

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS.

“CONFIGURACIONES DE EQUILIBRIO DE LOS OSCILACIONES CON
POTENCIAL CUÁRTICO”

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA:
SUSANA VALDEZ ALVARADO

ASESOR:
DR. RICARDO BECERRIL BÁRCENAS

Morelia, Mich., febrero 2009.

Índice general

1. Introducción	3
2. Ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon	6
2.1. Problema de Valor Propio para Configuraciones de Equilibrio .	6
2.2. Condiciones de Frontera	15
3. Algoritmos Numéricos	19
3.1. Generalidades del Método del Disparo No-lineal	19
3.2. Cálculo de los Términos No-lineales	25
3.3. Restricción Algebraica	28
4. Resultados Numéricos	39
5. Conclusiones	48
Anexos	49
A. Teorema de Convulsión	50
B. Conservación del Tensor Energía-Momento	53

Capítulo 1

Introducción

Los oscilatonos son soluciones no-singulares y asintóticamente planas a las ecuaciones acopladas de Einstein-Klein-Gordon para un campo escalar real Φ dotado de un potencial $V(\Phi)$ donde, tanto la métrica como el campo escalar son periódicamente dependientes del tiempo. La dependencia temporal de estas soluciones es la que permite que no se presenten singularidades. Estas soluciones fueron presentadas en un trabajo pionero por Seidel y Suen [1]. Es importante señalar que estamos manejando campos escalares “reales”, pues éste es muy diferente al caso de los campos escalares “complejos” para los cuales las soluciones a las ecuaciones de EKG son las llamadas “Estrellas de Bosones”, que han sido estudiadas por varios autores [2].

Los oscilatonos tienen una gran importancia tanto en Astrofísica como en Cosmología, debido a que los campos escalares reales han sido propuestos como candidatos a ser materia oscura en el universo. Se ha mostrado que un potencial de tipo coseno hiperbólico describe muy bien todas las propiedades conocidas de la materia oscura fría en escalas cosmológicas [3].

En un estudio numérico muy completo realizado recientemente sobre las propiedades de los oscilatonos donde se utilizó el potencial cuadrático $V(\Phi) =$

$\frac{1}{2}\Phi^2$ para el campo escalar, se encontró que los oscilatonos pueden ser clasificados como estables (*S-branch*) e inestables (*U-branch*). Los S-oscilatonos son realmente estables bajo pequeñas perturbaciones, pero cuando la perturbación es muy fuerte los S-oscilatonos normalmente emigran a otros estados estables. Por otro lado los U-oscilatonos son intrínsecamente inestables, pues si sus masas decrecen éstos emigran a una rama estable (*S-branch*), pero si sus masas aumentan incluso en pequeñas cantidades éstos colapsan a agujeros negros. Los oscilatonos estables también pueden colapsar a un agujero negro si se les adhiere suficiente masa[6].

Los potenciales escalares más complicados que el cuadrático en el estudio de los oscilatonos tendrían más parámetros y podrían agregarse propiedades adicionales a los oscilatonos. El ejemplo más simple sería el potencial cuártico, que ya ha sido estudiado en el contexto cosmológico [4] para campos escalares complejos, y también en el estudio de estrellas de bosones, donde la inclusión del término cuártico para un campo escalar intenso, hace a la estrella bosónica más grande y masiva que cuando sólo se tiene el término cuadrático.

El propósito de este trabajo es estudiar las características de las configuraciones de equilibrio de los oscilatonos esféricos utilizando el potencial de orden cuarto. También se pretende que este trabajo sea una documentación del código numérico con el que se resuelve el sistema de ecuaciones acopladas de EKG, pues se dará una explicación más detallada de la construcción del mismo. Una de las características de estudios previos, es la retención de 1 ó 2 modos máximo en el potencial escalar. Esto puede deberse a lo excesivamente largo y complejo que puede ser la obtención de las ecuaciones para los coeficientes de las expansiones del campo escalar y de las funciones métricas. Tales ecuaciones se obtienen al sustituir las expansiones en las ecuaciones de campo e igualar coeficientes de modos de Fourier similares. Por ejemplo, en [7], se utilizó la aproximación mas simple para el campo escalar $\Phi(t, r) = \sigma(r) \cos(\omega t)$ y reteniendo dos términos en las funciones métricas.

En [12], se usó un $J_{max} = 2$ así sólo se trabajó con dos términos para el campo escalar. En el capítulo 3 de este trabajo, se expone en detalle como incluir en principio, una cantidad arbitraria de términos.

Lo que básicamente se calcula es la masa crítica y la frecuencia fundamental para diversos valores del parámetro Λ que acompaña al término cuártico del potencial, en función del valor central del campo escalar. En la tesis no se evolucionan las ecuaciones de campo, pero se provee del indispensable dato inicial para su evolución.

Capítulo 2

Ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon

En la primera sección de este capítulo, escribiremos las ecuaciones de campo del sistema de Einstein-Klein-Gordon (EKG) con simetría esférica y mostraremos como se han minimizado las no-linealidades [5] para permitir la inclusión de modos de Fourier más altos.

2.1. Problema de Valor Propio para Configuraciones de Equilibrio

La acción que describe a nuestro sistema está dado por

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \Phi_{;\alpha} \Phi_{;\beta} - V(\Phi) \right) \quad (2.1)$$

donde R es el escalar de Ricci, $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio tiempo, g su determinante, Φ el campo escalar y $V(\Phi)$ el potencial de autointeracción. La variación de esta acción con respecto al campo escalar conduce a la ecuación

ción de Klein-Gordon. La variación con respecto a la métrica, conduce a las ecuaciones de Einstein con materia $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$, y el tensor de energía momento resulta ser

$$T_{\alpha\beta} = \Phi_{;\alpha}\Phi_{;\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}[\Phi^{;\lambda}\Phi_{;\lambda} + 2V(\Phi)], \quad (2.2)$$

donde la derivada covariante para el vector A^α esta dada por,

$$A^\alpha_{;\beta} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\kappa\beta}A^\kappa$$

Sabemos que la derivada covariante de una función escalar es igual a su derivada parcial correspondiente, es decir, $\Phi_{;\alpha} = \Phi_{,\alpha}$. Así que podemos reescribir la ecuación (2.2) simplemente cambiando el punto y coma, por una coma.

En lo que sigue, vamos a calcular explícitamente, las componentes de los tensores $T_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$, y el escalar de Ricci R (y por ende $G_{\mu\nu}$), en el caso esféricamente simétrico, para el cual la métrica es de la forma

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -B(t,r)dt^2 + A(t,r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.3)$$

Las componentes no nulas del tensor (2.2) son:

$$-T_0^0 = \frac{1}{2}[B^{-1}\dot{\Phi}^2 + A^{-1}\Phi'^2 + 2V(\Phi)], \quad (2.4)$$

$$T_{01} = \dot{\Phi}\Phi', \quad (2.5)$$

$$T_1^1 = \frac{1}{2}[A^{-1}\Phi'^2 + B^{-1}\dot{\Phi}^2 - 2V(\Phi)] \quad (2.6)$$

$$T_2^2 = \frac{1}{2}[B^{-1}\dot{\Phi}^2 - A^{-1}\Phi'^2 - 2V(\Phi)], \quad (2.7)$$

$$T_3^3 = \frac{1}{2}[B^{-1}\dot{\Phi}^2 - A^{-1}\Phi'^2 - 2V(\Phi)], \quad (2.8)$$

donde por notación $\dot{\gamma} = \frac{\partial\gamma}{\partial t}$ y $\gamma' = \frac{\partial\gamma}{\partial r}$. Podemos identificar entonces a las componentes sobrevivientes del Tensor Momento-Energía de la siguiente forma; $-T_0^0 = \rho_\Phi$ la densidad de energía, $T_{01} = \mathcal{P}_\Phi$ la densidad de momento, $T_1^1 = p_r$ la presión radial y $T_2^2 = p_\perp$ la presión angular. Para calcular el Tensor de Einstein

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R. \quad (2.9)$$

requerimos tanto de $R_{\alpha\beta}$, el Tensor de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\rho\Gamma_{\beta\alpha}^\rho - \partial_\beta\Gamma_{\rho\alpha}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda - \Gamma_{\beta\lambda}^\rho\Gamma_{\rho\alpha}^\lambda, \quad (2.10)$$

como del Escalar de Ricci

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}[\partial_\rho\Gamma_{\beta\alpha}^\rho - \partial_\beta\Gamma_{\rho\alpha}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda - \Gamma_{\beta\lambda}^\rho\Gamma_{\rho\alpha}^\lambda], \quad (2.11)$$

donde los Γ 's son los símbolos de Christoffel, y están dados por

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}[g_{\rho\alpha,\beta} + g_{\rho\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\rho}].$$

Al calcular los símbolos de Christoffel para la métrica que estamos usando, nos damos cuenta que los elementos distintos de cero son:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}B^{-1}\dot{B} & \frac{1}{2}B^{-1}B' & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}B^{-1}B' & \frac{1}{2}B^{-1}\dot{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^r = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}A^{-1}B' & \frac{1}{2}A^{-1}\dot{A} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}A^{-1}\dot{A} & \frac{1}{2}A^{-1}A' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -rA^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -rA^{-1}\sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \cot(\theta) \\ 0 & \frac{1}{r} & \cot(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Que al sustituir directamente en (2.10), nos dan las componentes del Tensor de Ricci, las no nulas son:

$$R_{00} = \frac{1}{4rA^2B} [2rABB'' - rBA'B' - 2rAB\ddot{A} + rB\dot{A}^2 + rA\dot{A}\dot{B} + 4ABB' - rAB'^2] \quad (2.12)$$

$$R_{01} = \frac{\dot{A}}{rA} \quad (2.13)$$

$$R_{11} = \frac{1}{4rAB^2} [2rAB\ddot{A} - rA\dot{A}\dot{B} - 2rABB'' + rAB'^2 + rBA'B' + 4B^2A' - rB\dot{A}^2] \quad (2.14)$$

$$R_{22} = \frac{1}{2A^2B} [-2AB + rBA' + 2A^2B - rAB'] \quad (2.15)$$

$$R_{33} = \frac{1}{2A^2B} [-2AB + 2AB \cos^2(\theta) + rA'B - rA'B \cos^2 + 2A^2B - 2A^2B \cos^2(\theta) - rAB' + rAB' \cos^2(\theta)] \quad (2.16)$$

Y explícitamente, el Escalar de Ricci es

$$R = \frac{1}{2A^2r^2B^2} [-2r^2ABB'' + r^2BA'B' + 2r^2AB\ddot{A} - r^2B\dot{A}^2 - r^2A\dot{A}\dot{B} - 4rABB' + r^2AB'^2 + 4rB^2A' - 4AB^2 + 4A^2B^2] \quad (2.17)$$

Con estas cantidades ya calculadas, por medio de las ecuaciones (2.12-2.16) y (2.17) encontramos que las componentes del Tensor de Einstein (2.9) son

$$G_{00} = \frac{B}{r^2 A^2} [rA' - A + A^2] \quad (2.18)$$

$$G_{01} = \frac{\dot{A}}{rA} \quad (2.19)$$

$$G_{11} = \frac{1}{Br^2} [rB' + B - AB] \quad (2.20)$$

$$G_{22} = \frac{r}{4A^2 B^2} [-2B^2 A' + 2ABB' + 2rABB'' - rBA'B' - 2rAB\ddot{A} + rB\dot{A}^2 + rA\dot{A}\dot{B} - rAB'^2] \quad (2.21)$$

$$G_{33} = \frac{r}{4A^2 B^2} [-2rB^2 A' + 2rB^2 A' \cos^2(\theta) + 2rABB' - 2rABB' \cos^2(\theta) + 2r^2ABB'' - 2r^2ABB'' \cos^2(\theta) - r^2BA'B' + r^2BA'B' \cos^2(\theta) - r^2AB'^2 + r^2AB'^2 \cos^2(\theta) - 2r^2AB\ddot{A} + 2r^2AB\ddot{A} \cos^2(\theta) + r^2B\dot{A}^2 - r^2\dot{A}B \cos^2(\theta) + r^2A\dot{A}\dot{B} - r^2A\dot{A}\dot{B} \cos^2(\theta)] \quad (2.22)$$

donde por simetría se tiene que $G_{01} = G_{10}$, y el resto de las componentes del tensor son cero. Por otro lado, sabemos que las ecuaciones de Einstein con materia se expresan de la forma

$$G_{\alpha\beta} = \kappa_0 T_{\alpha\beta}, \quad (2.23)$$

donde $\kappa_0 = 8\pi G$. Sustituyendo las componentes del Tensor Energía-Momento (2.4-2.6) y las componentes del tensor de Einstein (2.18-2.20) en la ecuación (2.23) se llega a

$$A' = \frac{\kappa_0 r A}{2} [AB^{-1}\dot{\Phi}^2 + \Phi'^2 + 2AV(\Phi)] - \frac{A}{r}(A-1), \quad (2.24)$$

$$\dot{A} = \kappa_0 r \dot{\Phi} \Phi', \quad (2.25)$$

$$B' = \frac{\kappa_0 r B}{2} [\Phi'^2 + AB^{-1}\dot{\Phi}^2 - 2AV(\Phi)] + \frac{B}{r}(A-1), \quad (2.26)$$

que es el sistema de ecuaciones de Einstein. De la conservación del Tensor Energía-Momento

$$\begin{aligned} T_{;\beta}^{\alpha\beta} &= (\Phi^{;\alpha}\Phi^{;\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[\Phi^{;\lambda}\Phi_{;\lambda} + 2V(\Phi)])_{;\beta} = 0, \\ &= \Phi^{\alpha}(\square\Phi - \frac{dV}{d\Phi}) = 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

identificamos la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar Φ

$$\square\Phi - \frac{dV}{d\Phi} = 0, \quad (2.28)$$

donde $\square = \nabla^{\beta}\nabla_{\beta}$ es el operador d'Alambertiano.

¿Cómo escribimos esta ecuación en términos de A y B ?

Para una métrica general el operador d'Alambertiano es de la forma:

$$\square\Phi = \nabla^{\beta}\nabla_{\beta}\Phi = \nabla_{\beta}\Phi^{;\beta} = \Phi^{;\beta}_{;\beta}. \quad (2.29)$$

Ahora, si tomamos en cuenta que

$$A^{;\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\sqrt{-g}A^{\mu}), \quad (2.30)$$

podemos expresar el d'Alambertiano de la función Φ para una métrica general de la siguiente forma

$$\square\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha}). \quad (2.31)$$

Sustituyendo (2.31) en (2.28) se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha}) - \frac{dV}{d\Phi} = 0. \quad (2.32)$$

Así tenemos que la ecuación de Klein-Gordon (KG) para el campo escalar Φ se expresa como:

$$\Phi'' + \Phi' \left(\frac{2}{r} - \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} \right) - A \frac{dV}{d\Phi} = \frac{A}{B} \left[\ddot{\Phi} + \dot{\Phi} \left(\frac{\dot{A}}{2A} - \frac{\dot{B}}{2B} \right) \right]. \quad (2.33)$$

Con lo que, finalmente, el sistema de ecuaciones EKG que vamos a resolver es:

$$\begin{aligned} A' &= \frac{\kappa_0 r A}{2} [AB^{-1} \dot{\Phi}^2 + \Phi'^2 + 2AV(\Phi)] - \frac{A}{r} (A-1), \\ \dot{A} &= \kappa_0 r \dot{\Phi} \Phi', \\ B' &= \frac{\kappa_0 r B}{2} [\Phi'^2 + AB^{-1} \dot{\Phi}^2 - 2AV(\Phi)] + \frac{B}{r} (A-1), \\ \frac{A}{B} \left[\ddot{\Phi} + \dot{\Phi} \left(\frac{\dot{A}}{2A} - \frac{\dot{B}}{2B} \right) \right] &= \Phi'' + \Phi' \left(\frac{2}{r} - \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} \right) - \frac{dV}{d\Phi}. \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones EKG que obtuvimos es válido para cualquier potencial. Como mencionamos en la introducción, nosotros utilizaremos un potencial de orden cuarto dado por,

$$V(\Phi) = m_{\Phi}^2 \left[\frac{\Phi^2}{2} + \Lambda \kappa_0 \frac{\Phi^4}{4} \right]. \quad (2.34)$$

Con el propósito de disminuir un poco la no-linealidad del sistema de ecuaciones anterior, se hace la siguiente definición [5]

$$C(t, r) = \frac{A(t, r)}{B(t, r)}, \quad (2.35)$$

Introduciendo la nueva variable en el sistema de ecuaciones anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \kappa_0 r A \dot{\Phi} \Phi' \\ A' &= \frac{A \kappa_0 r}{2} \left[C \dot{\Phi}^2 + \Phi'^2 + 2 A m_{\Phi}^2 \left(\frac{\Phi^2}{2} + \Lambda \kappa_0 \frac{\Phi^4}{4} \right) \right] + \frac{A}{r} (1 - A) \\ C' &= \frac{2C}{r} \left[1 + A \left(\kappa_0 r^2 m_{\Phi}^2 \left[\frac{\Phi^2}{2} + \Lambda \kappa_0 \frac{\Phi^4}{4} \right] - 1 \right) \right] \\ C \ddot{\Phi} &= -\frac{\dot{C} \dot{\Phi}}{2} + \Phi'' + \left(\frac{2}{r} - \frac{C'}{2C} \right) \Phi' - A m_{\Phi}^2 [\Phi + \Lambda \kappa_0 \Phi^3], \end{aligned} \quad (2.36)$$

recordando que $\dot{} = \frac{\partial}{\partial t}$ y $' = \frac{\partial}{\partial r}$.

Para propósitos numéricos, realizamos los siguientes cambios de variables $x = m_{\Phi} r$ (por lo que $\frac{\partial}{\partial r} = m_{\Phi} \frac{\partial}{\partial x}$), $C \rightarrow C \Omega^{-1}$ donde $\Omega = \omega / m_{\Phi}$ y $\Phi \rightarrow \sqrt{\kappa_0} \Phi$, de tal forma que al introducir estos cambios en el sistema de ecuaciones (2.36) se encuentra

$$\dot{A} = xA\dot{\Phi}\Phi' \quad (2.37)$$

$$A' = \frac{xA}{2} \left[\frac{C\dot{\Phi}^2}{\omega^2} + \Phi'^2 + 2A \left(\frac{\Phi^2}{2} + \Lambda \frac{\Phi^4}{4} \right) \right] + \frac{A}{x} (1 - A) \quad (2.38)$$

$$C' = \frac{2C}{x} \left[1 + A \left(x^2 \left[\frac{\Phi^2}{2} + \Lambda \frac{\Phi^4}{4} \right] - 1 \right) \right] \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \Phi'' = & \frac{C\ddot{\Phi}}{\omega^2} + \frac{\dot{C}\dot{\Phi}}{2\omega^2} - \frac{\Phi'}{x} + \frac{\Phi'A}{x} \left(x^2 \left[\frac{\Phi^2}{2} + \Lambda \frac{\Phi^4}{4} \right] - 1 \right) + \\ & A(\Phi + \Lambda\Phi^3), \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde ha desaparecido κ_0 , y en los términos donde aparecen derivadas temporales, se tiene la frecuencia en el denominador de tal forma que después de tomar la derivada con respecto a t no aparecerá en las ecuaciones la frecuencia ω , así que ésta no necesita ser un *input* en el código. En la siguiente sección daremos las condiciones de frontera de las ecuaciones (2.37-2.40).

2.2. Condiciones de Frontera

Las soluciones que buscamos son de la forma:

$$\Phi(t, x) = \sum_{j=1}^{J_{max}} \Phi_{2j-1}(x) \cos((2j-1)\omega t) \quad (2.41)$$

$$A(t, x) = \sum_{j=0}^{J_{max}} A_{2j}(x) \cos(2j\omega t) \quad (2.42)$$

$$C(t, x) = \sum_{j=0}^{J_{max}} C_{2j}(x) \cos(2j\omega t) \quad (2.43)$$

Donde sólo los coeficientes impares de la expansión del campo escalar y los

coeficientes pares de las expansiones de las funciones métricas son requeridos.

Para las condiciones de frontera se toma en cuenta que las funciones $A(t, x)$, $B(t, x)$ y $\Phi(t, x)$ deben ser no-singulares y asintóticamente planas.

Tomemos el caso cuando $x \rightarrow 0$. De la ecuación (2.38)

$$A' = \frac{x A}{2} \left[\frac{C \dot{\Phi}^2}{\omega^2} + \Phi'^2 + 2A \left(\frac{\Phi^2}{2} + \Lambda \frac{\Phi^4}{4} \right) \right] + \frac{A}{x} (1 - A)$$

vemos que en el primer término no se presentan problemas pues éste tiende a cero, mientras que para el segundo término se pediría que

$$A(t, x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

o al menos $(1 - A) \approx x$ para $|x| \ll 1$, para que éste fuera finito. Así que de la expresión (2.42) se tiene que

$$A_0(x=0) = 1 \quad A_2(x=0) = A_4(x=0) = \dots = 0 \quad (2.44)$$

Analícemos ahora la ecuación (2.38)

$$C' = \frac{2C}{x} \left[1 + A(x^2 \left[\frac{\Phi^2}{2} + \Lambda \frac{\Phi^4}{4} \right]) - 1 \right]$$

cuando $x \rightarrow 0$ se tiene que $C' = \frac{2C}{x} [1 - A]$ pero como $A(t, x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, entonces C' es finita.

Ahora para

$$\Phi'' = \frac{C\ddot{\Phi}}{\omega^2} + \frac{\dot{C}\dot{\Phi}}{2\omega^2} - \frac{\Phi'}{x} + \frac{\Phi' A}{x} \left(x^2 \left[\frac{\Phi^2}{2} + \Lambda \frac{\Phi^4}{4} \right] - 1 \right) + A(\Phi + \Lambda\Phi^3)$$

cuando $x \rightarrow 0$ y $A(t, x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ se llega a

$$\Phi'' = \frac{C\ddot{\Phi}}{\omega^2} + \frac{\dot{C}\dot{\Phi}}{2\omega^2} - 2\frac{\Phi'}{x} + (\Phi + \Lambda\Phi^3)$$

entonces, para que Φ'' sea finita se pide que $\Phi'(t, x=0) = \Psi(t, x=0) = 0$, y de la derivada espacial de la expresión (2.41) se obtiene que

$$\Phi'_j(x=0) = \Psi_j(x=0) = 0. \quad (2.45)$$

Para que $\Phi(t, x)$, $A(t, x)$ y $C(t, x)$ cumplan con ser asintóticamente planas deben satisfacer lo siguiente

- Φ debe anularse en el infinito, de esta forma y según la expresión (2.41) todos los coeficientes de esa expansión deben anularse

$$\phi_j(x \rightarrow \infty) = 0; \quad (2.46)$$

- Nuevamente, de la expresión (2.42), para que $A(t, x \rightarrow \infty) = 1$ se satisfaga, todos los coeficientes que multipliquen a la función coseno deben anularse, sino fuera así A oscilaría en el infinito. De modo que

$$A_0(x \rightarrow \infty) = 1 \quad A_j(x \rightarrow \infty) = 0 \quad \forall j \geq 1 \quad (2.47)$$

- De las propiedades anterior para A y como $B(t, x) = \frac{A(t, x)}{C(t, x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$

de aquí que $C(t, x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$, pero recordemos el cambio de variable que se hizo anteriormente $C(t, x) \rightarrow \frac{C(t, x)}{\Omega^2}$, así pues, se pide que $C(t, x = \infty) = \Omega^2$ y de la expresión (2.43) se obtiene que

$$C_0(x \rightarrow \infty) = \Omega^2 \quad C_j(x \rightarrow \infty) = 0 \quad \forall j \geq 1 \quad (2.48)$$

Como podemos observar del análisis anterior, no se obtuvo ningún valor para $\Phi(t, x = 0)$ y $C(t, x = 0)$, así pues, se tendrán que proponer los valores de éstas de tal forma que se satisfagan las condiciones de frontera para $x \rightarrow \infty$. Este es el tipo de problema conocido como problema de valor propio con dos puntos de frontera, cuya solución se obtiene utilizando el así llamado Método del Disparo, que veremos en la primera sección del siguiente capítulo.

Capítulo 3

Algoritmos Numéricos

3.1. Generalidades del Método del Disparo No-lineal

Haremos una descripción de como funciona el “Método del Disparo No-lineal”, pues nos basaremos en este método para poder encontrar los valores más apropiados para $\Phi(t, x = 0)$ y $C(t, x = 0)$, de tal manera que se satisfagan las condiciones de frontera en el infinito.

Comenzaremos con un ejemplo simple para aclarar las ideas del procedimiento. Consideremos el siguiente problema no-lineal de segundo orden con valores a la frontera

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \quad (3.1)$$

entonces, utilizaremos las soluciones de una sucesión de problemas de valor inicial de la forma

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = t, \quad (3.2)$$

con un parámetro t , para aproximar la solución al problema de valor de frontera. Escogemos el parámetro $t = t_k$ de manera que se cumpla que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(b, t_k) = \beta, \quad (3.3)$$

con $y(x, t_k)$ la solución al problema de valor inicial (3.2) con $t = t_k$ y $y(x)$ la solución al problema de valor de frontera (3.1).

El nombre del método es por analogía con el tiro o disparo de objetos contra un blanco fijo. Comenzamos con un parámetro t_0 que determina la elevación a la cual se dispara el objeto desde un punto (a, α) y a lo largo de la curva descrita por la solución al problema de valores iniciales

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(b) = t_0.$$

Si $y(b, t_0)$ no está lo suficientemente cerca a β , entonces se toman otros valores t_1, t_2, \dots , para corregir la aproximación y así sucesivamente hasta que $y(b, t_k)$ esté lo suficientemente cerca de β tal como se muestra en la figura (3.1).

Así pues, debemos determinar el valor de t el cual cumpla con

$$y(b, t) - \beta = 0. \quad (3.4)$$

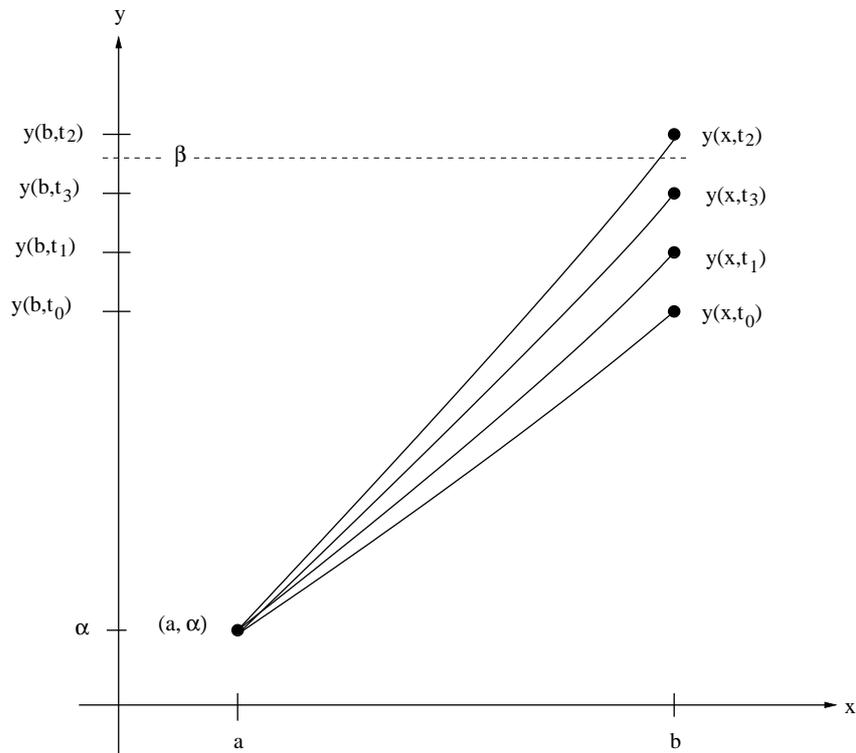


Figura 3.1: Se realizan los “disparos” necesarios de manera que $y(b, t_k) = \beta$

Esto es un problema de calcular las raíces de una función. Se cuentan con varios métodos para resolver este tipo de problemas. Para este problema ilustrativo, se utiliza el “Método de Newton”, en el que se requiere un valor inicial t_0 , pues la iteración con la que se calculará t_k es de la forma,

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{\frac{dy}{dt}(b, t_{k-1})} \quad (3.5)$$

entonces debemos conocer el valor de $\frac{dy}{dt}(b, t_{k-1})$, pero no conocemos una forma explícita de $y(b, t)$; sólo tenemos los valores $y(b, t_0)$, $y(b, t_1)$, $y(b, t_2)$, \dots , $y(b, t_{k-1})$.

Reescribiendo el problema de valor inicial (3.2), enfatizando que la solución depende tanto de x como de t ,

$$y''(x, t) = f(x, y(x, t), y'(x, t)) \quad a \leq x \leq b, \quad y(a, t) = \alpha, \quad y'(a, t) = t \quad (3.6)$$

Como estamos interesados en $\frac{dy}{dt}(b, t)$ para $t = t_{k-1}$, entonces tomemos la derivada parcial de (3.6) con respecto a t

$$\frac{\partial y''}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y'}{\partial t}(x, t) \quad (3.7)$$

para $a \leq x \leq b$. De las condiciones iniciales de (3.6) se tiene

$$\frac{\partial y}{\partial t}(a, t) = 0 \quad y \quad \frac{\partial y'}{\partial t}(a, t) = 1. \quad (3.8)$$

Sea $z(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$, y suponiendo que el orden de diferenciación de x y t se puede invertir, la ecuación (3.7) junto con las condiciones iniciales (3.8) se convierten en un problema de valores iniciales de la forma

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')z + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')z', \quad a \leq x \leq b, \quad z(a, t) = 0, \quad z'(a, t) = 1 \quad (3.9)$$

Entonces, el Método de Newton requiere resolver dos problemas de valores iniciales para cada iteración: (3.6) y (3.9), los cuales se pueden resolver con cualquier integrador como los métodos de Runge Kutta. Así obtendremos t_k por medio de

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{z(b, t_{k-1})}. \quad (3.10)$$

La aplicación del método del disparo a nuestro problema se complica mucho más porque tenemos un conjunto de $nvar$ ecuaciones diferenciales que deben satisfacer las condiciones de frontera antes mencionadas, y se ajustan algunos valores en $r = 0$, de tal manera que se cumplan las condiciones de frontera en “infinito”. Esto conduce a la solución de sistemas de ecuaciones no-lineales. Y la complicación viene del hecho de la no existencia de un método general “bueno” para resolver sistemas de ecuaciones no-lineales. El método que utilizamos es el de Newton-Raphson, que es muy eficiente si se da un buen valor inicial, que se “adivina”. Eso resulta en momentos en un proceso altamente tedioso. El método ya no lo explicaremos aquí, pero una exposición resumida se puede encontrar en [10].

Dado un valor de J_{max} , el número de ecuaciones que se deben resolver sería $nvar = 4J_{max} + 2$. Como mencionamos, el número J_{max} utilizado comúnmente es 2, para lo cual se tendrían 10 ecuaciones. Hay una manera de reducir esta cantidad, si utilizamos la condición algebraica $\dot{A} = xA\dot{\Phi}\Phi'$, podemos conservar la ecuación para A_0 y calcular algebraicamente los valores de A_2, A_4, \dots , de hecho, se calculan resolviendo un sistema matricial lineal. De esta manera $nvar = 3J_{max} + 2$. Adicionalmente, el número de variables a ajustar por el método del disparo, se reduce. Y esto es valioso por lo mencionado en el párrafo anterior.

Como ya mencionamos anteriormente, tomaremos la idea de este método para poder dar valores a coeficientes en el punto inicial $x = 0$ de tal forma que se satisfagan las condiciones de frontera de éstas funciones en el punto final. La parte del código con el cual se obtienen estos valores se presenta a continuación

```
while( x2 <= xmax){
```

```

    newt(v,N2,&check,shoot);
if (check) {
    printf("shoot failed, bad initial guess\n");
}
else {
    printvs(x2,v);
}
x2 += dex;
}

load(x1,v,y);

for(i=1;i<=N;i++) A[i]=0.0;
A[0]=y[1];
imprimir(0.0,y);
for(x2= DELTA; x2<= xmax; x2 += DELTA){
    h1=1.0e-5; hmin=0.0;
    odeint(y,nvar,x1,x2,EPS1,h1,hmin,&nok,&nbad,derivs,rkqs);
    matriz(x2,y);
    imprimir(x2,y);
    x1=x2;
}
mass_freq(xmax,y);

```

Se proponen los primeros valores de los elementos $C_j(0)$ para $j = 0, 2, 4, \dots$ y $\phi_j(0)$ para $j = 3, 5, \dots$, y con ayuda de “newt” (en la cual esta implícita la función “shoot” del disparo no-lineal) se obtienen los valores más adecuados para dichos elementos para que se satisfagan las condiciones de frontera en x_2 (para el cual se da un valor inicial), se usan esos valores de $\vec{v} = (C_0, \dots, \phi_3, \dots)$ para volverlos a ajustar para que se satisfagan las condiciones de frontera en $x_2 = x_2 + dex$, hasta alcanzar el valor de x_{max} que es nuestro “infinito”. En $load(x_1, v, y)$ se “cargan” las condiciones iniciales (con los valores ajustados de

\vec{v}) para que se integren las ecuaciones para $\vec{y} = (A_0, C_0, C_2, \dots, \phi_1, \phi_3, \dots, \xi_1, \dots)$, donde $\xi_j = \phi'_j$. Es importante señalar que el valor que proponemos para $\phi_1(0)$, no se ajusta, permanece constante durante toda la ejecución de nuestro código, y funge como la variable independiente de la cual dependerán, la masa de nuestro sistema y la frecuencia fundamental.

3.2. Cálculo de los Términos No-lineales

Como mencionamos en el capítulo dos, las soluciones que buscamos son

$$\Phi(t, x) = \sum_{j=1}^{J_{max}} \Phi_{2j-1}(x) \cos((2j-1)\omega t) \quad (3.11)$$

$$A(t, x) = \sum_{j=0}^{J_{max}} A_{2j}(x) \cos(2j\omega t) \quad (3.12)$$

$$C(t, x) = \sum_{j=0}^{J_{max}} C_{2j}(x) \cos(2j\omega t) \quad (3.13)$$

Entonces al sustituir estas soluciones y sus derivadas tanto temporales como espaciales en el sistema de ecuaciones (2.38-2.40) obtenemos productos de términos como: $A(t, x)C(t, x)$, $C'(t, x)\Phi'(t, x)$, $A(t, x)^2$, $\Phi'(t, x)\dot{\Phi}(t, x)$, por mencionar algunos. Así tendremos ecuaciones para los coeficientes de las expansiones de los campos, por ejemplo, las ecuaciones para C_j serán

$$\frac{dC_k}{dx} = \frac{2}{x}C_k + x \langle CA\Phi^2 \rangle_k + \frac{\Gamma x}{2} \langle CA\Phi^4 \rangle_k - \frac{2}{x} \langle AC \rangle_k \quad (3.14)$$

donde $\langle CA\Phi^2 \rangle_k$ son los coeficientes de la expansión de la función producto $C(x, t)$, $A(x, t)$ y $\Phi(x, t)$. Para el caso de $J_{max} = 1$ calcular dichos

productos no nos llevará tanto tiempo, pero para el caso $J_{max} \geq 2$ realizar los cálculos directamente se vuelven muy largos. Es por eso que, para simplificar dichos cálculos utilizaremos algunas identidades trigonométricas y el Teorema de Convulsión, el cual nos dice que si tenemos dos funciones de la forma $f = \sum_{j=0}^{J_{max}} f_j \cos(j\omega t)$ y $g = \sum_{p=0}^{J_{max}} g_p \cos(p\omega t)$ entonces la función producto $P(x, t) = f(x, t)g(x, t)$ se expande como

$$P = (fg) = \sum_{l=0}^{J_{max}} P_l \cos(l\omega t), \quad (3.15)$$

donde los coeficientes de la expansión están dados por

$$P_0 = f_0 g_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J_{max}} f_j g_j \quad (3.16)$$

$$P_k = \frac{1}{2} \sum_{|j-p|=k} f_j g_p + \frac{1}{2} \sum_{j+p=k} f_j g_p \quad (3.17)$$

Este resultado, provee de un algoritmo directo para la obtención de los coeficientes del lado derecho de las ecuaciones como (3.14). Haciendo uso del teorema, por ejemplo la siguiente función usada en el código

```
void nonlinear(double a[],double c[], double pr[])
{
    extern int nnn;
    int j,p,k;
    double sum1,sum2;

    for(k=0;k<=nnn;k++){
        for(j=0,sum1=0.0,sum2=0.0;j<= nnn;j++){
```

```

        for(p=0;p<= nnn;p++){
            if(abs(j-p)==k) sum1 += a[j]*c[p];
            if((j+p)==k) sum2 += a[j]*c[p];
        }
    }
    pr[k]= 0.5*sum1 + 0.5*sum2;
}
}

```

nos permite calcular los coeficientes pr_k del producto de funciones $f = \sum_k^{J_{max}} a_k \cos(k\omega t)$ y $g = \sum_l^{J_{max}} c_l \cos(l\omega t)$, en terminos de a_k , c_k que en la práctica pueden ser A_{2j} , C_{2j} , ϕ_{2j-1} o ϕ'_{2j-1} .

Las funciones “phi2d” y “phidot2” del código, nos permiten calcular los coeficientes de la expansión de las funciones $\ddot{\Phi}(t, x)$ y $\ddot{\Phi}(t, x)^2$ respectivamente,

```

void phi2d(double phi[], double phidd[])
{
    extern nnn;
    int j;

    phidd[0]=0.0;
    for(j=1;j<=nnn;j++)
        phidd[j]= -j*j*phi[j];
}

```

```

void phidot2(double phi[], double t[])
{
    extern nnn;
    int j,p,k;
    double sum1,sum2;

```

```

for(j=1,sum1=0.0;j<=nnn;j++) sum1 += j*j*phi[j]*phi[j];
    t[0]= 0.5*sum1;

for(k=1;k<=nnn;k++){
    for(j=1,sum1=0.0,sum2=0.0;j<=nnn;j++){
        for(p=1;p<= nnn;p++){
            if(abs(j-p)==k) sum1 += j*p*phi[j]*phi[p];
                if( (j+p)== k ) sum2 += j*p*phi[j]*phi[p];
        }
    }
    t[k]= 0.5*sum1 - 0.5*sum2;
}
}

```

Entonces, utilizando las funciones anteriores es como calcularemos el lado derecho de las ecuaciones (2.38-2.40) y así resolviendo este sistema es como encontraremos los valores de $A_0(x)$, $C_{2j}(x)$ y $\phi_{2j-1}(x)$.

3.3. Restricción Algebraica

Hasta ahora hemos ilustrado la forma en que resolveremos el sistema de ecuaciones (2.38-2.40) y por medio del cual encontraremos los valores para la primer componente $A_0(x)$ de la función $A(t, x)$ y los coeficientes de las funciones $C(t, x)$ y $\Phi(t, x)$. Pero aún nos resta saber como encontraremos los valores de las componentes $A_{2j}(x) \forall j > 0$.

Retomemos la restricción

$$\dot{A} = xA\dot{\Phi}\Psi \quad (3.18)$$

con $\Psi(t, x) = \dot{\Phi}'(t, x)$. De aquí, dados los coeficientes A_0 y $\phi_1, \phi_3, \dots, \psi_1, \psi_3, \dots$, queremos despejar los valores de A_2, A_4, \dots . Con este fin, sustituimos las expansiones

$$A(t, x) = \sum_{k=0}^{J_{max}} A_{2k} \cos(2k\omega t) \quad (3.19)$$

$$\Phi(t, x) = \sum_{p=1}^{J_{max}} \phi_{2p-1} \cos((2p-1)\omega t) \quad (3.20)$$

$$\Psi(t, x) = \sum_{l=1}^{J_{max}} \psi_{2l-1} \cos((2l-1)\omega t), \quad (3.21)$$

en la restricción (3.18)

$$\begin{aligned} -2\omega \sum_{k=1}^{J_{max}} k A_{2k} \sin(2k\omega t) &= -x\omega \sum_{j=0}^{J_{max}} \sum_{l,p=1}^{J_{max}} (2p-1) A_{2j} \phi_{2p-1} \psi_{2l-1} \cos(2j\omega t) \\ &\quad \sin((2p-1)\omega t) \cos((2l-1)\omega t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Multiplicaremos por el factor $-\frac{1}{\omega}$ y usaremos algunas identidades trigonométricas en la expresión (3.22)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{J_{max}} 2k A_{2k} \sin(2k\omega t) &= \frac{x}{2} \sum_{j=0}^{J_{max}} \sum_{p,l=1}^{J_{max}} (2p-1) A_{2j} \phi_{2p-1} \psi_{2l-1} [\cos((|2j-2l+1|)\omega t) \\
&\quad + \cos((2j+2l-1)\omega t)] \sin((2p-1)\omega t) \\
&= \frac{x}{4} \sum_{j=0}^{J_{max}} (2p-1) A_{2j} \phi_{2p-1} \psi_{2l-1} [\sin((2p-1-|2j-2l+1|)\omega t) \\
&\quad + \sin((2p-1+|2j-2l+1|)\omega t) \\
&\quad + \sin((2p-1-2j-2l+1)\omega t) + \sin((2p-1+2j+2l-1)\omega t)]
\end{aligned}$$

donde $2p-1 \geq 1$ pues $p = 1, 2, \dots, J_{max}$, y como $j, l = 1, 2, \dots, J_{max}$ de aquí que $|2j-2l+1| > 1$ y entonces $2p-1+|2j-2l+1| > 0$ y también $2p-1+2j+2l-1 > 0$.

Multiplicando la expresión anterior por $\sin(2n\omega t)$ con $n > 0$ e integrado de 0 a $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Integrando primero el lado izquierdo y recordando que $\sin(j\omega t)$ es una base ortonormal,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{J_{max}} 2k A_{2k} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(2k\omega t) \sin(2n\omega t) dt &= \sum_{k=1}^{J_{max}} 2k A_{2k} \delta_{2n,2k} \left(\frac{\pi}{\omega} \right) \\
&= 2n A_{2n} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)
\end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
2nA_{2n}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= \frac{x}{4} \sum_{j=0}^{J_{max}} \sum_{p,l=1}^{J_{max}} (2p-1)A_{2j}\phi_{2p-1}\psi_{2l-1} \left[\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin((2p-1-|2(j-l)+1|)\omega t) \right. \\
&\quad \sin(2n\omega t)dt + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin((2p-1+|2j-2l+1|)\omega t) \sin(2n\omega t)dt + \\
&\quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(2(p-j-l)\omega t) \sin(2n\omega t)dt + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(2(p+j+l-1)\omega t) \\
&\quad \left. \sin(2n\omega t)dt \right] \\
&= \frac{x}{4} \sum_{j=0}^{J_{max}} \sum_{p,l=1}^{J_{max}} (2p-1)A_{2j}\phi_{2p-1}\psi_{2l-1} \left[\frac{\phi}{\omega} \delta_{2n,2p-1+|2(j-l)+1|} + \frac{\pi}{\omega} \delta_{2n,2(p+j+l-1)} \right. \\
&\quad + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin((2p-1-|2(j-l)+1|)\omega t) \sin(2n\omega t)dt + \\
&\quad \left. \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(2(p-j-l)\omega t) \sin(2n\omega t)dt \right] \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Sea la integral de la forma

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(\xi_{p,j,l}\omega t) \sin(2n\omega t)dt \tag{3.24}$$

si $\xi_{p,j,l} > 0$, entonces la integral es

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(\xi_{p,j,l}\omega t) \sin(2n\omega t)dt = \delta_{\xi_{p,j,l},2n}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) \tag{3.25}$$

pero si $\xi_{p,j,l} < 0$, la integral (3.24) será

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(\xi_{p,j,l}\omega t) \sin(2n\omega t) dt &= - \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(|\xi_{p,j,l}|\omega t) \sin(2n\omega t) dt \\
&= -\delta_{|\xi_{p,j,l}|, 2n} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Así que si $\xi_{p,j,l} = 2p - 1 - |2j - 2l + 1| > 0$ la integral (3.25) será distinta de cero si $\delta_{2p-1-|2j-2l+1|, 2n}$ e igual a $\frac{\pi}{\omega}$. Si $\xi_{p,j,l} = 2p - 1 - |2j - 2l + 1| < 0$ la integral (3.26) será distinta de cero si $\delta_{2p-1-|2j-2l+1|, -2n}$ e igual a $-\frac{\pi}{\omega}$. Se sigue el mismo análisis para $\xi_{p,j,l} = 2(p - j - l)$.

De acuerdo con el resultado anterior, de la ecuación (3.23) se sigue,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\omega} 2n A_{2n} &= \frac{x}{4} \left[\sum_{2p-1+|2j-2l+1|=2n} (2p-1) A_{2j} \phi_{2p-1} \psi_{2l-1} + \right. \\
&\quad \sum_{2(p+j+l-1)=2n} (2p-1) A_{2j} \phi_{2p-1} \psi_{2l-1} \pm \\
&\quad \sum_{2p-1-|2(j-l)+1|=\pm 2n} (2p-1) A_{2j} \phi_{2p-1} \psi_{2l-1} \pm \\
&\quad \left. \sum_{2p-2(j+l)=\pm 2n} (2p-1) A_{2j} \phi_{2p-1} \psi_{2l-1} \right] \frac{\pi}{\omega}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Estamos buscando una expresión de la cual podamos obtener los valores de A_2, A_4, \dots , cuando A_0 es conocido. Entonces expresemos la ecuación (3.27) de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
2nA_{2n} &= \frac{x}{4}(\mathcal{S}_{j=0} + \mathcal{S}_{j \neq 0}) \\
&= \frac{x}{4}[\pm \sum_{2p-1-|1-2l|=\pm 2n} (2p-1)\phi_{2p-1}\psi_{2l-1} + \\
&\quad \sum_{2p-1+|1-2l|=2n} (2p-1)\phi_{2p-1}\psi_{2l-1} \pm \\
&\quad \sum_{2(p-l)=\pm 2n} (2p-1)\phi_{2p-1}\psi_{2l-1} + \\
&\quad \sum_{2(p+l-1)=2n} (2p-1)\phi_{2p-1}\psi_{2l-1}]A_0 + \frac{x}{4}\mathcal{S}_{j \neq 0} \quad (3.28)
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{j \neq 0} &= \pm \sum_{2p-1-|2(j-l)+1|=\pm 2n} (2p-1)A_{2j}\phi_{2p-1}\psi_{2l-1} + \\
&\quad \sum_{2p-1+|2j-2l+1|=2n} (2p-1)A_{2j}\phi_{2p-1}\psi_{2l-1} \\
&\pm \sum_{2p-2(j+l)=\pm 2n} (2p-1)A_{2j}\phi_{2p-1}\psi_{2l-1} + \\
&\quad \sum_{p+j+l-1=n} (2p-1)A_{2j}\phi_{2p-1}\psi_{2l-1} \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Tenemos que $l = 1, 2, 3, \dots, J_{max}$, entonces $2l > 1$ y $|1 - 2l| = 2l - 1$, así que $2p - 1 - |1 - 2l| = 2p - 1 - 2l + 1 = 2(p - l)$, tomando en cuenta este resultado en la expresión (3.28)

$$\begin{aligned}
2nA_{2n} &= \frac{x}{4} \left[\pm \sum_{p-l=\pm n} (2p-1)\phi_{2p-1}\psi_{2l-1} + \sum_{p+l-1=n} (2p-1)\phi_{2p-1}\psi_{2l-1} \right. \\
&\quad \left. \pm \sum_{p-l=\pm n} (2l-1)\phi_{2p-1}\psi_{2l-1} + \sum_{p+l-1=n} (2p-1)\phi_{2p-1}\psi_{2l-1} \right] A_0 \\
&\quad + \frac{x}{4} \mathcal{S}_{j \neq 0} \\
&= \frac{x}{2} \left[\pm \sum_{p-l=\pm n} \Lambda_{pl} + \sum_{p+l-1=n} \Lambda_{pl} \right] A_0 + \frac{x}{4} \mathcal{S}_{j \neq 0} \\
\frac{x}{4} \mathcal{S}_{j \neq 0} - 2nA_{2n} &= -\frac{x}{2} \left[\pm \sum_{p-l=\pm n} \Lambda_{pl} + \sum_{p+l-1=n} \Lambda_{pl} \right] A_0 \\
&= \mathcal{B}_n
\end{aligned} \tag{3.30}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{j \neq 0} &= \pm \sum_{2p-1-|2(j-l)+1|=\pm 2n} \Lambda_{pl} A_{2j} + \sum_{2p-1+|2(j-l)+1|=2n} \Lambda_{pl} A_{2j} \pm \\
&\quad \sum_{2p-2(j+l)=\pm 2n} \Lambda_{pl} A_{2j} + \sum_{p+j+l-1=k} \Lambda_{pl} A_{2j}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

donde hemos usado la notación $\Lambda_{pl} = (2p-1)\phi_{2p-1}\psi_{2l-1}$ y $1 \leq n, l \leq J_{max}$ y $1 \leq p, l \leq j_{max}$, para simplificar las expresiones.

Por ejemplo, sustituyendo $n = 1$ en el lado derecho de la ecuación (3.30) con $1 \leq p, l \leq J_{max}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &= -\frac{x}{2} \left[\pm \sum_{p-l=\pm 1} \Lambda_{pl} + \sum_{p+l-1=1} \Lambda_{pl} \right] A_0 \\
&= -\frac{x}{2} \left[\Lambda_{21} + \Lambda_{32} + \Lambda_{43} + \cdots + \Lambda_{J_{max}(J_{max}-1)} \right. \\
&\quad \left. - \Lambda_{12} - \Lambda_{23} - \Lambda_{34} - \cdots - \Lambda_{(J_{max}-1)J_{max}} + \Lambda_{11} \right] A_0 \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Sustituyendo $n = 1$ y los valores de j en el lado derecho de la ecuación (3.30)

$$\begin{aligned}
\frac{x}{4} \mathcal{S}_{j \neq 0} - 2A_2 &= \frac{x}{4} \left[\pm \sum_{2p-1-|3-2l|=\pm 2} \Lambda_{pl} A_2 + \sum_{2p-1+|3-2l|=2} \Lambda_{pl} A_2 \right. \\
&\quad \left. \pm \sum_{2p-2(1+l)=\pm 2} \Lambda_{pl} A_2 + \sum_{p+l=1} \Lambda_{pl} \right] - 2A_2 + \\
&\quad \frac{x}{4} \left[\pm \sum_{2p-1-|5-2l|=\pm 2} \Lambda_{pl} A_4 + \sum_{2p-1+|5-2l|=2} \Lambda_{pl} A_4 \right. \\
&\quad \left. \pm \sum_{2p-2(2+l)=\pm 2} \Lambda_{pl} A_4 + \sum_{p+l+1=1} \Lambda_{pl} A_4 \right] \\
&\quad \frac{x}{4} \left[\pm \sum_{2p-1-|7-2l|=\pm 2} \Lambda_{pl} A_6 + \sum_{2p-1+|7-2l|=2} \Lambda_{pl} A_6 \right. \\
&\quad \left. \pm \sum_{2p-2(3+l)=\pm 2} \Lambda_{pl} A_6 + \sum_{p+l+2=1} \Lambda_{pl} A_6 \right] + \cdots + \\
&\quad \frac{x}{4} \left[\pm \sum_{2p-1-|2J_{max}-2l+1|=\pm 2} \Lambda_{pl} A_{2J_{max}} + \sum_{2p-1+|2J_{max}-2l+1|=2} \right. \\
&\quad \left. \pm \sum_{2p-2(J_{max}+l)=\pm 2} \Lambda_{pl} A_{2J_{max}} + \sum_{p+J_{max}+l-1=1} \Lambda_{pl} A_{2J_{max}} \right] \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Ahora tomemos el caso $n = 2$, el lado derecho de la ecuación (3.30) nos queda como

$$\mathcal{B}_2 = -\frac{x}{2} \left[\pm \sum_{p-l=\pm 2} \Lambda_{pl} + \sum_{p+l-1=2} \Lambda_{pl} \right] A_0 \quad (3.34)$$

con $1 \leq p, l \leq J_{max}$. Desarrollando el lado izquierdo de la ecuación,

$$\begin{aligned}
\frac{x}{4}\mathcal{S}_{j \neq 0} - 4A_4 &= \frac{x}{4} \left[\pm \sum_{2p-1-|3-2l|=\pm 4} \Lambda_{pl} + \sum_{2p-1+|3-2l|=4} \Lambda_{pl} \pm \right. \\
&\quad \left. \sum_{2p-2(1+l)=\pm 4} \Lambda_{pl} + \sum_{p+l=2} \Lambda_{pl} \right] A_2 + \\
\frac{x}{4} \left[\pm \sum_{2p-1-|5-2l|=\pm 4} \Lambda_{pl} + \sum_{2p-1+|5-2l|=4} \Lambda_{pl} \pm \right. \\
&\quad \left. \sum_{2p-2(2+l)=\pm 4} \Lambda_{pl} + \sum_{p+l+1=2} \Lambda_{pl} \right] A_4 - 4A_4 + \dots + \\
\frac{x}{4} \left[\pm \sum_{2p-1-|2J_{max}-2l+1|=\pm 4} \Lambda_{pl} + \sum_{2p-1+|2J_{max}-2l+1|=4} \Lambda_{pl} \right. \\
&\quad \left. \pm \sum_{2p-2(J_{max}+l)=\pm 4} \Lambda_{pl} + \sum_{p+J_{max}+l-1=2} \Lambda_{pl} \right] A_{J_{max}} \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Si seguimos sustituyendo el valor de $n = 2, 3, \dots, J_{max}$ en la ecuación (3.30) y de acuerdo con (3.33) y (3.35) se observa que el lado izquierdo de (3.30) se puede expresar como

$$\frac{x}{4}\mathcal{S}_{j \neq 0} - 2nA_{2n} = \sum_{j=1}^{J_{max}} C_{nj} A_{2j} \quad (3.36)$$

con $n = 1, 2, \dots, J_{max}$. De aquí que (3.30) se puede expresar de la siguiente forma matricial,

$$\mathcal{C}\vec{A} = \vec{B}. \quad (3.37)$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{nj} &= \frac{x}{4} \left[\pm \sum_{2p-1-|2j-2l+1|=\pm 2n} \Lambda_{pl} + \sum_{2p-1+|2j-2l+1|=2n} \Lambda_{pl} \pm \right. \\
&\quad \left. \sum_{p-(j+l)=\pm n} \Lambda_{pl} + \sum_{p+j+l-1=n} \Lambda_{pl} \right] - 2j\delta_{nj}, \\
\mathcal{B}_n &= -\frac{x}{2} A_0 \left[\pm \sum_{p-l=\pm n} \Lambda_{pl} + \sum_{p+l-1=n} \Lambda_{pl} \right], \\
\Lambda_{pl} &= (2p-1)\phi_{2p-1}\psi_{2l-1}.
\end{aligned}$$

Así pues, solo debemos invertir la matriz \mathcal{C} de (3.37) para despejar \vec{A} y calcular algebraicamente sus componentes $A_2, A_4, \dots, A_{J_{max}}$.

Para invertir la matriz \mathcal{C} se utiliza el método de descomposición LU . Este método consiste en escribir la matriz \mathcal{C} como el producto de dos matrices

$$\mathcal{C} = \mathbf{L}\mathbf{U} \quad (3.38)$$

donde \mathbf{L} es una matriz triangular inferior (elementos diferentes de cero solo en la diagonal y abajo de la diagonal) y \mathbf{U} es una matriz triangular superior (elementos diferentes de cero solo en la diagonal y arriba de la diagonal). Entonces usando la descomposición (3.38) en la ecuación matricial (3.37)

$$\mathcal{C}\vec{A} = (\mathbf{L}\mathbf{U}) \cdot \vec{A} = \mathbf{L}(\mathbf{U}\vec{A}) = \vec{B} \quad (3.39)$$

Resolveremos la ecuación (3.39) en dos pasos. Primero

$$\mathbf{L}\vec{y} = \vec{b}$$

y después se resuelve

$$\mathbf{U}\vec{x} = \vec{y}$$

para encontrar \vec{x} . La ventaja de utilizar esta descomposición se debe a que es más sencillo resolver un sistema de ecuaciones triangular [10].

Como hemos mencionado antes, la importancia de utilizar la restricción algebraica (2.37) para obtener el valor de los coeficientes $A_2(x), \dots, A_{J_{max}}(x)$ es debido a que es más sencillo resolver algebraicamente una ecuación matricial de la forma (3.37), que resolver un sistema de ecuaciones diferenciales más numeroso. Es decir, que si no utilizáramos esta forma para encontrar los valores de dichos coeficientes, la otra manera sería aumentar el número de ecuaciones diferenciales en el sistema que estamos utilizando para obtener los valores de los coeficientes $A_0(x)$, $C_{2j}(x)$ y $\phi_{2j-1}(x)$, entonces al momento de resolver dicho sistema se invertiría más tiempo y esfuerzo.

Capítulo 4

Resultados Numéricos

Los resultados numéricos que se presentan a continuación fueron calculados usando $J_{max} = 2$, aunque hicimos corridas con J_{max} mayores, y en las conclusiones hacemos comentarios al respecto.

Para $J_{max} = 2$, se deben ajustar los valores de C_0, C_2, C_4 y ϕ_3 . El código provee el valor de la discrepancia entre el valor obtenido de esas cantidades en x_{max} , y el valor que deberían tener en el infinito. En la siguiente tabla se muestran algunos valores de estas discrepancias obtenidas al calcular los coeficientes $C_0(0), C_2(0), C_4(0)$ y $\phi_3(0)$.

	$\Lambda = 0.0$	$\Lambda = 1.0$	$\Lambda = 2.0$
$C_0(0)$	5.394823e-04	5.587557e-04	5.899836e-04
$C_2(0)$	3.696409e-08	2.054654e-08	5.684341e-07
$C_4(0)$	5.587952e-06	1.279695e-05	1.474446e-05
$\phi_3(0)$	4.324136e-08	6.960440e-08	1.176114e-07

En las gráficas (4.1) y (4.2) mostramos los resultados numéricos obtenidos para las funciones métricas $g_{xx} = A(t, x)$ y $g_{tt} = \frac{A(t, x)}{C(t, x)}$ donde el $\cos(2j\omega t) = 1$ ($\omega t = 0$ ó $\omega t = 2n\pi$), en estas gráficas podemos observar la no-singularidad

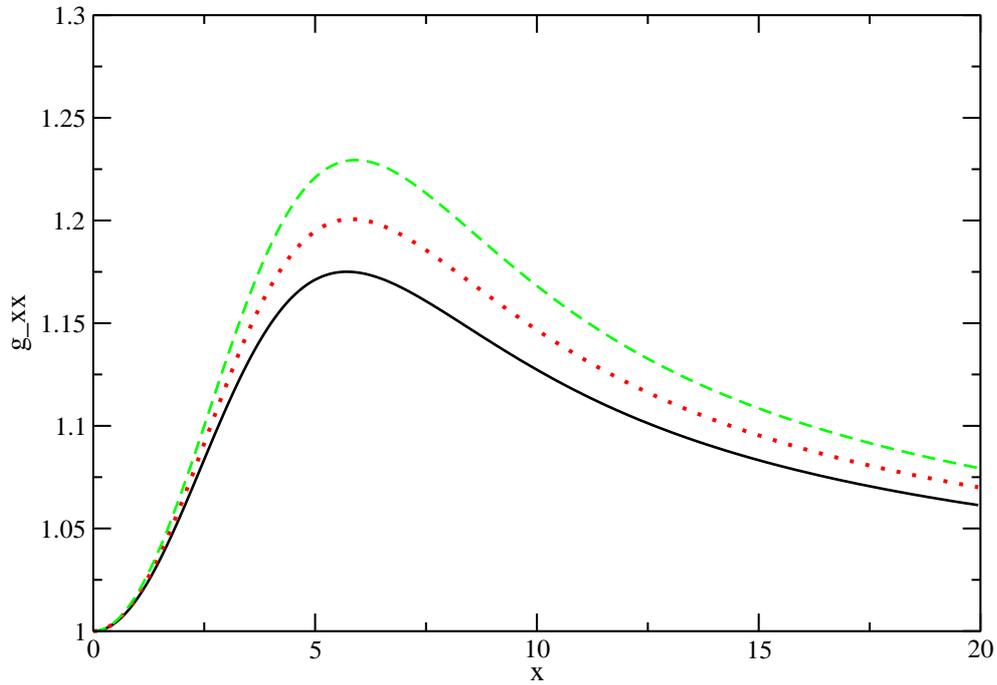


Figura 4.1: En esta gráfica se muestran los valores obtenidos para la función métrica g_{xx} para valores de $\Lambda = 0,0$ (—), $\Lambda = 1,0$ (···) y $\Lambda = 2,0$ (-) con $\phi_1(0) = 0,30$ y $\cos(2j\omega t) = 1$.

de las funciones y que tienden a ser asintóticamente planas.

Como ya se había dicho, la densidad de energía ρ_Φ del campo escalar Φ la obtenemos por medio de la ecuación (2.4). En (4.3) se grafica ρ_Φ para dos tiempos.

Para calcular la masa utilizamos la siguiente expresión,

$$M_\Phi = \frac{m_{Pl}^2}{m_\Phi} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} [1 - A^{-1}(t, x)]$$

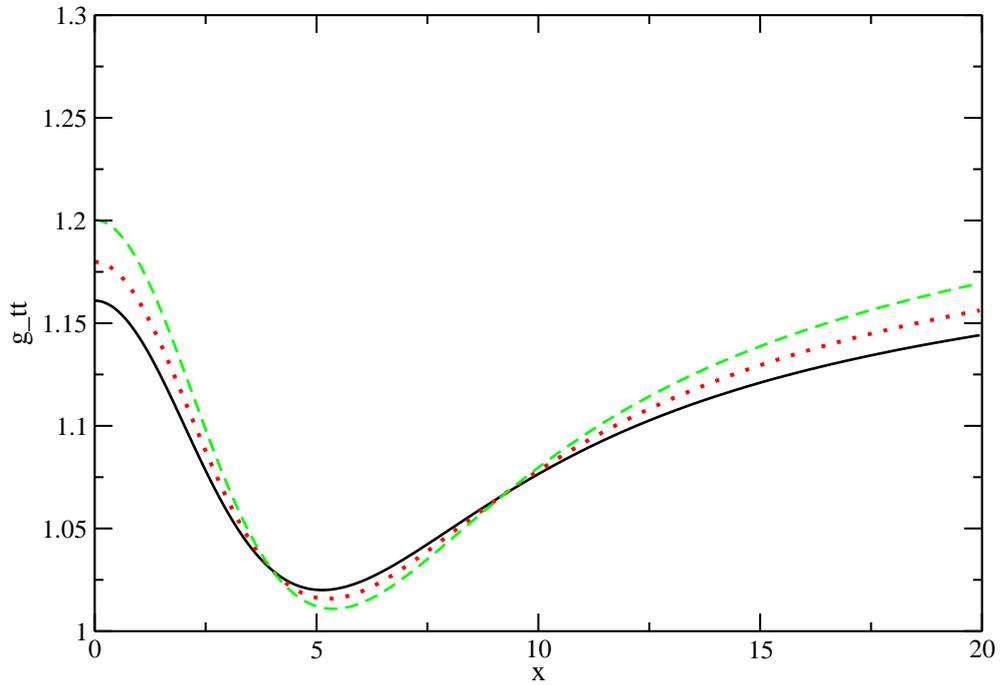


Figura 4.2: En esta gráfica se muestran los valores obtenidos para la función métrica g_{tt} para valores de $\Lambda = 0,0$ (—), $\Lambda = 1,0$ (···) y $\Lambda = 2,0$ (-) con $\phi_1(0) = 0,30$ y $\cos(2j\omega t) = 1$.

pues nuestra métrica es asintóticamente plana y estática (en el infinito), en el sentido que confinamos los coeficientes métricos del oscilaton en una región finita. Entonces, la masa vista por un observador desde el infinito se puede calcular por medio de esta expresión.

La gráfica (4.4) contiene los valores de las masas (M_Φ) obtenidas con distintos valores de Λ . Al aumentar el valor de la componente $\phi_1(0)$ del campo escalar $\Phi(t, x)$ el valor de la masa también va aumentando hasta llegar al valor de $\phi_{1c}(0)$ con el que se obtiene el valor más grande para M_Φ , y después de éste la masa comienza a disminuir.

En la gráfica (4.5) se presentan los resultados obtenidos para las frecuencias

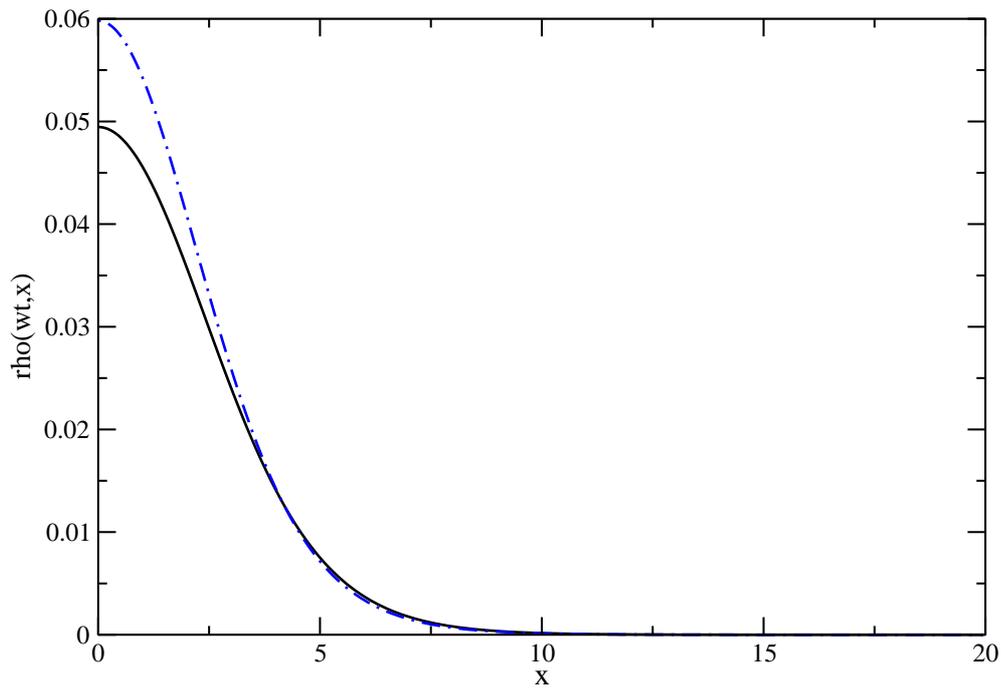


Figura 4.3: Se muestra la densidad de energía del campo escalar para los tiempos $\omega t = 0$ y $\omega t = \pi/2$ (en unidades $m_{\Phi}^2 m_{Pl}^2 / 4\pi$).

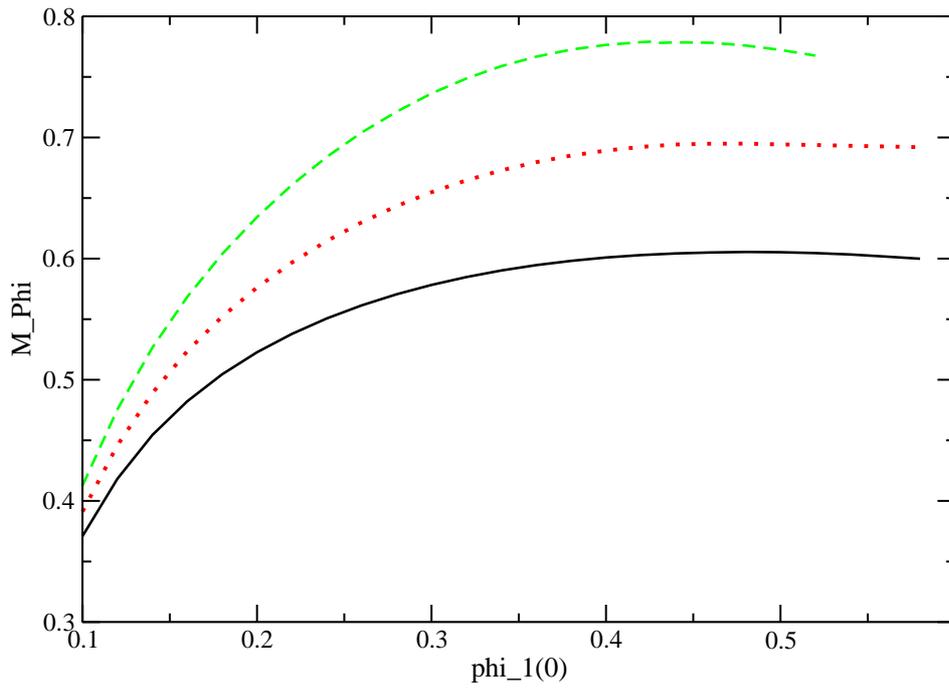


Figura 4.4: Se grafica M_Φ para los siguientes valores: $\Lambda = 0,0$ (—) donde $\phi_{1c}(0) = 0,481$ y $M_c = 0,6055093(m_{P_l}^2/m_\Phi)$; $\Lambda = 1,0$ (···) obteniendo $\phi_{1c}(0) = 0,48$ y $M_c = 0,6949076(m_{P_l}^2/m_\Phi)$ y para $\Lambda = 2,0$ (-) obteniendo $\phi_{1c}(0) = 0,425$ y $M_c = 0,7790653(m_{P_l}^2/m_\Phi)$.

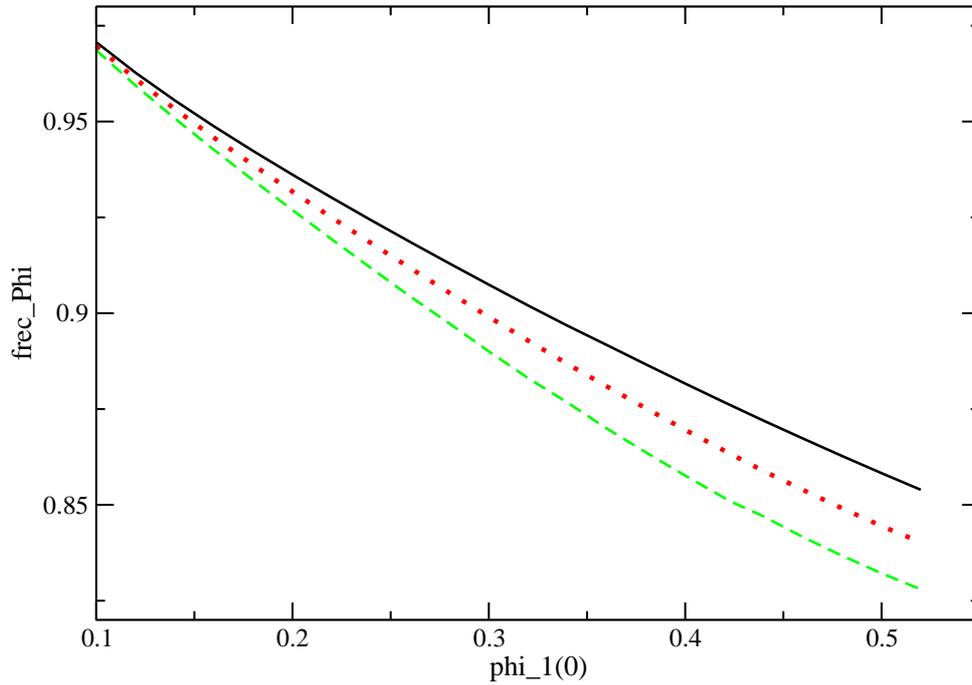


Figura 4.5: Presentamos Ω_Φ para los siguientes valores $\Lambda = 0,0$ (—), $\Lambda = 1,0$ (\cdots) y $\Lambda = 2,0$ (-). El valor de la frecuencia disminuye cuando el valor de $\phi_1(0)$ aumenta. De igual forma se tiene frecuencias menores para Λ 's mayores.

(Ω_Φ) utilizando algunos valores de Λ . Tal como se esperaba, el valor de la frecuencia disminuye al paso que el valor de $\phi_1(0)$ aumenta.

En la gráfica (4.6) se aprecia como disminuye el valor de $\phi_{1c}(0)$ conforme el valor de Λ aumenta.

El integrador que usamos es uno de paso variable, que respeta una tolerancia dada. Pero con el fin de verificar *convergencia*, algunas corridas las hicimos con Runge Kutta de orden 2 (RK2), y dada la solución a un paso h que llamamos y_h y otras corridas a pasos $y_{h/2}$ y $y_{h/4}$, la prueba de convergencia consiste en determinar si el valor absoluto de

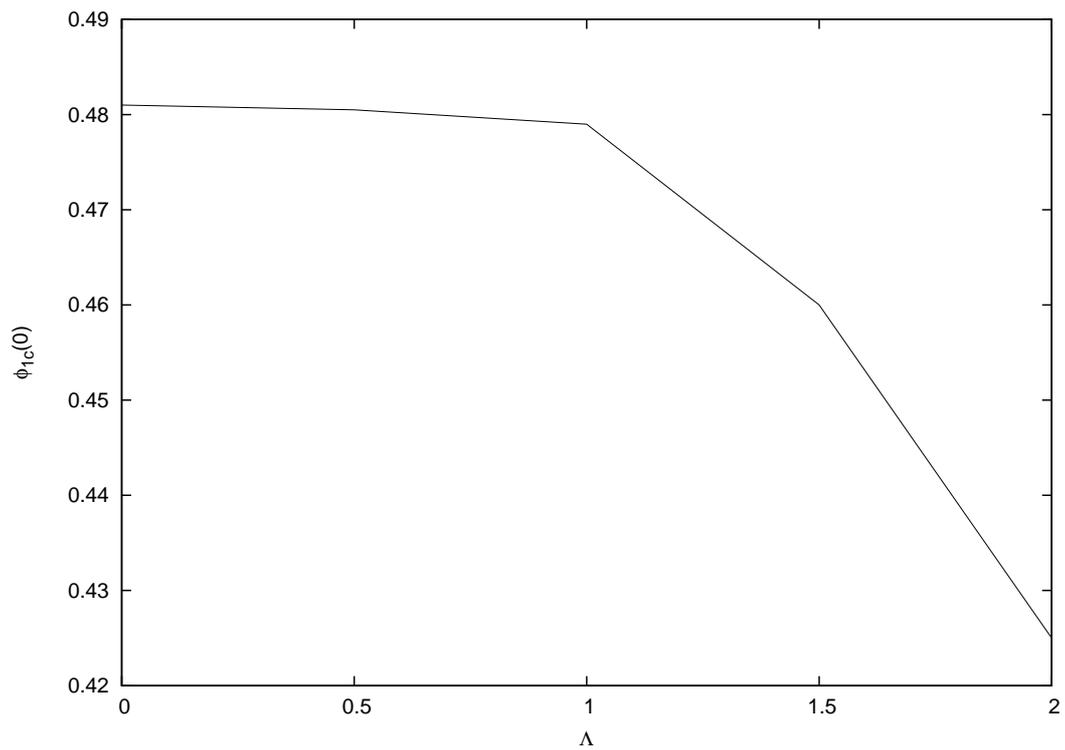


Figura 4.6: El valor de $\phi_{1c}(0)$ disminuye al aumentar el valor de Λ . Para $\Lambda = 0,0$ se obtiene $\phi_{1c}(0) = 0,481$; $\Lambda = 0,5$ con $\phi_{1c}(0) = 0,4805$; $\Lambda = 1,0$ con $\phi_{1c}(0) = 0,479$; $\Lambda = 1,5$ con $\phi_{1c}(0) = 0,46$ y $\Lambda = 2,0$ con $\phi_{1c}(0) = 0,425$.

$$\frac{y_h - y_{h/2}}{y_{h/2} - y_{h/4}}$$

adquiere el valor de 4 [11]. La gráfica (4.7) muestra que este es el caso, indicando convergencia. Los valores de la masa y la frecuencia obtenidos con RK2 y el integrador de paso variable son exactamente los mismos.

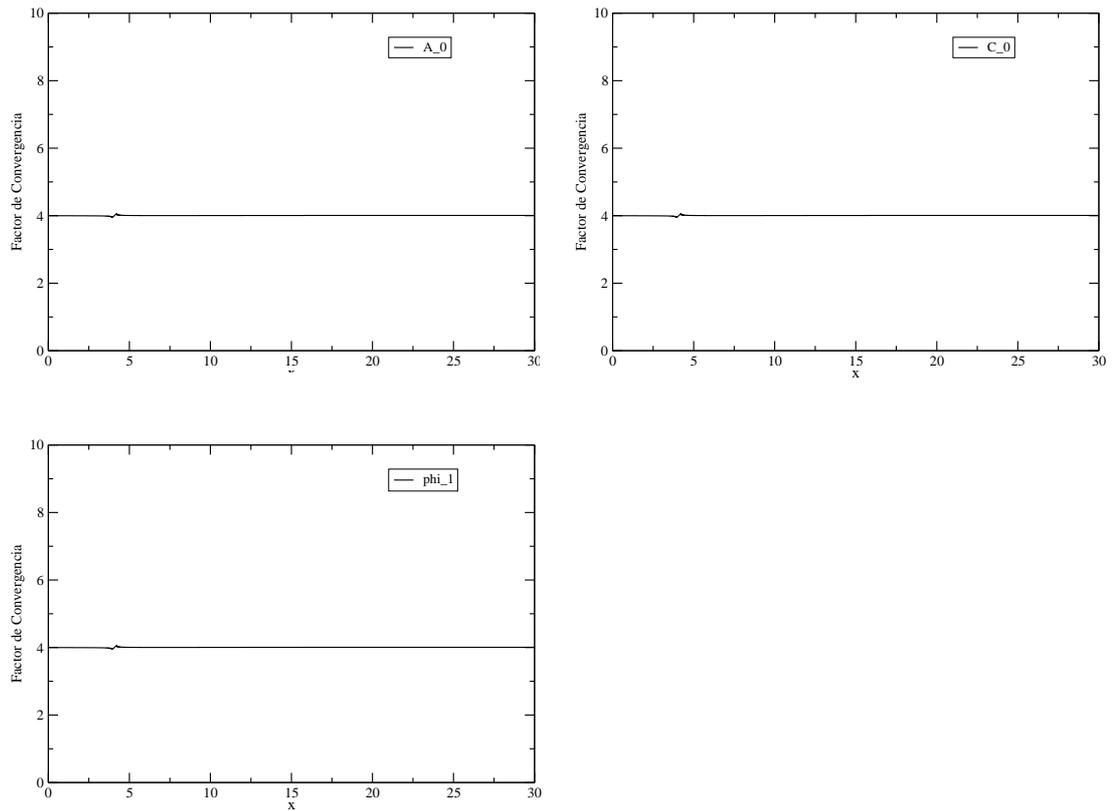


Figura 4.7: Se muestra las gráficas del Factor de Convergencia (4) para las componentes A_0 , C_0 y Φ_1 de las funciones métricas y el campo escalar real respectivamente. Utilizamos el integrador Runge Kutta de Orden 2 (RK2). Estas gráficas se obtuvieron para $\Lambda = 0,0$, $\phi_1(0) = 0,2$.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se explicó la forma en cómo se obtiene y se soluciona el sistema de ecuaciones acopladas de Einstein-Klein-Gordon (EKG) con simetría esférica. La solución de las configuraciones de equilibrio se proponen como una serie de funciones coseno, pero generalmente se trunca para $J_{max} = 1, 2$ [7],[12], aquí explicamos con detalle como hacerlo para el caso general (es decir, para cualquier valor de J_{max}), que ya se trabajó en [5] para el potencial cuadrático, y los resultados presentados ahí fueron hechos con $J_{max} = 3$.

Aunque los resultados reportados en el capítulo anterior fueron hechos con $J_{max} = 2$, también se realizaron varias corridas para $J_{max} = 4$ y $J_{max} = 6$. Con base en éstas, observamos que la diferencia entre las masas M_{Φ} obtenidas para $J_{max} = 2$ y $J_{max} = 4$, es $|M_{J_{max}=2} - M_{J_{max}=4}| \approx 1e - 04$, mientras que $|M_{J_{max}=4} - M_{J_{max}=6}| \approx 1e - 05$. Para $\phi_{1c}(0)$ la diferencia es $|\phi_{1cJ_{max}=2} - \phi_{1cJ_{max}=4}| \approx 1e - 03$ y lo mismo para $|\phi_{1cJ_{max}=2} - \phi_{1cJ_{max}=6}| \approx 1e - 03$.

En las gráficas expuestas en el capítulo anterior se pueden apreciar los siguientes resultados: La masa M_{Φ} aumenta su valor al ir aumentando el valor de $\phi_1(0)$ hasta alcanzar su valor máximo M_{Φ_c} para un $\phi_{1c}(0)$, donde el valor

de la masa crítica va aumentando conforme el valor de $\phi_{1c}(0)$ disminuye. Al ir aumentando el valor de Λ se observa que el valor de $\phi_{1c}(0)$ disminuye, para $\Lambda's < 1$, el valor de $\phi_{1c}(0)$ disminuye muy poco, pero para $\Lambda's > 1$ la diferencia es muy notoria. El valor de la frecuencia Ω_{Φ} decrece cuando ϕ_1 crece y al aumentar el valor de Λ .

Las soluciones encontradas en este trabajo, pueden servir como dato inicial de un código de evolución. El siguiente paso sería realizar el código de evolución para los oscilatonos con potencial cuártico, para completar el estudio. A la vez, me permitiría continuar aprendiendo a utilizar la valiosa herramienta de los métodos numéricos aplicados a Cosmología y Astrofísica.

El código estará disponible para todos aquellos que deseen utilizarlo.

Apéndice A

Teorema de Convolución

Sea $f(t, x) = \sum_{j=0}^{J_{max}} f_j(x) \cos(j\omega t)$ y $g(t, x) = \sum_{k=0}^{J_{max}} g_k(x) \cos(k\omega t)$ dos funciones cuadro-integrables, entonces

$$(fg) = P = \sum_{l=0}^{J_{max}} P_l \cos(l\omega t)$$

donde

$$P_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J_{max}} f_j g_j + f_0 g_0$$
$$P_k = \frac{1}{2} \sum_{|j-p|=k}^{J_{max}} f_j g_p + \frac{1}{2} \sum_{j+p=k}^{J_{max}} f_j g_p$$

para $k \geq 1$.

Demostración

Sea el producto de las funciones $f(t, x)$ y $g(t, x)$

$$\begin{aligned} fg &= \sum_{j=0}^{J_{max}} f_j \cos(j\omega t) \sum_{p=0}^{J_{max}} g_p \cos(p\omega t) \\ &= \sum_{j,p=0}^{J_{max}} f_j g_p \cos(j\omega t) \cos(p\omega t) \\ &= \sum_{l=0}^{J_{max}} P_l \cos(l\omega t) = P \end{aligned}$$

Sustituyendo $\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(|A - B|)]$ en la ecuación anterior

$$\sum_{l=0}^{J_{max}} P_l \cos(l\omega t) = \frac{1}{2} \sum_{j,p=0}^{J_{max}} f_j g_p [\cos((j + p)\omega t) + \cos(|j - p|\omega t)] \quad (\text{A.1})$$

Multipliquemos la expresión (A.1) por $\cos(k\omega t)$

$$\sum_{l=0}^{J_{max}} P_l \cos(l\omega t) \cos(k\omega t) = \frac{1}{2} \sum_{j,p=0}^{J_{max}} f_j g_p [\cos((j + p)\omega t) + \cos(|j - p|\omega t)] \cos(k\omega t)$$

Recordando que $\cos(k\omega t)$ es una base ortogonal con $k = 0, 1, 2, \dots$, integremos la ecuación anterior de 0 a $\frac{2\pi}{\omega}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{J_{max}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P_l \cos(l\omega t) \cos(k\omega t) dt &= \frac{1}{2} \sum_{j,p=0}^{J_{max}} \left[\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f_j g_p \cos((j+p)\omega t) \cos(k\omega t) dt + \right. \\
&\quad \left. \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f_j g_p \cos(|j-p|\omega t) \cos(k\omega t) dt \right] \\
\sum_{l=0}^{J_{max}} P_l \delta_{lk} \frac{2\pi}{\omega} &= \frac{1}{2} \sum_{j,p=0}^{J_{max}} f_j g_p \delta_{(j+p)k} \frac{2\pi}{\omega} + \frac{1}{2} \sum_{j,p=0}^{J_{max}} f_j g_p \delta_{|j-p|k} \frac{2\pi}{\omega} \\
P_k &= \frac{1}{2} \sum_{j+p=k}^{J_{max}} f_j g_p + \frac{1}{2} \sum_{|j-p|=k}^{J_{max}} f_j g_p \quad (A.2)
\end{aligned}$$

Sustituyendo $k = 0$ en la expresión (A.2) llegamos a

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1}{2} f_0 g_0 + \frac{1}{2} f_0 g_0 + \frac{1}{2} \sum_{|j-p|=k}^{J_{max}} f_j g_p \\
&= f_0 g_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J_{max}} f_j g_j \quad (A.3)
\end{aligned}$$

$$P_k = \frac{1}{2} \sum_{j+p=k}^{J_{max}} f_j g_p + \frac{1}{2} \sum_{|j-p|=k}^{J_{max}} f_j g_p \quad (A.4)$$

para $1 \leq k \leq J_{max}$.

Apéndice B

Conservación del Tensor Energía-Momento

Ahora demostraremos que la conservación del Tensor Energía-Momento se puede expresar de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta}_{;\beta} &= 0 \\ &= \phi^{;\alpha} \left(\square\phi - \frac{dV}{d\phi} \right) \end{aligned}$$

Demostración

El tensor de Energía-Momento $T^{\alpha\beta}$ está dado por

$$T^{\alpha\beta} = \Phi^{;\alpha}\Phi^{;\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[\Phi^{;\lambda}\phi_{;\lambda} + 2V(\Phi)]$$

Aplicando la derivada covariante al tensor

$$\begin{aligned}
T_{;\beta}^{\alpha\beta} &= (\Phi^{;\alpha}\Phi^{;\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[\Phi^{;\lambda}\Phi_{;\lambda} + 2V(\Phi)])_{;\beta} \\
&= (\Phi^{;\alpha}\Phi^{;\beta})_{;\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[\Phi^{;\lambda}\Phi_{;\lambda} + 2V(\Phi)]_{;\beta} - \frac{1}{2}g_{;\beta}^{\alpha\beta}[\Phi^{;\lambda}\Phi_{;\lambda} + 2V(\Phi)]
\end{aligned}$$

Pero sabemos que $g_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
T_{;\beta}^{\alpha\beta} &= \Phi_{;\beta}^{;\alpha}\Phi^{;\beta} + \Phi^{;\alpha}\Phi_{;\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[\Phi_{;\beta}^{;\lambda}\Phi_{;\lambda} + \Phi^{;\lambda}\Phi_{;\lambda;\beta} + 2\frac{dV(\Phi)}{d\Phi}\Phi_{;\beta}] \\
&= g^{\alpha\gamma}\Phi_{;\gamma;\beta}\Phi^{;\beta} + \Phi^{;\alpha}\Phi_{;\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[g^{\lambda\gamma}\Phi_{;\gamma;\beta}g_{\lambda\gamma}\Phi^{;\gamma} + \Phi^{;\gamma}\Phi_{;\gamma;\beta} + 2\frac{dV}{d\Phi}g_{\alpha\beta}\Phi^{;\alpha}] \\
&= g^{\alpha\beta}\Phi_{;\beta;\theta}\Phi^{;\theta} + \Phi^{;\alpha}\Phi_{;\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[\Phi_{;\gamma;\beta}\Phi^{;\gamma} + \Phi^{;\gamma}\Phi_{;\gamma;\beta}] - \frac{dV}{d\Phi}\Phi^{;\alpha} \\
&= g^{\alpha\beta}\Phi_{;\beta;\gamma}\Phi^{;\gamma} + \Phi^{;\alpha}\Phi_{;\beta} - g^{\alpha\beta}\Phi^{;\gamma}\Phi_{;\gamma;\beta} - \frac{dV}{d\Phi}\Phi^{;\alpha} \tag{B.1}
\end{aligned}$$

Veamos que $\Phi_{;\beta;\gamma} = \Phi_{;\gamma;\beta}$. Recordemos que para una función escalar se cumple que $\Phi_{;\beta} = \Phi_{,\beta}$,

$$\begin{aligned}
\Phi_{;\beta;\gamma} &= \Phi_{,\beta;\gamma} \\
&= \Phi_{,\beta,\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^k\Phi_{,k} \\
&= \Phi_{,\gamma,\beta} - \Gamma_{\gamma\beta}^k\Phi_{,k} \\
&= \Phi_{;\gamma;\beta} \tag{B.2}
\end{aligned}$$

pues $\Phi_{,\beta,\gamma} = \Phi_{,\gamma,\beta}$ y los símbolos de Christoffel son simétricos $\Gamma_{\beta\gamma}^k = \Gamma_{\gamma\beta}^k$. Entonces según (B.2) de (B.1) se sigue que

$$\begin{aligned}
T_{;\beta}^{\alpha\beta} &= \Phi^{;\alpha}\Phi^{;\beta} - \frac{dV}{d\Phi}\Phi^{;\alpha} \\
&= \Phi^{;\alpha}g^{\alpha\beta}\Phi_{;\alpha;\beta} - \frac{dV}{d\Phi}\Phi^{;\alpha} \\
&= \Phi^{;\alpha}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\Phi - \frac{dV}{d\Phi}\Phi^{;\alpha} \\
T_{;\beta}^{\alpha\beta} &= \Phi^{;\alpha}\left(\square\Phi - \frac{dV}{d\Phi}\right)
\end{aligned}$$

con $\square = g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}$.

Bibliografía

- [1] “Oscillating Soliton Stars” E. Seidel, W. Suen. Phys. Rev. Letts. **66** 1659 (1991).
- [2] Citamos sólo algunos de una larga lista: “Formation of Solitonic Stars through Gravitational Cooling” E. Seidel and W. Suen. Phys. Rev. Letts. **72** 2561 (1994). “Accretion disk onto boson stars: a way to supplant black holes candidates” F.S. Guzmán. Phys.Rev. **D73** 021501 (2006). “Evolution of 3-D boson stars with waveform extraction” Jayashree Balakrishna, Ruxandra Bondarescu, Gregory Daues, F. Siddhartha Guzman, Edward Seidel. Class.Quant.Grav **23** 2631 (2006).
- [3] T. Matos, L. Ureña, Class. Quantum Grav. **17**, L75 (2000). Phys. Rev. D **63**, 63506 (2001).
- [4] F. Schunk and E. Mielke. Class. Quantum Grav. **20**, R301 (2003).
- [5] “Inside Oscillatons”. L.Ureña-López, Tonatiuh Matos and Ricardo Becerril. Class. Quantum Grav. **19** (2002) 6259-6277.
- [6] “Numerical Studies of Φ^2 -Oscillatons”. Miguel Alcubierre *et al.* Class. Quantum Grav. **20** 2883-2903 (2003).
- [7] “Oscillatons revisited”. L. Arturo Urenã-López. Class. Quantum Grav. **19** (2002) 2617-2632.
- [8] “General Relativity”. Robert M. Wald. The University of Chicago Press.

- [9] “Análisis Numérico”. Richard L. Burden, J. Douglas Raires. 6 Edición, International THOMSON.
- [10] “Numerical Recipes in C”. Wiliam H. Press et al.. Second Edition. Cambridge University Press.
- [11] “Introduction to 3+1 Numerical Relativity”. Miguel Alcubierre. Osford Science Publications.
- [12] “Numerical Simulations of Oscillating Soliton Stars: Excited States in Spherical Symmetry and Ground State Evolution in 3D”. Jayashree Balakrishna *et. al.*Physical Review D **77** 027028 (2008).