UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

CORRECCIÓN GRAVITACIONAL DOMINANTE AL LAGRANGIANO DE EULER - HEISENBERG ESCALAR

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA

JOSÉ MANUEL DÁVILA DÁVILA

DIRECTOR DE TESIS: DR. CHRISTIAN SCHUBERT

MORELIA, MICHOACÁN, MARZO 2008.

A mi Mamá.
A la vida y memoria de mi Papá.

Agradecimientos

Hay varias personas a las que quiero agradecer por su ayuda durante la maestra y en la elaboración de esta tesis.

En primer lugar quiero agradecer al Dr. Christian Schubert por su enorme paciencia, por mostrarme la belleza de la teoría cuántica de campos y por ser el director de esta tesis.

Al Dr. Fiorenzo Bastianelli del Departamento de Física de la Universidad de Bologna, Italia, por su ayuda e interes en la realización de esta tesis.

Al Dr. José Antonio Aguilar Sánchez por brindarme su amistad y confianza, por alentarme en mi superación humana y profesional.

A mi familia por motivarme a ser mejor hijo, hermano y tío.

A Xiomara por compartirme parte de su vida y por estar conmigo en los momentos mas difíciles de mi vida.

A Chuy por esas charlas que me han ayudado a encaminar mi vida hacia nuevas y mejores metas.

A la familia Salazar Becerril por brindarme su amistad.

A Ana, Blanca, Paola, y Vanessa por su amistad.

A la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y su Instituto de Física y Matématicas por darme la la oportunidad de crecer profesionalmente.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La historia de la electrodinámica cuántica relativista (QED) inicia en 1928 con el famoso artículo de Dirac [1], donde propone su ecuación de onda relativista del electrón. Como es bien conocido, su trabajo permitió obtener el espectro relativista correcto del átomo de hidrógeno y predijo la existencia del positrón. Por otra parte, esto condujo a que en los siguientes años, con la contribución misma de Dirac así como de Heisenberg, Pauli, Jordan, Wigner, Bohr, Klein, entre otros, se desarrollara un formalismo para el cálculo de procesos relativistas que implican electrones, positrones, y el campo electromagnético, incluyendo el efecto de partículas virtuales. En los años 30's del siglo XX, se referían generalmente a este formalismo como"la teoría de Dirac" o "la teoría del agujero de Dirac" (ver por ejemplo [2] para una descripción detallada de la historia del tema). Sin embargo, en este formalismo los cálculos son incómodos, y generalmente contiene integrales divergentes cuyo origen no era bien entendido en ese entonces. Tomó más de dos décadas crear una formulación completamente satisfactoria de la QED. Esto fue posible gracias a los trabajos de Feynman, Schwinger, Dyson, Tomonaga, entre otros; esta versión moderna de la QED se basa en la idea de Heisenberg de organizar todos los procesos de dispersión en la llamada matriz S, en una expansión covarinate de los elementos de la matriz en términos de diagramas de Feynman, y en el programa de renormalización, que es un algoritmo sistemático para absorber todas las divergencias ultravioletas inobservables en cantidades "desnudas". Esta formulación de la QED no ha sufrido cambios notables a la fecha y es con la que se trabaja. Además, sirve como modelo para desarrollar teorías cuánticas de campos mas generales, principalmente las teorías de norma no abelianas [3]. Uno de los resultados no triviales más tempranos en QED, aún usando la teoría de Dirac, es el bien conocido Lagrangiano de Euler - Heisenberg [4, 5, 6], el cual describe los efectos de pares virtuales electrón-positrón en un campo electromagnético externo. En la notación moderna, este Lagrangiano se escribe de la siguiente forma:

$$\mathscr{L}^{(1)}_{EH(espinor)} = -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2T} \frac{e^2 ab}{\tan(eaT)\tanh(ebT)}, \tag{1.1}$$

donde e, m son la carga y masa del electrón respectivamente, y se han usado los invariantes de Lorentz del campo electromagnético:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= B^2 - E^2, \\ ab &= \vec{E}\cdot\vec{B}. \end{aligned}$$

En 1951, Schwinger [7] derivó nuevamente este resultado pero usando el formalismo moderno, y además obtuvo una expresión análoga para el caso donde las partículas virtuales no tienen espín, es decir, son partículas escalares cargadas:

$$\mathscr{L}^{(1)}_{EH(escalar)} = \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2T} \frac{e^2 ab}{\operatorname{sen}(eaT)\operatorname{senh}(ebT)}, \tag{1.2}$$

A pesar de la simplicidad formal de los Lagrangianos efectivos (1.1), (1.2), contienen una enorme cantidad de información física. Mencionaremos sólo los siguientes tres aspectos:

1. Este Lagrangiano efectivo contiene información sobre las modificaciones cuánticas de las ecuaciones de Maxwell debido a la presencia de partículas virtuales escalares o espinoriales. En particular, esto permite estudiar las modificaciones de la propagación del fotón a bajas energías debido a un campo externo [8].

2. En el caso del campo eléctrico, permite calcular la tasa de creación de pares por el campo [7].

3. También contiene la información completa sobre la amplitud de N fotones a un lazo en el límite donde la energía de los fotones es pequeña comparada con la energía de Compton [9].

En esta tesis, generalizamos la fórmula de Schwinger (1.2) al caso donde, además de un campo electromagnético constante, está presente un campo gravitacional. Para eso, no usaremos el formalismo estándar de la teoría cuántica de campos (QFT). En su lugar usaremos un formalismo alternativo que ha sido desarrollado en los últimos quince años.

Gracias a la teoría de cuerdas, que reproduce a la teoría cuántica de campos en el límite de bajas energías, se han generado nuevas herramientas para atacar los problemas en QFT, muestra de ello es el formalismo "*string inspired*" (también conocido como formalismo worldline), que ofrece ciertas ventajas en los cálculos. Históricamente Bern y Kosower calcularon amplitudes de N gluones a un lazo directamente de la teoría de cuerdas [10, 11, 12], posteriormente Strassler realizó el mismo cálculo pero en el contexto de integrales de trayectoria relativistas [13], ya consideradas por Feynman. En 1950, Feynman obtuvo la siguiente representación de la acción efectiva en SQED a un lazo [14],

$$\Gamma_{escalar}[A] = \int d^4x\, \mathscr{L}_{escalar}[A] = \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2T} \int_{x(T)=x(0)} \mathcal{D}x(\tau)\, e^{-S[x(\tau)]}, \tag{1.3}$$

donde T es el tiempo propio de la partícula, m es la masa, la integral $\int \mathcal{D}x$ es sobre todas la trayectorias cerradas y la acción worldline S está compuesta por el término cinético (2.3) y el término de interacción (2.4); para (1.3) hemos usado las convenciones de [15]. Usando una generalización cromodinámica de esta integral de Feynman, Strassler logró obtener las mismas representaciones integrales para las amplitudes de N gluones a un lazo como Bern y Kosower. Sin embargo, el metódo empleado por Strassler resultó ser más eficiente. El formalismo worldline es una herramienta muy útil para el cálculo de amplitudes con N fotones en la QED en el vacío [16] y particularmente para amplitudes de fotones en un campo externo constante [17, 18, 19, 20].

La aplicación del formalismo worldline a un campo gravitacional de fondo requiere la generalización al espacio curvo [21], lo cual encierra problemas matemáticos muy profundos, como ya se sabe del caso no relativista desde hace medio siglo [22]. Hablamos de tres problemas principales:

- La existencia de una medida no trivial en la integral de trayectoria,

$$\mathcal{D}x = Dx \prod_{0\leq\tau<T} \sqrt{\det\, g_{\mu\nu}(x(\tau))},$$

y cómo tratar esta medida para cálculos prácticos.

- La existencia de divergencias UV en la teoría de campos unidimensional definida por la integral de Feynman (1.3).
- Eliminar el modo cero contenido en la integral (1.3) de manera consistente con la covariancia general.

Estos problemas se han resuelto recientemente gracias a los trabajos de Bastianelli, van Nieuwenhuizen, Corradini, entre otros [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]; actualmente, el formalismo worldline tiene una estructura sólida en este contexto [30]. El formalismo ya se aplicó en el cálculo de la amplitud fotón - gravitón en un campo electromagnético constante [31, 32].

En esta tesis proveemos la primera aplicación a un cálculo de la acción efectiva. Esta es la acción efectiva involucrando un lazo escalar y un campo de fondo electromagnético más un campo gravitacional. Esto ocurre en el marco de la teoría Mitein - Maxwell con un campo escalar cargado:

$$S[g, A, \phi] = \int d^4x \sqrt{g} \left(\frac{1}{\kappa^2} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - D_\mu \phi^* \, D^\mu \phi - (m^2 + \xi R) \phi^* \phi \right), \tag{1.4}$$

donde $\kappa^2 = 16\pi G_N$, $g = |\det[g_{\mu\nu}]|$, $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ y el término ξR surge por la ambigüedad del ordenamiento para el hamiltoniano escalar [30]. En nuestras convenciones se usa la signatura (-+++).

Calcularemos, en el formalismo inspirado en cuerdas, la parte de la acción efectiva que contiene términos RFF, esto es para corroborar los razonamientos formales de [28]. El resultado ya fue calculado bajo el formalismo estándar *núcleo de calor* (heat kernel) [33]. Después usaremos el formalismo para calcular todos los términos del tipo RF^n, lo cual corresponde a la corrección dominante gravitacional al Lagrangiano de Euler - Heisenberg para la electrodinámica escalar (1.2). El resultado que obtenemos es algo nuevo y la aportación central de esta tesis:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{EH}^{(R)} &= \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-2} \det{}^{-1/2} \left[\frac{\mathrm{sen}(eFT)}{eFT} \right] \\
& \times \int_0^1 du_1 \Bigg[\frac{ieT^2}{8} F_{\mu\nu;\alpha\beta}\, \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\nu}\, \mathcal{G}_{11}^{\alpha\beta} + \frac{ie}{8} T^2 \left(F_{\mu\nu;\beta\alpha} + F_{\mu\nu;\alpha\beta} \right) \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{11}^{\nu\alpha} \\
& + \frac{ieT^2}{24} F_{\lambda\nu} R^{\lambda}{}_{\alpha\beta\mu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\nu}\, \mathcal{G}_{11}^{\alpha\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\alpha}\, \mathcal{G}_{11}^{\nu\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\beta}\, \mathcal{G}_{11}^{\nu\alpha} \right) - T\bar{\xi} R \\
& + \frac{T}{12} R_{\mu\alpha\beta\nu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\alpha} \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\beta\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\beta} \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\alpha\nu} + \ddot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{11}^{\alpha\beta} \right) + \frac{T}{3} \mathcal{G}_{11}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\
& - \frac{e^2 T^3}{6} \int_0^1 du_2 F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\delta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta} + \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu} \right) \Bigg], \quad (1.5)
\end{aligned}$$

donde F es la matriz del campo electromagnético y $\mathcal{G}$ se define en detalle en (2.33)-(2.37). En el capítulo 2 de este trabajo de tesis se hace una introducción al formalismo worldline en el espacio plano y en el espacio curvo. También se explican las características que definen los formalismos “DBC” e inspirado en cuerdas. En el capítulo 3 se demuestra, mediante un cálculo explícito y detallado, que las reglas establecidas por Bastianelli *et al.* reproducen correctamente, hasta términos del típo derivada total, los términos en la acción efectiva que dependen del campo electromagnético cuadráticamente, y del campo gravitacional linealmente. En el capítulo 4 se realiza la generalización gravitacional del Lagrangiano de Euler - Heisenberg. En las conclusiones se explica el contenido físico de este Lagrangiano y se indican algunas posibles generalizaciones y aplicaciones. En el apéndice A se muestra de forma detallada la manera en los campos fantasma eliminan las divergencias que surgen en el cálculo de la acción efectiva. En el apéndice B se escriben algunas propiedades del tensor de Riemann que serán útiles en nuestros cálculos. En el apéndice C se usan las identidades de Bianchi para la obtención de algunas relaciones que serán de gran ayuda. Finalmente en el apéndice D se escribe la forma explicita de las derivadas totales covariantes que relacionan los Lagrangianos efectivos de lo formalismo DBC y del formalismo inspirado en cuerdas, adeás se muestra la equivalencia entre los resultados que obtiene cada formalismo en el cálculo de la acción efectiva.

Capítulo 2

Introducción al formalismo worldline

2.1. Teoría cuántica de campos en el vacío

En el año 1950, Feynman presento un artículo en el cual formula una primera cuantización en la electrodinámica cuántica escalar, SQED (*scalar quantum electrodynamics*), lo cual resulta ser una formulación alterna a la segunda cuantización [14]. En dicho artículo, se dan reglas muy sencillas para la construcción de la matriz S en la SQED mediante la representación de escalares y fotones virtuales en términos de integrales de trayectoria para partículas relativistas. Así que la acción efectiva de una partícula escalar cargada que se mueve en un lazo tiene una acción efectiva $\Gamma[A]$ dada por:

$$\Gamma_{escalar}[A] = \int d^4x \, \mathscr{L}_{escalar}[A] = \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(T)=x(0)} \mathcal{D}x(\tau) \, e^{-S[x(\tau)]}, \tag{2.1}$$

donde T es el tiempo propio de la partícula escalar en el lazo, m es su masa y $\int_{x(T)=x(0)} Dx(\tau)$ es la integral de trayectorias sobre todos los lazos cerrados en el espacio-tiempo, cuya periodicidad se fija por el tiempo propio. La acción worldline $S[x(\tau)]$ se divide en:

$$S = S_0 + S_{ext}, \tag{2.2}$$

donde S_0 describe la propagación libre del escalar:

$$S_0 = \int_0^T d\tau \frac{\dot{x}^2}{4}, \tag{2.3}$$

el término S_{ext} describe la interacción con el campo externo:

$$S_{ext} = i\,e \int_0^T d\tau \dot{x}^\mu \, A_\mu(x(\tau)). \tag{2.4}$$

La conexión con la descripción estandar en diagramas de Feynman se hace por expansión de las exponenciales de interacción.
La idea del método worldline es sencilla: Las integrales de trayectoria son manipuladas para que éstas adquieran una forma gaussiana; después se resolverán empleando las funciones de correlación worldline. Es importante mencionar que de la naturaleza de las integrales de trayectoria, una invariancia traslacional lleva a divergencias, por lo cual es importante fijar cierta condición sobre las trayectorias que se integran. En el caso mas sencillo se fija un punto, x_0, en el espacio de integración. Así que

$$\int \mathcal{D}x = \int dx_0 \int \mathcal{D}y, \tag{2.5}$$

con $x^\mu(\tau) = x_0^\mu + y^\mu(\tau)$ [15]. De hecho consideramos dos formas de fijar el punto x_0, y cada una de ellas genera un formalismo determinado. A partir de este momento se considera un lazo unitario, es decir, se hace un escalamiento de τ:

$$\tau = Tu, \tag{2.6}$$

así que ahora podemos escribir

$$S_0 = \frac{1}{4T} \int_0^1 du\, \dot{x}^2. \tag{2.7}$$

En este punto resulta conveniente recordar el caso de dimensión finita que

$$\begin{aligned} \int d^n x\, x_{i_1} \cdots x_{i_{2k}}\, e^{x^t A x} &= (\det A)^{-1/2} \frac{\pi^{n/2}}{2} \Big[(A^{-1})_{i_1 i_2} (A^{-1})_{i_3 i_4} \cdots \\ &\qquad \times (A^{-1})_{i_{2k-1} i_{2k}} + \text{permutaciones} \Big], \end{aligned} \tag{2.8}$$

que en el caso más sencillo simplemente

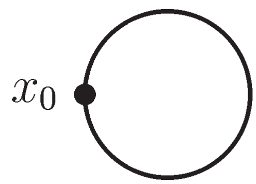
$$\int d^n x\, e^{x^t A x} = (\det A)^{-1/2} \pi^{n/2}, \tag{2.9}$$

así que para resolver una gaussiana, es suficiente con saber el determinante de A y la función de Green, A^{-1}.

2.1.1. Formalismo DBC

El formalismo DBC (por su siglas en ingles *Dirichlet Boundary Conditions*) fija el punto x_0 sobre el lazo, es decir

$$y^\mu(0) = y^\mu(T) = 0. \tag{2.10}$$



Las funciones de correlación de este formalismo tienen la siguiente forma [30]

$$\langle y^\mu(u)\, y^\nu(v)\rangle = -2T g^{\mu\nu}\, \Delta(u,v), \tag{2.11}$$

donde $\Delta(u,v)$ es la función de Green correspondiente

$$\Delta(u,v) = (u-1)\, v\, \theta(u-v) + (v-1)\, u\, \theta(v-u) \tag{2.12}$$

con

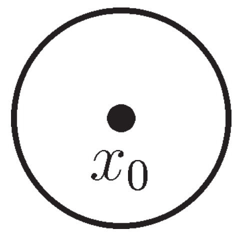
$$\theta(0) = 1/2, \tag{2.13}$$
$$^\bullet\Delta(u,v) = v - \theta(v-u), \tag{2.14}$$
$$\Delta^\bullet(u,v) = u - \theta(u-v), \tag{2.15}$$
$$^\bullet\Delta^\bullet(u,v) = 1 - \delta(u-v), \tag{2.16}$$

el punto del lado izquierdo de Δ indica derivada parcial con respecto a la primera variable, el punto del lado derecho indica derivada parcial respecto a la segunda variable. Se puede notar que en este formalismo no hay invariancia ante una traslación de τ, lo cual complica considerablemente los cálculos .

2.1.2. Formalismo SI

El formalismo SI (*string inspired*, inspirado en cuerdas) coloca el punto x_0 en el centro de masa del lazo

$$x_0^\mu := \frac{1}{T}\int_0^T d\tau\, x^\mu(\tau). \tag{2.17}$$



las funciones de correlación de este formalismo son [13]

$$\langle y^\mu(u)\, y^\nu(v)\rangle = -T\, G(u,v)\, g^{\mu\nu}, \tag{2.18}$$

con

$$\begin{aligned}
G(u,v) &= 2\langle u| \left(\frac{d^2}{du^2}\right)^{-1} |v\rangle, &(2.19)\\
G(u,v) &= |u-v| - \Big(u-v\Big)^2 - 1/6, &(2.20)\\
\dot{G}(u,v) &= \mathrm{Sign}(u-v) - 2(u-v), &(2.21)\\
\ddot{G}(u,v) &= 2\,\delta(u-v) - 2, &(2.22)
\end{aligned}$$

el punto indica derivada parcial respecto a la primera variable. Para este formalismo si hay invariancia ante una traslación de τ.

Cuando se trabaja en un espacio plano:

- En el cálculo de las amplitudes, ambos formalismos arrojan resultados idénticos después de usar el principio de conservación del momento.

- También es posible mostrar que al determinar el Lagrangiano efectivo por ambos formalismos, los resultados difieren por términos que son derivadas totales [15]. Además, el Lagrangiano efectivo del formalismo DBC siempre coincide con el Lagrangiano efectivo que se obtiene por el método núcleo de calor [15].

Cuando se trabaja en un espacio curvo:

- El formalismo DBC garantiza la covariancia del Lagrangiano efectivo [30].

- En el formalismo inspirado en cuerdas se tiene un Lagrangiano efectivo que contiene términos con derivadas totales no covariantes, lo cual impide que se puedan usar coordenadas riemannianas. Éstas no son otra cosa que un desarrollo de Taylor alrededor de un punto arbitrario x_0 en términos del tensor de Riemann [30]. Esto se verá con más detalle en las siguientes secciones.

Al tratar el caso espinorial, no se hacen cambios significativos a la teoría expuesta. No es necesario iniciar de nuevo los cálculos es suficiente con adicionar una integral de trayectoria incorporando los efectos del espín; las integrales de trayectoria que se adicionan son conocidas como integrales de Grassmann:

$$S[x, A] = \int D\psi(\tau)\, exp\left[-\int_0^T d\tau \left(\frac{1}{2}\psi \cdot \dot{\psi} - i\, e\, \psi^\mu F_{\mu\nu}\psi^\nu\right)\right], \tag{2.23}$$

donde la integral es sobre el espacio de funciones anti-periódicas y que anticonmutan:

$$\psi^\mu(\tau_1)\psi^\nu(\tau_2) = -\psi^\nu(\tau_2)\psi^\mu(\tau_1),\; \psi^\mu(T) = -\psi^\mu(0). \tag{2.24}$$

Las funciones de Grassman no tienen necesidad del punto x_0 por su propiedad anti-periódica. En este trabajo no se contempla el caso espinorial.

Para obtener la forma gaussina se realiza lo siguiente:

- Se expanden todas las interacciones exponenciales como $exp\Big[-S_{ext}[x(\tau)]\Big]$.

- Para la acción efectiva, se realiza una expanción de Taylor para el campo alrededor del punto x_0:

$$A^\mu(x(\tau)) = e^{y(\tau)\cdot\partial} A^\mu(x_0). \tag{2.25}$$

- Para amplitudes de N fotones se realiza una expansión del campo en N ondas planas:

$$A^\mu(x(\tau)) = \sum_{j=1}^{N} \epsilon_j^\mu\, e^{i\, k_j\cdot x(\tau)}, \tag{2.26}$$

esto permite que cada fotón pueda ser representado por un operador de vértice

$$V^{A}_{escalar}[k,\epsilon] = \int_0^T d\tau\,\epsilon\cdot\dot{x}(\tau)\,e^{i\,k\cdot x(\tau)}. \tag{2.27}$$

Este es el mismo operador que se usa en la teoría de cuerdas (ver por ejemplo [34]).

2.2. Teoría cuántica de campos con un campo externo $F_{\mu\nu}$

Los campos externos constantes juegan un papel muy importante en la electrodinámica cuántica, ya que para ese caso es posible encontrar una solución exacta a la ecuación de Dirac. Además, los campos en general se pueden aproximar a un campo constante siempre y cuando la variación del campo es pequeña comparada con la longitud de onda de Compton del electrón. En la teoría de campos estandar, el campo constante se absorbe en el propagador del electrón, en el formalismo worldline el campo se absorbe las funciones de correlación, por lo cual este formalismo resulta ser una mejor opción ya que requiere modificaciones menores.

Ahora se considera un campo electromagnético

$$\bar{A}_\mu\Big(x(u) = x_0 + y(u)\Big),$$

al cual se le impone la norma de Fock - Schwinger:

$$y^\mu(u)\bar{A}_\mu\Big(x_0 + y(u)\Big) = 0, \tag{2.28}$$

por lo cual se puede expander en potencias de y; en el caso especial de un espacio plano se tiene (ver por ejemplo [33]):

$$\begin{aligned}\bar{A}_\mu\Big(x(u) = x_0 + y(u)\Big) \;=\;& -\frac{1}{2}\bar{F}_{\mu\alpha}(x_0)y^\alpha(u) - \frac{1}{3}F_{\mu\alpha\,,\,\beta}(x_0)y^\alpha(u)\,y^\beta(u)\\ & -\frac{1}{8}\bar{F}_{\mu\alpha\,,\,\beta\gamma}(x_0)y^\alpha(u)\,y^\beta(u)\,y^\gamma(u)\\ & -\frac{1}{3!5}\bar{F}_{\mu\alpha\,,\,\beta\gamma\delta}(x_0)y^\alpha(u)\,y^\beta(u)\,y^\gamma(u)\,y^\delta(u)\\ & +\mathcal{O}(y^5).\end{aligned} \tag{2.29}$$

Si además se pide $\bar{F}_{\mu\nu}$ constante, entonces a primeros términos se tiene

$$\bar{A}_\mu(x) = -\frac{1}{2}\bar{F}_{\mu\nu}y^\nu, \tag{2.30}$$

por lo cual el Lagrangiano worldline tiene un término adicional

$$\Delta L = -\frac{1}{2}ie\bar{F}_{\mu\nu}\dot{y}^\mu\, y^\nu. \tag{2.31}$$

Este término se absorbe en el propagador libre worldline. Los cálculos se realizan en el formalismo inspirado en cuerdas, por lo cual se modifican las funciones de Green, ec. (2.20), de la siguiente forma

$$g^{\mu\nu}G(u_1,u_2) \to \mathcal{G}^{\mu\nu}(u_1,u_2) = \mathcal{G}^{\mu\nu}_{12}, \tag{2.32}$$

Ahora las funciones de correlación generalizadas tienen la siguiente forma:

$$\langle y^\mu(u)\, y^\nu(v)\rangle = -T\mathcal{G}^{\mu\nu}(u,v), \tag{2.33}$$

donde

$$2\langle u_1|\left(\frac{d^2}{du^2} - 2ie\bar{F}\frac{d}{du}\right)^{-1}|u_2\rangle \equiv \mathcal{G}(u_1,u_2). \tag{2.34}$$

Para simplificar las expresiones se usa la notación $G(u_1,u_2) = G_{12}$, $\dot{G}(u_1,u_2) = \dot{G}_{12}$, etc. La forma explicita de $\mathcal{G}$ está dada de la siguiente forma

$$\mathcal{G}(u_1,u_2) = \frac{1}{2\mathcal{Z}^2}\left(\frac{\mathcal{Z}}{\operatorname{sen}(\mathcal{Z})}e^{-i\mathcal{Z}\dot{G}_{12}} + i\mathcal{Z}\dot{G}_{12} - 1\right), \tag{2.35}$$

donde $\mathcal{Z} = eT\bar{F}$ [15], además

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{G}}(u_1,u_2) &= 2\langle u_1|\left(\frac{d}{du} - 2ie\bar{F}\right)^{-1}|u_2\rangle \\ &= \frac{i}{\mathcal{Z}}\left(\frac{\mathcal{Z}}{\operatorname{sen}(\mathcal{Z})}e^{-i\mathcal{Z}\dot{G}_{12}} - 1\right), \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathcal{G}}(u_1,u_2) &= 2\langle u_1|\left(\mathbb{1} - 2ie\bar{F}\left(\frac{d}{du}\right)^{-1}\right)^{-1}|u_2\rangle \\ &= 2\delta_{12} - \frac{2\mathcal{Z}}{\operatorname{sen}(\mathcal{Z})}e^{-i\mathcal{Z}\dot{G}_{12}}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Enseguida, se escribe la expansión de las funciones de Green en términos de las primeras potencias de $\bar{F}$ (en las siguientes expresiones se elimina la barra sobre F):

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{12} &= \mathbb{1}\,G_{12} - \frac{i}{3}\dot{G}_{12}G_{12}TeF + \left(\frac{T}{3}G_{12}^2 - \frac{T^3}{90}\right)(eF)^2 + \mathcal{O}(F^3), && (2.38)\\
\dot{\mathcal{G}}_{12} &= \mathbb{1}\,\dot{G}_{12} + 2iG_{12}eF + \frac{2}{3}\dot{G}_{12}G_{12}T(eF)^2 + \mathcal{O}(F^3), && (2.39)\\
\ddot{\mathcal{G}}_{12} &= \mathbb{1}\,\ddot{G}_{12} + 2i\dot{G}_{12}eF - 4G_{12}(eF)^2 + \mathcal{O}(F^3), && (2.40)
\end{aligned}$$

donde se ha usado $\dot{G}_{12}^2 = 5/3 - 4G_{12}$. Además, en los límites de coincidencia se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\tau,\tau) &= \frac{T}{2\mathcal{Z}}\left(\cot(\mathcal{Z}) - \frac{1}{\mathcal{Z}}\right), && (2.41)\\
\dot{\mathcal{G}}(\tau,\tau) &= i\cot(\mathcal{Z}) - \frac{i}{\mathcal{Z}}, && (2.42)\\
\ddot{\mathcal{G}}(\tau,\tau) &= 2\delta(0) - \frac{2\mathcal{Z}}{T}\cot(\mathcal{Z}). && (2.43)
\end{aligned}$$

Otro cambio que sufren las integrales de trayectoria debido a la existencia del campo electromagnético es el determinante de la integral [15]

$$(4\pi T)^{D/2} \longrightarrow (4\pi T)^{D/2}\det{}^{1/2}\left[\frac{\mathrm{sen}(\mathcal{Z})}{\mathcal{Z}}\right], \qquad (2.44)$$

donde D es la dimensión sobre la que se trabaja; en nuestro caso $D = 4$. Es de resaltar que cuando $F \to 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{12} &\to G_{12}, && (2.45)\\
\dot{\mathcal{G}}_{12} &\to \dot{G}_{12}, && (2.46)\\
\ddot{\mathcal{G}}_{12} &\to \ddot{G}_{12}, && (2.47)
\end{aligned}$$

y

$$(4\pi T)^{D/2}\det{}^{1/2}\left[\frac{\mathrm{sen}(\mathcal{F})}{\mathcal{F}}\right] \to (4\pi T)^{D/2}. \qquad (2.48)$$

De los trabajos [5, 6, 7] se conoce la corrección afectiva al Lagrangiano debido a la presencia de un campo constante $F_{\mu\nu}$:

$$\mathscr{L}^{(0)} \to \mathscr{L}^{(0)} + \mathscr{L}_{EH}^{(1)}, \qquad (2.49)$$

donde

$$\mathscr{L}^{(0)} \;=\; -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2), \tag{2.50}$$

y (ver (1.2))

$$\mathscr{L}^{(1)}_{EH(esc)} \;=\; \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{dT}{T}e^{-m^2T}\frac{e^2ab}{\mathrm{sen}(eaT)\,\mathrm{senh}(ebT)}.$$

Hasta el momento se ha trabajado en un espacio plano, ¿ cómo se modifica la teoría cuando se trabaja sobre un espacio curvo? Parte de la respuesta se encuentra en la siguiente sección.

2.3. Teoría cuántica de campos en un espacio curvo

Como ya se mencionó en la introducción, para aplicaciones del formalismo worldline a un campo gravitacional de fondo se requiere la generalización al espacio curvo; podría pensarse que la forma de introducir el espacio curvo, en el caso del término cinético, es mediante la modificación

$$\frac{1}{4}\int_0^T d\tau\,\dot{x}^2 \rightarrow \frac{1}{4}\int_0^T d\tau\,\dot{x}^\mu g_{\mu\nu}(x(\tau))\,\dot{x}^\nu. \tag{2.51}$$

Además de usar la linealización

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x_0) + kh_{\mu\nu}, \tag{2.52}$$

especificando la forma de una onda plana para $h_{\mu\nu}$:

$$h_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu}\,e^{ik\cdot x}, \tag{2.53}$$

el operador de vértice para el gravitón tendría la forma

$$\epsilon_{\mu\nu}\int_0^T d\tau\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu\,e^{ik\cdot x}, \tag{2.54}$$

donde $\epsilon_{\mu\nu}$ es la polarización del gravitón.

Desgraciadamente las cosas no son tan sencillas, ya que al usar esta forma para el vértice en una integral de trayectorias gaussiana, se obtienen expresiones que contienen cantidades indefinidas como $\delta(0)$, $\delta^2(\tau_i-\tau_j)$, $\delta^3(\tau_i-\tau_j)$,.... El espacio curvo guarda ciertas sutilezas que deben ser consideradas al momento de trabajar en el formalismo worldline. En el año 1957, De Witt [21] realizó el cálculo de la amplitud de transición de una partícula escalar no relativista empleando dos métodos: la ecuación de Schrödinger e integrales de trayectoria

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \left\langle x_f | e^{-\frac{1}{\hbar}(t_f-t_i)\hat{H}} | x_i \right\rangle, \tag{2.55}$$

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}x \, e^{-S[x]}, \tag{2.56}$$

al hacer la comparación entre ambos resultados encontró que se requiere un término adicional al Lagrangiano worldline, cambio que implicaba

$$\hat{H} \to \hat{H} + \xi_{DW} \, R. \tag{2.57}$$

El valor que encontró De Witt para ξ_{DW}, después de algunas correcciones a su trabajo original, es $-1/8$; este término adicional al hamiltoniano tiene que ver con las divergencias UV que surgen en la construcción de la integral de trayectorias, por muchos años se discutía el valor de este parámetro. Actualmente se ha establecido el valor correcto y bajo nuestras convenciones es $-1/4$. Finalmente ξ_{DW} se adiciona al ξ que surge de la ambigüedad sobre el ordenamiento del Hamiltoniano y con esto

$$\bar{\xi} = \xi - \frac{1}{4}, \tag{2.58}$$

es el valor del coeficiente de R en la acción worldline.

Además, en un espacio curvo se tiene un factor de medida no trivial a lo largo de la trayectoria [22]

$$\mathcal{D}x = Dx \prod_{0 \leq \tau < T} \sqrt{\det \, g_{\mu\nu}(x(\tau))}. \tag{2.59}$$

Recientemente se ha logrado moldear la forma de $\mathcal{D}x$ para ser empleada en el formalismo worldline [30]:

$$\mathcal{D}x = Dx \prod_{0 \leq \tau < T} \sqrt{\det \, g_{\mu\nu}(x(\tau))} = Dx \int_{PBC} Da \, Db \, Dc \, e^{-S_{gh}[x,a,b,c]}, \tag{2.60}$$

donde a, b y c son conocidos como campos fantasmas (*ghost*), S_{gh} es la acción fantasma

$$S_{gh}[x,a,b,c] = \int_0^T d\tau\, \frac{1}{4} g_{\mu\nu}(x)\,(a^\mu\, a^\nu + b^\mu\, c^\nu). \tag{2.61}$$

Los campos a conmutan entre sí, mientras que los campos b y c anticonmutan. Las funciones de correlación de los campos fantasma contienen funciones δ:

$$\langle a^\mu(\tau_1)\, a^\nu(\tau_2)\rangle = 2g^{\mu\nu}(x_0)\,\delta(\tau_1-\tau_2), \tag{2.62}$$

$$\langle b^\mu(\tau_2)\, c^\nu(\tau_2)\rangle = -4g^{\mu\nu}(x_0)\,\delta(\tau_1-\tau_2), \tag{2.63}$$

y gracias a las contribuciones de los campos fantasmas es posible cancelar las divergencias o términos indefinidos que surgen en las contracciones de Wick. Así que el operador de vértice gravitacional, ec. (2.54), adquiere la siguiente forma

$$V^h_{escalar}[k,\epsilon] = \epsilon_{\mu\nu}\int_0^T d\tau\,\Big[\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu + a^\mu\, a^\nu + b^\mu\, c^\nu\Big]. \tag{2.64}$$

Hasta el momento, la acción worldline tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S[x^\mu; g, A] \;&=\; \int_0^1 d\tau \Bigg[\frac{1}{4T} g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + ie\dot{x}^\mu A_\mu(x) + Tm^2 \\ &\quad + T\bar{\xi}\, R(x) + \frac{1}{4T} g_{\mu\nu}\Big(a^\mu a^\nu + b^\mu c^\nu\Big)\Bigg]. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Combinando las coordenadas normales riemannianas y la norma de Fock-Schwinger se generaliza la ec. (2.29) [33]:

$$g_{\mu\nu}(x=x_0+y) \;=\; g_{\mu\nu}(x_0) + \frac{1}{3}R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0)\, y^\alpha\, y^\beta + \frac{1}{6}R_{\mu\alpha\beta\nu\,;\,\gamma}(x_0)\, y^\alpha\, y^\beta\, y^\gamma + \cdots \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned} A_\mu(x=x_0+y) \;&=\; -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}(x_0)\, y^\nu - \frac{1}{3}F_{\mu\nu;\alpha}(x_0)\, y^\nu\, y^\alpha - \frac{1}{8}\Bigg[F_{\mu\nu;\alpha\beta}(x_0) + \\ &\quad + \frac{1}{3}F_{\delta\alpha}(x_0)\, R^\delta_{\ \beta\nu\mu}(x_0)\Bigg] y^\alpha\, y^\beta\, y^\nu + \cdots \end{aligned} \tag{2.67}$$

Todavia no es posible usar estas expresiones en la acción worldline pues ya se comento en la sección 2.1.2 que en el espacio curvo *en el formalismo inspirado* *en cuerdas se tiene un Lagrangiano efectivo que contiene términos con derivadas totales no covariantes, lo cual impide que se puedan usar coordenadas riemannianas.* En los trabajos recientes de Bastianelli, Corradini y Zirotti encontraron la forma de generar el carácter covariante para el Lagrangiano efectivo del formalismo inspirado en cuerdas [28], se introducen términos del tipo Fadeev - Popov al Lagrangiano worldline:

$$S_{FP} = -\int_0^1 du\; \bar{\eta}_\mu \, Q^\mu{}_\nu\Big(x_0, y(u)\Big)\, \eta^\nu, \tag{2.68}$$

donde

$$\begin{aligned} Q^\mu{}_\nu &= \delta^\mu_\nu + \frac{1}{3} R^\mu{}_{\alpha\beta\nu}\, y^\alpha y^\beta + \cdots && (2.69)\\ \langle \eta^\mu \, \bar{\eta}_\nu \rangle &= -\delta^\mu_\nu = -\langle \bar{\eta}_\nu \, \eta^\mu \rangle, && (2.70) \end{aligned}$$

con η y $\bar{\eta}$ campos fantasmas constantes. La acción S_{FP} proporciona los términos necesario para que las derivadas totales que aparecen en el Lagrangiano efectivo del formalismo inspirado en cuerdas adquieran la propiedad de ser covariantes, y una vez que adquieren esta cualidad, es posible usar coordenadas riemannianas.

Así que la acción efectiva se expresa de la siguiente forma:

$$\Gamma[g, A] = \int_0^\infty \frac{dT}{T} \int \frac{d^4 x_0 \sqrt{g}}{(4\pi T)^{\frac{D}{2}}} e^{-m^2 T} \left\langle e^{-S} \right\rangle, \tag{2.71}$$

ahora la acción worldline está compuesta por una gran variedad de elementos, pero en este trabajo se ha truncado (2.66) y (2.67) hasta términos de la forma $RF \cdots F$, aunque también se consideran términos que se puedan mezclar con éstos, por el hecho que

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \rightarrow R_{\mu\nu..},$$

así que los elementos de la acción worldline tiene los elementos:

- Acción libre:

$$S_0 = \int_0^1 du\; \frac{1}{4T} g_{\mu\nu}(x_0) \dot{y}^\mu(u) \dot{y}^\nu(u). \tag{2.72}$$

- Acción gravitacional:

$$S_{grav} = \int_0^1 du \left[\frac{1}{12T} R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0) \dot{y}^\mu(u) y^\alpha(u) y^\beta(u) \dot{y}^\nu(u) + T\bar{\xi}\, R(x_0) \right]. \tag{2.73}$$

- Acción electromagnética:

$$S_{em} = \int_0^1 du\Big[- \frac{ie}{2}F_{\mu\nu}(x_0)\dot{y}^\mu(u)y^\nu(u) - \frac{ie}{3}F_{\mu\nu;\alpha}(x_0)\dot{y}^\mu(u)y^\nu(u)y^\alpha(u)$$

$$-\frac{ie}{8}\left\{F_{\mu\nu;\alpha\beta}(x_0) + \frac{1}{3}F_{\lambda\nu}\, R^\lambda{}_{\alpha\beta\mu}(x_0)\right\} y^\nu(u)\, y^\alpha(u)\, y^\beta(u)\, \dot{y}^\mu(u)\Big], \quad (2.74)$$

es conveniente definir

$$S_{em}^{(0)} = \int_0^1 du\left[-\frac{ie}{2}F_{\mu\nu}(x_0)\dot{y}^\mu(u)y^\nu(u)\right], \quad (2.75)$$

$$S_{em}^{(1)} = \int_0^1 du\left[-\frac{ie}{3}F_{\mu\nu;\alpha}(x_0)\dot{y}^\mu(u)y^\nu(u)y^\alpha(u)\right], \quad (2.76)$$

$$S_{em}^{(2)} = \int_0^1 du\left[-\frac{ie}{8}F_{\mu\nu;\alpha\beta}(x_0)y^\nu(u)\, y^\alpha(u)\, y^\beta(u)\, \dot{y}^\mu(u)\right], \quad (2.77)$$

$$S_{em,grav} = \int_0^1 du\left[-\frac{ie}{24}F_{\lambda\nu}\, R^\lambda{}_{\alpha\beta\mu}(x_0)y^\nu(u)\, y^\alpha(u)\, y^\beta(u)\, \dot{y}^\mu(u)\right], \quad (2.78)$$

- Acción fantasma

$$S_{gh} = \int_0^1 du\frac{1}{4T}\Big[g_{\mu\nu}(x_0)\Big(a^\mu(u)\, a^\nu(u) + b^\mu(u)\, c^\nu(u)\Big)$$
$$+\frac{1}{3}R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0)\, y^\alpha\, y^\beta\Big(a^\mu(u)\, a^\nu(u) + b^\mu(u)\, c^\nu(u)\Big) + \cdots\Big]. \quad (2.79)$$

Definimos

$$S_{gh}^{(0)} = \int_0^1 du\frac{1}{4T}\, g_{\mu\nu}(x_0)\Big(a^\mu(u)\, a^\nu(u) + b^\mu(u)\, c^\nu(u)\Big), \quad (2.80)$$

$$S_{gh}^{(1)} = \int_0^1 du\frac{1}{12\, T}R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0)\, y^\alpha\, y^\beta\Big(a^\mu(u)\, a^\nu(u) + b^\mu(u)\, c^\nu(u)\Big). \quad (2.81)$$

Finalmente, en el formalismo inspirado en cuerdas se incluye S_{FP}, (2.68), por lo cual la acción worldline contiene los siguientes elementos

$$S = S_0 + S_{grav} + S_{gh} + S_{em} + S_{FP}. \tag{2.82}$$

Así que las reglas de contracción de Wick en el formalismo inspirado en cuerdas son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\langle y^\mu(u)\, y^\nu(v)\rangle &= -T\, G(u,v)\, g^{\mu\nu}, && (2.83)\\
\langle a^\mu(u)\, a^\nu(v)\rangle &= 2g^{\mu\nu}(x_0)\, \delta(u-v), && (2.84)\\
\langle b^\mu(u)\, c^\nu(v)\rangle &= -4g^{\mu\nu}(x_0)\, \delta(u-v), && (2.85)\\
\langle \eta^\mu\, \bar{\eta}_\nu\rangle &= -\delta^\mu_\nu = -\langle \bar{\eta}_\nu\, \eta^\mu\rangle, && (2.86)\\
G(u,v) &= |u-v| - \Big(u-v\Big)^2 - \frac{1}{6}. && (2.87)
\end{aligned}$$

Al usar la norma de Fock-Schwinger, en el espacio curvo se tiene la posibilidad de unir el término cinético con $S^{(0)}_{em}$ debido a que éste último es de la forma $y\dot{y}$; así que, los efectos de $S^{(0)}_{em}$ se pueden tomar en cuenta de manera no perturbativa, como se procede en la sección 2.2, ec. (2.34).

Capítulo 3

Los términos $R\,F\,F$ en la acción efectiva

En [35] se obtiene la expresión de la acción efectiva a un lazo al nivel de términos RFF usando el método *núcleo de calor*. El resultado al que se llega es

$$\begin{aligned}\Gamma[g,A] \;&=\; \frac{e^2}{360m^2}\int\frac{d^4x\sqrt{g}}{(4\pi)^2}\Bigg[-5(1-6\xi)RF^2_{\mu\nu}+4R_{\mu\nu}F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\ \alpha}\\ &\quad -6R_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}-2(\nabla^{\alpha}F_{\alpha\mu})^2-8(\nabla_{\alpha}F_{\mu\nu})^2-12F_{\mu\nu}\Box F^{\mu\nu}\Bigg].\end{aligned} \tag{3.1}$$

Tomando en cuenta este resultado se verifican los argumentos de Bastianelli, Corradini y Zirotti [28]:

- El formalismo DBC va a reproducir exactamente (3.1).
- El formalismo SI reproducirá el Lagrangiano efectivo de (3.1) con ciertos términos adicionales que se pueden escribir como derivadas totales covariantes.

Una observación que será de gran utilidad en cálculos posteriores se debe a la propiedad de anti-simetría del tensor $F_{\mu\nu}$, ya que si consideramos la integral

$$\int du_1\, F_{\alpha\beta}\,\dot{y}_1^{\alpha}\,y_1^{\beta},$$

al realizar una integración por parte sobre u_1 se tiene que

$$\begin{aligned} \int du_1\, F_{\alpha\beta}\, \dot{y}_1^{\alpha}\, y_1^{\beta} &= -\int du_1\, F_{\alpha\beta}\, y_1^{\alpha}\, \dot{y}_1^{\beta} \\ &= -\int du_1\, F_{\beta\alpha}\, y_1^{\beta}\, \dot{y}_1^{\alpha} \\ &= \int du_1\, F_{\alpha\beta}\, y_1^{\beta}\, \dot{y}_1^{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Esta relación no parece muy trascendental, pero evitará hacer demasiados cálculos, pues con este truco, el número de contracciones a calcular se reduce a la mitad. También es importante comentar que no se han escrito todas las contracciones que se pueden generar, sólo hemos calculado un número determinado y el número total se sabe usando la simetría de cada término. Por ejemplo, se tiene un factor dos por cada factor $Fy\dot{y}$.

3.1. Formalismo DBC

En los siguientes cálculos se toma

$$\int_0^1 du = \int du, \tag{3.3}$$

además

$$y(u_i) = y_i, \tag{3.4}$$

y

$$\delta(u_i - u_j) = \delta_{ij}. \tag{3.5}$$

3.1.1. Término $RF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

Este término llega de la contracción mutua de los tensores electromagnéticos junto con la contracción del tensor gravitacional sobre sí mismo, y para ello se usa la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2}\left\langle \left(-S_{em}^{(0)}\right)^2 \left(-S_{grav} - S_{gh}^{(1)}\right)\right\rangle \tag{3.6}$$

Primero se hace el cálculo para la parte electromagnética:

$$\frac{1}{2}\left\langle\left(-S_{em}^{(0)}\right)^2\right\rangle = \frac{1}{2}\left(-\frac{ie}{2}\right)^2\left\langle\int du_1\,du_2\,F_{\mu\nu}\,\dot{y}_1^\mu\,y_1^\nu\,F_{\alpha\beta}\,\dot{y}_2^\alpha\,y_2^\beta\right\rangle. \tag{3.7}$$

Ahora se calculan las diferentes contracciones:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathcal{A} &= \langle\dot{y}_1^\mu\,\dot{y}_2^\alpha\rangle\langle y_1^\nu\,y_2^\beta\rangle\\ &= (-2Tg^{\mu\alpha}\,{}^\bullet\Delta_{12}^\bullet)\left(-2Tg^{\nu\beta}\Delta_{12}\right)\\ &= 4T^2\,g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\,{}^\bullet\Delta_{12}^\bullet\,\Delta_{12}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Veamos que resulta de la integración sobre u_1:

$$\begin{aligned}\int du_1\,{}^\bullet\Delta_{12}^\bullet\,\Delta_{12} &= \int du_1\left(1-\delta_{12}\right)\Delta_{12}\\ &= \int du_1\,\Delta_{12}-\Delta_{22},\end{aligned} \tag{3.9}$$

entonces

$$\begin{aligned}\int du_1\,du_2\,{}^\bullet\Delta_{12}^\bullet\,\Delta_{12} &= \int du_1\,du_2\,\Delta_{12}-\int du_2\,\Delta_{22}\\ &= -\frac{1}{12}-\left(-\frac{1}{6}\right)\\ &= \frac{1}{12}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

La contracción de los índices está dada por

$$F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{3.11}$$

por lo cual se tiene que

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\int du_1\,du_2\,\mathcal{A}\mathcal{A} &= 4T^2\left(\frac{1}{12}\right)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\\ &= \frac{1}{3}T^2F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Ahora veamos la siguiente contracción:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathcal{B} &= \langle\dot{y}_1^\mu\,y_2^\beta\rangle\langle y_1^\nu\,\dot{y}_2^\alpha\rangle\\ &= 4T^2\,g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}\,{}^\bullet\Delta_{12}\,\Delta_{12}^\bullet,\end{aligned} \tag{3.13}$$

pero

$$\int du_1\, du_2\, {}^\bullet\Delta_{12}\, \Delta_{12}^\bullet = -\frac{1}{12}, \tag{3.14}$$

así que ahora se calcula la contracción de índices

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} = F_{\mu\nu}\, F^{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}, \tag{3.15}$$

entonces

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta} \int du_1\, du_2\, \mathcal{A}\mathcal{B} &= -4T^2 \left(-\frac{1}{12}\right) F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{3} T^2 F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

De estas dos contracciones se tiene

$$\frac{2}{3} T^2 F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}. \tag{3.17}$$

Así que para la contracción de los tensores electromagnéticos se tiene el siguiente resultado

$$\frac{1}{2} \left(\frac{-ie}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) T^2 F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu} = -\frac{1}{12} e^2 T^2 F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}. \tag{3.18}$$

Ahora se calculan las contracciones correspondientes a la parte gravitacional

$$\begin{aligned} \left\langle -S_{grav} - S_{gh}^{(1)} \right\rangle &= -\int du_3 \left\langle \frac{1}{12\,T} R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\, \dot{y}_3^\gamma\, y_3^\delta\, y_3^\epsilon\, \dot{y}_3^\eta + T\bar{\xi}\, R \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12\,T} R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\, y_3^\delta\, y_3^\epsilon \Big(a_3^\gamma\, a_3^\eta + b_3^\gamma\, c_3^\eta \Big) \right\rangle \\ &= -\frac{1}{12\,T} R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \int du_3 \left\langle \dot{y}_3^\gamma\, y_3^\delta\, y_3^\epsilon\, \dot{y}_3^\eta + y_3^\delta\, y_3^\epsilon \Big(a_3^\gamma\, a_3^\eta + b_3^\gamma\, c_3^\eta \Big) \right\rangle - T\bar{\xi}\, R. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Veamos las contracciones de $S_{(grav)}$: la primera contracción es

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{C} &= \langle \dot{y}_3^\gamma\, y_3^\epsilon \rangle\, \langle y_3^\delta\, \dot{y}_3^\eta \rangle \\ &= 4T^2\, g^{\gamma\epsilon} g^{\delta\eta}\, {}^\bullet\Delta_{33}\, \Delta_{33}^\bullet, \end{aligned} \tag{3.20}$$

pero

$$\int du_3\, {}^\bullet\Delta_{33}\, \Delta_{33}^\bullet \;=\; \frac{1}{12} \tag{3.21}$$

La contracción de índices es la siguiente:

$$R_{\gamma\delta\epsilon\eta} g^{\gamma\epsilon} g^{\delta\eta} = R_{\gamma\delta\ \eta}^{\ \ \gamma} g^{\delta\eta} = R_{\delta\eta} g^{\delta\eta} = R. \tag{3.22}$$

Entonces

$$R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \int du_3\, \mathcal{AC} \;=\; \frac{1}{3} T^2 R. \tag{3.23}$$

La siguiente contracción es

$$\begin{aligned} \mathcal{AD} &= \langle \dot{y}_3^\gamma\, \dot{y}_3^\eta \rangle \langle y_3^\delta\, y_3^\epsilon \rangle \\ &= (-2T)^2\, g^{\gamma\eta}\, g^{\delta\epsilon}\, {}^\bullet\Delta_{33}^\bullet\, \Delta_{33}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Para la integral se tiene

$$\int du_3\, {}^\bullet\Delta_{33}^\bullet\, \Delta_{33} = \int du_3 \Big(1 - \delta_{33} \Big) \Delta_{33}, \tag{3.25}$$

pero el término que contiene a δ_{33} se cancela con la contribución de los campos fantasma (lo cual se verifica en el apéndice A), así que sólo se tiene

$$\int du_3\, \Delta_{33} \;=\; -\frac{1}{6}. \tag{3.26}$$

Para la siguiente contracción de índices hay que tener presente la propiedad de antisimetría del tensor de curvatura (ver apéndice B). Así la contración toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\, g^{\gamma\eta}\, g^{\delta\epsilon} &= -R_{\gamma\delta\eta\epsilon}\, g^{\gamma\eta}\, g^{\delta\epsilon} \\ &= -R_{\gamma\delta\ \epsilon}^{\ \ \gamma}\, g^{\delta\epsilon} = -R_{\delta\epsilon}\, g^{\delta\epsilon} \\ &= -R^{\epsilon}_{\ \epsilon} = -R, \end{aligned} \tag{3.27}$$

entonces

$$R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \int du_3\, \mathcal{AD} \;=\; \frac{2}{3} T^2 R. \tag{3.28}$$

Al sumar (3.23) y (3.28) se tiene

$$T^2 R,$$

así que

$$\left\langle -S_{grav} - S_{gh}^{(1)} \right\rangle = -\frac{1}{12T} T^2 R - \bar{\xi}\, RT = -\left(\frac{1}{12} + \bar{\xi}\right) RT. \quad (3.29)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\langle \left(-S_{em}^{(0)}\right)^2 \left(-S_{grav} - S_{gh}\right) \right\rangle &= \left(-\frac{1}{12} e^2 T^2 F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}\right) \left[-\left(\frac{1}{12} + \bar{\xi}\right) RT\right] \\ &= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{12} + \bar{\xi}\right) e^2\, T^3 R\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{72}(1 - 6\xi) e^2\, T^3 R\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde se usa $\bar{\xi} = \xi - \frac{1}{4}$.

3.1.2. Término $F_\mu{}^\alpha F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}$

Este término viene de la contracción simple entre un tensor gravitacional y dos tensores electromagnéticos, por lo cual se pueden usar las siguientes expresiones

$$\frac{1}{2}\left\langle \left(-S_{em}^{(0)}\right)^2 \left(-S_{grav} - S_{gh}\right) \right\rangle, \quad (3.31)$$

$$\left\langle \left(-S_{em,grav}\right) \left(-S_{em}^{(0)}\right) \right\rangle, \quad (3.32)$$

donde se usa

$$S_{grav} = \int_0^1 du\, \frac{1}{12T} R_{\mu\alpha\beta\nu} \dot{y}^\mu y^\alpha y^\beta \dot{y}^\nu. \quad (3.33)$$

Ya se sabe que las contracciones del los campos fantasma permiten eliminar cantidades de la forma δ_{ii} así que en los siguientes cálculos no se escribirán en las contracciones de Wick.

Con estas consideraciones se tienen los siguientes arreglos :

- El primero de ellos es

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{ie}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{12T}\right) \left\langle \int du_1 du_2 du_3 F_{\mu\nu}\, \dot{y}_1^\mu\, y_1^\nu\, F_{\alpha\beta}\, \dot{y}_2^\alpha\, y_2^\beta\, R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\, \dot{y}_3^\gamma\, y_3^\delta\, y_3^\epsilon\, \dot{y}_3^\eta \right\rangle, \quad (3.34)$$

- el segundo arreglo tiene la siguiente forma

$$\left(-\frac{ie}{2}\right)\left(-\frac{ie}{24}\right)\left\langle \int du_1 du_2\, F_{\alpha\beta}\, \dot{y}_1^{\alpha}\, y_1^{\beta}\, F_{\lambda\nu}\, R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\eta}\, y_2^{\nu}\, y_2^{\delta}\, y_2^{\epsilon}\, \dot{y}_2^{\eta} \right\rangle. \tag{3.35}$$

Para el primer arreglo se tienen las siguientes contracciones:

$$\begin{aligned}
\mathcal{BA} &= \langle \dot{y}_1^{\mu}\, \dot{y}_2^{\alpha}\rangle \langle y_1^{\nu}\, \dot{y}_3^{\gamma}\rangle \langle y_2^{\beta}\, y_3^{\epsilon}\rangle \langle y_3^{\delta}\, \dot{y}_3^{\eta}\rangle,\\
\mathcal{BB} &= \langle \dot{y}_1^{\mu}\, \dot{y}_2^{\alpha}\rangle \langle y_1^{\nu}\, \dot{y}_3^{\gamma}\rangle \langle y_2^{\beta}\, \dot{y}_3^{\eta}\rangle \langle y_3^{\delta}\, y_3^{\epsilon}\rangle,\\
\mathcal{BC} &= \langle \dot{y}_1^{\mu}\, \dot{y}_2^{\alpha}\rangle \langle y_1^{\nu}\, y_3^{\delta}\rangle \langle y_2^{\beta}\, y_3^{\epsilon}\rangle \langle \dot{y}_3^{\gamma}\, \dot{y}_3^{\eta}\rangle,\\
\mathcal{BD} &= \langle \dot{y}_1^{\mu}\, \dot{y}_2^{\alpha}\rangle \langle y_1^{\nu}\, y_3^{\delta}\rangle \langle y_2^{\beta}\, \dot{y}_3^{\eta}\rangle \langle \dot{y}_3^{\gamma}\, y_3^{\epsilon}\rangle,\\
\mathcal{BE} &= \langle \dot{y}_1^{\mu}\, \dot{y}_2^{\alpha}\rangle \langle y_1^{\nu}\, y_3^{\epsilon}\rangle \langle y_2^{\beta}\, \dot{y}_3^{\gamma}\rangle \langle y_3^{\delta}\, \dot{y}_3^{\eta}\rangle,\\
\mathcal{BF} &= \langle \dot{y}_1^{\mu}\, \dot{y}_2^{\alpha}\rangle \langle y_1^{\nu}\, y_3^{\epsilon}\rangle \langle y_2^{\beta}\, y_3^{\delta}\rangle \langle \dot{y}_3^{\gamma}\, \dot{y}_3^{\eta}\rangle,\\
\mathcal{BG} &= \langle \dot{y}_1^{\mu}\, \dot{y}_2^{\alpha}\rangle \langle y_1^{\nu}\, \dot{y}_3^{\eta}\rangle \langle y_2^{\beta}\, \dot{y}_3^{\gamma}\rangle \langle y_3^{\delta}\, y_3^{\epsilon}\rangle,\\
\mathcal{BH} &= \langle \dot{y}_1^{\mu}\, \dot{y}_2^{\alpha}\rangle \langle y_1^{\nu}\, \dot{y}_3^{\eta}\rangle \langle y_2^{\beta}\, y_3^{\delta}\rangle \langle \dot{y}_3^{\gamma}\, y_3^{\epsilon}\rangle.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Podemos observar que

$$R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\, \dot{y}_3^{\gamma}\, y_3^{\delta}\, y_3^{\epsilon}\, \dot{y}_3^{\eta} = R_{\eta\epsilon\delta\gamma}\, \dot{y}_3^{\eta}\, y_3^{\epsilon}\, y_3^{\delta}\, \dot{y}_3^{\gamma}, \tag{3.37}$$

y

$$\int du_3\, \langle y_3^{\delta}\, \dot{y}_3^{\eta}\rangle = \int du_3\, \langle \dot{y}_3^{\eta}\, y_3^{\delta}\rangle, \tag{3.38}$$

con lo cual se puede concluir que $\mathcal{BA} = \mathcal{BH}$ y $\mathcal{BD} = \mathcal{BE}$. Si ahora se usa que

$$R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\, \dot{y}_3^{\gamma}\, y_3^{\delta}\, y_3^{\epsilon}\, \dot{y}_3^{\eta} = R_{\eta\delta\epsilon\gamma}\, \dot{y}_3^{\eta}\, y_3^{\delta}\, y_3^{\epsilon}\, \dot{y}_3^{\gamma}, \tag{3.39}$$

entonces $\mathcal{BB} = \mathcal{BG}$. Como

$$R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\, \dot{y}_3^{\gamma}\, y_3^{\delta}\, y_3^{\epsilon}\, \dot{y}_3^{\eta} = R_{\gamma\epsilon\delta\eta}\, \dot{y}_3^{\gamma}\, y_3^{\epsilon}\, y_3^{\delta}\, \dot{y}_3^{\eta}, \tag{3.40}$$

implica que $\mathcal{BC} = \mathcal{BF}$.

Con estas relaciones, sólo se hace el cálculo para las cuatro primeras contracciones:

$$\begin{aligned}
\mathcal{BA} &= \langle \dot{y}_1^{\mu}\, \dot{y}_2^{\alpha}\rangle \langle y_1^{\nu}\, \dot{y}_3^{\gamma}\rangle \langle y_2^{\beta}\, y_3^{\epsilon}\rangle \langle y_3^{\delta}\, \dot{y}_3^{\eta}\rangle\\
&= (-2T)^4 g^{\mu\alpha} g^{\nu\gamma} g^{\beta\epsilon} g^{\delta\eta}\, {}^{\bullet}\Delta^{\bullet}_{12}\, \Delta^{\bullet}_{13}\, \Delta_{23}\, \Delta^{\bullet}_{33}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Pero

$$\begin{aligned}\int du_1 \, {}^\bullet\Delta^\bullet_{12}\, \Delta^\bullet_{13} &= \int du_1 \Big(1-\delta_{12}\Big)\Delta^\bullet_{13} \\ &= \int du_1\, \Delta^\bullet_{13} - \Delta^\bullet_{23},\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\int du_1\, du_2\, du_3\, {}^\bullet\Delta^\bullet_{12}\, \Delta^\bullet_{13}\, \Delta_{23}\, \Delta^\bullet_{33} &= \int du_1\, du_2\, du_3\, \Delta^\bullet_{13}\, \Delta_{23}\, \Delta^\bullet_{33} \\ &\quad - \int du_2\, du_3 \Delta^\bullet_{23}\, \Delta_{23}\, \Delta^\bullet_{33} \\ &= -\frac{1}{240} - \left(-\frac{1}{180}\right) \\ &= \frac{1}{720}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Además los índices se contraen de la siguiente forma

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\gamma} g^{\beta\epsilon} g^{\delta\eta} &= F_\mu^{\ \gamma}\, F^{\mu\epsilon}\, R_{\delta\gamma\eta\epsilon}\, g^{\delta\eta} = F_\mu^{\ \gamma}\, F^{\mu\epsilon}\, R_{\delta\gamma\ \epsilon}^{\ \ \ \delta} \\ &= F_\mu^{\ \gamma}\, F^{\mu\epsilon}\, R_{\gamma\epsilon} = F_\mu^{\ \alpha}\, F^{\mu\beta}\, R_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{3.43}$$

Así que

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \int du_1 du_2 du_3\, \mathcal{BA} &= \frac{16}{720} T^4 F_\mu^{\ \alpha}\, F^{\mu\beta}\, R_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{45} T^4 F_\mu^{\ \alpha}\, F^{\mu\beta}\, R_{\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Ahora se calcula la siguiente contracción:

$$\begin{aligned}\mathcal{BB} &= \langle \dot y_1^\mu\, \dot y_2^\alpha\rangle\, \langle y_1^\nu\, \dot y_3^\gamma\rangle\, \langle y_2^\beta\, \dot y_3^\eta\rangle\, \langle y_3^\delta\, y_3^\epsilon\rangle \\ &= (-2T)^4 g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\gamma}\, g^{\beta\eta}\, g^{\delta\epsilon}\, {}^\bullet\Delta^\bullet_{12}\, \Delta^\bullet_{13}\, \Delta^\bullet_{23}\, \Delta_{33}\end{aligned} \tag{3.45}$$

La integral sobre u_1 nos da lo siguiente:

$$\int du_1\, {}^\bullet\Delta^\bullet_{12}\, \Delta^\bullet_{13} = \int du_1\, \Delta^\bullet_{13} - \Delta^\bullet_{23},$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\int du_1 du_2 du_3 \,{}^\bullet\Delta^\bullet_{12}\,\Delta^\bullet_{13}\,\Delta^\bullet_{23}\,\Delta_{33} &= \int du_2 du_3 \left(\int du_1\,\Delta^\bullet_{13} - \Delta^\bullet_{23}\right)\Delta^\bullet_{23}\,\Delta_{33} \\
&= \int du_1 du_2 du_3\,\Delta^\bullet_{13}\,\Delta^\bullet_{23}\,\Delta_{33} \\
&\quad - \int du_2 du_3\,\Delta^\bullet_{23}\,\Delta^\bullet_{23}\,\Delta_{33} \\
&= -\frac{1}{120} - \left(-\frac{1}{45}\right) \\
&= \frac{1}{72}. \qquad (3.46)
\end{aligned}$$

La contracción correspondiente de los índices es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R_{\gamma\delta\epsilon\eta} g^{\mu\alpha}\,g^{\nu\gamma}\,g^{\beta\eta}\,g^{\delta\epsilon} &= -F_\mu{}^\gamma\,F^{\mu\eta} R_{\delta\gamma\epsilon\eta} g^{\delta\epsilon} \\
&= -F_\mu{}^\gamma\,F^{\mu\eta} R_{\gamma\eta}. \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\int du_1 du_2 du_3\,\mathcal{B}\mathcal{B} &= (-2T)^4(-F_\mu{}^\gamma\,F^{\mu\eta}R_{\gamma\eta})\left(\frac{1}{72}\right) \\
&= -\frac{2}{9}T^4 F_\mu{}^\alpha\,F^{\mu\beta}R_{\alpha\beta}. \qquad (3.48)
\end{aligned}$$

Veamos otra contracción:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}\mathcal{C} &= \langle \dot{y}_1^\mu\,\dot{y}_2^\alpha\rangle\,\langle y_1^\nu\,y_3^\delta\rangle\,\langle y_2^\beta\,y_3^\epsilon\rangle\,\langle \dot{y}_3^\gamma\,\dot{y}_3^\eta\rangle \\
&= (-2T)^4 g^{\mu\alpha}\,g^{\nu\delta}\,g^{\beta\epsilon}\,g^{\gamma\eta}\,{}^\bullet\Delta^\bullet_{12}\,\Delta_{13}\,\Delta_{23}\,{}^\bullet\Delta^\bullet_{33}. \qquad (3.49)
\end{aligned}$$

Dado que ${}^\bullet\Delta^\bullet_{33} = 1 - \delta_{33}$ voy a ignorar por el momento el término con δ_{33} pues éste se cancela con la contribución de los campos fantasma.

Como

$$\begin{aligned}
\int du_1\,{}^\bullet\Delta^\bullet_{12}\,\Delta_{13} &= \int du_1\Big(1 - \delta_{12}\Big)\,\Delta_{13} \\
&= \int du_1\,\Delta_{13} - \Delta_{23}, \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\int du_1du_2du_3\,{}^\bullet\Delta^\bullet_{12}\,\Delta_{13}\,\Delta_{23} &= \int du_1du_2du_3\,\Delta_{13}\,\Delta_{23}\\ &\quad -\int du_2du_3\,\Delta_{23}\,\Delta_{23}\\ &= \frac{1}{120}-\frac{1}{90}=-\frac{1}{360},\end{aligned}\tag{3.51}$$

y por lo tanto,

$$\int du_1du_2du_3\,{}^\bullet\Delta^\bullet_{12}\,\Delta_{13}\,\Delta_{23}\,{}^\bullet\Delta^\bullet_{33} = -\frac{1}{360},\tag{3.52}$$

Ahora se calcula la contracción de los índices:

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R_{\gamma\delta\epsilon\eta}g^{\mu\alpha}\,g^{\nu\delta}\,g^{\beta\epsilon}\,g^{\gamma\eta} &= -F_\mu{}^\delta\,F^{\mu\epsilon}R_{\gamma\delta\eta\epsilon}g^{\gamma\eta}\\ &= -F_\mu{}^\delta\,F^{\mu\epsilon}R_{\gamma\delta}{}^\gamma{}_\epsilon\\ &= -F_\mu{}^\delta\,F^{\mu\epsilon}R_{\delta\epsilon}\\ &= -F_\mu{}^\alpha\,F^{\mu\beta}R_{\alpha\beta}.\end{aligned}\tag{3.53}$$

Así que

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\int du_1du_2du_3\,\mathcal{BC} &= -(-2T)^4\left(-\frac{1}{360}\right)F_\mu{}^\alpha\,F^{\mu\beta}R_{\alpha\beta}\\ &= \frac{2}{45}T^4F_\mu{}^\alpha\,F^{\mu\beta}R_{\alpha\beta}.\end{aligned}\tag{3.54}$$

Para la última contracción se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{BD} &= \langle\dot y_1^\mu\,\dot y_2^\alpha\rangle\,\langle y_1^\nu\,y_3^\delta\rangle\,\langle y_2^\beta\,\dot y_3^\eta\rangle\,\langle\dot y_3^\gamma\,y_3^\epsilon\rangle\\ &= (-2T)^4g^{\mu\alpha}\,g^{\nu\delta}\,g^{\beta\eta}\,g^{\gamma\epsilon}\,{}^\bullet\Delta^\bullet_{12}\,\Delta_{13}\,\Delta^\bullet_{23}\,{}^\bullet\Delta_{33}\end{aligned}\tag{3.55}$$

Pero

$$\int du_1\,{}^\bullet\Delta^\bullet_{12}\,\Delta_{13} = \int du_1\,\Delta_{13}-\Delta_{23},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int du_1 du_2 du_3\, {}^\bullet\Delta^\bullet_{12}\, \Delta_{13}\, \Delta^\bullet_{23}\, {}^\bullet\Delta_{33} &= \int du_1 du_2 du_3\, \Delta_{13}\, \Delta^\bullet_{23}\, {}^\bullet\Delta_{33} \\
&= -\int du_2 du_3\, \Delta_{23}\, \Delta^\bullet_{23}\, {}^\bullet\Delta_{33} \\
&= -\frac{1}{240} - \left(-\frac{1}{180}\right) \\
&= \frac{1}{720}. \qquad (3.56)
\end{aligned}$$

Ahora se realiza la contracción de índices

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R_{\gamma\delta\epsilon\eta} g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\delta}\, g^{\beta\eta}\, g^{\gamma\epsilon} &= F_\mu{}^\delta\, F^{\mu\eta}\, R_{\gamma\delta}{}^\gamma{}_\eta \\
&= F_\mu{}^\delta\, F^{\mu\eta}\, R_{\delta\eta} \\
&= F_\mu{}^\alpha\, F^{\mu\beta}\, R_{\alpha\beta}. \qquad (3.57)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \int du_1 du_2 du_3\, \mathcal{BD} &= (-2T)^4 \frac{1}{720} F_\mu{}^\alpha\, F^{\mu\beta}\, R_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{45} T^4 F_\mu{}^\alpha\, F^{\mu\beta}\, R_{\alpha\beta}. \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

Finalmente, sumando todos los resultados que se obtienen de esta serie de contracciones,

$$2\left(\frac{1}{45} - \frac{2}{9} + \frac{2}{45} + \frac{1}{45}\right) = -\frac{12}{45}. \qquad (3.59)$$

Esta serie de ocho configuraciones no es única, existen otras tres series pero arrojan los mismos resultados. Así que el resultado final está dado por

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left\langle \left(-S^{(0)}_{em}\right)^2 \left(-S_{grav} - S_{gh}\right)\right\rangle &= \left(-\frac{12}{45}\right)\left(\frac{1}{8(12T)}\right)(4) e^2\, T^4 F_\mu{}^\alpha\, F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{90} e^2\, T^3 F_\mu{}^\alpha\, F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}. \qquad (3.60)
\end{aligned}$$

No olvidemos que aún falta considerar el segundo arreglo (3.35):

$$-\frac{1}{2(24)} e^2 \left\langle \int du_1 du_2\, F_{\alpha\beta}\, \dot{y}_1^\alpha\, y_1^\beta\, F_{\lambda\nu}\, R^\lambda{}_{\delta\epsilon\eta}\, y_2^\nu\, y_2^\delta\, y_2^\epsilon\, \dot{y}_2^\eta \right\rangle.$$

Las contracciones correspondientes a este arreglo son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{BI} &= \langle \dot{y}_1^{\alpha}\, y_2^{\nu}\rangle\, \langle y_1^{\beta}\, y_2^{\epsilon}\rangle\, \langle y_2^{\delta}\, \dot{y}_2^{\eta}\rangle, \\
\mathcal{BJ} &= \langle \dot{y}_1^{\alpha}\, y_2^{\nu}\rangle\, \langle y_1^{\beta}\, \dot{y}_2^{\eta}\rangle\, \langle y_2^{\delta}\, y_2^{\epsilon}\rangle, \\
\mathcal{BK} &= \langle y_1^{\beta}\, y_2^{\nu}\rangle\, \langle \dot{y}_1^{\alpha}\, y_2^{\epsilon}\rangle\, \langle y_2^{\delta}\, \dot{y}_2^{\eta}\rangle, \\
\mathcal{BL} &= \langle y_1^{\beta}\, y_2^{\nu}\rangle\, \langle \dot{y}_1^{\alpha}\, \dot{y}_2^{\eta}\rangle\, \langle y_2^{\delta}\, y_2^{\epsilon}\rangle. \qquad (3.61)
\end{aligned}$$

Ahora bien, si consideramos la observación (3.2) es posible concluir que

$$\int du_1\, \langle \dot{y}_1^{\alpha}\, y_2^{\nu}\rangle\, \langle y_1^{\beta}\, y_2^{\epsilon}\rangle = \int du_1\, \langle y_1^{\beta}\, y_2^{\nu}\rangle\, \langle \dot{y}_1^{\alpha}\, y_2^{\epsilon}\rangle,$$

lo cual se indicará como

$$\langle \dot{y}_1^{\alpha}\, y_2^{\nu}\rangle\, \langle y_1^{\beta}\, y_2^{\epsilon}\rangle \to \langle y_1^{\beta}\, y_2^{\nu}\rangle\, \langle \dot{y}_1^{\alpha}\, y_2^{\epsilon}\rangle. \qquad (3.62)$$

De igual forma se puede concluir que

$$\langle \dot{y}_1^{\alpha}\, y_2^{\nu}\rangle\, \langle y_1^{\beta}\, \dot{y}_2^{\eta}\rangle \to \langle y_1^{\beta}\, y_2^{\nu}\rangle\, \langle \dot{y}_1^{\alpha}\, \dot{y}_2^{\eta}\rangle. \qquad (3.63)$$

Así, una integración por partes respecto a u_1 permite intercabiar las posiciones de $\dot{y}_1^{\alpha}$ y y_1^{β}. Entonces $\mathcal{BI} = \mathcal{BK}$ y $\mathcal{BJ} = \mathcal{BL}$.

De este modo, en este caso sólo se calculan dos contracciones:

$$\begin{aligned}
\mathcal{BI} &= \langle \dot{y}_1^{\alpha}\, y_2^{\nu}\rangle\, \langle y_1^{\beta}\, y_2^{\epsilon}\rangle\, \langle y_2^{\delta}\, \dot{y}_2^{\eta}\rangle \\
&= (-2T)^3 g^{\alpha\nu}\, g^{\beta\epsilon}\, g^{\delta\eta}\, {}^{\bullet}\Delta_{12}\, \Delta_{12}\, \Delta_{22}^{\bullet}. \qquad (3.64)
\end{aligned}$$

Al realizar las integrales se tiene

$$\int du_1 du_2\, {}^{\bullet}\Delta_{12}\, \Delta_{12}\, \Delta_{22}^{\bullet} = 0, \qquad (3.65)$$

por lo cual

$$F_{\lambda\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\eta} \int du_1 du_2 \mathcal{BI} \;\; = \;\; 0 \qquad (3.66)$$

Para la última contracción se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{BJ} &= \langle \dot{y}_1^{\alpha}\, y_2^{\nu}\rangle\, \langle y_1^{\beta}\, \dot{y}_2^{\eta}\rangle\, \langle y_2^{\delta}\, y_2^{\epsilon}\rangle \\
&= (-2T)^3\, g^{\alpha\nu}\, g^{\beta\eta}\, g^{\delta\epsilon}\, {}^{\bullet}\Delta_{12}\, \Delta_{12}^{\bullet}\, \Delta_{22}. \qquad (3.67)
\end{aligned}$$

La integración arroja el siguiente resultado

$$\int du_1 du_2 \,{}^{\bullet}\Delta_{12}\, \Delta^{\bullet}_{12}\, \Delta_{22} = \frac{1}{60}. \tag{3.68}$$

Ahora se realiza la contracción de índices :

$$\begin{aligned} F_{\lambda\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\eta}\, g^{\alpha\nu}\, g^{\beta\eta}\, g^{\delta\epsilon} &= F^{\lambda}_{\ \nu}\, F^{\nu\eta}\, R_{\lambda\delta\epsilon\eta}\, g^{\delta\epsilon} \\ &= F_{\nu}{}^{\lambda}\, F^{\nu\eta}\, R_{\delta\lambda\epsilon\eta}\, g^{\delta\epsilon} \\ &= F_{\nu}{}^{\lambda}\, F^{\nu\eta}\, R_{\delta\lambda}{}^{\delta}{}_{\eta} \\ &= F_{\nu}{}^{\lambda}\, F^{\nu\eta}\, R_{\lambda\eta} \\ &= F_{\mu}{}^{\alpha}\, F^{\mu\beta}\, R_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Entonces

$$\begin{aligned} F_{\lambda\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\eta} \int du_1 du_2 \mathcal{B}\mathcal{J} &= -\frac{8}{60} T^3 F_{\mu}{}^{\alpha}\, F^{\mu\beta}\, R_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{2}{15} T^3 F_{\mu}{}^{\alpha}\, F^{\mu\beta}\, R_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Se hace la suma de las contracciones

$$2\left(-\frac{2}{15}\right) = -\frac{4}{15}. \tag{3.71}$$

Así que para este arreglo se tiene

$$\begin{aligned} \left\langle (-S_{em,grav})\left(-S^0_{em}\right)\right\rangle &= -\frac{1}{2(24)} e^2 \left(-\frac{4}{15}\right) T^3 F_{\mu}{}^{\alpha}\, F^{\mu\beta}\, R_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{180} e^2 T^3 F_{\mu}{}^{\alpha}\, F^{\mu\beta}\, R_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{3.72}$$

Finalmente hay que sumar los resultados que se generan de los dos arreglos (3.60) y (3.72)

$$\frac{1}{2}\left\langle \left(-S^{(0)}_{em}\right)^2 \left(-S_{grav} - S_{gh}\right)\right\rangle + \left\langle (-S_{em,grav})\left(-S^0_{em}\right)\right\rangle = -\frac{e^2 T^3}{180} F_{\mu}{}^{\alpha}\, F^{\mu\beta}\, R_{\alpha\beta} \tag{3.73}$$

3.1.3. Término $F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$

Este término se genera de la contracción doble entre cada tensor electromagnético con el tensor gravitacional. Para ello, se emplean las siguientes expresiones

$$\frac{1}{2}\langle\left(-S_{em}^{(0)}\right)^2(-S_{grav}-S_{gh})\rangle, \tag{3.74}$$

con

$$S_{grav}=\int du\left[\frac{1}{12T}R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\,\dot{y}^\gamma(u)\,y^\delta(u)\,y^\epsilon(u)\,\dot{y}^\eta(u)\right]. \tag{3.75}$$

También se tiene

$$\langle\left(-S_{em}^{(0)}\right)(-S_{em,grav})\rangle, \tag{3.76}$$

Con esto se pueden hacer algunas combinaciones de los términos para obtener $F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$:

La primera combinación es

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{ie}{2}\right)^2\left(\frac{1}{12T}\right)\left\langle\int du_1du_2du_3F_{\mu\nu}\,\dot{y}_1^\mu\,y_1^\nu\,F_{\alpha\beta}\,\dot{y}_2^\alpha\,y_2^\beta\,R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\,\dot{y}_3^\gamma\,y_3^\delta\,y_3^\epsilon\,\dot{y}_3^\eta\right\rangle. \tag{3.77}$$

La segunda combinación posible es

$$\left(-\frac{ie}{2}\right)\left(-\frac{ie}{24}\right)\left\langle\int du_1du_2\,F_{\alpha\beta}\,\dot{y}_1^\alpha\,y_1^\beta\,F_{\lambda\nu}\,R^\lambda{}_{\delta\epsilon\eta}\,y_2^\nu\,y_2^\delta\,y_2^\epsilon\,\dot{y}_2^\eta\right\rangle, \tag{3.78}$$

e incluso son iguales a (3.34) y (3.35) respectivamente.

Veamos las contracciones para (3.77):

$$\begin{aligned}
\mathcal{CA} &= \langle\dot{y}_1^\mu\,\dot{y}_3^\gamma\rangle\,\langle y_1^\nu\,y_3^\delta\rangle\,\langle\dot{y}_2^\alpha\,y_3^\epsilon\rangle\,\langle y_2^\beta\,\dot{y}_3^\eta\rangle,\\
\mathcal{CB} &= \langle\dot{y}_1^\mu\,\dot{y}_3^\gamma\rangle\,\langle y_1^\nu\,y_3^\delta\rangle\,\langle\dot{y}_2^\alpha\,\dot{y}_3^\eta\rangle\,\langle y_2^\beta\,y_3^\epsilon\rangle,\\
\mathcal{CC} &= \langle\dot{y}_1^\mu\,\dot{y}_3^\gamma\rangle\,\langle y_1^\nu\,y_3^\epsilon\rangle\,\langle\dot{y}_2^\alpha\,y_3^\delta\rangle\,\langle y_2^\beta\,\dot{y}_3^\eta\rangle,\\
\mathcal{CD} &= \langle\dot{y}_1^\mu\,\dot{y}_3^\gamma\rangle\,\langle y_1^\nu\,y_3^\epsilon\rangle\,\langle\dot{y}_2^\alpha\,\dot{y}_3^\eta\rangle\,\langle y_2^\beta\,y_3^\delta\rangle,\\
\mathcal{CE} &= \langle\dot{y}_1^\mu\,\dot{y}_3^\gamma\rangle\,\langle y_1^\nu\,\dot{y}_3^\eta\rangle\,\langle\dot{y}_2^\alpha\,y_3^\delta\rangle\,\langle y_2^\beta\,y_3^\epsilon\rangle,\\
\mathcal{CF} &= \langle\dot{y}_1^\mu\,\dot{y}_3^\gamma\rangle\,\langle y_1^\nu\,\dot{y}_3^\eta\rangle\,\langle\dot{y}_2^\alpha\,y_3^\epsilon\rangle\,\langle y_2^\beta\,y_3^\delta\rangle.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Si se realiza una integración por partes con respecto a u_2, se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle\dot{y}_2^\alpha\,y_3^\epsilon\rangle\,\langle y_2^\beta\,\dot{y}_3^\eta\rangle &\rightarrow \langle\dot{y}_2^\alpha\,\dot{y}_3^\eta\rangle\,\langle y_2^\beta\,y_3^\epsilon\rangle,\\
\langle\dot{y}_2^\alpha\,y_3^\delta\rangle\,\langle y_2^\beta\,\dot{y}_3^\eta\rangle &\rightarrow \langle\dot{y}_2^\alpha\,\dot{y}_3^\eta\rangle\,\langle y_2^\beta\,y_3^\delta\rangle,\\
\langle\dot{y}_2^\alpha\,y_3^\delta\rangle\,\langle y_2^\beta\,y_3^\epsilon\rangle &\rightarrow \langle\dot{y}_2^\alpha\,y_3^\epsilon\rangle\,\langle y_2^\beta\,y_3^\delta\rangle.
\end{aligned}$$

entonces $\mathcal{CA} = \mathcal{CB}$, $\mathcal{CC} = \mathcal{CD}$ y $\mathcal{CE} = \mathcal{CF}$; con esto sólo se calculan tres contracciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{CA} &= \langle \dot{y}_1^{\mu}\, \dot{y}_3^{\gamma} \rangle \, \langle y_1^{\nu}\, y_3^{\delta} \rangle \, \langle \dot{y}_2^{\alpha}\, y_3^{\epsilon} \rangle \, \langle y_2^{\beta}\, \dot{y}_3^{\eta} \rangle \\ &= (-2T)^4 g^{\mu\gamma}\, g^{\nu\delta}\, g^{\alpha\epsilon}\, g^{\beta\eta}\, {}^{\bullet}\Delta^{\bullet}_{13}\, \Delta_{13}\, {}^{\bullet}\Delta_{23}\, \Delta^{\bullet}_{23}, \end{aligned} \tag{3.80}$$

de la integración sobre u_1 se tiene que

$$\int du_1\, {}^{\bullet}\Delta^{\bullet}_{13}\, \Delta_{13} = \int du_1\, \Delta_{13} - \Delta_{33}, \tag{3.81}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \int du_1 du_2 du_3\, {}^{\bullet}\Delta^{\bullet}_{13}\, \Delta_{13}\, {}^{\bullet}\Delta_{23}\, \Delta^{\bullet}_{23} &= \int du_1 du_2 du_3\, \Delta_{13}\, {}^{\bullet}\Delta_{23}\, \Delta^{\bullet}_{23} \\ &\quad - \int du_2 du_3\, \Delta_{33}\, {}^{\bullet}\Delta_{23}\, \Delta^{\bullet}_{23} \\ &= \frac{1}{120} - \frac{1}{60} = -\frac{1}{120} \end{aligned} \tag{3.82}$$

La contracción de los índices está dada de la siguiente forma:

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\, g^{\mu\gamma}\, g^{\nu\delta}\, g^{\alpha\epsilon}\, g^{\beta\eta} = F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta},$$

así que para esta contracción se tiene

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \int du_1 du_2 du_3\, \mathcal{CA} &= (-2T)^4 \left(-\frac{1}{120} \right) F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta} \\ &= -\frac{2}{15} T^4 F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta} \end{aligned} \tag{3.83}$$

La siguiente configuración es

$$\begin{aligned} \mathcal{CC} &= \langle \dot{y}_1^{\mu}\, \dot{y}_3^{\gamma} \rangle \, \langle y_1^{\nu}\, y_3^{\epsilon} \rangle \, \langle \dot{y}_2^{\alpha}\, y_3^{\delta} \rangle \, \langle y_2^{\beta}\, \dot{y}_3^{\eta} \rangle \\ &= (-2T)^4 g^{\mu\gamma}\, g^{\nu\epsilon}\, g^{\alpha\delta}\, g^{\beta\eta}\, {}^{\bullet}\Delta^{\bullet}_{13}\, \Delta_{13}\, {}^{\bullet}\Delta_{23}\, \Delta^{\bullet}_{23}, \end{aligned} \tag{3.84}$$

pero

$$\int du_1\, {}^{\bullet}\Delta^{\bullet}_{13}\, \Delta_{13} = \int du_1\, \Delta_{13} - \Delta_{33},$$

entonces

$$\begin{aligned}\int du_1 du_2 du_3\, {}^\bullet\Delta^\bullet_{13}\, \Delta_{13}\, {}^\bullet\Delta_{23}\, \Delta^\bullet_{23} &= \int du_1 du_2 du_3\, \Delta_{13}\, {}^\bullet\Delta_{23}\, \Delta^\bullet_{23} \\ &\quad - \int du_2 du_3\, \Delta_{33}\, {}^\bullet\Delta_{23}\, \Delta^\bullet_{23} \\ &= \frac{1}{120} - \frac{1}{60} = -\frac{1}{120}. \qquad (3.85)\end{aligned}$$

Veamos ahora las contracciones de los índices

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\, g^{\mu\gamma}\, g^{\nu\epsilon}\, g^{\alpha\delta}\, g^{\beta\eta} &= F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\alpha\nu\beta} \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}, \qquad (3.86)\end{aligned}$$

la última igualdad se demuestre en el apéndice C. Finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \int du_1 du_2 du_3\, \mathcal{C}\mathcal{C} &= (-2T)^4 \left(-\frac{1}{120}\right) \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{15} F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta} \qquad (3.87)\end{aligned}$$

La última configuración está dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\mathcal{E} &= \langle \dot{y}_1^\mu\, \dot{y}_3^\gamma \rangle \langle y_1^\nu\, \dot{y}_3^\eta \rangle \langle \dot{y}_2^\alpha\, y_3^\delta \rangle \langle y_2^\beta\, y_3^\epsilon \rangle \\ &= (-2T)^4 g^{\mu\gamma}\, g^{\nu\eta}\, g^{\alpha\delta}\, g^{\beta\epsilon}\, {}^\bullet\Delta^\bullet_{13}\, \Delta^\bullet_{13}\, {}^\bullet\Delta_{23}\, \Delta_{23}. \qquad (3.88)\end{aligned}$$

La integral sobre u_1 da el siguiente resultado:

$$\int du_1\, {}^\bullet\Delta^\bullet_{13}\, \Delta^\bullet_{13} = \int du_1\, \Delta^\bullet_{13} - \Delta^\bullet_{33}.$$

Entonces, se tiene

$$\begin{aligned}\int du_1 du_2 du_3\, {}^\bullet\Delta^\bullet_{13}\, \Delta^\bullet_{13}\, {}^\bullet\Delta_{23}\, \Delta_{23} &= \int du_1 du_2 du_3\, \Delta^\bullet_{13}\, {}^\bullet\Delta_{23}\, \Delta_{23} \\ &\quad - \int du_2 du_3\, \Delta^\bullet_{33}\, {}^\bullet\Delta_{23}\, \Delta_{23} \\ &= 0. \qquad (3.89)\end{aligned}$$

Así que

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \int du_1 du_2 du_3\, \mathcal{C}\mathcal{E} = 0. \qquad (3.90)$$

Ahora se realiza la suma de todas las configuraciones

$$2\left(-\frac{2}{15}-\frac{1}{15}\right)=-\frac{6}{15}.$$

Esta no es la única serie de contracciones; existen en total cuatro pero las aportaciones son iguales, así que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\langle\left(-S^{(0)}_{em}\right)^2\left(-S_{grav}-S_{gh}\right)\rangle &= 4\left(-\frac{6}{15}\right)\left(\frac{e^2}{96\,T}\right)T^4 F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta}\\ &= -\frac{1}{60}e^2\,T^3 F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta}. \qquad (3.91)\end{aligned}$$

Aun falta considerar las contracciones de la segunda combinación (3.78):

$$\left(-\frac{ie}{2}\right)\left(-\frac{ie}{24}\right)\left\langle\int du_1 du_2\, F_{\alpha\beta}\,\dot{y}_1^\alpha\, y_1^\beta\, F_{\lambda\nu}\, R^\lambda{}_{\delta\epsilon\eta}\, y_2^\nu\, y_2^\delta\, y_2^\epsilon\, \dot{y}_2^\eta\right\rangle,$$

las contracciones correspondientes se escriben enseguida:

$$\begin{aligned}\mathcal{CG} &= \langle y_2^\nu\, y_2^\delta\rangle\,\langle \dot{y}_1^\alpha\, y_2^\epsilon\rangle\,\langle y_1^\beta\, \dot{y}_2^\eta\rangle,\\ \mathcal{CH} &= \langle y_2^\nu\, y_2^\delta\rangle\,\langle \dot{y}_1^\alpha\, \dot{y}_2^\eta\rangle\,\langle y_1^\beta\, y_2^\epsilon\rangle,\\ \mathcal{CI} &= \langle y_2^\nu\, y_2^\epsilon\rangle\,\langle \dot{y}_1^\alpha\, y_2^\delta\rangle\,\langle y_1^\beta\, \dot{y}_2^\eta\rangle,\\ \mathcal{CJ} &= \langle y_2^\nu\, y_2^\epsilon\rangle\,\langle \dot{y}_1^\alpha\, \dot{y}_2^\eta\rangle\,\langle y_1^\beta\, y_2^\delta\rangle. \qquad (3.92)\end{aligned}$$

Al realizar una integración por partes con respecto a u_1, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \dot{y}_1^\alpha\, y_2^\epsilon\rangle\,\langle y_1^\beta\, \dot{y}_2^\eta\rangle &\to \langle \dot{y}_1^\alpha\, \dot{y}_2^\eta\rangle\,\langle y_1^\beta\, y_2^\epsilon\rangle,\\ \langle \dot{y}_1^\alpha\, y_2^\delta\rangle\,\langle y_1^\beta\, \dot{y}_2^\eta\rangle &\to \langle \dot{y}_1^\alpha\, \dot{y}_2^\eta\rangle\,\langle y_1^\beta\, y_2^\delta\rangle,\end{aligned}$$

con lo cual se tiene $\mathcal{CG}=\mathcal{CH}$ y $\mathcal{CI}=\mathcal{CJ}$. Entonces es suficiente hacer los calculos para dos contracciones:

$$\begin{aligned}\mathcal{CG} &= \langle y_2^\nu\, y_2^\delta\rangle\,\langle \dot{y}_1^\alpha\, y_2^\epsilon\rangle\,\langle y_1^\beta\, \dot{y}_2^\eta\rangle\\ &= (-2T)^3\, g^{\nu\delta}\, g^{\alpha\epsilon}\, g^{\beta\eta}\, \Delta_{22}{}^\bullet\Delta_{12}\, \Delta^\bullet_{12}. \qquad (3.93)\end{aligned}$$

Pero el resultado de la integral ya fue calculado en (3.68):

$$\int du_1 du_2\, \Delta_{22}{}^\bullet\Delta_{12}\, \Delta^\bullet_{12}=\frac{1}{60},$$

así que ahora se calcula la contracción de índices

$$\begin{aligned} F_{\lambda\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\eta} g^{\nu\delta}\,g^{\alpha\epsilon}\,g^{\beta\eta} &= F_{\lambda\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\lambda\nu\alpha\beta} \\ &= F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{3.94}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F_{\lambda\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\eta}\int du_1 du_2\,\mathcal{C}\mathcal{G} &= (-2T)^3\left(\frac{1}{60}\right)F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta} \\ &= -\frac{2}{15}T^3 F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta} \end{aligned} \tag{3.95}$$

La siguiente contracción está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\mathcal{I} &= \langle y_2^\nu\,y_2^\epsilon\rangle\,\langle \dot{y}_1^\alpha\,y_2^\delta\rangle\,\langle y_1^\beta\,\dot{y}_2^\eta\rangle \\ &= (-2T)^3\,g^{\nu\epsilon}\,g^{\alpha\delta}\,g^{\beta\eta}\,\Delta_{22}\,{}^\bullet\Delta_{12}\,\Delta_{12}^\bullet. \end{aligned} \tag{3.96}$$

La integración de este producto de funciones Δ ya se han calculado en (3.68)

$$\int du_1 du_2\,\Delta_{22}\,{}^\bullet\Delta_{12}\,\Delta_{12}^\bullet = \frac{1}{60}, \tag{3.97}$$

por lo cual, resta encontrar la contracción de índices:

$$\begin{aligned} F_{\lambda\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\eta}\,g^{\nu\epsilon}\,g^{\alpha\delta}\,g^{\beta\eta} &= F_{\lambda\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\lambda\alpha\nu\beta} \\ &= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{3.98}$$

Entonces

$$\begin{aligned} F_{\lambda\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\eta}\int du_1 du_2\,\mathcal{C}\mathcal{I} &= (-2T)^3\left(\frac{1}{60}\right)\left(\frac{1}{2}\right)F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{15}T^3 F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{3.99}$$

Si se realiza la suma de todas estas contracciones se tiene:

$$2\left(-\frac{2}{15}-\frac{1}{15}\right) = -\frac{2}{5}$$

Así que para esta combinación se tiene:

$$\begin{aligned} \langle\left(-S_{em}^{(0)}\right)\left(-S_{em,grav}\right)\rangle &= \left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{e^2}{48}\right)T^3 F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{120}e^2\,T^3 F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta} \end{aligned} \tag{3.100}$$

Ahora bien, ya que se han calculado todas las contracciones para las dos combinaciones, es momento de sumar los resultados (3.91) y (3.100):

$$\left(-\frac{1}{60}+\frac{1}{120}\right) e^2\,T^3 F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta} = -\frac{1}{120} e^2\,T^3 F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta}. \tag{3.101}$$

3.1.4. Término $F_{\mu\ ;\alpha}^{\ \alpha}\,F^{\mu\beta}{}_{;\beta}$

Este término se obtiene de

$$\frac{1}{2}\left\langle(-S^{(1)}_{em})^2\right\rangle = \frac{1}{2}\left(-\frac{ie}{3}\right)^2\left\langle\int du_1\,du_2\,F_{\alpha\beta;\gamma}\,\dot{y}_1^\alpha\,y_1^\beta\,y_1^\gamma\,F_{\mu\nu;\eta}\,\dot{y}_2^\mu\,y_2^\nu\,y_2^\eta\right\rangle. \tag{3.102}$$

Las contracciones que se generan son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{DA} &= \langle\dot{y}_1^\alpha\,y_1^\gamma\rangle\,\langle y_1^\beta\,\dot{y}_2^\mu\rangle\,\langle y_2^\nu\,y_2^\eta\rangle,\\
\mathcal{DB} &= \langle\dot{y}_1^\alpha\,y_1^\gamma\rangle\,\langle y_1^\beta\,y_2^\nu\rangle\,\langle \dot{y}_2^\mu\,y_2^\eta\rangle,\\
\mathcal{DC} &= \langle\dot{y}_1^\alpha\,\dot{y}_2^\mu\rangle\,\langle y_1^\beta\,y_1^\gamma\rangle\,\langle y_2^\nu\,y_2^\eta\rangle,\\
\mathcal{DD} &= \langle\dot{y}_1^\alpha\,y_2^\nu\rangle\,\langle y_1^\beta\,y_1^\gamma\rangle\,\langle \dot{y}_2^\mu\,y_2^\eta\rangle.
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Vemos que se obtiene de cada una de ellas

$$\begin{aligned}
\mathcal{DA} &= \langle\dot{y}_1^\alpha\,y_1^\gamma\rangle\,\langle y_1^\beta\,\dot{y}_2^\mu\rangle\,\langle y_2^\nu\,y_2^\eta\rangle\\
&= (-2T)^3\,g^{\alpha\gamma}\,g^{\beta\mu}\,g^{\nu\eta}\,{}^\bullet\Delta_{11}\,\Delta^\bullet_{12}\,\Delta_{22}.
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Al realizar las integrales se obtiene

$$\int du_1 du_2\,{}^\bullet\Delta_{11}\,\Delta^\bullet_{12}\,\Delta_{22} = \frac{1}{360}. \tag{3.105}$$

Ahora, se calcula la contracción de índices

$$\begin{aligned}
F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\,g^{\alpha\gamma}\,g^{\beta\mu}\,g^{\nu\eta} &= F^\gamma{}_{\beta;\gamma}\,F^{\beta\eta}{}_{;\eta} = -F_\beta{}^\gamma{}_{;\gamma}\,F^{\beta\eta}{}_{;\eta}\\
&= -F_\mu{}^\alpha{}_{;\alpha}\,F^{\mu\beta}{}_{;\beta}.
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\int du_1 du_2\,\mathcal{DA} &= -(-2T)^3\frac{1}{360}\,F_\mu{}^\alpha{}_{;\alpha}\,F^{\mu\beta}{}_{;\beta}\\
&= \frac{1}{45}T^3\,F_\mu{}^\alpha{}_{;\alpha}\,F^{\mu\beta}{}_{;\beta}.
\end{aligned} \tag{3.107}$$

Veamos otra contracción

$$\begin{aligned} \mathcal{DB} &= \langle \dot{y}_1^\alpha\, y_1^\gamma\rangle\, \langle y_1^\beta\, y_2^\nu\rangle\, \langle \dot{y}_2^\mu\, y_2^\eta\rangle \\ &= (-2T)^3\, g^{\alpha\gamma}\, g^{\beta\nu}\, g^{\mu\eta}\, {}^\bullet\Delta_{11}\, \Delta_{12}\, {}^\bullet\Delta_{22}. \end{aligned} \tag{3.108}$$

De la integración se obtiene

$$\int du_1 du_2\, {}^\bullet\Delta_{11}\, \Delta_{12}\, {}^\bullet\Delta_{22} = -\frac{1}{720}. \tag{3.109}$$

Calculemos la contracción de índices

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta;\gamma}\, F_{\mu\nu;\eta}\, g^{\alpha\gamma}\, g^{\beta\nu}\, g^{\mu\eta} &= F^{\gamma}{}_{\beta;\gamma}\, F^{\eta\beta}{}_{;\eta} = F_{\beta}{}^{\gamma}{}_{;\gamma}\, F^{\beta\eta}{}_{;\eta} \\ &= F_{\mu}{}^{\alpha}{}_{;\alpha}\, F^{\mu\beta}{}_{;\beta}. \end{aligned} \tag{3.110}$$

Entonces

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta;\gamma}\, F_{\mu\nu;\eta} \int du_1 du_2\, \mathcal{DB} &= -(-2T)^3 \frac{1}{720}\, F_{\mu}{}^{\alpha}{}_{;\alpha}\, F^{\mu\beta}{}_{;\beta} \\ &= \frac{1}{90} T^3\, F_{\mu}{}^{\alpha}{}_{;\alpha}\, F^{\mu\beta}{}_{;\beta}. \end{aligned} \tag{3.111}$$

Otra contracción posible es la siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{DC} &= \langle \dot{y}_1^\alpha\, \dot{y}_2^\mu\rangle\, \langle y_1^\beta\, y_1^\gamma\rangle\, \langle y_2^\nu\, y_2^\eta\rangle \\ &= (-2T)^3\, g^{\alpha\mu}\, g^{\beta\gamma}\, g^{\nu\eta}\, {}^\bullet\Delta_{12}^\bullet\, \Delta_{11}\, \Delta_{22}. \end{aligned} \tag{3.112}$$

Como

$$\int du_1\, {}^\bullet\Delta_{12}^\bullet\, \Delta_{11} = \int du_1 \Big(1 - \delta_{12}\Big)\, \Delta_{11} = \int du_1\, \Delta_{11} - \Delta_{22},$$

tenemos

$$\begin{aligned} \int du_1 du_2\, {}^\bullet\Delta_{12}^\bullet\, \Delta_{11}\, \Delta_{22} &= \int du_1 du_2\, \Delta_{11}\, \Delta_{22} - \int du_2\, \Delta_{22}\, \Delta_{22} \\ &= \frac{1}{36} - \frac{1}{30} = -\frac{1}{180}. \end{aligned} \tag{3.113}$$

Ahora veamos la contracción de índices:

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\, F_{\mu\nu;\eta}\, g^{\alpha\mu}\, g^{\beta\gamma}\, g^{\nu\eta} = F_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{;\gamma}\, F^{\alpha\eta}{}_{;\eta} = F_{\mu}{}^{\alpha}{}_{;\alpha}\, F^{\mu\beta}{}_{;\beta}. \tag{3.114}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\int du_1 du_2\,\mathcal{DC} &= -(-2T)^3\frac{1}{180}\,F_{\mu\ ;\alpha}^{\ \alpha}\,F^{\mu\beta}_{\ \ \ ;\beta} \\ &= \frac{2}{45}T^3\,F_{\mu\ ;\alpha}^{\ \alpha}\,F^{\mu\beta}_{\ \ \ ;\beta}. \end{aligned} \tag{3.115}$$

Ahora toca el turno a la última contracción

$$\begin{aligned} \mathcal{DD} &= \langle \dot{y}_1^\alpha\,y_2^\nu\rangle\,\langle y_1^\beta\,y_1^\gamma\rangle\,\langle \dot{y}_2^\mu\,y_2^\eta\rangle \\ &= (-2T)^3\,g^{\alpha\nu}\,g^{\beta\gamma}\,g^{\mu\eta}\,{}^\bullet\Delta_{12}\,\Delta_{11}\,{}^\bullet\Delta_{22}. \end{aligned} \tag{3.116}$$

De la integración se tiene

$$\int du_1 du_2\,{}^\bullet\Delta_{12}\,\Delta_{11}\,{}^\bullet\Delta_{22} = \frac{1}{360}, \tag{3.117}$$

y de la contracción de índices se tiene

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\,g^{\alpha\nu}\,g^{\beta\gamma}\,g^{\mu\eta} = F_{\alpha\ ;\gamma}^{\ \gamma}\,F^{\eta\alpha}_{\ \ \ ;\eta} = -F_{\mu\ ;\alpha}^{\ \alpha}\,F^{\mu\beta}_{\ \ \ ;\beta}. \tag{3.118}$$

Así

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\int du_1 du_2\,\mathcal{DD} &= -(-2T)^3\frac{1}{360}F_{\mu\ ;\alpha}^{\ \alpha}\,F^{\mu\beta}_{\ \ \ ;\beta} \\ &= \frac{1}{45}T^3F_{\mu\ ;\alpha}^{\ \alpha}\,F^{\mu\beta}_{\ \ \ ;\beta}. \end{aligned} \tag{3.119}$$

Sólo resta realizar la suma de estas contracciones:

$$\frac{1}{45}+\frac{1}{90}+\frac{2}{45}+\frac{1}{45}=\frac{1}{10},$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\langle(-S_{em}^{(1)})^2\right\rangle &= \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{18}\right)e^2\,T^3\,F_{\mu\ ;\alpha}^{\ \alpha}\,F^{\mu\beta}_{\ \ \ ;\beta} \\ &= -\frac{1}{180}e^2\,T^3\,F_{\mu\ ;\alpha}^{\ \alpha}\,F^{\mu\beta}_{\ \ \ ;\beta}. \end{aligned} \tag{3.120}$$

3.1.5. Término $F_{\mu\alpha;\beta}\,F^{\mu\beta;\alpha}$

Este término se genera nuevamente de

$$\frac{1}{2}\left\langle(-S^{(1)}_{em})^2\right\rangle = \frac{1}{2}\left(-\frac{ie}{3}\right)^2\left\langle\int du_1\,du_2\,F_{\alpha\beta;\gamma}\,\dot{y}_1^{\alpha}\,y_1^{\beta}\,y_1^{\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\,\dot{y}_2^{\mu}\,y_2^{\nu}\,y_2^{\eta}\right\rangle. \tag{3.121}$$

Las contracciones correspondientes a este término son las siguientes:

$$\begin{aligned}\mathcal{EA} &= \langle\dot{y}_1^{\alpha}\,\dot{y}_2^{\mu}\rangle\,\langle y_1^{\beta}\,y_2^{\eta}\rangle\,\langle y_1^{\gamma}\,y_2^{\nu}\rangle,\\ \mathcal{EB} &= \langle\dot{y}_1^{\alpha}\,y_2^{\nu}\rangle\,\langle y_1^{\beta}\,y_2^{\eta}\rangle\,\langle y_1^{\gamma}\,\dot{y}_2^{\mu}\rangle,\\ \mathcal{EC} &= \langle\dot{y}_1^{\alpha}\,y_2^{\eta}\rangle\,\langle y_1^{\beta}\,\dot{y}_2^{\mu}\rangle\,\langle y_1^{\gamma}\,y_2^{\nu}\rangle,\\ \mathcal{ED} &= \langle\dot{y}_1^{\alpha}\,y_2^{\eta}\rangle\,\langle y_1^{\beta}\,y_2^{\nu}\rangle\,\langle y_1^{\gamma}\,\dot{y}_2^{\mu}\rangle.\end{aligned} \tag{3.122}$$

Veamos qué se obtiene de cada una de estas contracciones:

$$\begin{aligned}\mathcal{EA} &= \langle\dot{y}_1^{\alpha}\,\dot{y}_2^{\mu}\rangle\,\langle y_1^{\beta}\,y_2^{\eta}\rangle\,\langle y_1^{\gamma}\,y_2^{\nu}\rangle\\ &= (-2T)^3\,g^{\alpha\mu}\,g^{\beta\eta}\,g^{\gamma\nu}\,{}^{\bullet}\Delta^{\bullet}_{12}\,\Delta_{12}\,\Delta_{12}.\end{aligned} \tag{3.123}$$

Ya que

$$\begin{aligned}\int du_1\,{}^{\bullet}\Delta^{\bullet}_{12}\,\Delta_{12}\,\Delta_{12} &= \int du_1\left(1-\delta_{12}\right)\Delta_{12}\,\Delta_{12}\\ &= \int du_1\,\Delta_{12}\,\Delta_{12} - \,\Delta_{22}\,\Delta_{22}\end{aligned} \tag{3.124}$$

tenemos

$$\begin{aligned}\int du_1 du_2\,{}^{\bullet}\Delta^{\bullet}_{12}\,\Delta_{12}\,\Delta_{12} &= \int du_1 du_2\,\Delta_{12}\,\Delta_{12} - \int du_2\,\Delta_{22}\,\Delta_{22}\\ &= \frac{1}{90}-\frac{1}{30} = -\frac{2}{90}.\end{aligned} \tag{3.125}$$

Para la contracción de índices, se tiene

$$\begin{aligned}F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\,g^{\alpha\mu}\,g^{\beta\eta}\,g^{\gamma\nu} &= F^{\mu\eta;\nu}\,F_{\mu\nu;\eta} = F_{\mu\nu;\eta}\,F^{\mu\eta;\nu}\\ &= F_{\mu\alpha;\beta}\,F^{\mu\beta;\alpha}.\end{aligned} \tag{3.126}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\int du_1 du_2\,\mathcal{EA} &= -(-2T)^3\frac{2}{90}F_{\mu\alpha;\beta}\,F^{\mu\beta;\alpha}\\ &= \frac{8}{45}T^3 F_{\mu\alpha;\beta}\,F^{\mu\beta;\alpha}.\end{aligned} \tag{3.127}$$

Otra contracción es la siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\mathcal{B} &= \langle \dot{y}_1^{\alpha}\, y_2^{\nu}\rangle\, \langle y_1^{\beta}\, y_2^{\eta}\rangle\, \langle y_1^{\gamma}\, \dot{y}_2^{\mu}\rangle \\ &= (-2T)^3\, g^{\alpha\nu}\, g^{\beta\eta}\, g^{\gamma\mu}\, {}^{\bullet}\Delta_{12}\, \Delta_{12}\, \Delta^{\bullet}_{12}. \end{aligned} \tag{3.128}$$

De la integración se tiene

$$\int du_1 du_2\, {}^{\bullet}\Delta_{12}\, \Delta^{\bullet}_{12}\, \Delta_{12} = \frac{1}{90}. \tag{3.129}$$

Hagamos la contracción de índices:

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta;\gamma}\, F_{\mu\nu;\eta}\, g^{\alpha\nu}\, g^{\beta\eta}\, g^{\gamma\mu} &= F^{\nu\eta;\mu}\, F_{\mu\nu;\eta} = -F_{\nu\mu;\eta}\, F^{\nu\eta;\mu} \\ &= -F_{\mu\alpha;\beta}\, F^{\mu\beta;\alpha}. \end{aligned} \tag{3.130}$$

Se concluye que

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta;\gamma}\, F_{\mu\nu;\eta} \int du_1 du_2\, \mathcal{E}\mathcal{B} &= -(-2T)^3 \frac{1}{90} F_{\mu\alpha;\beta}\, F^{\mu\beta;\alpha} \\ &= \frac{4}{45} T^3 F_{\mu\alpha;\beta}\, F^{\mu\beta;\alpha}. \end{aligned} \tag{3.131}$$

Veamos la siguiente contracción:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\mathcal{C} &= \langle \dot{y}_1^{\alpha}\, y_2^{\eta}\rangle\, \langle y_1^{\beta}\, \dot{y}_2^{\mu}\rangle\, \langle y_1^{\gamma}\, y_2^{\nu}\rangle \\ &= (-2T)^3\, g^{\alpha\eta}\, g^{\beta\mu}\, g^{\gamma\nu}\, {}^{\bullet}\Delta_{12}\, \Delta^{\bullet}_{12}\, \Delta_{12}. \end{aligned} \tag{3.132}$$

De la integración se tiene

$$\int du_1 du_2\, {}^{\bullet}\Delta_{12}\, \Delta^{\bullet}_{12}\, \Delta_{12} = \frac{1}{90}. \tag{3.133}$$

Con respecto a los índices se tiene la siguiente contracción:

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta;\gamma}\, F_{\mu\nu;\eta}\, g^{\alpha\eta}\, g^{\beta\mu}\, g^{\gamma\nu} &= F^{\eta\mu;\nu}\, F_{\mu\nu;\eta} = -F_{\mu\nu;\eta}\, F^{\mu\eta;\nu} \\ &= -F_{\mu\alpha;\beta}\, F^{\mu\beta;\alpha}. \end{aligned} \tag{3.134}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta;\gamma}\, F_{\mu\nu;\eta} \int du_1 du_2\, \mathcal{E}\mathcal{C} &= -(-2T)^3 \frac{1}{90} F_{\mu\alpha;\beta}\, F^{\mu\beta;\alpha} \\ &= \frac{4}{45} T^3 F_{\mu\alpha;\beta}\, F^{\mu\beta;\alpha}. \end{aligned} \tag{3.135}$$

Por último, se tiene la siguiente contracción

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}\mathcal{D} &= \langle \dot{y}_1^{\alpha}\, y_2^{\eta}\rangle\, \langle y_1^{\beta}\, y_2^{\nu}\rangle\, \langle y_1^{\gamma}\, \dot{y}_2^{\mu}\rangle \\
&= (-2T)^3\, g^{\alpha\eta}\, g^{\beta\nu}\, g^{\gamma\mu}\, {}^{\bullet}\Delta_{12}\, \Delta_{12}\, \Delta_{12}^{\bullet}.
\end{aligned} \tag{3.136}
$$

El resultado de la integración ya lo conocemos,

$$
\int du_1 du_2\, {}^{\bullet}\Delta_{12}\, \Delta_{12}^{\bullet}\, \Delta_{12} = \frac{1}{90}, \tag{3.137}
$$

así que veamos la contracción de índices:

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha\beta;\gamma}\, F_{\mu\nu;\eta}\, g^{\alpha\eta}\, g^{\beta\nu}\, g^{\gamma\mu} &= F^{\eta\nu;\mu}\, F_{\mu\nu;\eta} = F_{\nu\mu;\eta}\, F^{\nu\eta;\mu} \\
&= F_{\mu\alpha;\beta}\, F^{\mu\beta;\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.138}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha\beta;\gamma}\, F_{\mu\nu;\eta} \int du_1 du_2\, \mathcal{E}\mathcal{D} &= (-2T)^3 \frac{1}{90} F_{\mu\alpha;\beta}\, F^{\mu\beta;\alpha} \\
&= -\frac{4}{45} T^3 F_{\mu\ ;\beta}^{\ \alpha}\, F_{\mu\alpha;\beta}\, F^{\mu\beta;\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.139}
$$

Ahora, se suman los resultados que arroja cada contribución

$$
\frac{8}{45} + \frac{4}{45} + \frac{4}{45} - \frac{4}{45} = \frac{4}{15},
$$

así que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left\langle (-S_{em}^{(1)})^2 \right\rangle &= \frac{4}{15} \left(-\frac{1}{18} \right) e^2 T^3 F_{\mu\alpha;\beta}\, F^{\mu\beta;\alpha} \\
&= -\frac{2}{135} F_{\mu\alpha;\beta}\, F^{\mu\beta;\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.140}
$$

Pero

$$
F_{\mu\alpha;\beta}\, F^{\mu\beta;\alpha} = \frac{1}{2} F_{\mu\beta;\alpha}\, F^{\mu\beta;\alpha}, \tag{3.141}
$$

lo cual se muestra en el apéndice C, por lo que

$$
\frac{1}{2} \left\langle (-S_{em}^{(1)})^2 \right\rangle = -\frac{1}{135} F_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{\alpha\beta;\gamma}. \tag{3.142}
$$

3.1.6. Término $F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma}$

Este término también se genera de

$$\frac{1}{2}\left\langle(-S_{em}^{(1)})^2\right\rangle \;=\; \frac{1}{2}\left(-\frac{ie}{3}\right)^2\left\langle\int du_1\,du_2\,F_{\alpha\beta;\gamma}\,\dot{y}_1^{\alpha}\,y_1^{\beta}\,y_1^{\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\,\dot{y}_2^{\mu}\,y_2^{\nu}\,y_2^{\eta}\right\rangle, \tag{3.143}$$

y las contracciones correspondientes son las siguientes:

$$\begin{aligned}\mathcal{FA} &= \langle\dot{y}_1^{\alpha}\,\dot{y}_2^{\mu}\rangle\,\langle y_1^{\beta}\,y_2^{\nu}\rangle\,\langle y_1^{\gamma}\,y_2^{\eta}\rangle,\\ \mathcal{FB} &= \langle\dot{y}_1^{\alpha}\,y_2^{\nu}\rangle\,\langle y_1^{\beta}\,\dot{y}_2^{\mu}\rangle\,\langle y_1^{\gamma}\,y_2^{\eta}\rangle.\end{aligned} \tag{3.144}$$

Ahora se calcula la contribución de cada una de ellas:

$$\begin{aligned}\mathcal{FA} &= \langle\dot{y}_1^{\alpha}\,\dot{y}_2^{\mu}\rangle\,\langle y_1^{\beta}\,y_2^{\nu}\rangle\,\langle y_1^{\gamma}\,y_2^{\eta}\rangle\\ &= (-2T)^3\,g^{\alpha\mu}\,g^{\beta\nu}\,g^{\gamma\eta}\,{}^{\bullet}\Delta^{\bullet}_{12}\,\Delta_{12}\,\Delta_{12}.\end{aligned} \tag{3.145}$$

El proceso de integración fue realizado anteriormente en (3.125):

$$\int du_1 du_2\,{}^{\bullet}\Delta^{\bullet}_{12}\,\Delta_{12}\,\Delta_{12} \;=\; -\frac{2}{90}, \tag{3.146}$$

así que hagamos la contracción de índices

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\,g^{\alpha\mu}\,g^{\beta\nu}\,g^{\gamma\eta} \;=\; F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma}. \tag{3.147}$$

Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned}F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\int du_1du_2\,\mathcal{FA} &= -(-2T)^3\,\frac{2}{90}\,F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma}\\ &= \frac{8}{45}T^3F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma}.\end{aligned} \tag{3.148}$$

Veamos la última contracción que se puede realizar,

$$\begin{aligned}\mathcal{FB} &= \langle\dot{y}_1^{\alpha}\,y_2^{\nu}\rangle\,\langle y_1^{\beta}\,\dot{y}_2^{\mu}\rangle\,\langle y_1^{\gamma}\,y_2^{\eta}\rangle\\ &= (-2T)^3\,g^{\alpha\nu}\,g^{\beta\mu}\,g^{\gamma\eta}\,{}^{\bullet}\Delta_{12}\,\Delta^{\bullet}_{12}\,\Delta_{12}.\end{aligned} \tag{3.149}$$

De la integración se tiene

$$\int du_1du_2\,{}^{\bullet}\Delta_{12}\,\Delta^{\bullet}_{12}\,\Delta_{12} \;=\; \frac{1}{90}. \tag{3.150}$$

Veamos que resulta de la contracción de índices

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\,g^{\alpha\nu}\,g^{\beta\mu}\,g^{\gamma\eta} \;=\; F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\beta\alpha;\gamma} = -F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma}, \qquad (3.151)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\int du_1 du_2\,\mathcal{F}\mathcal{B} &= -(-2T)^3\frac{1}{90}F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma} \\ &= \frac{4}{45}T^3 F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma}. \qquad (3.152) \end{aligned}$$

De la suma de estos dos resultados se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\langle(-S^{(1)}_{em})^2\right\rangle &= \frac{4}{15}\left(-\frac{1}{18}\right)e^2\,T^3\,F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma} \\ &= -\frac{2}{135}e^2\,T^3\,F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma}. \end{aligned} \qquad (3.153)$$

Si se usa los resultados de las ecuaciones (3.142) y (3.153) se tiene el siguiente resultado para el término $F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma}$:

$$\left(-\frac{1}{135}-\frac{2}{135}\right)e^2\,T^3\,F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma} \;=\; -\frac{1}{45}e^2\,T^3\,F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma}. \qquad (3.154)$$

3.1.7. Término $F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma}$

Este término se genera de

$$\left\langle\left(-S^{(0)}_{em}\right)\left(-S^{(2)}_{em}\right)\right\rangle \;=\; -\frac{e^2}{16}\int du_1 du_2\left\langle F_{\mu\nu}\,\dot{y}_1^{\mu}\,y_1^{\nu}\,F_{\alpha\beta;\gamma\delta}\,\dot{y}_2^{\alpha}\,y_2^{\beta}\,y_2^{\gamma}\,y_2^{\delta}\right\rangle. \qquad (3.155)$$

Las contracciones correspondientes son las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\mathcal{A} &= \langle\dot{y}_1^{\mu}\,\dot{y}_2^{\alpha}\rangle\,\langle y_1^{\nu}\,y_2^{\beta}\rangle\,\langle y_2^{\gamma}\,y_2^{\delta}\rangle, \\ \mathcal{G}\mathcal{B} &= \langle\dot{y}_1^{\mu}\,y_2^{\beta}\rangle\,\langle y_1^{\nu}\,\dot{y}_2^{\alpha}\rangle\,\langle y_2^{\gamma}\,y_2^{\delta}\rangle. \qquad (3.156) \end{aligned}$$

Ahora se determina la aportación de cada contracción:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\mathcal{A} &= \langle\dot{y}_1^{\mu}\,\dot{y}_2^{\alpha}\rangle\,\langle y_1^{\nu}\,y_2^{\beta}\rangle\,\langle y_2^{\gamma}\,y_2^{\delta}\rangle \\ &= (-2T)^3\,g^{\mu\alpha}\,g^{\nu\beta}\,g^{\gamma\delta}\,{}^{\bullet}\Delta^{\bullet}_{12}\,\Delta_{12}\,\Delta_{22}. \qquad (3.157) \end{aligned}$$

Como

$$\int du_1\, {}^{\bullet}\Delta_{12}^{\bullet}\, \Delta_{12} \;=\; \int du_1\, \Delta_{12} - \Delta_{22}, \tag{3.158}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int du_1 du_2\, {}^{\bullet}\Delta_{12}^{\bullet}\, \Delta_{12}\, \Delta_{22} &= \int du_1 du_2\, \Delta_{12}\, \Delta_{22} - \int du_2 \Delta_{22}\, \Delta_{22} \\ &= \frac{1}{60} - \frac{1}{30} = -\frac{1}{60}. \end{aligned} \tag{3.159}$$

La contracción de índices arroja

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta;\gamma\delta}\, g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}\, g^{\gamma\delta} \;=\; F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma} \tag{3.160}$$

Entonces,

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta;\gamma\delta} \int du_1 du_2\, \mathcal{G}\mathcal{A} \;=\; \frac{2}{15} T^3\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma}. \tag{3.161}$$

La siguiente contracción esta dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\mathcal{B} &= \langle \dot{y}_1^{\mu}\, y_2^{\beta} \rangle\, \langle y_1^{\nu}\, \dot{y}_2^{\alpha} \rangle\, \langle y_2^{\gamma}\, y_2^{\delta} \rangle \\ &= (-2T)^3\, g^{\mu\beta}\, g^{\nu\alpha}\, g^{\gamma\delta}\, {}^{\bullet}\Delta_{12}\, \Delta_{12}^{\bullet}\, \Delta_{22}. \end{aligned} \tag{3.162}$$

La integración nos da

$$\int du_1 du_2\, {}^{\bullet}\Delta_{12}\, \Delta_{12}^{\bullet}\, \Delta_{22} \;=\; \frac{1}{60}. \tag{3.163}$$

La contracción de índices

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta;\gamma\delta} g^{\mu\beta}\, g^{\nu\alpha}\, g^{\gamma\delta} \;=\; -F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma}. \tag{3.164}$$

Con esto se obtiene

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta;\gamma\delta} \int du_1 du_2\, \mathcal{G}\mathcal{B} \;=\; \frac{2}{15} T^3\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma}. \tag{3.165}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left\langle \left(-S_{em}^{(0)}\right) \left(-S_{em}^{(2)}\right) \right\rangle &= \frac{4}{15} \left(-\frac{e^2}{16}\right) T^3\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma} \\ &= -\frac{1}{60} e^2\, T^3\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma} \end{aligned} \tag{3.166}$$

3.1.8. Término $F_{\mu}{}^{\alpha}\, F^{\mu\beta}{}_{;\alpha\beta}$

Este término se genera de

$$\left\langle\left(-S^{(0)}_{em}\right)\left(-S^{(2)}_{em}\right)\right\rangle \;=\; -\frac{e^2}{16}\int du_1 du_2 \left\langle F_{\mu\nu}\,\dot{y}_1^{\mu}\,y_1^{\nu}\,F_{\alpha\beta;\gamma\delta}\,\dot{y}_2^{\alpha}\,y_2^{\beta}\,y_2^{\gamma}\,y_2^{\delta}\right\rangle, \tag{3.167}$$

por lo cual se tienen las siguientes contracciones:

$$\begin{aligned}
\mathcal{HA} &= \langle \dot{y}_1^{\mu}\,\dot{y}_2^{\alpha}\rangle\,\langle y_1^{\nu}\,y_2^{\gamma}\rangle\,\langle y_2^{\beta}\,y_2^{\delta}\rangle,\\
\mathcal{HB} &= \langle \dot{y}_1^{\mu}\,y_2^{\beta}\rangle\,\langle y_1^{\nu}\,y_2^{\gamma}\rangle\,\langle \dot{y}_2^{\alpha}\,y_2^{\delta}\rangle,\\
\mathcal{HC} &= \langle y_1^{\nu}\,\dot{y}_2^{\alpha}\rangle\,\langle \dot{y}_1^{\mu}\,y_2^{\gamma}\rangle\,\langle y_2^{\beta}\,y_2^{\delta}\rangle,\\
\mathcal{HD} &= \langle \dot{y}_1^{\mu}\,y_2^{\gamma}\rangle\,\langle y_1^{\nu}\,y_2^{\beta}\rangle\,\langle \dot{y}_2^{\alpha}\,y_2^{\delta}\rangle,
\end{aligned} \tag{3.168}$$

De una integración pr partes con respecto a u_1 se concluye que

$$\mathcal{HA} = \mathcal{HC}\,,\ \mathcal{HB} = \mathcal{HD} \tag{3.169}$$

Ahora se calcula la contribución de cada contracción:

$$\begin{aligned}
\mathcal{HA} &= \langle \dot{y}_1^{\mu}\,\dot{y}_2^{\alpha}\rangle\,\langle y_1^{\nu}\,y_2^{\gamma}\rangle\,\langle y_2^{\beta}\,y_2^{\delta}\rangle\\
&= (-2T)^3\,g^{\mu\alpha}\,g^{\nu\gamma}\,g^{\beta\delta}\,{}^{\bullet}\Delta^{\bullet}_{12}\,\Delta_{12}\,\Delta_{22}.
\end{aligned} \tag{3.170}$$

La integral ya fue calculada en (3.159):

$$\int du_1 du_2\,{}^{\bullet}\Delta^{\bullet}_{12}\,\Delta_{12}\,\Delta_{22} \;=\; -\frac{1}{60}. \tag{3.171}$$

La contracción de índices da

$$F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta;\gamma\delta}\,g^{\mu\alpha}\,g^{\nu\gamma}\,g^{\beta\delta} \;=\; F_{\mu}{}^{\gamma}\,F^{\mu\delta}{}_{;\gamma\delta} = F_{\mu}{}^{\alpha}\,F^{\mu\beta}{}_{;\alpha\beta}. \tag{3.172}$$

Entonces,

$$F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta;\gamma\delta}\int du_1 du_2\,\mathcal{HA} \;=\; \frac{2}{15}T^3\,F_{\mu}{}^{\alpha}\,F^{\mu\beta}{}_{;\alpha\beta}. \tag{3.173}$$

Veamos la contracción restante

$$\begin{aligned}
\mathcal{HB} &= \langle \dot{y}_1^{\mu}\,y_2^{\beta}\rangle\,\langle y_1^{\nu}\,y_2^{\gamma}\rangle\,\langle \dot{y}_2^{\alpha}\,y_2^{\delta}\rangle\\
&= (-2T)^3\,g^{\mu\beta}\,g^{\nu\gamma}\,g^{\alpha\delta}\,{}^{\bullet}\Delta_{12}\,\Delta_{12}\,{}^{\bullet}\Delta_{22}.
\end{aligned} \tag{3.174}$$

Pero

$$\int du_1 du_2\, {}^\bullet\Delta_{12}\, \Delta_{12}{}^\bullet\Delta_{22} \;=\; 0, \tag{3.175}$$

así que

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta;\gamma\delta} \int du_1 du_2\, \mathcal{H}\mathcal{B} \;=\; 0. \tag{3.176}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left\langle \left(-S_{em}^{(0)}\right)\left(-S_{em}^{(2)}\right)\right\rangle &= \frac{4}{15}\left(-\frac{e^2}{16}\right) T^3 F_\mu{}^\alpha\, F^{\mu\beta}{}_{;\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{60} e^2\, T^3 F_\mu{}^\alpha\, F^{\mu\beta}{}_{;\alpha\beta} \end{aligned} \tag{3.177}$$

3.1.9. Término $F_\mu{}^\alpha\, F^{\mu\beta}{}_{;\beta\,\alpha}$

Este término también se genera de

$$\left\langle \left(-S_{em}^{(0)}\right)\left(-S_{em}^{(2)}\right)\right\rangle \;=\; -\frac{e^2}{16}\int du_1 du_2 \left\langle F_{\mu\nu}\, \dot{y}_1^\mu\, y_1^\nu\, F_{\alpha\beta;\gamma\delta}\, \dot{y}_2^\alpha\, y_2^\beta\, y_2^\gamma\, y_2^\delta \right\rangle. \tag{3.178}$$

Las contracciones correspondientes están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{IA} &= \langle y_1^\nu\, y_2^\delta\rangle\, \langle \dot{y}_2^\alpha\, y_2^\gamma\rangle\, \langle \dot{y}_1^\mu\, y_2^\beta\rangle, \\ \mathcal{IB} &= \langle y_1^\nu\, y_2^\delta\rangle\, \langle y_2^\beta\, y_2^\gamma\rangle\, \langle \dot{y}_1^\mu\, \dot{y}_2^\alpha\rangle, \\ \mathcal{IC} &= \langle \dot{y}_1^\mu\, y_2^\delta\rangle\, \langle \dot{y}_2^\alpha\, y_2^\gamma\rangle\, \langle y_1^\nu\, y_2^\beta\rangle, \\ \mathcal{ID} &= \langle \dot{y}_1^\mu\, y_2^\delta\rangle\, \langle y_2^\beta\, y_2^\gamma\rangle\, \langle y_1^\nu\, \dot{y}_2^\alpha\rangle. \end{aligned} \tag{3.179}$$

Al realizar una integración por partes sobre u_1, se tiene que

$$\mathcal{IA} = \mathcal{IC}\,,\; \mathcal{IB} = \mathcal{ID}. \tag{3.180}$$

Ahora se calcula el resultado que genera cada contracción:

$$\begin{aligned} \mathcal{IA} &= \langle y_1^\nu\, y_2^\delta\rangle\, \langle \dot{y}_2^\alpha\, y_2^\gamma\rangle\, \langle \dot{y}_1^\mu\, y_2^\beta\rangle \\ &= (-2T)^3\, g^{\nu\delta}\, g^{\alpha\gamma}\, g^{\mu\beta}\, \Delta_{12}{}^\bullet\Delta_{12}{}^\bullet\Delta_{22}. \end{aligned} \tag{3.181}$$

Pero

$$\int du_1 du_2 \, {}^\bullet\Delta_{12} \, \Delta_{12} \, {}^\bullet\Delta_{22} \;=\; 0, \tag{3.182}$$

así que

$$F_{\mu\nu} \, F_{\alpha\beta;\gamma\delta} \int du_1 du_2 \, \mathcal{IA} \;=\; 0. \tag{3.183}$$

Veamos la siguiente contracción

$$\begin{aligned} \mathcal{IB} &= \langle y_1^\nu \, y_2^\delta \rangle \, \langle y_2^\beta \, y_2^\gamma \rangle \, \langle \dot{y}_1^\mu \, \dot{y}_2^\alpha \rangle \\ &= (-2T)^3 \, g^{\nu\delta} \, g^{\beta\gamma} \, g^{\mu\alpha} \, \Delta_{12} \, \Delta_{22} \, {}^\bullet\Delta_{12}^\bullet. \end{aligned} \tag{3.184}$$

El resultado de la integral ya se conoce de (3.159):

$$\int du_1 du_2 \, {}^\bullet\Delta_{12}^\bullet \, \Delta_{12} \, \Delta_{22} \;=\; -\frac{1}{60}. \tag{3.185}$$

De la contracción de índices se obtiene la siguiente expresión

$$F_{\mu\nu} \, F_{\alpha\beta;\gamma\delta} \, g^{\nu\delta} \, g^{\beta\gamma} \, g^{\mu\alpha} \;=\; F_\mu{}^\delta \, F^{\mu\gamma}{}_{;\gamma\delta} = F_\mu{}^\alpha \, F^{\mu\beta}{}_{;\beta\alpha}. \tag{3.186}$$

Por lo tanto

$$F_{\mu\nu} \, F_{\alpha\beta;\gamma\delta} \int du_1 du_2 \, \mathcal{IB} \;=\; \frac{2}{15} T^3 \, F_\mu{}^\alpha \, F^{\mu\beta}{}_{;\beta\alpha}. \tag{3.187}$$

Así que para este término se tiene

$$\begin{aligned} \left\langle \left(-S_{em}^{(0)}\right) \left(-S_{em}^{(2)}\right) \right\rangle &= \frac{4}{15} \left(-\frac{e^2}{16}\right) T^3 \, F_\mu{}^\alpha \, F^{\mu\beta}{}_{;\beta\alpha} \\ &= -\frac{1}{60} e^2 \, T^3 \, F_\mu{}^\alpha \, F^{\mu\beta}{}_{;\beta\alpha} \end{aligned} \tag{3.188}$$

Al realizar la suma de (3.177) y (3.188) se obtiene:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{60} e^2 \, T^3 \, F_\mu{}^\alpha \Big(\nabla_\beta \nabla_\alpha + \nabla_\alpha \nabla_\beta\Big) F^{\mu\beta} &= -\frac{1}{120} e^2 \, T^3 F_{\mu\nu} \, F_{\alpha\beta} \, R^{\mu\nu\alpha\beta} \\ &\quad + \frac{1}{60} e^2 \, T^3 F_\mu{}^\alpha \, F^{\mu\beta} \, R_{\alpha\beta} \\ &\quad - \frac{1}{60} e^2 \, T^3 F_{\mu\nu} \, F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^\gamma, \end{aligned} \tag{3.189}$$

igualdad que se demuestra en el (C.6). El resultado altera la contribución de algunos términos RFF, así que finalmente se tienen los siguientes resultados:

A)

$$-\frac{1}{72}(1-6\,\xi)e^2\,T^3 R\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}$$

B)

$$\left(-\frac{1}{180}+\frac{1}{60}\right)e^2\,T^3 F_{\mu}{}^{\alpha}\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta}=\frac{1}{90}e^2\,T^3 F_{\mu}{}^{\alpha}\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta}$$

C)

$$-\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{120}\right)e^2\,T^3 F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta}=-\frac{1}{60}e^2\,T^3 F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta}$$

D)

$$-\frac{1}{180}e^2\,T^3\,F_{\mu}{}^{\alpha}{}_{;\alpha}\,F^{\mu\beta}{}_{;\beta}$$

E)

$$-\frac{1}{45}e^2\,T^3\,F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma}$$

F)

$$-\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{60}\right)e^2\,T^3\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma}=-\frac{1}{30}e^2\,T^3 F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma} \qquad (3.190)$$

Después de hacer la integración sobre T, lo cual es sencillo en este momento y genera un factor $1/m^2$, se reproduce exactamente (3.1). Para la siguiente sección se reproducen los mismos cálculos bajo el contexto del formalismo *inspirado en cuerdas*.

3.2. Formalismo inspirado en cuerdas

3.2.1. Término $RF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

La forma de obtener este término tiene algunas modificaciones en este formalismo, ya que ahora se debe considerar la acción S_{FP}, por lo cual se trabajará con la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2}\left\langle\left(-S^{(0)}_{em}\right)^2\left(-S_{grav}-S^{(1)}_{gh}-S_{FP}\right)\right\rangle \qquad (3.191)$$

Ahora se calculan las diferentes contracciones

$$\begin{aligned} \mathcal{A}a &= \langle \dot{y}_1^\mu\, \dot{y}_2^\alpha \rangle \langle y_1^\nu\, y_2^\beta \rangle \\ &= \left(+T g^{\mu\alpha} \ddot{G}_{12} \right) \left(-T g^{\nu\beta} G_{12} \right) \\ &= -T^2 g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \ddot{G}_{12} G_{12}, \end{aligned} \tag{3.192}$$

pero de la integración por partes sobre u_1, se tiene

$$\begin{aligned} \int du_1\, \ddot{G}_{12}\, G_{12} &= -\int du_1\, \dot{G}_{12}\, \dot{G}_{12} \\ &= -\int du_1\, \dot{G}_{12}^2, \end{aligned} \tag{3.193}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int du_1\, du_2\, \ddot{G}_{12}\, G_{12} &= -\int du_1\, du_2\, \dot{G}_{12}^2 \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{3.194}$$

La contracción de los índices está dada por

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \tag{3.195}$$

Por lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta} \int du_1\, u_2\, \mathcal{A}a &= \left(-T^2\right) \left(-\frac{1}{3} \right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \frac{T^2}{3} F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{3.196}$$

Ahora veamos la siguiente contracción:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}b &= \langle \dot{y}_1^\mu\, y_2^\beta \rangle \langle y_1^\nu\, \dot{y}_2^\alpha \rangle \\ &= \left(-T g^{\mu\beta} \dot{G}_{12} \right) \left(+T g^{\nu\alpha} \dot{G}_{12} \right) \\ &= -T^2 g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} \dot{G}_{12} \dot{G}_{12}, \end{aligned} \tag{3.197}$$

pero

$$\int du_1\, du_2\, \dot{G}_{12} \dot{G}_{12} = \frac{1}{3}, \tag{3.198}$$

y como la contracción de índices arroja

$$F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} = -F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}, \tag{3.199}$$

entonces

$$F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\int du_1\,du_2\,\mathcal{A}b \;=\; \frac{T^2}{3}F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}. \tag{3.200}$$

De estas dos contracciones se tiene

$$\frac{2}{3}T^2 F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} \tag{3.201}$$

Así que para la contracción de los tensores electromagnéticos se tiene

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{ie}{2}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)T^2 F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} = -\frac{1}{12}e^2T^2F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}. \tag{3.202}$$

Ahora se calculan las contracciones correspondientes a la parte gravitacional

$$\left\langle -\int du_3\left[\frac{1}{12T}R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\,\dot{y}_3^\gamma\,y_3^\delta\,y_3^\epsilon\,\dot{y}_3^\eta + T\bar{\xi}\,R\right]\right\rangle. \tag{3.203}$$

Veamos las contracciones del primer integrando: La primera contracción es

$$\begin{aligned}\mathcal{A}c &= \langle\dot{y}_3^\gamma\,y_3^\epsilon\rangle\,\langle y_3^\delta\,\dot{y}_3^\eta\rangle \\ &= \left(-Tg^{\gamma\epsilon}\dot{G}_{33}\right)\left(+Tg^{\delta\eta}\dot{G}_{33}\right),\end{aligned} \tag{3.204}$$

pero $\dot{G}_{33} = 0$, entonces

$$R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\int du_3\,\mathcal{A}c \;=\; 0. \tag{3.205}$$

La siguiente contracción es

$$\begin{aligned}\mathcal{A}d &= \langle\dot{y}_3^\gamma\,\dot{y}_3^\eta\rangle\langle y_3^\delta\,y_3^\epsilon\rangle \\ &= \left(+Tg^{\gamma\eta}\,\ddot{G}_{33}\right)\left(-Tg^{\delta\epsilon}\,G_{33}\right) \\ &= -T^2g^{\gamma\eta}\,g^{\delta\epsilon}\,\ddot{G}_{33}\,G_{33},\end{aligned} \tag{3.206}$$

como

$$\int du_3\,\ddot{G}_{33}\,G_{33} = \int du_3\;(2\delta(0)-2)\left(-\frac{1}{6}\right), \tag{3.207}$$

al ignorar el término que contiene a $\delta(0)$, se tiene

$$\begin{aligned}\int du_3\, \ddot{G}_{33}\, G_{33} &= (-2)\left(-\frac{1}{6}\right)\int du_3 \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned} \tag{3.208}$$

La contracción del vértice queda de la siguiente forma

$$R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\, g^{\gamma\eta}\, g^{\delta\epsilon} = -R. \tag{3.209}$$

Así que

$$R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\int du_3\, \mathcal{A}d = \frac{1}{3}T^2 R. \tag{3.210}$$

Entonces, para la parte gravitacional se tiene

$$\langle -S_{grav}\rangle = -\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{12\,T}T^2 R - \bar{\xi}\,RT = -\frac{1}{3(12)}TR - \bar{\xi}\,RT \tag{3.211}$$

Aún falta considerar la acción S_{FP}, $\langle -S_{FP}\rangle$, pero como se desea una contracción del tensor gravitacional con el mismo, entonces sólo se trabaja con la expresión

$$\begin{aligned}\langle -S_{FP}\rangle &= -(-1)\int du_3 \left\langle \bar{\eta}_\lambda\, \frac{1}{3}R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\sigma}\, y_3^\delta\, y_3^\epsilon\, \eta^\sigma \right\rangle \\ &= \frac{1}{3}R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\sigma}\,\langle \bar{\eta}_\lambda\, \eta^\sigma\rangle \int du_3\, \left\langle y_3^\delta\, y_3^\epsilon\right\rangle \\ &= \frac{1}{3}R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\sigma}\,\delta^\sigma_\lambda \int du_3\, \left(-T g^{\delta\epsilon}\, G_{33}\right) \\ &= \frac{T}{3}\left(-R^{\lambda}{}_{\delta\sigma\epsilon}\right)\delta^\sigma_\lambda\left(-g^{\delta\epsilon}\right)\int du_3 \left(-\frac{1}{6}\right) \\ &= -\frac{T}{3}R_{\delta\epsilon}\, g^{\delta\epsilon}\left(\frac{1}{6}\right) \\ &= -\frac{T}{18}R.\end{aligned} \tag{3.212}$$

En total se tiene

$$\begin{aligned}\langle -S_{grav}\rangle + \langle -S_{FP}\rangle &= -\frac{TR}{3(12)} - \frac{TR}{18} - \bar{\xi}\,RT \\ &= -\left(\frac{1}{12} + \bar{\xi}\right)TR.\end{aligned} \tag{3.213}$$

Así que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\langle\left(-S^{(0)}_{em}\right)^2\left(-S_{grav}-S^{(1)}_{gh}\right)\right\rangle &= \left(-\frac{1}{12}e^2T^2F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}\right)\left[-\left(\frac{1}{12}+\bar{\xi}\right)RT\right]\\ &= -\frac{1}{72}(1-6\xi)e^2\,T^3R\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}. \qquad (3.214)\end{aligned}$$

3.2.2. Término $F_{\mu}{}^{\alpha}F^{\mu\beta}R_{\alpha\beta}$

Para calcular este término se usan las siguientes expresiones

$$\frac{1}{2}\left\langle\left(-S^{(0)}_{em}\right)^2\left(-S_{grav}-S_{gh}-S_{FP}\right)\right\rangle, \qquad (3.215)$$

$$\left\langle\left(-S_{em,grav}\right)\left(-S^{(0)}_{em}\right)\right\rangle, \qquad (3.216)$$

como en el formalismo DBC se usa

$$S_{grav}=\int_0^1 du\,\frac{1}{12T}R_{\mu\alpha\beta\nu}\dot{y}^{\mu}y^{\alpha}y^{\beta}\dot{y}^{\nu}. \qquad (3.217)$$

Las contracciones para el arreglo

$$\frac{1}{8(12)T}e^2\left\langle\int du_1du_2du_3F_{\mu\nu}\,\dot{y}^{\mu}_1\,y^{\nu}_1\,F_{\alpha\beta}\,\dot{y}^{\alpha}_2\,y^{\beta}_2\,R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\,\dot{y}^{\gamma}_3\,y^{\delta}_3\,y^{\epsilon}_3\,\dot{y}^{\eta}_3\right\rangle$$

son las siguientes

$$\begin{aligned}\mathcal{B}a &= \langle\dot{y}^{\mu}_1\,\dot{y}^{\alpha}_2\rangle\,\langle y^{\nu}_1\,\dot{y}^{\gamma}_3\rangle\,\langle y^{\beta}_2\,y^{\epsilon}_3\rangle\,\langle y^{\delta}_3\,\dot{y}^{\eta}_3\rangle \qquad (3.218)\\ &= (+Tg^{\mu\alpha}\ddot{G}_{12})\,(+Tg^{\nu\gamma}\dot{G}_{13})\,(-Tg^{\beta\epsilon}G_{23})(+Tg^{\delta\eta}\dot{G}_{33})\\ &= -T^4g^{\mu\alpha}\,g^{\nu\gamma}\,g^{\beta\epsilon}\,g^{\delta\eta}\,\ddot{G}_{12}\,\dot{G}_{13}\,G_{23}\,\dot{G}_{33}. \qquad (3.219)\end{aligned}$$

Pero $\dot{G}_{33}=0$, entonces

$$F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\int du_1du_2du_3\,\mathcal{B}a \;=\; 0. \qquad (3.220)$$

Ahora se calcula la siguiente contracción:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}b &= \langle\dot{y}^{\mu}_1\,\dot{y}^{\alpha}_2\rangle\,\langle y^{\nu}_1\,\dot{y}^{\gamma}_3\rangle\,\langle y^{\beta}_2\,\dot{y}^{\eta}_3\rangle\,\langle y^{\delta}_3\,y^{\epsilon}_3\rangle \qquad (3.221)\\ &= (+Tg^{\mu\alpha}\ddot{G}_{12})\,(+Tg^{\nu\gamma}\dot{G}_{13})\,(+Tg^{\beta\eta}\dot{G}_{23})(-Tg^{\delta\epsilon}G_{33})\\ &= -T^4g^{\mu\alpha}\,g^{\nu\gamma}\,g^{\beta\eta}\,g^{\delta\epsilon}\,\ddot{G}_{12}\,\dot{G}_{13}\,\dot{G}_{23}\,G_{33} \qquad (3.222)\end{aligned}$$

La integral sobre u_1 nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int du_1 \ddot{G}_{12}\dot{G}_{13} &= \int du_1 \Big[2\delta(u_1-u_2)-2\Big]\dot{G}_{13} \\ &= 2\dot{G}_{23} - 2\int du_1\, \dot{G}_{13}. \end{aligned} \tag{3.223}$$

Así que

$$\begin{aligned}\int du_1 du_2 du_3\, \ddot{G}_{12}\, \dot{G}_{13}\, \dot{G}_{23}\, G_{33} &= \int du_2 du_3 \left(2\dot{G}_{23} - 2\int du_1 \dot{G}_{13}\right)\dot{G}_{23}G_{33} \\ &= 2\int du_2 du_3 \dot{G}_{23}\dot{G}_{23}G_{33} \\ &\quad -2\int du_1 du_2 du_3 \dot{G}_{13}\, \dot{G}_{23}\, G_{33} \\ &= 2\left(-\frac{1}{18}\right) - 2(0) \\ &= -\frac{1}{9}. \end{aligned} \tag{3.224}$$

Se procede ahora a calcular la contracción correspondiente a los índices:

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R_{\gamma\delta\epsilon\eta} g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\gamma}\, g^{\beta\eta}\, g^{\delta\epsilon} = -F_{\mu}{}^{\gamma}\, F^{\mu\eta} R_{\gamma\eta}. \tag{3.225}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \int du_1 du_2 du_3\, \mathcal{B}b &= -T^4(-F_{\mu}{}^{\gamma}\, F^{\mu\eta}R_{\gamma\eta})\left(-\frac{1}{9}\right) \\ &= -\frac{1}{9}T^4 F_{\mu}{}^{\alpha}\, F^{\mu\beta}R_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{3.226}$$

Veamos ahora otra contacción:

$$\mathcal{B}c = \langle \dot{y}_1^{\mu}\, \dot{y}_2^{\alpha}\rangle\, \langle y_1^{\nu}\, y_3^{\delta}\rangle\, \langle y_2^{\beta}\, y_3^{\epsilon}\rangle\, \langle \dot{y}_3^{\gamma}\, \dot{y}_3^{\eta}\rangle \tag{3.227}$$

$$\begin{aligned} &= (+Tg^{\mu\alpha}\ddot{G}_{12})\,(-Tg^{\nu\delta}G_{13})\,(-Tg^{\beta\epsilon}G_{23})(+Tg^{\gamma\eta}\ddot{G}_{33}) \\ &= T^4 g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\delta}\, g^{\beta\epsilon}\, g^{\gamma\eta}\, \ddot{G}_{12}\, G_{13}\, G_{23}\, \ddot{G}_{33}. \end{aligned} \tag{3.228}$$

Dado que $\ddot{G}_{33} = 2\delta(0) - 2$ aparentemente se tiene una cantidad que diverge pero hay que recordar que la presencia de los campos fantasma permiten eliminar cantidades como $2\delta(0)$. Ahora bien, para u_1 se hace una integración por partes;

$$\int du_1 \ddot{G}_{12} G_{13} = -\int du_1 \dot{G}_{12} \dot{G}_{13}. \tag{3.229}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int du_1 du_2 du_3 \ddot{G}_{12} G_{13} G_{23} \ddot{G}_{33} &= (-2)(-1) \int du_1 du_2 du_3 \dot{G}_{12} \dot{G}_{13} G_{23} \\ &= 2\left(-\frac{1}{90}\right) \\ &= -\frac{1}{45}. \end{aligned} \tag{3.230}$$

De la contracción de los índices se tiene

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R_{\gamma\delta\epsilon\eta} g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\delta}\, g^{\beta\epsilon}\, g^{\gamma\eta} \;=\; -F_{\mu}{}^{\alpha}\, F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}. \tag{3.231}$$

Así que

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \int du_1 du_2 du_3\, \mathcal{B}c &= \left(-\frac{T^4}{45}\right)\left(-F_{\mu}{}^{\alpha}\, F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}\right) \\ &= \frac{T^4}{45} F_{\mu}{}^{\alpha}\, F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{3.232}$$

La cuarta contracción es de la siguiente forma:

$$\mathcal{B}d = \langle \dot{y}_1^{\mu}\, \dot{y}_2^{\alpha} \rangle\, \langle y_1^{\nu}\, y_3^{\delta} \rangle\, \langle y_2^{\beta}\, \dot{y}_3^{\eta} \rangle\, \langle \dot{y}_3^{\gamma}\, y_3^{\epsilon} \rangle \tag{3.233}$$

$$\begin{aligned} &= (+T g^{\mu\alpha} \ddot{G}_{12})\, (-T g^{\nu\delta} G_{13})\, (+T g^{\beta\eta} G_{23}) (-T g^{\gamma\epsilon} \dot{G}_{33}) \\ &= T^4 g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\delta}\, g^{\beta\eta}\, g^{\gamma\epsilon}\, \ddot{G}_{12}\, G_{13}\, G_{23}\, \dot{G}_{33} \end{aligned} \tag{3.234}$$

Pero $\dot{G}_{33} = 0$, entonces

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \int du_1 du_2 du_3\, \mathcal{B}d \;=\; 0. \tag{3.235}$$

Ahora se suman todos los resultados que se obtienen de esta serie de contracciones

$$2\left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{45}\right) = -\frac{8}{45}. \tag{3.236}$$

Esta serie de ocho configuraciones no es única. Existen otras tres series, pero arrojan los mismos resultados. Así que el resultado final está dado por

$$\left(-\frac{8}{45}\right)\left(\frac{1}{8(12T)}\right)(4)e^2T^4F_{\mu}{}^{\alpha}\,F^{\mu\beta}R_{\alpha\beta}=-\frac{1}{(45)(3)}e^2T^3F_{\mu}{}^{\alpha}\,F^{\mu\beta}R_{\alpha\beta}. \tag{3.237}$$

No olvidemos el segundo arreglo (3.35)

$$-\frac{1}{2(24)}e^2\left\langle\int du_1du_2\,F_{\alpha\beta}\,\dot{y}_1^{\alpha}\,y_1^{\beta}\,F_{\lambda\nu}\,R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\eta}\,y_2^{\nu}\,y_2^{\delta}\,y_2^{\epsilon}\,\dot{y}_2^{\eta}\right\rangle.$$

Para esta expresión se tienen las siguientes contracciones

$$\begin{aligned}\mathcal{B}i &= \langle\dot{y}_1^{\alpha}\,y_2^{\nu}\rangle\,\langle y_1^{\beta}\,y_2^{\epsilon}\rangle\,\langle y_2^{\delta}\,\dot{y}_2^{\eta}\rangle\\ &= (-Tg^{\alpha\nu}\,\dot{G}_{12})\,(-Tg^{\beta\epsilon}\,G_{12})\,(Tg^{\delta\eta}\,\dot{G}_{22})\\ &= T^3\,g^{\alpha\nu}\,g^{\beta\epsilon}\,g^{\delta\eta}\,\dot{G}_{12}\,G_{12}\,\dot{G}_{22},\end{aligned} \tag{3.238}$$

pero $\dot{G}_{22}=0$, entonces

$$F_{\lambda\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\eta}\int du_1du_2\,\mathcal{B}i \;=\; 0. \tag{3.239}$$

La siguiente contracción es

$$\begin{aligned}\mathcal{B}j &= \langle\dot{y}_1^{\alpha}\,y_2^{\nu}\rangle\,\langle y_1^{\beta}\,\dot{y}_2^{\eta}\rangle\,\langle y_2^{\delta}\,y_2^{\epsilon}\rangle\\ &= (-Tg^{\alpha\nu}\,\dot{G}_{12})\,(+Tg^{\beta\eta}\,\dot{G}_{12})\,(-Tg^{\delta\epsilon}\,G_{22})\\ &= T^3\,g^{\alpha\nu}\,g^{\beta\eta}\,g^{\delta\epsilon}\,\dot{G}_{12}\,\dot{G}_{12}\,G_{22}.\end{aligned} \tag{3.240}$$

Como

$$\int du_1du_2\,\dot{G}_{12}\,\dot{G}_{12}\,G_{22} \;=\; -\frac{1}{18}, \tag{3.241}$$

y dado que de la contracción de índices se tiene

$$F_{\lambda\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\eta}\,g^{\alpha\nu}\,g^{\beta\eta}\,g^{\delta\epsilon} \;=\; F_{\mu}{}^{\alpha}\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta}, \tag{3.242}$$

entonces

$$F_{\lambda\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\eta}\int du_1\,du_2\,\mathcal{B}j=-\frac{1}{18}T^3F_{\mu}{}^{\alpha}\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta}. \tag{3.243}$$

Ahora se suman estas contracciones

$$2\left(-\frac{1}{18}\right)=-\frac{1}{9}.$$

Así que para el segundo arreglo se tiene

$$-\frac{1}{2(24)}\left(-\frac{1}{9}\right)T^3F_\mu{}^\alpha\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta} \;=\; \frac{1}{(18)(24)}T^3F_\mu{}^\alpha\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta}. \quad (3.244)$$

Aún falta considerar la acción S_{FP}. Como se realiza contracción simple entre los tensores, solo se trabaja con la siguiente cantidad

$$\frac{-1}{2}\left(-\frac{ie}{2}\right)^2\left\langle\int du_1du_2\,F_{\mu\nu}\,\dot{y}_1^\mu\,y_1^\nu\,F_{\alpha\beta}\,\dot{y}_2^\alpha\,y_2^\beta\left(-\int du_3\,\bar{\eta}_\lambda\,\frac{1}{3}\,R^\lambda{}_{\delta\epsilon\sigma}\,y_3^\delta\,y_3^\epsilon\,\eta^\sigma\right)\right\rangle$$

$$=-\frac{e^2}{(8)(3)}F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^\lambda{}_{\delta\epsilon\sigma}\int du_1\,du_2\,du_3\left\langle\dot{y}_1^\mu\,y_1^\nu\,\dot{y}_2^\alpha\,y_2^\beta\,y_3^\delta\,y_3^\epsilon\right\rangle\langle\bar{\eta}_\lambda\,\eta^\sigma\rangle\,. \quad (3.245)$$

Las contracciónes que se generan son:

$$\mathcal{B}m \;=\; \langle\dot{y}_1^\mu\,\dot{y}_2^\alpha\rangle\,\langle y_1^\nu\,y_3^\delta\rangle\,\langle y_2^\beta\,y_3^\epsilon\rangle \quad (3.246)$$

$$\mathcal{B}n \;=\; \langle\dot{y}_1^\mu\,\dot{y}_2^\alpha\rangle\,\langle y_1^\nu\,y_3^\epsilon\rangle\,\langle y_2^\beta\,y_3^\delta\rangle \quad (3.247)$$

Veamos cual es la aportación de cada una. Tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{B}m &= \langle\dot{y}_1^\mu\,\dot{y}_2^\alpha\rangle\,\langle y_1^\nu\,y_3^\delta\rangle\,\langle y_2^\beta\,y_3^\epsilon\rangle\\ &= (+Tg^{\mu\alpha}\ddot{G}_{12})\,(-Tg^{\nu\delta}G_{13})\,(-Tg^{\beta\epsilon}G_{23})\\ &= T^3g^{\mu\alpha}\,g^{\nu\delta}\,g^{\beta\epsilon}\,\ddot{G}_{12}G_{13}G_{23}.\end{aligned} \quad (3.248)$$

Como

$$\int du_1\ddot{G}_{12}G_{13}=-\int du_1\dot{G}_{12}\dot{G}_{13}, \quad (3.249)$$

entonces

$$\begin{aligned}\int du_1du_2du_3\,\ddot{G}_{12}G_{13}G_{23} &= -\int du_1du_2du_3\dot{G}_{12}\dot{G}_{13}G_{23}\\ &= -\left(-\frac{1}{90}\right)=\frac{1}{90}.\end{aligned} \quad (3.250)$$

Ahora calculemos la contracción de los índices. Ya que

$$\langle\bar{\eta}_\lambda\,\eta^\sigma\rangle=\delta^\sigma_\lambda, \quad (3.251)$$

se tiene

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\sigma}\,g^{\mu\alpha}\,g^{\nu\delta}\,g^{\beta\epsilon}\,\delta^{\sigma}_{\lambda} &= F_{\mu}{}^{\delta}\,F^{\mu\epsilon}\,R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\lambda} = F_{\mu}{}^{\delta}\,F^{\mu\epsilon}\,(-R_{\delta\epsilon}) \\ &= -F_{\mu}{}^{\alpha}\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{3.252}$$

Así que el resultado final para esta contracción está dado por

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\sigma}\int du_1du_2du_3\,\mathcal{B}m\,\langle\bar{\eta}_\lambda\,\eta^\sigma\rangle &= T^3\left(\frac{1}{90}\right)\left(-F_{\mu}{}^{\alpha}\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta}\right) \\ &= -\frac{1}{90}T^3F_{\mu}{}^{\alpha}\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{3.253}$$

Ahora se calcula la siguiente contracción

$$\mathcal{B}n = \langle\dot{y}_1^\mu\,\dot{y}_2^\alpha\rangle\,\langle y_1^\nu\,y_3^\epsilon\rangle\,\langle y_2^\beta\,y_3^\delta\rangle \tag{3.254}$$

$$\begin{aligned} &= (+Tg^{\mu\alpha}\ddot{G}_{12})\,(-Tg^{\nu\epsilon}G_{13})\,(-Tg^{\beta\delta}G_{23}) \\ &= T^3g^{\mu\alpha}\,g^{\nu\epsilon}\,g^{\beta\delta}\,\ddot{G}_{12}G_{13}G_{23}, \end{aligned} \tag{3.255}$$

como

$$\int du_1du_2du_3\ddot{G}_{12}G_{13}G_{23} = \frac{1}{90}, \tag{3.256}$$

que es el resultado de (3.250). continuación veamos como queda la contracción de índices

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\sigma}\,g^{\mu\alpha}\,g^{\nu\epsilon}\,g^{\beta\delta}\,\delta^{\sigma}_{\lambda} &= F_{\mu}{}^{\epsilon}\,F^{\mu\delta}\,R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\lambda} = F_{\mu}{}^{\epsilon}\,F^{\mu\delta}\,(-R_{\delta\epsilon}) \\ &= -F_{\mu}{}^{\alpha}\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{3.257}$$

Entonces

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\sigma}\int du_1du_2du_3\,\mathcal{B}n\,\langle\bar{\eta}_\lambda\,\eta^\sigma\rangle &= T^3\left(\frac{1}{90}\right)\left(-F_{\mu}{}^{\alpha}\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta}\right) \\ &= -\frac{T^3}{90}F_{\mu}{}^{\alpha}\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{3.258}$$

Así que estas dos configuraciones nos dan

$$-\frac{1}{90}-\frac{1}{90}=-\frac{2}{90} \tag{3.259}$$

Nuevamente, no se trata de una serie única; existen en total cuatro series, así que se tiene

$$-\frac{1}{(8)(3)}\left(-\frac{2}{90}\right)(4)T^3 F_\mu{}^\alpha\, F^{\mu\beta}\, R_{\alpha\beta} = +\frac{1}{(3)(90)}T^3 F_\mu{}^\alpha\, F^{\mu\beta}\, R_{\alpha\beta} \tag{3.260}$$

Finalmente, se deben sumar todos los resultados

$$\left(-\frac{1}{(45)(3)}+\frac{1}{(18)(24)}+\frac{1}{(3)(90)}\right)e^2T^3F_\mu{}^\alpha\, F^{\mu\beta}R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{720}e^2T^3F_\mu{}^\alpha\, F^{\mu\beta}R_{\alpha\beta}, \tag{3.261}$$

3.2.3. Término $F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$

Para la primera combinación (3.77)

$$\frac{1}{8(12)T}e^2\left\langle\int du_1du_2du_3F_{\mu\nu}\,\dot{y}_1^\mu\, y_1^\nu\, F_{\alpha\beta}\,\dot{y}_2^\alpha\, y_2^\beta\, R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\,\dot{y}_3^\gamma\, y_3^\delta\, y_3^\epsilon\,\dot{y}_3^\eta\right\rangle,$$

se generan las siguientes contracciones

$$\begin{aligned}\mathcal{C}a &= \langle\dot{y}_1^\mu\,\dot{y}_3^\gamma\rangle\,\langle y_1^\nu\, y_3^\delta\rangle\,\langle\dot{y}_2^\alpha\, y_3^\epsilon\rangle\,\langle y_2^\beta\,\dot{y}_3^\eta\rangle && (3.262)\\ &= (+Tg^{\mu\gamma}\ddot{G}_{13})\,(-Tg^{\nu\delta}G_{13})\,(-Tg^{\alpha\epsilon}\dot{G}_{23})(+Tg^{\beta\eta}\dot{G}_{23}) \\ &= T^4g^{\mu\gamma}\,g^{\nu\delta}\,g^{\alpha\epsilon}\,g^{\beta\eta}\,\ddot{G}_{13}\,G_{13}\,\dot{G}_{23}\,\dot{G}_{23}. && (3.263)\end{aligned}$$

De la integración por partes sobre u_1 se tiene que

$$\int du_1\ddot{G}_{13}G_{13} = -\int du_1\dot{G}_{13}\dot{G}_{13}. \tag{3.264}$$

Así

$$\begin{aligned}\int du_1du_2du_3\ddot{G}_{13}\,G_{13}\,\dot{G}_{23}\,\dot{G}_{23} &= -\int du_1du_2du_3\dot{G}_{13}^2\dot{G}_{23}^2 \\ &= -\frac{1}{9}. && (3.265)\end{aligned}$$

La contracción de los índices está dada de la siguiente forma:

$$F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\,g^{\mu\gamma}\,g^{\nu\delta}\,g^{\alpha\epsilon}\,g^{\beta\eta} = F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta},$$

de modo que para esta contracción se tiene

$$F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\int du_1du_2du_3\,\mathcal{C}a \;=\; -\frac{1}{9}T^4F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (3.266)$$

Ahora calculemos la siguiente contracción

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}c &= \langle\dot y_1^\mu\,\dot y_3^\gamma\rangle\,\langle y_1^\nu\,y_3^\epsilon\rangle\,\langle\dot y_2^\alpha\,y_3^\delta\rangle\,\langle y_2^\beta\,\dot y_3^\eta\rangle && (3.267)\\
&= (+Tg^{\mu\gamma}\ddot G_{13})\,(-Tg^{\nu\epsilon}G_{13})\,(-Tg^{\alpha\delta}\dot G_{23})(+Tg^{\beta\eta}\dot G_{23})\\
&= T^4g^{\mu\gamma}\,g^{\nu\epsilon}\,g^{\alpha\delta}\,g^{\beta\eta}\,\ddot G_{13}\,G_{13}\,\dot G_{23}\,\dot G_{23}. && (3.268)
\end{aligned}$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
\int du_1\,du_2\,du_3\,\ddot G_{13}\,G_{13}\,\dot G_{23}\,\dot G_{23} &= -\int du_1\,du_2\,du_3\,\dot G_{13}^2\dot G_{23}^2\\
&= -\frac{1}{9}. && (3.269)
\end{aligned}$$

Veamos ahora las contracciones de los índices

$$F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\,g^{\mu\gamma}\,g^{\nu\epsilon}\,g^{\alpha\delta}\,g^{\beta\eta} \;=\; \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (3.270)$$

Con este resultado es posible obtener

$$F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\int du_1\,du_2\,du_3\,\mathcal{C}c \;=\; -\frac{1}{(2)(9)}T^4F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (3.271)$$

La última configuración está dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}e &= \langle\dot y_1^\mu\,\dot y_3^\gamma\rangle\,\langle y_1^\nu\,\dot y_3^\eta\rangle\,\langle\dot y_2^\alpha\,y_3^\delta\rangle\,\langle y_2^\beta\,y_3^\epsilon\rangle\\
&= (+Tg^{\mu\gamma}\ddot G_{13})\,(+Tg^{\nu\eta}\dot G_{13})\,(-Tg^{\alpha\delta}\dot G_{23})(-Tg^{\beta\epsilon}G_{23})\\
&= T^4g^{\mu\gamma}\,g^{\nu\eta}\,g^{\alpha\delta}\,g^{\beta\epsilon}\,\ddot G_{13}\,\dot G_{13}\,\dot G_{23}\,G_{23}. && (3.272)
\end{aligned}$$

La integral sobre u_1 da el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
\int du_1\ddot G_{13}\,\dot G_{13} &= \int du_1\frac{d}{du_1}\left[\frac{1}{2}\left(\dot G_{13}\right)^2\right]\\
&= \left[\frac{1}{2}\left(\dot G_{13}\right)^2\right]_0^1 = 0, && (3.273)
\end{aligned}$$

entonces se tiene

$$F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R_{\gamma\delta\epsilon\eta}\int du_1du_2du_3\,\mathcal{C}e \;=\; 0. \tag{3.274}$$

Al considerar estas configuraciones se tiene

$$-2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{(2)(9)}\right)=-\frac{6}{(18)}=-\frac{1}{3}$$

Esta no es la única serie de contracciones, existen en total cuatro pero las aportaciones son iguales, así que con ello

$$(4)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{(8)(12T)}\right)e^2\,T^4F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta}=-\frac{1}{72}e^2\,T^3F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta}. \tag{3.275}$$

Para el término $F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$ no hay contribución de la acción S_{FP}, pero aun falta considerar la segunda combinación (3.78)

$$-\frac{1}{2(24)}e^2\left\langle\int du_1du_2\,F_{\alpha\beta}\,\dot{y}_1^{\alpha}\,y_1^{\beta}\,F_{\lambda\nu}\,R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\eta}\,y_2^{\nu}\,y_2^{\delta}\,y_2^{\epsilon}\,\dot{y}_2^{\eta}\right\rangle, \tag{3.276}$$

las contracciones son las mismas que ya se calcularon en el formalismo DBC pero con algunos cambios:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}g &= \langle y_2^{\nu}\,y_2^{\delta}\rangle\,\langle\dot{y}_1^{\alpha}\,y_2^{\epsilon}\rangle\,\langle y_1^{\beta}\,\dot{y}_2^{\eta}\rangle\\ &= (-Tg^{\nu\delta}\,G_{22})(-Tg^{\alpha\epsilon}\,\dot{G}_{12})(+Tg^{\beta\eta}\,\dot{G}_{12})\\ &= T^3g^{\nu\delta}\,g^{\alpha\epsilon}\,g^{\beta\eta}\,G_{22}\,\dot{G}_{12}\,\dot{G}_{12}.\end{aligned} \tag{3.277}$$

De la integración se tiene

$$\int du_1du_2\,G_{22}\,\dot{G}_{12}\,\dot{G}_{12} \;=\; -\frac{1}{18}. \tag{3.278}$$

Ahora se considera la contracción de índices

$$F_{\lambda\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\eta}\,g^{\nu\delta}\,g^{\alpha\epsilon}\,g^{\beta\eta} \;=\; F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta}, \tag{3.279}$$

así que

$$F_{\lambda\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\eta}\int du_1\,du_2\,\mathcal{C}g \;=\; -\frac{1}{18}T^3F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta}. \tag{3.280}$$

Por último, se tiene la contracción

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}i &= \langle y_2^\nu\, y_2^\epsilon\rangle\,\langle \dot{y}_1^\alpha\, y_2^\delta\rangle\,\langle y_1^\beta\, \dot{y}_2^\eta\rangle \\
&= (-T g^{\nu\epsilon}\, G_{22})(-T g^{\alpha\delta}\, \dot{G}_{12})(+T g^{\beta\eta}\, \dot{G}_{12}) \\
&= T^3 g^{\nu\epsilon}\, g^{\alpha\delta}\, g^{\beta\eta}\, G_{22}\, \dot{G}_{12}\, \dot{G}_{12}. \qquad (3.281)
\end{aligned}$$

El resultado de la integral ya se ha calculado,

$$\int du_1 du_2\, G_{22}\, \dot{G}_{12}\, \dot{G}_{12} = -\frac{1}{18}. \qquad (3.282)$$

la contracción de índices arroja

$$F_{\lambda\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\eta}\, g^{\nu\epsilon}\, g^{\alpha\delta}\, g^{\beta\eta} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta}. \qquad (3.283)$$

Por lo tanto,

$$F_{\lambda\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\lambda}{}_{\delta\epsilon\eta} \int du_1\, du_2\, \mathcal{C}i = -\frac{1}{2(18)} T^3 F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta}. \qquad (3.284)$$

Ahora se hace la suman estas contracciones

$$-2\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{2(18)}\right) = -\frac{1}{6}.$$

Entonces, para la combinación (3.78) se tiene el siguiente resultado

$$-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2(24)}\right) e^2 T^3 F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{12(24)} e^2 T^3 F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta}. \qquad (3.285)$$

Por último se realiza la suma del resultado de las dos combinaciones (3.275) y (3.285)

$$\left(-\frac{1}{72} + \frac{1}{12(24)}\right) e^2\, T^4 F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta} = -\frac{1}{96} e^2\, T^3 F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta}. \qquad (3.286)$$

3.2.4. Término $F_{\mu\ \ ;\alpha}^{\ \alpha}\, F^{\mu\beta}_{\ \ \ \ ;\beta}$

Las contracciones correspondientes ya fueron mencionadas en la sección anterior, por lo cual sólo realizan los cálculos correspondientes bajo el presente formalismo. Veamos la primera contracción

$$\begin{aligned}\mathcal{D}a &= \langle \dot{y}_1^\alpha\, y_1^\gamma \rangle\, \langle y_1^\beta\, \dot{y}_2^\mu \rangle\, \langle y_2^\nu\, y_2^\eta \rangle \\ &= T^3\, g^{\alpha\gamma}\, g^{\beta\mu}\, g^{\nu\eta}\, \dot{G}_{11}\, \dot{G}_{12}\, G_{22}, \end{aligned} \tag{3.287}$$

pero $\dot{G}_{11} = 0$, entonces

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\, F_{\mu\nu;\eta} \int du_1 du_2\, \mathcal{D}a = 0. \tag{3.288}$$

Ahora tenemos la siguiente contracción:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}b &= \langle \dot{y}_1^\alpha\, y_1^\gamma \rangle\, \langle y_1^\beta\, y_2^\nu \rangle\, \langle \dot{y}_2^\mu\, y_2^\eta \rangle \\ &= -T^3\, g^{\alpha\gamma}\, g^{\beta\nu}\, g^{\mu\eta}\, \dot{G}_{11}\, G_{12}\, \dot{G}_{22}. \end{aligned} \tag{3.289}$$

Nuevamente se tiene $\dot{G}_{11} = \dot{G}_{22} = 0$ y con esto

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\, F_{\mu\nu;\eta} \int du_1 du_2\, \mathcal{D}b = 0. \tag{3.290}$$

Consideremos la siguiente contracción

$$\begin{aligned}\mathcal{D}c &= \langle \dot{y}_1^\alpha\, \dot{y}_2^\mu \rangle\, \langle y_1^\beta\, y_1^\gamma \rangle\, \langle y_2^\nu\, y_2^\eta \rangle \\ &= T^3\, g^{\alpha\mu}\, g^{\beta\gamma}\, g^{\nu\eta}\, \ddot{G}_{12}\, G_{11}\, G_{22}. \end{aligned} \tag{3.291}$$

Ahora se calculan las integrales

$$\int du_1\, \ddot{G}_{12}\, G_{11} = 2 \int du_1 \Big(\delta_{12} - 1\Big)\, G_{11} = 2\left(G_{22} - \int du_1\, G_{11}\right),$$

entonces

$$\begin{aligned}\int du_1\, du_2\, \ddot{G}_{12}\, G_{11} &= 2\left(\int du_2 G_{22} G_{22} - \int du_1\, du_2\, G_{11} G_{22}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{36} - \frac{1}{36}\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.292}$$

Por lo tanto

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\int du_1\,du_2\,\mathcal{D}c \;=\; 0. \tag{3.293}$$

Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{D}d &= \langle \dot{y}_1^\alpha\,y_2^\nu\rangle\,\langle y_1^\beta\,y_1^\gamma\rangle\,\langle \dot{y}_2^\mu\,y_2^\eta\rangle. \\ &= -T^3\,g^{\alpha\nu}\,g^{\beta\gamma}\,g^{\mu\eta}\,\dot{G}_{12}\,G_{11}\,\dot{G}_{22},\end{aligned} \tag{3.294}$$

pero dado que $\dot{G}_{22} = 0$ entonces se tiene

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\int du_1\,du_2\,\mathcal{D}d \;=\; 0. \tag{3.295}$$

Así que bajo este formalismo, no hay contribución del término $F_{\mu\ ;\alpha}^{\ \alpha}\,F^{\mu\beta}_{\ \ \ ;\beta}$ a la acción efectiva.

3.2.5. Término $F_{\mu\alpha;\beta}\,F^{\mu\beta;\alpha}$

Las contracciones de este término adquieren los siguientes valores bajo el formalismo actual:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}a &= \langle \dot{y}_1^\alpha\,\dot{y}_2^\mu\rangle\,\langle y_1^\beta\,y_2^\eta\rangle\,\langle y_1^\gamma\,y_2^\nu\rangle \\ &= T^3\,g^{\alpha\mu}\,g^{\beta\eta}\,g^{\gamma\nu}\,\ddot{G}_{12}\,G_{12}\,G_{12}.\end{aligned} \tag{3.296}$$

Veamos que resulta de la integración

$$\begin{aligned}\int du_1\,\ddot{G}_{12}\,G_{12}\,G_{12} &= 2\int du_1\Big(\delta_{12}-1\Big)\,G_{12}^2 \\ &= 2\left(G_{22}^2 - \int du_1 G_{12}^2\right),\end{aligned} \tag{3.297}$$

entonces

$$\begin{aligned}\int du_1\,du_2\,\ddot{G}_{12}\,G_{12}\,G_{12} &= 2\left(\int du_2\,G_{22}^2 - \int du_1\,du_2 G_{12}^2\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{36}-\frac{1}{180}\right) = \frac{2}{45}.\end{aligned} \tag{3.298}$$

La contracción de índices ya fue calculada con anterioridad:

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\,g^{\alpha\mu}\,g^{\beta\eta}\,g^{\gamma\nu} \;=\; F_{\mu\alpha;\beta}\,F^{\mu\beta;\alpha}, \tag{3.299}$$

así que

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\int du_1\,du_2\,\mathcal{E}a \;=\; \frac{2}{45}T^3 F_{\mu\alpha;\beta}\,F^{\mu\beta;\alpha}. \tag{3.300}$$

Ahora, se tiene la siguiente contracción

$$\begin{aligned}\mathcal{E}b &= \langle \dot{y}_1^\alpha\, y_2^\nu\rangle\,\langle y_1^\beta\, y_2^\eta\rangle\,\langle y_1^\gamma\, \dot{y}_2^\mu\rangle \\ &= T^3\, g^{\alpha\nu}\, g^{\beta\eta}\, g^{\gamma\mu}\, \dot{G}_{12}\, G_{12}\, \dot{G}_{12}.\end{aligned} \tag{3.301}$$

Las integrales ya se han realizado anteriormente

$$\int du_1 du_2\, \dot{G}_{12}\, \dot{G}_{12}\, G_{12} \;=\; -\frac{1}{45}, \tag{3.302}$$

y la contracción de índices es

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\, g^{\alpha\nu}\, g^{\beta\eta}\, g^{\gamma\mu} \;=\; -F_{\mu\alpha;\beta}\,F^{\mu\beta;\alpha}, \tag{3.303}$$

por lo que para esta contracción se tiene

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\int du_1 du_2\,\mathcal{E}b \;=\; \frac{1}{45}T^3 F_{\mu\alpha;\beta}\,F^{\mu\beta;\alpha}. \tag{3.304}$$

La siguiente contracción a considerar es

$$\begin{aligned}\mathcal{E}c &= \langle \dot{y}_1^\alpha\, y_2^\eta\rangle\,\langle y_1^\beta\, \dot{y}_2^\mu\rangle\,\langle y_1^\gamma\, y_2^\nu\rangle \\ &= T^3\, g^{\alpha\eta}\, g^{\beta\mu}\, g^{\gamma\nu}\, \dot{G}_{12}\, \dot{G}_{12}\, G_{12}.\end{aligned} \tag{3.305}$$

Como

$$\int du_1 du_2\, \dot{G}_{12}\, \dot{G}_{12}\, G_{12} \;=\; -\frac{1}{45}, \tag{3.306}$$

y la contracción de índices dan

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\, g^{\alpha\eta}\, g^{\beta\mu}\, g^{\gamma\nu} \;=\; -F_{\mu\alpha;\beta}\,F^{\mu\beta;\alpha}, \tag{3.307}$$

se obtiene

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\int du_1 du_2\,\mathcal{E}c \;=\; \frac{1}{45}T^3 F_{\mu\alpha;\beta}\,F^{\mu\beta;\alpha}. \tag{3.308}$$

Por último, la constracción

$$\begin{aligned}\mathcal{E}d &= \langle \dot{y}_1^{\alpha}\, y_2^{\eta}\rangle\, \langle y_1^{\beta}\, y_2^{\nu}\rangle\, \langle y_1^{\gamma}\, \dot{y}_2^{\mu}\rangle \\ &= T^3\, g^{\alpha\eta}\, g^{\beta\nu}\, g^{\gamma\mu}\, \dot{G}_{12}\, G_{12}\, \dot{G}_{12}. \end{aligned} \tag{3.309}$$

Observamos que

$$\int du_1 du_2\, \dot{G}_{12}\, \dot{G}_{12}\, G_{12} = -\frac{1}{45}, \tag{3.310}$$

y

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\, F_{\mu\nu;\eta}\, g^{\alpha\eta}\, g^{\beta\nu}\, g^{\gamma\mu} = F_{\mu\alpha;\beta}\, F^{\mu\beta;\alpha}, \tag{3.311}$$

se tiene

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\, F_{\mu\nu;\eta} \int du_1 du_2\, \mathcal{E}d = -\frac{1}{45} T^3 F_{\mu\alpha;\beta}\, F^{\mu\beta;\alpha}. \tag{3.312}$$

Al sumar el resultado de cada contracción se tiene que

$$\frac{2}{45} + \frac{1}{45} + \frac{1}{45} - \frac{1}{45} = \frac{1}{15},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\langle (-S_{em}^{(1)})^2 \right\rangle &= \frac{1}{15}\left(-\frac{1}{18}\right) e^2 T^3 F_{\mu\alpha;\beta}\, F^{\mu\beta;\alpha} \\ &= -\frac{1}{270} F_{\mu\alpha;\beta}\, F^{\mu\beta;\alpha}. \end{aligned} \tag{3.313}$$

Si ahora se usa

$$F_{\mu\alpha;\beta}\, F^{\mu\beta;\alpha} = \frac{1}{2} F_{\mu\beta;\alpha}\, F^{\mu\beta;\alpha}, \tag{3.314}$$

entonces

$$\frac{1}{2}\left\langle (-S_{em}^{(1)})^2 \right\rangle = -\frac{1}{2(270)} F_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{\alpha\beta;\gamma}. \tag{3.315}$$

3.2.6. Término $F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma}$

En la sección anterior se calcularon las contracciones correspondientes y bajo este formalismo toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}a &= \langle \dot{y}_1^\alpha\,\dot{y}_2^\mu\rangle\,\langle y_1^\beta\,y_2^\nu\rangle\,\langle y_1^\gamma\,y_2^\eta\rangle \\ &= T^3\,g^{\alpha\mu}\,g^{\beta\nu}\,g^{\gamma\eta}\,\ddot{G}_{12}\,G_{12}\,G_{12}. \end{aligned} \tag{3.316}$$

El proceso de integración fue realizado previamente en (3.298):

$$\int du_1\,du_2\,\ddot{G}_{12}\,G_{12}\,G_{12} \;=\; \frac{2}{45}. \tag{3.317}$$

La contracción de índices tiene el siguiente resultado

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\,g^{\alpha\mu}\,g^{\beta\nu}\,g^{\gamma\eta} \;=\; F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma}. \tag{3.318}$$

Por lo tanto,

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\int du_1\,du_2\,\mathcal{F}a \;=\; \frac{2}{45}T^3F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma}. \tag{3.319}$$

Ahora se precede con la siguiente contracción

$$\begin{aligned} \mathcal{F}b &= \langle \dot{y}_1^\alpha\,y_2^\nu\rangle\,\langle y_1^\beta\,\dot{y}_2^\mu\rangle\,\langle y_1^\gamma\,y_2^\eta\rangle \\ &= T^3\,g^{\alpha\nu}\,g^{\beta\mu}\,g^{\gamma\eta}\,\dot{G}_{12}\,\dot{G}_{12}\,G_{12}. \end{aligned} \tag{3.320}$$

De la integración, se obtiene

$$\int du_1du_2\,\dot{G}_{12}\,\dot{G}_{12}\,G_{12} \;=\; -\frac{1}{45}. \tag{3.321}$$

La contracción de índices arroja

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\,g^{\alpha\nu}\,g^{\beta\mu}\,g^{\gamma\eta} \;=\; -F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma}. \tag{3.322}$$

Por lo tanto,

$$F_{\alpha\beta;\gamma}\,F_{\mu\nu;\eta}\int du_1\,du_2\,\mathcal{F}b \;=\; \frac{1}{45}T^3F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma}. \tag{3.323}$$

Sólo resta hacer la suma de los resultados, lo cual genera un factor $\frac{1}{15}$, así que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left\langle(-S^{(1)}_{em})^2\right\rangle &= \frac{1}{15}\left(-\frac{1}{18}\right) e^2\, T^3\, F_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{\alpha\beta;\gamma} \\
&= -\frac{1}{270} e^2\, T^3\, F_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{\alpha\beta;\gamma}.
\end{aligned} \tag{3.324}$$

Al usar los resultados (3.315) y (3.324) se tiene finalmente para el término $F_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{\alpha\beta;\gamma}$ el siguiente resultado

$$\left(-\frac{1}{2(270)} - \frac{1}{270}\right) e^2\, T^3\, F_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{\alpha\beta;\gamma} = -\frac{1}{180} e^2\, T^3\, F_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{\alpha\beta;\gamma} \tag{3.325}$$

3.2.7. Término $F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma}$

Para este término se tienen dos contracciones y la aportación de cada una de ellas se calculan enseguida. Primero vemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}a &= \langle \dot{y}_1^{\mu}\, \dot{y}_2^{\alpha}\rangle\, \langle y_1^{\nu}\, y_2^{\beta}\rangle\, \langle y_2^{\gamma}\, y_2^{\delta}\rangle \\
&= T^3\, g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}\, g^{\gamma\delta}\, \ddot{G}_{12}\, G_{12}\, G_{22}.
\end{aligned} \tag{3.326}$$

Realizando una intregración por partes con respecto a u_1, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int du_1 du_2\, \ddot{G}_{12}\, G_{12}\, G_{22} &= -\int du_1 du_2\, \dot{G}_{12}\, \dot{G}_{12}\, G_{22} \\
&= \frac{1}{18}.
\end{aligned} \tag{3.327}$$

Ya que la contracción de índices tiene la siguiente forma

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta;\gamma\delta}\, g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}\, g^{\gamma\delta} = F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma}, \tag{3.328}$$

entonces

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta;\gamma\delta} \int du_1 du_2\, \mathcal{G}a = \frac{1}{18} T^3\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma}. \tag{3.329}$$

La siguiente contracción es

$$\begin{aligned} \mathcal{G}b &= \langle \dot{y}_1^\mu \, y_2^\beta \rangle \, \langle y_1^\nu \, \dot{y}_2^\alpha \rangle \, \langle y_2^\gamma \, y_2^\delta \rangle \\ &= T^3 \, g^{\mu\beta} \, g^{\nu\alpha} \, g^{\gamma\delta} \, \dot{G}_{12} \, \dot{G}_{12} \, G_{22}. \end{aligned} \tag{3.330}$$

La integración nos da un resultado ya conocido:

$$\int du_1 du_2 \, \dot{G}_{12} \, \dot{G}_{12} \, G_{22} = -\frac{1}{18}. \tag{3.331}$$

De la contracción de índices se tiene

$$F_{\mu\nu} \, F_{\alpha\beta;\gamma\delta} g^{\mu\beta} \, g^{\nu\alpha} \, g^{\gamma\delta} = -F_{\mu\nu} \, F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma}. \tag{3.332}$$

Entonces

$$F_{\mu\nu} \, F_{\alpha\beta;\gamma\delta} \int du_1 \, du_2 \, \mathcal{G}b = \frac{1}{18} T^3 \, F_{\mu\nu} \, F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma}. \tag{3.333}$$

Así que finalmente se tiene

$$\begin{aligned} \left\langle \left(-S_{em}^{(0)}\right) \left(-S_{em}^{(2)}\right) \right\rangle &= \frac{1}{9} \left(-\frac{e^2}{16}\right) T^3 \, F_{\mu\nu} \, F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma} \\ &= -\frac{1}{144} e^2 \, T^3 \, F_{\mu\nu} \, F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma} \end{aligned} \tag{3.334}$$

3.2.8. Término $F_\mu{}^\alpha \, F^{\mu\beta}{}_{;\alpha\beta}$

Las contracciones que corresponden a este término arrojan los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}a &= \langle \dot{y}_1^\mu \, \dot{y}_2^\alpha \rangle \, \langle y_1^\nu \, y_2^\gamma \rangle \, \langle y_2^\beta \, y_2^\delta \rangle \\ &= T^3 \, g^{\mu\alpha} \, g^{\nu\gamma} \, g^{\beta\delta} \, \ddot{G}_{12} \, G_{12} \, G_{22}. \end{aligned} \tag{3.335}$$

De la integración se tiene

$$\int du_1 du_2 \, \ddot{G}_{12} \, G_{12} \, G_{22} = \frac{1}{18}. \tag{3.336}$$

Ahora bien, la contracción de índices da la siguiente expresión

$$F_{\mu\nu} \, F_{\alpha\beta;\gamma\delta} \, g^{\mu\alpha} \, g^{\nu\gamma} \, g^{\beta\delta} = F_\mu{}^\alpha \, F^{\mu\beta}{}_{;\alpha\beta}. \tag{3.337}$$

Entonces

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta;\gamma\delta} \int du_1\, du_2\, \mathcal{H}a \;=\; \frac{1}{18} T^3\, F_\mu{}^\alpha\, F^{\mu\beta}{}_{;\alpha\beta}. \tag{3.338}$$

La contracción restante tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}b &= \langle \dot{y}_1^\mu\, y_2^\beta\rangle\, \langle y_1^\nu\, y_2^\gamma\rangle\, \langle \dot{y}_2^\alpha\, y_2^\delta\rangle \\ &= -T^3\, g^{\mu\beta}\, g^{\nu\gamma}\, g^{\alpha\delta}\, \dot{G}_{12}\, G_{12}\, \dot{G}_{22}. \end{aligned} \tag{3.339}$$

Pero $\dot{G}_{22} = 0$, así que

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta;\gamma\delta} \int du_1 du_2\, \mathcal{H}b \;=\; 0. \tag{3.340}$$

Con esto se concluye

$$\begin{aligned} \left\langle \left(-S_{em}^{(0)}\right) \left(-S_{em}^{(2)}\right) \right\rangle &= \frac{2}{18} \left(-\frac{e^2}{16}\right) T^3 F_\mu{}^\alpha\, F^{\mu\beta}{}_{;\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{144} e^2\, T^3 F_\mu{}^\alpha\, F^{\mu\beta}{}_{;\alpha\beta} \end{aligned} \tag{3.341}$$

3.2.9. Término $F_\mu{}^\alpha\, F^{\mu\beta}{}_{;\beta\,\alpha}$

Las contracciones correspondientes son las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}a &= \langle \dot{y}_1^\mu\, y_2^\beta\rangle\, \langle y_1^\nu\, y_2^\delta\rangle\, \langle \dot{y}_2^\alpha\, y_2^\gamma\rangle \\ &= -T^3\, g^{\mu\beta}\, g^{\nu\delta}\, g^{\alpha\gamma}\, \dot{G}_{12}\, G_{12}\, \dot{G}_{22}. \end{aligned} \tag{3.342}$$

Nuevamente se tiene $\dot{G}_{22} = 0$, así que

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta;\gamma\delta} \int du_1\, du_2\, \mathcal{I}a \;=\; 0. \tag{3.343}$$

También se tiene la siguiente contracción

$$\begin{aligned} \mathcal{I}b &= \langle \dot{y}_1^\mu\, \dot{y}_2^\alpha\rangle\, \langle y_1^\nu\, y_2^\delta\rangle\, \langle y_2^\beta\, y_2^\gamma\rangle \\ &= T^3\, g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\delta}\, g^{\beta\gamma}\, \ddot{G}_{12}\, G_{12}\, G_{22}. \end{aligned} \tag{3.344}$$

Ya se conoce el resultado de la integración

$$\int du_1\, du_2\, \ddot{G}_{12}\, G_{12}\, G_{22} \;=\; \frac{1}{18}. \tag{3.345}$$

La contracción de índices da

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta;\gamma\delta}\, g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\delta}\, g^{\beta\gamma} \;=\; F_{\mu}^{\;\alpha}\, F^{\mu\beta}{}_{;\beta\alpha}. \tag{3.346}$$

Por lo tanto,

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta;\gamma\delta} \int du_1 du_2\, \mathcal{I} b \;=\; \frac{1}{18} T^3\, F^{\mu\beta}\, F_{\mu\;\;;\alpha\beta}^{\;\alpha}, \tag{3.347}$$

con lo cual se concluye que

$$\begin{aligned} \left\langle \left(-S_{em}^{(0)}\right) \left(-S_{em}^{(2)}\right) \right\rangle &= \frac{2}{18} \left(-\frac{e^2}{16}\right) T^3\, F_{\mu}^{\;\alpha}\, F^{\mu\beta}{}_{;\beta\alpha} \\ &= -\frac{1}{144} e^2\, T^3\, F_{\mu}^{\;\alpha}\, F^{\mu\beta}{}_{;\beta\alpha} \end{aligned} \tag{3.348}$$

Al realizar la suma de (3.341) con (3.348) y usando se obtiene:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{144} e^2\, T^3\, F_{\mu}^{\;\alpha} \Big(\nabla_\beta \nabla_\alpha + \nabla_\alpha \nabla_\beta\Big) F^{\mu\beta} \;=\; & -\frac{1}{288} e^2\, T^3 F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta} \\ & + \frac{1}{144} e^2\, T^3 F_{\mu}^{\;\alpha}\, F^{\mu\beta}\, R_{\alpha\beta} \\ & - \frac{1}{144} e^2\, T^3 F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma}, \end{aligned} \tag{3.349}$$

Al considerar este último resultado para los términos que anteriormente se calcularon, se tiene finalmente que

a′)

$$-\frac{1}{72}(1 - 6\,\xi) e^2\, T^3 R\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}$$

b′)

$$\left(-\frac{1}{720} + \frac{1}{144}\right) e^2\, T^3 F_{\mu}^{\;\alpha}\, F^{\mu\beta}\, R_{\alpha\beta} = \frac{1}{180} e^2\, T^3 F_{\mu}^{\;\alpha}\, F^{\mu\beta}\, R_{\alpha\beta}$$

c′)

$$-\left(\frac{1}{96} + \frac{1}{288}\right) e^2\, T^3 F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta} = -\frac{1}{72} e^2\, T^3 F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta}$$

d′)

$$(0) e^2\, T^3\, F_{\mu\;\;;\alpha}^{\;\alpha}\, F^{\mu\beta}{}_{;\beta}$$

e′)

$$-\frac{1}{180}e^2\,T^3\,F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma}$$

f′)

$$-\left(\frac{1}{144}+\frac{1}{144}\right)e^2\,T^3\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma} = -\frac{1}{72}e^2\,T^3 F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma} \tag{3.350}$$

Si comparamos los resultados que se obtienen en cada formalismo podremos notar inmediatamente que sólo concuerdan los resultados A) y a’) (ver (3.190) y (3.350)). Ya anteriormente se ha mencionado que los Lagrangianos efectivos de ambos formalismos difieren por derivadas totales covariates. En el apéndice D se muestra con detalle que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{SI} &= \mathscr{L}_{DBC} + \frac{7}{360}\nabla^{\alpha}\Big(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu;\alpha}\Big) \\ &+ \frac{1}{180}\Big[\nabla_{\alpha}\Big(F_{\mu}{}^{\alpha}\,\nabla_{\beta}F^{\mu\beta}\Big) - \nabla_{\beta}\Big(F_{\mu}{}^{\alpha}\nabla_{\alpha}F^{\mu\beta}\Big)\Big].\end{aligned} \tag{3.351}$$

Lo cual permite que el formalismo inspirado en cuerdas obtenga los mismos resultados que el formalismo DBC, lo cual verifica el teorema de Bastianelli, Corradini y Zirotti [28]. Además

$$\mathscr{L}_{DBC} = \mathscr{L}_{NC}. \tag{3.352}$$

Capítulo 4

Corrección gravitacional dominante a $\mathscr{L}_{EH}$

Para esta parte del trabajo se considera una partícula escalar cargada moviendose en un lazo, además, se han colocado un campo gravitacional de fondo y un campo electromagnético. Mediante el uso de coordenadas riemannianas y la norma de Fock - Schwinger, el término $Fy\dot{y}$ que surge del desarrollo de A se absorbe en el propagador libre de worldline, lo cual implica los siguientes cambio indicados en (2.32) y (2.44):

$$g^{\mu\nu}G(u_1,u_2) \to \mathcal{G}^{\mu\nu}(u_1,u_2) = \mathcal{G}^{\mu\nu}_{12},$$

$$(4\pi T)^{D/2} \longrightarrow (4\pi T)^{D/2}\mathrm{det}^{1/2}\left[\frac{\mathrm{sen}(\mathcal{F})}{\mathcal{F}}\right].$$

De la acción worldline(2.82) se consideran los términos que son lineales respecto al tensor de curvatura y cuadraticos respecto al tensor electromagnético.

4.1. Término $F_{\alpha\beta;\gamma}F_{\mu\nu;\delta}$

Para el cálculo de las contracciones correspondientes se ha omitido un factor T^3 y éstas tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
a &= \langle \dot{y}_1^\alpha\, \dot{y}_2^\mu\rangle\, \langle y_1^\beta\, y_2^\nu\rangle\, \langle y_1^\gamma\, y_2^\delta\rangle = \ddot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta}, &(4.1)\\
b &= \langle \dot{y}_1^\alpha\, \dot{y}_2^\mu\rangle\, \langle y_1^\beta\, y_2^\delta\rangle\, \langle y_1^\gamma\, y_2^\nu\rangle = \ddot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu}, &(4.2)\\
c &= \langle \dot{y}_1^\alpha\, y_2^\nu\rangle\, \langle y_1^\beta\, \dot{y}_2^\mu\rangle\, \langle y_1^\gamma\, y_2^\delta\rangle = \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta}, &(4.3)\\
d &= \langle \dot{y}_1^\alpha\, y_2^\nu\rangle\, \langle y_1^\beta\, y_2^\delta\rangle\, \langle y_1^\gamma\, \dot{y}_2^\mu\rangle = \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu}, &(4.4)\\
e &= \langle \dot{y}_1^\alpha\, y_2^\delta\rangle\, \langle y_1^\beta\, \dot{y}_2^\mu\rangle\, \langle y_1^\gamma\, y_2^\nu\rangle = \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu}, &(4.5)\\
f &= \langle \dot{y}_1^\alpha\, y_2^\delta\rangle\, \langle y_1^\beta\, y_2^\nu\rangle\, \langle y_1^\gamma\, \dot{y}_2^\mu\rangle = \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\delta}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu}. &(4.6)
\end{aligned}$$

Ahora bien, se procede a estudiar cada una de estas contracciones. Para la contracción a, se realiza una integración por partes sobre u_1 :

$$\int du_1\, \ddot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta} = -\int du_1\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\nu}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta} - \int du_1\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\delta}, \tag{4.7}$$

es decir,

$$\ddot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta} \to -\underbrace{\dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\nu}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta}}_{a_1} - \underbrace{\dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\delta}}_{a_2}, \tag{4.8}$$

trabajando un poco sobre a_1 vemos que

$$\begin{aligned}
F^{(1)}_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{(2)}_{\mu\nu;\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\nu}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta} &= F^{(1)}_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{(2)}_{\nu\mu;\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta}\\
&= -F^{(1)}_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{(2)}_{\mu\nu;\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta}, &(4.9)
\end{aligned}$$

así que

$$a_1 \to -c. \tag{4.10}$$

Para a_2 se tiene:

$$\begin{aligned}
F^{(1)}_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{(2)}_{\mu\nu;\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\delta} &= F^{(1)}_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{(2)}_{\delta\nu;\mu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\delta}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu}\\
&= -F^{(1)}_{\alpha\beta;\gamma}\, \left(F^{(2)}_{\mu\delta;\nu} + F^{(2)}_{\nu\mu;\delta}\right)\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\delta}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu}\\
&= -F^{(1)}_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{(2)}_{\mu\nu;\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu} + F^{(1)}_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{(2)}_{\mu\nu;\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\delta}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu}. &(4.11)
\end{aligned}$$

Entonces

$$a_2 \to -d + f, \tag{4.12}$$

Así que finalmente se tiene

$$a \to c + d - f. \tag{4.13}$$

Se hace lo mismo para la contracción b. Primero la integración por partes sobre u_1:

$$\int du_1\, \ddot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu} = -\int du_1\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\delta}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu} - \int du_1\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\nu}, \tag{4.14}$$

o bien, se dice que

$$\ddot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu} \to -\underbrace{\dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\delta}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu}}_{b_1} - \underbrace{\dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\nu}}_{b_2}. \tag{4.15}$$

Para b_1 se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} F^{(1)}_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{(2)}_{\mu\nu;\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\delta}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu} &= F^{(1)}_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{(2)}_{\delta\nu;\mu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu} \\ &= -F^{(1)}_{\alpha\beta;\gamma} \left(F^{(2)}_{\mu\delta;\nu} + F^{(2)}_{\nu\mu;\delta} \right) \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu} \\ &= -F^{(1)}_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{(2)}_{\mu\nu;\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta} + F^{(1)}_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{(2)}_{\mu\nu;\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu} \end{aligned} \tag{4.16}$$

por lo cual

$$b_1 \to -c + e. \tag{4.17}$$

Ahora veamos a b_2:

$$\begin{aligned} F^{(1)}_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{(2)}_{\mu\nu;\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\nu} &= F^{(1)}_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{(2)}_{\nu\mu;\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu} \\ &= -F^{(1)}_{\alpha\beta;\gamma}\, F^{(2)}_{\mu\nu;\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Entonces

$$b_2 \to -d. \tag{4.19}$$

Finalmente, se tiene

$$b \to c - e + d. \tag{4.20}$$

Se hace notar que al realizar la suma de todas las contracciones, el resultado se reduce a

$$3(c + d), \tag{4.21}$$

es decir,

$$3 \left(\dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu}\, \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta} + \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu}\, \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta}\, \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu} \right). \tag{4.22}$$

4.2. Término $F_{\mu\nu;\alpha\beta}$

Las contracciones de Wick para este término son las siguientes:

$$\begin{aligned} g &= \langle \dot{y}_1^\mu \, y_1^\nu \rangle \, \langle y_1^\alpha \, y_1^\beta \rangle = \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{11}^{\alpha\beta}, & (4.23) \\ h &= \langle \dot{y}_1^\mu \, y_1^\alpha \rangle \, \langle y_1^\nu \, y_1^\beta \rangle = \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\alpha} \mathcal{G}_{11}^{\nu\beta}, & (4.24) \\ i &= \langle \dot{y}_1^\mu \, y_1^\beta \rangle \, \langle y_1^\nu \, y_1^\alpha \rangle = \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{11}^{\nu\alpha}, & (4.25) \end{aligned}$$

donde se ha omitido un factor T^2 en cada una de las contracciones.

Para la contracción h se tiene

$$F_{\mu\nu;\alpha\beta} \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\alpha} \mathcal{G}_{11}^{\nu\beta} = F_{\mu\nu;\beta\alpha} \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{11}^{\nu\alpha}.$$

Entonces, la suma de las tres contracciones resulta en

$$F_{\mu\nu;\alpha\beta}(g+h+i) = F_{\mu\nu;\alpha\beta} \, \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\nu} \, \mathcal{G}_{11}^{\alpha\beta} + (F_{\mu\nu;\beta\alpha} + F_{\mu\nu;\alpha\beta}) \, \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{11}^{\nu\alpha}. \tag{4.26}$$

4.3. Término $F_{\lambda\nu} R^\lambda{}_{\alpha\beta\mu}$

Para este término, sólo tenemos tres contracciones:

$$\begin{aligned} j &= \langle \dot{y}_1^\mu \, y_1^\nu \rangle \, \langle y_1^\alpha \, y_1^\beta \rangle = \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\nu} \, \mathcal{G}_{11}^{\alpha\beta}, & (4.27) \\ k &= \langle \dot{y}_1^\mu \, y_1^\alpha \rangle \, \langle y_1^\nu \, y_1^\beta \rangle = \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\alpha} \, \mathcal{G}_{11}^{\nu\beta}, & (4.28) \\ l &= \langle \dot{y}_1^\mu \, y_1^\beta \rangle \, \langle y_1^\nu \, y_1^\alpha \rangle = \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\beta} \, \mathcal{G}_{11}^{\nu\alpha}. & (4.29) \end{aligned}$$

Al sumar las contracciones se tiene

$$F_{\lambda\nu} R^\lambda{}_{\alpha\beta\mu}(j+k+l) = F_{\lambda\nu} R^\lambda{}_{\alpha\beta\mu} \, (\dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\nu} \, \mathcal{G}_{11}^{\alpha\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\alpha} \, \mathcal{G}_{11}^{\nu\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\beta} \, \mathcal{G}_{11}^{\nu\alpha}). \tag{4.30}$$

Veamos el siguiente término.

4.4. Término $R_{\mu\alpha\beta\nu}$

Las contracciones generadas son

$$\begin{aligned} m &= \langle \dot{y}_1^\mu \, y_1^\nu \rangle \, \langle \dot{y}_1^\alpha \, y_1^\beta \rangle = \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\nu} \, \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\alpha\beta} & (4.31) \\ n &= \langle \dot{y}_1^\mu \, \dot{y}_1^\alpha \rangle \, \langle y_1^\nu \, y_1^\beta \rangle = \ddot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\alpha} \, \mathcal{G}_{11}^{\nu\beta}, & (4.32) \\ o &= \langle \dot{y}_1^\mu \, y_1^\beta \rangle \, \langle y_1^\nu \, \dot{y}_1^\alpha \rangle = \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\beta} \, \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\nu\alpha}. & (4.33) \end{aligned}$$

Así que al sumar las contracciones se tiene

$$R_{\mu\alpha\beta\nu}(m+n+o) \;=\; R_{\mu\alpha\beta\nu}\left(-\dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\alpha}\dot{\mathcal{G}}_{11}^{\beta\nu} - \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\beta}\dot{\mathcal{G}}_{11}^{\alpha\nu} - \ddot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\nu}\mathcal{G}_{11}^{\alpha\beta}\right). \quad (4.34)$$

4.5. Término $F_{\mu\;\;;\alpha}^{\;\alpha}F^{\mu\beta}_{\;\;\;\;;\beta}$

Las contracciones correspondientes a este término son las siguientes:

$$p \;=\; \langle \dot{y}_1^{\alpha}\,\dot{y}_2^{\mu}\rangle\,\langle y_1^{\beta}\,y_1^{\gamma}\rangle\,\langle y_2^{\nu}\,y_2^{\delta}\rangle = \ddot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu}\,\mathcal{G}_{11}^{\beta\gamma}\,\mathcal{G}_{22}^{\nu\delta}, \quad (4.35)$$

$$q \;=\; \langle \dot{y}_1^{\alpha}\,y_2^{\nu}\rangle\,\langle y_1^{\beta}\,y_1^{\gamma}\rangle\,\langle \dot{y}_2^{\mu}\,y_2^{\delta}\rangle = \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu}\,\mathcal{G}_{11}^{\beta\gamma}\,\dot{\mathcal{G}}_{22}^{\mu\delta}, \quad (4.36)$$

$$r \;=\; \langle \dot{y}_1^{\alpha}\,y_1^{\gamma}\rangle\,\langle y_1^{\beta}\,\dot{y}_2^{\mu}\rangle\,\langle y_2^{\nu}\,y_2^{\delta}\rangle = \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\alpha\gamma}\,\dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu}\,\mathcal{G}_{22}^{\nu\delta}, \quad (4.37)$$

$$s \;=\; \langle \dot{y}_1^{\alpha}\,y_1^{\gamma}\rangle\,\langle y_1^{\beta}\,y_2^{\nu}\rangle\,\langle \dot{y}_2^{\mu}\,y_2^{\delta}\rangle = \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\alpha\gamma}\,\mathcal{G}_{12}^{\beta\nu}\dot{\mathcal{G}}_{22}^{\mu\delta}. \quad (4.38)$$

Lo agradable se estas contracciones es que las cantidades $\mathcal{G}_{11}$ y $\dot{\mathcal{G}}_{11}$ son constantes, además,

$$\int du_1\,du_2\,\ddot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} = 0, \quad (4.39)$$

por lo cual

$$\int du_1\,du_2\,p = 0. \quad (4.40)$$

Para q y r se precede de forma análoga. Para la contracción s se recurre a la propedad de antisimetría de las funciones $\mathcal{G}_{12}$, así que

$$\int du_1\,du_2\,s = 0. \quad (4.41)$$

Por lo cual este término no contribuye en el Lagrangiano efectivo.

4.6. Término $\bar{\eta}_{\mu}R^{\mu}_{\;\;\alpha\beta\nu}\eta^{\nu}$

Para este término sólo se tiene la contracción

$$t = \langle y_1^{\alpha}\,y_1^{\beta}\rangle\,\langle \bar{\eta}_{\mu}\,\eta^{\nu}\rangle = -T\mathcal{G}_{11}^{\alpha\beta}\,\delta_{\mu}^{\;\nu}, \quad (4.42)$$

pero dado que

$$R^{\mu}_{\;\;\alpha\beta\nu}\delta_{\mu}^{\;\nu} = -R_{\alpha\beta},$$

entonces

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\nu} t = T R_{\alpha\beta} \mathcal{G}^{\alpha\beta}. \tag{4.43}$$

Con estos resultados, la acción efectiva se puede escribir de la siguiente forma

$$\Gamma_{EH}^{(R)}[g, A] = \int d^4x_0 \sqrt{g} \mathscr{L}_{EH}^{(R)}, \tag{4.44}$$

donde $\mathscr{L}_{EH}^{(R)}$ es la corrección gravitacional dominante al Lagrangiano de Euler - Heisenberg y está dado por

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{EH}^{(R)} \;=\; & \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2T} (4\pi T)^{-2} \det{}^{-1/2} \left[\frac{\operatorname{sen}(eFT)}{eFT} \right] \\ & \times \int_0^1 du_1 \left[\frac{ieT^2}{8} F_{\mu\nu;\alpha\beta} \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{11}^{\alpha\beta} + \frac{ie}{8} T^2 \left(F_{\mu\nu;\beta\alpha} + F_{\mu\nu;\alpha\beta} \right) \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{11}^{\nu\alpha} \right. \\ & + \frac{ieT^2}{24} F_{\lambda\nu} R^{\lambda}{}_{\alpha\beta\mu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{11}^{\alpha\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\alpha} \mathcal{G}_{11}^{\nu\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{11}^{\nu\alpha} \right) - T\bar{\xi} R \\ & + \frac{T}{12} R_{\mu\alpha\beta\nu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\alpha} \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\beta\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\beta} \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\alpha\nu} + \ddot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{11}^{\alpha\beta} \right) + \frac{T}{3} \mathcal{G}_{11}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\ & \left. - \frac{e^2T^3}{6} \int_0^1 du_2 F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\delta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta} + \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu} \right) \right]. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Usando un desarrollo de las funciones de Green $\mathcal{G}$ hasta términos F^2 usando (2.35), (2.39) y desarrollando el determinante (2.44), es posible reproducir los resultados que se encontraron en (3.350).

Capítulo 5

Conclusiones

Finalmente se llegan a las conclusiones de nuestro trabajo, que aunque es un número pequeño no dejan de ser importantes:

- Se ha verificado el teorema de Bastianelli, Corradini y Zirotti, que se obtuvo por medio de argumentos formales, en un cálculo explicito de una parte no trivial del Lagrangiano efectivo de la teoría de Mitein-Maxwell con campo escalar.

- Se ha obtenido $\mathscr{L}_{EH}^{(R)}$, el cual no ha sido calculado anteriormente. La información que nos ofrece se menciona enseguida:

  a) Contiene información sobre las modificaciones cuánticas de las ecuaciones de Mitein - Maxwell.

  b) Proporciona las modificaciones sobre la propagación de la luz en campos externos electromagnéticos y gravitacionales.

  c) En el caso eléctrico, $\mathscr{L}_{EH}^{(R)}$ nos da información sobre la tasa de producción de parejas.

  d) Como se menciono en la introducción, el Lagrangiano de Euler-Heisenberg contiene información sobre las amplitudes de N fotones en la SQED a bajas energías. Similarmente, $\mathscr{L}_{EH}^{(R)}$ nos permitirá calcular la amplitud de un gravitón con N fotones en el límite de bajas energías.

En el futuro cercano, se contempla:

- Escribir explicitamente el Lagrangiano $\mathscr{L}_{EH}^{(R)}$ a bajas energías.

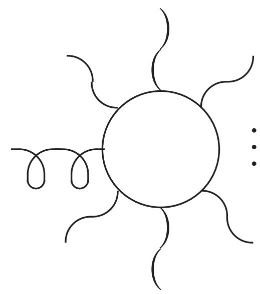


Figura 5.1: *Amplitud a un lazo de un gravitón y N fotones.*

- Considerar casos puramente magnéticos y puramente eléctricos.
- Calcular la amplitud de un gravitón y N fotones a un lazo a bajas energías, usando el Lagrangiano efectivo, y más generalmente, usando los operadores de vértice.
- Calcular correcciones gravitacionales más allá del orden lineal, es decir, $\mathscr{L}_{EH}^{(R^2)}, \mathscr{L}_{EH}^{(R^3)}, \cdots$
- Todos los calculos anteriores se pueden generalizar al caso espinorial sin dificultades, es cuestión de calcular los términos adicionales que provienen de la integral de trayectorias de Grassmann que representan al espín (ver sección 2.1).

Apéndice A

Uso de campos fantasma

En este apéndice se mostrará la forma en que se emplean los campos fantasma para eliminar singularidades. En especial se hace el cálculo para el término $R\, F_{\gamma\eta}\, F^{\gamma\eta}$. Nos concentramos en la parte que involucra S_{grav} y $S_{gh}^{(1)}$, es decir,

$$\begin{aligned} \Big\langle -S_{grav} - S_{gh}^{(1)} \Big\rangle &= -\frac{1}{12\,T} R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \int du_3 \Big\langle \dot{y}_3^{\gamma}\, y_3^{\delta}\, y_3^{\epsilon}\, \dot{y}_3^{\eta} \\ &\quad + y_3^{\delta}\, y_3^{\epsilon} \Big(a_3^{\gamma}\, a_3^{\eta} + b_3^{\gamma}\, c_3^{\eta} \Big) \Big\rangle - T\bar{\xi}\, R. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Ahora, sólo nos enfocamos en las contracciones de Wick que se generan:

$$\begin{aligned} \Big\langle \dot{y}_3^{\gamma}\, y_3^{\delta}\, y_3^{\epsilon}\, \dot{y}_3^{\eta} + y_3^{\delta}\, y_3^{\epsilon} \Big(a_3^{\gamma}\, a_3^{\eta} + b_3^{\gamma}\, c_3^{\eta} \Big) \Big\rangle &= \Big\langle \dot{y}_3^{\gamma}\, y_3^{\delta}\, y_3^{\epsilon}\, \dot{y}_3^{\eta} \Big\rangle \\ &\quad + \Big\langle y_3^{\delta}\, y_3^{\epsilon} \Big(a_3^{\gamma}\, a_3^{\eta} + b_3^{\gamma}\, c_3^{\eta} \Big) \Big\rangle - T\bar{\xi}\, R \\ &= \underbrace{\langle \dot{y}_3^{\gamma}\, y_3^{\epsilon} \rangle \langle y_3^{\delta}\, \dot{y}_3^{\eta} \rangle}_{\mathcal{AC}} + \underbrace{\langle \dot{y}_3^{\gamma}\, \dot{y}_3^{\eta} \rangle \langle y_3^{\delta}\, y_3^{\epsilon} \rangle}_{\mathcal{AD}} + \underbrace{\langle y_3^{\delta}\, y_3^{\epsilon} \rangle \Big(\langle a_3^{\gamma}\, a_3^{\eta} \rangle + \langle b_3^{\gamma}\, c_3^{\eta} \rangle \Big)}_{\mathcal{A}} - T\bar{\xi}\, R. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Veamos que se obtiene de $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \langle y_3^{\delta}\, y_3^{\epsilon} \rangle \Big(\langle a_3^{\gamma}\, a_3^{\eta} \rangle + \langle b_3^{\gamma}\, c_3^{\eta} \rangle \Big) &= -2\,T g^{\delta\epsilon} \Delta_{33} \Big[2\,T\, g^{\gamma\eta} \delta_{33} - 4\,T g^{\gamma\eta} \delta_{33} \Big] \\ &= -2\,T g^{\delta\epsilon} \Delta_{33} \Big[-2\,T g^{\gamma\eta} \delta_{33} \Big] \\ &= (-2\,T)^2 g^{\delta\epsilon} g^{\gamma\eta} \delta_{33} \Delta_{33}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

De (3.25), se tiene para $\mathcal{AD}$

$$\int du_3 \, {}^\bullet\Delta^\bullet_{33} \, \Delta_{33} = \int du_3 \left(1 - \delta_{33}\right) \Delta_{33}, \tag{A.4}$$

y para $\mathcal{A}$ se tiene

$$\int du_3 \, \delta_{33} \, \Delta_{33}, \tag{A.5}$$

al sumar las expresiones nos queda

$$\int du_3 \, \Delta_{33}, \tag{A.6}$$

con lo cual se ha eliminado $\delta(0)$.

Apéndice B

Tensor de Riemann

Propiedades del tensor de Riemann

$$
\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\beta\alpha\mu\nu}, & \text{(B.1)}\\
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\alpha\beta\nu\mu}, & \text{(B.2)}\\
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\beta\alpha\nu\mu}, & \text{(B.3)}\\
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\mu\nu\alpha\beta}, & \text{(B.4)}
\end{aligned}
$$

$$[\nabla_\mu\,,\,\nabla_\nu]\,V^\lambda = R_{\mu\nu}{}^{\lambda}{}_{\rho}V^\rho, \qquad \text{(B.5)}$$

Primera identidad de Bianchi

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0. \qquad \text{(B.6)}$$

Segunda identidad de Bianchi

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu;\gamma} + R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\mu;\nu} + R^{\alpha}{}_{\beta\nu\gamma;\mu} = 0. \qquad \text{(B.7)}$$

Tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R_{\lambda\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}. \qquad \text{(B.8)}$$

Escalar de curvatura

$$R = R^{\mu}{}_{\mu}. \qquad \text{(B.9)}$$

Sobre esferas

$$R > 0. \qquad \text{(B.10)}$$

Apéndice C

Uso de las identidades de Bianchi

Para encontrar la relación (3.86):

$$\boxed{F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\alpha\nu\beta} = \tfrac{1}{2} F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta},}$$

se usa la siguiente identidad de Bianchi:

$$R_{\gamma\delta\epsilon\eta} + R_{\gamma\eta\delta\epsilon} + R_{\gamma\epsilon\eta\delta} \;=\; 0. \tag{C.1}$$

Entonces

$$R^{\mu\alpha\nu\beta} \;=\; R^{\mu\beta\nu\alpha} + R^{\mu\nu\alpha\beta}. \tag{C.2}$$

Usando esta última relación se tiene que

$$F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\alpha\nu\beta} \;=\; F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\beta\nu\alpha} + F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta}$$

para el primer término a la derecha de la igualdad se cambia $\beta \leftrightarrow \alpha$, así que

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\alpha\nu\beta} &= F_{\mu\nu}\, F_{\beta\alpha}\, R^{\mu\alpha\nu\beta} + F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta} \\ &= -F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\alpha\nu\beta} + F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta}, \end{aligned}$$

así que

$$2\, F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\alpha\nu\beta} \;=\; F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta}\, R^{\mu\nu\alpha\beta},$$

por lo tanto

$$F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\alpha\nu\beta} \;=\; \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta}. \;\blacksquare$$

Para encontrar la relación (3.314):

$$\boxed{F_{\mu\alpha;\beta}\,F^{\mu\beta;\alpha} = \tfrac{1}{2}F_{\mu\beta;\alpha}\,F^{\mu\beta;\alpha},}$$

se usa la siguiente identidad de Bianchi:

$$F_{\alpha\beta;\mu} + F_{\mu\alpha;\beta} + F_{\beta\mu;\alpha} = 0, \tag{C.3}$$

así que

$$F_{\mu\alpha;\beta} = -F_{\alpha\beta;\mu} - F_{\beta\mu;\alpha}, \tag{C.4}$$

entonces

$$\begin{aligned} F_{\mu\alpha;\beta}\,F^{\mu\beta;\alpha} &= -F_{\alpha\beta;\mu}\,F^{\mu\beta;\alpha} - F_{\beta\mu;\alpha}\,F^{\mu\beta;\alpha} \\ &= -F_{\beta\alpha;\mu}\,F^{\beta\mu;\alpha} + F_{\mu\beta;\alpha}\,F^{\mu\beta;\alpha} \\ &= -F_{\nu\alpha;\eta}\,F^{\nu\eta;\alpha} + F_{\mu\beta;\alpha}\,F^{\mu\beta;\alpha} \\ &= -F_{\mu\alpha;\beta}\,F^{\mu\beta;\alpha} + F_{\mu\beta;\alpha}\,F^{\mu\beta;\alpha}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$F_{\mu\alpha;\beta}\,F^{\mu\beta;\alpha} \;=\; \frac{1}{2}F_{\mu\beta;\alpha}\,F^{\mu\beta;\alpha}. \;\blacksquare$$

Ahora se va a mostrar la igualdad dada en (3.189), para lo cual se va a usar la siguiente notación

$$F^{\mu\beta}{}_{;\alpha} = \nabla_\alpha F^{\mu\beta},\; F^{\mu\beta;\alpha} = \nabla^\alpha F^{\mu\beta}. \tag{C.5}$$

En particular, se mostrará que

$$\boxed{F_\mu{}^\alpha\Big(\nabla_\beta\nabla_\alpha + \nabla_\alpha\nabla_\beta\Big)F^{\mu\beta} = \tfrac{1}{2}F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta} - F_\mu{}^\alpha\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta} + F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma}} \tag{C.6}$$

Como

$$F_\mu{}^\alpha\Big(\nabla_\beta\nabla_\alpha + \nabla_\alpha\nabla_\beta\Big)F^{\mu\beta} \;=\; F_\mu{}^\alpha\Big(\,[\nabla_\alpha,\nabla_\beta] + 2\nabla_\beta\nabla_\alpha\Big)F^{\mu\beta}. \tag{C.7}$$

Dado que

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]\, F^{\mu\nu} = R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} F^{\lambda\nu} + R^\nu{}_{\lambda\alpha\beta} F^{\mu\lambda}, \tag{C.8}$$

entonces, para el caso $\nu = \beta$ se tiene

$$\begin{aligned} [\nabla_\alpha, \nabla_\beta]\, F^{\mu\beta} &= R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} F^{\lambda\beta} + R^\beta{}_{\lambda\alpha\beta} F^{\mu\lambda} \\ &= R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} F^{\lambda\beta} - R_{\alpha\lambda} F^{\mu\lambda}. \end{aligned} \tag{C.9}$$

Si se usa (C.9) en (C.7) se tiene

$$\begin{aligned} F_\mu{}^\alpha \Big(\nabla_\beta \nabla_\alpha + \nabla_\alpha \nabla_\beta \Big) F^{\mu\beta} &= F_\mu{}^\alpha \Big(R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} F^{\lambda\beta} - R_{\alpha\lambda} F^{\mu\lambda} \Big) + 2 F_\mu{}^\alpha \nabla_\beta \nabla_\alpha F^{\mu\beta} \\ &= F_\mu{}^\alpha R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} F^{\lambda\beta} - F_\mu{}^\alpha R_{\alpha\lambda} F^{\mu\lambda} + 2 F_\mu{}^\alpha \nabla_\beta \nabla_\alpha F^{\mu\beta}. \end{aligned} \tag{C.10}$$

Ahora, hay que analizar cada uno de los términos de (C.10):

$$\begin{aligned} F_\mu{}^\alpha R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} F^{\lambda\beta} &= F_{\mu\alpha} F_{\lambda\beta} R^{\mu\lambda\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\alpha} F_{\lambda\beta} R^{\mu\alpha\lambda\beta} \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{C.11}$$

la segunda igualdad de esta última relación se encontró en (C.3). Veamos el segundo término

$$\begin{aligned} F_\mu{}^\alpha R_{\alpha\lambda} F^{\mu\lambda} &= F_\mu{}^\alpha F^{\mu\lambda} R_{\alpha\lambda} \\ &= F_\mu{}^\alpha F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{C.12}$$

El tercer término requiere de un cálculo más elaborado: Con la notación empleada, es posible escribir la identidad de Bianchi de la siguiente forma:

$$\nabla_\alpha F^{\mu\beta} + \nabla^\beta F_\alpha{}^\mu + \nabla^\mu F^\beta{}_\alpha = 0. \tag{C.13}$$

Entonces

$$\nabla_\alpha F^{\mu\beta} = -\nabla^\beta F_\alpha{}^\mu - \nabla^\mu F^\beta{}_\alpha. \tag{C.14}$$

Así que

$$
\begin{aligned}
F_{\mu}^{\ \alpha} F^{\mu\beta}{}_{;\alpha\beta} &= F_{\mu}^{\ \alpha} \nabla_\beta \nabla_\alpha F^{\mu\beta} = F_{\mu}^{\ \alpha} \nabla_\beta \left(-\nabla^\beta F_{\alpha}^{\ \mu} - \nabla^\mu F^{\beta}{}_{\alpha} \right) \\
&= -F_{\mu}^{\ \alpha} \nabla_\beta \nabla^\beta F_{\alpha}^{\ \mu} - F_{\mu}^{\ \alpha} \nabla_\beta \nabla^\mu F^{\beta}{}_{\alpha} \\
&= -F_{\mu\alpha} \Box F^{\alpha\mu} - F^{\mu}{}_{\alpha} \nabla_\beta \nabla_\mu F^{\beta\alpha} \\
&= F_{\mu\alpha} \Box F^{\mu\alpha} - F_{\alpha}^{\ \mu} \nabla_\beta \nabla_\mu F^{\alpha\beta} \\
&= F_{\mu\nu} \Box F^{\mu\nu} - F_{\nu}^{\ \alpha} \nabla_\beta \nabla_\alpha F^{\nu\beta} \\
&= F_{\mu\nu} \Box F^{\mu\nu} - F_{\mu}^{\ \alpha} \nabla_\beta \nabla_\alpha F^{\mu\beta} \\
&= F_{\mu\nu} \Box F^{\mu\nu} - F_{\mu}^{\ \alpha} F^{\mu\beta}{}_{;\alpha\beta},
\end{aligned}
\tag{C.15}
$$

de lo cual podemos concluir que

$$
F_{\mu}^{\ \alpha} F^{\mu\beta}{}_{;\alpha\beta} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \Box F^{\mu\nu}. \tag{C.16}
$$

Es momento de sustituir (C.11), (C.12) y (C.16) en (C.10):

$$
F_{\mu}^{\ \alpha} \Big(\nabla_\beta \nabla_\alpha + \nabla_\alpha \nabla_\beta \Big) F^{\mu\beta} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - F_{\mu}^{\ \alpha} F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta} + F_{\mu\nu} \Box F^{\mu\nu} \quad \blacksquare
$$

Apéndice D

Derivadas totales

Primero notamos que

$$\nabla_\beta \left(F_{\mu\alpha}\,\nabla^\alpha F^{\mu\beta}\right) = F_{\mu\alpha}\,\nabla_\beta\nabla^\alpha F^{\mu\beta} + \nabla_\beta F_{\mu\alpha}\,\nabla^\alpha F^{\mu\beta}. \tag{D.1}$$

Si se usa (C.16) y (3.314) se tiene

$$\nabla_\beta \left(F_{\mu\alpha}\,\nabla^\alpha F^{\mu\beta}\right) = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\Box F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}F_{\mu\beta;\alpha}\,F^{\mu\beta;\alpha}, \tag{D.2}$$

es decir,

$$F_{\mu\nu}\Box F^{\mu\nu} = -F_{\mu\beta;\alpha}\,F^{\mu\beta;\alpha} + 2\nabla_\beta\left(F_{\mu\alpha}\,\nabla^\alpha F^{\mu\beta}\right). \tag{D.3}$$

Ahora veamos la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha\left(F_\mu{}^\alpha\,\nabla_\beta F^{\mu\beta}\right) + \nabla_\beta\left(F_\mu{}^\alpha\,\nabla_\alpha F^{\mu\beta}\right) &= F_\mu{}^\alpha\,\nabla_\alpha\nabla_\beta F^{\mu\beta} + \nabla_\alpha F_\mu{}^\alpha\,\nabla_\beta F^{\mu\beta}\\ &+F_\mu{}^\alpha\,\nabla_\beta\nabla_\alpha F^{\mu\beta} + \nabla_\beta F_\mu{}^\alpha\,\nabla_\alpha F^{\mu\beta}.\end{aligned} \tag{D.4}$$

De la ec. (C.6) obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha\left(F_\mu{}^\alpha\,\nabla_\beta F^{\mu\beta}\right) + \nabla_\beta\left(F_\mu{}^\alpha\,\nabla_\alpha F^{\mu\beta}\right) &= \nabla_\alpha F_\mu{}^\alpha\,\nabla_\beta F^{\mu\beta} + \nabla_\beta F_\mu{}^\alpha\,\nabla_\alpha F^{\mu\beta}\\ &+\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta} - F_\mu{}^\alpha\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta} + F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma}.\end{aligned} \tag{D.5}$$

Para el segundo término a la derecha de la igualdad se emplea (3.314), y para el último se usa (D.3), así que se tiene

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha\left(F_\mu{}^\alpha\,\nabla_\beta F^{\mu\beta}\right) + \nabla_\beta\left(F_\mu{}^\alpha\,\nabla_\alpha F^{\mu\beta}\right) &= (\nabla^\alpha F_{\mu\alpha})^2 + \frac{1}{2}(F_{\mu\beta;\alpha})^2\\ &+\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta} - F_\mu{}^\alpha\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta}\\ &-(F_{\mu\beta;\alpha})^2 + 2\nabla_\beta\left(F_{\mu\alpha}\,\nabla^\alpha F^{\mu\beta}\right).\end{aligned} \tag{D.6}$$

Entonces,

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla_\alpha\left(F_\mu{}^\alpha\,\nabla_\beta F^{\mu\beta}\right) \quad - \quad & \nabla_\beta\left(F_\mu{}^\alpha\,\nabla_\alpha F^{\mu\beta}\right) = (\nabla^\alpha F_{\mu\alpha})^2 - \frac{1}{2}(F_{\mu\beta;\alpha})^2 \\ & +\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta} - F_\mu{}^\alpha\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta}.\end{aligned}} \tag{D.7}$$

Como las integrales de las derivadas totales se anulan, entonces sólo se toman en cuenta los términos restantes, es decir, bajo la integral se tiene:

$$F_{\mu\nu}\,\Box F^{\mu\nu} \;=\; -(\nabla_\gamma\,F_{\alpha\beta})^2, \tag{D.8}$$

$$(\nabla_\gamma\,F_{\alpha\beta})^2 \;=\; 2(\nabla^\alpha\,F_{\mu\alpha})^2 - 2R_{\alpha\beta}F^{\mu\beta}\,F_\mu{}^{\;\alpha} + R^{\mu\nu\alpha\beta}\,F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}. \tag{D.9}$$

Ahora se trabaja un poco con estas expresiones. Primero se considera el ínsciso e') de (3.350). Dado que $-1/80 = -1/45 + 1/60$, entonces se puede decir que

$$\begin{aligned}-\frac{1}{180}e^2\,T^3\,F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma} &= -\frac{1}{45}e^2\,T^3\,F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma} + \frac{1}{60}e^2\,T^3\,F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma} \\ &= -\frac{1}{45}e^2\,T^3\,F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma} + \frac{1}{60}e^2\,T^3(\nabla_\mu\,F_{\alpha\beta})^2.\end{aligned} \tag{D.10}$$

Si ahora se toma el ínsciso f') de (3.350), como $-1/72 = 7/360 - 1/30$, entonces

$$\begin{aligned}-\frac{1}{72}e^2\,T^3 F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^\gamma &= -\frac{1}{30}e^2\,T^3 F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^\gamma + \frac{7}{360}e^2\,T^3 F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^\gamma \\ &= -\frac{1}{30}e^2\,T^3 F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^\gamma + \frac{7}{360}e^2\,T^3 F_{\mu\nu}\,\Box F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{30}e^2\,T^3 F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^\gamma - \frac{7}{360}e^2\,T^3(\nabla_\mu\,F_{\alpha\beta})^2.\end{aligned} \tag{D.11}$$

Para la última igualdad se ha usado (D.8). Ahora bien, de la suma de los últimos términos de (D.10) y (D.11) se tiene

$$\left(\frac{1}{60} - \frac{7}{360}\right)e^2\,T^3(\nabla_\alpha\,F_{\mu\nu})^2 \;=\; -\frac{1}{360}e^2\,T^3(\nabla_\alpha\,F_{\mu\nu})^2. \tag{D.12}$$

Finalmente se usa (D.9):

$$-\frac{1}{360}(\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 \quad = \quad -\frac{2}{360}(\nabla^\alpha F_{\mu\alpha})^2 + \frac{2}{360}R_{\alpha\beta}F^{\mu\beta}F_\mu{}^\alpha - \frac{1}{360}R^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \tag{D.13}$$

Los términos a la derecha de la igualdad se suman con los resultados de los ínscisos d'), b') y c') respectivamente. Para el primer ínciso se tiene:

$$-\frac{1}{180}e^2\,T^3\,F_\mu{}^\alpha{}_{;\alpha}\,F^{\mu\beta}{}_{;\beta}, \tag{D.14}$$

para b')

$$\left(\frac{1}{180}+\frac{1}{180}\right)e^2\,T^3F_\mu{}^\alpha\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta} = \frac{1}{90}e^2\,T^3F_\mu{}^\alpha\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta} \tag{D.15}$$

Finalmente para el ínsciso c') se tiene

$$-\left(\frac{1}{72}+\frac{1}{360}\right)e^2\,T^3F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta} = -\frac{1}{60}e^2\,T^3F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta} \tag{D.16}$$

Por lo tanto, se puede concluir que los resultados dados en las ecs. (3.350) son equivalentes a

a)
$$-\frac{1}{72}(1-6\,\xi)e^2\,T^3R\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}$$

b)
$$\frac{1}{90}e^2\,T^3F_\mu{}^\alpha\,F^{\mu\beta}\,R_{\alpha\beta}$$

c)
$$-\frac{1}{60}e^2\,T^3F_{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}\,R^{\mu\nu\alpha\beta}$$

d)
$$-\frac{1}{180}e^2\,T^3\,F_\mu{}^\alpha{}_{;\alpha}\,F^{\mu\beta}{}_{;\beta}$$

e)
$$-\frac{1}{45}e^2\,T^3\,F_{\alpha\beta;\gamma}\,F^{\alpha\beta;\gamma}$$

f)

$$-\frac{1}{30}e^2\,T^3F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^{\gamma} \tag{D.17}$$

Es notable que los resultados de ambos formalismos concuerdan y esto es posible por los términos que adiciona la acción S_{FP}.

Bibliografía

[1] P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* A 117, 610 (1928).

[2] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. 1*, Cambridge Univ. Press 1995.

[3] C. N. Yang y R. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954)

[4] H. Euler, B. Kockel, *Naturwissenschaften* **23** (1935) 246.

[5] W. Heisenberg, H. Euler. Z, *Phys.* **98** (1936) 714.

[6] V. Weisskopf, K. Dan, Vidensk. *Selsk. Mat. Fy. Medd.* 14 (1936) 1 (reprinted in: J. Schwinger (Ed.), Quantum Electrodynamics, Dover, New York, 1958).

[7] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82** (1951) 664.

[8] W. Dittrich y H. Gies, *Probing the Quantum Vacuum*, Springer (2000).

[9] L. Martin, C. Schubert, V.M. Villanueva Sandoval, *Nucl. Phys.* B **668** (2003) 335.

[10] Z. Bern, D. A. Kosower, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 1669.

[11] Z. Bern, D. A. Kosower, *Nucl. Phys.* B **362** (1991) 389.

[12] Z. Bern, D. A. Kosower, *Nucl. Phys.* B **362** (1992) 451.

[13] M. J. Strassler, *Nucl. Phys.* B **385** (1992) 145

[14] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **80**, 440 (1950).

[15] C. Schubert, *Perturbative quantum field theory in the string-inspired formalism. Phys. Rept.* 355 (2001) 73 (hep-th/0101036).

[16] M. G. Schmidt, C. Schubert, *Phys. Rev.* D **53** (1996) 2150 (hep-th/9410100).

[17] M. Reuter, M. G. Schmidt, C. Schubert, *Ann. Phys.* (N.Y.) **259** (1997) 313 (hep-th/9610191).

[18] R. Shaisultanov, *Phys. Lett.* B **378** (1996) 354 (hep-th/9512142).

[19] S. L. Adler, C. Schubert, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 1695 (hep-th/960535).

[20] C. Schubert, *Nucl. Phys.* B **585** (2000) **407** (hep-ph/0001288).

[21] B. S. DeWitt, *Rev. Mod. Phys.* **29** (1957) 377.

[22] T. D. Lee and C. N. Yang,*Phys. Rev.* **128** (1962)

[23] F. Bastianelli y P. Van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys.* B **389** (1993) 53.

[24] F. Bastianelli, K. Schalm y P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rev.* D **58**: 044022 (1998)

[25] K. Schalm y P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett.* B **446**, 247 (1999)

[26] F. Bastianelli y O. Corradini, *Phys. Rev.* D **60**: 044014 (1999)

[27] F. Bastianelli, O. Corradini and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett.* B **490** (2000)

[28] F. Bastianelli, O. Corradini and A. Zirotti, *JHEP* 0401:023 (2004)

[29] H. Kleinert y A. Chervyakov, *Phys. Lett.* B **464** (1999) 257.

[30] F. Bastianelli y P. van Nieuwenhuizen, *Path integrals and anomalies in curve space*, Cambridge University Press 2006.

[31] F. Bastianelli y C. Schubert, *JHEP* 0502 (2005) 069.

[32] F. Bastianelli, U. Nucamendi, C. Schubert, V.M. Villanueva, *JHEP* 0711:099(2007).

[33] F. A. Dilkes y D. G. C. McKeon, *JHEP* 9509005 (1995).

[34] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[35] F. Bastianelli, S. Frolov and A. A Tseytlin, *JHEP* 0002: 013 (2000).