neq \emptyset$. Por lo tanto el ideal $\mathscr{I}(\mathscr{A}_0)$ es α_4. Para ver que $\mathscr{I}(\mathscr{A}_0)$ no es α_3, consideremos $\langle I_n\rangle_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{A}_1$ e $I \in \mathscr{I}(\mathscr{A}_1) \setminus \mathrm{Fin}$ arbitrario, entonces existe $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{A}_1$ un conjunto finito tal que $I \subseteq^{*} \bigcup \mathscr{F}$, ahora dado que $\mathscr{A}_1$ es una familia AD, se sigue entonces que para cada $I_n \notin \mathscr{F}$ se tiene que $I_n \cap I$ es finito, luego $\{n \in \omega \colon I_n \cap I \text{ es infinito}\}$ es finito, por lo que entonces $\mathscr{I}(\mathscr{A}_0)$ no es α_3.

Finalmente, de una manera análoga a lo anterior, se prueba también que el ideal $\mathscr{I}(\mathscr{A}_1)$ es α_4 pero no α_3. □

Ahora demos un ejemplo de un ideal Fréchet que sea α_3 pero no sea α_2. Para esto, consideremos para cada $X \subseteq 2^{\omega}$, el ideal $\mathrm{Br}(X)$, el cual definimos a continuación. Para cada $x \in X$, consideremos la rama $I_x = \{x \restriction n \colon n \in \omega\}$ en $2^{<\omega}$, entonces $\mathrm{Br}(X)$ es el ideal en $2^{<\omega}$ generado por las ramas I_x con $x \in X$, al ideal $\mathrm{Br}(2^{\omega})$ lo denotaremos simplemente por Br. Pues bien, tenemos lo siguiente.

2.25. Teorema (Nyikos [**1989**]). *Br es un ideal Fréchet que es α_3 pero no es α_2.*

Demostración. Empecemos con ver que Br es Fréchet. Para esto, es suficiente con probar que cada conjunto positivo contiene una anticadena infinita.

Así, sea $X \in \mathrm{Br}^+$ y consideremos $Y = \{t \in 2^{<\omega}\colon$ existen $r, s \in \langle t\rangle \cap X$ con $r \perp s\}$. Ahora bien, Y es infinito, ya que de lo contrario existiría $n \in \omega$ tal que $2^n \cap Y = \emptyset$, y entonces cada $t \in 2^n$ admitiría una rama I en $2^{<\omega}$ tal que $t \in I$ y $\langle t\rangle \cap X \subseteq I$, luego entonces podríamos cubrir a X con una cantidad finita de ramas en $2^{<\omega}$, lo cual contradice la elección de X.

Pasemos ahora a encontrar una anticadena infinita en X. Para esto, empecemos con probar la existencia de una rama I en $2^{<\omega}$ tal que $I \cap Y$ es infinito, y dado que Y es cerrado bajo segmentos iniciales, esto último es equivalente a que $I \subseteq Y$. Pues bien, notemos que para cada $t \in 2^{<\omega}$ que satisfaga que $\langle t\rangle \cap Y$ sea infinito, se tiene que existe $i \in 2$ tal que $\langle t^\frown i\rangle \cap Y$ es infinito, luego usando este hecho recursivamente podemos ir definiendo los segmentos iniciales de una rama en $2^{<\omega}$ como se desea.

Por otro lado, si existe una rama I en $2^{<\omega}$ con $I \subseteq Y$, entonces existen $\langle i_n\rangle_{n\in\omega} \subseteq I$ y $\langle x_n\rangle_{n\in\omega} \subseteq X \setminus I$ tales que $i_n \subseteq x_n$ y $x_n \notin \langle i_{n+1}\rangle$ para cada $n \in \omega$. Así, el conjunto $A = \{x_n\colon n \in \omega\}$ forma una anticadena en X.

Veamos ahora que Br no es α_2. Para esto, para cada $t \in 2^{<\omega}$, sea $A_t \subseteq \langle t\rangle$ una anticadena infinita. Ahora, si $X \subseteq 2^{<\omega}$ satisface que $X \cap A_t \neq \emptyset$ para cada $t \in 2^{<\omega}$, entonces tenemos que X es denso en $2^{<\omega}$, y de la densidad se sigue que existe $I \in \mathrm{Br}$ tal que $I \cap X$ es infinito, luego Br no es α_2.

Finalmente, veamos que Br es α_3. Para esto, como cada $J \in \mathrm{Br}^\perp \setminus \mathrm{Fin}(2^{<\omega})$ es en particular un conjunto positivo, entonces por lo hecho anteriormente, J contiene una anticadena infinita. Así, para ver que Br es α_3, es suficiente con probar que si $\langle A_n\rangle_{n\in\omega}$ es una sucesión de anticadenas infinitas en $2^{<\omega}$, entonces existe una anticadena infinita A tal que $A \cap A_n$ es infinito para una cantidad infinita de n's en ω.

Pues bien, sea $\langle A_n\rangle_{n\in\omega}$ una sucesión de anticadenas infinitas en $2^{<\omega}$, ahora de la infinitud de las A_n's, se sigue que para cada $n \in \omega$ existe $x_n \in 2^\omega$ tal que $\langle x_n \restriction m\rangle \cap A_n$ es infinito para toda $m \in \omega$, luego si $X = \{x_n\colon n \in \omega\}$, entonces X es finito ó infinito.

Así, si X es finito, entonces existe $x \in 2^\omega$ y $N \in [\omega]^\omega$ tal que $\langle x \restriction m\rangle \cap A_n$ es infinito para cada $\langle n, m\rangle \in N \times \omega$, de donde en particular se obtiene que $I_x \cap A_n = \emptyset$ para cada $n \in N$. Ahora, sea $f = \langle f_1, f_2\rangle\colon \omega \to N \times \omega$ una biyección, entonces por recursión, construimos una sucesión $\langle a_{f(n)}\rangle_{n\in\omega}$ en $2^{<\omega}$, tal que $a_{f(0)} \in A_{f_1(0)}$ y $a_{f(n)} \in \langle x \restriction ht(a_{f(n-1)})\rangle \cap A_{f_1(n)}$ para $n \geqslant 1$, donde ht es la función altura en el árbol $2^{<\omega}$, entonces haciendo $A = \{a_{f(n)}\colon n \in \omega\}$, obtenemos una anticadena infinita tal que $A \cap A_n$ es infinito para cada $n \in N$.

Por otro lado, si X es infinito, entonces por compacidad de 2^ω, existe $x \in 2^\omega$ punto de acumulación de X, luego $X \setminus \{x\}$ admite una sucesión $\langle x_{f(n)}\rangle_{n\in\omega}$ convergente a x, con $f \in {}^\omega\omega$ estrictamente creciente. Ahora, esta sucesión la podemos elegir (sin perder generalidad) de tal manera que $ht(I_{x_{f(n)}} \cap I_x) < ht(I_{x_{f(n+1)}} \cap I_x)$ para cada $n \in \omega$, luego si hacemos $h_n = ht(I_{x_{f(n)}} \cap I_x)$ para cada $n \in \omega$, entonces $\langle x_{f(n)} \upharpoonright h_n + 1 \rangle \cap A_{f(n)}$ es infinito para cada $n \in \omega$, entonces $A = \bigcup_{n\in\omega} \langle x_{f(n)} \upharpoonright h_n + 1 \rangle \cap A_{f(n)}$ forma (por construcción) una anticadena con las propiedades deseadas. □

2.26. Corolario (de la demostración). *Para cada $X \subseteq 2^\omega$, $Br(X)$ es Fréchet.*

Demostración. Sea $X \subseteq 2^\omega$ y tomemos $Y \in \mathrm{Br}^+(X)$. En caso de que $Y \cap (\bigcup_{x\in X} I_x)$ sea finito, entonces claramente $C = Y \setminus (\bigcup_{x\in X} I_x) \in \mathrm{Br}^\perp(X)$ con C infinito. En caso contrario, usando un razonamiento análogo al que usamos en la prueba anterior para ver que Br era Fréchet, podemos encontrar en $Y' = Y \cap (\bigcup_{x\in X} I_x)$ una anticadena infinita. □

Pasemos ahora en ver, que a diferencia de las últimas dos proposiciones, la existencia de un espacio Fréchet numerable que sea α_2 pero no α_1, no lo podemos garantizar en general en **ZFC**. Sin embargo, bajo una hipótesis adicional, esto sí es posible.

2.27. Teorema (Nyikos [**1992**]). *$\mathfrak{b} < \mathfrak{d}$ implica la existencia de un espacio Fréchet numerable que es α_2 pero no α_1.*

Demostración. Para esto, probaremos que bajo $\mathfrak{b} < \mathfrak{d}$, es posible encontrar un ideal Fréchet sobre $\omega \times \omega$ que es α_2 pero no α_1. Para encontrar tal ideal, empecemos con ver que bajo $\mathfrak{b} < \mathfrak{d}$, existe una torre $\subseteq^*$-decreciente en $\mathscr{P}(\omega)$ de longitud $\mathfrak{b}$.

En efecto, por el Teorema 1.1 (véase $\mathfrak{b}_1$), sea $\langle f_\alpha \colon \alpha < \mathfrak{b} \rangle$ una $\mathfrak{b}$-sucesión $<^*$-creciente de funciones estrictamente crecientes en $\langle {}^\omega\omega, \leqslant^* \rangle$ no acotada. Ahora bien, dado que $\mathfrak{b} < \mathfrak{d}$, entonces existe $g \in {}^\omega\omega$ tal que $g \nleqslant^* f_\alpha$ para cada $\alpha < \mathfrak{b}$. Pues bien, para cada $\alpha < \mathfrak{b}$, sea $A_\alpha = \{n \in \omega \colon g(n) > f_\alpha(n)\}$. Así, veamos entonces que $\langle A_\alpha \colon \alpha < \mathfrak{b} \rangle$ forma una torre como se desea. Sea $\alpha < \beta < \mathfrak{b}$, entonces $f_\alpha <^* f_\beta$, luego $A_\beta \subseteq^* A_\alpha$. Ahora, $\langle A_\alpha \colon \alpha < \mathfrak{b} \rangle$ carece de pseudo-intersecciones infinitas, ya que de lo contrario, si existe A infinito con $A \subseteq^* A_\alpha$ para cada $\alpha < \mathfrak{b}$, entonces si $A = \{a_n \colon n \in \omega\}$ es una enumeración creciente y $f \in {}^\omega\omega$ esta definida por $f(n) := g(a_n)$ para $n \in \omega$, se tendría que $f_\alpha(n) <^* f_\alpha(a_n) <^* g(a_n) = f(n)$ para cada $\alpha < \mathfrak{b}$ y cada $n \in \omega$, luego $f_\alpha <^* f$ para cada $\alpha < \mathfrak{b}$, contradiciendo el hecho de que $\langle f_\alpha \colon \alpha < \mathfrak{b} \rangle$ es no acotada.

Así, sea $\langle A_\alpha \colon \alpha < \mathfrak{b} \rangle$ una torre $\subseteq^*$-decreciente en $\mathscr{P}(\omega)$, y $\langle g_\alpha \colon \alpha < \mathfrak{b} \rangle$ una $\mathfrak{b}$-sucesión $<^*$-creciente de funciones estrictamente crecientes en $\langle {}^\omega\omega, \leqslant^* \rangle$ no acotada. Ahora, por recursión es posible construir para cada $\alpha < \mathfrak{b}$ una $f_\alpha \in {}^\omega\omega$ estrictamente creciente tal que:

(1) $g_\alpha <^* f_\alpha$ para cada $\alpha < \mathfrak{b}$;
(2) $f_\alpha <^* f_\beta$ para $\alpha < \beta < \mathfrak{b}$;
(3) $\mathrm{ran}(f_\alpha) \subseteq A_\alpha$ para cada $\alpha < \mathfrak{b}$.

Pues bien, sea $\mathscr{I}$ el ideal en $\omega\times\omega$ generado por la familia casi ajena $\{f_\alpha\colon \alpha < \mathfrak{b}\}$, y consideremos para cada $\alpha < \mathfrak{b}$ y cada $n \in \omega$, los conjuntos $L_\alpha = \{\langle n, m\rangle \in \omega\times\omega\colon m < f_\alpha(n)\}$ y $C_n = \{n\}\times\omega$ (la n-ésima columna de $\omega\times\omega$), respectivamente.

Para ver que $\mathscr{I}$ es Fréchet, tomemos $X \in \mathscr{I}^+$, en caso de que exista $n \in \omega$ con X_n (la sección vertical de X en n) infinito, entonces $X_n \in \mathscr{I}^\perp$ y $X_n \in [X]^\omega$. En otro caso, existe $\alpha < \mathfrak{b}$ tal que $X_\alpha = X \cap L_\alpha \in \mathscr{I}^+$, luego $\{X_\alpha \cap f_\beta\colon \beta \leqslant \alpha\}$ forma una familia infinita AD en X_α, y dado que $|\alpha| < \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$, entonces existe $C \in [X_\alpha]^\omega$ tal que $C \cap f_\beta$ es finito para cada $\beta \leqslant \alpha$, ahora para $\alpha < \beta < \mathfrak{b}$, como $f_\alpha <^* f_\beta$ entonces también se tiene para este caso que $C \cap f_\beta$ es finito, luego $C \in \mathscr{I}^\perp$. Por lo tanto $\mathscr{I}$ es Fréchet.

Por otro lado, haciendo $I_n = C_n$ para cada $n \in \omega$, obtenemos que $\langle I_n\rangle_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{I}^\perp \setminus \mathrm{Fin}(\omega\times\omega)$, luego para $I \subseteq \omega\times\omega$ con $I_n \subseteq^* I$ para cada $n \in \omega$, existe $f \in {}^\omega\omega$ tal que $\{\langle n, m\rangle \in \omega\times\omega\colon f(n) \leqslant m\} \subseteq I$, pero por otro lado, existe $\alpha < \mathfrak{b}$ tal que $f_\alpha \not\leqslant^* f$, por lo que $I \cap f_\alpha$ es infinito. Así, $\mathscr{I}^\perp$ no es P-ideal, esto es, $\mathscr{I}$ no es α_1.

Finalmente, veamos que $\mathscr{I}$ es α_2. Para esto, dado que para cada $X \in [\omega\times\omega]^\omega$, o existe $Y \in [X]^\omega$ con $Y \subseteq C_n$ para alguna $n \in \omega$, ó $X \cap C_n$ es finito para cada $n \in \omega$, entonces para ver que $\mathscr{I}$ es α_2, es suficiente con probar que para cada $\langle I_n\rangle_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{I}^\perp \setminus \mathrm{Fin}(\omega\times\omega)$, existe $I \in \mathscr{I}^\perp$ tal que $I \cap I_n$ es infinito para toda $n \in \omega$, para los siguientes dos casos.

I: Para cuando $I_n \cap C_n$ es finito para cada $n \in \omega$;
II: y para cuando para cada $n \in \omega$, existe $n_k \in \omega$ tal que $I_n \subseteq C_{n_k}$.

Para **I**, por el Teorema 1.1 (véase $\mathfrak{b}_2$), la familia $\langle f_\alpha\colon \alpha < \mathfrak{b}\rangle$ es no acotada sobre cada subconjunto infinito de ω, entonces para cada $n \in \omega$, existe $\alpha_n < \mathfrak{b}$ tal que $B_n = I_n \cap L_{\alpha_n}$ es infinito. Sea $\alpha = \sup\{\alpha_n\colon n \in \omega\}$, luego aplicando nuevamente el Teorema 1.1 (véase $\mathfrak{b}_7$), existe $I \subseteq L_\alpha$ tal que $B_n \subseteq^* I$ para cada $n \in \omega$, y $f_\beta \cap I$ es finito para cada $\beta < \alpha$, y en consecuencia también para toda β, por lo que $I \in \mathscr{I}^\perp$.

Para **II**, tengamos presente que $\langle A_\alpha\colon \alpha < \mathfrak{b}\rangle$ forma una torre $\subseteq^*$-decreciente en $\mathscr{P}(\omega)$. Así, para cada $n \in \omega$ existe $\alpha_n < \mathfrak{b}$ tal que $\pi_2(I_n) \setminus A_{\alpha_n}$ es infinito. Tomando $\alpha = \sup\{\alpha_n\colon n \in \omega\}$, obtenemos que $\pi_2(I_n) \setminus A_\alpha$ es infinito para toda $n \in \omega$, luego por lo supuesto, $(\omega\times(\omega\setminus A_\alpha)) \cap I_n$ es infinito para cada $n \in \omega$. Pues bien, hagamos $I = \omega\times(\omega\setminus A_\alpha)\setminus L_\alpha$, y notemos también que $I \cap I_n$ es infinito para cada $n \in \omega$, ya que $L_\alpha \cap C_n$ es finito para cada $n \in \omega$. Ahora, por la manera en que se tomó $\langle f_\alpha \colon \alpha < \mathfrak{b} \rangle$, se tiene que $I \cap f_\alpha$ es finito para cada $\alpha < \mathfrak{b}$, luego $I \in \mathscr{I}^\perp$. $\square$

Por otro lado, la existencia de un espacio Fréchet numerable que sea α_2 pero no α_1, no sólo es consistente con **ZFC** si no también es independiente de **ZFC**.

2.28. TEOREMA (DOW [**1990**]). *En el modelo de Laver para la conjetura de Borel, cada espacio α_2 es α_1.*[1] $\square$

A lo que respecta a encontrar un espacio Fréchet numerable que sea α_1 pero no α_0 (primero numerable), tenemos una situación análoga a la anterior. Esto es, la existencia de tal espacio es independiente de **ZFC**. En efecto, empecemos con mostrar la consistencia relativa con **ZFC** de la existencia de tal espacio.

2.29. PROPOSICIÓN. *Sea X un espacio topológico numerable y $x \in X$, entonces se tiene lo siguiente:*

(1) *Si $\chi(x, X) < \mathfrak{p}$, entonces X es Fréchet en x. Más aún, esta cota es óptima, es decir, existe un espacio numerable X y un punto $x \in X$ con $\chi(x, X) = \mathfrak{p}$ tal que X no es Fréchet en x.*
(2) *Si $\chi(x, X) < \mathfrak{b}$, entonces X es α_1 en x. También esta cota es óptima, es decir, existe un espacio numerable X y un punto $x \in X$ con $\chi(x, X) = \mathfrak{b}$ tal que X no es α_1 en x.*

DEMOSTRACIÓN. Empecemos traduciendo esto último al lenguaje de ideales que se desarrolló en la Sección 3 de este capítulo. Así, la propiedad de que X sea Fréchet (*resp.*, sea α_1) en x se traduce en que el ideal $\mathscr{I}_x$ sea Fréchet (*resp.*, sea α_1), y $\chi(x, X)$ se traduce en $\mathrm{cof}(\mathscr{I}_x)$. Con esto en mente, pasemos entonces a probar la versión idealizada de esta proposición.

(1) Sea $\mathscr{I}$ un ideal sobre ω tal que $\mathrm{cof}(\mathscr{I}) < \mathfrak{p}$ y sea $Y \in \mathscr{I}^+$. Tomemos $\mathscr{J}$ un subconjunto cofinal de $\mathscr{I}$ con $|\mathscr{J}| = \mathrm{cof}(\mathscr{I})$, y hagamos $\mathscr{Y} = \{Y \setminus J \colon J \in \mathscr{J}\}$. Como $Y \in \mathscr{I}^+$ entonces $\mathscr{Y} \subseteq [Y]^\omega$. Ahora, del hecho de que $\mathscr{J}$ es cofinal en $\mathscr{I}$, nos es difícil ver que $\mathscr{Y}$ tiene la *pfif*, luego $|\mathscr{Y}| < \mathfrak{p}$ implica la existencia de una pseudo intersección $C \in [Y]^\omega$ de la familia $\mathscr{Y}$. Y de aquí es inmediato ver que $C \in \mathscr{I}^\perp$, y por lo tanto $\mathscr{I}$ es Fréchet.

Para la otra parte, tomemos una familia $\mathscr{U} \subseteq [\omega]^\omega$ de tamaño $\mathfrak{p}$ con la *pfif* sin pseudo intersecciones infinitas, y consideremos el ideal $\mathscr{I}$ generado por la familia $\{\omega \setminus U \colon U \in \mathscr{U}\}$. Pues bien, el ideal $\mathscr{I}$ es alto. En efecto, sea $Y \in [\omega]^\omega$ entonces Y no es una pseudo intersección de la familia $\mathscr{U}$, luego existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $C = Y \setminus U$ (el cual pertenece a $\mathscr{I}$) es infinito. Así, $\mathscr{I}$ no es Fréchet

[1] La prueba de este teorema se presentará en el Capítulo 4 Sección 3.

y la $\mathrm{cof}(\mathscr{I}) = \mathfrak{p}$, y entonces el espacio asociado $X_{\mathscr{I}}$ no es Fréchet en $\mathscr{I}$ y $\chi(\mathscr{I}, X_{\mathscr{I}}) = \mathfrak{p}$.

(2) Sea $\mathscr{I}$ un ideal sobre ω tal que $\mathrm{cof}(\mathscr{I}) < \mathfrak{b}$ y sea $\langle I_n \rangle_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{I}^\perp \setminus \mathrm{Fin}$. Tomemos $\mathscr{J}$ un subconjunto cofinal de $\mathscr{I}$ con $|\mathscr{J}| = \mathrm{cof}(\mathscr{I})$. Definamos para cada $J \in \mathscr{J}$ una $f_J \in {}^\omega\omega$ como $f_J(n) = \mathrm{mín}\,\{m \in I_n\colon k \notin J$ para cada $k \in I_n$ con $k \geqslant m\}$, luego $|\mathscr{J}| < \mathfrak{b}$ implica la existencia de una $f \in {}^\omega\omega$ tal que $f_J \leqslant^* f$ para toda $J \in \mathscr{J}$. Sea $I = \bigcup_{n\in\omega}\{m \in I_n\colon f(n) \leqslant m\}$, entonces claramente $I_n \subseteq^* I$ para toda $n \in \omega$. Por otro lado, si $J \in \mathscr{J}$ entonces existe $m_J \in \omega$ tal que $f_J(n) \leqslant f(n)$ para toda $n \geqslant m_J$, por lo que $J \cap \bigcup_{n \geqslant m_J}\{m \in I_n\colon f(n) \leqslant m\} = \emptyset$, y dado que $\bigcup_{n<m_J}\{m \in I_n\colon f(n) \leqslant m\} \subseteq \bigcup_{n<m_J} I_n$, se sigue entonces que $I \cap J$ es finito. Así, $I \in \mathscr{I}^\perp \setminus \mathrm{Fin}$, y por lo tanto $\mathscr{I}$ es α_1.

Para la otra parte, tomemos $\langle f_\alpha\colon \alpha < \mathfrak{b}\rangle$ una $\mathfrak{b}$-sucesión $<^*$-creciente de funciones no decrecientes en $\langle {}^\omega\omega, \leqslant^*\rangle$ no acotada. Ahora, para cada $\alpha < \mathfrak{b}$, sea $A_\alpha = \{\langle n, m\rangle \in \omega\times\omega\colon m \leqslant f_\alpha(n)\}$ y considerese el ideal $\mathscr{I}$ en $\omega\times\omega$ generado por la familia $\{A_\alpha\colon \alpha < \mathfrak{b}\}$. Pues bien, el ideal $\mathscr{I}$ no es α_1 y la $\mathrm{cof}(\mathscr{I}) = \mathfrak{b}$. En efecto, que la $\mathrm{cof}(\mathscr{I}) = \mathfrak{b}$ es claro, ahora para ver que $\mathscr{I}$ no es α_1, sea $I_n = \{n\}\times\omega$ para cada $n \in \omega$, entonces $\langle I_n\rangle_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{I}^\perp \setminus \mathrm{Fin}$. Ahora, supongamos que para algún $I \subseteq \omega\times\omega$ se tiene que $I_n \subseteq^* I$ para toda $n \in \omega$, entonces definamos $f \in {}^\omega\omega$ como $f(n) = \mathrm{mín}\,\{m \in \omega\colon \langle n, k\rangle \in I_n \cap I$ para toda $k \geqslant m\}$, luego existe $\alpha < \mathfrak{b}$ y $N \in [\omega]^\omega$ tal que $f_\alpha(n) > f(n)$ para toda $n \in N$, pero esto quiere decir entonces que $I \cap A_\alpha$ es infinito. Por lo tanto $\mathscr{I}$ no es α_1. Así, el espacio asociado $X_{\mathscr{I}}$ no es α_1 en $\mathscr{I}$ y $\chi(\mathscr{I}, X_{\mathscr{I}}) = \mathfrak{b}$. □

2.30. Corolario. *$\mathfrak{p} > \omega_1$ implica la existencia de un espacio Fréchet numerable que es α_1 pero no α_0.*

Demostración. Para esto, tomemos un ideal $\mathscr{I}$ sobre ω con $\mathrm{cof}(\mathscr{I}) = \omega_1$ (*e.g*, el ideal generado por una familia AD de tamaño ω_1), y dado que $\omega_1 < \mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{b}$ entonces por la proposición anterior tenemos que el ideal $\mathscr{I}$ es tanto Fréchet como α_1 pero no α_0. Así, el espacio asociado $X_{\mathscr{I}}$ es Fréchet α_1 pero no α_0. □

En el otro sentido, tenemos el siguiente resultado.

2.31. Teorema (Dow y Steprāns [**1992**]). *Existe un modelo de* **ZFC** *en el cual todo espacio Fréchet numerable que es α_1 también es α_0.* □

Por otro lado, la siguiente proposición nos muestra que no podemos tener una situación en la que tengamos los Teoremas 2.28 y 2.31 simultaneamente.

2.32. Proposición. *Existe un espacio Fréchet numerable que es α_2 pero no es α_0.*

Demostración. Para esto, será suficiente con encontrar un ideal Fréchet sobre ω que sea α_2 pero no α_0. Observando que la propiedad de ser α_0 en un ideal $\mathscr{I}$, se traduce en que la $\mathrm{cof}(\mathscr{I}) = \omega$.

Pues bien, una grieta de Hausdorff en $\langle [\omega]^\omega, \subset^* \rangle$ nos proporciona tal ideal. En efecto, sea $\langle \{a_\alpha \colon \alpha < \omega_1\}, \{b_\alpha \colon \alpha < \omega_1\} \rangle$ una grieta de Hausdorff en $\langle [\omega]^\omega, \subset^* \rangle$, donde a nuetra grieta la pensaremos como dos torres $\subset^*$-crecientes. Ahora, sea $\mathscr{I} = \{X \subseteq \omega \colon X \cap a_\alpha \text{ es finito para cada } \alpha < \omega_1\}$.

Para ver que $\mathscr{I}$ es Fréchet, notemos que $X \in \mathscr{I}^+$ si y sólo si existe $\alpha < \omega_1$ tal que $X \cap a_\alpha$ es infinito, de donde se obtiene en particular que $X \cap a_\alpha \in \mathscr{I}^\perp$.

Veamos ahora que $\mathscr{I}$ es α_2 pero no α_0. Sea $\langle I_n \rangle_{n \in \omega} \subseteq \mathscr{I}^\perp \setminus \mathrm{Fin}$, entonces para cada $n \in \omega$ existe $\alpha_n < \omega_1$ tal que $I_n \cap a_{\alpha_n}$ es infinito, sea entonces $\alpha \geqslant \sup \{\alpha_n \colon n \in \omega\}$, luego $a_\alpha \supset^* a_{\alpha_n}$ para cada $n \in \omega$. Así, haciendo $I = a_\alpha \in \mathscr{I}^\perp$ se obtiene que $I \cap I_n$ es infinito para cada $n \in \omega$, por lo que $\mathscr{I}$ es α_2. Para ver que $\mathrm{cof}(\mathscr{I}) > \omega$, consideremos $\langle I_n \rangle_{n \in \omega} \subseteq \mathscr{I}$ y mostremos que existe $I \in \mathscr{I}$ tal que $I \setminus I_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$. Para ello, notemos que por la manera en que estamos pensando a nuestra grieta de Hausdorff, se tiene que $\{b_\alpha \colon \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathscr{I}$. Ahora bien, dado que $\{b_\alpha \colon \alpha < \omega_1\}$ forma parte de una grieta de Hausdorff, entonces es posible asegurar que para cada $n \in \omega$ existe $\alpha_n < \omega_1$ tal que $b_{\alpha_n} \setminus I_n$ es infinito, ya que en caso contrario, para alguna $n \in \omega$, $b_\alpha \setminus I_n$ es finito para cada $\alpha < \omega_1$, lo cual nos dice que $b_\alpha \subseteq^* I_n$ para cada $\alpha < \omega_1$, y como $I_n \in \mathscr{I}$, entonces también se tiene que $a_\alpha \cap I_n$ es finito para cada $\alpha < \omega_1$, contrario a que $\langle \{a_\alpha \colon \alpha < \omega_1\}, \{b_\alpha \colon \alpha < \omega_1\} \rangle$ es una grieta de Hausdorff. Así, tomando $\alpha \geqslant \sup \{\alpha_n \colon n \in \omega\}$ y haciendo $I = b_\alpha$, obtenemos que $I \setminus I_n$ es infinito para cada $n \in \omega$. $\square$

Otro ejemplo de un ideal Fréchet que sea α_2 pero no α_0 nos lo proveen los λ'-conjuntos.

Un espacio $X \subseteq \mathbb{R}$ (o en lugar de $\mathbb{R}$ un espacio métrico separable) es llamado un λ-*conjunto*, si cada subconjunto contable de X es un conjunto G_δ en X. Por otro lado, decimos que un subconjunto de reales X es un λ'-*conjunto*, si para cada conjunto contable $A \subset \mathbb{R}$, A es G_δ en el subespacio $X \cup A$. Ahora, es fácil ver que X es un λ'-conjunto si y sólo si para cada conjunto contable A, $X \cup A$ es un λ-conjunto.

Cabe mencionar que la noción de λ'-conjunto depende del espacio en donde se esté trabajando. Por ejemplo, una grieta de Hausdorff es un ejemplo de un λ'-conjunto en 2^ω de cardinalidad ω_1, y el conjunto $X = \{f_\alpha \in {}^\omega\omega \colon \alpha < \mathfrak{b}\}$, para X no acotado y bien ordenado por $<^*$, es un ejemplo de un λ'-conjunto en ω^ω. Sin embargo, en el modelo de Laver (en donde $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \omega_2$) A. W. Miller en [**1993**] demuestra que no hay λ'-conjuntos en 2^ω de cardinalidad ω_2, luego podemos tener un λ'-conjunto en ω^ω de tamaño ω_2, y carecer de λ'-conjuntos en 2^ω de cardinalidad ω_2.

Teniendo ya garantizada la existencia de λ'-conjuntos en **ZFC**, entonces nuestra siguiente proposición tiene sentido en **ZFC**.

2.33. TEOREMA (NYIKOS [**1989**]). *Sea $X \subseteq 2^\omega$ un λ'-conjunto, entonces $Br(X)$ es α_2.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $X \subseteq 2^\omega$ es un λ'-conjunto, y sea $\langle I_n \rangle_{n\in\omega} \subseteq \mathrm{Br}^\perp(X) \setminus \mathrm{Fin}(2^{<\omega})$. Refinando si es necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que para cada $n \in \omega$, o I_n es una antidadena convergente a un punto $x \in 2^\omega$, es decir, $I_n \subseteq^* \langle x \restriction m \rangle$ para toda $m \in \omega$, o $I_n \subseteq I_x$ para algún $x \in 2^\omega \setminus X$, teniendo también en este caso que I_n es convergente a x. Para cada $n \in \omega$, denotemos por a_n al punto al que converge el conjunto I_n. Pues bien, sea $A = \{a_n : n \in \omega\}$. Dado que X es un λ'-conjunto, $X \setminus A$ es un F_σ en $X \cup A$, luego $X \setminus A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} F_n$ con F_n cerrado en 2^ω para cada $n \in \omega$ y $A \cap (\bigcup_{n\in\omega} F_n) = \emptyset$. Como 2^ω es un espacio separable 0-dimensional, entonces de hecho podemos suponer que los F_n's son ajenos por pares. Hagamos $T_n = \bigcup_{x\in F_n} I_x$ para cada $n \in \omega$. Ahora, por inducción, encontremos una sucesión $\langle s_n \rangle_{n\in\omega} \subseteq 2^{<\omega}$ y un conjunto infinito $I = \{t_n : n \in \omega\} \subseteq 2^{<\omega}$ tales que para cada $n \in \omega$:

(1) $s_n \in I_{a_n}$;
(2) $t_n \in I_n \cap (\langle s_n \rangle \setminus I_{a_n})$ si $a_n \in X$, en otro caso $t_n \in I_n \cap \langle s_n \rangle$;
(3) $\langle s_n \rangle \cap (\bigcup_{m\leqslant n} T_m) = \emptyset$, $t_m \notin \langle s_n \rangle$ para toda $m < n$, y $\langle s_n \rangle \cap I_{a_m} = \emptyset$ para $m < n$ con $a_m \neq a_n$.

Para el caso base, dado que F_0 es un conjunto cerrado y $a_0 \notin F_0$, entonces existe $s_0 \in I_{a_0}$ tal que $\langle s_0 \rangle \cap T_0 = \emptyset$. Ahora, en caso de que $a_0 \in X$, entonces de nuestras hipótesis se sigue que I_0 debe ser una anticadena convergente a a_0, luego existe $t_0 \in I_0 \cap (\langle s_0 \rangle \setminus I_{a_0})$. En caso contrario, $I_0 \subseteq I_{a_0}$, entonces para este caso tenemos que existe $t_0 \in I_0 \cap \langle s_0 \rangle$.

Supongamos ahora que hemos definido nuestras sucesiones hasta el paso n. Así, dado que $\bigcup_{m\leqslant n+1} F_m$ es un conjunto cerrado y $a_{n+1} \notin \bigcup_{m\leqslant n+1} F_m$, entonces existe $s_{n+1} \in I_{a_{n+1}}$ tal que $\langle s_{n+1} \rangle \cap (\bigcup_{m\leqslant n} T_m) = \emptyset$. Ahora, como los conjuntos $\{a_m : m \leqslant n\} \setminus \{a_{n+1}\}$ y $\{t_m : m \leqslant n\}$ son finitos, entonces podemos suponer además que $t_m \notin \langle s_{n+1} \rangle$ para toda $m \leqslant n$, y $\langle s_{n+1} \rangle \cap I_{a_m} = \emptyset$ para $m \leqslant n$ con $a_m \neq a_{n+1}$. Por el mismo argumento que se usó en el caso base, elegimos $t_{n+1} \in I_{n+1} \cap (\langle s_{n+1} \rangle \setminus I_{a_{n+1}})$ en caso de que $a_{n+1} \in X$, y $t_{n+1} \in I_{n+1} \cap \langle s_{n+1} \rangle$ en caso contrario.

Finalmente, de las propiedades que cumplen las dos sucesiones que hemos definido, es fácil ver que $I \in \mathrm{Br}^\perp(X) \setminus \mathrm{Fin}(2^{<\omega})$, y como $I \cap I_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$, se sigue entonces que $\mathrm{Br}(X)$ es α_2. $\square$

2.34. Corolario. *Sea* $Y \subseteq 2^\omega$ *un* λ'*-conjunto, entonces el espacio* $X_{\mathscr{I}}$ *asociado al ideal* $\mathscr{I} = Br(Y)$*, es un ejemplo de un espacio Fréchet numerable que es* α_2 *pero no es* α_0*.*

Demostración. En efecto, del Corolario 2.26 y del Teorema 2.33, se sigue que el ideal $\mathrm{Br}(Y)$ es Fréchet y α_2. Ahora, como el ideal $\mathrm{Br}(Y)$ es generado por una familia AD y como Y es no numerable, ya que Y es un λ'-conjunto, entonces $\mathrm{cof}(\mathrm{Br}(Y)) > \omega$, es decir, $\mathrm{Br}(Y)$ no es α_0. □

Veamos ahora algunas relaciones que hay entre las α_i-propiedades y algunos juegos topológicos infinitos.

2.35. Definición (Gruenhage [**1976**]). Sea X un espacio topológico y $x \in X$. El *juego abierto-punto* $G_{\mathrm{op}}(x, X)$ está definido como sigue. Este es jugado por dos jugadores, **I** y **II**. En el n-ésimo paso ($n \in \omega$), el jugador **I** elige un subconjunto abierto U_n de X alrededor de x, y el jugador **II** elige un punto $x_n \in U_n \setminus \{x\}$. **I** gana si la sucesión $\langle x_n \rangle_{n\in\omega}$ converge a x, en otro caso **II** gana.

Como es usual, una estrategia para el jugador **I** es un mapeo $\rho\colon (X^\circ)^{<\omega} \to \eta(x)$ y una estrategia para el jugador **II** es un mapeo $\sigma\colon \eta(x)^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \to X^\circ$ tal que para cada $n \in \omega$ y para cada $s \in {}^n\eta(x)$ se tiene que $\sigma(s) \in s(n-1)$. Una estrategia ρ para **I** es una *estrategia ganadora* si para cada $f \in {}^\omega X$ tal que $f(n) \in \rho(f \restriction n)$ para cada $n \in \omega$ se tiene que $x \in \overline{\mathrm{ran}(f)}$. Similarmente, σ es una *estrategia ganadora* para **II**, si para cada $f \in {}^\omega\eta(x)$ se tiene que $x \notin \overline{\{\sigma(f \restriction n)\colon n \in \omega\}}$.

2.36. Proposición. *Sea* X *un espacio topológico, entonces:*

(a) *Si* X *es numerable, entonces* **I** *tiene estrategia ganadora si y sólo si* $\chi(x, X) = \omega$ *(equivalentemente* X *es* α_0 *en* x*).*
(b) **II** *tiene estrategia ganadora si y sólo si existe* $T \subseteq (X^\circ)^{<\omega}$ *un árbol de ramificación en* $\mathscr{I}_x^+$ *tal que* $[T] \subseteq \mathscr{C}_x^+$*.*

Demostración. (a) Sea ρ una estrategia para **I** y supongamos que $\chi(x, X) > \omega$. Dado que $\mathrm{ran}(\rho)$ es numerable entonces existe $U \in \eta(x)$ tal que $\rho(t) \nsubseteq U$ para toda $t \in (X^\circ)^{<\omega}$. Así, si **II** elige $x_n \in U_n \setminus U$ en el paso n, entonces la sucesión $\langle x_n \rangle_{n\in\omega}$ no convergerá a x, luego ρ no puede ser una estrategia ganadora para **I**. Por lo tanto, si **I** tiene estrategia ganadora entonces X es α_0.

Para el otro sentido, supongamos que $\chi(x, X) = \omega$, entonces existe una base numerable $\{U_n \in \eta(x)\colon n \in \omega\}$ alrededor de x de tal manera que $U_{n+1} \subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$. Así, la estrategia ganadora para **I** es que en el paso n elija U_n.

(b) Supongamos que $\sigma\colon \eta(x)^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \to X^\circ$ es una estrategia ganadora para **II**, entonces construyamos por inducción un árbol $T \subseteq (X^\circ)^{<\omega}$ poniendo $\emptyset \in T$ y si $s \in T$ entonces es posible encontrar una sucesión finita $\overline{s} \in \eta(x)^{<\omega}$ tal que $\mathrm{dom}(\overline{s}) = \mathrm{dom}(s)$ y para cada n en $\mathrm{dom}(s)$ se tiene que $s(n) = \sigma(\overline{s} \restriction n)$ y

$\overline{s \upharpoonright n} = \overline{s} \upharpoonright n$. Entonces $s^\frown y \in T$ si y sólo si existe $U \in \eta(x)$ tal que $\sigma(\overline{s}^\frown U) = y$. Fija esta U ponemos $\overline{s^\frown n} = \overline{s}^\frown U$. Como σ es una estrategia, es claro que T es un árbol de ramificación en $\mathscr{I}_x^+$, y como esta estrategia es ganadora entonces $[T] \subseteq \mathscr{C}_x^+$.

Para el otro sentido, supongamos que existe $T \subseteq (X^\circ)^{<\omega}$ un árbol de ramificación en $\mathscr{I}_x^+$ tal que $[T] \subseteq \mathscr{C}_x^+$. Entonces la estrategia que hace ganar a **II** es la siguiente. En la primera jugada **II** debe elegir $x_0 \in U_0 \cap \mathrm{suc}_T(\emptyset)$, luego para la jugada $n \geqslant 1$ debe elegir $x_n \in U_n \cap \mathrm{suc}(x_{n-1})$, siendo x_{n-1} lo que jugó en la jugada $n-1$. Así $\langle x_n \rangle_{n\in\omega} \in T$ y entonces $\langle x_n \rangle_{n\in\omega}$ no converge a x. □

2.37. Proposición. *Supongamos que X es un espacio de Fréchet en x, entonces* **II** *no tiene estrategia ganadora si y sólo si X es α_2 en x.*

Demostración. Supongamos que **II** no tiene estrategia ganadora, entonces para cada árbol $T \subseteq (X^\circ)^{<\omega}$ existe $f \in [T]$ tal que $\mathrm{ran}(f) \in \mathscr{I}_x^\perp$. Ahora, sea $\langle I_n \rangle_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{I}_x^\perp \setminus \mathrm{Fin}(X^\circ)$, y consideremos $T = \{s \in (X^\circ)^{<\omega} \colon s(n) \in I_n$ para cada $n < |s|\}$. Entonces T es un árbol de ramificación en $\mathscr{I}_x^+$, luego existe $f \in [T]$ con $\mathrm{ran}(f) \in \mathscr{I}_x^\perp \setminus \mathrm{Fin}(X^\circ)$. Pues bien, si $I = \mathrm{ran}(f)$ entonces $I \cap I_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$. Así, X es α_2 en x.

Para el otro sentido, sea $T \subseteq (X^\circ)^{<\omega}$ un árbol de ramificación en $\mathscr{I}_x^+$. Como X es Fréchet en x, entonces para cada $s \in T$ existe $I_s \in \mathscr{I}_x^\perp \setminus \mathrm{Fin}(X^\circ)$ tal que $I_s \subseteq \mathrm{suc}_T(s)$. Ahora, como X es α_2 en x entonces existe $I \in \mathscr{I}_x^\perp \setminus \mathrm{Fin}(X^\circ)$ tal que $I \cap I_s \neq \emptyset$ para cada $s \in T$, luego existe $f \in [T]$ tal que $\mathrm{ran}(f) \subseteq I$. Por lo tanto **II** no tiene estrategia ganadora. □

CAPíTULO 3

Grupos de Fréchet

1. Introducción

Indudablemente, los problemas de metrización de ciertas clases de espacios topológicos, han sido siempre de gran interés para la topología general. Así, por ejemplo, para la clase de grupos topológicos se tiene el siguiente teorema de metrización.

3.1. TEOREMA (BIRKHOFF [**1936**], KAKUTANI [**1936**]). *Todo grupo topológico primero numerable es metrizable.* $\square$

Ahora, si debilitamos en el teorema anterior la hipótesis de primero numerable por la hipótesis de ser Fréchet, es natural preguntarnos si todavia se tiene un teorema de metrización. Pues bien, el siguiente ejemplo nos da un respuesta a esto en el sentido negativo.

3.2. EJEMPLO. La suma directa de ω_1 copias del grupo topológico del círculo $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$, es un grupo topológico σ-compacto Fréchet el cual no es primero numerable.

Tal ejemplo, sin embargo no es separable. Así, V. I Malykhin en 1978 hace la siguiente pregunta.

¿Existe un grupo topológico separable Fréchet no metrizable?

En este sentido, tenemos lo siguiente.

3.3. PROPOSICIÓN. *Si todo grupo topológico Fréchet numerable es metrizable, entonces también lo es todo grupo topológico separable Fréchet.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que G es un grupo topológico separable Fréchet, entonces por la separabilidad, G admite un subgrupo denso numerable H, luego por hipótesis H es metrizable. Así, tomando $\{V_n : n \in \omega\}$ una base local numerable del elemento identidad e en H, obtenemos para cada $n \in \omega$, un abierto U_n en G tal que $V_n = U_n \cap H$.

Ahora bien, $\{U_n : n \in \omega\}$ forma una base local de e en G. En efecto, sea $U \in \eta_G(e)$, entonces por la regularidad de G, existe $W \in \eta_G(e)$ tal que $\mathrm{Cl}_G(W) \subseteq U$.

Por otro lado, existe $n \in \omega$ tal que $V_n \subseteq W \cap H$, y por densidad de H, se tiene que $\mathrm{Cl}_G(U_n) = \mathrm{Cl}_G(V_n) \subseteq \mathrm{Cl}_G(W)$, por lo que $U_n \subseteq U$.

Finalmente, por la homogeniedad de un grupo topológico, se tiene entonces que G es primero numerable, luego por el Teorema 3.1, se obtiene que G es metrizable. □

Así, la pregunta de Malykhin es equivalente a la siguiente pregunta.

¿Existe un grupo topológico numerable Fréchet no metrizable?

Siendo esta, la formulación a la que nos referirémos cuando hablemos de la pregunta (o problema) de Malykhin.

Con el objetivo de mostrar ejemplos consistentes a esta última pregunta, en este capítulo nos dedicaremos a estudiar los grupos topológicos numerables bajo la propiedad de Fréchet y las α_i-propiedades. Pasando por cierta clase de grupos topológicos booleanos numerables, se dan dos ejemplos consistentes del tipo booleano, bajo ciertas aseveraciones relativas a los cardinales $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{p}$. También se analiza la propiedad de Fréchet en los espacios $C_p(X)$, obteniendo así otro ejemplo consistente del tipo $C_p(X)$, bajo la existencia de γ-conjuntos.

Por otro lado, con la noción de bisecuencialidad, A. V. Arhangel'skiĭ y V. I. Malykhin en [**1996**] hacen una generalización del Teorema 3.1.

3.4. Definición. Sea X un espacio topológico, decimos que X es *bisecuencial* en $x \in X$, si para cada ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre X que converja a x, existe una sucesión $\langle X_n \colon n \in \omega\rangle \subseteq \mathscr{U}$ convergente a x, es decir, para cada $U \in \eta(x)$ existe $n \in \omega$ tal que $X_n \subseteq U$. Llamando entonces a X bisecuencial, si este es bisecuencial en cada $x \in X$.

Notemos que todo espacio primero numerable es bisecuencial. Por lo que el siguiente teorema generaliza el Teorema 3.1.

3.5. Teorema (A. V. Arhangel'skiĭ y V. I. Malykhin [**1996**]). *Todo grupo topológico bisecuencial es metrizable.*

Demostración. Supongamos que G es un grupo topológico bisecuencial con elemento identidad e. Sea $\mathscr{G}$ la familia de todos los subconjuntos abiertos densos de G, luego como $\eta(e) \cup \mathscr{G}$ tiene la propiedad de la intersección finita, entonces tomemos $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre G que contenga a $\eta(e) \cup \mathscr{G}$, obteniendo en particular que $\mathrm{nwd}(G) \cap \mathscr{U} = \emptyset$. Ahora, dado que G es bisecuencial en e, entonces existe una sucesión $\langle X_n \colon n \in \omega\rangle \subseteq \mathscr{U}$ convergente a e. Haciendo $U_n = \mathrm{int}(\overline{X_n}) \neq \emptyset$ y $V_n = U_n \cdot U_n^{-1}$ para cada $n \in \omega$, obtenemos que $\langle V_n \colon n \in \omega\rangle$ forma una base de vecindades alrededor de e. En efecto, de la teoría básica de grupos topológicos, se sabe que existe $\mathscr{V} \subseteq \eta(e)$ tal que $\mathscr{V} \cdot \mathscr{V}^{-1} = \{V \cdot V^{-1} \colon V \in \mathscr{V}\}$

forma una base de vecindades alrededor de e. Ahora, dado que G es regular, para $V \in \mathscr{V}$ existe $U \in \eta(e)$ tal que $\overline{U} \subseteq V$, luego como existe $n \in \omega$ tal que $X_n \subseteq U$, obtenemos que $U_n \subseteq V$, por lo que entonces $V_n \subseteq V \cdot V^{-1}$. Así, $\langle V_n \colon n \in \omega \rangle$ forma una base de vecindades alrededor de e.

Así, por la homogeniedad de un grupo topológico, obtenemos que G es primero numerable, luego por el Teorema 3.1, G es metrizable. $\square$

Este teorema lo retomaremos en el Capítulo 4 cuando analizemos la pregunta de Malykhin bajo la noción de definibilidad.

Pues bien, regresando a los grupos de Fréchet, comencemos nuestro estudio con el siguiente resultado.

3.6. Teorema (Nyikos [**1981**]). *Todo grupo topológico Fréchet es α_4.*

Demostración. Sea G un grupo topológico Fréchet con elemento identidad e. Por la homogeniedad de un grupo topológico, para ver que G es α_4, es suficiente con probar que G es α_4 en e. Así, sea $\langle I_n \rangle_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{I}_e^{\perp} \setminus \mathrm{Fin}(G^{\circ})$ y $\{x_n \colon n \in \omega\}$ una enumeración de I_0, entonces se tiene que $x_n \cdot I_n \to x_n$ para cada $n \in \omega$, luego $e \in \overline{X}$, donde $X = \bigcup_{n\in\omega}(x_n \cdot I_n)$. Ahora, dado que G es Fréchet en e, existe $J \in [X]^{\omega}$ tal que $J \to e$, entonces $J \cap (x_n \cdot I_n)$ es finito para cada $n \in \omega$, luego existe $K \in [\omega]^{\omega}$ tal que $\langle x_k \cdot y_k \rangle_{k\in K} \subseteq J$ con $y_k \in I_k$ para cada $k \in K$.

Por otro lado, dado que $\langle x_k \rangle_{k\in K}$ converge a e, entonces también lo hace la sucesión $\langle x_k^{-1} \rangle_{k\in K}$, y en consecuencia la sucesión $\langle x_k^{-1} \cdot (x_k \cdot y_k) \rangle$ también converge a e. Así, $I = \{y_k \colon k \in K\} \in \mathscr{I}_e^{\perp}$ y satisface que $\exists^{\infty} n \in \omega$ tal que $I \cap I_n \neq \emptyset$. $\square$

En la teoría básica de grupos topológicos, la siguiente proposición es de suma importancia. En ella se resumen varias propiedades importantes que se tienen en $\eta(e)$, cuando se trabaja sobre un grupo topológico G con elememento identidad e; de hecho, esta familia se caracteriza completamente. Ésta es una de las peculiaridades que distinguen a los grupos topológicos de los espacios topológicos arbitrarios. Además, dicha proposición nos proporciona un método para definir topologías de grupos topológicos.

3.7. Proposición. *Sea G un grupo topológico de Hausdorff con elemento identidad e. Entonces existe una base local $\mathscr{V}$ para e, tal que cumple las siguientes condiciones.*

(1) $\bigcap \mathscr{V} = \{e\}$;
(2) *si U, V son dos elementos arbitrarios de $\mathscr{V}$, entonces existe $W \in \mathscr{V}$ tal que $W \subseteq U \cap V$;*
(3) *para cada $U \in \mathscr{V}$, existe $V \in \mathscr{V}$ tal que $V \cdot V^{-1} \subseteq U$;*
(4) *para cada $U \in \mathscr{V}$ y para cada $x \in U$, existe $V \in \mathscr{V}$ con $x \cdot V \subseteq U$;*
(5) *para cada $U \in \mathscr{V}$ y $x \in G$, existe $V \in \mathscr{V}$ con $x \cdot V \cdot x^{-1} \subseteq U$.*

Recíprocamente, si tenemos un grupo G y una familia $\mathscr{V}$ no vacía de subconjuntos de G que contienen a e, tales que se satisface las condiciones del (1) al (5) para $\mathscr{V}$, entonces cada una de las familias $\{x \cdot U : U \in \mathscr{V}$ y $x \in G\}$ y $\{U \cdot x : U \in \mathscr{V}$ y $x \in G\}$ es una base para una topología de grupo τ para G. Además, $\mathscr{V}$ es una base local para e en (G, τ). □

2. Grupos booleanos

Consideremos el grupo $G = ([\omega]^{<\omega}, \Delta)$, los subconjuntos finitos de ω con la diferencia simétrica como operación de grupo. Este grupo con esta operación nos resulta un *grupo booleano* (es decir, todo elemento que no sea el neutro del grupo tiene orden 2) con elemento neutro $\emptyset$. A este grupo, le podemos introducir de una manera natural una clase de topologías que hacen de G un grupo topológico, como sigue.

Sea $\mathscr{I}$ un ideal sobre ω, para cada $I \in \mathscr{I}$ consideremos el conjunto $\mathscr{I}_I = \{a \in [\omega]^{<\omega} : a \cap I \neq \emptyset\}$, y denotemos por $\mathscr{I}^{<\omega}$ al ideal sobre $[\omega]^{<\omega}$, generado por los conjuntos $\mathscr{I}_I$ con $I \in \mathscr{I}$, esto es, $\mathscr{I}^{<\omega} = \{A \subseteq [\omega]^{<\omega} :$ existe $I \in \mathscr{I}$ tal que $I \cap a \neq \emptyset$ para toda $a \in A\}$. Ahora bien, haciendo al filtro dual de $\mathscr{I}^{<\omega}$ una base de vecindades de $\emptyset$, introducimos una topología $\tau_{\mathscr{I}}$ sobre G, que hace de G un grupo topológico. Ahora, es fácil ver que $(G, \tau_{\mathscr{I}})$ es Hausdorff si y sólo si $\mathscr{I}$ es libre (es decir, $\bigcup \mathscr{I} = \omega$). Ahora, dado que para nosotros todo ideal $\mathscr{I}$ contiene a Fin, entonces $\mathscr{I}$ es libre y en consecuencia $\tau_{\mathscr{I}}$ será siempre Hausdorff.

El estudio del ideal $\mathscr{I}^{<\omega}$ bajo la propiedad de Fréchet, lo hacen E. Reznichenko y O. Sipacheva en [**1999**], aunque ellos lo abordan en términos de que un filtro $\mathscr{F}$ sobre ω tenga la propiedad de *Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos* (FUF), tal propiedad es denotada en la literatura también por $\mathrm{FU}_{\mathrm{fin}}$ (véase G. Gruenhage y P.J. Szeptycki [**2005**]). La noción FUF había aparecido ya antes en la literatura con A. Dow J. Steprāns en [**1992**] bajo el nombre “groupwise Fréchet”, pero el primer estudio sistemático de esta noción lo hacen E. Reznichenko y O. Sipacheva en [**1999**].

Antes de comenzar el estudio de $\mathscr{I}^{<\omega}$, cabe mencionar el siguiente resultado.

3.8. Proposición. *Todo grupo booleano numerable es isomorfo a* $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$.

Demostración. Para esto, simplemente notemos que todo grupo booleano es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$, luego si este grupo es numerable, entonces este espacio tendrá la misma dimensión que $([\omega]^{<\omega}, \Delta)$, por lo que ambos espacios tendrán que ser isomorfos como espacios vectoriales, entonces en particular también lo tendrán que ser como grupos. □

Demos ahora algunas relaciones que existen entre $\mathscr{I}^{<\omega}$ y $\tau_{\mathscr{I}}$.

3.9. Proposición. *Sea $\mathscr{I}$ un ideal (libre) sobre ω, entonces se tiene que:*

(1) *$\tau_{\mathscr{I}}$ hace de G un grupo topológico.*
(2) *$cof(\mathscr{I}) = cof(\mathscr{I}^{<\omega})$, luego $\tau_{\mathscr{I}}$ es primero numerable (equivalentemente, metrizable) si y sólo si $cof(\mathscr{I}) = \omega$.*
(3) *$\tau_{\mathscr{I}}$ es Fréchet si y sólo si $\mathscr{I}^{<\omega}$ es Fréchet.*

Demostración. (1) Para esto, empecemos con notar que el filtro dual de $\mathscr{I}^{<\omega}$ es justamente $\mathscr{F}^{<\omega} = \{A \subseteq [\omega]^{<\omega} \colon \text{existe } F \in \mathscr{F} \text{ tal que } [F]^{<\omega} \subseteq A\}$, donde $\mathscr{F} = \mathscr{I}^*$. Así, el filtro $\mathscr{F}^{<\omega}$ está siendo generado por los conjuntos de la forma $[F]^{<\omega}$, con $F \in \mathscr{F}$. Ahora, es imediato ver que la familia $\mathscr{V} = \{[F]^{<\omega} \colon F \in \mathscr{F}\}$, satisface las condiciones de la Proposición 3.7, por lo que entonces $\tau_{\mathscr{I}}$ hace de G un grupo topológico.

(2) Para esto, notemos que si $\mathscr{J}$ es un subconjunto cofinal de $\mathscr{I}$, entonces los conjuntos de la forma $\mathscr{I}_J$ para $J \in \mathscr{J}$ forman un subconjunto cofinal de $\mathscr{I}^{<\omega}$, de aquí que $\mathrm{cof}(\mathscr{I}^{<\omega}) \leqslant \mathrm{cof}(\mathscr{I})$.

Para la otra desigualdad, notemos que podemos identificar al ideal $\mathscr{I}$ con $\mathscr{I}^{<\omega} \upharpoonright [\omega]^1$. Así, si $\mathscr{A}$ es un subconjunto cofinal de $\mathscr{I}^{<\omega}$, entonces $\mathscr{A} \upharpoonright [\omega]^1$ formará un subconjunto cofinal de $\mathscr{I}^{<\omega} \upharpoonright [\omega]^1$, de aquí que $\mathrm{cof}(\mathscr{I}) \leqslant \mathrm{cof}(\mathscr{I}^{<\omega})$. Por lo tanto, $\mathrm{cof}(\mathscr{I}) = \mathrm{cof}(\mathscr{I}^{<\omega})$.

Finalmente, de esto último y del Teorema 3.1, se sigue entonces la otra parte de este inciso.

(3) Sea $X \in (\mathscr{I}^{<\omega})^+$, entonces para cada $I \in \mathscr{I}$ existe $a \in X$ con $I \cap a = \emptyset$. Equivalentemente, para cada $F \in \mathscr{F}$ existe $a \in X$ con $a \subseteq F$, donde $\mathscr{F} = \mathscr{I}^*$. Así, $X \cap [F]^{<\omega} \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathscr{F}$. Luego, por definición de $\tau_{\mathscr{I}}$, $\emptyset \in \overline{X}$. Ahora, por ser $\tau_{\mathscr{I}}$ Fréchet, existe $C \in [X]^\omega$ tal que $C \to \emptyset$, por lo que entonces $C \in (\mathscr{I}^{<\omega})^\perp$.

En el otro sentido, sea $X \subseteq [\omega]^{<\omega}$ tal que $\emptyset \in \overline{X}$. Entonces $X \cap [F]^{<\omega} \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathscr{F}$ ($\mathscr{F} = \mathscr{I}^*$). Esto quiere decir que $X \in (\mathscr{I}^{<\omega})^+$, luego por ser $\mathscr{I}^{<\omega}$ Fréchet, existe $C \in [X]^\omega$ tal que $C \in (\mathscr{I}^{<\omega})^\perp$, de donde, $C \to \emptyset$. $\square$

Veamos a continuación algunas relaciones que hay entre $\mathscr{I}$ y $\mathscr{I}^{<\omega}$ en correlación con la propiedad de Fréchet y las α_i-propiedades.

3.10. Proposición. *Sea $\mathscr{I}$ un ideal sobre ω. Si $\mathscr{I}^{<\omega}$ es Fréchet o α_i para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, entonces también $\mathscr{I}$ es Fréchet o α_i para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ respectivamente.*

Demostración. Para ver esto, como podemos identificar al ideal $\mathscr{I}$ con $\mathscr{I}^{<\omega} \upharpoonright [\omega]^1$, y dado que la atomización $[\omega]^1 \in (\mathscr{I}^{<\omega})^+$, entonces la propiedad de ser Fréchet o α_i para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ del ideal $\mathscr{I}^{<\omega}$, será heredada también a $\mathscr{I}^{<\omega} \upharpoonright [\omega]^1$, y en consecuencia a $\mathscr{I}$. $\square$

Veamos ahora que las propiedades α_4, α_3 y α_2 coinciden en $\mathscr{I}^{<\omega}$. Este resultado fue dado por P. J. Nyikos en [**1992**], así como otras consecuencias relativas a los ideales $\mathscr{I}^{<\omega}$ y $\mathscr{I}$. Estos resultados los engloba nuestro siguiente teorema y, para esto, necesitaremos del siguiente lema.

3.11. Lema. *Sea $\mathscr{I}$ un ideal sobre ω, entonces $X \in (\mathscr{I}^{<\omega})^{\perp}$ si y sólo si $\bigcup X \in \mathscr{I}^{\perp}$ y X es localmente finito, esto es, $\{x \in X : n \in x\}$ es finito para cada $n \in \omega$.*

Demostración. Sea $X \in (\mathscr{I}^{<\omega})^{\perp}$ e $I \in \mathscr{I}$ dado, como $\mathscr{I}_I \in \mathscr{I}^{<\omega}$ entonces $X \cap \mathscr{I}_I = \{x \in X : x \cap I \text{ es finito}\}$ es finito, luego $(\bigcup X) \cap I$ es finito. Así, $\bigcup X \in \mathscr{I}^{\perp}$, ahora para ver que X es localmente finito, notemos que para cada $n \in \omega$ se tiene que $\{n\} \in \mathscr{I}$, luego $\mathscr{I}_{\{n\}} = \{a \in [\omega]^{<\omega} : n \in a\} \in \mathscr{I}^{<\omega}$, entonces $X \cap \mathscr{I}_{\{n\}}$ es finito, es decir, $\{x \in X : n \in x\}$ es finito, luego X es localmente finito.

En el otro sentido, sea $X \in [\omega]^{<\omega}$ localmente finito con $\bigcup X \in \mathscr{I}^{\perp}$. Para ver que $X \in (\mathscr{I}^{<\omega})^{\perp}$, es suficiente con probar que $X \cap \mathscr{I}_I$ es finito para cada $I \in \mathscr{I}$. Pues bien, sea $I \in \mathscr{I}$ entonces para $X \cap \mathscr{I}_I = \{x \in X : x \cap I \text{ es finito}\}$ tenemos que $(\bigcup X) \cap I \subseteq \bigcup (X \cap \mathscr{I}_I)$, pero $(\bigcup X) \cap I$ es finito y dado que X es localmente finito, entonces $X \cap \mathscr{I}_I$ debe ser finito. Por lo tanto $X \in (\mathscr{I}^{<\omega})^{\perp}$. □

3.12. Teorema (Nyikos [**1992**]). *Sea $\mathscr{I}$ un ideal sobre ω, entonces:*

(1) *$\mathscr{I}^{<\omega}$ es α_1 si y sólo si $\mathscr{I}$ es α_1.*
(2) *α_4 es equivalente a α_2 para $\mathscr{I}^{<\omega}$.*
(3) *Si $\mathscr{I}^{<\omega}$ es Fréchet, entonces $\mathscr{I}^{<\omega}$ es α_2.*

Demostración. (1) Una de las implicaciones ya fué observada anteriormente en la Proposición 3.10, por lo que sólo una implicación requiere de prueba.

Así, supongamos que el ideal $\mathscr{I}$ es α_1, y tomemos $\langle X_n : n \in \omega \rangle \subseteq (\mathscr{I}^{<\omega})^{\perp} \setminus \mathrm{Fin}([\omega]^{<\omega})$. Hagamos $I_n = \bigcup X_n$ para cada $n \in \omega$, luego por el Lema 3.11, se sigue que $\langle I_n : n \in \omega \rangle \subseteq \mathscr{I}^{\perp}$ y que X_n es localmente finito para cada $n \in \omega$, deduciendose de esto último en particular, que I_n es infinito para cada $n \in \omega$. Y dado que $\mathscr{I}$ es α_1, entonces existe $I \in \mathscr{I}^{\perp}$ tal que $I_n \subseteq^* I$ para toda $n \in \omega$. Ahora, dado que X_n es localmente finito, obtenemos por un lado que $\{x \in X_n : x \cap n \neq \emptyset\}$ es finito, y por el otro que $x \subset I$ para toda $x \in X_n$ salvo una cantidad finita. Así, definiendo $X'_n = \{x \in X_n : x \subset I \text{ y } x \cap n = \emptyset\}$ para cada $n \in \omega$, obtenemos que $X_n \subseteq^* X'_n$ para cada $n \in \omega$. Pues bien, hagamos $X = \bigcup_{n \in \omega} X'_n$, luego $\bigcup X \subseteq I$, por lo que $\bigcup X \in \mathscr{I}^{\perp}$. Por otro lado, por la manera en que se definieron los X'_n's, es fácil ver que X es localmente finito, luego por el Lema 3.11, se obtiene que $X \in (\mathscr{I}^{<\omega})^{\perp}$. Ahora, es claro que $X_n \subseteq^* X$ para cada $n \in \omega$. Por lo tanto, $\mathscr{I}^{<\omega}$ es α_1.

(2) Una de las implicaciones es clara.

Así, supongamos que $\mathscr{I}^{<\omega}$ es α_4, y tomemos $\langle X_n \colon n \in \omega \rangle \subseteq (\mathscr{I}^{<\omega})^{\perp} \setminus \mathrm{Fin}([\omega]^{<\omega})$. Fijando una enumeración de X_n, digamos $X_n = \{x_n(k) \colon k \in \omega\}$, para cada $n \in \omega$, definamos $y_n(k) = \bigcup_{m \leqslant n} x_m(k)$ para $\langle n, k \rangle \in \omega \times \omega$, luego hagamos $Y_n = \{y_n(k) \colon k \in \omega\}$ para cada $n \in \omega$. Así, aplicando el Lema 3.11, se obtiene que $\langle Y_n \colon n \in \omega \rangle \subseteq (\mathscr{I}^{<\omega})^{\perp} \setminus \mathrm{Fin}([\omega]^{<\omega})$, luego como $\mathscr{I}^{<\omega}$ es α_4, entonces existe $Y \in (\mathscr{I}^{<\omega})^{\perp}$ tal que $Y \cap Y_n \neq \emptyset$ para una infinidad de n's. Entonces, para cada $n \in \omega$, podemos elegir k_n tal que $x_n(k_n)$ sea un subconjunto de algún $y(l_n) \in Y$, y de tal manera que los l_n's sean distintos. Ahora, por Lema 3.11, sabemos que $\bigcup Y \in \mathscr{I}^{\perp}$ y que Y es localmente finito, luego $X = \{x_n(k_n) \colon n \in \omega\}$ también es localmente finito, y dado que $\bigcup X \subseteq \bigcup Y$ entonces también tenemos que $\bigcup X \in \mathscr{I}^{\perp}$. Así, aplicando nuevamente el Lema 3.11, obtenemos que $X \in (\mathscr{I}^{<\omega})^{\perp}$, el cual cumple por definición que $X \cap X_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$. Por lo tanto, $\mathscr{I}^{<\omega}$ es α_2.

(3) Supongamos que $\mathscr{I}^{<\omega}$ es Fréchet, entonces por la Proposición 3.9 inciso (3), se tiene que $\tau_{\mathscr{I}}$ es Fréchet, luego por el Teorema 3.6, obtenemos que $\tau_{\mathscr{I}}$ es α_4, es decir, $\mathscr{I}^{<\omega}$ es α_4. Así, aplicando el inciso anterior de este teorema, se obtiene que $\mathscr{I}^{<\omega}$ es α_2. $\square$

3. γ-conjuntos y espacios $C_p(X)$ Fréchet

Para un espacio topológico X denotemos por $C(X)$ al conjunto de todas las funciones continuas sobre X con valores reales. Sea $\mathscr{F}$ una colección de subconjuntos de X. Para $f \in C(X)$, $F \in \mathscr{F}$ y $\varepsilon > 0$ definimos $U(f, F, \varepsilon) = \{g \in C(X) \colon |g(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ para toda } x \in F\}$. La topología $\tau(\mathscr{F})$ sobre $C(X)$ generada por la familia $\{U(f, F, \varepsilon) \colon f \in C(X), F \in \mathscr{F} \text{ y } \varepsilon > 0\}$ como una subbase es llamada la *topología de convergencia uniforme* sobre $\mathscr{F}$. La topología de convergencia uniforme sobre subconjuntos finitos de X es llamada la *topología de convergencia puntual* sobre $C(X)$, o simplemente la *topología puntual* sobre $C(X)$.

Usamos $C_p(X)$ para denotar al espacio $C(X)$ equipado con la topología de convergencia puntual. Ahora no es difícil ver que la topología puntual sobre $C(X)$ es precisamente la topología de $C(X)$ heredada de $\mathbb{R}^X$, donde la topología que se esta considerando en $\mathbb{R}^X$ es la topología producto (de Tychonoff).

Para cada espacio X y cualquier familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X que contenga a todos los subconjuntos finitos de X, el espacio $\langle C(X), \tau(\mathscr{F}) \rangle$ es tanto un espacio vectorial topológico (localmente convexo) como un anillo topológico. En particular, $C_p(X)$ tiene estas propiedades.

Ahora bien, analizemos la propiedad de Fréchet en la clase de espacios $C_p(X)$ junto con una propiedad de cubiertas de X que a continuación definimos.

3.13. DEFINICIÓN. Sea X un conjunto (o un espacio) infinito y $\mathscr{U}$ una colección de conjuntos.

- Decimos que $\mathscr{U}$ es una *ω-cubierta* de X, si para cada $F \in [X]^{<\omega}$ existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $F \subseteq U$.
- Decimos que $\mathscr{U}$ es una *γ-cubierta* de X, si para cada $x \in X$, $x \in U$ para toda $U \in \mathscr{U}$ salvo una cantidad finita de U's.

Ahora, decimos que X es un *γ-espacio*, si cada ω-cubierta abierta de X admite una γ-subcubierta numerable. En caso de que $X \subseteq \mathbb{R}$ (o en lugar de $\mathbb{R}$ un espacio métrico separable), decimos que es un *γ-conjunto*, si este es un γ-espacio.

3.14. PROPOSICIÓN. *Sea X un espacio topológico, entonces X^n es Lindelöf para cada $n \in \omega$ si y sólo si toda ω-cubierta abierta de X admite una ω-subcubierta numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X^n es Lindelöf para cada $n \in \omega$ y sea $\mathscr{U}$ una ω-cubierta abierta de X. Del hecho de que $\mathscr{U}$ es una ω-cubierta abierta de X, no es difícil ver que

$$\mathscr{U}^n = \{U^n \colon U \in \mathscr{U}\}$$

es una cubierta abierta de X^n para cada $n \in \omega$. Ahora como para cada $n \in \omega$, X^n es Lindelöf, entonces existe $\mathscr{U}_n \subseteq \mathscr{U}$ contable tal que $\mathscr{U}_n^n$ es una cubierta abierta de X^n, luego entonces $\mathscr{V} = \bigcup_{n\in\omega} \mathscr{U}_n$ forma una ω-subcubierta numerable de $\mathscr{U}$.

Para el otro sentido, sea $\mathscr{W}$ una cubierta abierta de X^n, hagamos

$$\begin{aligned}\mathscr{U} = \{U \subset X \colon & U \text{ es abiero en } X \text{ y } U^n \text{ puede ser cubierto} \\ & \text{con una cantidad finita de elementos de } \mathscr{W}\}.\end{aligned}$$

Es inmediato ver que $\mathscr{U}$ forma una ω-cubierta abierta de X, luego existe $\mathscr{V}$ una ω-subcubierta numerable de $\mathscr{U}$, entonces $\mathscr{V}^n$ es una cubierta abierta de X^n y de aquí se sigue fácilmente que $\mathscr{W}$ admite una subcubierta contable. □

De aquí se obtiene en particular que un espacio segundo numerable X es un γ-espacio, si cada ω-cubierta abierta numerable de X admite una γ-subcubierta.

Por otro lado, recordemos que un espacio X es llamado un *P-espacio*, si cualquier intersección contable de abiertos en X también es un abierto en X. Entonces tenemos lo siguiente.

3.15. PROPOSICIÓN. (1) *Si X es un espacio topológico con $|X| = \omega$, entonces X es un γ-espacio.*
(2) *Si X es Lindelöf y P-espacio, entonces X es un γ-espacio.*

Demostración. (1) Supongamos que X es un espacio topológico con $|X| = \omega$ y sea $\mathscr{U}$ una ω-cubierta abierta de X. Tomemos $X = \{x_n : n \in \omega\}$ una enumeración del espacio X, como $\mathscr{U}$ es una ω-cubierta abierta de X entonces para cada $n \in \omega$ podemos fijar una $U_n \in \mathscr{U}$ de tal manera que $\{x_m : m < n\} \subseteq U_n$. Entonces claramente $\mathscr{V} = \{U_n : n \in \omega\}$ forma una γ-subcubierta numerable de $\mathscr{U}$.

(2) Supongamos que X es un espacio Lindelöf y sea $\mathscr{U}$ una ω-cubierta abierta de X. Como el producto finito de P-espacios Lindelöf es también Lindelöf, entonces por la Proposición 3.14 se sigue que $\mathscr{U}$ admite una ω-subcubierta numerable. Así, podemos suponer sin pérdidad de generalidad que $\mathscr{U}$ es numerable. Ahora bien, para cada $x \in X$ sea

$$V_x = \bigcap\{U \in \mathscr{U} : x \in U\},$$

entonces $\{V_x : x \in X\}$ forma una cubierta abierta del P-espacio Lindelöf X. Elegimos de esta cubierta una subcubierta contable $\{V_{x_n} : n \in \omega\}$ y entonces para cada $n \in \omega$ elegimos $U_n \in \mathscr{U}$ de tal manera que $\{x_m : m < n\} \subseteq U_n$. Así, $\{U_n : n \in \omega\}$ es una γ-subcubierta numerable de $\mathscr{U}$. □

3.16. Teorema (Gerlits y Nagy [**1982**]). *Sea X un espacio topológico, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *$C_p(X)$ es Fréchet y α_2.*
(2) *$C_p(X)$ es Fréchet.*
(3) *X es un γ-espacio.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Es clara.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $\mathscr{U}$ una ω-cubierta abierta de X y hagamos

$$A = \{f \in C_p(X) : \text{existe } U \in \mathscr{U} \text{ tal que } \{x \in X : |f(x)| < 1\} \subseteq U\}.$$

Notemos que $\mathbf{0} \in \overline{A}$ (la cerradura tomada en $C_p(X)$), donde $\mathbf{0}$ denota a la función identicamente cero. En efecto, si $U(F, \varepsilon)$ es un abierto básico alrededor de $\mathbf{0}$ en $C_p(X)$, tomemos una $U \in \mathscr{U}$ con $F \subseteq U$, y como los espacios que estamos considerando son almenos Tychonoff, tomemos también una $f \in C_p(X)$ con $0 \leqslant f \leqslant 1$ tal que $f \restriction F \equiv 0$ y $f \restriction X \setminus U \equiv 1$, luego entonces $f \in U(F, \varepsilon) \cap A$. Ahora, como $C_p(X)$ es Fréchet, existe una sucesión $\langle f_n \rangle_{n \in \omega} \subseteq A$ convergente a $\mathbf{0}$. Entonces para cada $n \in \omega$ elegimos $U_n \in \mathscr{U}$ tal que $\{x \in X : |f_n(x)| < 1\} \subseteq U_n$, luego $\{U_n : n \in \omega\}$ forma una γ-subcubierta numerable de $\mathscr{U}$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Dado que $C_p(X)$ es en particular un grupo topológico, para ver que $C_p(X)$ es Fréchet y α_2, es suficiente con probar que $C_p(X)$ es Fréchet y α_2 en $\mathbf{0}$.

Por otro lado, notemos que un espacio X es Fréchet y α_2 en un punto $x \in X$ si y sólo si para cada sucesión $\langle A_n \rangle_{n\in\omega}$ con $A_n \subseteq X$ y $x \in \overline{A_n}$ para cada $n \in \omega$, existe una sucesión $\langle x_n \rangle_{n\in\omega}$ convergente a x tal que $x_n \in A_n$ para cada $n \in \omega$. De aquí que esta propiedad se le conosca también como la *propiedad de la sucesión diagonal*.

Ahora bien, veamos que para la propiedad de ser γ-espacio, tenemos algo análogo a lo anterior.

Afirmación. X es un γ-espacio si y sólo si para cada sucesión $\langle \mathscr{U}_n \rangle_{n\in\omega}$ de ω-cubiertas abiertas de X, existe $U_n \in \mathscr{U}_n$ para cada $n \in \omega$ tal que $\{U_n : n \in \omega\}$ forma una γ-cubierta de X.

Demostración de la afirmación. Una implicación es clara. Así que supongamos que X es un γ-espacio y sea $\langle \mathscr{U}_n \rangle_{n\in\omega}$ una sucesión de ω-cubiertas abiertas de X. Dado que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathscr{U}_{n+1}$ es un refinamiento de $\mathscr{U}_n$ para cada $n \in \omega$, entonces es suficiente con probar que existe una subsucesión infinita $\langle n_k : k \in \omega \rangle$ y una sucesión $U_k \in \mathscr{U}_{n_k}$ tal que $\{U_k : k \in \omega\}$ sea una γ-cubierta de X.

Pues bien, sea $\{x_n : n \in \omega\}$ la enumeración de un subconjunto infinito de X, y hagamos

$$\mathscr{V}_n = \{U \setminus \{x_n\} : U \in \mathscr{U}_n\} \quad \text{y} \quad \mathscr{V} = \bigcup_{n\in\omega} \mathscr{U}_n.$$

Es claro que $\mathscr{V}$ es una ω-cubierta abierta de X, luego existe una sucesión $V_k \in \mathscr{V}$ tal que $\{V_k : k \in \omega\}$ forma una γ-cubierta de X. Ahora bien, para cada $k \in \omega$ existe una $n_k \in \omega$ y un abierto U_k tal que $V_k \subseteq U_k \in \mathscr{U}_{n_k}$. Ahora, si $n \in \omega$ y $\{x_m : m < n\} \subseteq V_k$ entonces $n_k > n$, luego $\{n_k : k \in \omega\}$ es infinito. □

Con ayuda de esta última afirmación probemos entonces que $C_p(X)$ tiene la propiedad de la sucesión diagonal. En efecto, sea $\langle A_n \rangle_{n\in\omega}$ una sucesión de subconjuntos de $C_p(X)$ tal que $\mathbf{0} \in \overline{A_n}$ para cada $n \in \omega$. Hagamos para cada $n \in \omega$

$$\mathscr{U}_n = \{\{x \in X : |f(x)| < 2^{-n}\} : f \in A_n\}.$$

Como claramente $\mathbf{0} \in \overline{A_n}$ y $A_n \subseteq C_p(X)$, entonces $\mathscr{U}_n$ es una ω-cubierta abierta de X para toda $n \in \omega$. De la afirmación anterior se sigue que existe una sucesión $U_n \in \mathscr{U}_n$ tal que $\{U_n : n \in \omega\}$ forma una γ-cubierta de X. Ahora, si $U_n = \{x \in X : |f_n(x)| < 2^{-n}\}$ con $f_n \in U_n$, entonces la sucesión $\langle f_n \rangle_{n\in\omega}$ converge a $\mathbf{0}$. □

3.17. Corolario. *Si existe un espacio X con $C_p(X)$ Fréchet y separable, entonces existe un γ-conjunto.*

Demostración. Supongamos que existe un espcio X tal que $C_p(X)$ es Fréchet y separable, luego según el Teorema 3.16, X es un γ-espacio.

Por otro lado, $C_p(X)$ es separable si y sólo si X admite una topología más débil segundo numerable.[1] Como nuestros espacios son almenos Tychonoff, entonces por el teorema de metrización de Urysohn, se sigue que X admite una topología más débil que es metrizable y separable.

Así, como X es un γ-espacio, entonces el espacio X con esta topología más débil será también un γ-espacio y por ende un γ-conjunto. $\square$

Por otro lado, recordemos que un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ es de *medida fuerte cero* (SMZ por sus siglas en inglés), si para cada sucesión de reales positivos $\langle \varepsilon_n \colon n \in \omega \rangle$, existe una sucesión de intervalos $\langle I_n \colon n \in \omega \rangle$ tal que $l(I_n) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$ y $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$. Pues bien, tenemos lo siguiente.

3.18. Proposición. *Todo γ-conjunto es SMZ.*

Demostración. Sea X un γ-conjunto y $\langle \varepsilon_n \colon n \in \omega \rangle$ una sucesión de reales positivos, entonces para cada $n \in \omega$, consideremos la familia $\mathscr{F}_n$, la cual está formada por colecciones finitas de intervalos, F, tales que $\{l(I) \colon I \in F\} = \{\varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_{n+|F|-1}\}$. Así, haciendo $\mathscr{U}_n = \{\bigcup F \colon F \in \mathscr{F}_n\}$ para cada $n \in \omega$, obtenemos claramente una sucesión $\langle \mathscr{U}_n \colon n \in \omega \rangle$ de ω-cubiertas de X, luego por la afirmación dada en la demostración del Teorema 3.16, existe $U_n \in \mathscr{U}_n$ para cada $n \in \omega$ de tal manera que $\{U_n \colon n \in \omega\}$ forma una γ-cubierta de X.

Ahora bien, del hecho de que $U_n \in \mathscr{U}_n$ para cada $n \in \omega$, podemos encontrar recursivamente, una sucesión estrictamente creciente $\langle n_k \colon k \in \omega \rangle \subseteq \omega$ y una sucesión de intervalos $\langle I_n \colon n \in \omega \rangle$ tales que:

(1) $U_0 = \bigcup_{n \leqslant n_0} I_n$, y $U_{n_k+1} = \bigcup_{n_k < n \leqslant n_{k+1}} I_n$ para cada $k \in \omega$;
(2) $l(I_n) = \varepsilon_n$ para toda $n \in \omega$.

Como $\{U_n \colon n \in \omega\}$ es una γ-cubierta de X, entonces también lo es $\{U_{n_k+1} \colon k \in \omega\}$, de donde $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$, y por (2), se concluye que X es SMZ. $\square$

Ahora bien, R. Laver en [**1976**] demuestra la consistencia de la conjetura de Borel, es decir, es consistente con **ZFC** que todo conjunto SMZ es numerable, de donde obtenemos lo siguiente.

3.19. Corolario. *Es consistente con* **ZFC** *que no haya γ-conjuntos no numerables.* $\square$

Así, esto último en combinación con el Corolario 3.17, nos dice que en **ZFC** no encontraremos un ejemplo a la pregunta de Malykhin (en la versión separable) del tipo $C_p(X)$. Sin embargo, si se tiene la consistencia de que haya γ-conjuntos no numerables, más aun, se tiene lo siguiente.

[1] Véase por ejemplo el Teorema I.1.5 en A. V. Arhangel'skiĭ [**1992**].

3.20. Teorema (Gerlits y Nagy [**1982**]). **MA** + ¬**CH** *implica que todo conjunto* $X \subseteq \mathbb{R}$ *con* $|X| = \omega_1$ *es un* γ*-conjunto.*

Demostración. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ con $|X| = \omega_1$, y $\mathscr{U}$ una ω-cubierta numerable de X. Definamos el siguiente orden parcial $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$, los elementos de $\mathbb{P}$, son parejas $p = \langle F, \mathscr{F} \rangle$, donde $F \in [X]^{<\omega}$ y $\mathscr{F} \in [\mathscr{U}]^{<\omega}$. Ahora, si $p = \langle F, \mathscr{F} \rangle$ y $p' = \langle F', \mathscr{F}' \rangle$ son elementos de $\mathbb{P}$, ponemos $p' \leqslant p$ si y sólo si $F \subseteq F'$, $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$ y $F \subseteq U$ para cada $U \in \mathscr{F}' \setminus \mathscr{F}$.

Por otro lado, es fácil ver que $\mathbb{P}_U = \{\langle F, \mathscr{F} \rangle \in \mathbb{P} \colon F \subseteq U\}$ es centrado para cada $U \in \mathscr{U}$, y dado que $\mathbb{P} = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} \mathbb{P}_U$, entonces $\mathbb{P}$ es σ-centrado y en consecuencia ccc, luego haciendo $D_x = \{\langle F, \mathscr{F} \rangle \in \mathbb{P} \colon x \in F\}$ y $D_U = \{\langle F, \mathscr{F} \rangle \in \mathbb{P} \colon U \in \mathscr{F}\}$ para cada $x \in X$ y cada $U \in \mathscr{U}$, obtenemos una familia $\mathscr{D}$ de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ de tamaño ω_1. Así, por **MA** + ¬**CH**, existe $G \subseteq \mathbb{P}$ filtro $\mathscr{D}$-genérico, luego $\mathscr{V} = \bigcup \{\mathscr{F} : \text{existe } F \in [X]^{<\omega} \text{ tal que } \langle F, \mathscr{F} \rangle \in G\} \subseteq \mathscr{U}$ forma una γ-cubierta de X. □

De esto último en combinación con el Teorema 3.16, obtenemos un ejemplo consistente a la pregunta de Malykhin del tipo $C_p(X)$.

Para finalizar esta sección, mostremos la relación que existe entre un γ-conjunto $X \subseteq 2^\omega$ y el ideal $\mathrm{Br}(X)$ de la Sección 5 del Capítulo 2. Para esto, necesitaremos de una reducción en la definición de que un subconjunto X de 2^ω sea un γ-conjunto.

3.21. Lema. *Sea* $X \subseteq 2^\omega$*, entonces* X *es un* γ*-conjunto si y sólo si toda* ω*-cubierta numerable de* X *formada por conjuntos cerrados-y-abiertos de* 2^ω *admite una* γ*-subcubierta.*

Demostración. Supongamos que X es un γ-conjunto y sea $\mathscr{U}$ una ω-cubierta numerable de X formada por conjuntos cerrados-y-abiertos de 2^ω. Entonces $\mathscr{U} \restriction X$ forma una ω-cubierta abierta (de hecho también cerrada) de X, luego $\mathscr{U} \restriction X$ admite una γ-subcubierta de la forma $\mathscr{V} \restriction X$, donde $\mathscr{V}$ es una subcubierta de $\mathscr{U}$, y como $\mathscr{V} \restriction X$ es una γ-cubierta de X, entonces también $\mathscr{V}$ es una γ-cubierta de X.

Para el otro sentido, sea $\mathscr{U}$ una ω-cubierta abierta de X. Dado que 2^ω es un espacio separable 0-dimensional, entonces X admite un base numerable de la forma $\mathscr{B} \restriction X$, donde $\mathscr{B}$ es una colección numerable de conjuntos cerrados-y-abiertos de 2^ω. Así, como $\mathscr{U}$ es una ω-cubierta abierta de X, entonces para cada $F \in [X]^{<\omega}$, existen $U \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{F} \in [\mathscr{B}]^{<\omega}$ tales que $F \subseteq \bigcup \mathscr{F} \restriction X \subseteq U$. Haciendo $\mathscr{U}' = \{\bigcup \mathscr{F} : \mathscr{F} \in [\mathscr{B}]^{<\omega} \text{ y existe } U \in \mathscr{U} \text{ tal que } \bigcup \mathscr{F} \restriction X \subseteq U\}$, entonces $\mathscr{U}'$ es una ω-cubierta numerable de X formada por conjuntos cerrados-y-abiertos de 2^ω, luego $\mathscr{U}'$ admite una γ-subcubierta $\mathscr{V}'$. Ahora bien, para cada $V \in \mathscr{V}'$

fijemos una $U_V \in \mathscr{U}$ tal que $V \cap X \subseteq U_V$, entonces $\mathscr{V} = \{U_V : V \in \mathscr{V}'\}$ es una γ-subcubierta de $\mathscr{U}$. $\square$

3.22. Teorema (Nyikos [**1989**]). *Sea $X \subseteq 2^\omega$ e $\mathscr{I} = Br(X)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *$\mathscr{I}^{<\omega}$ es Fréchet.*
(2) *X es un γ-conjunto.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que $\mathscr{I}^{<\omega}$ es Fréchet, y sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una ω-cubierta de X formada por conjuntos cerrados-y-abiertos de 2^ω, para la cual podemos suponer que $X \not\subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$. Ahora, recordemos que los conjuntos de la forma $U(t) = \{f \in 2^\omega : t \subset f\}$ para $t \in 2^{<\omega}$ nos forman una base de cerrados-y-abiertos para 2^ω. Sea $V_n = 2^\omega \setminus U_n$ para cada $n \in \omega$, como V_n es cerrado-y-abierto en 2^ω, entonces por compacidad existe $B_n \in [2^{<\omega}]^{<\omega}$ tal que $V_n = \bigcup_{t \in B_n} U(t)$, cuya unión podemos suponer sin pérdida de generalidad que es ajena. Sea $A_n = \{t \in B_n : \text{ existe } x \in X \text{ tal que } t \subset x\}$, dado que $X \not\subseteq U_n$ para toda $n \in \omega$, entonces $A_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \omega$.

Pues bien, sea $Y = \{A_n : n \in \omega\}$, entonces $Y \in (\mathscr{I}^{<\omega})^+$. En efecto, sea $I \in \mathscr{I}$, entonces existe $F \in [X]^{<\omega}$ tal que $I \subseteq \bigcup_{x \in F} I_x$, donde recordemos que $I_x = \{x \restriction n : n \in \omega\}$. Ahora, existe $n \in \omega$ tal que $F \subset U_n$, entonces por definición de A_n obtenemos que $A_n \cap I_x = \emptyset$ para cada $x \in F$, luego $A_n \cap I = \emptyset$ y como $A_n \neq \emptyset$, se sigue entonces que $Y \in (\mathscr{I}^{<\omega})^+$. Así, como $\mathscr{I}^{<\omega}$ es Fréchet, entonces existe $C \in [Y]^\omega$, y por tanto $N \in [\omega]^\omega$, tal que $C = \{A_n : n \in N\} \in (\mathscr{I}^{<\omega})^\perp$.

Pues bien, $\{U_n : n \in N\}$ es una γ-cubierta de X. En efecto, sea $x \in X$, como $C \in (\mathscr{I}^{<\omega})^\perp$ entonces $C \cap \mathscr{I}_{I_x}$ es finito, es decir, $\{n \in N : A_n \cap I_x \neq \emptyset\}$ es finito, pero $\{n \in N : x \notin U_n\} \subseteq \{n \in N : A_n \cap I_x \neq \emptyset\}$, luego $x \in U_n$ para toda $n \in \omega$ salvo una cantidad finita. Así, por el Lema 3.21, se concluye entonces que X es un γ-conjunto.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que X es un γ-conjunto, y sea $Y \in (\mathscr{I}^{<\omega})^+$. Para cada $A \in Y$, definamos $V_A = \bigcup_{t \in A} U(t)$, luego V_A es un conjunto cerrado-y-abierto de 2^ω, y en consecuencia también lo es $U_A = 2^\omega \setminus V_A$. Así, $\{U_A : A \in Y\}$ forma una ω-cubierta de X. En efecto, sea $F \in [X]^{<\omega}$ e $I = \bigcup_{x \in F} I_x$, como $Y \in (\mathscr{I}^{<\omega})^+$, existe $A \in Y$ tal que $A \cap I = \emptyset$, entonces $x \notin V_A$ para toda $x \in F$, y por tanto $F \subset U_A$. Dado que X es un γ-conjunto, por el Lema 3.21, existe $C \subseteq Y$ tal que $\{U_A : A \in C\}$ forma una γ-cubierta de X. Ahora, usando nuevamente que $Y \in (\mathscr{I}^{<\omega})^+$, podemos asegurar que esta γ-cubierta es infinita, luego entonces C es infinito.

Pues bien, $C \in (\mathscr{I}^{<\omega})^\perp$. En efecto, sea $x \in X$, dado que $I_x \cap A \neq \emptyset$ implica $x \in V_A$, es decir, $x \notin U_A$, entonces $\{A \in C : A \cap I_x \neq \emptyset\} \subseteq \{A \in C : x \notin U_A\}$, y como $\{U_A \colon A \in C\}$ forma una γ-cubierta de X, se sigue entonces que $C \cap \mathscr{I}_{I_x}$ es finito, luego $C \in (\mathscr{I}^{<\omega})^{\perp}$. Así, $\mathscr{I}^{<\omega}$ es Fréchet. $\square$

4. Más ejemplos consistentes

3.23. PROPOSICIÓN. $\mathfrak{p} > \omega_1$ *implica la existencia de un grupo booleano numerable Fréchet no metrizable.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 3.9, es suficiente con probar por ejemplo, que bajo $\mathfrak{p} > \omega_1$ es posible encontrar un ideal $\mathscr{I}$ sobre ω tal que el ideal $\mathscr{I}^{<\omega}$ sea Fréchet pero que $\mathrm{cof}(\mathscr{I}) > \omega$.

Pues bien, tomemos un ideal $\mathscr{I}$ sobre ω con $\mathrm{cof}(\mathscr{I}) = \omega_1$. Dado que $\mathrm{cof}(\mathscr{I}^{<\omega}) = \mathrm{cof}(\mathscr{I}) < \mathfrak{p}$, entonces según la versión idealizada de (1) del Teorema 2.29, se tiene que el ideal $\mathscr{I}^{<\omega}$ es Fréchet. $\square$

3.24. TEOREMA (NYIKOS [**1992**]). $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ *implica la existencia de un grupo booleano numerable Fréchet no metrizable.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 3.9, es suficiente con probar por ejemplo, que bajo $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ es posible encontrar un ideal $\mathscr{I}$ sobre $\omega \times \omega$ tal que el ideal $\mathscr{I}^{<\omega}$ sea Fréchet pero que $\mathrm{cof}(\mathscr{I}) > \omega$.

Para esto, sea $\langle f_\alpha \colon \alpha < \mathfrak{b}\rangle$ una $\mathfrak{b}$-sucesión $<^*$-creciente de funciones no decrecientes en $\langle {}^\omega\omega, \leqslant^*\rangle$ no acotada. Ahora, para cada $\alpha < \mathfrak{b}$ consideremos $L_\alpha = \{\langle n, m\rangle \in \omega \times \omega \colon m < f_\alpha(n)\}$, y para cada $n \in \omega$, sea $C_n = \{n\} \times \omega$ (la n-ésima columna de $\omega \times \omega$).

Pues bien, sea $\mathscr{I}$ el ideal sobre $\omega \times \omega$ generado por la familia AD $\{f_\alpha \colon \alpha < \mathfrak{b}\} \cup \{C_n \colon n \in \omega\}$. Ahora, es fácil ver que $\mathrm{cof}(\mathscr{I}) > \omega$, y para ver que $\mathscr{I}^{<\omega}$ es Fréchet, sea $X \in (\mathscr{I}^{<\omega})^+$ y consideremos $X_\alpha = \{x \in X \colon x \subset L_\alpha\}$ para cada $\alpha < \mathfrak{b}$.

Afirmación. Existe $\alpha < \mathfrak{b}$ tal que $X_\alpha \in (\mathscr{I}^{<\omega})^+$.

Demostración de la afirmación. Supongamos lo contrario, entonces para cada $\alpha < \mathfrak{b}$ existen $F_\alpha \in [\alpha]^{<\omega}$ y $n_\alpha \in \omega$ tales que $x \cap (\bigcup_{\beta \in F_\alpha} f_\beta) \neq \emptyset$ para cada $x \in X_\alpha$ con $x \cap (n_\alpha \times \omega) = \emptyset$. Dado que la cofinalidad de $\mathfrak{b}$ es no numerable (ya que $\mathfrak{b}$ es regular) existe un subconjunto estacionario S_0 de $\mathfrak{b}$ tal que $|F_\alpha| = m$, digamos, para toda $\alpha \in S_0$. Aplicando el lema de Fodor a la función regresiva $r \colon S_0 \to \mathfrak{b}$, dada por $r(\alpha) = \mathrm{mín}\,(F_\alpha)$, se obtiene la existencia de un estacionario $S_1 \subseteq S_0$ y de un ordinal β_0 tal que $\beta_0 = \mathrm{mín}\,(F_\alpha)$ para toda $\alpha \in S_1$. Repitiendo este argumento m veces, se llega a un subconjunto estacionario S de $\mathfrak{b}$ tal que $F_\alpha = F$, digamos, para toda $\alpha \in S$.

Sea $Y = \{x \in X \colon x \cap f_\beta = \emptyset$ para toda $\beta \in F\}$, luego $Y \in (\mathscr{I}^{<\omega})^+$. Entonces para cada conjunto finito de columnas de $\omega \times \omega$, existe un elemento de Y que las evita, por lo que podemos definir $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq Y$ de tal manera que si $k_n = \text{mín}(\pi_1(x_n))$ entonces $k_n > \text{máx}(\pi_1(x_{n-1}))$. Sea h una función con dominio $\{k_n : n \in \omega\}$ tal que $h(k_n) > \text{máx}(\pi_2(x_n))$ para cada $n \in \omega$, entonces existe $\alpha \in S$ tal que $f_\alpha(k_n) > h(k_n)$ para una cantidad infinidad de n's, y dado que f_α es no decreciente, se sigue que $x_n \subset L_\alpha$ para una cantidad infinita de n's. Pero esto contradice que $F_\alpha = F$. $\square$

Una ves que hemos probado ya la afirmación anterior, consideremos $X^\beta = \{x \in X_\alpha : x \cap f_\beta = \emptyset\}$ para cada $\beta \leqslant \alpha$, y para cada $n \in \omega$, sea $X_n^\beta = \{x \in X^\beta : x \cap (n \times \omega) = \emptyset\}$. Dado que $X_\alpha \in (\mathscr{I}^{<\omega})^+$, entonces $\mathscr{X} = \{X_n^\beta : \beta \leqslant \alpha \text{ y } n \in \omega\}$ forma una familia de subconjuntos infinitos de $L_\alpha^{<\omega}$ con *pfif*, y como $|\alpha| < \mathfrak{p}$ (este en el único lugar donde se usa que $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$), entonces existe $C \subset L_\alpha^{<\omega}$ una pseudo intersección infinita de la familia $\mathscr{X}$. Ahora, es fácil ver que $\bigcup C \in \mathscr{I}^\perp$ y que C es localmente finito, luego por el Lema 3.11, se concluye que $C \in (\mathscr{I}^{<\omega})^\perp$. Por lo tanto $\mathscr{I}^{<\omega}$ es Fréchet. $\square$

CAPíTULO 4

El problema de Malykhin y definibilidad

1. Introducción

Dado que podemos identificar a cada subconjunto de ω (o cualquier conjunto numerable) con su función caraterística, entonces podemos identificar al conjunto potencia $\mathscr{P}(\omega)$ con el espacio de Cantor 2^ω. Ahora, dado que cada topología sobre ω es en particular un subconjunto de $\mathscr{P}(\omega)$, es claro entonces qué significa cuando decimos que τ sea cerrada, abierta, G_δ, Borel, analítica, etc. En este sentido, dado que los ejemplos consistentes a la pregunta de Malykhin que se conocen hasta el momento son todos ellos no definibles, entonces comenzamos este capítulo demostrando que no hay ejemplos definibles a esta pregunta de complejidad analítica.

Para esto, retomemos la noción de bisecuencialidad que introducimos en la Sección 1 del Capítulo 3.

Motivados por la Definición 3.4, decimos que un ideal $\mathscr{I}$ sobre ω es *bisecuencial*, si para cada ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre ω con $\mathscr{U} \cap \mathscr{I} = \emptyset$, existe una sucesión $\langle X_n \colon n \in \omega \rangle \subseteq \mathscr{U}$ tal que para toda $I \in \mathscr{I}$ existe $n \in \omega$ con $I \cap X_n = \emptyset$.

Por otro lado, decimos que $\mathscr{I}$ es *selectivo*, si satisface las siguientes dos condiciones:

- **p^+:** Para cada sucesión decreciente $\langle X_n \colon n \in \omega \rangle \subseteq \mathscr{I}^+$, existe $X \in \mathscr{I}^+$ tal que $X \subseteq^* X_n$ para cada $n \in \omega$.
- **q^+:** Para cada $X \in \mathscr{I}^+$ y toda partición $X = \bigcup_{n \in \omega} F_n$ de X en conjuntos finitos, existe $Y \subseteq X$ tal que $Y \in \mathscr{I}^+$ y $|Y \cap F_n| \leqslant 1$ para cada $n \in \omega$.

Es claro que todo espacio bisecuencial es tanto Fréchet como α_4, y como todo grupo topológico Fréchet es α_4 (veáse Teorema 3.6), entonces es natural preguntarnos qué relación pueden guardar estos espacios con los espacios bisecuenciales. Para la clase de espacios analíticos, tenemos una respuesta en un sentido, la cual nos permitirá dar en el Teorema 4.2 una respuesta parcial a la pregunta de Malyhin en el sentido negativo.

4.1. Lema. *Todo grupo topológico Fréchet numerable cuya topología sea analítica es bisicuencial.*

Demostración. Sea G un grupo topológico Fréchet numerable con elemento identidad e, cuya topología sea analítica. Por la homogeniedad de un grupo topológico, basta probar que G es bisecuencial en e, lo cual significa, traduciendo a nuestro lenguaje de ideales, que el ideal $\mathscr{I}_e$ sea bisecuencial. Para esto, como G es numerable, entonces de entrada podemos pensar a nuestro ideal $\mathscr{I}_e$ sobre ω.

Pues bien, empecemos viendo que el ideal $\mathscr{I}_e$ es selectivo. Para esto, como G es Fréchet y α_4 (por Teorema 3.6) en e, entonces $\mathscr{I}_e$ es tanto Fréchet como α_4. Así, tomemos una sucesión decreciente $\langle X_n \colon n \in \omega \rangle \subseteq \mathscr{I}_e^+$, luego como $\mathscr{I}_e$ es Fréchet, para cada $n \in \omega$ existe $I_n \in [X_n]^\omega$ tal que $I_n \in \mathscr{I}_e^\perp$, ahora haciendo una aplicación sencilla del lema de refinamiento ajeno, podemos suponer que los I_n's son ejenos por pares. Ahora, dado que $\mathscr{I}_e$ es α_4, entonces existe $I \in \mathscr{I}_e^\perp$ tal que $N = \{n \in \omega \colon I \cap I_n \neq \emptyset\}$ es infinito. Tomando una función de elección $f \colon N \to \bigcup_{n \in N}(I \cap I_n)$ y haciendo $X = \operatorname{ran}(f)$, obtenemos que $X \in \mathscr{I}_e^+$ y que $X \subseteq^* X_n$ para cada $n \in \omega$, es decir, $\mathscr{I}_e$ es p^+.

Para ver que $\mathscr{I}_e$ es q^+, tomemos $X \in \mathscr{I}_e^+$ y $X = \bigcup_{n \in \omega} F_n$ una partición de X en conjuntos finitos. Por ser $\mathscr{I}_e$ Fréchet, existe $I \in [X]^\omega$ tal que $I \in \mathscr{I}_e^\perp$, luego $N = \{n \in \omega \colon I \cap F_n \neq \emptyset\}$ es infinito, por lo que tomamos una función de elección $f \colon N \to \bigcup_{n \in \omega}(I \cap F_n)$ y hacemos $Y = \operatorname{ran}(f)$, teniendo entonces que $Y \in \mathscr{I}_e^+$ y $|Y \cap F_n| \leqslant 1$ para cada $n \in \omega$, es decir, $\mathscr{I}_e$ es q^+. Con esto concluimos que $\mathscr{I}_e$ es selectivo.

Para ver que $\mathscr{I}_e$ es bisecuencial, sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre ω tal que $\mathscr{U} \cap \mathscr{I}_e = \emptyset$, entonces definamos el siguiente juego topológico infinito. El juego $G(\mathscr{U}, \omega, \mathscr{I}_e^+)$, es jugado por dos jugadores, **I** y **II**. En el n-ésimo paso ($n \in \omega$), el jugador **I** elige un elemento $U_n \in \mathscr{U}$, y el jugador **II** elige un punto $x_n \in U_n$. **I** gana si el conjunto $\{x_n \colon n \in \omega\} \in \mathscr{I}_e$, en otro caso **II** gana. Teniendo entonces que:

- **I** tiene estrategia ganadora si y sólo si existe $T \subseteq [\omega]^{<\omega}$ un árbol de ramificación en $\mathscr{U}$ tal que $[T] \subseteq \mathscr{I}_e$.
- **II** tiene estrategia ganadora si y sólo si existe $T \subseteq [\omega]^{<\omega}$ un árbol de ramificación en $\mathscr{U}$ tal que $[T] \subseteq \mathscr{I}_e^+$.

Ahora bien, como $\mathscr{I}_e$ es selectivo, entonces **I** no tiene estrategia ganadora. En efecto, sea $T \subseteq [\omega]^{<\omega}$ un árbol de ramificación en $\mathscr{U}$, para el cual podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada $t \in T$ es estrictamente creciente. Dado que el ultrafiltro $\mathscr{U}$ es centrado, T es numerable y $\mathscr{I}_e$ es p^+, entonces existe $X \in \mathscr{I}_e^+$ tal que $X \subseteq^* \operatorname{suc}_T(t)$ para cada $t \in T$, en donde podemos suponer sin pérdida de generalidad que $X \subseteq \operatorname{suc}_T(\emptyset)$. Definamos recursivamente una función $g \colon \omega \to \omega$ estrictamente creciente tal que

$g(0) = 0$, y para $n \geqslant 1$, $g(n) = \text{mín}\{k \in \omega \colon k > g(n-1)$ y $X \setminus k \subseteq \text{suc}_T(t)$ para cada $t \in T$ con $\text{ran}(t) \subseteq g(n-1)\}$. Es inmediato ver que nuestra función g está bien definida. Ahora, sean $X_0 = \bigcup_{n\in\omega}([g(2n), g(2n+1)] \cap X)$ y $X_1 = \bigcup_{n\in\omega}([g(2n+1), g(2n+2)] \cap X)$, luego existe $i \in 2$ tal que $X_i \in \mathscr{I}_e^+$. Así, dado que $\mathscr{I}_e$ es q^+, entonces existe $h \in {}^\omega\omega$ estrictamente creciente junto con una función de elección $f \colon \omega \to \bigcup_{n\in\omega}([g(2h(n)+i), g(2h(n)+1+i)] \cap X)$ tal que $\text{ran}(f) \in \mathscr{I}_e^+$. Ahora, notemos que por la manera en que se definió g, se tiene que $f \in [T]$. Por lo que entonces el jugador **I** no tiene estrategia ganadora.

Dado que la topología de G es analítica, por resultados conocidos de Teoría Descriptiva de Conjuntos, se tiene que el juego $G(\mathscr{U}, \omega, \mathscr{I}_e^+)$ está determinado. Así, el jugador **II** tiene estrategia ganadora, por lo que existe $T \subseteq [\omega]^{<\omega}$ un árbol de ramificación en $\mathscr{U}$ tal que $[T] \subseteq \mathscr{I}_e^+$. Sea $T = \{t_n \colon n \in \omega\}$ una enumeración de T, entonces definimos $X_n = \bigcap_{m \leqslant n} \text{suc}_T(t_m)$ para cada $n \in \omega$, luego como $\mathscr{U}$ es centrado, entonces se tiene que $\langle X_n \colon n \in \omega\rangle \subseteq \mathscr{U}$. Pues bien, para cada $I \in \mathscr{I}_e$ existe $n \in \omega$ tal que $I \cap X_n = \emptyset$. Ya que de lo contrario, existiría $I \in \mathscr{I}_e$ tal que $I \cap X_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$, luego $I \cap \text{suc}_T(t) \neq \emptyset$ para toda $t \in T$. Por lo que podríamos definir recursivamente una $f \in [T]$ de tal manera que $f(n) \in I \cap \text{suc}_T(f \restriction n)$, teniendo entonces que $\text{ran}(f) \subseteq I$, contradiciendo el hecho de que el jugador **II** tiene estrategia ganadora. Por lo tanto, el ideal $\mathscr{I}_e$ es bisecuencial. □

4.2. Teorema (Todorčević y Uzcátegui [**2005**]). *Un grupo topológico Fréchet numerable es metrizable si y sólo si su topología es analítica.*

Demostración. Dado que todo espacio contable primero numerable es analítico (de hecho es del tipo $F_{\sigma\delta}$), entonces una de las implicaciones es inmediata.

Así, sea G un grupo topológico Fréchet numerable cuya topología sea analítica, entonces por el Lema 4.1, G es bisecuencial, luego por el Teorema 3.5, G es metrizable. □

Por otro lado, revisando los argumentos que nos condujeron a la prueba del Teorema 4.2, estariamos tentados en reproducir estos argumentos en un modelo de **ZF** + **AD** (*e.g.*, $L(\mathbb{R})$), pero esto no es posible ya que en estos argumentos se utilizan ultrafiltros, los cuales son objetos no definibles. Sin embargo, para la clase de grupos booleanos numerables que se trataron en la Sección 2 del Capítulo 3 sí tenemos consistentemente un teorema de metrización bajo **ZF**.

4.3. Proposición. *Sea $\mathscr{I}$ un ideal sobre ω, entonces es* Con(**ZF** + $\mathscr{I}^{<\omega}$ *es Fréchet si y sólo si* $\text{cof}(\mathscr{I}) = \omega$).

Demostración. Sea $M \models \mathbf{ZF} + \mathbf{AD}$ (*e.g.*, $L(\mathbb{R})$) e $\mathscr{I}$ un ideal sobre ω. Si $\text{cof}(\mathscr{I}) = \omega$, como $\text{cof}(\mathscr{I}^{<\omega}) = \text{cof}(\mathscr{I})$ entonces claramente $\mathscr{I}^{<\omega}$ es Fréchet.

Para el otro sentido, si $\mathscr{I}^{<\omega}$ es Fréchet, entonces según el Teorema 3.12, $\mathscr{I}$ es α_2, ahora la Proposición 2.37 nos dice entonces que el jugador **II** no tiene estrategia ganadora en el juego $G_{\mathrm{op}}(\emptyset, [\omega]^{<\omega})$, luego según **AD**, el jugador **I** tiene estrategia ganadora en $G_{\mathrm{op}}(\emptyset, [\omega]^{<\omega})$, entonces de la Proposición 2.36 se sigue que $\mathrm{cof}(\mathscr{I}) = \omega$. $\square$

Llevandonos esta última proposición hacer la siguiente conjetura.

4.4. Conjetura (Hrušák). $L(\mathbb{R}) \models$ *"Todo grupo topológico Fréchet numerable es metrizable".*

2. PFA y OCA

Como hemos visto ya en la Sección 3 del Capítulo 2, la noción de grieta estrecha recoge en lo fundamental la propiedad de ser Fréchet en un punto, esto es, un espacio X es Fréchet en $x \in X$ si y sólo si $\langle \mathscr{I}_x, \mathscr{I}_x^{\perp} \rangle$ forma una grieta estrecha. Ahora, notemos que si $\chi(x, X) = \omega$ (*i.e.*, $\mathrm{cof}(\mathscr{I}_x) = \omega$) y $U \notin \mathscr{I}_x^{\perp}$ para cada $U \in \eta(x)$, entonces de hecho la grieta estrecha $\langle \mathscr{I}_x, \mathscr{I}_x^{\perp} \rangle$ es exactamente una grieta de Rothberger.

Así, el problema de Malykhin es equivalente a preguntarse si existe un grupo topológico Fréchet numerable G con elemento elemento identidad e tal que $\langle \mathscr{I}_e, \mathscr{I}_e^{\perp} \rangle$ no forme una grieta de Rothberger.

Por otro lado, dado que el "Open Coloring Axiom" (**OCA**) de S. Todorčević tiene una gran influencia sobre las estructuras de grietas en $\mathscr{P}(\omega)$, entonces en lo que resta de sección nos dedicaremos a mostrar tal influencia. Para esto, empecemos por situar a **OCA**.

4.5. Axioma (**PFA**). *El "Proper Forcing Axiom", afirma que si $\mathbb{P}$ es un forcing propio y $\mathscr{D}$ es una familia de ω_1 subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, entonces existe un filtro $\mathscr{D}$-genérico $G \subseteq \mathbb{P}$.*

Claramente, $\mathbf{MA}_{\omega_1}$ es una consecuencia de **PFA**. Semejante a $\mathbf{MA}_{\omega_1}$, muchas de las consecuencias interesantes de **PFA** tienen la forma de afirmaciones tipo Ramsey. De esta semejanza, es natural preguntarse cuál de estas afirmaciones tipo Ramsey es equivalente a **PFA**. En la búsqueda de una respuesta a esta pregunta, S. Todorčević en [**1989**] estudia una de estas afirmaciones, a saber.

4.6. Axioma (**OCA**). *El "Open Coloring Axiom", afirma que si X es un espacio métrico separable y $[X]^2 = K_0 \cup K_1$ es una partición tal que K_0 es abierto en $[X]^2$,[1] entonces existe un conjunto K_0-homogéneo no numerable o X es la unión numerable de conjuntos K_1-homogéneos.*

[1] A las particiones de este tipo las llamaremos simplemente *particiones abiertas*.

Entonces S. Todorčević analiza algunas consecuencias de **PFA** que se siguen también de **OCA**. Varias de estas consecuencias nos son de interés. En especial, las relativas a las clases de grietas que se tienen en $\langle {}^{\omega}\omega, <^{*} \rangle$ bajo **OCA**.

Antes de mostrar la influencia que tiene **OCA** sobre las grietas en $\langle {}^{\omega}\omega, <^{*} \rangle$, revisemos antes un resultado que gira entorno a subconjuntos no acotados de $\langle {}^{\omega}\omega, <^{*} \rangle$.

4.7. Lema. *Sea κ un cardinal regular no numerable y $\langle f_\alpha \colon \alpha < \kappa \rangle$ una κ-sucesión $<^{*}$-creciente de funciones no decrecientes en $\langle {}^{\omega}\omega, <^{*} \rangle$ no acotada, entonces existen $\alpha < \beta < \kappa$ tales que $f_\alpha(k) \leqslant f_\beta(k)$ para toda $k \in \omega$.*

Demostración. Dado que el espacio de Baire ω^ω es hereditariamente separable, entonces es posible elegir un subconjunto numerable $\{\gamma_n \colon n \in \omega\}$ de κ de tal manera que el conjunto $\{f_{\gamma_n} \colon n \in \omega\}$ sea denso en $\{f_\alpha \colon n \in \omega\}$. Fijemos $\beta < \kappa$ de tal manera que $\gamma_n < \beta$ para cada $n \in \omega$. Ahora, fijemos para cada α entre β y κ una $m_\alpha \in \omega$ tal que $f_\beta(n) < f_\alpha(n)$ para toda $n \geqslant m_\alpha$. Dado que κ es no numerable, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $m_\alpha = n_1$ para todas estas α's.

Por otro lado, del hecho de que $\langle f_\alpha \colon \alpha < \kappa \rangle$ es no acotada, entonces existe una $n \geqslant n_1$ tal que el conjunto $\{f_\alpha(n) \colon \beta < \alpha < \kappa\}$ es infinito. Sea n_2 mínimo con tal propiedad. Ahora, dado que $\{f_\alpha \restriction n_2 \colon \beta < \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto de $[X]^{<\omega}$ y κ es no numerable, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f_\alpha \restriction n_2 = f_\delta \restriction n_2 = t$, digamos, para toda α y δ entre β y κ.

De la densidad de $\{f_{\gamma_n} \colon n \in \omega\}$, se sigue la existencia de $r \in \omega$ tal que $t \subset f_{\gamma_r}$. Entonces tomemos $n_3 \geqslant n_2$ de tal manera que $f_{\gamma_r}(n) < f_\beta(n)$ para toda $n \geqslant n_3$. Sea $x = \text{máx}\,\{f_{\gamma_r}(m) \colon m \leqslant n_3\}$.

Fijemos una δ entre β y κ de tal manera que $f_\delta(n_2) > x$. Entonces $f_\delta(n) = f_{\gamma_r}(n)$ para $n < n_2$, $f_\delta(n) > x \geqslant f_{\gamma_r}(n)$ para $n_2 \leqslant n \leqslant n_3$ y $f_\delta(n) > f_\beta(n) > f_{\gamma_r}(n)$ para $n > n_3$. Así, γ_r y δ son como los que requiere el lema. $\square$

El siguiente lema nos muestra parcialmente la influencia que tiene **OCA** sobre el cardinal $\mathfrak{b}$. Después con más elementos podremos dar un resultado más preciso.

4.8. Lema (Todorčević [**1989**]). **OCA** *implica que $\mathfrak{b} > \omega_1$.*

Demostración. Sea $X = \{f_\alpha \colon \alpha < \omega_1\}$ un subconjunto de ${}^{\omega}\omega$ tal que $f_\alpha <^{*} f_\beta$ para $\alpha < \beta < \omega_1$ y tal que cada una de estas funciones es no decreciente.

Definamos la partición
$$[X]^2 = K_0 \cup K_1$$
tal que $\{f_\alpha, f_\beta\}$ esta en K_0 si y sólo si $\alpha < \beta$ y existe k tal que $f_\alpha(k) > f_\beta(k)$.

Identifiquemos a $[X]^2$ con el subconjunto $\{\langle f_\alpha, f_\beta \rangle \colon \alpha < \beta < \omega_1\}$ de $(\omega^\omega)^2$ y denotemos a tal conjunto por $X^{[2]}$. Con estas convenciones en mente, esta partición es una partición abierta. En efecto, consideremos un punto $\langle f_\alpha, f_\beta\rangle \in K_0$ y eligamos k tal que $f_\alpha(k) > f_\beta(k)$. Sean $s = f_\alpha \restriction k+1$ y $t = f_\beta \restriction k+1$, entonces el conjunto $U = \{\langle f_\gamma, f_\delta\rangle \in X^{[2]} \colon s \subset f_\gamma$ y $t \subset f_\delta\}$ es un subconjunto abierto de $X^{[2]}$ que contiene a $\langle f_\alpha, f_\beta\rangle$ y el cual está contenido en K_0.

Ahora veamos que es imposible tener una descomposición numerable de X en conjuntos K_1-homogéneos. Para esto supongamos lo contrario, es decir, $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ con $[X_n]^2 \subseteq K_1$ para cada $n \in \omega$. Dado que X es no numerable, es posible elegir n tal que X_n también sea no numerable. Ahora, para $f_\alpha, f_\beta \in X_n$ con $\alpha < \beta$ tenemos que $f_\alpha(k) \leqslant f_\beta(k)$ para toda $k \in \omega$ además de que $f_\alpha <^* f_\beta$. Definamos los subconjuntos $I_\alpha = \{\langle n, m\rangle \in \omega\times\omega \colon m \leqslant f(n)\}$ para $f_\alpha \in X_n$, entonces $I_\alpha \subset I_\beta \subset \omega\times\omega$ cuando $f_\alpha <^* f_\beta$ y $f_\alpha, f_\beta \in X_n$. Pero esto nos está definiendo una ω_1-sucesión $\subset$-creciente de subconjuntos de $\omega\times\omega$, lo cual es una contradicción.

Aplicando **OCA**, existe entonces un conjunto no numerable $A \subset \omega_1$ tal que $[\{f_\alpha \colon \alpha \in A\}]^2 \in K_0$. Por el Lema 4.7 el conjunto $\{f_\alpha \colon \alpha \in A\}$ esta acotado y por ende el conjunto original de funciones también esta acotado. □

Esto último nos dice en particular que **OCA** implica $\neg$**CH** y que no hay $\langle\omega_1, \omega\rangle$-grietas de Rothberger, sin embargo si implicará la existencia de una $\langle\omega_2, \omega\rangle$-grieta de Rothberger. Este hecho lo probaremos después en el Teorema 4.10.

Ahora consideremos otras posibles grietas y la influencia que tiene **OCA** sobre ellas. Así, sean $\kappa \geqslant \lambda$ cardinales regulares no numerables y sea $\langle\{f_\alpha \colon \alpha < \kappa\}, \{g_\beta \colon \beta < \lambda\}\rangle$ una $\langle\kappa, \lambda\rangle$-pregrieta en $\langle {}^\omega\omega, <^*\rangle$, es decir,

$$f_{\alpha_1} <^* f_{\alpha_2} <^* g_{\beta_2} <^* g_{\beta_1},$$

para toda $\alpha_1 < \alpha_2 < \kappa$ y toda $\beta_1 < \beta_2 < \lambda$.

Para cada $\alpha < \kappa$ y $\beta < \lambda$, existe $m_{\alpha\beta} \in \omega$ tal que $f_\alpha(n) < g_\beta(n)$ para toda $n \geqslant m_{\alpha\beta}$. Ahora, si fijamos $\alpha < \kappa$ y variamos $\beta < \lambda$ entonces por la no numerabilidad de λ existe $S_\alpha \in [\lambda]^\lambda$ tal que $m_{\alpha\beta} = m_\alpha$, digamos, para toda $\beta \in S_\alpha$, luego $f_\alpha(n) < g_\beta(n)$ para toda $n \geqslant m_\alpha$ y toda $\beta \in S_\alpha$. Tomemos m_α mínimo con esta última propiedad. Por la no numerabilidad de κ, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $m_\alpha = m_\delta = k_0$, digamos, para toda $\alpha, \delta < \kappa$.

Sea $X = \{\langle f_\alpha, g_\beta\rangle \colon \alpha < \kappa$ y $\beta \in S_\alpha\}$, el cual es considerado como un subespacio del cuadrado del espacio de Baire ω^ω. Ahora, definamos una partición de los pares de X

$$[X]^2 = K_0 \cup K_1 \tag{3}$$

de tal manera que el par $\{\langle f_\alpha, g_\beta\rangle, \langle f_\gamma, g_\delta\rangle\}$ esta en K_0 si y sólo si existe $n \geqslant k_0$ tal que $f_\alpha(n) > g_\delta(n)$ o $f_\gamma(n) > g_\beta(n)$. Entonces para esta partición tenemos lo siguiente.

4.9. Lema. (a) *La partición (3) forma una partición abierta.*

(b) *Si existe una descomposición numerable de X en conjuntos K_1-homogéneos, entonces la pregrieta que se está considerando no es una grieta.*

Demostración. (a) Debemos probar, después de una apropiada interpretación, que K_0 es un subconjunto abierto de $[X]^2$. Para esto, consideremos un par $\{\langle f_\alpha, g_\beta\rangle, \langle f_\gamma, g_\delta\rangle\}$ en K_0 y elegimos una $n \geqslant k_0$ tal que $f_\alpha(n) > g_\delta(n)$ o $f_\gamma(n) > g_\beta(n)$. Definiendo $s = f_\alpha \restriction n+1$, $t = g_\beta \restriction n+1$, $u = f_\gamma \restriction n+1$ y $v = g_\delta \restriction n+1$, entonces el conjunto $U = \{\{\langle f_\epsilon, g_\zeta\rangle, \langle f_\eta, g_\theta\rangle\} \colon s \subset f_\epsilon, t \subset g_\zeta, u \subset f_\eta \text{ y } v \subset g_\theta\}$ es un abierto en $[X]^2$, contiene al par $\{\langle f_\alpha, g_\beta\rangle, \langle f_\gamma, g_\delta\rangle\}$ y está contenido en K_0.

(b) Sea $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ tal que $[X_n]^2 \subset K_1$ para cada $n \in \omega$. Entonces para cada $\alpha < \kappa$ y cada $\beta \in S_\alpha$ existe una $m_{\alpha\beta} \in \omega$ tal que $\langle f_\alpha, g_\beta\rangle \in X_{m_{\alpha\beta}}$, luego por la no numerabilidad de λ, podemos fijar una m_α y una $T_\alpha \in [S_\alpha]^\lambda$ de tal manera que $m_{\alpha\beta} = m_\alpha$ para cada $\beta \in T_\alpha$, ahora de la no numerabilidad de κ también podemos fijar una m y una $A \in [\kappa]^\kappa$ de tal manera que $m_\alpha = m$ para toda $\alpha \in A$.

Ahora, si tomamos $\alpha \not\in A$ y $\gamma \in T_\beta$, entonces $f_\alpha(n) \leqslant g_\gamma(n)$ para toda $n \geqslant k_0$. Pues bien, fijando $\alpha \in A$ definamos h de la siguiente manera

$$h(n) = \begin{cases} 0, & \text{para } n < k_0; \\ \text{mín}\,\{g_\beta(n) \colon \beta \in T_\alpha\}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces h es una función que interpola a la pregrieta $\langle\{f_\alpha \colon \alpha < \kappa\}, \{g_\beta \colon \beta < \lambda\}\rangle$. $\square$

En estos momentos, ya tenemos los elementos para hacer ver la influencia que tiene **OCA** en las grietas lineales.

4.10. Teorema (Todorčević [**1989**]). **OCA** *implica las siguientes afirmaciones.*

(a) *Sean $\kappa \geqslant \lambda$ cardinales regulares no numerables con $\kappa > \omega_1$. Entonces no existen $\langle\kappa, \lambda\rangle$-grietas en $\langle {}^\omega\omega, <^*\rangle$, en otras palabras, las únicas grietas lineales son las grietas de Hausdorff y Rothberger.*

(b) *$\mathfrak{b} = \omega_2$, luego existe una $\langle\omega_2, \omega\rangle$-grieta de Rothberger.*

Demostración. (a) Sean κ y λ como en la hipótesis y sea X y la partición $[X]^2 = K_0 \cup K_1$ como antes.

Afirmación. No existe $Y \subset X$ no numerable tal que $[Y]^2 \subset K_0$.

Demostración de la afirmación. Supongamos lo contrario, y sea $Y = \{\langle p_\alpha, q_\alpha\rangle : \alpha < \omega_1\}$ una enumeración de un subconjunto no numerable de X tal que $[Y]^2 \subset K_0$. Empecemos notando que $p_\alpha \neq p_\beta$ para $\alpha \neq \beta$. (Ya que de lo contrario, suponiendo que $\alpha < \beta$ y que $p_\alpha = p_\beta$, entonces $q_\alpha \neq q_\beta$ y el par $\{\langle p_\alpha, q_\alpha\rangle, \langle p_\alpha, q_\beta\rangle\}$ esta en K_0, pero por definición de X se tiene que $p_\alpha(n) < q_\alpha(n)$ y que $p_\alpha(n) < q_\beta(n)$ para toda $n \geqslant k_0$, contradiciendo la definición de K_0). De manera similar podemos probar que $q_\alpha \neq q_\beta$ cuando $\alpha \neq \beta$. Ahora, podemos suponer sin pérdida de generalidad que Y está enlistada de tal manera que $p_\alpha <^* p_\beta$ cuando $\alpha < \beta$, ahora dado que el conjunto de las q_α's están bien ordenadas por el orden inverso de $<^*$, podemos suponer (por el Teorema de Erdös-Dushnik-Miller; véase por ejemplo el Teorema 15.28 en W. Just y M. Weese [**1997**]) que $q_\beta <^* q_\alpha$ cuando $\alpha < \beta$. Entonces $\langle \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}, \{q_\beta : \beta < \omega_1\}\rangle$ es una $\langle \omega_1, \omega_1\rangle$-pregrieta. Como $\kappa > \omega_1$, tomemos $\delta < \kappa$ tal que $p_\alpha <^* f_\delta$ para cada $\alpha < \omega_1$.

Así, para cada $\alpha < \omega_1$ tomemos $l_\alpha \in \omega$ mínimo tal que

$$p_\alpha(n) < f_\delta(n) < q_\alpha(n) \text{ para toda } n \geqslant l_\alpha.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad $l_\alpha = k_1$, digamos, para toda $\alpha < \omega_1$. Nótese entonces que $k_0 \leqslant k_1$. Por otro lado, podemos suponer sin pérdida de generalidad un poco más: que $p_\alpha \restriction k_1 = s$ y que $q_\alpha \restriction k_1 = t$, digamos, para toda $\alpha < \omega_1$. Pero entonces de aquí se sigue que $p_\alpha(n) \leqslant q_\alpha(n)$ para toda $n \geqslant k_0$, contradiciendo el hecho de que $[Y]^2 \subset K_0$. Entonces con esto concluimos la demostración de la afirmación. $\square$

Ahora aplicando **OCA** a esta partición abierta, entonces por la afirmación anterior se sigue que existe una descomposición numerable de X en conjuntos K_1-homogéneos. Entonces el Lema 4.9 nos dice que la pregrieta que se está considerando no es una grieta. Dado que esta pregrieta era una pregrieta arbitraria en la cual los cardinales κ y λ están satisfaciendo los requerimientos del teorema en cuestión, se sigue entonces que bajo **OCA** no existen grietas de este tipo.

(b) Empecemos con hacer ver lo siguiente.

Afirmación. Si $\mathfrak{b} > \omega_2$ entonces existe una grieta $\langle F, G\rangle$ en $\langle {}^\omega\omega, <^*\rangle$ la cual no es ni de Hausdorff ni de Rothberger.

Demostración de la afirmación. Fijemos un subconjunto F de ${}^\omega\omega$ que tenga tipo de orden ω_2 bajo $<^*$ y ampliémoslo a un subconjunto X de ${}^\omega\omega$ $<^*$-totalmente ordenado maximal. De la hipótesis $\mathfrak{b} > \omega_2$, se sigue que el conjunto F no es cofinal en X, luego entonces sea G la parte superior de la grieta en X que determina F. Ahora, notemos que $\langle F, G\rangle$ también es una grieta en $\langle {}^\omega\omega, <^*\rangle$. Ahora bien, G no puede tener un elemento mínimo, ya que si $g = \text{mín}\,(G)$

entonces $g - 1$ sería un elemento de ${}^{\omega}\omega$ el cual podría ser agregado a X, contradiciendo su maximalidad. Como estamos suponiendo que $\mathfrak{b} > \omega_2$ y dado que $\mathfrak{b} = \min\{\kappa\colon$ existe una $\langle \kappa, \omega\rangle$-grieta en $\langle {}^{\omega}\omega, <^*\rangle\}$, se sigue entonces que la cofinalidad de $\langle G, <^*\rangle$ debe ser no numerable. Así, la grieta $\langle F, G\rangle$ no es ni de Hausdorff ni de Rothberger. □

Por otro lado, del Lemma 4.8 se sigue que $\mathfrak{b} \geqslant \omega_2$. Ahora usando el inciso (a) de este teorema en combinación con la afirmación anterior concluimos que $\mathfrak{b} = \omega_2$. □

3. Modelo (Axioma) de prueba

4.11. Definición. Sea $\mathscr{I}$ un ideal sobre ω, decimos que $\mathscr{I}$ es *numerablemente alto*, si para cada colección numerable $\langle X_n\colon n \in \omega\rangle \subseteq [\omega]^{\omega}$, existe una $I \in \mathscr{I}$ tal que $I \cap X_n$ es infinito para cada $n \in \omega$. De una manera similar, decimos que una familia arbitraria $\mathscr{F}$ de subconjuntos de ω es *ω-hitting*, si para cada colección numerable $\langle X_n\colon n \in \omega\rangle \subseteq [\omega]^{\omega}$, existe una $F \in \mathscr{F}$ tal que $F \cap X_n$ es infinito para cada $n \in \omega$.

Consideremos las siguiente afirmaciones.

- **$\mathbf{PFA}_{\omega\text{-hitting}}$:** $\mathbf{MA}_{\omega_1}(\mathbb{P})$ se sigue para todo forcing propio $\mathbb{P}$ que preserva familias ω-hitting;
- **$\omega\mathbf{H}$:** Cada familia ω-hitting tiene una subfamilia ω-hitting de tamaño a lo más ω_1.

Dado que $\mathbf{MA}_{\mathfrak{c}}$ es falso, entonces para que $\mathbf{PFA}_{\omega\text{-hitting}}$ tenga sentido se tiene que suponer implícitamente $\neg\mathbf{CH}$.

Existen varios modelos, en donde la afirmación $\omega\mathbf{H}$ y varias instancias de $\mathbf{PFA}_{\omega\text{-hitting}}$ se siguen, por ejemplo, A. Dow en [**1990**] demuestra que en un modelo obtenido por agregar ω_2 reales de Laver a un modelo de **CH**, cada familia ω-hitting contiene una familia ω-hitting de tamaño ω_1, y dado que en este modelo también se sigue que $\mathfrak{b} > \omega_1$, entonces en este modelo se sigue que todo espacio α_2 es α_1.

Para hacer ver esto, tomemos un punto x en un espacio X y supongamos que se tiene una sucesión $\langle I_n\colon n \in \omega\rangle \subseteq \mathscr{I}_x^{\perp} \setminus \mathrm{Fin}(X^{\circ})$. Identificando a la $\bigcup_{n\in\omega} I_n$ con ω, definamos $\mathscr{J} = \{J \subseteq \omega\colon$ existe $I \in \mathscr{I}_x^{\perp}$ tal que $J \cap I_n \subseteq^* I$ para cada $n \in \omega\}$, el cual “piensa” que el ideal $\mathscr{I}_x$ es α_1. Con esto en mente, pasemos a probar el teorema de A. Dow.

4.12. Teorema (Dow [**1990**]). $\mathfrak{b} > \omega_1 + \omega\mathbf{H}$ *implica que todo espacio α_2 es α_1.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio topológico α_2, entonces tomemos un punto $x \in X$ y una sucesión $\langle I_n : n \in \omega\rangle \subseteq \mathscr{I}_x^{\perp} \setminus \mathrm{Fin}(X^{\circ})$. Haciendo $\mathscr{J}$ como arriba, obtenemos lo siguiente.

Afirmación. $\mathscr{J}$ es ω-hitting.

Demostración de la afirmación. Sea $\langle X_n : n \in \omega\rangle \subseteq [\omega]^{\omega}$, y consideremos $N = \{m \in \omega : X_m \cap I_n$ es finito para cada $n \in \omega\}$. Elegimos para cada $n \in \omega$, un subconjunto finito F_n de $I_n \setminus \bigcup_{k<n} I_k$, de tal manera que $X_m \setminus F$ es finito para toda $m \in N$, donde $F = \bigcup_{n\in\omega} F_n$. Ahora, para cada $m \in \omega \setminus N$, elegimos $n_m \in \omega$ tal que $X_m \cap I_{n_m}$ es infinito. Después tomamos $Y_m \in [X_m \cap I_{n_m}]^{\omega}$ de tal manera que $Y_m \cap Y_k = \emptyset$ para $m \neq k$ en $\omega \setminus N$. Dado que $\mathscr{I}_x$ es α_2, entonces existe $I \in \mathscr{I}_x^{\perp}$ tal que $I \cap Y_m$ es infinito para cada $m \in \omega \setminus N$. Así, haciendo $J = I \cup F$, obtenemos que $J \in \mathscr{J}$ y que $J \cap X_n$ es infinito para cada $n \in \omega$, luego $\mathscr{J}$ es ω-hitting. $\square$

Ahora bien, como queremos ver que $\mathscr{I}_x$ es α_1, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que los I_n's son ajenos por pares. Así, por la afirmación anterior y por $\omega\mathbf{H}$, existe $\mathscr{J}' \in [\mathscr{J}]^{\omega_1}$ la cual es ω-hitting, entonces para cada $J \in \mathscr{J}'$, tomemos $I_J \in \mathscr{I}_x^{\perp}$ (de la definición de $\mathscr{J}$) y $f_J \in {}^{\omega}\omega$ de tal manera que $(J \cap I_n) \setminus I_J \subseteq f_J(n)$ para cada $n \in \omega$. Ahora, dado que $\mathfrak{b} > \omega_1$, existe $f \in {}^{\omega}\omega$ tal que $f_J \leqslant^* f$ para cada $J \in \mathscr{J}'$. Pues bien, haciendo $I = \bigcup_{n\in\omega}(I_n \setminus f(n))$, obtenemos que $I \in \mathscr{I}_x^{\perp}$. En efecto, supongamos que $I \notin \mathscr{I}_x^{\perp}$, entonces existe $I' \in [I]^{\omega}$ con $I' \in \mathscr{I}_x$, luego como $\mathscr{J}'$ es ω-hitting, existe $J \in \mathscr{J}'$ tal que $J \cap I'$ es infinito, pero esto contradice el hecho de que $I_J \in \mathscr{I}_x^{\perp}$, ya que $(J \cap I') \setminus I_J$ es finito.

Por lo tanto, $\mathscr{I}_x$ es α_1 para cada $x \in X$, es decir, el espacio X es α_1. $\square$

Por otro lado, recientemente J. Brendle y M. Hrušák en [**2008**] usando una instancia de $\mathbf{PFA}_{\omega\text{-hitting}}$ y $\omega\mathbf{H}$ han probado lo siguiente.

4.13. Teorema (Brendle y Hrušák [**2008**]). *Es consistente que para cada ideal $\mathscr{I}$ sobre ω de cofinalidad ω_1, el ideal $\mathscr{I}^{<\omega}$ no es Fréchet. Equivalentemente, es consistente que si el grupo $(G, \tau_{\mathscr{I}})$ tiene peso ω_1, entonces es metrizable.* $\square$

Estos dos últimos resultados, nos motivan hacer una pregunta y conjetura relativas a las afirmaciones $\mathbf{PFA}_{\omega\text{-hitting}}$ y $\omega\mathbf{H}$.

4. Preguntas a cerca del Modelo (Axioma) de prueba

4.14. Pregunta (Hrušák). *¿$\mathbf{PFA}_{\omega\text{-hitting}} + \omega\mathbf{H}$ implica* **OCA**?

4.15. Conjetura (Hrušák). $\mathbf{PFA}_{\omega\text{-hitting}} + \omega\mathbf{H}$ *implica que cada grupo Fréchet numerable es metrizable.*

Bibliografía

[1972] ARHANGEL'SKIĬ, A. V., Frecuency spectrum of a topological space and the classification of spaces, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **206** (1972), 265–268. English translation in *Soviet Math. Dokl.* **13** (1972), 1185–1189.

[1979] ARHANGEL'SKIĬ, A. V., Frecuency spectrum of a topological space and the product operation, *Trudy Mosk. Mat. Obs.* **40** (1979). English translation in *Trans. Moscow Math. Soc.* (1981) **Issue 2**, 163–200.

[1992] ARHANGEL'SKIĬ, A. V., *Topological Function Spaces*, Mathematics and Its Applications **78**, Kluwer Academic Plublishers, 1992.

[1996] ARHANGEL'SKIĬ, A. V., MALYKHIN, V. I., Metrizability of topological groups (Russian), *Vestnik Moskow. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* no. 3 (1996), 13–16.

[1936] BIRKHOFF, G., A note on topological groups, *Comp. Math.* **3** (1936), 427–430.

[2008] BRENDLE, J., HRUŠÁK, M., Malyhin's Problem, *preprint*, 2008.

[1977] BURKE, D. K., VAN DOUWEN, E. K., On countably compact extensions of locally compact M-spaces, *Set-theoretic Topology* (G. M. Reed, ed.), Academic Press, New York 1977, 81–89.

[1980] DOČKÁLKOVÁ, J., Almost disjoint refinement of families of subsets of natural and real numbers (in Czech), *Rigorosní práce, ČKD Praha, závod Polovodiče*, Praha 1980.

[1990] DOW, A., Two classes of Fréchet-Urysohn spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **108** (1990), 241–247.

[1992] DOW, A., STEPRĀNS J., Countable Fréchet α_1-spaces may be first-countable, *Arch. Math. Logic* **32** (1992), 3–50.

[1989] ENGELKING, R., *General Topology,* Revised and completed edition, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. **6**, Heldermann Verlag, Berlin 1989.

[1982] GERLITS, J., NAGY, ZS., Some properties of $C(X)$, I, *Topology Appl.* **14** (2) (1982), 151–161.

[1976] GRUENHAGE, G., Infinite games and generalizations of first countable spaces, *Topology Appl.* **6** (1976), 339–352.

[2005] GRUENHAGE, G., SZEPTYCKI, P. J., Fréchet-Urysohn for finite sets, *Topology Appl.* **151** (2005), 238–259.

[1909] HAUSDORFF, F., Die Graduierung nach dem Endverlauf, *Abhandlun. König. Sächsis. Gessellsch. Wissenschaften, Math.-Phys. Kl.* **31** (1909), 296–334.

[1930] HAUSDORFF, F., Summen von $\aleph_1$-mengen, *Fund. Math.* **26** (1930), 241–255.

[1970] HECHLER, S. H., Independence results concerning a problem of N. Lusin, *Math. Syst. Theory.* **4** (1970), 316–321.

[1972] HECHLER, S. H., Short complete nested sequences in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ and small maximal almost-disjoint families, *Gen. Topology Appl.* **2** (1972), 139–149.

[1997] JUST, W., WEESE, M., *Discovering Modern Set Theory. II*, Set-Theoretic Tools for Every Mathematician, Graduate Studies in Mathematics **18**, American Mathematical Society, 1997.

[1936] Kakutani, S., Über die Metrisation der topologischen Gruppen, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **12** (1936), 82–84.

[1960] Katětov, M., Remarks on characters and pseudocharacters, *Comm. Math. Univ. Car.* **1** (1) (1960), 20–25.

[1995] Kechris A. S., *Classical Descriptive Set Theory*, Graduate Studies in Mathematics **156**, Springer Verlag, 1995.

[1976] Laver, R., On the consistency of Borel's conjecture, *Acta Math.* **137** (3-4) (1976), 151–169.

[1993] Miller, A. W., Special sets of reals. *Set theory of the reals* (Ramat Gan, 1991), 415–431, Israel Math. Conf. Proc., **6**, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1993.

[1981] Nyikos, P. J., Metrizability and the Fréchet-Urysohn property in topological groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **83** (1981), 793–801.

[1989] Nyikos, P. J., The Cantor tree and the Fréchet-Urysohn property, *Ann. New York Acad. Sci.* **552** (1989), 109–123.

[1992] Nyikos, P. J., Subsets of ${}^{\omega}\omega$ and the Fréchet-Urysohn and α_i-properties, *Topology Appl.* **48** (1992), 91–116.

[1999] Reznichenko, E., Sipacheva, O., Fréchet-Urysohn type properties in topological spaces, groups and locally convex vector spaces, *Moscow Univ. Math. Bull.* **54** (3) (1999), 33–38.

[1939] Rothberger, F., Sur un ensemble toujours de première catégorie qui est dépourvu de la propriété λ, *Fund. Math.* **32** (1939), 294–300.

[1941] Rothberger, F., Sur les familes indenombrables de suites de nombres naturels et les problèmes concernant la propriété C, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **37** (1941), 109–126.

[1948] Rothberger, F., On some problems of Hausdorff and of Sierpiński, *Fund. Math.* **35** (1948), 29–46.

[1980] Simon, P., A compact Fréchet space whose square is not Fréchet, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **21** (4) (1980), 749–753.

[1989] Todorčević, S., *Partition realations in topology*, Contemporary Mathematics **84**, American Mathematical Society, Providence 1989.

[2005] Todorčević, S., Uzcátegui, C., Analytic κ-spaces, *Topology Appl.* **146–147** (2005), 511–526.