

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS.

“INESTABILIDADES EN CONVECCIÓN ISOTÉRMICA DOBLE  
DIFUSIVA”

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS EN EN ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA:  
SARAI MENDOZA ARMENTA

ASESOR:  
DR. RICARDO BECERRIL BÁRCENAS

Morelia, Mich., enero 2009.

# Índice general

<i>Resumen</i>	4
<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Descripción del Sistema</b>	<b>8</b>
2.1. Ecuaciones de Movimiento . . . . .	11
2.2. Análisis de Estabilidad Lineal . . . . .	21
<b>3. Dinámica No-lineal Débil</b>	<b>27</b>
3.1. Formalismo de Ecuaciones de Amplitud . . . . .	29
3.2. Rama oscilatoria . . . . .	34
3.3. Rama Estacionaria . . . . .	42
3.4. Punto de Codimensión-2 . . . . .	52
<b>4. Modelo Tipo Lorenz</b>	<b>58</b>
4.1. Construcción del Modelo . . . . .	60
4.2. Algunas Propiedades Simples del Modelo . . . . .	65
4.2.1. Ondas Viajeras . . . . .	66
4.2.2. Modelo de Lorenz . . . . .	68
4.2.3. Sistema Disipativo . . . . .	69

<b>5. Conclusiones</b>	<b>71</b>
<b>A. Ecuaciones de movimiento</b>	<b>73</b>
<b>B. Nomenclatura</b>	<b>76</b>

## *Resumen*

En esta tesis nos ocupamos del estudio de la convección isotérmica doble difusiva, específicamente:

(A) Se deriva la ecuación de amplitud a quinto orden a lo largo de la rama oscilatoria para poder determinar si la bifurcación de ondas viajeras es hacia adelante o hacia atrás. Este cálculo no se había realizado antes para este sistema.

(B) Se bosqueja la derivación de las ecuaciones de amplitud a lo largo de la rama estacionaria y en la vecindad del punto de codimensión dos, y se hace una revisión de la dinámica que estas ecuaciones predicen en esas regiones del espacio de parámetros.

(C) Se construye por vez primera para este sistema, un conjunto de ecuaciones tipo Lorenz, y se analizan algunas de sus propiedades.

# Capítulo 1

## Introducción

La convección natural es el movimiento que se produce en un fluido cuando la parte superior del mismo es más densa que la parte inferior, dicho movimiento se genera debido a que esta configuración es potencialmente inestable, y el fluido tenderá a revertir esta situación en algún momento, produciéndose un cambio del estado de reposo al de movimiento. Este fenómeno juega un papel central en procesos físicos que ocurren en la naturaleza tales como la circulación de la atmósfera (ya que el proceso que origina la convección en la atmósfera genera fenómenos fundamentales en la explicación de los vientos, ciclones, etc.), en las placas tectónicas las cuales determinan el movimiento de los continentes ó en la circulación de los océanos. En el contexto de astrofísica la convección juega un papel central en la transferencia de calor y materia en el interior de las estrellas.

La dinámica básica de estos grandes flujos convectivos puede ser estudiada experimentalmente en un laboratorio con dimensiones mucho mas pequeñas. No estoy afirmando que en un sistema convectivo en un laboratorio se pueda estudiar lo que ocurre exactamente a escalas mucho mayores como en los sistemas que acabamos de mencionar, pero sí su dinámica básica. Estudiar o explicar teóricamente los fenómenos observados en tales experimentos de

laboratorio, así como hacer predicciones, no es en lo absoluto, una tarea sencilla.

Las observaciones de la formación de patrones convectivos datan desde los trabajos de Weber (1855) y Thompson (1882), pero fue el físico Bénard (1900) quien realizó las primeras investigaciones sistemáticas de convección en capas de fluidos. Desde entonces la literatura sobre estudios de convección de fluidos ha crecido constantemente y actualmente es muy amplia.

Uno de los fenómenos más estudiados es el de convección térmica, el cual consiste en una capa de fluido que se calienta desde su base (si está en un contenedor, se calienta la base del contenedor) y se enfría en su parte superior, por lo cual se impone un gradiente vertical de temperatura, debido a este gradiente de temperatura, existirá conducción de calor a través del fluido en reposo desde la base (más caliente) del contenedor hasta la parte superior del mismo. La densidad del fluido  $\rho$  disminuye al aumentar la temperatura, entonces se tendrá fluido menos denso cerca de la base del contenedor y fluido más denso en la parte superior, esta es una situación de inestabilidad en la que, dependiendo del gradiente vertical de temperatura, habrá una transición del estado de reposo a un estado de movimiento (convectivo).

Otro de los fenómenos estudiados es el de convección doble difusiva, el cual comenzó como una aplicación a la oceanografía y ahora tiene aplicaciones en otras áreas como geofísica, ingeniería química, astrofísica y metalurgia. Los sistemas doble difusivos son caracterizados por la presencia de dos componentes que se difunden en forma diferente, por lo cual producen efectos opuestos en la distribución vertical de la densidad del sistema. Las propiedades más comúnmente usados en este tipo de sistemas son: calor y salinidad.

Esta tesis se centra en el estudio de la dinámica de convección isotérmica doble difusiva en una celda Hele-Shaw, la cual se define en el capítulo 2.

Cabe mencionar que este trabajo fue motivado por los experimentos realizados por Predtechensky *et. al.* [16] [17]. En la celda donde se realizaron estos experimentos se satisface perfectamente la condición de frontera de impermeabilidad, lo que no ocurre en el caso termosalino donde hay conducción de calor a través de las paredes laterales del contenedor. Por otra parte, la geometría Hele-Shaw permite un análisis dos dimensional del sistema así como algunas simplificaciones teóricas. Se dará una descripción del sistema en el capítulo 2, también se presentan las ecuaciones de movimiento así como el análisis de estabilidad lineal. Una rica variedad de fenómenos de bifurcación ocurre en sistemas doble difusivos, utilizando el formalismo de ecuaciones de amplitud, en el capítulo 3, se derivan dichas ecuaciones para las bifurcaciones estacionaria, oscilatoria y de codimensión-2, y se expone la fenomenología predicha por estas ecuaciones cerca del umbral de estas inestabilidades donde el formalismo es válido. En el capítulo 4, se contruye un sistema de ecuaciones tipo Lorenz, que permite el estudio cualitativo del sistema mas allá del umbral de las inestabilidades. Finalmente, en el capítulo 5 se dan las conclusiones, y perspectivas de trabajo futuro.

## Capítulo 2

### Descripción del Sistema

Estudiaremos la convección de un fluido isotérmico en una celda Hele-Shaw, la cual es una celda rectangular (de altura  $d$ , ancho  $w$  y longitud  $L$ ) muy delgada como podemos ver en la figura (2), en la cual se coloca el fluido. Una concentración  $C_{f0}$  con coeficiente de difusión  $D_f$  que se difunde más rápidamente se impone en la parte superior de la celda (donde la concentración que se difunde lentamente es cero) y una concentración  $C_{s0}$  con coeficiente de difusión  $D_s$  que se difunde más lentamente se coloca en la base de la celda (donde la concentración que se difunde rápidamente es cero), así las concentraciones impuestas en la base y en la parte superior de la celda constituyen los parámetros experimentales.

En los experimentos realizados por Predtechensky se utilizaron membranas porosas en la cima y en la base de la celda para sostener las concentraciones en los bordes de tal manera que dejaban pasar las concentraciones pero no dejaban salir el fluido. La superficie exterior de cada membrana estaba en contacto con un depósito continuamente refrescado con el fin de que estuvieran bien definidas las concentraciones impuestas. Los detalles experimentales pueden verse en [16] y [17].

Las diferentes dimensiones de la celda y las diferentes concentraciones que utilizó Predtechensky en sus experimentos se muestran en la siguiente tabla,



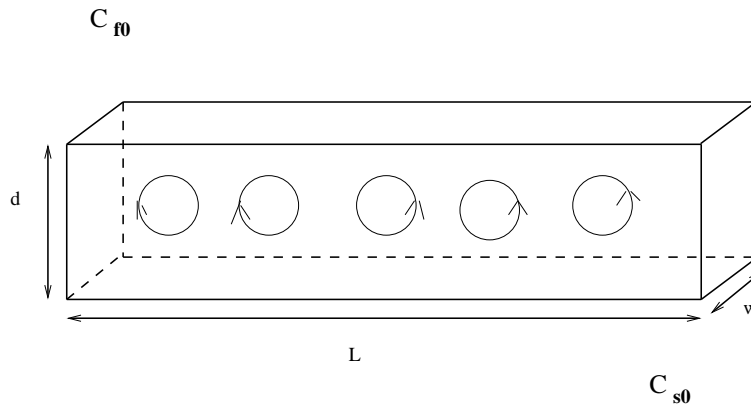


Figura 2.1: Geometría de la celda Hele-Shaw

donde  $w$  y  $d$  son respectivamente el espesor y la altura de la celda.

Celda	d(mm)	$\frac{L}{d}$	$\frac{w}{d}$	rapida/lenta	$\tau = Ds/Df$
A	3	20	0.254	NaCl/ Glicol de propileno	0.63
B	6	10	0.25	HCl/ Glicol de Propileno	0.31
C	1	10	0.127	NaCl/ Glicerol	0.62
D	3	20	0.069	NaCl/ Glicerol	0.62

Tabla 2.1: Dimensiones de las celdas y solutos usados en los experimentos.

Las dos concentraciones aumentan la densidad del solvente. El gradiente de densidad para la concentración que se difunde lentamente (desde la base del contenedor) actúa como estabilizador, mientras que el gradiente de densidad para la concentración que se difunde rápidamente (desde la parte superior de la celda) actúa como desestabilizador, por lo cual el sistema esta caracterizado por la competencia entre el efecto estabilizador de la sustancia que se difunde lentamente y el efecto desestabilizador de la sustancia que se difunde rápidamente.

El estado del sistema en el que sólo se están difundiendo las sustancias se

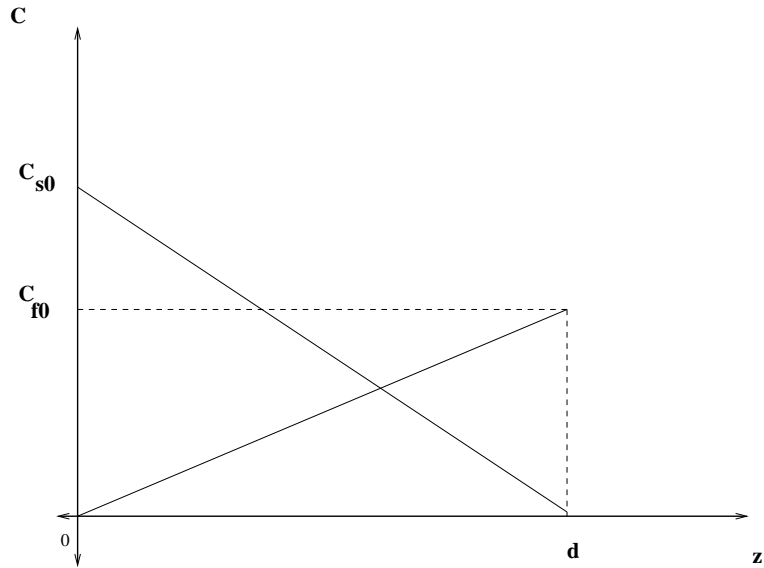


Figura 2.2: Comportamiento lineal de las concentraciones en el estado conductivo.

conoce como el *estado de reposo o conductivo*, así tenemos que dicho estado esta caracterizado por:

El campo de velocidad del fluido es cero:  $\vec{v} = \vec{0}$ .

Las concentraciones  $C_s^{(c)}$  y  $C_f^{(c)}$  dependen linealmente de la coordenada vertical en este caso elegimos  $z$  como la coordenada vertical:

$$C_s^{(c)} = C_{s0} \left(1 - \frac{z}{d}\right) \quad (2.1)$$

$$C_f^{(c)} = C_{f0} \left(\frac{z}{d}\right) \quad (2.2)$$

Si el estado conductivo presenta una pequeña perturbación, está decaerá o crecerá dependiendo de los parámetros del sistema. Si decrece el sistema permanecerá en estado de reposo por el contrario si crece, tendrá una transición del estado de reposo a algún otro estado de movimiento, por lo cual escribimos convenientemente la velocidad y las concentraciones como una su-

perposición del estado conductivo más una pequeña perturbación de dicho estado, en el caso de las concentraciones tendríamos

$$C_s(x, y, z, t) = C_s^{(c)}(z) + n_s(x, y, z, t) \quad (2.3)$$

$$C_f(x, y, z, t) = C_f^{(c)}(z) + n_f(x, y, z, t), \quad (2.4)$$

$n_s(x, y, z, t)$  y  $n_f(x, y, z, t)$  representan pequeñas perturbaciones del estado conductivo del sistema. Y para la velocidad  $\vec{v} = \vec{0} + \vec{v}$ . En la siguiente sección mostramos las ecuaciones que describen la evolución de las perturbaciones.

## 2.1. Ecuaciones de Movimiento

Debido a que el sistema que se está analizando consiste de un fluido en un campo gravitacional bajo la acción de dos concentraciones las ecuaciones de movimiento del fluido son:

Ecuación de Continuidad o Conservación de la Masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.5)$$

Ecuación de Navier-Stokes o Ecuación de Movimiento para un Fluido Viscoso:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \vec{F}^{ext} \quad (2.6)$$

Ecuaciones de Difusión o Segunda Ley de Fick:

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)C_s = D_s \nabla^2 C_s \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial C_f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)C_f = D_f \nabla^2 C_f \quad (2.8)$$

$\rho$  es la densidad del fluido,  $\rho_0$  es la densidad del solvente puro,  $p$  es la presión,  $\vec{g}$  es la aceleración gravitacional y  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad.

Debido a que en nuestro sistema las variaciones de las concentraciones no son muy grandes aplicaremos a las ecuaciones de movimiento la aproximación de Boussinesq [6], la cual nos dice que:

“Si las variaciones de las concentraciones no son muy grandes entonces podemos tratar a la densidad  $\rho$  como constante en las ecuaciones de movimiento excepto en el término de la fuerza externa.”

En nuestro caso la única fuerza externa que actúa en nuestro sistema es la gravedad y debido a la presencia de las dos sustancias, la densidad se ve incrementada en  $\Delta\rho$  sobre su valor en el estado conductivo por lo cual tenemos  $\Delta\rho = \rho(C_s, C_f) - \rho(C_s^c, C_f^c)$ , así la fuerza de flotación que un elemento diferencial de volumen de fluido experimenta está dada por  $\vec{F} = \hat{z}g\Delta\rho$ . Como la variación de las concentraciones no es muy grande podemos expandir  $\rho(C_s, C_f)$  en serie de Taylor alrededor de  $\rho(C_s^c, C_f^c)$ :

$$\rho(C_s, C_f) = \rho(C_s^c, C_f^c) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial C_s} \right) n_s + \left( \frac{\partial \rho}{\partial C_f} \right) n_f + O(n^2) \quad (2.9)$$

definimos los coeficientes de expansión como:

$$\alpha_s = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C_s} \right) \quad y \quad \alpha_f = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C_f} \right)$$

Los coeficientes  $\alpha_s$  y  $\alpha_f$  representan el aumento relativo en densidad debido al incremento de las sustancias  $C_s$  y  $C_f$ .

Sustituyendo en la ecuación (2.9) tenemos

$$\Delta\rho = \rho - \rho(C_s^c, C_f^c) = \alpha_s\rho_0n_s + \alpha_f\rho_0n_f + \dots$$

Por lo cual podemos expresar la fuerza de flotación como:

$$\vec{F} = g\hat{z}\rho_0(\alpha_s n_s + \alpha_f n_f). \quad (2.10)$$

Al aplicar la aproximación de Boussinesq tenemos que la ecuación de continuidad se reduce a

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.11)$$

Notemos que si  $w/d \ll 1$ , el sistema puede considerarse dos dimensional, y en la ecuación de Navier-Stokes el término  $\nu\nabla^2\vec{v}$ , de acuerdo a la llamada aproximación de Hele-Shaw, puede ser reemplazado por (para una exposición en detalle de esta aproximación, vea [14]):

$$\nu\nabla^2\vec{v} \rightarrow -\frac{12\nu}{\omega^2}\vec{v}. \quad (2.12)$$

Debido a que estamos considerando al sistema 2-dimensional, podemos introducir la función de corriente  $\psi(x, z, t)$  definida como:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad (2.13)$$

$$v_z = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (2.14)$$

Por lo cual tenemos  $\vec{v} = (\partial_z\psi, 0, -\partial_x\psi)$  la cual lleva toda la información sobre el flujo del fluido. Con la introducción de  $\psi$  la ecuación de continuidad (2.11) se satisface automáticamente.

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$$

Entonces, las ecuaciones de movimiento son fundamentalmente tres: la ecuación de Navier-Stokes y dos de difusión (aunque en principio necesitaríamos también una ecuación de estado para determinar  $p$ ). Estas ecuaciones determinan la evolución espacio-temporal de las desviaciones  $(\psi, n_s, n_f)$  del estado conductivo.

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v} + \frac{\vec{g}\rho}{\rho_0} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)C_s = D_s\nabla^2 C_s \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial C_f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)C_f = D_f\nabla^2 C_f \quad (2.17)$$

Recordemos que la fuerza de flotación en magnitud es igual al peso del fluido desalojado, por lo cual podemos sustituir la fuerza externa por menos la fuerza de flotación (2.10) y considerando (2.12) la ecuación de Navier-Stokes toma la forma:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p - \frac{12\nu\vec{v}}{\omega^2} - g\hat{z}(\alpha_s n_s + \alpha_f n_f) \quad (2.18)$$

Observemos que la presión es una variable que solo aparece en una de las ecuaciones de movimiento: en la de Navier-Stokes y de hecho solo un término es el que depende de la presión, podemos eliminar la presión como variable (y entonces no necesitar una ecuación de estado) aplicando el rotacional a dicha ecuación ya que el rotacional de un gradiente es siempre cero ( $\nabla \times (\nabla p) = 0$ ). Por lo cual aplicamos el rotacional a cada término de la ecuación (2.18), de este modo:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_z \psi & 0 & -\partial_x \psi \end{vmatrix} = \hat{j} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = \hat{j} \nabla^2 \psi$$

Para el segundo término tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) &= \vec{v} \cdot \nabla (\nabla \times \vec{v}) - (\nabla \times \vec{v}) \cdot \nabla \vec{v} = (v_x \partial_x + v_z \partial_z) \hat{j} \nabla^2 \psi \\ &= \hat{j} (\partial_z \psi \partial_x \nabla^2 \psi - \partial_x \psi \partial_z \nabla^2 \psi) = -J(\psi, \nabla^2 \psi) \hat{j} \end{aligned}$$

$J(f, g)$  es el operador diferencial de Poisson definido como:

$$J(f, g) = \partial_x f \partial_z g - \partial_z f \partial_x g. \quad (2.19)$$

Para el tercer término tenemos:

$$\nabla \times \left( \frac{12\nu}{\omega^2} \vec{v} \right) = \frac{12\nu}{\omega^2} \hat{j} \nabla^2 \psi$$

En cuanto al último término tenemos:

$$\nabla \times g\hat{z}(\alpha_s n_s + \alpha_f n_f) = g \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & \alpha_s n_s + \alpha_f n_f \end{vmatrix} =$$

$$\nabla \times g\hat{z}(\alpha_s n_s + \alpha_f n_f) = g[\hat{i}\partial_y(\alpha_s n_s + \alpha_f n_f) - \hat{j}\partial_x(\alpha_s n_s + \alpha_f n_f)]$$

Pero recordemos que estamos considerando que el sistema es dos dimensional y entonces todas las funciones dependen sólo de  $x$  y de  $z$ , pero no de  $y$ , por lo cual  $\partial_y(\alpha_s n_s + \alpha_f n_f) = 0$ , y entonces tenemos.

$$\nabla \times g\hat{z}(\alpha_s n_s + \alpha_f n_f) = -g\partial_x(\alpha_s n_s + \alpha_f n_f)\hat{j}$$

De sustituir todo lo anterior en la ecuación de Navier-Stokes se obtiene:

$$\partial_t \nabla^2 \psi - J(\psi, \nabla^2 \psi) = -\frac{12\nu}{\omega^2} \nabla^2 \psi + g\partial_x(\alpha_s n_s + \alpha_f n_f) \quad (2.20)$$

Para no tener que considerar en cada cálculo las dimensiones de las cantidades físicas con las que estamos trabajando, conviene adimensionar las ecuaciones. El movimiento convectivo se realiza en la dirección  $x, z$  pero es en la dirección  $z$  donde se tiene los gradientes de concentración, los cuales provocan el movimiento, por lo tanto adimensionaremos las variables espaciales con  $d$ . La concentración de la sustancia lenta la adimensionaremos con  $C_{s0}$ , la rápida con  $-C_{f0}$  donde el signo menos es usado por convención ya que las concentraciones tienen un efecto estabilizador y desestabilizador respectivamente. La función de corriente la adimensionamos en términos de  $D_f$ . Debido a que  $D_f > D_s$ , el tiempo característico para la sustancia que se



difunde más rápido  $t_f = \frac{d^2}{D_f}$  es menor que el tiempo característico correspondiente a la especie que se difunde lentamente  $t_s = \frac{d^2}{D_s}$  en cuanto a medición del tiempo es mejor comparar con intervalos de tiempo mas pequeños, por lo cual usamos el tiempo característico menor  $t_f$  para adimensionar el tiempo en las ecuaciones de movimiento. Es decir, adimensionalizaremos las ecuaciones del la forma siguiente

$$\hat{t} = \frac{D_f}{d^2}t, \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{d}, \quad \hat{v} = \frac{d}{D_f}\vec{v}, \quad \hat{n}_s = \frac{n_s}{C_{s0}}, \quad \hat{n}_f = -\frac{n_f}{C_{f0}}, \quad \hat{\psi} = \frac{\psi}{D_f}. \quad (2.21)$$

Las cantidades con gorrito son las cantidades adimensionales. Así que los operadores se escriben como

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial \hat{x}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{D_f}{d^2} \frac{\partial}{\partial \hat{t}}, \quad \nabla \rightarrow \frac{1}{d} \hat{\nabla} \quad (2.22)$$

Primero adimensionaremos la ecuación de Navier-Stokes para lo cual sustitiremos (2.21) y (2.22) en 2.18, obteniendo:

$$\frac{1}{\sigma} [\hat{\partial}_t \hat{\nabla}^2 \hat{\psi} - \hat{J}(\hat{\psi}, \hat{\nabla}^2 \hat{\psi})] = -\hat{\nabla}^2 \hat{\psi} + R_s \hat{\partial}_x \hat{n}_s - R_f \hat{\partial}_x \hat{n}_f \quad (2.23)$$

Donde hemos introducido las definiciones del número modificado de Schmidt  $\sigma$  y los números de Rayleigh para la sustancia lenta ( $R_s$ ) y para la sustancia rápida ( $R_f$ )

$$\sigma = \frac{12\nu d^2}{\omega^2 D_f} \quad (2.24)$$

$$R_s = \frac{\alpha_s c_{s0} g d \omega^2}{12\nu D_f} \quad (2.25)$$

$$R_f = \frac{\alpha_f c_{f0} g d \omega^2}{12\nu D_f} \quad (2.26)$$

$R_s$  y  $R_f$  son los parámetros experimentales del sistema, puesto que son proporcionales a las concentraciones  $C_{s0}$  y  $C_{f0}$  que son las cantidades que se pueden variar en el experimento.

Para el caso de las ecuaciones de difusión recordemos que escribimos las concentraciones como la suma del estado de conducción más una perturbación, teniendo eso en mente y sustituyendo (2.21) y (2.22) en (2.16) y (2.17) obtenemos:

$$\partial_t \hat{n}_s + \partial_x \hat{\psi} - \tau \hat{\nabla}^2 \hat{n}_s = \hat{J}(\hat{\psi}, \hat{n}_s),$$

$$\partial_t \hat{n}_f + \partial_x \hat{\psi} - \hat{\nabla}^2 \hat{n}_f = \hat{J}(\hat{\psi}, \hat{n}_f)$$

En la primera ecuación hemos introducido el número de Lewis  $\tau$  el cual es la razón entre los coeficientes de difusión  $D_s$  y  $D_f$ , es decir  $\tau = D_s/D_f$ . Después de quitar los "gorritos" en todos los términos de las tres ecuaciones: la de Navier-Stokes y las dos de difusión obtenemos:

$$\frac{1}{\sigma} [\partial_t \nabla^2 \psi - J(\psi, \nabla^2 \psi)] = -\nabla^2 \psi + R_s \partial_x n_s - R_f \partial_x n_f \quad (2.27)$$

$$\partial_t n_s + \partial_x \psi - \tau \nabla^2 n_s = J(\psi, n_s) \quad (2.28)$$

$$\partial_t n_f + \partial_x \psi - \nabla^2 n_f = J(\psi, n_f) \quad (2.29)$$

El sistema anterior de ecuaciones son las ecuaciones adimensionales, que describen el estado de convección en la aproximación de Bossinesq. Dicho sistema esta especificado por cuatro parámetros: Los números de Rayleigh para la substancia lenta  $R_s$  y para la substancia rápida  $R_f$ , el número modificado de Schmidt y el número de Lewis. Aunque montado un experimento, los numeros de Lewis y Schmidt quedan fijos, y son los números de Rayleigh los que se pueden variar, constituyéndose así en los parámetros experimentales. Expresamos las ecuaciones de movimiento en forma matricial.

$$[M\partial_t + L]\vec{\xi} = N(\vec{\xi}, \vec{\xi}). \quad (2.30)$$

Hemos escrito los términos lineales del lado izquierdo de la ecuación y del lado derecho los términos no lineales, e introducido los operadores matriciales

$$M = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma}\nabla^2, 1, 1\right)$$

$$L = \begin{pmatrix} \nabla^2 & -R_s\partial_x & R_f\partial_x \\ \partial_x & -\tau\nabla^2 & 0 \\ \partial_x & 0 & -\nabla^2 \end{pmatrix},$$

junto con el operador no lineal

$$N(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma}J(\psi, \nabla^2\psi) \\ J(\psi, n_s) \\ J(\psi, n_f) \end{pmatrix}$$

donde el campo vectorial  $\vec{\xi}$  tiene por componentes a la función de corriente, y a las desviaciones de las concentraciones del perfil conductivo, esto es

$$\vec{\xi}(x, z, t) = \begin{pmatrix} \psi(x, z, t) \\ n_s(x, z, t) \\ n_f(x, z, t) \end{pmatrix},$$

De la tabla de dimensiones de la celdas Hele-Shaw, usadas en los experimentos de Predtechensky, se pueden tomar los valores de las variables de las que depende  $\sigma$ , así se obtiene la siguiente tabla de los valores de  $\sigma$

Celda	$\nu(cm^2seg^{-1})$	$D_f(cm^2s^{-1})$	$\sigma$
A	0.01	$1 \cdot 51 * 10^{-5}$	$8 \cdot 79 * 10^5$
B	0.01	$3 \cdot 07 * 10^{-5}$	$35 \cdot 17 * 10^5$
C	0.01	$1 \cdot 51 * 10^{-5}$	$1 \cdot 98 * 10^5$
D	0.01	$1 \cdot 51 * 10^{-5}$	$17 \cdot 88 * 10^5$

Tabla 2.2: Valores que toma  $\sigma$  así como  $D_f$  y  $\nu$  en cada una de las celdas de la tabla 2.1.

Los valores de  $\sigma$  son del orden  $10^5$  por lo que trabajaremos en el límite en el que  $\frac{1}{\sigma}$  tiende a cero. De este modo la forma matricial de las ecuaciones se simplifica un poco:

$$\left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_t & 0 \\ 0 & 0 & \partial_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla^2 & -R_s \partial_x & R_f \partial_x \\ \partial_x & -\tau \nabla^2 & 0 \\ \partial_x & 0 & -\nabla^2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi \\ n_s \\ n_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ J(\psi, n_s) \\ J(\psi, n_f) \end{pmatrix}$$

Debido a que las concentraciones son fijas en la base  $z = 0$  y en la cima  $z = 1$  de la celda Hele-Shaw, las perturbaciones de las concentraciones deben anularse en dichos puntos (base y cima de la celda). También supondremos que la velocidad se anula en  $z = 0, 1$ , por lo cual nuestras condiciones de frontera son:

$$n_s = n_f = \psi = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, 1. \quad (2.31)$$

Asumiremos periodicidad (del campo  $\vec{\xi}(x, z, t)$ ) en la dirección  $x$ , esto es una suposición razonable si la razón  $L/d$  es grande. El valor típico en los experimentos de Predtechensky fue  $L/d = 20$ . Ya que tenemos las ecuaciones de movimiento, la primera pregunta que queremos contestar es: en que regiones del espacio de parámetros el sistema es estable ó inestable? Contestaremos esta pregunta en la siguiente sección.

## 2.2. Análisis de Estabilidad Lineal

El propósito de la teoría de estabilidad lineal es estudiar cuando un estado dado, en este caso el estado conductivo  $\vec{\xi}^c = (0, C_s^{(c)}, C_f^{(c)})$  es inestable ante la presencia de pequeñas perturbaciones  $\vec{\xi}(x, z, t)$ , es decir cuando las perturbaciones crecen y originan un cambio en el estado de movimiento del sistema. Así el análisis de estabilidad lineal da las condiciones bajo las cuales el sistema experimentará transiciones a otro estado de movimiento. Matemáticamente, si las perturbaciones son pequeñas, éstas deberán satisfacer las ecuaciones linealizadas de movimiento  $[M\partial_t + L]\vec{\xi} = 0$  y las condiciones de frontera. La solución que satisface estas ecuaciones linealizadas, junto con las condiciones de frontera es la parte real de:

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} i(A_R e^{-iqx} - A_L e^{iqx}) \\ (B_R e^{-iqx} + B_L e^{iqx}) \\ (C_R e^{-iqx} + C_L e^{iqx}) \end{pmatrix} e^{\lambda t} \sin(\pi z) \quad (2.32)$$

Donde la evolución temporal se asumió de la forma  $exp(\lambda t)$  con  $\lambda = \lambda_r + i\omega_0$ . Cuando se tiene que la razón de crecimiento es mayor que cero  $\lambda_r > 0$  para un valor de  $q$ , la perturbación crecerá hasta que las no linealidades sean significativas. En ese caso se dice que ese modo de Fourier es linealmente inestable. Si  $\lambda_r = 0$  se dice que el modo es neutralmente inestable por último si  $\lambda_r < 0$  se dice que el modo es asintóticamente ó linealmente estable. Una pequeña perturbación del estado conductivo generalmente excita todo los modos, en consecuencia diremos que el sistema es inestable si  $\lambda_r > 0$  al menos para un modo. Si  $\lambda_r \leq 0$  para todos los modos, entonces diremos que el sistema es linealmente estable. Si  $\omega_0 \neq 0$  y  $\lambda_r = 0$ , se tendrá una inestabilidad oscilatoria para todo el conjunto de modos. Por último si  $\omega = 0$  y  $\lambda_r = 0$  se tendrá una estabilidad estacionaria.

De sustituir 2.32 en el sistema de ecuaciones lineales (sin considerar el límite en ql que  $\frac{1}{\sigma} \rightarrow 0$ ) resulta un sistema de ecuaciones para los coeficientes  $A_R$ ,  $B_R$ ,  $C_R$  y otro (básicamente el mismo sistema) para los coeficientes de ondas viajeras a la izquierda. El sistema para  $A_R$ ,  $B_R$ ,  $C_R$  es:

$$\begin{pmatrix} (\frac{\lambda}{\sigma} + 1)k^2 & -qR_s & qR_f \\ q & \lambda + \tau k^2 & 0 \\ q & 0 & \lambda + k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_R \\ B_R \\ C_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde  $k^2 = \pi^2 + q^2$ . Existirá una solución no trivial si y sólo si el determinante de la matriz se anula, es decir si:

$$\frac{\lambda}{\sigma} + 1 = \frac{q^2}{k^2} \left( \frac{R_f}{\lambda + k^2} - \frac{R_s}{\lambda + \tau k^2} \right) \quad (2.33)$$

Notemos que la relación de dispersión (2.33), es una ecuación cúbica para  $\lambda$ , que escribimos  $\lambda^3 - a_2\lambda^2 + a_1\lambda - a_0 = 0$ , con coeficientes reales  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$ , el número crítico de Rayleigh  $R_{fc}^{(ss)}$  que corresponde al modo estacionario, es decir cuando  $\lambda = 0$ , es decir cuando  $a_0 = 0$ , lo cual implica

$$R_{fc}^{(ss)} = \frac{k^4}{q^2} + \frac{R_s}{\tau} \quad (2.34)$$

Para que se tenga inestabilidad oscilatoria  $\lambda = \pm i\omega_0$ , los coeficientes de la relación de dispersión deben de satisfacer  $a_0 = a_2a_1$  y  $a_1 = \omega_0^2$ . Con estas dos condiciones se obtienen el valor crítico del número de Rayleigh  $R_{fc}^{osc}$  y la frecuencia de la inestabilidad oscilatoria

$$R_{fc}^{osc} = \frac{k^2\tau + \sigma}{k^2 + \sigma} R_s + \frac{k^4}{q^2\sigma} (1 + \tau)(\tau k^2 + \sigma) \quad (2.35)$$

$$\omega_0^2 = \tau k^2(k^2 + \sigma) + \sigma k^2 + \frac{q^2 \sigma}{k^2} (R_s - R_f^{osc})$$

que puede también escribirse como

$$\omega_0^2 = -\tau^2 k^4 + \frac{q^2 \sigma}{k^2 + \sigma} (1 - \tau) R_s$$

Despejando  $R_s$  de esta última ecuación, se obtiene  $R_s$  como función de  $\omega$ , y por ende  $R_{fc}^{(osc)}$  como función de  $\omega_0$  también. Específicamente

$$R_s = \frac{(k^2 + \sigma)(k^4 \tau^2 + \omega_0^2)}{q^2 \sigma (1 - \tau)} \quad (2.36)$$

$$R_{fc}^{(osc)} = \frac{(k^2 \tau + \sigma)(k^4 + \omega_0^2)}{q^2 \sigma (1 - \tau)} \quad (2.37)$$

Estas dos últimas expresiones se usarán ampliamente en el siguiente capítulo al deducir las ecuaciones de amplitud en la rama oscilatoria. La diferencia entre el número crítico de Rayleigh de la rama estacionaria y el de la rama oscilatoria lo expresamos como:

$$R_{fc}^{(ss)} - R_{fc}^{(osc)} = \frac{\sigma + k^2(\tau + 1)}{\sigma q^2 \tau} \omega_0^2 \quad (2.38)$$

El número de onda mínimo  $q_c$  en el cual la inestabilidad estacionaria ocurre se obtiene encontrando la raíz de  $\partial R_f^{(s)}/\partial q = 0$  y resulta ser  $q_c = \pi$ . En cambio para la inestabilidad oscilatoria,  $q_c$  es igual a  $\pi$  si y sólo si se toma el límite cuando  $\sigma^{-1}$  tiende a cero, de lo contrario debe evaluarse numéricamente para cada valor dado de  $R_s$ . En la gráfica 2.3 se muestra (2.34) y (2.35) en función de  $q$

Así considerando  $\sigma^{-1}$ , la relación de dispersión se modifica a  $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ . Bajo esta consideración el número crítico de Rayleigh correspondiente al mo-

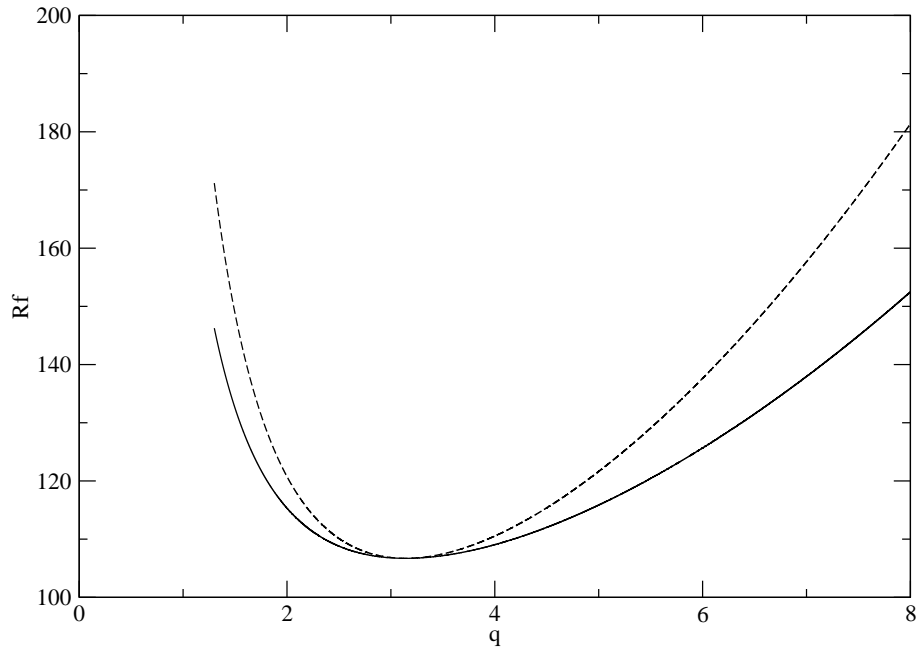


Figura 2.3: La curva solida corresponde a la inestabilidad estacionaria para la cual  $q_c = \pi$  y la curva punteada corresponde a la inestabilidad oscilatoria para la cual  $q_c = \pi + \delta q$  con  $\delta q$  del orden de  $10^{-5}$ . Consideramos  $R_s = 42,35$ ,  $\sigma = 1,23 \times 10^5$  y  $\tau = 0,63$ .

do estacionario ( $\lambda = 0$ ) ocurre cuando  $c = 0$ , que implica:

$$R_{fc}^{ss} = 4\pi^2 + \frac{R_s}{\tau}$$

La inestabilidad oscilatoria  $\lambda = \pm i\omega_0$  ocurre si y sólo si el coeficiente de  $\lambda$ , en la relación de dispersión se anula, es decir  $b = 0$ , condición que nos proporciona el valor crítico del número de Rayleigh  $R_{fc}^{osc}$ :

$$R_{fc}^{osc} = R_s + 4\pi^2(1 + \tau)$$

y la frecuencia  $\omega_0$  se obtiene del coeficiente  $c$ , explícitamente  $\omega_0 = \sqrt{c}$ , es decir



$$\omega_0^2 = -4\pi^4\tau^2 + \pi^2(1 - \tau)R_s \quad (2.39)$$

El punto donde las dos inestabilidades colisionan ( $R_{fc}^{ss} = R_{fc}^{osc}$ ) se conoce como el punto de codimensión-2 (pcd), en este caso ambos coeficientes en la relación de dispersión ( $b$  y  $c$ ) tienden a cero simultaneamente, de ahí el nombre “codimensión-2”. En el espacio de parámetros la localización del punto de codimensión-2 está dada por:

$$R_s^{c2} = \frac{4\pi^2\tau^2}{1 - \tau} \quad (2.40)$$

$$R_f^{c2} = \frac{4\pi^2}{1 - \tau}, \quad (2.41)$$

En este punto la frecuencia se anula (pues  $c = 0$ ), como puede verificarse fácilmente sustituyendo  $R_s^{c2}$  en (2.39).

Experimentalmente lo que se hace para analizar la estabilidad del sistema es fijar un valor de la concentración en la base  $C_{s0}$  (o equivalentemente  $R_s$ ) e ir incrementando cuasi-estáticamente el valor de la concentración en la cima  $C_{f0}$  (o equivalentemente, el valor de  $R_f$ ) y observar si en cada pequeño incremento el sistema es estable o no. El análisis de estabilidad lineal nos dice que si  $R_s < R_s^{(c2)}$ , el estado de conducción perderá estabilidad en una bifurcación estacionaria cuando  $R_f$  alcanza el valor  $R_{fc}^{ss}$ . Por otro lado si  $R_s > R_s^{(c2)}$ , el estado de conducción perderá estabilidad en una bifurcación oscilatoria cuando  $R_f$  alcanza el valor  $R_{fc}^{osc}$ . El resultado del análisis de estabilidad lineal para la convección isotérmica doble difusiva se resume en la figura 2.4. Con esto concluimos este capítulo. En el siguiente analizaremos la dinámica del sistema en las inmediaciones del umbral de las inestabilidades  $R_{fc}^{(ss)}$ ,  $R_{fc}^{(osc)}$  y  $R_s^{c2}$ .

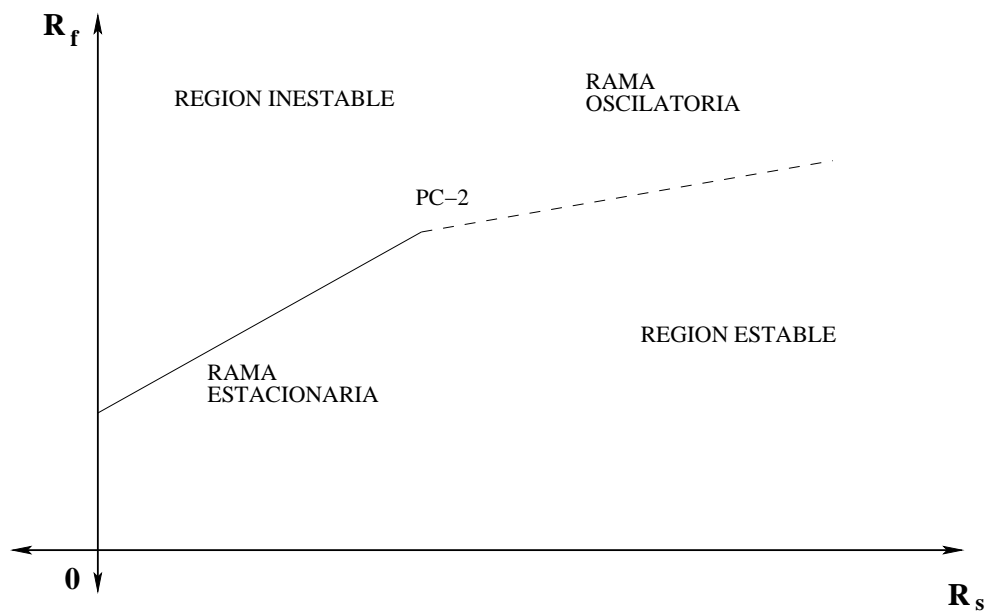


Figura 2.4: Diagrama de estabilidad lineal, como función de los números de Rayleigh  $R_s$  y  $R_f$ . La figura divide el plano  $(R_s, R_f)$  en dos regiones una estable y una inestable. El diagrama está compuesto de dos rectas de diferente pendiente, la recta de mayor pendiente es la correspondiente a la rama estacionaria y la recta de menor pendiente es la correspondiente a la rama oscilatoria, el punto de intersección de ambas rectas es el punto de codimensión-2 donde las dos inestabilidades compiten.

## Capítulo 3

# Dinámica No-lineal Débil

Como mencionamos en el capítulo anterior, el procedimiento usual para determinar el umbral de convección consiste en dos pasos. Primero, se fija una concentración de la sustancia que se difunde lentamente desde la base del contenedor, es decir, se fija  $R_s$ . Puesto que el gradiente de concentración resultante es estabilizador, el sistema se mantendrá en el estado conductivo. Después se fija una concentración de la sustancia que se difunde rápidamente en la parte superior de la celda como el gradiente correspondiente es desestabilizador, si dicha concentración se incrementa poco a poco, es decir se incrementa el valor del parámetro  $R_f$  las perturbaciones pequeñas que siempre están presentes en cualquier experimento, crecerán o decrecerán dependiendo del valor de  $R_f$ . Si la perturbación decae entonces el sistema regresa al estado conductivo, de lo contrario, el sistema cambiará del estado conductivo a otro estado (de movimiento). Para determinar el umbral de convección se realizó el análisis de estabilidad lineal, el cual presentamos en el capítulo anterior. Dicho análisis nos proporciona el diagrama 2.4 de estabilidad del sistema, el cual nos muestra que arriba de un valor crítico  $R_{fc}$ , todas las perturbaciones pequeñas crecerán y habrá una transición de estados de movimiento. Los puntos en el espacio de parámetros donde surgen nuevas soluciones se les llama puntos de bifurcación. En este caso existen tres

bifurcaciones que surgen del estado conductivo: la bifurcación estacionaria, la oscilatoria y el punto donde estas dos inestabilidades se encuentran, el punto de codimensión-2. Cual bifurcación aparecerá dependerá de la localización del sistema en el espacio de parámetros  $(R_s, R_f)$ . Más aún, pueden aparecer nuevas soluciones a medida que se incrementa  $R_f$ .

Si se resolvieran las ecuaciones de movimiento completas, es decir incluyendo la parte no lineal junto con las condiciones de frontera, y una condición inicial apropiada, se tendría una descripción completa de la dinámica de la convección isotérmica doble difusiva en cualquier región del espacio de parámetros. Pero como sabemos, encontrar soluciones exactas a las ecuaciones hidrodinámicas en la inmensa mayoría de los casos es simplemente imposible. Sin embargo, en principio, uno puede resolver las ecuaciones del sistema por medio de los métodos numéricos, lo cual tampoco es muy sencillo ni inmediato, además sin un análisis previo de lo que uno podría esperar encontrar, uno iniciaría las simulaciones numéricas prácticamente a ciegas. Hay un camino analítico, largo, pero accesible, que nos ayuda a conocer la dinámica del sistema, e incluso puede servir de guía a las simulaciones numéricas, al menos, en la vecindad de las ramas de bifurcación, ya sea la estacionaria, o la oscilatoria, o bien en su intersección. Este camino es el de los *métodos perturbativos*. En nuestro caso, ya tenemos solución del estado conductivo (es decir, el fluido en reposo) y la solución en el umbral de la inestabilidad que está dada por la solución (2.32) que propusimos para realizar el análisis de estabilidad lineal. Lo que no conocemos en dicha solución son las amplitudes,  $A_R$  y  $A_L$ , que experimentalmente se observa que varían lentamente en el tiempo hasta que adquieren un valor fijo. De modo que en este sistema se tienen dos escalas de tiempo, un tiempo “rápido”, la de las oscilaciones expresadas por  $\exp(i\omega_0 t)$  que aparece en (2.32), y uno lento, la de la amplitud. Así, si estamos interesados en buscar una solución aproximada en la vecindad del umbral de inestabilidad, debemos tomar en cuenta el hecho de que existen más de una escala de tiempo. Se sabe que la teoría de perturbaciones

regulares falla en problemas con más de una escala temporal. En la siguiente sección, se espondrá un ejemplo donde esta teoría falla y cómo se corrige con la teoría de perturbaciones de tiempos múltiples. Con este ejemplo no pretendemos realizar una exposición detallada de esta teoría matemática, sólo dar una visión básica y panorámica de la misma. Si se quiere revisar los detalles de la teoría, referimos al lector a estudios formales que se encuentran por ejemplo, en la tesis doctoral de D. Williams [22], o en el trabajo de Dangelmayr *et al* [10], o en algunos libros de texto avanzado [15].

### 3.1. Formalismo de Ecuaciones de Amplitud

Ejemplificaremos esta teoría con osciladores débilmente no lineales, los cuales tienen asociada una ecuación de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \epsilon f(x, \dot{x}) = 0, \quad (3.1)$$

donde  $\epsilon \ll 1$  y  $f(x, \dot{x})$  es una función suave (de sus argumentos). Dos de los ejemplos clásicos son la ecuación de Van der Pol  $d\dot{x}/dt + x + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0$ , y la ecuación de Duffing  $d\dot{x}/dt + x + \epsilon x^3 = 0$ . Cuando  $\epsilon = 0$ , ambas ecuaciones se reducen a la ecuación del oscilador armónico cuya solución es muy bien conocida. Por lo cual se esperaría que la solución de (3.1) fuera muy parecida a la solución del oscilador armónico simple (ya que  $\epsilon \ll 1$ ). De la teoría de perturbaciones regulares como una primera aproximación buscamos soluciones de (3.1) de la forma

$$x(t, \epsilon) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (3.2)$$

Se supone que los primeros términos de la expresión anterior son los de mayor peso en el comportamiento de la solución. Un ejemplo donde se aplica la teoría de perturbaciones regulares y no funciona, es el oscilador débilmente amortiguado [19]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\epsilon\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (3.3)$$

con condiciones iniciales  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 1$ , la solución exacta es

$$x(t, \epsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} e^{-\epsilon t} \sin[\sqrt{1 - \epsilon^2}t] = A(\epsilon t) \sin[\sqrt{1 - \epsilon^2}t] \quad (3.4)$$

Ahora encontremos la solución aproximada de (3.3) con ayuda de teoría de perturbaciones regulares. De sustituir (3.2) en (3.3) y de agrupar los coeficientes de las diferentes potencias de  $\epsilon$  se tiene

$$\left[ \frac{d^2x_0}{dt^2} + x_0 \right] + \left[ \frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\frac{dx_0}{dt} + x_1 \right] \epsilon + O(\epsilon^2) = 0. \quad (3.5)$$

Como la expresión anterior es válida para todo  $\epsilon \ll 1$ , cada coeficiente debe anularse, como consecuencia se obtienen una serie de ecuaciones diferenciales a diferentes ordenes en el parámetro de pequeñez  $\epsilon$ . De (3.5) podemos ver que la ecuación a orden cero en  $\epsilon$  es

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + x_0 = 0,$$

cuya solución está dada por

$$x_0(t) = \sin(t). \quad (3.6)$$

De (3.5) vemos que la ecuación a orden uno en  $\epsilon$  es

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = -2\frac{dx_0}{dt},$$

sustituyendo (3.6) en la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = -2\cos(t). \quad (3.7)$$

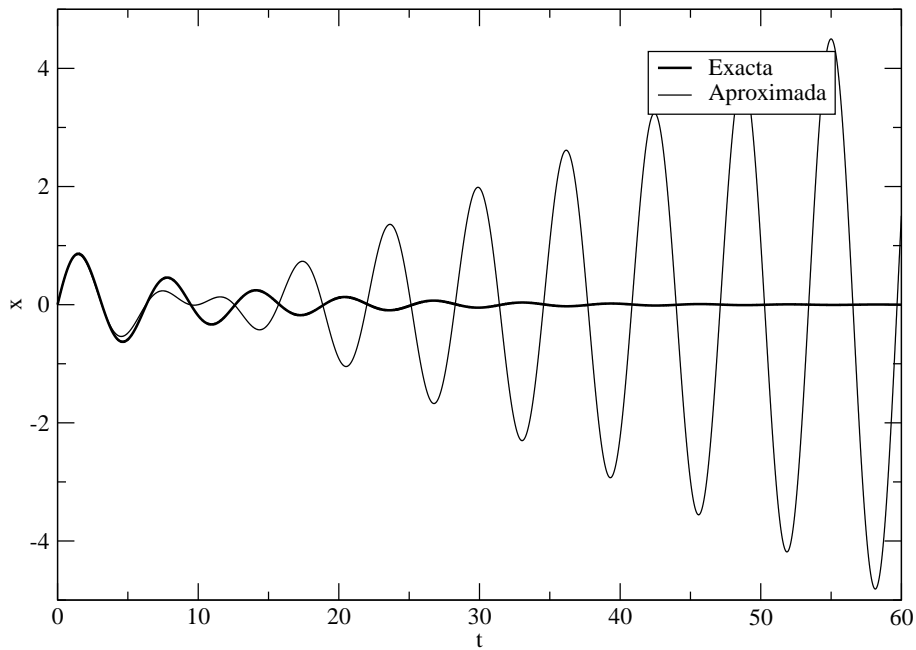


Figura 3.1: Gráfica de la solución exacta de 3.3 y la solución que arroja la teoría de perturbaciones para  $\epsilon = 0,1$ .

Notemos que el lado derecho consta de un solo término, el cual producirá resonancia. Usando las condiciones iniciales, la solución de esta última ecuación es  $x_1(t) = -t\sin(t)$  que crece cuando  $t$  crece. Entonces la solución que arroja la teoría de perturbaciones está dada por

$$x(t, \epsilon) = \sin(t) - \epsilon t \sin(t) + O(\epsilon^2), \quad (3.8)$$

dicha solución sólo se aproxima bien a la solución exacta como podemos ver en la gráfica 3.1 para tiempos muy pequeños, y se aleja notablemente de la solución exacta para tiempos mayores, así, la solución dada por teoría de perturbaciones regulares es básicamente incorrecta, pero veamos porque no lo es. Primero, notemos que la solución exacta (3.4) exhibe dos escalas de tiempo, la primera consiste de un tiempo rápido  $t$  que es de orden uno para la oscilación sinusoidal, la segunda consiste de un tiempo lento sobre el

cual la amplitud varía. Otro hecho a notar es que, la frecuencia de oscilación de la solución exacta  $\omega = \sqrt{1 - \epsilon^2}$  se aproxima a  $\omega = 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2$ , en cambio la frecuencia dada por la solución aproximada (3.8) es  $\omega = 1$ . Para tiempos grandes este error en la frecuencia afecta fuertemente la solución aproximada, por estas razones, la teoría de perturbaciones regulares no trabaja bien en el oscilador debilmente amortiguado.

La teoría de tiempos multiples trata de considerar las dos escalas de tiempo introduciendo dos tiempos, un tiempo rápido el cual llamaremos  $\tau = t$ , y un tiempo lento  $T = \epsilon t$ , los cuales son tratados como si fueran variables independientes (en este trabajo no intentaremos justificar dicha suposición). Con la introducción de estos dos tiempos el operador derivada del tiempo toma la forma

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T} \quad (3.9)$$

Con esto en mente, buscamos soluciones de la forma

$$x(t, \epsilon) = x_0(\tau, T) + \epsilon x_1(\tau, T) + O(\epsilon^2). \quad (3.10)$$

De sustituir la expresión anterior en (3.3), y agrupar los términos en las potencias de  $\epsilon$ , obtenemos una serie de ecuaciones diferenciales a diferentes ordenes en  $\epsilon$ . A orden cero se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau^2} + x_0 = 0, \quad (3.11)$$

cuya solución es

$$x_0 = A \sin(\tau) + B \cos(\tau). \quad (3.12)$$

A orden uno la ecuación a resolver es

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau T} - 2 \frac{\partial x_0}{\partial \tau}, \quad (3.13)$$



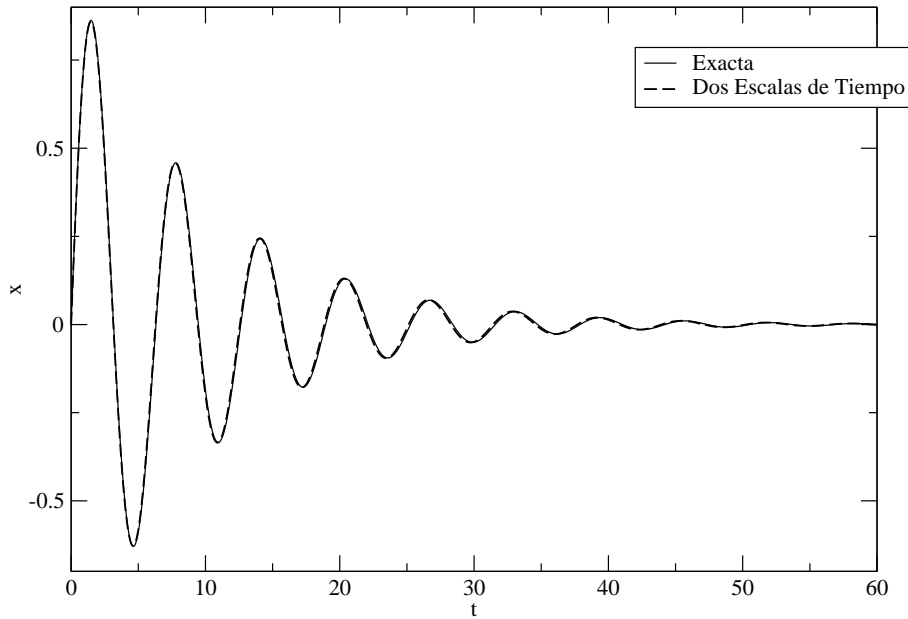


Figura 3.2: Gráfica de la solución exacta de 3.3 y la solución que arroja la teoría de tiempos múltiples para  $\epsilon = 0,1$ .

al sustituir (3.12) en la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 = -2(A' + A)\cos(\tau) + 2(B' + B)\sin(\tau), \quad (3.14)$$

donde la prima denota la derivada con respecto a  $T$ . Notemos que el lado derecho de la expresión anterior produce resonancia, es decir tenemos el mismo problema que cuando usamos teoría de perturbaciones regulares. Para eliminar este problema forzaremos a los coeficientes de los términos resonantes a anularse, dando por resultado *dos ecuaciones de amplitud* para los coeficientes  $A$  y  $B$ , las cuales tienen por solución  $A(T) = A(0)\exp^{-T}$  y  $B(T) = B(0)\exp^{-T}$ . Si utilizamos las condiciones iniciales, obtenemos

$$x = e^{-T}\sin(\tau) + O(\epsilon). \quad (3.15)$$

Que es la solución predicha por la teoría de tiempos múltiples, y que se

acerca mucho a la solución exacta como lo podemos ver en la gráfica 3.2. Si se esta interesado en tratar de remediar el error en la frecuencia se debe introducir un tiempo super-lento  $\mathfrak{S} = \epsilon^2 t$ . Para nuestro ejemplo ya no lo haremos pues (3.15) ya no das una buena aproximación como lo podemos ver en ???. En las siguientes secciones aplicaremos teoría de tiempos múltiples al sistema de ecuaciones con el que estamos trabajando.

## 3.2. Rama oscilatoria

Como hemos visto, para  $R_s > R_s^{c2}$ , el estado conductivo pierde estabilidad al alcanzar la rama  $R_{fc}^{osc}$ . En este capítulo deduciremos las ecuaciones de amplitud en la rama oscilatoria. Veremos que esta bifurcación oscilatoria o de Hopf, produce dos clases de soluciones no triviales, soluciones de ondas viajeras y estacionarias. Asi para derivar las ecuaciones de amplitud dentro de la rama oscilatoria, utilizaremos la teoría de perturbaciones de tiempos múltiples por lo cual usaremos las siguientes expansiones

$$\vec{\xi} = \sum_{n=0} \eta^n \vec{\xi}_n \quad (3.16)$$

$$R_f = R_{fc}^{osc} + \sum_{n=1} \eta^n R_{fn} \quad (3.17)$$

$$\lambda = \omega_0 + \sum_{n=1} \eta^n p_n. \quad (3.18)$$

Donde  $R_{fc}^{osc} = R_s + 4\pi^2(\tau+1)$  y  $\eta$  es el parámetro de pequeñez. Para simplificar el cálculo, introduciremos  $t' = \lambda t$  por lo que

$$\frac{\partial}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial t'} = (\omega_0 + \eta p_1 + \eta^2 p_2 + \eta^3 p_3 + \dots) \frac{\partial}{\partial t'} \quad (3.19)$$

$$= \omega_0 \frac{\partial}{\partial t'} + \eta \frac{\partial}{\partial t_1} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \eta^3 \frac{\partial}{\partial t_3} + \eta^4 \frac{\partial}{\partial t_4} + \dots \quad (3.20)$$

Introduciendo estas expansiones en las ecuaciones de movimiento (2.30) se tiene una serie de ecuaciones de distinto orden en el parámetro de pequeñez  $\eta$ . Agrupando términos de primer orden con respecto al parámetro  $\eta$  se tiene el siguiente sistema

$$\nabla^2 \psi_1 - R_s \frac{\partial \eta_{s1}}{\partial x} + R_{fc}^{(osc)} \frac{\partial \eta_{f1}}{\partial x} = 0 \quad (3.21)$$

$$\omega_0 \frac{\partial \eta_{s1}}{\partial t'} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \tau \nabla^2 \eta_{s1} = 0 \quad (3.22)$$

$$\omega_0 \frac{\partial \eta_{f1}}{\partial t'} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \nabla^2 \eta_{f1} = 0 \quad (3.23)$$

Conviene introducir el operador

$$\hat{L}_0 = \begin{pmatrix} \nabla^2 & -R_s \partial_x & R_{fc}^{ss} \partial_x \\ \partial_x & -\tau \nabla^2 & 0 \\ \partial_x & 0 & -\nabla^2 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

y como considerando que  $\sigma$  tiende a infinito, la matriz  $M$  es de la forma

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

y si denotamos  $\omega_0 \hat{M} \partial_{t'} + \hat{L}_0 = \hat{\mathcal{L}}_0$ , entonces las ecuaciones (3.21), (3.22) y (3.23) se escriben en forma compacta:

$$\hat{\mathcal{L}}_0 \vec{\xi}_1 = \vec{0}. \quad (3.26)$$

La solución de la ecuación anterior esta dada por la combinación de dos ondas viajeras, una hacia la derecha y otra hacia la izquierda, y es obviamente, la solución que usamos para el análisis de estabilidad lineal:

$$\vec{\xi}_1 = Re \left[ \left( \begin{array}{c} iA_R \\ -\frac{\pi A_R}{i\omega_0 + \tau 2\pi^2} \\ -\frac{\pi A_R}{i\omega_0 + 2\pi^2} \end{array} \right) \exp(it' - i\pi x) + \left( \begin{array}{c} -iA_L \\ -\frac{\pi A_L}{i\omega_0 + \tau 2\pi^2} \\ -\frac{\pi A_L}{i\omega_0 + 2\pi^2} \end{array} \right) \exp(it' + i\pi x) \right] \sin(\pi z) \quad (3.27)$$

aunque aquí ya se escribieron los valores de los coeficientes  $B_R$ ,  $C_R$ ,  $B_L$ , y  $C_L$  en terminos de las amplitudes  $A_R$  y  $A_L$ , y como  $\sigma$  se considera infinita, entonces  $q = \pi$ . Agrupando términos de orden 2 en el parámetro  $\eta$  se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\hat{\mathcal{L}}_0 \vec{\xi}_2 = \vec{F}_2(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1) = \left( \begin{array}{c} -R_1 \frac{\partial \eta_{f1}}{\partial x} \\ -p_1 \frac{\partial \eta_{s1}}{\partial t'} + J(\psi_1, \eta_{s1}) \\ -p_1 \frac{\partial \eta_{f1}}{\partial t'} + J(\psi_1, \eta_{f1}) \end{array} \right). \quad (3.28)$$

Recordemos que  $\hat{\mathcal{L}}_0 = \omega_0 \hat{M} \partial_{t'} + \hat{L}_0$ . Debemos resolver la ecuación (3.28), esto es, debemos encontrar  $\vec{\xi}_2$ , en cierta forma, el operador  $\hat{\mathcal{L}}_0$  debe invertirse. El teorema de Stakgold-Fredholm [18] que establece que “ $\hat{\mathcal{L}}_0 \vec{\xi} = \vec{F}$  tiene solución si y solo si el vector  $\vec{\xi}^\dagger$  solución de la ecuación adjunta  $\hat{\mathcal{L}}_0^\dagger \vec{\xi}^\dagger = 0$ , es ortogonal a  $\vec{F}$ , es decir si  $(\vec{F}, \vec{\xi}^\dagger) = 0$ ”. Donde entenderemos que  $(\vec{a}, \vec{b})$  (donde  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son vectores n-dimensionales) es el producto escalar definido como

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \int \sum_{j=0}^n a_j b_j dx_1 \dots dx_n.$$

$\hat{\mathcal{L}}_0^\dagger$  es el operador adjunto o dual de  $\hat{\mathcal{L}}_0$ . El operador  $\hat{\mathcal{L}}_0$  no es Hermitiano (o autoadjunto), así que la integrabilidad de las ecuaciones a segundo orden involucra la solución de la ecuación adjunta  $\hat{\mathcal{L}}_0^\dagger \vec{\xi}^\dagger = 0$ , la cual es explícitamente

$$\hat{\mathcal{L}}_0^\dagger \vec{\xi}^\dagger = \left( \begin{array}{ccc} \nabla^2 & -\partial_x & -\partial_x \\ R_s \partial_x & -\tau \nabla^2 - \omega \partial_{t'} & 0 \\ -R_{fc}^{ss} \partial_x & 0 & -\nabla^2 - \omega \partial_{t'} \end{array} \right) \vec{\xi}^\dagger = \vec{0}, \quad (3.29)$$

y la solución de la ecuación dual  $\hat{\mathcal{L}}_0^\dagger \vec{\xi}^\dagger = 0$

$$\vec{\xi}^\dagger = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} iA_R^\dagger \\ B_R^\dagger \\ C_R^\dagger \end{pmatrix} \exp(it' - i\pi x) + \begin{pmatrix} -iA_L^\dagger \\ B_L^\dagger \\ C_L^\dagger \end{pmatrix} \exp(it' + iqx) \right] \sin(\pi z) \quad (3.30)$$

donde los coeficientes  $B_R^\dagger$ ,  $C_R^\dagger$ ,  $B_L^\dagger$ , y  $C_L^\dagger$  son

$$\begin{aligned} B_R^\dagger &= -\frac{\pi R_S A_R^\dagger}{-\omega_0 i + \tau 2\pi^2} \\ C_R^\dagger &= \frac{\pi R_{fc}^{(osc)} A_R^\dagger}{-\omega_0 i + 2\pi^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

con expresiones casi idénticas para  $B_L^\dagger$ , y  $C_L^\dagger$ , solo hay que cambiar el subíndice  $R$  por  $L$ . Recuerdese que con  $\sigma$  infinita  $k^2 = \pi^2 + q^2 = 2\pi^2$ . Sustituyendo (3.27) en la ecuación (3.28) se obtiene explícitamente  $\vec{F}_2$ , y podemos calcular en producto

$$(\vec{F}_2, \vec{\xi}^\dagger) = \int \int \int \{(\vec{F}_2)_1^*(\vec{\xi}_1^\dagger) + (\vec{F}_2)_2^*(\vec{\xi}_2^\dagger) + (\vec{F}_2)_3^*(\vec{\xi}_3^\dagger)\} dx dz dt. \quad (3.32)$$

Al hacer el cálculo anterior es importante tener en cuenta la ortogonalidad del conjunto de funciones  $\{\sin(m\pi z)_n\}$ , así como de los conjuntos  $\{\exp(i\pi n x)\}$  y  $\{\exp(it'm)\}$  se tiene que para que  $(\vec{F}_2, \vec{\xi}^\dagger) = 0$  se cumpla, se requiere que  $p_1$  y  $R_1$  de (3.28) sean ambos ceros. Y la solución de  $\hat{\mathcal{L}}_0 \vec{\xi}_2 = F_2(\xi_1, \xi_1)$ , debe tener la forma siguiente

$$\vec{\xi}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \exp(2it') \sin(\pi z) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ B_2^* \\ C_2^* \end{pmatrix} \exp(-2it') \sin(\pi z) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{B}_2 \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix} \sin(\pi z) \quad (3.33)$$

Para encontrar los coeficientes se sustituye el vector anterior  $\vec{\xi}_2$  en  $\hat{\mathcal{L}}_0 \vec{\xi}_2 = \vec{F}_2$  obteniéndose

$$B_2 = -\frac{\pi^3 A_R A_L}{2(i\omega_0 + 2\pi^2 \tau)^2} \quad C_2 = -\frac{\pi^3 A_R A_L}{2(i\omega_0 + 2\pi^2 \tau)^2}$$

$$\tilde{B}_2 = -\frac{\pi^3 (|A_R|^2 + |A_L|^2)}{2(\omega_0^2 + 4\pi^4 \tau^2)} \quad \tilde{C}_2 = -\frac{\pi^3 (|A_R|^2 + |A_L|^2)}{2(\omega_0^2 + 4\pi^4 \tau^2)}$$

Con estos coeficientes, se tiene completa la solución a segundo orden. A tercer orden, la ecuación a resolver es  $\hat{\mathcal{L}}_0 \vec{\xi}_3 = F_3$ , es decir

$$\hat{\mathcal{L}}_0 \vec{\xi}_3 = \vec{F}_3(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1) = \begin{pmatrix} -R_2 \frac{\partial n_{f1}}{\partial x} \\ -p_2 \frac{\partial n_{s1}}{\partial t'} + J(\psi_1, n_{s2}) \\ -p_2 \frac{\partial n_{f1}}{\partial t'} + J(\psi_1, n_{f2}) \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Para obtener las ecuaciones de amplitud, recordamos que

$$\frac{\partial}{\partial t'} = (\omega_0 + \eta^2 p_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots,$$

donde hemos ya tenido en cuenta que  $p_1 = 0$ .  $t_2$  es un tiempo lento, y asumimos que a tercer orden,  $A_R = A_R(t_2)$  y  $A_L = A_L(t_2)$ . La condición de integrabilidad a orden 3:  $(\vec{F}_3, \vec{\xi}^\dagger) = 0$  nos conduce, después de un cálculo directo pero tedioso a la expresión

$$\begin{aligned} \left( \frac{R_{fcf}}{g} - \frac{R_{sg}}{f} \right) \frac{\partial A_R}{\partial t_2} &= R_2 f A_R + \frac{\pi^4}{4} A_R |A_L|^2 \left( \frac{R_{Sg}}{f^2} - \frac{R_{fcf}}{g^2} \right) \\ &+ \frac{\pi^4}{4} A_R (|A_R|^2 + |A_L|^2) \left( -\frac{R_{fcf}}{|g|^2} + \frac{R_{Sg}}{|f|^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde  $f = i\omega + 2\tau\pi^2$ ,  $g = i\omega + 2\pi^2$ . Se tiene también una ecuación idéntica a esta solo que intercambiando los subíndices  $R$  y  $L$ . Recordamos que  $A_R$

depende de  $t_2$ , pero no de  $t_0$ , entonces  $\eta^2 \partial / \partial t_2$  se reemplaza por  $\partial / \partial t$ . A este orden tres, también se tiene que  $R_f = R_{fc} + \eta^2 R_2$ . Definiendo la distancia relativa a  $R_{fc}$  como  $\epsilon = (R_f - R_{fc}) / R_{fc}$ , y reemplazando  $\eta A_R$  por  $A_R$  y  $\eta A_L$  por  $A_L$  (es decir, las amplitudes se consideran pequeñas), con todo esto, si multiplicamos la ecuación anterior (3.35) por  $\eta^3$  (y la ecuación gemela de esta, que se obtiene intercambiando los subíndices  $R$  y  $L$ ), se obtienen ecuaciones de evolución para las amplitudes  $A_R$  y  $A_L$ , las así llamadas ecuaciones de amplitud

$$\tau_0^{osc} \dot{A}_R = \epsilon(1 + ic_0)A_R - (K|A_R|^2 + M|A_L|^2)A_R \quad (3.36)$$

$$\tau_0^{osc} \dot{A}_L = \epsilon(1 + ic_0)A_L - (K|A_L|^2 + M|A_R|^2)A_L \quad (3.37)$$

donde

$$\epsilon = (R_f - R_{fc}^{osc}) / R_{fc}^{osc}$$

$$\tau_0^{osc} = \frac{4}{R_{fc}^{osc}}$$

$$c_0 = -\frac{2\pi^2 \tau}{\omega_0}$$

$$K = \frac{i\pi^4}{2\omega_0 R_{fc}^{osc}}$$

$$M = \frac{2\pi^6(1 + \tau)(\omega_0^2 + 4\pi^4\tau)}{R_{fc}^{osc}(\omega_0^2 + 4\pi^4)(\omega_0^2 + 4\pi^4\tau^2)} - \frac{i\pi^4(\omega_0^4 - 16\pi^8\tau^2)}{R_{fc}^{osc}\omega_0(\omega_0^2 + 4\pi^4)(\omega_0^2 + 4\pi^4\tau^2)}$$

Estas son las ecuaciones de amplitud para la rama oscilatoria.

Nótese que la parte real del coeficiente  $K$  se anula a lo largo de la rama oscilatoria, y puede verificarse que esto ocurre para todo valor de  $\sigma$  y no sólo en el límite en que  $\sigma^{-1} = 0$ . La parte real de  $M$  es siempre positiva.

Podemos escribir  $A_R$  y  $A_L$  en su forma polar  $A_R = R \exp(i\phi_R)$  y  $A_L = L \exp(i\phi_L)$ , y sustituirlas en (3.36) y (3.37), y después de separar las partes reales e imaginarias se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\tau_0^{osc} \dot{R} = \epsilon R - M_r L^2 R \quad (3.38)$$

$$\tau_0^{osc} \dot{L} = \epsilon L - M_r R^2 L \quad (3.39)$$

$$\tau_0^{osc} \dot{\phi}_R = \epsilon c_0 - K_i R^2 - M_i L^2 \quad (3.40)$$

$$\tau_0^{osc} \dot{\phi}_L = \epsilon c_0 - K_i L^2 - M_i R^2 \quad (3.41)$$

Nos interesamos en el comportamiento de las magnitudes de las amplitudes  $A_R$  y  $A_L$ , en particular en sus puntos fijos. Las ecuaciones (3.38) y (3.39) tiene dos puntos fijos, a saber:  $(R, L) = (0, 0)$ , el cual representa el estado conductivo. En el caso  $\epsilon > 0$ , cuando las amplitudes  $A_R = A_L$ , se tienen ondas estacionarias, en este caso el punto fijo es  $(R, L) = (\sqrt{\frac{\epsilon}{M_r}}, \sqrt{\frac{\epsilon}{M_r}})$ , que tiene sentido si  $M_r > 0$ , el cual es nuestro caso. Si  $R = 0$  y  $L \neq 0$  se tienen ondas viajeras, viajando a la izquierda. Si  $L = 0$  y  $R \neq 0$  se tienen ondas viajeras, viajando a la derecha. Para este último caso, tenemos  $\tau_0 \dot{R} = \epsilon R$ , por lo cual no hay puntos fijos no-triviales para ondas viajeras a la derecha (lo mismo sería para las viajeras a la izquierda). Si  $\epsilon = 0$ ,  $R(t)$  permanece constante, y sólo en ese caso hay ondas viajeras. Así las ondas viajeras sólo existen en  $\epsilon = 0$ , es decir, sólo existen exactamente sobre la rama oscilatoria, lo cual no es lo observado por Predtechensky. A orden tres, la teoría de perturbaciones da una predicción incorrecta sobre las ondas viajeras. Para determinar la estabilidad de las ondas viajeras a la derecha (o a la izquierda), debemos considerar la ecuación de amplitud de tal onda hasta quinto orden, digamos de la que viajan a la derecha ( $A_R \neq 0$  y  $A_L = 0$ )



$$\tau_0 \dot{A}_R = \epsilon(1 + ic_0)A_R - (K|A_R|^2 + N|A_R|^4)A_R \quad (3.42)$$

Así que debemos calcular el coeficiente  $N$  de la ecuación anterior. Si escribimos  $A_R$  en forma polar, la ecuación para la magnitud de la amplitud  $R$ , será  $\tau_0 \dot{R} = \epsilon R - N_r R^4$ , y existirán los puntos fijos  $R^2 = \sqrt{\epsilon/N_r}$  arriba del umbral  $R_{fc}^{(osc)}$  con tal de que la parte real de  $N$  sea positiva. Para hacer este cálculo para ondas viajeras a la derecha, bastará considerar  $A_R \neq 0$  y hacer  $A_L = 0$ . Y deberemos calcular explícitamente  $\vec{\xi}_3$ , para poder calcular  $\vec{F}_4(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3)$  y con este vector, calcular el campo vectorial  $\vec{\xi}_4$ , que permitirá el cálculo de  $\vec{F}_5(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3, \vec{\xi}_4)$ , y finalmente  $(\vec{F}_5, \vec{\xi}_4) = 0$  nos conducirá a la ecuación (3.42). En el laborioso cálculo utilizamos el software de *Mathematica*. La ecuación de amplitud a quinto orden nos permite ver lo que la ecuación a tercer orden no podía predecir, el hecho de que no sólo hay ondas viajeras sobre la rama oscilatoria ( $\epsilon = 0$ ). Para  $\epsilon > 0$  el punto fijo correspondiente a ondas viajeras a la derecha es  $(R, L = 0) = ([\epsilon/N_r]^{1/4}, 0)$ , para las ondas viajeras a la izquierda es  $(R = 0, L) = (0, [\epsilon/N_r]^{1/4})$ . Así para ambos casos, la amplitud se incrementa como  $\epsilon^{1/4}$ , pero nunca como  $\epsilon^{1/2}$  arriba de  $R_{fc}^{osc}$ . El coeficiente  $N = N_r + iN_i$  es

$$N_r = \frac{(1 - \tau)\pi^8}{384(4\pi^4 + \omega^2)^2 G(\tau, \omega)} (11600\pi^8 P_0(\tau) + 4\pi^4 P_2(\tau)\omega^2 + 125P_4(\tau)\omega^4)$$

$$N_i = -\frac{\pi^{10}(1 - \tau)}{192\omega(4\pi^4 + \omega^2)^2 G(\tau, \omega)} (80\pi^8 Q_0(\tau) + 4\pi^4 Q_2(\tau)\omega^2 + Q_4(\tau)\omega^4)43$$

donde

$$\begin{aligned}
P_0(\tau) &= \tau^2(1 + \tau) \\
P_2(\tau) &= 149 + 197\tau + 197\tau^2 + 149\tau^3 \\
P_4(\tau) &= 125(1 + \tau) \\
Q_0(\tau) &= \tau^2(144 + 133\tau + 144\tau^2) \\
Q_2(\tau) &= 144 + 137\tau + 936\tau^2 + 137\tau^3 + 144\tau^4 \\
Q_4(\tau) &= 144 + 113\tau + 144\tau^2
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Como puede verse de (3.43), la parte real de  $N$  es siempre positiva, lo que garantiza una bifurcación hacia adelante de las ondas viajeras a la derecha. Para las que viajan a la izquierda se tiene un resultado idéntico. El diagrama de bifurcación correspondiente se muestra en la figura 3.3.

### 3.3. Rama Estacionaria

Como hemos notado de la sección anterior, las ecuaciones de amplitud son modelos matemáticos que describen pequeñas variaciones temporales de las variables originales que caracterizan cualquier sistema cerca de los valores críticos. En esta sección bosquejaremos la derivación de la ecuación de amplitud cerca del umbral de la inestabilidad estacionaria. Así desarrollaremos los campos  $(\psi, n_s, n_f)$  el número de Rayleigh  $R_f$  (que es el que se varía en el experimento) en términos del parámetro de pequeñez  $\eta$  de la siguiente forma

$$R_f = R_{fc}^{ss} + \eta R_1^{ss} + \eta^2 R_2^{ss} + \eta^3 R_3^{ss} + \dots, \tag{3.45}$$

$$\vec{\xi} = \eta \vec{\xi}_2 + \eta^3 \vec{\xi}_3 + \dots, \tag{3.46}$$

y basados en la experiencia de la sección anterior, reemplazamos  $\partial_t$  por  $\eta^2 \partial_T$ , además supondremos que la amplitud depende solo del tiempo lento  $A = A(T)$ . De sustituir las expansiones en las ecuaciones de movimiento

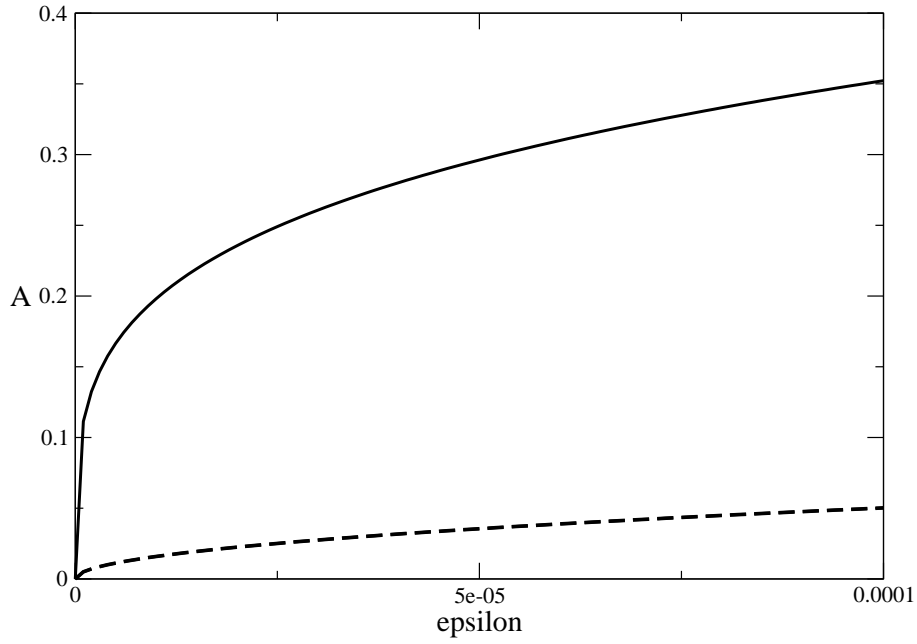


Figura 3.3: Diagrama de bifurcación de las ondas viajeras “OV” (línea continua) y de las ondas estacionarias “OE” (línea punteada), el diagrama se obtuvo para  $\tau = 0,63$  con  $R_S = 100.0 > R_s^{c2}$  donde  $R_s^{c2}$  es el punto de codimensión-2. Ambos tipos de ondas son estables para  $\epsilon > 0$ . Para  $\epsilon < 0$ , se tiene el estado conductivo. Dependiendo de la amplitud de la perturbación inicial, y que tan cerca se encuentre de la rama de “OV” ó “OE”, el sistema terminará presentando uno u otro tipo de ondas.

encontramos una serie de problemas lineales a diferentes ordenes en  $\eta$ . A orden  $\eta$  se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\mathcal{L}_0 \vec{\xi}_1 \equiv \begin{pmatrix} \nabla^2 & -R_s \partial_x & R_{fc}^{ss} \partial_x \\ \partial_x & -\tau \nabla^2 & 0 \\ \partial_x & 0 & -\nabla^2 \end{pmatrix} \vec{\xi}_1 = \vec{0}, \quad (3.47)$$

el cual tiene por solución

$$\vec{\xi}_1 = \frac{1}{2} \sin(\pi z) \begin{pmatrix} i(Ae^{-i\pi x} - A^*e^{i\pi x}) \\ -\frac{1}{2\pi\tau}(Ae^{-i\pi x} + A^*e^{i\pi x}) \\ -\frac{1}{2\pi}(Ae^{-i\pi x} + A^*e^{i\pi x}) \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

La ecuación a orden dos en  $\eta$  es

$$\mathcal{L}_0 \vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -R_1^{ss} \partial_x n_{f1} \\ J(\psi_1, n_{s1}) \\ J(\psi_1, n_{f1}) \end{pmatrix} \equiv \vec{F}_2(x, z). \quad (3.49)$$

Debido a que el operador  $\mathcal{L}_0$  no es Hermitiano (o autoadjunto), la integrabilidad de las ecuaciones a segundo orden involucra la solución de la ecuación adjunta  $\mathcal{L}_0^\dagger \vec{\xi}_1^\dagger = 0$ , la cual es

$$\mathcal{L}_0^\dagger \vec{\xi}_1^\dagger = \begin{pmatrix} \nabla^2 & -\partial_x & -\partial_x \\ R_s \partial_x & -\tau \nabla^2 & 0 \\ -R_{fc}^{ss} \partial_x & 0 & -\nabla^2 \end{pmatrix} \vec{\xi}_1^\dagger = \vec{0}, \quad (3.50)$$

cuya solución es

$$\vec{\xi}_1^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -\frac{R_s}{2\pi\tau} \\ \frac{R_{fc}^{ss}}{2\pi} \end{pmatrix} A^\dagger \exp(-i\pi x) \sin \pi z + c.c. \quad (3.51)$$

la condición de integrabilidad  $(\vec{F}_2, \vec{\xi}_1^\dagger) = 0$  implica  $R_1^{ss} = 0$ , bajo esta condición la solución de la ecuación (3.49) es

$$\vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{|A|^2}{16\pi\tau^2} \\ -\frac{|A|^2}{16\pi} \end{pmatrix} \sin(2\pi x). \quad (3.52)$$

A orden  $\eta^3$  tenemos

$$\mathcal{L}_0 \vec{\xi}_3 = \begin{pmatrix} -R_2^{ss} \partial_x n_{f1} \\ -\partial_T n_{s1} + J(\psi_1, n_{s2}) + J(\psi_2, n_{s1}) \\ -\partial_T n_{f1} + J(\psi_1, n_{f2}) + J(\psi_2, n_{f1}) \end{pmatrix} \equiv \vec{F}_3(x, z). \quad (3.53)$$

Y de la condición de integrabilidad a este orden  $(\vec{F}_3, \vec{\xi}^\dagger) = 0$ , nos da la ecuación de amplitud

$$\tau_0 \frac{dA}{dt} = \epsilon A - g_3 A |A|^2, \quad (3.54)$$

donde  $\epsilon = (R_{fc} - R_{fc}^{ss})/R_{fc}^{ss}$  es la distancia relativa a la rama estacionaria

$$\begin{aligned} \tau_0 &= -\frac{1}{2\pi^2 R_{fc}^{ss}} \left( \frac{R_s}{\tau^2} - R_{fc}^{ss} \right) \\ g_3 &= -\frac{1}{16 R_{fc}^{ss}} \left( \frac{R_s}{\tau^3} - R_{fc}^{ss} \right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

La solución de esta ecuación diferencial nos da información sobre la dinámica de nuestro sistema en la rama estacionaria. Escribiremos  $A$  en su forma polar,  $A = \mathcal{A}e^{i\theta}$ , que sustituimos en la ecuación (3.54) y obtenemos

$$\tau_0 \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \epsilon \mathcal{A} - g_3 \mathcal{A} \mathcal{A}^2. \quad (3.56)$$

Y resulta que  $\theta = \text{constante}$ . Los puntos  $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$  que satisfacen  $d\mathcal{A}/dt = 0$ , son puntos fijos de la ecuación (3.56). Estos puntos fijos son:

$$\tilde{\mathcal{A}} = 0 \quad y \quad \tilde{\mathcal{A}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{g_3}} \quad (3.57)$$

Notemos que si introducimos el cambio de variable  $\mathcal{A}^2 = B(t)$  la ecuación (3.56) adquiere la forma  $dB/dt = aB + bB^2$ , es decir, toma la forma de una ecuación de Bernoulli, la cual tiene por solución:

$$\mathcal{A}^2 = B(t) = \frac{\epsilon B(0) e^{\left(\frac{2\epsilon t}{\tau_0}\right)}}{B(0) g_3 \left(e^{\left(\frac{2\epsilon t}{\tau_0}\right)} - 1\right) + \epsilon} \quad (3.58)$$

Para el punto fijo  $\tilde{\mathcal{A}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{g_3}}$ , tenemos dos casos: el primero se da cuando  $g_3 > 0$  y el otro se da cuando  $g_3 < 0$ .

**Caso I:**  $g_3 > 0$ .

En la región  $\epsilon < 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , se tiene  $B(t) \rightarrow 0$ . En cambio si  $\epsilon > 0$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , tenemos  $B(t) \rightarrow \epsilon/g_3$ .

Para determinar la estabilidad del punto fijo no trivial, analizaremos el comportamiento de una pequeña perturbación alrededor de tal punto  $\tilde{\mathcal{A}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{g_3}}$ , en la región  $\epsilon > 0$  (recuerde que estamos en el caso  $g_3 > 0$ ). Así, sustituyendo  $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} + \delta\mathcal{A}$ , en la ecuación (3.56) tenemos

$$\tau_0 \partial_t (\tilde{\mathcal{A}} + \delta\mathcal{A}) = \epsilon (\tilde{\mathcal{A}} + \mathcal{A}) - g_3 (\tilde{\mathcal{A}} + \delta\mathcal{A})^3$$

$$\tau_0 \partial_t (\tilde{\mathcal{A}} + \delta\mathcal{A}) = \epsilon \tilde{\mathcal{A}} + \epsilon \mathcal{A} - g_3 (\tilde{\mathcal{A}}^3 + \delta\mathcal{A}^3 + 3\tilde{\mathcal{A}}\delta\mathcal{A}^2 + 3\tilde{\mathcal{A}}^2\delta\mathcal{A}) \quad (3.59)$$

Como  $\tilde{\mathcal{A}}$  es punto fijo, y la perturbación  $\delta\mathcal{A}$  es pequeña despreciaremos los términos de orden mayor o igual a  $O(\delta\mathcal{A}^2)$ , entonces la ecuación (3.59) queda como

$$\tau_0 \partial_t (\delta\mathcal{A}) = \epsilon (\delta\mathcal{A}) - 3g_3 \tilde{\mathcal{A}}^2 (\delta\mathcal{A})$$

Sustituyendo  $\tilde{\mathcal{A}} = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{g_3}}$ , la ecuación anterior se convierte en

$$\tau_0 \partial_t \delta\mathcal{A} = -2\epsilon \delta\mathcal{A},$$

cuya solución es

$$\delta\mathcal{A} = (\delta A)_0 e^{-2(\epsilon/\tau_0)t} \quad (3.60)$$

Cuando  $t \rightarrow \infty$  la perturbación decrecerá, por lo cual  $\tilde{\mathcal{A}} = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{g_3}}$  es estable. Quisimos presentar este análisis para este caso, con el fin de ilustrar el procedimiento de análisis de estabilidad de puntos fijos, análisis que no hicimos para la rama oscilatoria, pero que es similar al hecho aquí.

Un análisis análogo nos dice que  $\tilde{\mathcal{A}} = 0$ , es estable para  $\epsilon < 0$  (las perturbaciones regresan al estado conductivo) e inestable para  $\epsilon > 0$ , de modo que, para  $\epsilon > 0$ , una pequeña perturbación aleja al sistema del reposo y lo lleva a un estado de movimiento convectivo con amplitud  $\sqrt{\frac{\epsilon}{g_3}}$ . Resumiendo, cuando  $g_3 > 0$  el sistema presenta una bifurcación supercrítica. El diagrama de bifurcación correspondiente se muestra en la figura 3.4.

#### Caso II. $g_3 < 0$

En este caso el punto fijo  $\tilde{\mathcal{A}} = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{g_3}}$  está definido sólo para  $\epsilon < 0$ , es decir debajo del umbral de la inestabilidad estacionaria, o equivalentemente cuando  $R_f < R_{fc}^{ss}$ , puede verificarse fácilmente que este punto fijo no trivial, es inestable, y que el punto fijo  $\tilde{\mathcal{A}} = 0$  es estable para  $\epsilon < 0$  e inestable para  $\epsilon > 0$ . Entonces se tiene una bifurcación subcrítica. El diagrama de bifurcación correspondiente se muestra en la figura 3.5.

El punto donde se da el cambio de una bifurcación supercrítica ( $g_3 > 0$ ) a una bifurcación subcrítica ( $g_3 < 0$ ) es conocido como punto tricrítico y se determina resolviendo  $g_3 = 0$  para  $R_s$

$$R_s^{tp} = \frac{4\pi^2\tau^3}{1 - \tau^2}.$$

Notemos que para  $R_s < R_s^{tp}$  la ecuación de amplitud (3.54) nos dice que al incrementar el valor de  $R_f$ , el movimiento convectivo iniciará cuando  $R_f$  alcance el valor de  $R_{fc}^{ss}$ . La amplitud de la función de corriente será  $A \sim \epsilon^{1/2}$ . Sin embargo, para  $R_s > R_s^{tp}$  la ecuación de amplitud a tercer orden (3.54)

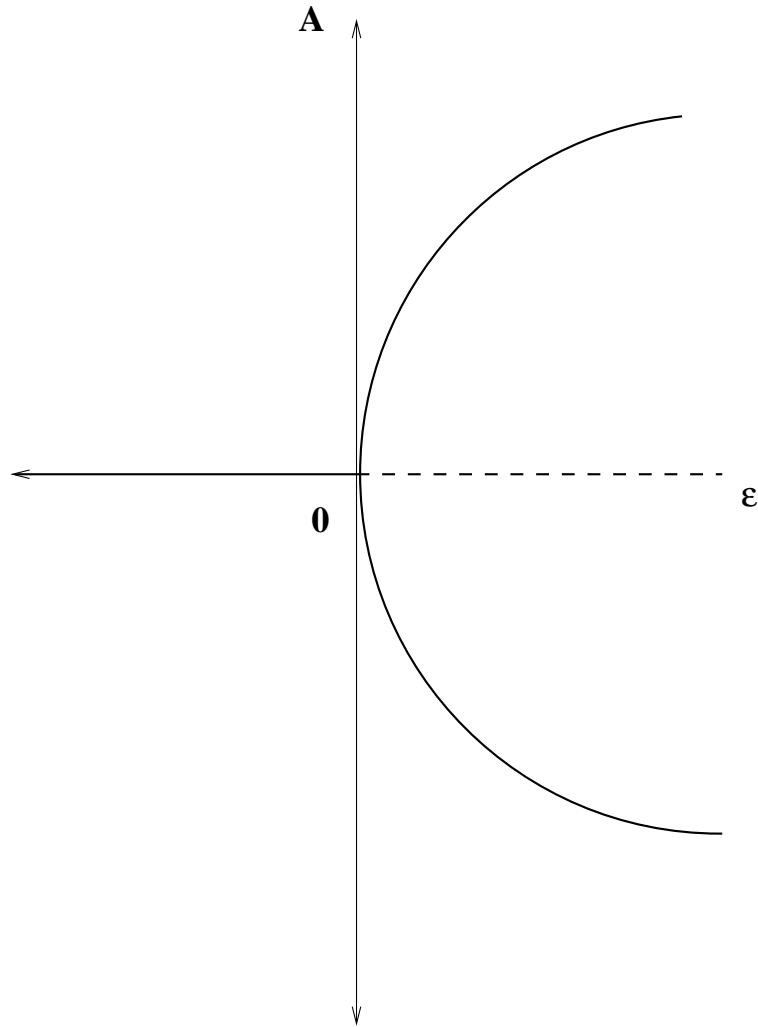


Figura 3.4: Diagrama de bifurcación supercrítica, para el caso  $g_3 > 0$ , se muestra la gráfica de los puntos fijos  $\tilde{\mathcal{A}}$  como función de  $\epsilon$ , para  $\epsilon > 0$ ,  $\tilde{\mathcal{A}} = \pm\sqrt{\frac{\epsilon}{g_3}}$  y para  $\epsilon > 0$ ,  $\tilde{\mathcal{A}}$ , la línea punteada representa la inestabilidad del punto fijo  $\tilde{\mathcal{A}} = 0$  para  $\epsilon > 0$ .



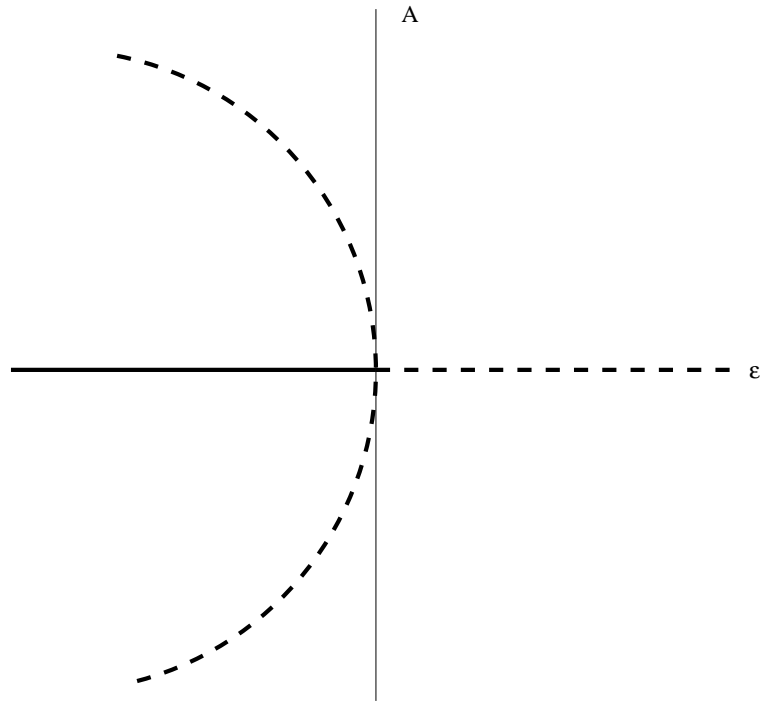


Figura 3.5: Diagrama de bifurcación subcrítica, para el caso  $g_3 < 0$ , se muestra la gráfica de los puntos fijos  $\tilde{\mathcal{A}}$  como función de  $\epsilon$ , las curvas punteadas representan la inestabilidad de los puntos fijos  $\tilde{\mathcal{A}} = \pm\sqrt{\frac{\epsilon}{g_3}}$  y  $\tilde{\mathcal{A}} = 0$  en las regiones  $\epsilon < 0$  y  $\epsilon > 0$  respectivamente. Para la región  $\epsilon < 0$  el punto fijo  $\tilde{\mathcal{A}} = 0$  es inestable y su estabilidad esta representada por una línea continua.

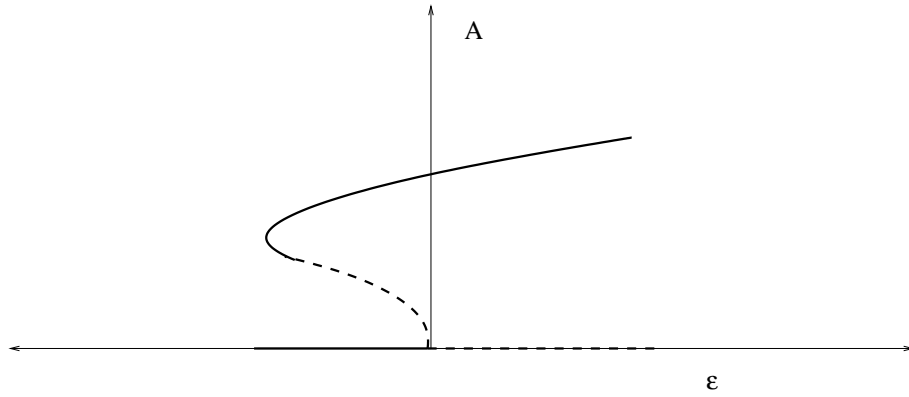


Figura 3.6: Gráfica de la amplitud como función de  $\epsilon$ , construida a partir de la ecuación de amplitud a quinto orden.

predice que cuando  $R_f$  alcanza el valor de  $R_{fc}$  (es decir para  $\epsilon > 0$ ) no hay una amplitud estable, ni siquiera  $\tilde{\mathcal{A}} = 0$  es estable, es decir, a tercer orden la ecuación de amplitud no puede predecir nada. Para corregir esta situación se requiere la inclusión de un término a quinto orden, el cual arroja la ecuación

$$\tau_0 \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \epsilon \mathcal{A} - g_3 \mathcal{A}^3 - g_5 \mathcal{A}^5, \quad (3.61)$$

El cálculo ya se ha realizado [2], y ya no lo presentaremos aquí, pero si expondremos la dinámica que se predice en la rama estacionaria. Debido a inclusión del coeficiente quíntico, la curva en la figura 3.5 se revierte, y la predicción a quinto orden nos da la figura 3.6 con una rama estable para  $\epsilon > 0$ . De (3.61) vemos que los puntos fijos satisfacen:

$$\epsilon - g_3 \mathcal{A}^2 - g_5 \mathcal{A}^4 = 0$$

De la expresión anterior tenemos que los puntos fijos son  $\tilde{\mathcal{A}} = 0$  y

$$\tilde{\mathcal{A}}^2 = -\frac{g_3}{2g_5} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{g_3}{g_5}\right)^2 + \frac{4\epsilon}{g_5}}. \quad (3.62)$$

En la figura 3.6 se presenta la gráfica de los puntos fijos. Lo que básicamente nos dice esta gráfica es que para  $R_s > R_s^{tc}$  existe un ciclo de histéresis, es decir que cuando se incrementa el valor de  $R_f$  la convección iniciará hasta que  $R_f$  tome el valor de  $R_{fc}^{ss}$ , para  $R_f > R_{fc}^{ss}$  (es decir  $\epsilon > 0$ ) la amplitud de la función de corriente saltará de cero a un valor finito igual a  $2\mathcal{A}^{tp}$  y continuará creciendo cuando  $R_f$  crezca. Si ahora disminuimos  $R_f$ , la convección no terminará cuando  $R_f$  tome el valor  $R_{fc}^{ss}$ , es decir, no termina en  $\epsilon = 0$ , el movimiento convectivo continuará hasta que  $\epsilon = \epsilon^{tp} < 0$ , donde la amplitud saltará de  $\mathcal{A}^{tp}$  a cero. El valor de  $\mathcal{A}^{tp}$  y  $\epsilon^{tp}$  están dados por:

$$\mathcal{A}^{tp} = \pm \sqrt{-\frac{g_3}{2g_5}}, \quad (3.63)$$

$$\epsilon^{tp} = \frac{R_f^{tp} - R_{fc}}{R_{fc}} = -\frac{g_3^2}{4g_5} \quad (3.64)$$

En el espacio de parámetros, la convección iniciará cuando al incrementar  $R_f$  desde cero,  $R_f$  “toque” la rama estacionaria  $R_{fc}^{ss}$ . Al disminuir  $R_f$ , la convección no terminará cuando  $R_f$  “toque” a  $R_{fc}^{ss}$  si no hasta que alcance la curva subcrítica, esto lo podemos ver en la figura 3.7. El valor explícito de  $g_5$  es

$$g_5 = \frac{1}{R_{fc}^{ss}} \left[ \frac{g_3}{8} + \frac{3}{640} \left( \frac{R_s}{\tau} - R_{fc}^{ss} \right) - \frac{11g_3^2}{120\pi^2} \right] \quad (3.65)$$

Como  $\epsilon = -g_3^2/4g_5 < 0$ ,  $g_5$  debe ser positivo, y en efecto lo es. En particular, en el punto tricrítico

$$g_5 = \frac{3(1 - \tau^2)}{640\tau^2}.$$

Así para  $R_s < R_s^{tp}$  la amplitud  $\mathcal{A} \sim \epsilon^{1/2}$  y para  $R_s > R_s^{tp}$ ,  $\mathcal{A} \sim \epsilon^{1/4}$ .

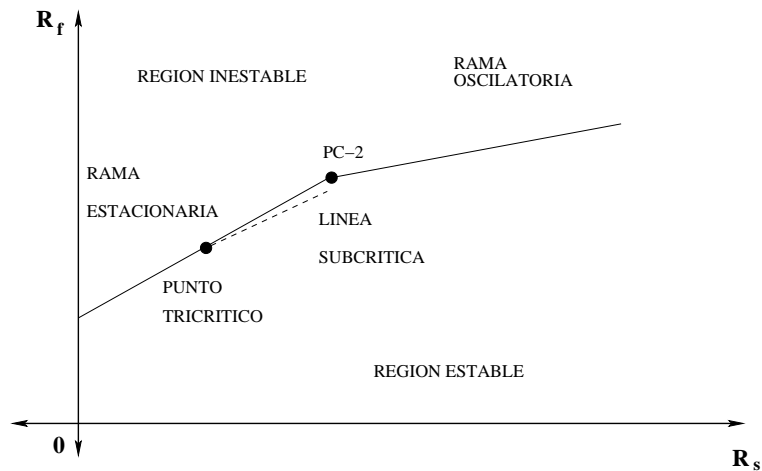


Figura 3.7: Para  $R_s > R_s^{tc}$ , si  $R_f$  se incrementa desde cero, el sistema permanece en su estado conductivo hasta que toca a la rama estacionaria y su amplitud crece como  $\epsilon^{1/4}$ , si  $R_f$  decrece, el sistema “brinca” del estado convectivo al conductivo cuando  $R_f$  toca la línea subcrítica. Para  $R_s < R_s^{tc}$ , no se presenta este fenómeno de histéresis y la amplitud es del orden  $\epsilon^{1/2}$

### 3.4. Punto de Codimensión-2

Como mencionamos anteriormente el punto donde las inestabilidades estacionarias y oscilatorias colapsan se llama punto de codimension-2. En la vecindad de este punto hay una competencia entre estas dos inestabilidades. Así cerca de dicho punto, los dos eigenvalores del problema lineal son cero y el estado conductivo se vuelve inestable en contra de los modos estacionario y oscilatorio. Esta sección se da por completez del trabajo, y pretendemos sólo exponer en términos generales, la dinámica que se presenta en la vecindad de este punto, bosquejando muy brevemente la derivación de la correspondiente ecuación de amplitud, la que sólo la escribiremos. Los detalles formales de los puntos de codimensión-2 se dan en libros de texto avanzados, por ejemplo en el libro de J. Guckenheimer y P. Holmes [11], o bien en el artículo de P.H Couillet y E.A. Spiegel [7], algunas de las aplicaciones en formación de patrones en diversos sistemas no-lineales se encuentra en “Pattern Formation

Outside of Equilibrium ” [8]. Una presentación matemática se encuentra en el trabajo de G. Dangelmayr, E. Knobloch “The Takens-Bogdanov bifurcation with  $O(2)$ -symmetry ”

En la vecindad de este punto la dinámica es descrita por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{A} &= B \\ \dot{B} &= \mu_1 A + \mu_2 B + f(A, B),\end{aligned}\tag{3.66}$$

donde  $f(A, B)$  es una función no lineal de  $A$  y  $\dot{A} = B$ . Si consideramos el caso  $\sigma^{-1} \rightarrow 0$  la relación de dispersión (2.33) adquiere la forma

$$\lambda^2 + \left(2\pi^2(1 + \tau) + \frac{R_s - R_f}{2}\right) \lambda + 4\pi^4\tau + \pi^2(R_s - \tau R_f) = 0.$$

La cual es un polinomio cuadrático  $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ , donde  $a_1 = 2\pi^2(1 + \tau) + \frac{1}{2}(R_s - R_f)$  y  $a_0 = 4\pi^4\tau + \pi^2(R_s - \tau R_f)$ .

Como vimos en el análisis de estabilidad lineal, se tiene una inestabilidad oscilatoria cuando  $a_1 = 0$  y  $a_0 > 0$ , pero  $a_1 = 0 \Leftrightarrow R_{fc}^{osc} = R_s + 4\pi^2(1 + \tau)$ . Y se tiene una inestabilidad estacionaria cuando  $a_0 = 0$  y  $a_1 > 0$ , Esto ocurre en  $R_{fc}^{ss} = \frac{R_s}{\tau} + 4\pi^2$ . Entonces el punto “bi-crítico” se da para  $a_1 = a_0 = 0$  y sus coordenadas en el espacio de parámetros son:

$$R_s^{c2} = \frac{4\pi^2\tau}{1 - \tau} \quad y \quad R_f^{c2} = \frac{4\pi^2}{1 - \tau}$$

y el polinomio  $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ , tiene una raíz doble en  $\lambda = 0$ , y lo podemos escribir como

$$\lambda^2 - \mu_2\lambda - \mu_1 = \lambda^2 + \frac{1}{2}(R_f^{osc} - R_f)\lambda + \pi^2\tau(R_{fc}^{ss} - R_f) = 0$$

Si escribimos

$$\frac{1}{2}\vec{\xi} = \begin{pmatrix} A(t) \\ A_s(t) \\ A_f(t) \end{pmatrix} \exp(-i\pi x) \sin \pi z + c.c.,$$

Donde  $A_s$  y  $A_f$  son funciones de  $A(t)$ . De acuerdo a [10] y [11],  $A(t)$  debe satisfacer la ecuación diferencial  $\ddot{A} - \mu_2\dot{A} - \mu_1A + f(A, \dot{A}) = 0$  donde  $f$  tiene la forma

$$f = f_1A|A|^2 + f_2B|A|^2 + f_3A^2B^* + f_4A|B|^2 + f_5A^*B^2 + f_6B|B|^2 + \dots \quad (3.67)$$

con  $B = \dot{A}$ . También se expande  $\vec{\xi}$  en serie de potencias de  $A$  y  $B$

$$\vec{\xi} = \frac{1}{2} \left( \vec{\xi}_1 A + \vec{\phi}_1 B + \sum_{i,j,k,l} \vec{\xi}_{ijkl} A^i B^j A^{*k} B^{*l} + c.c. \right). \quad (3.68)$$

Insertando las ecuaciones (3.67) y (3.68) en las ecuaciones de movimiento (2.30) e igualando las diferentes potencias de las amplitudes se obtiene una secuencia de problemas que pueden ser resueltos orden por orden. A primer orden  $\vec{\xi}_1$  continua siendo como (3.48) y  $\vec{\phi}_1$  esta dado por

$$\vec{\phi}_1 = \frac{1}{4\pi^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau^2} \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-i\pi x) \sin \pi z, \quad (3.69)$$

Los coeficientes de  $f(A, B)$  aparecen en las ecuaciones de tercer orden, y estos son

$$f_1 = \frac{\pi^4}{4} \quad (3.70)$$

$$f_2 = f_3 = -\frac{\pi^2}{8} \frac{1 + \tau}{\tau} \quad (3.71)$$

$$f_4 = f_5 = -\frac{1 + \tau^2}{16\tau^2} \quad (3.72)$$

$$f_6 = 0 \quad (3.73)$$

El comportamiento de la ecuación (3.66) en la vecindad del punto de codimensión-2 ( $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ) puede ser clasificado en el plano  $(\mu_1, \mu_2)$  como se puede ver en la figura 3.8. En  $\mu_2 = 0$  se tiene una bifurcación Hopf, en  $\mu_1 = 0$  se tiene una bifurcación estacionaria. Los cuadrantes I ( $\mu_1, \mu_2 > 0$ ) y IV ( $\mu_1 > 0, \mu_2 < 0$ ) tienen un punto fijo inestable el cual corresponde al estado conductivo. En el cuadrante III ( $\mu_1, \mu_2 < 0$ ) el estado conductivo es estable y los puntos fijos ( $B = 0, |A|^2 = -\mu_1/f_1$ ) son inestables. Cuando  $\mu_1 < 0$ , la estabilidad de  $(B, A) = (0, 0)$  depende del valor de  $\mu_2$ . Comenzando con el cuadrante III, mientras  $\mu_2$  pasa através de cero, se encuentra una bifurcación supercrítica Hopf y una convección oscilatoria es posible. Mientras  $\mu_2$  se incrementa, el tamaño del ciclo límite crece hasta que alcanza el punto fijo inestable en el valor  $\mu_{2c}$  donde desaparece. Este valor de  $\mu_{2c}$  es (ver referencias [10] y [11])

$$\mu_{2c} = -\frac{f_2\mu_1}{5f_1} = -\frac{1 + \tau}{10\tau\pi^2}\mu_1 \equiv -\alpha(\tau)\mu_1. \quad (3.74)$$

En el plano  $(R_s, R_f)$  la ecuación anterior corresponde a una línea  $L_c$  localizada por arriba de  $R_{fc}^{osc}$ , pero por abajo de  $R_{fc}^{ss}$  para  $R_s > R_s^{c2}$ . Específicamente, la ecuación  $L_c$  esta dada por

$$R_f = R_s \frac{1 + 2\alpha\pi^2}{1 + 2\alpha\pi^2\tau} + \frac{4\pi^2(1 + \tau + 2\alpha\pi^2\tau)}{1 + 2\alpha\pi^2\tau} \quad (3.75)$$

Antes de terminar este capítulo, quisieramos comentar, que en el caso termosalino y en otros sistemas como el de mezclas binarias, el punto de

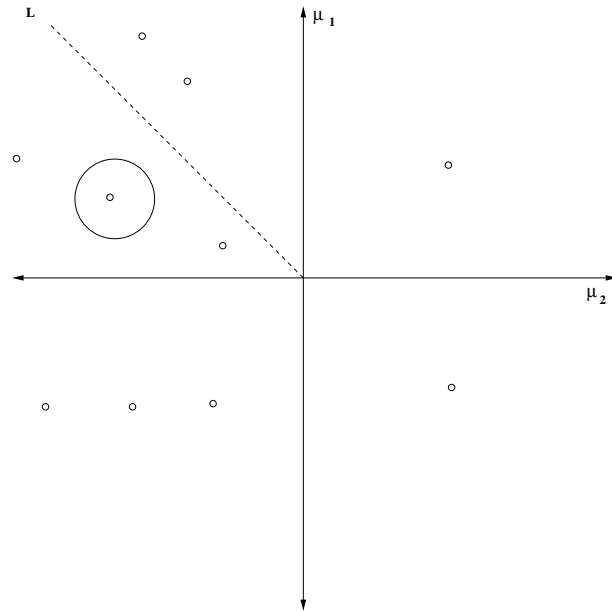


Figura 3.8: Comportamiento esquemático de la ecuación de amplitud alrededor del punto de codimensión-2, el espacio  $(\mu_1, \mu_2)$  es dividido en cuatro regiones con diferentes comportamientos característicos. Los puntos rellenos representan puntos fijos estable, y puntos abiertos representan puntos fijos inestables, los otros puntos representan puntos fijos inestables. Una bifurcación Hopf esta localizada en  $\mu_2 = 0$  y una bifurcación estacionaria en  $\mu_1 = 0$ . Los cuadrantes I ( $\mu_1, \mu_2 > 0$ ) y IV ( $\mu_1 > 0, \mu_2 < 0$ ) tienen un punto fijo inestable el cual corresponde al estado conductivo. En el cuadrante III ( $\mu_1, \mu_2 < 0$ ) el estado conductivo es estable y los puntos fijos inestables. El ciclo límite en el cuadrante II desaparece en la línea L donde el periodo de oscilación diverge.



codimensión-2 y el tricrítico están demasiado juntos en el espacio de parámetros (al menos a temperatura ambiente), y prácticamente son indistinguibles. Aquí, como el número de Lewis  $0 < \tau < 1$ , la distancia de separación entre estos puntos puede ser suficientemente grande como para poderse explorar experimental y numericamente la dinámica en la vecindad del punto de codimensión dos. La distancia entre estos dos puntos esta dada por

$$R_s^{c2} - R_s^{tc} = \frac{4\pi^2\tau^2}{1 - \tau^2} \quad (3.76)$$

# Capítulo 4

## Modelo Tipo Lorenz

Como hemos visto en el capítulo tres, al aplicar la teoría de tiempos múltiples a las ecuaciones de movimiento, obtenemos las ecuaciones de amplitud las cuales describen el comportamiento del sistema en una vecindad del umbral de las inestabilidades estacionaria, oscilatoria, y del punto de codimensión-2. Pero si estamos interesados en el comportamiento del sistema no sólo en una vecindad de las ramas de bifurcación, es decir, si deseamos estudiar la dinámica del sistema en una región mas grande del espacio de parámetros  $(R_s, R_f)$ , debemos buscar otras alternativas. Uno puede escribir un código que resuelva las ecuaciones de movimiento (2.30), y esto puede ser costoso en varios sentidos, y cómo hemos mencionado, con poca dirección de dónde buscar en el espacio de parámetros. O bien, uno puede construir modelos, más simples, y que pueden ser guía para determinar valores de los parámetros donde se puede encontrar dinámica interesante del sistema, y ya más alejados del umbral de las inestabilidades. El método para la construcción de estos modelos es, en esencia una truncación de una serie en funciones ortogonales en la que se expande la solución, y se encuentran ecuaciones diferenciales para las amplitudes de los diferentes modos. Estos métodos se asemejan a los métodos espectrales (ME) usados para resolver ecuaciones diferenciales parciales [5]. Sin embargo, a diferencia de los ME, aquí se eligen sólo los modos que se

generan por la aplicación de la teoría de perturbaciones de tiempos múltiples usada en el capítulo anterior. Consecuentemente, las ecuaciones modales (las de los coeficientes de las expansiones) poseen un límite asintótico bien definido al aproximarse al umbral de las diversas inestabilidades, que describe correctamente la dinámica ahí. Lo que se ha encontrado en el uso de estos modelos, es que si se conservan los modos que determinan el comportamiento en el umbral de la bifurcaciones que un sistema presenta, entonces el modelo provee resultados cualitativamente buenos (al compararse con experimentos a resultados numéricos completos de las ecuaciones de movimiento) aun para valores de los parámetros alejados de sus valores donde hay bifurcaciones. Estos modelos se conocen como *modelos espectrales de bajo orden* o *modelos tipo-Lorenz*. Este último nombre proviene de la popularidad del modelo de Lorenz con el que frecuentemente se discute el fenómeno de caos en los libros de texto [19] de dinámica no-lineal. También se les llega a llamar *modelos minimales* porque son los mejores sistemas (de bajo orden) que capturan el comportamiento local de la dinámica del sistema cerca del los umbrales.

Estos modelos tipo-Lorenz han sido aplicados a problemas de convección en mezcla binarias [13], [9], así como a algunos problemas de convección doble difusiva termosalina [12]. Por ser relativamente sencillos de manejar, también han sido usados en el estudio de los fenómenos de transporte [4].

En el presente capítulo construiremos, hasta donde sabemos, por vez primera, el modelo espectral de bajo orden o modelo tipo-Lorenz para el sistema de convección isotérmica doble difusiva en una geometría Hele-Shaw. Además analizaremos de manera general algunas propiedades de este modelo, que esperamos usar en el futuro para estudiar en transporte de partículas pasivas en este sistema.

## 4.1. Construcción del Modelo

Para construir el modelo, utilizamos el método espectral de bajo orden que consiste en expandir los campos  $\psi$ ,  $n_s$  y  $n_f$  en términos de funciones ortogonales en  $x$  y  $z$  con coeficientes dependientes de  $t$ . Dadas las condiciones de frontera que tenemos, las funciones ortogonales que usamos son polinomios trigonométricos. Sustituyendo las expansiones en las ecuaciones de movimiento del sistema se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias para los coeficientes de la expansión. Los modos generados por la teoría de perturbaciones de tiempos múltiples a lo largo de la rama oscilatoria se listan en la tabla 4.1. Los modos generados cerca de la rama estacionaria son los mismo que aparecen en esta lista, excepto que los modos  $\sin(2\pi z)$  y  $\sin(4\pi z)$  que en la función de corriente no aparecen. De los modos de la tabla 4.1, elegimos los que contribuyen a las ecuaciones de amplitud a quinto orden, es decir, aquellos que contribuyen a la condición de integrabilidad  $(\vec{F}_5(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3, \vec{\xi}_4), \vec{\xi}^\dagger) = 0$ . Este es el procedimiento usado para derivar el celebratedo modelo de Lorenz, pero en los libros de texto, no explican cómo se eligen los modos retenidos, que en el caso del modelo de Lorenz, son otros a los expuestos aquí. Bajo estas consideraciones, las expansiones de  $\psi$ ,  $n_s$  y  $n_f$  para construir el modelo serán

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$\psi$	$e^{iqx} \sin(\pi z)$	—	$e^{iqx} \sin(3\pi z)$	$e^{2iqx} \sin(2\pi z), e^{2iqx} \sin(4\pi z), \sin(2\pi z), \sin(4\pi z)$
$n_s$	$e^{iqx} \sin(\pi z)$	$\sin(2\pi z)$	$e^{iqx} \sin(3\pi z)$	$e^{2iqx} \sin(2\pi z), e^{2iqx} \sin(4\pi z), \sin(4\pi z)$
$n_f$	$e^{iqx} \sin(\pi z)$	$\sin(2\pi z)$	$e^{iqx} \sin(3\pi z)$	$e^{2iqx} \sin(2\pi z), e^{2iqx} \sin(4\pi z), \sin(4\pi z)$

Tabla 4.1: Modos generados por teoría de perturbaciones a cuarto orden en la amplitud.

$$\psi(x, z, t) = \frac{i}{2}(a_{11}e^{-iqx} - a_{11}^*e^{iqx}) \text{sen}(\pi z) + \frac{i}{2}(a_{13}e^{-iqx} - a_{13}^*e^{iqx}) \text{sen}(3\pi z) + a_{02} \text{sen}(2\pi z) \quad (4.1)$$

$$n_s(x, z, t) = \frac{1}{2}(b_{11}e^{-iqx} - b_{11}^*e^{iqx}) \text{sen}(\pi z) + \frac{1}{2}(b_{13}e^{-iqx} - b_{13}^*e^{iqx}) \text{sen}(3\pi z) + b_{02} \text{sen}(2\pi z) \quad (4.2)$$

$$n_f(x, z, t) = \frac{1}{2}(c_{11}e^{-iqx} - c_{11}^*e^{iqx}) \text{sen}(\pi z) + \frac{1}{2}(c_{13}e^{-iqx} - c_{13}^*e^{iqx}) \text{sen}(3\pi z) + c_{02} \text{sen}(2\pi z) \quad (4.3)$$

donde todos los coeficientes son complejos excepto  $a_{02}$ ,  $b_{02}$  y  $c_{02}$  que son reales. Recordemos, del capítulo 2, que nuestro sistema es descrito por las ecuaciones

$$\nabla^2\psi - R_s\partial_x n_s + R_f\partial_x n_f = \frac{1}{\sigma}[\partial_t\nabla^2\psi - J(\psi, \nabla^2\psi)] \quad (4.4)$$

$$\partial_t n_s + \partial_x\psi - \tau\nabla^2 n_s = J(\psi, n_s) \quad (4.5)$$

$$\partial_t n_f + \partial_x\psi - \nabla^2 n_f = J(\psi, n_f) \quad (4.6)$$

Donde  $J(a, b)$  es el operador diferencial de Poisson de  $a$  y  $b$  definido como  $J(a, b) = \partial_x a \partial_z b - \partial_x b \partial_y a$ . Al sustituir las expansiones de las funciones  $\psi$ ,  $n_s$  y  $n_f$  en las ecuaciones de movimiento, despreciando los términos que no corresponden a la aproximación del modelo espectral hasta orden cuarto, y escribir los coeficientes complejos en la forma

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{11R} + ia_{11I} & a_{13} &= a_{13R} + ia_{13I} \\ b_{11} &= b_{11R} + ib_{11I} & b_{13} &= b_{13R} + ib_{13I} \\ c_{11} &= c_{11R} + ic_{11I} & c_{13} &= c_{13R} + ic_{13I} \end{aligned} \quad (4.7)$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{11R} &= -\sigma a_{11R} + \frac{q\sigma}{k^2}(R_s b_{11R} - R_f c_{11R}) + \frac{\pi q a_{02}}{k^2}[(4\pi^2 - K^2)a_{13I} - (4\pi^2 - k^2)a_{11I}] \\
\dot{a}_{11I} &= -\sigma a_{11I} + \frac{q\sigma}{k^2}(R_s b_{11I} - R_f c_{11I}) + \frac{\pi q a_{02}}{k^2}[(4\pi^2 - k^2)a_{11R} - (4\pi^2 - K^2)a_{13R}] \\
\dot{a}_{13R} &= -\sigma a_{13R} + \frac{q\sigma}{K^2}(R_s b_{13R} - R_f c_{13R}) + \frac{\pi q}{K^2}(4\pi^2 - k^2)a_{02}a_{11I} \\
\dot{a}_{13I} &= -\sigma a_{13I} + \frac{q\sigma}{K^2}(R_s b_{13I} - R_f c_{13I}) - \frac{\pi q}{K^2}(4\pi^2 - k^2)a_{02}a_{11R} \\
\dot{a}_{02} &= -\sigma a_{02} + \frac{q}{8\pi}(K^2 - k^2)[a_{11R}a_{13I} - a_{11I}a_{13R}] \\
\dot{b}_{11R} &= -\tau k^2 b_{11R} - qa_{11R} + \pi q b_{02}(a_{13R} - a_{11R}) + \pi q a_{02}(b_{13I} - b_{11I}) \\
\dot{b}_{11I} &= -\tau k^2 b_{11I} - qa_{11I} + \pi q b_{02}(a_{13I} - a_{11I}) + \pi q a_{02}(b_{13R} - b_{11R}) \\
\dot{b}_{13R} &= -\tau K^2 b_{13R} - qa_{13R} + \pi q b_{02}a_{11R} - \pi q a_{02}b_{11I} \\
\dot{b}_{13I} &= -\tau K^2 b_{13I} - qa_{13I} + \pi q b_{02}a_{11I} + \pi q a_{02}b_{11R} \\
\dot{b}_{02} &= -4\pi^2 \tau b_{02} + \frac{\pi q}{2}(a_{11R}b_{11R} + a_{11I}b_{11I} - a_{11R}b_{13R} - a_{11I}b_{13I} - \\
&\quad a_{13R}b_{11R} - a_{13I}b_{11I}) \\
\dot{c}_{11R} &= -k^2 c_{11R} - qa_{11R} + \pi q c_{02}(a_{13R} - a_{11R}) + \pi q a_{02}(c_{11I} - c_{13I}) \\
\dot{c}_{11I} &= -k^2 c_{11I} - qa_{11I} + \pi q c_{02}(a_{13I} - a_{11I}) + \pi q a_{02}(c_{13R} - c_{11R}) \\
\dot{c}_{13R} &= -K^2 c_{13R} - qa_{13R} + \pi q c_{02}a_{11R} - \pi q a_{02}c_{11I} \\
\dot{c}_{13I} &= -K^2 c_{13I} - qa_{13I} + \pi q c_{02}a_{11I} + \pi q a_{02}c_{11R} \\
\dot{c}_{02} &= -4\pi^2 c_{02} + \frac{\pi q}{2}(a_{11R}c_{11R} + a_{11I}c_{11I} - a_{11R}c_{13R} - a_{11I}c_{13I} - \\
&\quad a_{13R}c_{11R} - a_{13I}c_{11I})
\end{aligned} \tag{4.8}$$

donde  $k^2 = \pi^2 + q^2$  y  $K^2 = 9\pi^2 + q^2$ . Para obtener este sistema se agruparon los coeficientes de modos de Fourier similares. Este es el modelo tipo-Lorenz para este sistema isotérmico doble difusivo en el caso en que  $\sigma$  se mantiene finito. Si consideramos el límite  $\sigma \rightarrow \infty$  las primeras cinco ecuaciones diferenciales de (4.8) se reducen a las relaciones algebraicas

$$\begin{aligned}
a_{11R} &= \frac{q}{k^2}(R_s b_{11R} - R_f c_{11R}) \\
a_{11I} &= +\frac{q}{k^2}(R_s b_{11I} - R_f c_{11I}) \\
a_{13R} &= \frac{q}{K^2}(R_s b_{13R} - R_f c_{13R}) \\
a_{13I} &= \frac{q}{K^2}(R_s b_{13I} - R_f c_{13I}) \\
a_{02} &= 0
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Las diez ecuaciones restantes en (4.8) se transforman en el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
\dot{b}_{11R} &= -\tau k^2 b_{11R} - q a_{11R} + \pi q b_{02}(a_{13R} - a_{11R}) \\
\dot{b}_{11I} &= -\tau k^2 b_{11I} - q a_{11I} + \pi q b_{02}(a_{13I} - a_{11I}) \\
\dot{b}_{13R} &= -\tau K^2 b_{13R} - q a_{13R} + \pi q b_{02} a_{11R} \\
\dot{b}_{13I} &= -\tau K^2 b_{13I} - q a_{13I} + \pi q b_{02} a_{11I} \\
\dot{b}_{02} &= -4\pi^2 \tau b_{02} + \frac{\pi q}{2}(a_{11R} b_{11R} + a_{11I} b_{11I} - a_{11R} b_{13R} - a_{11I} b_{13I} - \\
&\quad a_{13R} b_{11R} - a_{13I} b_{11I}) \\
\dot{c}_{11R} &= -k^2 c_{11R} - q a_{11R} + \pi q c_{02}(a_{13R} - a_{11R}) \\
\dot{c}_{11I} &= -k^2 c_{11I} - q a_{11I} + \pi q c_{02}(a_{13I} - a_{11I}) \\
\dot{c}_{13R} &= -K^2 c_{13R} - q a_{13R} + \pi q c_{02} a_{11R} \\
\dot{c}_{13I} &= -K^2 c_{13I} - q a_{13I} + \pi q c_{02} a_{11I} \\
\dot{c}_{02} &= -4\pi^2 c_{02} + \frac{\pi q}{2}(a_{11R} c_{11R} + a_{11I} c_{11I} - a_{11R} c_{13R} - a_{11I} c_{13I} - \\
&\quad a_{13R} c_{11R} - a_{13I} c_{11I})
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Como se ha tomado el límite en que  $\sigma$  tiende a infinito, entonces en (4.10) y (4.9)  $q = \pi$ , y en consecuencia  $k^2 = 2\pi^2$ , y  $K = 10\pi^2$ . Para un manejo más fácil de las ecuaciones anteriores haremos la siguiente asignación

$$\begin{aligned}
\vec{y} &= (b_{11R}, b_{11I}, b_{13R}, b_{13I}, c_{11R}, c_{11I}, c_{13R}, c_{13I}, b_{02}, c_{02}) \\
&= (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Podemos entonces escribir las ecuaciones (4.10) en forma compacta como

$$\dot{\vec{y}} = L\vec{y} + \vec{N}(\vec{y}), \tag{4.12}$$

donde  $L$  es una matriz  $10 \times 10$  que contiene la parte lineal del sistema de ecuaciones, cuya forma es

$$L = \begin{pmatrix} D_1 & A & 0 \\ B & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}$$

con  $0$  la matriz nula de  $2 \times 2$ , y las otras matrices  $4 \times 4$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -2\pi^2\tau - \frac{R_s}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\pi^2\tau - \frac{R_s}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10\pi^2\tau - \frac{R_s}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10\pi^2\tau - \frac{R_s}{10} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{R_f}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_f}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_f}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R_f}{10} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{R_s}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_s}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_s}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_s}{10} \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} -2\pi^2\tau - \frac{R_f}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\pi^2\tau - \frac{R_f}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10\pi^2\tau - \frac{R_f}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10\pi^2\tau - \frac{R_f}{10} \end{pmatrix}$$



y por último la matriz  $2 \times 2$

$$D_3 = \begin{pmatrix} -4\pi^2\tau & 0 \\ 0 & -4\pi^2 \end{pmatrix}$$

$N$  es un vector formado con la parte no-lineal de (4.10)

$$\vec{N}(\vec{y}) = \pi \begin{pmatrix} \frac{y_9}{10}(R_s y_3 - R_f y_7) - \frac{y_9}{2}(R_s y_1 - R_f y_5) \\ \frac{y_9}{10}(R_s y_4 - R_f y_8) - \frac{y_9}{2}(R_s y_2 - R_f y_6) \\ \frac{y_9}{2}(R_s y_1 - R_f y_5) \\ \frac{y_9}{2}(R_s y_2 - R_f y_6) \\ \frac{y_{10}}{10}(R_s y_3 - R_f y_7) - \frac{y_{10}}{2}(R_s y_1 - R_f y_5) \\ \frac{y_{10}}{10}(R_s y_4 - R_f y_8) - \frac{y_{10}}{2}(R_s y_2 - R_f y_6) \\ \frac{y_{10}}{2}(R_s y_1 - R_f y_5) \\ \frac{y_{10}}{2}(R_s y_2 - R_f y_6) \\ \frac{y_1}{4}(R_s y_1 - R_f y_5) + \frac{y_2}{4}(R_s y_2 - R_f y_6) - \frac{y_3}{4}(R_s y_1 - R_f y_5) - \\ \frac{y_4}{4}(R_s y_2 - R_f y_6) - \frac{y_1}{20}(R_s y_3 - R_f y_7) - \frac{y_2}{20}(R_s y_4 - R_f y_8) \\ \frac{y_5 - y_7}{4}(R_s y_1 - R_f y_5) + \frac{y_6 - y_8}{4}(R_s y_2 - R_f y_6) - \\ \frac{y_5}{20}(R_s y_3 - R_f y_7) - \frac{y_6}{20}(R_s y_4 - R_f y_8) \end{pmatrix}$$

(4.12) es nuestro modelo tipo-Lorenz escrito en forma compacta para el caso límite  $\frac{1}{\sigma} \rightarrow 0$ . En la siguiente sección estudiamos algunas propiedades del mismo.

## 4.2. Algunas Propiedades Simples del Modelo

El estudio completo del modelo construido, no lo haremos en esta tesis, pero si queremos exponer algunas de sus propiedades. Las que comentaremos son: cómo extraer ondas viajeras, cómo encontrar el famoso modelo de Lorenz a partir del que hemos construido, esto lo haremos para el modelo (4.8). Por último veremos que el modelo (4.12) es disipativo.

### 4.2.1. Ondas Viajeras

Por construcción el sistema (4.12) describe correctamente el comportamiento en el umbral de las inestabilidades desde el estado conductivo. EL estado estacionario se obtiene al considerar  $d/dt \equiv 0$ . Las ondas viajeras (OV) deben obtenerse al considerar

$$\vec{\xi}(t) = (a_{11}(t), a_{13}(t), b_{11}(t), b_{13}(t), c_{11}(t), c_{13}(t)) = \hat{\xi} e^{i\omega_1 t} \quad (4.13)$$

es decir,  $a_{11}(t) = \hat{a}_{11} e^{i\omega t}$ , etc. Y además los coeficientes  $a_{02}$ ,  $b_{02}$ ,  $c_{02}$  deben ser independientes del tiempo.

$$(a_{02}(t), b_{02}, c_{02}) = (\hat{a}_{02}, \hat{b}_{02}, \hat{c}_{02}) \quad (4.14)$$

Para constatar esto, simplemente sustituya (4.13) y (4.14) en (4.1) y verá que se  $\psi$ ,  $n_s$  y  $n_f$  tendrán la forma funcional de ondas viajeras.

De sustituir (4.13), (4.14) y  $q = \pi$  (ya que recordemos que en el limite  $\sigma \rightarrow \infty$ , tenemos  $q = \pi$ ) en (4.9) y (4.10), las ecuaciones diferenciales (4.10) se transforman en un conjunto de ecuaciones algebraicas con el cambio de variable

$$(b_{11R}, b_{11I}, b_{13R}, b_{13I}, c_{11R}, c_{11I}, c_{13R}, c_{13I}, \hat{b}_{02}, \hat{c}_{02}) = \vec{x}$$

donde

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}).$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= \omega_1 x_2 - 2\pi^2 \tau x_1 - \frac{1}{2}(R_s x_1 - R_f x_5) + \pi x_9 \left[ \frac{1}{10}(R_s x_3 - R_f x_7) - \frac{1}{2}(R_s x_1 - R_f x_5) \right] = 0 \\
f_2 &= -\omega_1 x_1 - 2\pi^2 \tau x_2 - \frac{1}{2}(R_s x_2 - R_f x_6) + \pi x_9 \left[ \frac{1}{10}(R_s x_4 - R_f x_8) - \frac{1}{2}(R_s x_2 - R_f x_6) \right] = 0 \\
f_3 &= \omega_1 x_4 - 10\pi^2 \tau x_3 - \frac{1}{10}(R_s x_3 - R_f x_7) + \frac{\pi}{2} x_9 (R_s x_1 - R_f x_5) = 0 \\
f_4 &= -\omega_1 x_3 - 10\pi^2 \tau x_4 - \frac{1}{10}(R_s x_4 - R_f x_8) + \frac{\pi}{2} x_9 (R_s x_2 - R_f x_6) = 0 \\
f_5 &= \omega_1 x_6 - 2\pi^2 x_5 - \frac{1}{2}(R_s x_1 - R_f x_5) + \pi x_{10} \left[ \frac{1}{10}(R_s x_3 - R_f x_7) - \frac{1}{2}(R_s x_1 - R_f x_5) \right] = 0 \\
f_6 &= -\omega_1 x_5 - 2\pi^2 x_6 - \frac{1}{2}(R_s x_2 - R_f x_6) + \pi x_{10} \left[ \frac{1}{10}(R_s x_4 - R_f x_8) - \frac{1}{2}(R_s x_2 - R_f x_6) \right] = 0 \\
f_7 &= \omega_1 x_8 - 10\pi^2 x_7 - \frac{1}{10}(R_s x_3 - R_f x_7) + \frac{\pi}{2} x_{10} (R_s x_1 - R_f x_5) = 0 \\
f_8 &= -\omega_1 x_7 - 10\pi^2 x_8 - \frac{1}{10}(R_s x_4 - R_f x_8) + \frac{\pi}{2} x_{10} (R_s x_2 - R_f x_6) = 0 \\
f_9 &= -4\pi^2 \tau x_9 + \frac{\pi}{2} \left[ \frac{x_1 - x_3}{2} (R_s x_1 - R_f x_5) + \frac{x_2 - x_4}{2} (R_s x_2 - R_f x_6) - \frac{x_1}{10} (R_s x_3 - R_f x_7) - \frac{x_2}{10} (R_s x_4 - R_f x_8) \right] = 0 \\
f_{10} &= -4\pi^2 x_{10} + \frac{\pi}{2} \left[ \frac{x_5 - x_7}{2} (R_s x_1 - R_f x_5) + \frac{x_6 - x_8}{2} (R_s x_2 - R_f x_6) - \frac{x_5}{10} (R_s x_3 - R_f x_7) - \frac{x_6}{10} (R_s x_4 - R_f x_8) \right] = 0 \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Asi debemos resolver el sistema algebraico  $f_j(x_1, \dots, x_{10}) = 0$  con  $1 \ll j \ll 10$  para los coeficientes y para las frecuencia  $w_1$  en función del número de Rayleigh, es decir dado un  $R_s$  fijo en el intervalo  $R_s \in (R_s^{c2}, \infty)$  para algún  $R_f$  ( $R_f \gg R_{fc}^{osc} = R_s + 4\pi^2(1 + \tau)$ ) se encuentra el resto de los nueve valores de los coeficientes, (uno es dado arbitrariamente) y  $w_1$  son las diez

incognitas.

### 4.2.2. Modelo de Lorenz

Una pregunta que nos podemos hacer es si el sistema de Lorenz [19] está implícito en el sistema de ecuaciones (4.8). La respuesta es sí, bajo algunas consideraciones. Primero, debemos hacer  $n_s = 0$ ,  $a_{11I} = a_{02} = c_{11I} = 0$  y  $a_{13} = c_{13} = 0 + 0i$ . Así las ecuaciones (4.8) se reducen a

$$\dot{a}_{11R} = -\sigma a_{11R} - \frac{q\sigma R_f}{k^2} c_{11R} \quad (4.16)$$

$$\dot{c}_{11R} = -k^2 c_{11R} q a_{11R} - \pi q c_{02} a_{11R} \quad (4.17)$$

$$\dot{c}_{02} = -4\pi^2 c_{02} + \frac{\pi q}{2} a_{11R} c_{11R} \quad (4.18)$$

Segundo, hacemos los cambios de variable  $x = a_{11R}$ ,  $y = c_{11R}$  y  $z = c_{02}$  en (4.19), (4.20) y (4.21) con lo cual tenemos

$$\dot{x} = -\sigma x - \frac{q\sigma R_f}{k^2} y \quad (4.19)$$

$$\dot{y} = -k^2 y q x - \pi q z x \quad (4.20)$$

$$\dot{z} = -4\pi^2 z + \frac{\pi q}{2} x y \quad (4.21)$$

Finalmente, las ecuaciones (4.19), (4.20) y (4.21) toman la forma de las ecuaciones de Lorenz si hacemos el cambio de variable

$$X = \frac{\pi q}{\sqrt{2}k^2} x \quad Y = -\frac{\pi r}{\sqrt{2}} y \quad Z = -r\pi z \quad T = k^2 t \quad (4.22)$$

donde  $r = \frac{q^2}{k^4} R_f$ . Así al sustituir (4.22) en (4.19), (4.20) y (4.21) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \tilde{\sigma}(X - Y) \\ \dot{Y} &= rX - XZ - Y \\ \dot{Z} &= XY - \tilde{b}Z \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde  $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{k^2}$ ,  $k^2 = q^2 + \pi^2$ ,  $\tilde{b} = \frac{4\pi^2}{k^2}$  y recordemos que  $r$  lo definimos como  $r = \frac{q^2}{k^4} R_f$ .

### 4.2.3. Sistema Disipativo

Una pregunta natural que nos podemos hacer es si el sistema(4.12) es disipativo, es decir, los volúmenes en el espacio fase se contraerán bajo el flujo? Para responder tal pregunta veremos como evoluciona un volúmen en el espacio fase, encerrado por la superficie  $S(t)$ , cuyos puntos, podemos pensar, son condiciones iniciales para las trayectorias. Si tenemos un volúmen de condiciones iniciales  $V$ , tenemos que su derivada con respecto al tiempo [19] viene dada por

$$\dot{V} = \int_V \nabla \cdot \vec{f} dV. \quad (4.24)$$

Hemos escrito el modelo simplemente como  $\dot{\vec{y}}(t) = f(\vec{y})$ , y en (4.24),  $\vec{f}$  es el lado derecho de (4.12). Primero calcularemos la divergencia del sistema de ecuaciones (4.12) al cual llamaremos  $\vec{f}$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{f} &= \frac{\partial \dot{b}_{11R}}{\partial b_{11R}} + \frac{\partial \dot{b}_{11I}}{\partial b_{11I}} + \frac{\partial \dot{b}_{13R}}{\partial b_{13R}} + \frac{\partial \dot{b}_{13I}}{\partial b_{13I}} + \frac{\partial \dot{b}_{02}}{\partial b_{02}} + \\ &\quad \frac{\partial \dot{c}_{11R}}{\partial c_{11R}} + \frac{\partial \dot{c}_{11I}}{\partial c_{11I}} + \frac{\partial \dot{c}_{13R}}{\partial c_{13R}} + \frac{\partial \dot{c}_{13I}}{\partial c_{13I}} + \frac{\partial \dot{c}_{02}}{\partial c_{02}} = \\ &= -(2\tau k^2 + 2k^2 + 2\tau K^2 + 2K^2 + 4\pi^2\tau + 4\pi^2) \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{f} = -(2\tau k^2 + 2k^2 + 2\tau K^2 + 2K^2 + 4\pi^2\tau + 4\pi^2) \quad (4.26)$$

Por lo que  $\nabla \cdot \vec{f} < 0$ , y de hecho es constante una vez que se fijan los parámetros por lo cual de (4.24) tenemos que

$$\dot{V} = -(2\tau k^2 + 2k^2 + 2\tau K^2 + 2K^2 + 4\pi^2\tau + 4\pi^2)V$$

$$V(t) = V(0) \exp -(2\tau k^2 + 2k^2 + 2\tau K^2 + 2K^2 + 4\pi^2\tau + 4\pi^2)t \quad (4.27)$$

Entonces el volumen en el espacio fase se reduce muy rápido. Por lo tanto si comenzamos con un enorme bloque sólido de condiciones iniciales, se irá reduciendo a un limitado conjunto de volúmen cero. Todas las trayectorias que comienzan en el bloque acaban en algún lugar de este conjunto limitado. Por lo tanto el sistema de ecuaciones (4.12) es un sistema disipativo.

La contracción del volúmen impone fuertes restricciones sobre las posibles soluciones del conjunto de ecuaciones (4.12). Una de ellas es que no hay soluciones cuasi-periódicas para el conjunto de ecuaciones (4.12), pues si existiera una solución cuasi-periodica, dicha solución tenderia a la superficie de un toro y ese toro sería invariante bajo el flujo. Por lo tanto el volúmen dentro del toro sería constante en el tiempo. Pero esto contradice el resultado (4.27). Por lo tanto no hay soluciones cuasi-periódicas para el conjunto de ecuaciones (4.12). Otra restricción es que el sistema no tiene puntos fijos repulsores o órbitas cerradas repulsoras.

Pues si suponemos que se tiene un repulsor con una superficie cerrada de condiciones iniciales cercanas en el espacio fase. (específicamente tomamos una pequeña esfera alrededor del punto fijo o un tubo delgado alrededor de una órbita cerrada). Un pequeño tiempo después la superficie tenderá a expandirse así como las correspondientes trayectorias se irán lejos. (es decir son expulsadas), entonces el volumen dentro de la superficie se incrementará, lo cual contradice el resultado (4.27). Por lo tanto todos los puntos fijos del conjunto de ecuaciones (4.12) deberán ser sumideros o sillas y las órbitas cerradas (si existen) deberán ser estables o sillas.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo se realizó una revisión de las inestabilidades en Convección Isotérmica Doble Difusiva. Del análisis de estabilidad lineal de las ecuaciones de movimiento se sabe que el sistema presenta una inestabilidad estacionaria y una oscilatoria. El punto donde estas dos inestabilidades colapsan se llama punto de codimensión-2. Para analizar la dinámica entorno a cada una de las inestabilidades, así como entorno al punto de codimensión-2 se utilizó el formalismo de ecuaciones de amplitud.

En el caso de la inestabilidad estacionaria y el punto de codimensión-2, se expuso la dinámica de manera muy descriptiva con base en las correspondientes ecuaciones de amplitud, pero sin entrar en los detalles de su derivación. Para la inestabilidad estacionaria hay un punto llamado tricrítico  $R_s^{tc}$  donde se da un cambio de una bifurcación supercrítica a una subcrítica. De la ecuación de amplitud a quinto orden se predice que en la región  $R_s^{tc} < R_s < R_s^{pc2}$  el sistema presenta un ciclo de histéresis y la amplitud cambia de ser proporcional a  $\epsilon^{1/2}$  a ser proporcional a  $\epsilon^{1/4}$ .

En el caso del punto de codimensión-2 se menciona la aparición de un ciclo límite en su vecindad que aparece o desaparece de acuerdo a los valores

de los parámetros  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . En el espacio de parámetros  $(R_s, R_f)$  se expuso dónde ocurrirá esto.

Una particularidad de este sistema es la posibilidad de estudiar la dinámica en la vecindad del punto de codimensión-2 pues es bien distingible del tricrítico. Esta peculiaridad no existe, al menos a temperatura ambiente, en otros sistemas que tienen estos dos puntos.

En el caso de la rama oscilatoria, la ecuación de amplitud a tercer orden predice la presencia de ondas estacionarias con amplitud del orden  $\epsilon^{1/2}$  además predice la presencia de ondas viajeras sólo *sobre* la rama oscilatoria, por lo cual se calculó la ecuación de amplitud a quinto orden, la cual predice la existencia de ondas viajeras no sólo sobre la rama, además de predecir que a diferencia de la rama estacionaria aquí no se presenta un ciclo de histéresis. Este cálculo no se había realizado antes.

También se construyó el modelo de Lorenz para el sistema que estamos trabajando (Convección Isotérmica Doble Difusiva) con ayuda de los resultados obtenidos de teoría de perturbaciones sobre una vecindad de la rama oscilatoria. Dicho modelo por construcción describe correctamente la dinámica del sistema cerca de la bifurcación y además permite explorar la dinámica del sistema en regiones alejadas de la rama de bifurcación. Verificamos que el modelo es un sistema disipativo en el espacio fase lo cual trae como consecuencia que todos los puntos fijos de dicho sistema deberán ser sumideros o sillars y las orbitas cerradas que existan deberán ser estables o sillars.

Como trabajo futuro estamos interesados en estudiar la cinemática de la mezcla y transporte de partículas pasivas con ayuda del modelo de Lorenz que hemos construido.



# Apéndice A

## Ecuaciones de movimiento

Para describir el movimiento de un fluido existen dos puntos de vista: la descripción lagrangiana la cual consiste en seguir a cada partícula fluida en su movimiento. Si conocemos las fuerzas que actúan sobre cada partícula de fluido podemos entonces resolver para las coordenadas y velocidades de cada partícula en función del tiempo. La segunda forma asigna a cada punto del espacio y en cada instante un valor para las propiedades o magnitudes fluidas sin importar la partícula fluida que en dicho instante ocupa ese punto. Ésta es la descripción Euleriana, la cual no está ligada a las partículas fluidas sino a los puntos del espacio ocupados por el fluido. En esta descripción el valor de una propiedad en un punto y en un instante determinado es el de la partícula fluida que ocupa dicho punto en ese instante. En nuestro caso adoptamos la descripción euleriana por lo cual la derivada  $\frac{\partial X}{\partial t}$  ya no representa toda la variación por unidad de tiempo de una determinada propiedad del fluido  $X$  siguiendo a la partícula. En general, si se desea saber cómo cambia una cantidad escalar  $X$  en el tiempo siguiendo al fluido, entonces debe considerarse

$$\frac{DX}{Dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)X \quad (\text{A.1})$$

La derivada anterior se conoce como derivada hidrodinámica o derivada

total o derivada material y  $\vec{v}$  es la velocidad del fluido la cual en este caso es un campo de velocidades. El primer término representa la variación de la propiedad  $X$  en un punto fijo del espacio por lo cual se le denomina derivada local, el segundo término representa la variación de la propiedad asociada al cambio de posición de la partícula de fluido, y se le denomina derivada convectiva.

Las ecuaciones que rigen la mecánica de fluidos se obtienen de aplicar los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica a un fluido. Las tres ecuaciones fundamentales para fluidos son: la ecuación de continuidad, la ecuación de Navier-Stokes, y la ecuación de la conservación de la energía. La ecuación de Navier-Stokes se lee

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{F} \quad (\text{A.2})$$

El lado izquierdo puede verse como  $\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}$ , donde  $\vec{a}$  es la aceleración y  $m$  la masa de la partícula y el lado derecho representa la fuerza total actuando sobre un elemento de fluido. Esta fuerza se compone de tres interacciones: el primer término corresponde a la presión, el segundo término a la viscosidad (fricción) y el último a la fuerza externa.

Notemos que la presión es una variable que solo aparece en una de las ecuaciones de movimiento así que en principio se requeriría una ecuación de estado para completar el conjunto de ecuaciones. Pero como tenemos un sistema bi-dimensional, fue posible eliminar la presión de esquema, y prescindir de una ecuación de estado.

En nuestro caso, como el sistema se considera casi incompresible, de hecho se aplica la aproximación de Boussinesq, la ecuación de la energía se hace redundante (ver [1]).

Como en nuestro caso nuestro sistema consiste de dos sustancias que se difunde en un líquido debemos agregar una ecuación de difusión para cada

substancia. Las ecuaciones de difusión son:

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) C_s = D_s \nabla^2 C_s$$

$$\frac{\partial C_f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) C_f = D_f \nabla^2 C_f$$

Donde  $D_s$  y  $D_f$  son los coeficientes de difusión para la substancia lenta y para la substancia rápida respectivamente.

# Apéndice B

## Nomenclatura

$C_f$	=	Concentración de la sustancia que se difunde rápidamente	$gr/l$
$C_s$	=	Concentración de la sustancia que se difunde lentamente	$gr/l$
$D_f$	=	Concentración de la sustancia que se difunde rápidamente	$cm^2/seg$
$D_s$	=	Concentración de la sustancia que se difunde lentamente	$cm^2/seg$
$\vec{g}$	=	Aceleración de la gravedad	$cm/seg^2$
$p$	=	Presión	$grm/seg^2$
$R_f$	=	Número de Rayleigh para la sustancia rápida	Adimensional
$R_s$	=	Número de Rayleigh para la sustancia lenta	Adimensional
$\vec{v}$	=	Velocidad del fluido	$cm/seg^2$

### Letras Griegas

$\alpha_f$	=	Derivada de la densidad con respecto a $C_f$	$gr^{-1}l$
$\alpha_s$	=	Derivada de la densidad con respecto a $C_s$	$gr^{-1}l$
$\mu$	=	Coficiente de viscosidad	$gr/mseg$
$\nu$	=	$\mu/\rho_0$ Viscosidad cinemática	$cm^2/seg$
$\rho$	=	Densidad del fluido	$gr/cm^3$
$\rho_0$	=	Densidad del solvente	$gr/cm^3$
$\sigma$	=	Número modificado de Schmidt	Adimensional
$\tau$	=	$D_s/D_f$ Número de Lewis	Adimensional
$\psi$	=	Función de corriente	$cm^2/seg$

# Bibliografía

- [1] Arnab Rai Choudhur “The Physics of Fluids and Plasmas: An Introduction for Astrophysicists “
- [2] R. Becerril, J. Swift “Amplitude equations for isothermal double diffusive convection ” *Phy. Rev. E* **55**, 6270 (1997).
- [3] H. Bénard, “Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide” *Re. Gén. Sci. Pure Appl.* **11**, 1261-1271, 1309-1328 (1900).
- [4] J. Binson, “Chaotic Advection in Large-Scale Convection” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **8**, 57-71 (1998).
- [5] C. Canuto, M. Hussaini, A. Quarteroni, T. Zang “Spectral Methods, Fundamentals in Single Domains”, Springer Verlag (2006).
- [6] S. Chandrasekhar, “Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability” Dover Publications, Inc. pag 16
- [7] P. H. Coullet and E. A. Spiegel “Amplitud equations for systems with competing inestabilities” *SIAM J. Appl. Math.* **43**, 775 (1983).
- [8] M. C. Cross, P. C Hohenberg “Pattern Formation Outside of Equilibrium” *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
- [9] M. C. Cross, “An Eight-Mode Lorenz Model of Travelling Waves in Binary Fluid Convection”, *Physics Letters A.* **119**, 21 (1986).

- [10] G. Dangelmayr, E. Knobloch “The Takens-Bogdanov bifurcation with  $O(2)$ -symmetry ” *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A*, **332**, 24443 (1987).
- [11] J. Guckenheimer, P. Holmes, “Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vectors Fields ” Springer-Verlag, New York (1983).
- [12] E. Knobloch, A. E. Deane and J. Toomre, “A Model of Double-Diffusive Convection with Periodic Boundary Conditions” *Contemporary Mathematics*. **99**, 339 (1989).
- [13] E. Knobloch, D. R. Moore, “Minimal model of binary fluid convection”, *Physical Review A*. Vol. **42**, 4693 (1990).
- [14] H. Lamb “Hydrodynamics” 6ta edición, Cambridge University Press, pag 582.
- [15] Paul Manneville, “Dissipative Structures and Weak Turbulence ”, *Perspectives in Physics* (1990).
- [16] A. A. Predtechensky, W. D. McCormick, J. B. Swift, Z. Noszticzius, and H. L. Swinney, “Onset of traveling waves in isothermal double-diffusive convection,” *Phys. Rev. Lett.* **72**, 218 (1994).
- [17] A. A. Predtechensky, W. D. McCormick, J. B. Swift, A. G. Rossberg, and H. L. Swinney, “Traveling wave instability in sustained double-diffusive convection,” *Phys. Fluids*, **6**, 3923 (1994).
- [18] I. Stakgold “Green’s Functions and Boundary Value Problems” Wiley, New York (1979).
- [19] Steven H. Strogatz, “Nonlinear Dynamics and Chaos” Editorial Westview, (2000).

- [20] (a) J. Thompson, Proc. Glasg. Phil. Soc., vol 13, 464 (1882). (b) J. Thompson “On certain curious motions observable at the surfaces of wine and other alcoholic liquors” Phil. Mag. (Ser. 4) **10**, 330 (1855)
- [21] E. H. Weber. Ann. Phys. Chemie. **94**, 447 (1855)
- [22] D. Williams “Solving Singular Perturbations Problems, an Amplitud Equation Approach ” Ph. D Thesis, University of Washington (2005).