
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

GENERACIÓN DINÁMICA DE MASAS FERMIÓNICAS
A TEMPERATURA FINITA
EN CAMPOS MAGNÉTICOS EXTERNOS

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN CS. EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA
ENIF GUADALUPE GUTIÉRREZ GUERRERO

ASESOR
DR. ADNAN BASHIR

AGOSTO, 2009

Índice general

1. Introducción	4
1.1. Generación de Masa en Cromodinámica Cuántica (QCD) : . . .	4
1.2. Generación de Masa en Electrodinámica Cuántica (QED) : . . .	8
2. Fermiones en Campos Magnéticos	10
2.1. Partícula Clásica No Relativista	10
2.2. Partícula Clásica Relativista	12
2.3. Ecuación de Schrödinger	13
2.4. Ecuación de Klein Gordon	15
2.5. Ecuación de Dirac	17
2.6. Condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$	20
2.7. Propagador del Fermión	23
3. Ecuaciones de Schwinger Dyson y Catálisis Magnética	25
3.1. Ecuaciones de Schwinger Dyson (SD)	25
3.2. Aproximación Arcoiris	28
3.3. Generación Dinámica de Masas	31
3.4. Catálisis Magnética	33
4. Fermiones a Temperatura Finita.	40
4.1. Generación Dinámica de Masas en QED a Temperatura Finita	40
4.2. Estudio Analítico	42
4.3. Análisis Numérico	45
5. Fermiones en Campos Magnéticos a Temperatura Finita.	48
5.1. La Función de Masa	49
5.2. Resultados Numérico	50
5.3. Comparando con Resultados Anteriores	54

6. Discusiones y Conclusiones	62
A. Cuadraturas y Programas numéricos	65
A.1. Cuadratura Gaussiana	65
A.2. Cuadratura Gaussiana de Dos Puntos	66
A.3. Solución Numérica de las Ecuaciones de Schwinger Dyson (SD)	68
A.4. Programas Numéricos	70

Capítulo 1

Introducción

Las teorías de norma han sido una piedra angular de la física de partículas durante varias décadas, debido a su gran éxito en la descripción de fenómenos físicos, en el régimen perturbativo de la fuerza de interacción. Sin embargo, cuando los métodos perturbativos no son aplicables, el cálculo de soluciones exactas de las teorías de norma se convierte en una tarea realmente complicada. Fenómenos tales como el confinamiento y la generación dinámica de masas no surgen en la teoría de perturbaciones y su explicación es posible solamente en el dominio no perturbativo de la física.

1.1. Generación de Masa en Cromodinámica Cuántica (QCD) :

QCD es una teoría de norma que exhibe la faceta perturbativa y la no perturbativa. Fué propuesta como una teoría para entender la estructura de los hadrones en términos de los grados de libertad mas fundamentales, es decir, quarks y gluones.

1. **QCD perturbativa:** Su validez se limita a aquellos regímenes de altas energías en los que la constante de acoplamiento α_{QCD} , tenga un valor pequeño. El enfoque de QCD perturbativo se basa en la *Libertad Asintótica* que significa que a cortas distancias, los quarks y los gluones son prácticamente libres [1]. QCD predice este comportamiento que fué descubierto por David Politzer, Frank Wilczek y David Gross

y gracias al cual les fué concedido el Premio Nobel de Física del año 2004.

2. **QCD no perturbativa:** QCD es no perturbativa para energías del orden de las masas de los hadrones y menores, donde el valor del acoplamiento tiene un valor suficientemente elevado como para anular los desarrollos perturbativos. Tal como hemos mencionado antes, el confinamiento y la generación dinámica de masas son dos fenómenos inherentemente no perturbativos en la naturaleza.
 - **Confinamiento:** Los objetos de color como los quarks y los gluones no son estados que se hayan observado pues los estados físicos corresponden a estados sin color. El potencial entre los quarks estacionarios crece linealmente con la distancia y por lo tanto se requiere una cantidad infinita de energía para separar dos quarks [2].
 - **Rompimiento Dinámico de la Simetría Quiral o la Generación de las Masas:** A pesar de que en QCD quiral no existe ninguna escala de masa, esta se genera mediante la dinámica fuerte de QCD. La generación dinámica de masas es responsable de dar grandes masas constituyentes a los quarks dentro de los hadrones. Para el estudio de QCD no perturbativa, hay varios métodos. Brevemente discutiremos los más relevantes para nosotros.
3. **QCD en la red:** Consiste en la utilización de poderosas computadoras para simular la dinámica de QCD en un espacio-tiempo discretizado en los nodos de un retículo. Esto introduce una escala natural $1/a$ de momentos ultravioletas, donde a es la distancia entre dos puntos vecinos de la red. Recuperamos QCD continua cuando hacemos $a \rightarrow 0$. Debemos tomar en cuenta además que momentos mayores del orden de aproximadamente $1/a$ no pueden ser representados en la red, y que el valor de a debe ser suficientemente pequeño, comparado con las distancias relevantes del problema. La otra escala natural serán claramente las dimensiones de la misma red, sin embargo el volumen de la red está limitado por la velocidad y memoria de la computadora que se use.
4. **Ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDE):** Debido a que la red tiene un volumen finito y la separación entre dos puntos cercanos de la red

tambiés es finita, es necesaria una extrapolación para conectar estos resultados con QCD continua. Por ejemplo las masas de los quarks ligeros son muy difíciles de tratar con QCD debido a que la longitud de onda de Compton asociada a éstas, es muy grande, logrando exceder las dimensiones de la red. Un método complementario para investigar los aspectos no perturbativos de QCD son las Ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDE) [3, 4]. Estas ecuaciones son un conjunto de ecuaciones no lineales acopladas, que contienen la información completa de la teoría cuántica de campos de la que son derivadas. A diferencia del método de la red, estas ecuaciones nos permiten un estudio continuo de las teorías de norma y no hay ningun problema para incorporar el límite no masivo. Por otro lado, los resultados obtenidos mediante la red, son exactos, en tanto que con las ecuaciones de Schwinger-Dyson, se tienen que hacer varias suposiciones para truncar la torre infinita de ecuaciones acopladas. De manera que ambos métodos se complementan mutuamente. Abundaremos más acerca de estas ecuaciones en un capítulo posterior.

El ámbito no perturbativo de QCD se vuelve aún mas interesante en la presencia de altas temperaturas y densidades nucleares. Hace muchos años, QCD no perturbativa en la red sugirió la existencia de una fase desconfiada de quarks y gluones que ha sido llamada la fase del plasma quark gluon, a una temperatura superior de 150 MeV. La evidencia de esta posibilidad ha sido observada en colisiones de iones pesados. Además de la transición de fase de confinamiento-desconfinamiento, también se espera que para un valor de la temperatura se logre restaurar la simetría quiral. Éste aspecto puede verse en el diagrama de fase 1.1 de QCD.

El eje horizontal es la densidad neta barionica (densidad de protones y antineutrones menos la densidad de los antibariones). Bajo las condiciones usuales, no hay mucha antimateria, y la densidad barionica es justamente la densidad de protones y neutrones. La densidad del agua corresponde a la densidad barionica igual a 1 representada por el punto negro en la esquina inferior izquierda del diagrama. En el eje vertical esta la temperatura medida en MeV. 100 MeV corresponden a una temperatura de alrededor de $1.2 \times 10^{12} K$ o bien 100000 veces la temperatura del centro del sol.

El rango de densidades y temperaturas donde esta fase confinada prevalece esta mostrada en la parte luminosa localizada en la parte inferior izquierda del diagrama de fase. Sin embargo, si la temperatura o la densidad o am-

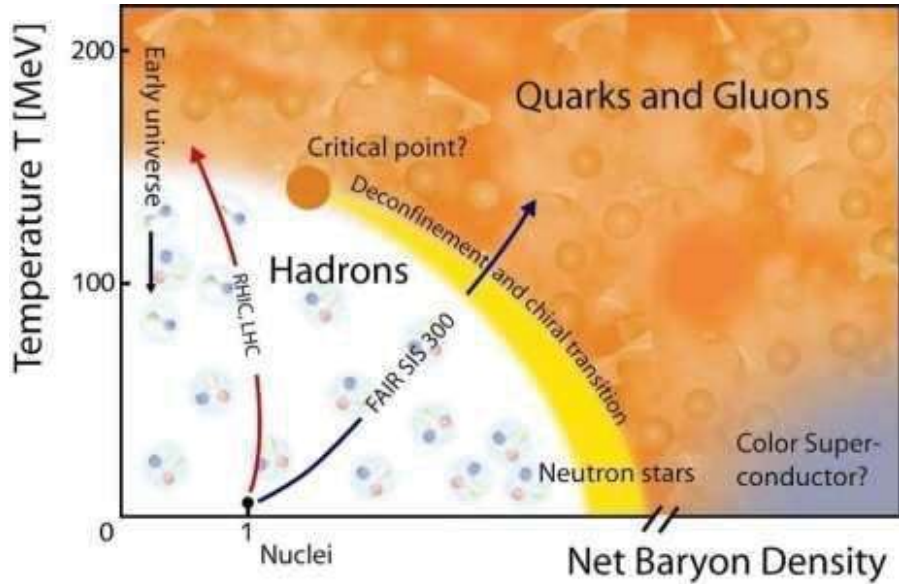


Figura 1.1: Diagrama de transición de fase

bos se incrementan el confinamiento desaparece eventualmente, y los quarks y los gluones se liberan. Esto es el **desconfinamiento de hadrones** que dá origen al plasma de quark gluon. Al mismo tiempo que se desconfinan, la masa de los quarks ligeros (u y d) baja desde alrededor de 300 MeV a unos cuantos MeV (≈ 5 MeV), decimos entonces que ocurrió una **transición de fase quiral**. En el diagrama de fase, la fase desconfinada o quiral ocupa la región sombreada en naranja. El desconfinamiento a altas densidades se cree que sucede en el interior de las estrellas de neutrones. Las mismas transiciones por calentamiento nuclear se logra en el Colisionador Relativista de Iones pesados (RHIC) en el Laboratorio Nacional de Brookhaven (BNL), Estados Unidos, El Gran Colisionador de Hadrones (LHC), Suiza, y la Instalación para la Investigación de Antiprotones e Iones (FAIR), Alemania. Los detalles exactos de los diagramas de fase de materia nuclear son desconocidos, y todas las características cualitativas son predecidas mediante QCD. Esta es la razón por la cual los diagramas de fase de materia nuclear son llamados los diagramas de fase de QCD. El conocimiento actual sugiere que la transición de hadrones al plasma de quark gluon y la transición quiral ocurre a una temperatura de 150 MeV, y esta representada por la región en color

amarillo. Ésta situación puede convertirse en una situación aún mas compleja si hay campos magnéticos externos, una situación presente en muchas objetos astrofísicos y colisiones de iones pesados.

1.2. Generación de Masa en Electrodinámica Cuántica (QED) :

El estudio cuantitativo de la generación dinámica de masa de los quarks ligeros, la aparición del espectro hadronico así como el estudio de la temperatura finita son tareas muy difíciles, de manera que mucha energía esta siendo canalizada a desarrollar esta línea de investigación. Es bien sabido que en QED perturbativa aun a todos los ordenes de resumación de los diagramas de Feynman falla para generar masa fermiónica si iniciamos con una masa desnuda nula en el lagrangiano. Sin embargo los fermiones pueden adquirir masa dinámicamente es decir mediante interacciones por medio de efectos no perturbativos sin la necesidad de una masa desnuda no cero [5], [6]. DMG sucede si el acoplamiento electromagnético α_{em} es superior a un valor crítico $\alpha_c \simeq 1$. Lo cual nos provee un mecanismo simple pero estructuralmente similar al existente en QCD para investigar los métodos no perturbativos como las ecuaciones de Schwinger-Dyson (SD). El valor actual de $\alpha_{em} \simeq 1/137$ claramente lejano a la unidad. Sin embargo podemos esperar que en colisiones de iones pesados donde cientos de protones estan juntos en pequeñas regiones del espacio, el acoplamiento efectivo de QED puede ser $\alpha \simeq 100 \times 1/137 \simeq 1$, permitiendo la posibilidad de ver esta transición de fase aún en QED. Por otro lado, QED es físicamente más relevante en la presencia de campos magnéticos externos intensos los cuales catalizan la generación dinámica de masas aún para los valores débiles de $\alpha_{e.m}$, [7], [8], [9] [10], [11]. De hecho sabemos que la masa generada dinámicamente es proporcional a \sqrt{eB} . Este fenómeno es llamado **catálisis magnética**. Este fenómeno naturalmente se afecta en la presencia de temperatura finita, [9], [10], [11], y en casos extremos esta influencia puede ser sustancial. Como hemos mencionado con anterioridad, las situaciones físicas de gran interés donde tales condiciones pueden estar presentes, son objetos Astrofísicos, el universo temprano y colisiones de iones pesados, como las que ocurren en el Colisionador Relativista de Iones Pesados (RHIC) y en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC). En esta trabajo de tesis estamos interesados en el estudio de la generación dinámica de masas

para fermiones a temperatura finita en la presencia de un campo magnético a través de las ecuaciones de Schwinger-Dyson, y lo hemos organizado de la siguiente manera:

- En el capítulo dos, estudiaremos la dinámica de los fermiones en presencia de un campo magnético externo.
- En el capítulo 3, realizaremos una revisión detallada de la generación dinámica de masa (catálisis magnética) en QED en la presencia de un campo magnético externo uniforme.
- En el capítulo 4, estudiaremos la generación dinámica de masas en QED en presencia de temperatura finita.
- En el capítulo 5, combinaremos los dos ingredientes, es decir, temperatura finita y campo magnético externo uniforme para estudiar la ecuación de SD del propagador del fermión para la función de masa fermionica.
- En el capítulo 6, daremos las discusiones y conclusiones.
- Finalmente, presentamos el apéndice, dedicado a mostrar las técnicas numéricas y las fórmulas de integración que hemos usado. presentamos las discusiones y conclusiones.

Capítulo 2

Fermiones en Campos Magnéticos

En este capítulo, discutiremos el formalismo del estudio de la dinámica de los fermiones en presencia de un campo magnético externo. Iniciaremos discutiendo la dinámica de las partículas clásicas cargadas en presencia de campos magnéticos externos y procederemos a complicar el problema paso a paso.

2.1. Partícula Clásica No Relativista

El movimiento de una partícula con carga $-e$ ¹ moviéndose en campos electromagnéticos, está descrito por la fuerza de Lorentz

$$\dot{\mathbf{p}} = -e(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) ,$$

donde los vectores \mathbf{r} , \mathbf{v} , \mathbf{p} , \mathbf{E} y \mathbf{B} son respectivamente los vectores de posición, velocidad, momento lineal de la partícula, y finalmente los campos eléctrico y magnético. Hemos representado la derivada con respecto al tiempo con el punto. Si ahora consideramos el caso de una carga puntual no relativista en presencia de un campo magnético únicamente ($\mathbf{E} = 0$), tenemos que la fuerza de Lorentz toma la siguiente forma

$$m\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} , \tag{2.1}$$

¹El electrón tiene carga $-e$.

donde m es la masa de la partícula. Consideramos a la velocidad y al campo magnético orientados de la siguiente manera

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = -B \mathbf{k}.$$

Entonces, las componentes vectoriales de la fuerza de Lorentz son:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x &= -B v_y, \\ (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_y &= B v_x, \\ (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_z &= 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (2.1) obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} m \dot{v}_x &= e B v_y \\ m \dot{v}_y &= -e B v_x \\ m \dot{v}_z &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Del conjunto de ecuaciones (2.2) podemos ver que no hay fuerza en la dirección del campo magnético. Si tomamos su segunda derivada, es fácil ver que obtenemos las siguientes expresiones

$$\ddot{v}_x + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 v_x = 0, \quad \ddot{v}_y + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 v_y = 0. \tag{2.3}$$

Podemos escoger las condiciones iniciales de manera tal que la solución sea:

$$v_x(t) = v \operatorname{sen} \left(\frac{eB}{m}\right) t, \quad v_y(t) = v \operatorname{cos} \left(\frac{eB}{m}\right) t.$$

De estas últimas ecuaciones podemos ver fácilmente que la solución para las coordenadas es

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{v m}{eB} \operatorname{cos} \left(\frac{eB}{m}\right) t + x_0, \\ y(t) &= \frac{v m}{eB} \operatorname{sen} \left(\frac{eB}{m}\right) t + y_0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones paramétricas describen un círculo con centro en (x_0, y_0) y radio $r = v m/eB$, la cual sólo necesita de condiciones iniciales para ser

determinada. A la cantidad $\omega_B \equiv eB/m$ se le llama frecuencia de ciclotrón y sus unidades son de s^{-1} . Llamamos a r el radio de Larmor o de giro y este depende solamente del momento de la partícula. Podemos ver entonces que todas las partículas (no relativistas) con el mismo e/m tienen la misma ω_B y que a distintas energías la partícula tiene r distintos. La extensión al caso relativista es relativamente simple, como veremos en la siguiente sección.

2.2. Partícula Clásica Relativista

Sabemos que en relatividad especial el momento lineal está dado por

$$\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v} \quad \text{con} \quad \gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$$

donde m es la masa en reposo de la partícula y $v = |\mathbf{v}|$. Si resolvemos la ecuación (2.1) con los mismos razonamientos que usamos anteriormente llegamos a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{eBv_y}{m\gamma} \\ \dot{v}_y &= -\frac{eBv_x}{m\gamma} \\ \dot{v}_z &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Este conjunto de ecuaciones que hemos obtenido para el caso relativista son iguales (salvo por un factor multiplicativo) al conjunto de ecuaciones (2.2) que obtuvimos para el caso relativista, por lo que sus soluciones son formalmente iguales y para condiciones iniciales similares están dadas por

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v \operatorname{sen} \left(\frac{eB}{m\gamma} \right) t, \\ v_y(t) &= v \cos \left(\frac{eB}{m\gamma} \right) t, \\ x(t) &= -\frac{vm\gamma}{eB} \cos \left(\frac{eB}{m\gamma} \right) t + x_0, \\ y(t) &= \frac{vm\gamma}{eB} \operatorname{sen} \left(\frac{eB}{m\gamma} \right) t + y_0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Podemos entonces concluir que la dinámica de una partícula en este campo magnético puede calcularse de manera no relativista ya que el único cambio radica en su masa, la cuál es más grande por el factor relativista γ . El siguiente paso consistirá en tomar en cuenta los efectos cuánticos.

2.3. Ecuación de Schrödinger

La descripción de una partícula cargada en un campo magnético en el formalismo de la mecánica cuántica requiere la resolución de la ecuación de Schrödinger para el siguiente Hamiltoniano obtenido a través de la sustitución mínima

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 .$$

Elegimos el potencial escalar \mathbf{A} de manera que el campo magnético asociado este en la dirección negativa de \mathbf{k} . Una de las posibles elecciones que además satisface la norma de Landau donde $\partial^\mu \mathbf{A}_\mu = 0$ será:

$$\mathbf{A} = -xB\mathbf{j} ,$$

de donde, el operador Hamiltoniano en términos de las componentes del momento es

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m} (p_y - eBx)^2 + \frac{p_z^2}{2m} . \quad (2.6)$$

Nuestro siguiente paso será resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo,

$$\hat{H}\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z) .$$

Comenzaremos por recordar la relación canónica $[x_i, p_j] = \delta_{ij}$, razón de la cual se deriva que solo el conmutador $[\hat{H}, \hat{p}_x] \neq 0$. Entonces, vamos a proponer una solución $\psi(x, y, z)$ tal que

- La función $\psi(x, y, z)$ sea el producto de dos funciones,
- Proponemos que una de las funciones sea la solución de la partícula libre en las coordenadas y y z y la otra será una función $\chi(x)$ que nos describa el movimiento en la coordenada x

$$\psi(x, y, z) = e^{i(y p_y + z p_z)} \chi(x) . \quad (2.7)$$

Sustituyendo la ecuación (2.7) en el Hamiltoniano dado por (2.6), obtenemos

$$\left[-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2m} (p_y - eBx)^2 + \frac{p_z^2}{2m} - E \right] \chi(x) = 0 , \quad (2.8)$$

donde ha quedado de manifiesto la utilidad de la elección que realizamos para $\psi(x, y, z)$. Usemos ahora los cambios de variable

$$\bar{x} = x - \frac{p_y}{eB} \equiv x - x_0 \quad y \quad \omega_B = \frac{eB}{m} ,$$

entonces la ecuación (2.8) se simplifica de la siguiente manera

$$\left[-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{d\bar{x}^2} + \frac{m\omega_B^2}{2} \bar{x}^2 + \frac{p_z^2}{2m} - E \right] \chi(\bar{x}) = 0 , \quad (2.9)$$

donde ω_B es la frecuencia ciclotrónica definida anteriormente. Usemos ahora un nuevo cambio de variable donde $\xi = \sqrt{m\omega_B} \bar{x}$ y $k^2 = -\frac{1}{\omega_B} \left(\frac{p_z^2}{m} - 2E \right) = 2n + 1$ y notemos que al sustituir en (2.9), obtenemos

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \chi(\bar{x}) = (\xi^2 - k^2) \chi(\bar{x}) \quad (2.10)$$

con una energía asociada de la forma

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega_B + \frac{p_z^2}{2m} \quad \text{donde} \quad n = 0, 1, 2, \dots . \quad (2.11)$$

Los n , son los llamados niveles de Landau. Notemos que para éstos, habrá una degeneración, puesto que diferentes valores permitidos para p_y corresponden al mismo valor de energía.

La ecuación (2.10) corresponde a un oscilador armónico unidimensional, con eigenfunciones normalizadas dadas por

$$\chi_n(\bar{x}) \equiv I(n, \bar{x}) = \left(\frac{(eB)^{\frac{1}{2}}}{2^n n! \pi^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{eB\bar{x}^2}{2}} H_n(\sqrt{eB}\bar{x}) , \quad (2.12)$$

donde podemos reconocer a los polinomios de Hermite asociados $H_n(\xi)$ con ξ una variable adimensional, y están dados por

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{-\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} .$$

Entonces hemos obtenido la solución de la ecuación de Schrödinger que nos provee de una base para expandir cualquier estado físico del sistema en la presencia de un campo magnético uniforme. Obviamente el siguiente paso será combinar el tratamiento relativista con el tratamiento de la mecánica cuántica. Esto nos lleva a la pregunta acerca del espín de la partícula, siendo el caso mas simple cuando es cero.

2.4. Ecuación de Klein Gordon

La ecuación de Schrödinger no es invariante bajo las transformaciones de Lorentz, pues contiene derivadas de primer orden con respecto al tiempo y de segundo orden con respecto a las coordenadas. La ecuación relativista que describe las partículas de espín cero es la *Klein Gordon*, de la cuál quere-mos particularmente obtener la solución de esta ecuación en presencia de un campo magnético de fondo.

Partiendo de la fórmula para la energía relativista $E^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 = 0$ y sustituyendo las variables clásicas por sus respectivos operadores cuánticos donde

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i \nabla,$$

podemos formular la siguiente expresión

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - m^2 \right) \psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.13)$$

o de manera equivalente por

$$(\square^2 + m^2) \psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (2.14)$$

La expresión (2.14) es la forma más usual de la ecuación de Klein Gordon. Para incorporar los efectos del campo magnético aplicamos la sustitución mínima $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu$, como en la sección anterior

$$\begin{aligned} \left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 \right) \psi &\rightarrow \left((\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial^\mu - ieA^\mu) + m^2 \right) \psi \\ &= \left(\square^2 + 2iexB \frac{\partial}{\partial y} + e^2 x^2 B^2 + m^2 \right) \psi = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Buscamos soluciones de la forma $\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt+ip_y y+ip_z z} f(x)$, donde la función $f(x)$ satisface

$$(E^2 - m^2 + \frac{d^2}{d\bar{x}^2} - e^2 B^2 \bar{x}^2) f(\bar{x}) = 0, \quad (2.16)$$

notemos que hemos utilizado el cambio de variable $\bar{x} = x - \frac{p_y}{eB}$, para facilitar los cálculos. De la relación (2.16) y usando la forma explícita de la función $\psi(\mathbf{r}, t)$, obtenemos la siguiente expresión que debe satisfacer $f(x)$,

$$\left(E^2 - m^2 - p_z^2 + \frac{d^2}{dx^2} - (eBx + p_y)^2 \right) f(x) = 0. \quad (2.17)$$

Tratamos ahora de relacionar la ecuación anterior con un oscilador armónico. Para cumplir ahora con esta tarea, sea $\xi = \sqrt{eB} \bar{x}$, y sea $k^2 = \frac{E^2 - m^2 - p_z^2}{eB} = 2n + 1$ entonces obtenemos que :

$$\frac{d}{d\xi^2} f(\bar{x}) = (\xi^2 - k^2) f(\bar{x}). \quad (2.18)$$

De manera que su energía asociada esta dada por

$$E_n^2 = m^2 + p_z^2 + 2eB(n + \frac{1}{2}), \quad (2.19)$$

y cuyas eigenfunciones correspondientes son

$$f_n(x) \chi_n(x) \equiv I(n, p, x) = \left(\frac{eB}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{eB} \left(x - \frac{p_y}{eB} \right) \right) e^{-\frac{eB}{2} \left(x - \frac{p_y}{eB} \right)^2} \quad (2.20)$$

lo cuál completa el estudio de la ecuación de Klein Gordon para partículas escalares cargadas en la presencia de campos magnéticos externos. Es necesario recalcar, para futuras referencias :

- El efecto relativista modifica la relación entre la energía, la masa y el momento de la partícula, lo cuál podemos ver por simple comparación de las ecuaciones (2.11), (2.19).
- Notemos para partículas relativistas $m \propto \sqrt{eB}$, cuando tomando el resto de las cantidades como constante. Esta relación persiste para la masa dinámicamente generada en la presencia de un campo magnético intenso, como lo veremos en el siguiente capítulo. Enfocaremos ahora nuestra atención a los fermiones cargados, los cuáles son el objeto de estudio de esta tesis.

2.5. Ecuación de Dirac

En este capítulo estudiaremos el comportamiento de los fermiones, es decir, de las partículas cargadas con espín 1/2 en presencia de un campo magnético uniforme. Esta sección y la siguiente están basadas en el trabajo original realizado por Ma. de Jesús Anguiano en su tesis de maestría [12] y en su artículo publicado en el 2007 [13].

Como los fermiones satisfacen la ecuación de Dirac, entonces necesitamos resolver dicha ecuación cuando un campo magnético está presente. Por lo tanto, iniciemos con

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0. \quad (2.21)$$

Si recordamos que $A_\mu = (0, 0, xB, 0)$ ² y ψ la escribimos como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix},$$

tenemos las siguientes ecuaciones por resolver

$$\begin{aligned} \left(i\sigma_3 \frac{\partial}{\partial t} - \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} + i\sigma_2 \left(i \frac{\partial}{\partial y} + eBx \right) - m \right) \psi_A &= \frac{\partial}{\partial z} \psi_B \\ \left(-i\sigma_3 \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} - i\sigma_2 \left(i \frac{\partial}{\partial y} + eBx \right) - m \right) \psi_B &= \frac{\partial}{\partial z} \psi_A, \end{aligned}$$

donde σ_i son las matrices de Pauli. Basados en nuestra experiencia anterior, proponemos una solución de la forma

$$\psi(x, y, z, t) \rightarrow e^{-iEt + iyp_y + izp_z} \psi(x).$$

Usamos el cambio de variable $\bar{x} = x - p_y/eB$ empleado con anterioridad. Es fácil ver ahora que las derivadas involucradas en nuestro cálculo toman la

² $A_y = A^2 = -A_2 = -xB$

siguiente forma

$$\begin{aligned}
\partial_x - i\partial_y - exB &\rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - eB\bar{x} \\
\partial_x + i\partial_y + exB &\rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + eB\bar{x} \\
\partial_t &\rightarrow -iE .
\end{aligned}$$

Además si escribimos a ψ_A y ψ_B en términos de sus componentes

$$\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1^A \\ \psi_2^A \end{pmatrix} \quad \psi_B = \begin{pmatrix} \psi_1^B \\ \psi_2^B \end{pmatrix} ,$$

tenemos entonces el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}
(E - m)\psi_1^A - \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} - eB\bar{x} \right) \psi_2^A &= ip_z \psi_1^B \\
(E + m)\psi_2^A + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + eB\bar{x} \right) \psi_1^A &= -ip_z \psi_2^B \\
(E + m)\psi_1^B - \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} - eB\bar{x} \right) \psi_2^B &= -ip_z \psi_1^A \\
(E - m)\psi_2^B + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + eB\bar{x} \right) \psi_1^B &= ip_z \psi_2^A . \tag{2.22}
\end{aligned}$$

En forma compacta, podemos escribir este sistema como

$$\begin{aligned}
(E \mp m)\psi_{1,1}^{A,B} - \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} - eB\bar{x} \right) \psi_{2,2}^{A,B} &= \pm ip_z \psi_{1,1}^{B,A} \\
(E \mp m)\psi_{2,2}^{B,A} + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + eB\bar{x} \right) \psi_{1,1}^{B,A} &= \pm ip_z \psi_{2,2}^{A,B} . \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones nos conducen al hecho que

$$E_n^2 = m^2 + 2eBn + p_z^2 . \tag{2.24}$$

Notemos que hay solo una ligera modificación de la ecuación en (2.24) con respecto a la dada por (2.19). Tenemos entonces que las soluciones de la

ecuación de Dirac para energía positiva son

$$\begin{aligned} \psi_1^P &= N_n e^{-i(|E_n|t - p_y y)} \begin{pmatrix} 0 \\ -ip_z I(n-1, p, x) \\ -\sqrt{2neBI}(n, p, x) \\ (|E_n| + m)I(n-1, p, x) \end{pmatrix}, \\ \psi_2^P &= N_n e^{-i(|E_n|t - p_y y)} \begin{pmatrix} (|E_n| + m)I(n, p, x) \\ -\sqrt{2neBI}(n-1, p, x) \\ -ip_z I(n, p, x) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

mientras que para las soluciones de energía negativa son :

$$\begin{aligned} \psi_1^N &= N_n e^{i(|E_n|t - p_y y)} \begin{pmatrix} \sqrt{2neBI}(n, -p, x) \\ (|E_n| + m)I(n-1, -p, x) \\ 0 \\ ip_z I(n-1, -p, x) \end{pmatrix}, \\ \psi_2^N &= N_n e^{i(|E_n|t - p_y y)} \begin{pmatrix} ip_z I(n, -p, x) \\ 0 \\ (|E_n| + m)I(n, -p, x) \\ \sqrt{2neBI}(n-1, -p, x) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde

$$|E_n| = \sqrt{2eBn + m^2 + p_z^2}, \quad (2.27)$$

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{2|E_n|(|E_n| + m)}}, \quad (2.28)$$

$$I(n, p, x) = \left(\frac{eB}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{eB}\left(x - \frac{p}{eB}\right)\right) \times e^{\frac{-eB}{2}\left(x - \frac{p}{eB}\right)^2}, \quad (2.29)$$

y $I(n = -1, p, x) = 0$. Una vez que hemos encontrado las soluciones de la ecuación de Dirac, podemos empezar con la definición de la simetría quiral, y condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ para relacionarla con el campo magnético y la masa fermionica.

2.6. Condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$

Iniciamos este capítulo definiendo el concepto del condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Para ello, es necesario notar que cuando no hay campos magnéticos presentes, la ecuación de Dirac dada en la ecuación (2.21), puede ser derivada del lagrangiano dado por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu -)\psi. \quad (2.30)$$

Las transformaciones quirales se definen como $\psi' = e^{i\alpha\gamma^5}\psi$, donde la matriz γ^5 , está dada por la expresión $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, que satisface las siguientes relaciones:

$$(\gamma^5)^2 = 1, \quad (\gamma^5)^\dagger = 1 \quad \text{y} \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (2.31)$$

Entonces podemos ver de manera fácil que la primer parte del Lagrangiano en (2.30) es invariante ante transformaciones quirales, sin embargo el término masivo no lo es. De esta manera concluimos que la existencia de masa provoca el rompimiento de la simetría quiral.

Ahora analicemos la relación que guarda el condensado fermiónico con el campo magnético y el valor de la masa. Como es obvio, se define el condensado fermiónico como el valor de expectación en el vacío de un operador escalar compuesto $\bar{\psi}\psi$. Si los fermiones tienen una masa desnuda igual a cero, el condensado es un parámetro de orden cuyo valor finito corresponde a un rompimiento dinámico de la simetría quiral. Para fermiones masivos el condensado tiene una parte no dinámica, la cuál presentamos en esta sección.

Iniciemos el cálculo del condensado $\bar{\psi}\psi$, expandiendo el campo fermiónico en su descomposición de Fourier en términos de la base completa de soluciones dada por $\{\psi_i^{P,N}\}$:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_n \sum_i' \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dp_z}{\sqrt{2\pi}} \left(a_i(n, p, p_z) \psi_i^P + b_i^\dagger(n, p, p_z) \psi_i^N \right) ,$$

donde $i = 1, 2$ a menos que trabajemos en el nivel más bajo de Landau (LLL), precisamente esto queremos recalcar usando la notación primada. Por otro lado p y p_z son variables continuas del momento y la suma sobre n corre sobre todos los niveles de Landau. Los operadores a_i y b_i son los operadores de aniquilación asociados a las partículas y antipartículas respectivamente, que satisfacen las siguientes relaciones de anticonmutación :

$$\begin{aligned} \{a_i(n, p, p_z), a_j^\dagger(n', p', p'_z)\} &= \{b_i(n, p, p_z), b_j^\dagger(n', p', p'_z)\} \\ &= \delta_{ij} \delta_{nn'} \delta(p - p') \delta(p_z - p'_z) , \end{aligned} \quad (2.32)$$

y además

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_i^\dagger(n', p', p'_z) a_i(n, p, p_z) | 0 \rangle &= 0 , \\ \langle 0 | a_i^\dagger(n', p', p'_z) b_i^\dagger(n, p, p_z) | 0 \rangle &= 0 , \\ \langle 0 | b_i(n', p', p'_z) a_i(n, p, p_z) | 0 \rangle &= 0 . \end{aligned} \quad (2.33)$$

El único término que es diferente de cero es $\langle 0 | b_i(n', p', p'_z) b_i^\dagger(n, p, p_z) | 0 \rangle$, cuando aplicamos este resultado a la ecuación (2.32), obtenemos

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \sum_n \int dp \int dp_z \left[\bar{\psi}_1^N \psi_1^N + \bar{\psi}_2^N \psi_2^N \right] . \quad (2.34)$$

De donde podemos ver con claridad que la contribución al condensado está dada únicamente de las soluciones negativas (asociadas con las antipartículas), de la ecuación de Dirac en presencia de un campo magnético uniforme. El siguiente paso en el cálculo del condensado será utilizar explícitamente las soluciones encontradas en la sección anterior en la ecuación (2.26), de donde podemos deducir que

$$\bar{\psi}_1^N \psi_1^N = \frac{2eBn I^2(n, -p, x) + I^2(n-1, -p, x) \left(-(|E_n| + m)^2 + p_z^2 \right)}{2|E_n|(m + |E_n|)},$$

y de manera análoga :

$$\bar{\psi}_2^N \psi_2^N = \frac{I^2(n, -p, x) \left(p_z^2 - (|E_n| + m)^2 \right) + 2eBn I^2(n-1, -p, x)}{2|E_n|(m + |E_n|)}.$$

Tenemos entonces finalmente que el valor del condensado dado en la ecuación (2.34) se escribe como

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \psi \rangle &= \left(\frac{-m}{(2\pi)^2} \right) \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(I^2(n, -p, x) + I^2(n-1, -p, x) \right) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \frac{1}{\sqrt{m^2 + p_z^2 + 2neB}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Para simplificar la expresión anterior será útil tener en cuenta las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} I^2(n-1, -p, x) dp &= 0 & \text{si } n = 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} I^2(n-1, p, x) dp &= eB & \text{si } n \neq 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} I^2(n, p, x) dp &= eB & \text{si } \forall n. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \frac{-meB}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \left(\frac{1}{\sqrt{m^2 + p_z^2}} - 2 \sum_{n=1}^{n_{\max}} \frac{1}{\sqrt{m^2 + p_z^2 + 2neB}} \right).$$

Introduciendo nuevamente un corte ultravioleta Λ tenemos :

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \psi \rangle &= \frac{-meB}{(2\pi)^2} \ln \left[\frac{\Lambda + \sqrt{m^2 + \Lambda^2}}{m} \right] - \frac{meB}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n_{\max}} \ln \left[\frac{\Lambda + \sqrt{m^2 + \Lambda^2 + 2neB}}{m^2 + 2neB} \right] \\ &= -\frac{meB}{2\pi^2} \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 + x_0}}{\sqrt{x_0}} \right] - \frac{meB}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n_{\max}} \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 + x_n}}{\sqrt{x_n}} \right], \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde $x_0 = \frac{m^2}{\Lambda^2}$ y $x_n = \sqrt{\frac{m^2+2neB}{\Lambda^2}}$. De la ecuación (2.36) encontramos que el valor del condensado va a cero cuando la masa también lo hace. A pesar de que la suma sobre los niveles de Landau diverge, las contribuciones individuales convergen cuando n es grande, pues en este caso la contribución del segundo término al condensado se anula. En la aproximación del nivel mas bajo de Landau tenemos que

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{meB}{2\pi^2} \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1+x_0}}{\sqrt{x_0}} \right]. \quad (2.37)$$

Notemos que cuando $\Lambda^2 \gg m^2$ ó bien $x_0 \ll 1$, podemos realizar la siguiente expansión

$$\ln \left[\frac{1 + \sqrt{1+x_0}}{\sqrt{x_0}} \right] \approx \ln 2 - \frac{1}{2} \ln x_0 + \frac{x_0}{4} + \mathcal{O}(x_0^2), \quad (2.38)$$

de donde

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{meB}{4\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}. \quad (2.39)$$

Como hemos visto el condensado fermiónico esta intimamente conectado con la masa fermionica. De hecho el condensado tiende a cero cuando la masa va a cero y su magnitud, y es favorecido por la presencia del campo magnético. La masa fermionica y el condensado son los puntos claves de estudio en esta tesis, razón por la que abundaremos más en este tema. Nos enfocaremos ahora en la masa fermionica y la manera en que puede ser obtenida a través de su propagador, lo cuál estudiaremos en la siguiente sección.

2.7. Propagador del Fermión

Al buscar una solución a la ecuación de Dirac para una partícula con carga e , en un campo electromagnético, el propagador aparece de manera natural. Intentaremos encontrar la solución a esta ecuación utilizando el método de Green. Como hemos visto la ecuación de Dirac para un electrón en un campo electromagnético esta dado por la ecuación (2.21), la cuál nos indica que

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0.$$

Resolveremos esta ecuación buscando primero la solución de la ecuación dictada por la expresión :

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)G_F(x, y) = \delta^4(x - y) , \quad (2.40)$$

donde hemos usado la notación $G_F(x, y)$ para representar al propagador fermiónico en el espacio de coordenadas. Para llevarlo a una expresión mas familiar en el espacio de momentos solo necesitaremos tomar su transformada de Fourier. Una vez obtenida G_F podemos escribir la solución de la ecuación (2.21) como

$$\psi(x) = \psi_0(x) - e \int d^4y G_F(x, y) \gamma_\mu A^\mu \psi(y) , \quad (2.41)$$

donde $\psi_0(x)$ es la función de onda del electrón en la ausencia del campo electromagnético. Como podemos ver, el miembro derecho queda también en términos de la función ψ . Para resolver la ecuación (2.40) transformamos $G_F(x, y)$ al espacio de momentos, es decir :

$$G_F(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int S_F(p) e^{-ip \cdot (x-y)} d^4p , \quad (2.42)$$

donde $S_F(p)$ es el propagador fermiónico en el espacio de momentos. Sustituyendo el valor del propagador fermiónico en (2.40) obtenemos

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int (\not{p} - m) S_F(p) e^{-ip \cdot (x-y)} d^4p = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ip \cdot (x-y)} d^4p , \quad (2.43)$$

donde es claro que hemos utilizado una representación conveniente para la función delta en el espacio de momentos en el segundo miembro de la expresión, la cuál nos ayudará a reconocer de manera sencilla la condición

$$(\not{p} - m) S_F(p) = 1 , \quad (2.44)$$

es decir,

$$S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m} . \quad (2.45)$$

La masa del fermión se puede definir como la posición del polo en la expresión del propagador. Una vez que hemos entendido la relación existente entre el condensado quiral y el propagador fermionico con el valor de la masa, estamos interesados ahora en intentar explicar los mecanismos que derivan en la generación dinámica de este parámetro. Ésto nos lleva a la discusión de las ecuaciones de Schwinger Dyson (SD), las cuáles son el objeto de estudio del siguiente capítulo.

Capítulo 3

Ecuaciones de Schwinger Dyson y Catálisis Magnética

Las ecuaciones de Schwinger-Dyson (SD), son llamadas así en honor a Julian Schwinger y Freeman Dyson [3, 4] y son las ecuaciones que nos permiten estudiar el rompimiento dinámico de la simetría quirral, es decir, la generación de masa para fermiones en las teorías de campo. Las ecuaciones de SD son un conjunto de ecuaciones integrales acopladas que relacionan las ecuaciones de Green de una teoría cuántica de campos. En general una teoría de campos puede considerarse resuelta una vez que se conocen todas sus funciones de Green, debido a esto la teoría se puede representar mediante un sistema de ecuaciones de SD que tenga por solución a estas funciones.

3.1. Ecuaciones de Schwinger Dyson (SD)

Las ecuaciones de SD pueden ser derivadas formalmente a partir de las integrales de trayectoria de Feynman. Sin embargo, lo que obtenemos con este formalismo es una columna infinita de ecuaciones integrales acopladas. En consecuencia el sistema debe de ser truncado. El método de truncamiento típico es el cálculo perturbativo, y solo puede emplearse cuando existe un parámetro suficientemente pequeño para realizar dicha expansión. En este caso el parámetro es precisamente la constante de acoplamiento α , sin embargo podemos encontrarnos con situaciones donde no se cumpla que $\alpha \ll 1$. Entonces, es necesario buscar otro método para truncarlas, dichos métodos se llaman no perturbativos. Los cálculos no perturbativos muestran efectos

muy importantes que quedan fuera de la teoría de perturbación como la generación dinámica de masas para los fermiones fundamentales y el confinamiento de quarks y gluones en QCD. Nosotros estamos particularmente interesados en la generación dinámica de masas pues sabemos que aproximadamente el noventa y nueve por ciento de la masa de la materia ordinaria es de origen dinámico. Para ello veamos la manera en que los propagadores del fermión y del fotón se modifican a través de autointeracciones. Por ejemplo, un electrón puede emitir y reabsorber fotones en varias maneras como veremos en figuras posteriores. Iniciemos por ver la representación diagramática del propagador completo que muestra la figura (3.1).



Figura 3.1: El propagador completo

Este propagador se expresa mediante una serie infinita de correcciones, que clasificamos en tres : las correcciones al propagador fermiónico, las correcciones al propagador fotónico y las correcciones correspondientes al vértice. El proceso de autointeracciones genera tres series infinitas. Dichas series se encuentran esquemáticamente representadas por las figuras (3.2), (3.3), y (3.4) respectivamente.

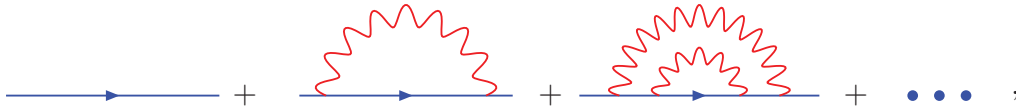


Figura 3.2: Correcciones al propagador fermiónico.

Utilizamos un círculo relleno sobre el propagador fermiónico, para representar la suma de todas las interacciones que pueden afectar al fermión en su propagación. Sucede lo mismo para el propagador completo del fotón y el vértice completo del fermión que también poseen dichos círculos rellenos a diferencia de los propagadores desnudos que no lo tienen.

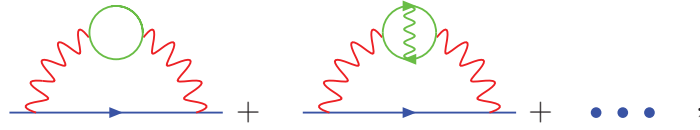


Figura 3.3: Correcciones al propagador del fotón.

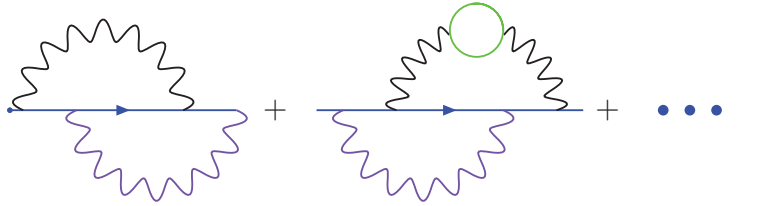


Figura 3.4: Correcciones al vértice.

Las series anteriormente mencionadas se pueden dibujar en una forma compacta como se exhibe en la figura (3.5). Debemos observar que en el tercer diagrama, uno de los vértices no lleva un círculo relleno, porque de ponerlo estaríamos contando doble. Esta ecuación que representamos con diagramas es llamada la ecuación de Schwinger Dyson para el propagador del fermión y corresponde a la ecuación

$$S_F(p) = S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F(p) , \quad (3.1)$$

donde $S_F^0(p) = \frac{1}{\not{p} - m}$ como vimos en la sección anterior y $\Sigma(p)$ representa la autoenergía.

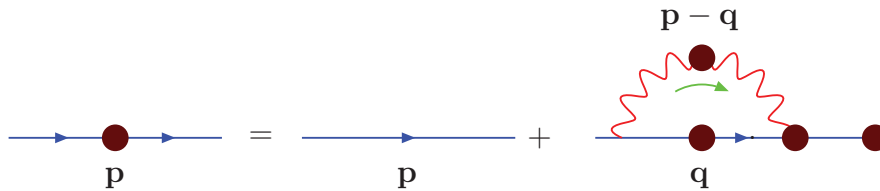


Figura 3.5: El propagador completo.

Si multiplicamos la ecuación anterior a la derecha por $S_F^{-1}(p)$ obtenemos

$$1 = S_F^0(p)S_F^{-1}(p) + S_F^0(p)\Sigma(p) , \quad (3.2)$$

y a continuación multiplicamos a la ecuación (3.2) por $S_F^{0^{-1}}(p)$ por la izquierda, para obtener la expresión

$$S_F^{0^{-1}}(p) = S_F^{-1}(p) + \Sigma(p) . \quad (3.3)$$

Es claro finalmente que podemos reescribir al propagador completo inverso en una forma mucho más simple de manejar, es decir de la siguiente manera

$$S_F^{-1}(p) = S_F^{0^{-1}}(p) - \Sigma(p) , \quad (3.4)$$

cuyo diagrama asociado esta representado en la figura (3.6).

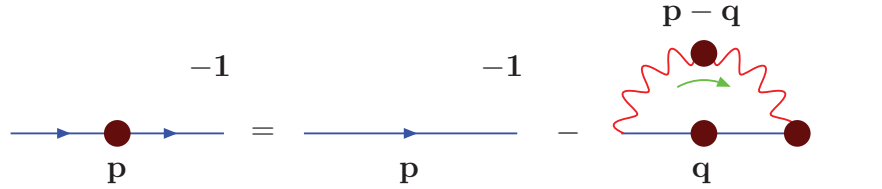


Figura 3.6: El propagador completo inverso.

En el resto de esta tesis, usaremos la aproximación donde solo tomaremos en cuenta la suma de todas las interacciones que afectan al propagador fermiónico. Dicha aproximación se llama, aproximación arcoiris.

3.2. Aproximación Arcoiris

Una vez introducida la ecuación de Schwinger Dyson (SD), para el propagador fermiónico, la siguiente tarea será intentar obtener su solución. La aproximación arcoiris esta representada por el diagrama (3.7).

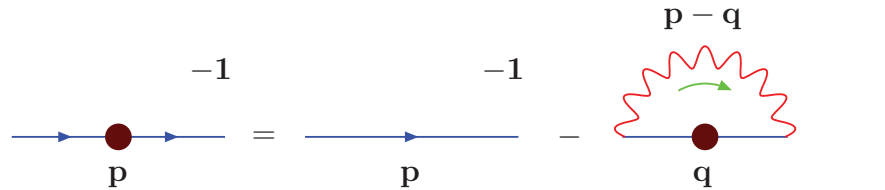


Figura 3.7: Aproximación arcoiris al propagador completo inverso.

Procederemos ahora, a obtener la solución en forma analítica y numérica de la ecuación de SD, para el propagador fermiónico en la aproximación arcoiris. La cuál esta asociada con el diagrama (3.7). Ahora utilizaremos las expresiones explícitas del propagador completo, del propagador desnudo, y del propagador del fotón desnudo, para reescribir la ecuación (3.4) como

$$-iS_F^{-1}(p) = -iS_F^0{}^{-1}(p) - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (-ie\gamma^\mu) [iS_F(q)] (-ie\gamma^\nu) (-i\Delta_{\mu\nu}^0(p-q)). \quad (3.5)$$

Recordamos que preferimos escribir el propagador completo en la forma

$$S_F^{-1}(p) = \frac{\not{p} - M(p)}{F(p)}. \quad (3.6)$$

El propagador desnudo se obtiene de tomar la función de renormalización $F(p) = 1$ y reemplazar la función de masa $M(p)$ por el valor de la masa desnuda m . Por otro lado, el propagador del fotón a nivel árbol en una norma covariante arbitraria ξ es

$$\Delta_{\mu\nu}^0(p-q) = -\frac{1}{(p-q)^2} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{(p-q)_\mu(p-q)_\nu}{(p-q)^2} \right]. \quad (3.7)$$

Además notemos que

$$\frac{F(p)}{\not{q} - M(q)} = \frac{(\not{q} + M(q))F(p)}{q^2 - M^2(q)}. \quad (3.8)$$

Por lo tanto, tomando la traza de la ecuación (3.5) nos da

$$4i \frac{M(p)}{F(p)} = 4im + \frac{e^2}{(2\pi)^4} \left(\int d^4q \frac{M(q)F(q)}{q^2 - M^2(q)} (4g^{\mu\nu}) \times \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{(p-q)_\mu(p-q)_\nu}{(p-q)^2} \right] \right) \frac{1}{(p-q)^2}. \quad (3.9)$$

Aplicando ahora las propiedades de la métrica obtenemos que

$$\frac{M(p)}{F(p)} = m - \frac{ie^2(3 + \xi)}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{M(q)F(q)}{q^2 - M^2(q^2)} \frac{1}{(p-q)^2}, \quad (3.10)$$

y procedemos ahora a aplicar una rotación de Wick para evitar los polos en la expresión anterior, de manera que $q_0 \rightarrow iq_0$ y en consecuencia $q^2 \rightarrow -q^2$

y $d^4q \rightarrow id^4q$. Entonces tenemos que nuestra expresión (3.10) cambia de la siguiente forma

$$\frac{M(p)}{F(p)} = m + \frac{e^2(3 + \xi)}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{M(q)F(q)}{q^2 + M^2(q)} \frac{1}{(p - q)^2}. \quad (3.11)$$

Es claro que la ecuación anterior requiere el uso de nuevas coordenadas para llevarla a una expresión mas tratable. Con esta finalidad, usemos la representación para los vectores

$$\begin{aligned} q^\mu &= (q \cos \psi, q \sin \psi \sin \theta \cos \phi, q \sin \psi \sin \theta \sin \phi, q \sin \psi \cos \theta) \\ p^\mu &= (p, 0, 0, 0), \end{aligned} \quad (3.12)$$

de donde $d^4q = q^3 dq \sin^2 \psi d\psi \sin \theta d\theta d\phi$, con las restricciones angulares $0 \leq \theta, \psi \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, y $0 \leq q \leq \infty$. Al sustituir estos resultados en (3.11) observamos que

$$\frac{M(p)}{F(p)} = m + \frac{e^2(3 + \xi)4\pi}{(2\pi)^4} \int q^3 dq \sin^2 \psi d\psi \frac{M(q)F(q)}{q^2 + M^2(q)} \frac{1}{(p - q)^2} \quad (3.13)$$

donde hemos podido realizar las integraciones sobre θ y ϕ debido al hecho que no hay ninguna dependencia en el kernel sobre estos ángulos. Veamos ahora que es posible realizar la integral

$$\int_0^\pi \sin^2 \psi d\psi \frac{1}{p^2 + q^2 - 2pq \cos \psi} = \frac{\pi}{4p^2q^2} (p^2 + q^2 - |p^2 - q^2|). \quad (3.14)$$

Podemos ahora hacer uso de la función $h(x)$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

o equivalentemente

$$h(x) = \frac{1}{2}(1 + x - |1 - x|), \quad (3.16)$$

lo cuál implica que se satisface la siguiente igualdad

$$p^2 + q^2 - |p^2 - q^2| = 2p^2 \left[h\left(\frac{q^2}{p^2}\right) \right]. \quad (3.17)$$

Entonces al reemplazar nuestros cálculos en (3.13), obtenemos

$$\frac{M(p)}{F(p)} = m + \frac{e^2(3 + \xi)}{8\pi^2} \int q^3 dq \frac{1}{q^2} \frac{M(q)F(q)}{q^2 + M^2(q)} \left[h\left(\frac{q^2}{p^2}\right) \right]. \quad (3.18)$$

Podemos ahora dividir dicha integral en dos términos, haciendo uso de la segunda definición de la función $h(x)$ expresada en (3.15) dandonos como resultado

$$\begin{aligned} \frac{M(p)}{F(p)} = m &+ \frac{e^2(3 + \xi)}{16\pi^2} \int_0^{p^2} dq^2 \frac{M(q)F(q)}{q^2 + M^2(q)} \left(\frac{q^2}{p^2}\right) \\ &+ \frac{e^2(3 + \xi)}{16\pi^2} \int_{p^2}^{\infty} dq^2 \frac{M(q)F(q)}{q^2 + M^2(q)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

La relación expresada en (3.19), es la ecuación de SD para el propagador del fermión en la aproximación arcoiris. Tiene la enorme ventaja de que es soluble utilizando métodos analíticos y numéricos, como veremos a continuación.

3.3. Generación Dinámica de Masas

Es importante mencionar que la ecuación (3.5) contiene otra expresión independiente para $F(p)$, que se obtiene al multiplicar por \not{p} y tomar su traza. Lo cual nos indica que $F(p) = 1$ en la norma de Landau. De manera que ésta será una buena aproximación para normas en el vecindario de la norma de Landau. Si definimos el valor de la magnitud de la interacción $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ y linealizamos la ecuación (3.19) obtenemos que

$$M(p) = m + \frac{\alpha(3 + \xi)}{4\pi} \left[\frac{1}{p^2} \int_0^{p^2} dq^2 M(q) + \int_{p^2}^{\infty} dq^2 \frac{M(q)}{q^2} \right]. \quad (3.20)$$

Podemos ahora llamar $p^2 = x$ y $q^2 = y$ para hacer más claros nuestros cálculos, y derivar la ecuación resultante haciendo uso del teorema fundamental del cálculo, el cuál nos indica que $\frac{d}{dx} \int_0^x N(y) = N(x)$, tenemos entonces que

$$M'(x) = \frac{-\alpha(3 + \xi)}{4\pi} \frac{1}{x^2} \int_0^x dy M(y). \quad (3.21)$$

Multiplicando la ecuación (3.21) por x^2 y diferenciando una vez mas, obtenemos

$$x^2 M''(x) + 2xM'(x) + \frac{\alpha(3 + \xi)}{4\pi} M(x) = 0 . \quad (3.22)$$

Es bien sabido que la solución mas general de la ecuación (3.22) es de la forma $M(x) = x^{-s}$, lo cuál impone que

$$s^2 - s + \frac{\alpha(3 + \xi)}{4\pi} = 0 . \quad (3.23)$$

Llamemos ahora $\alpha_c = \frac{\pi}{3+\xi}$. Tenemos entonces que las soluciones para s son de la forma

$$s_{1,2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\alpha_c}} . \quad (3.24)$$

De manera que la solución general será

$$M(x) = C_1 x^{-s_1} + C_2 x^{-s_2} , \quad (3.25)$$

con C_1, C_2 constantes a determinar mediante condiciones de frontera. Debemos mencionar que si el valor del acoplamiento es mayor al valor del acoplamiento crítico, entonces la solución se escribe como

$$M(x) = C_1 x^{-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\tau} + C_2 x^{-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\tau} , \quad (3.26)$$

con $\tau = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_c} - 1}$ y τ es real. Es claro ahora la razón por la que hemos llamado crítico a este valor $\alpha = \alpha_c$, pues para valores menores a él, nuestra solución es real, en tanto que para valores mayores, nuestra solución será compleja. Por lo tanto, cuando variamos el valor de α la solución para la función de masa sufre una transición del plano real al complejo.

- En la figura (3.8) mostramos la variación de la masa con respecto al valor del acoplamiento. De esta gráfica, es claro que cuando el valor de α aumenta, el valor de la masa generada también lo hace.
- En esta figura, además, exhibimos la existencia de un valor crítico para el acoplamiento, es decir un valor bajo del cuál la función de masa es igual a cero. Dicho valor encontrado numéricamente es el mismo que fué encontrado de manera analítica y está dado por $\alpha_c = \frac{\pi}{3+\xi}$.

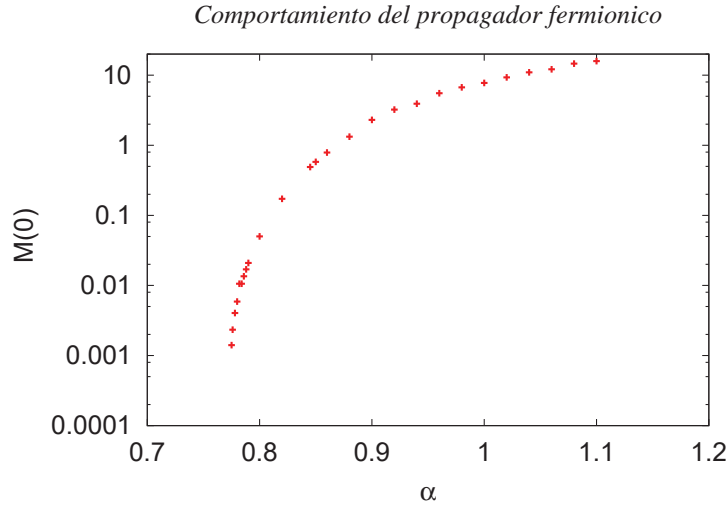


Figura 3.8: Comportamiento de la masa generada variando el valor de α en la norma de Feynman.

Dado que los campos magnéticos externos modifican las propiedades de propagación de las partículas y catalizan la generación dinámica de masas para cualquier valor del acoplamiento, será muy interesante realizar un estudio detallado de sus efectos. A esta tarea están dedicadas las dos siguientes secciones de este capítulo.

3.4. Catálisis Magnética

Como hemos visto, en electrodinámica cuántica se da la generación dinámica de masas (DMG), solamente si el acoplamiento electromagnético supera cierto valor crítico. Sin embargo, la presencia de un campo magnético nos proporciona un cambio drástico, siendo posible generar masas fermiónicas para cualquier valor del acoplamiento (catálisis magnética), y ha sido extensamente estudiado cuando el campo presente es intenso [7], [8], [9], [10], [11]. En este caso, el nivel mas bajo de Landau (LLL), es suficiente para describir el fenómeno. Con esta consideración el análisis se simplifica de manera considerable. Físicamente, para campos magnéticos intensos, los niveles de Landau están considerablemente separados, lo cuál hace energéticamente poco favorable para las partículas virtuales acceder a otros niveles distintos a LLL.

En esta sección estudiamos el rompimiento dinámico de simetría en la presencia de campos magnéticos externos, usando las ecuaciones de Schwinger Dyson, en (QED). Para ello, iniciemos tomando ahora la ecuación para la función de masa, deducida por Lee y Leung [10], que en la norma de Feynman $\xi = 1$ y en la aproximación del nivel más bajo de Landau, señala que la función de masa obedece la siguiente relación:

$$M(p_{\parallel}) \simeq e^2(4eB) \int \frac{d^4\hat{q}}{(2\pi)^4} \frac{e^{-\hat{q}_{\perp}^2}}{\hat{q}^2} \frac{M(p_{\parallel} - q_{\parallel})}{(p_{\parallel} - q_{\parallel})^2 + M^2(p_{\parallel} - q_{\parallel})}. \quad (3.27)$$

Es preciso notar que hemos definido

$$\begin{aligned} \hat{q}_{\mu} &\equiv \frac{q_{\mu}}{\sqrt{2eB}}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \\ \hat{q}_{\perp} &\equiv \sqrt{\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Donde el subíndice \perp se refiere a las componentes transversas $\mu = 1, 2$, en tanto que el subíndice \parallel se refiere a las componentes longitudinales $\mu = 0, 3$. Dada la ecuación (3.27), podemos observar que el encontrar una solución analítica para ella será una tarea complicada, razón por la cuál tendremos que usar una aproximación. Escogemos la escala de masa fermiónica en el infrarojo, por razones que quedarán mas claras posteriormente, en esta aproximación

$$M(0) \simeq e^2(4eB) \int \frac{d^4\hat{q}}{(2\pi)^4} \frac{e^{-\hat{q}_{\perp}^2}}{\hat{q}^2} \frac{M(q_{\parallel})}{(2eB)\hat{q}_{\parallel}^2 + M^2(q_{\parallel})}. \quad (3.29)$$

Esperamos que $M(q_{\parallel})$ disminuya cuando q_{\parallel}^2 aumenta, de manera que la ecuación (3.29) está dominada por las contribuciones de \hat{q}_{\parallel}^2 pequeños. Será entonces razonable aproximar $M(q_{\parallel})$ en el integrando por $M(0) = m \times \mathbf{1}$ (aproximación de masa constante), donde m es la masa dinámica y $\mathbf{1}$ es la matriz unidad. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &\simeq e^2(4eB) \int \frac{d^4\hat{q}}{(2\pi)^4} \frac{e^{-\hat{q}_{\perp}^2}}{\hat{q}^2} \frac{1}{(2eB)\hat{q}_{\parallel}^2 + m^2} \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2}(eB) \int_0^{\infty} d\hat{q}_{\perp}^2 \int_0^{\infty} d\hat{q}_{\parallel}^2 \frac{e^{-\hat{q}_{\perp}^2}}{\hat{q}_{\perp}^2 + \hat{q}_{\parallel}^2} \frac{1}{(2eB)\hat{q}_{\parallel}^2 + m^2} \\ &= \frac{\alpha}{\pi}(eB) \int_0^{\infty} d\hat{q}_{\perp}^2 \frac{e^{-\hat{q}_{\perp}^2} \ln((2eB)\hat{q}_{\perp}^2/m^2)}{(2eB)\hat{q}_{\perp}^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

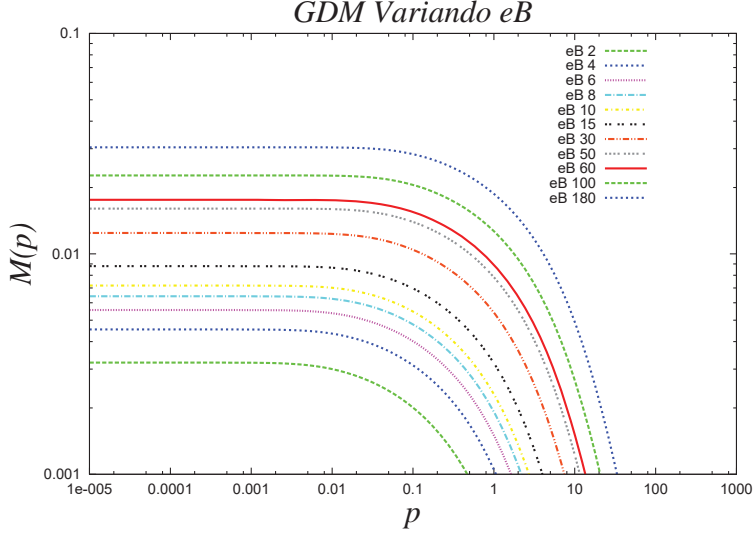


Figura 3.9: Variando el campo magnético $\alpha = \frac{1}{4\pi}$ en la norma de Feynman.

donde $\alpha = e^2/4\pi$. La solución de esta ecuación tiene la forma

$$m \simeq a\sqrt{eB}e^{-b\sqrt{\pi/\alpha}}, \quad (3.31)$$

donde a, b son constantes de orden uno [10]. El comportamiento no perturbativo de la ecuación (3.31) es evidente. De acuerdo a la expresión anterior la contribución dominante de la integral corresponde a la región $(2eB)\hat{q}_\perp^2 \sim m^2$. Pero dado que \hat{q}_\perp es pequeño, nuestra afirmación requiere que $m \ll \sqrt{eB}$ que a su vez requiere que $\alpha \ll 1$. Es decir, que la solución que encontramos para la masa dinámica, es válido solo en el régimen de acoplamiento débil de QED. A continuación, intentaremos resolver la ecuación (3.27) sin usar la aproximación de masa constante, mediante métodos numéricos, y analizaremos su concordancia con los resultados analíticos previos, donde utilizamos dicha aproximación. El tratamiento numérico que llevaremos a cabo de la ecuación (3.27) consistirá en no usar la aproximación de masa constante y separar las contribuciones transversales y las longitudinales de la siguiente manera :

$$M(p_\parallel) \simeq e^2(4|eB|) \int \frac{d^2\hat{q}_\perp d^2\hat{q}_\parallel}{(2\pi)^4} \frac{e^{-\hat{q}_\perp^2}}{\hat{q}_\perp^2} \frac{M(p_\parallel - q_\parallel)}{(p_\parallel - q_\parallel)^2 + M^2(p_\parallel - q_\parallel)}, \quad (3.32)$$

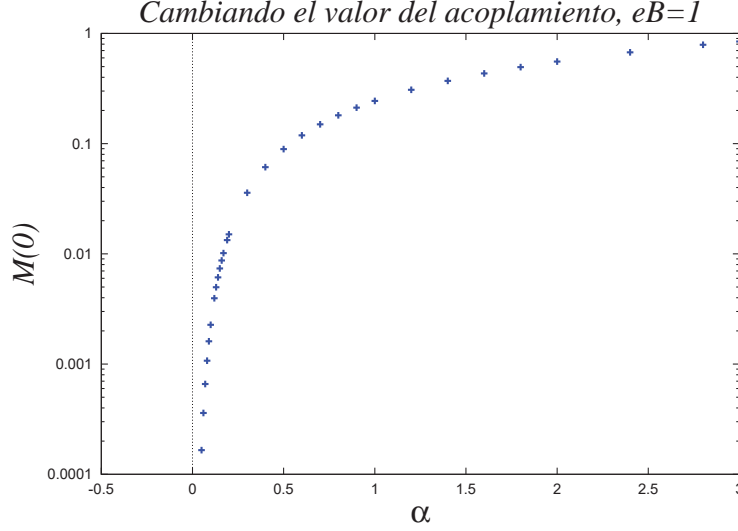


Figura 3.10: La masa $M(0)$ para varios valores de α en la norma de Feynman.

o de manera equivalente por

$$M(p_{\parallel}) \simeq \frac{e^2(4|eB|)}{(2\pi)^4} \int d^2\hat{q}_{\parallel} \frac{M(p_{\parallel} - q_{\parallel})}{(p_{\parallel} - q_{\parallel})^2 + M^2(p_{\parallel} - q_{\parallel})} \int d^2\hat{q}_{\perp} \frac{e^{-\hat{q}_{\perp}^2}}{\hat{q}_{\parallel}^2 + \hat{q}_{\perp}^2}. \quad (3.33)$$

Usando coordenadas polares donde $d^2\hat{q}_{\perp}^2 = \hat{q}_{\perp} d\hat{q}_{\perp} d\hat{\theta}_{\perp}$, tenemos que la última de las integrales en (3.33) se convierte en

$$\begin{aligned} \int d^2\hat{q}_{\perp} \frac{e^{-\hat{q}_{\perp}^2}}{\hat{q}_{\parallel}^2 + \hat{q}_{\perp}^2} &= \int d\hat{\theta}_{\perp} \int \hat{q}_{\perp} d\hat{q}_{\perp} \frac{e^{-\hat{q}_{\perp}^2}}{\hat{q}_{\parallel}^2 + \hat{q}_{\perp}^2} \\ &= \frac{1}{2} \int d\hat{\theta}_{\perp} \left(e^{\hat{q}_{\parallel}^2} \Gamma(0, \hat{q}_{\parallel}^2) \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Donde la función Γ esta definida por $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} \tau^{\alpha-1} e^{-\tau} d\tau$. Sustituyendo este resultados en la expresión (3.33) tenemos

$$M(p_{\parallel}) \simeq \frac{e^2(2eB)}{(2\pi)^3} \int d^2\hat{q}_{\parallel} \frac{M(p_{\parallel} - q_{\parallel})}{(p_{\parallel} - q_{\parallel})^2 + M^2(p_{\parallel} - q_{\parallel})} e^{\hat{q}_{\parallel}^2} \Gamma(0, \hat{q}_{\parallel}^2). \quad (3.35)$$

Usemos ahora que $\hat{q}_{\mu} = q_{\mu}/\sqrt{2eB}$, y denominemos $\beta = 1/\sqrt{2eB}$, de manera que tengamos una expresión para la masa dinámicamente generada co-

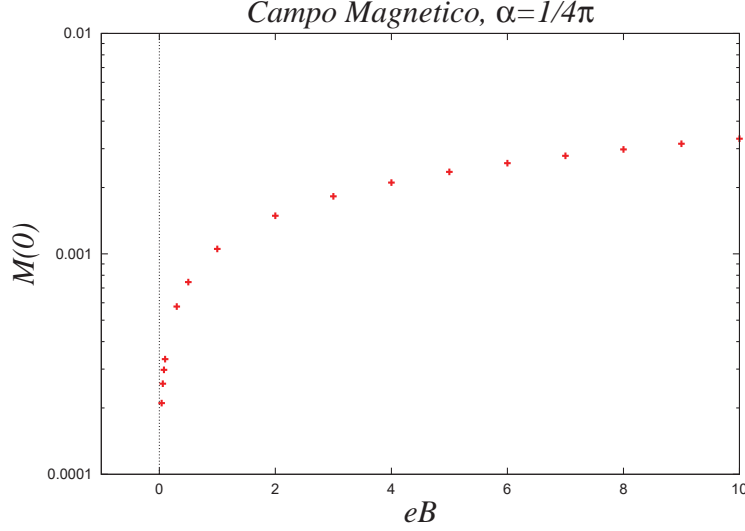


Figura 3.11: La masa $M(0)$ variando el valor del campo magnético α en la norma de Feynman.

mo función de las variables sin gorrito, para ello notemos que $\hat{q}_\parallel d\hat{q}_\parallel d\hat{\theta}_\parallel = \beta^2 q_\parallel dq_\parallel d\theta_\parallel$. Entonces podemos escribir

$$M(p_\parallel) \simeq \frac{e^2(2eB)}{(2\pi)^3} \int \beta^2 q_\parallel dq_\parallel d\theta_\parallel \frac{M(p_\parallel - q_\parallel)}{(p_\parallel - q_\parallel)^2 + M^2(p_\parallel - q_\parallel)} e^{q_\parallel^2 \beta^2} \Gamma(0, q_\parallel^2 \beta^2). \quad (3.36)$$

Haciendo un cambio de variable de manera que $p_\parallel - q_\parallel = \tilde{q}$, obtenemos que

$$M(p_\parallel) \simeq \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int q_\parallel dq_\parallel d\theta_\parallel \frac{M(\tilde{q})}{\tilde{q}^2 + M^2(\tilde{q})} e^{(p_\parallel - \tilde{q})^2 \beta^2} \Gamma(0, (p_\parallel - \tilde{q})^2 \beta^2). \quad (3.37)$$

Desarrollando los términos cuadráticos y separando nuestra ecuación como producto de dos integrales, tenemos :

$$M(p_\parallel) \simeq \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int q_\parallel dq_\parallel \frac{M(\tilde{q})}{\tilde{q}^2 + M^2(\tilde{q})} \times \int d\theta_\parallel e^{(p_\parallel^2 + \tilde{q}^2 - 2p_\parallel \tilde{q} \cos \theta) \beta^2} \Gamma(0, (p_\parallel^2 + \tilde{q}^2 - 2p_\parallel \tilde{q} \cos \theta) \beta^2). \quad (3.38)$$

Usando la ecuación (3.38) como nuestro kernel, procedemos a hacer un análisis numérico, sobre la reacción de la masa dinámicamente generada, con re-

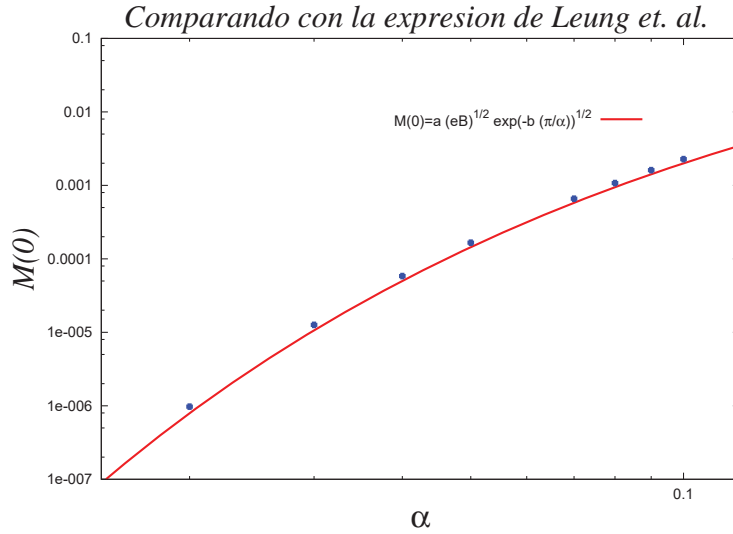


Figura 3.12: Esta gráfica nos muestra la equivalencia de nuestros resultados con los obtenidos por Leung et. al. [10].

specto al factor de acoplamiento y la magnitud del campo magnético. A continuación, presentamos los resultados obtenidos, resumiendolos de la siguiente manera :

- En la figura (3.9), presentamos la variación de la función de masa $M(p)$, contra el valor del momento p . De esta figura, podemos observar claramente, que cuando el valor del campo magnético aumenta, también lo hace el valor de la masa.
- La figura (3.10), nos muestra el cambio del valor de la masa generada, como función del valor de acoplamiento α . De esta gráfica, vemos que conforme aumenta el valor de la magnitud de la interacción, aumenta el valor de la masa generada dinámicamente.
- En la (3.11), mostramos la relación existente entre la masa fermiónica generada, cuando variamos el campo magnético, demostrando que este último, logra la generación de masa para cualquier valor del acoplamiento y que conforme el campo es mayor, la masa generada también aumenta.

- Finalmente, en la gráfica (3.12), ilustramos la equivalencia de nuestros resultados, con los previamente obtenidos de manera analítica por Leung y sus colaboradores ([10]), expresados en la ecuación (3.31), mostrando que la curva se ajusta perfectamente a nuestros datos.

De esta manera, la validez de nuestros resultados queda corroborada. En el siguiente capítulo realizaremos un estudio detallado de la manera en la cuál la masa fermiónica generada se ve afectada en la presencia de temperatura finita y como se modifica su valor ante las posibles variaciones del acoplamiento.

Capítulo 4

Fermiones a Temperatura Finita.

En el último capítulo, hemos estudiado en detalle, el fenómeno de la generación dinámica de masas, en presencia y ausencia de un campo magnético uniforme externo. En la ausencia de éste, es bien sabido que los fermiones adquieren masa cuando el acoplamiento electromagnético supera un valor crítico α_c . El efecto de un campo magnético, es hacer que este valor crítico se asemeje a cero, es decir, $\alpha_c \rightarrow 0$. Tenemos entonces que la catálisis magnética, se da aún para valores pequeños del acoplamiento electromagnético, haciéndolo un fenómeno aún más interesante. Por otro lado, la presencia de un baño térmico es otro ingrediente de interés, por ejemplo, en objetos astrofísicos y en experimentos de iones pesados. En este capítulo revisaremos el trabajo realizado en la referencia ([14]) acerca de la generación dinámica de masa a temperatura finita

4.1. Generación Dinámica de Masas en QED a Temperatura Finita

En un fondo térmico, se espera criticalidad en la temperatura, es decir, se espera desencadenar la generación de masa por debajo de cierta temperatura y restaurar la simetría quiral si superamos este valor. En esta sección de la tesis haremos el estudio en QED en la aproximación arcoiris a temperatura finita, estudiando la ecuación de SD correspondiente, representado por la figura (3.7), en este caso, tomaremos solo la frecuencia de Matsubara

mas dominante, debido a que estamos considerando altas temperaturas. Entonces, la teoría se asemeja a la correspondiente en Electrodinámica cuántica en $2 + 1$ dimensiones (QED_3) a temperatura cero [15]. Con el objetivo de mostrar esta semejanza tomaremos $\alpha' = \alpha T$ y T como parámetros independientes, asociados al acoplamiento y a la temperatura respectivamente. La única diferencia notable es la dependencia de la masa respecto a la temperatura. De hecho, si mantenemos la temperatura constante, el incremento del valor del acoplamiento más allá de un cierto valor crítico, hace que los fermiones adquieran masa. Por el contrario, el aumento de la temperatura, logrará eventualmente la restauración de la simetría quiral. Otro hecho a notar, es que cuando incrementamos el valor del acoplamiento, el valor crítico de la temperatura se multiplica por el mismo factor, este dato será mostrado de forma analítica en esta misma sección. Debemos enfatizar que la existencia de criticalidad para el acoplamiento esta en contraste con el comportamiento de QED_3 a temperatura cero, donde si hay una generación de masas, para un valor del acoplamiento, cualquier alteración en su valor generará el mismo fenómeno. Para comenzar nuestro estudio tomemos la expresión de la función de masa en el espacio Euclidiano ¹

$$M(P) = \frac{-i(3 + \xi)\alpha}{4\pi^3} \int d^4Q \frac{M(Q)}{Q^2 - M^2(Q)} \frac{1}{(P - Q)^2}. \quad (4.1)$$

Hemos definido ξ , como el parámetro covariante de norma. En este capítulo hemos modificado la notación, de forma que usaremos letras mayúsculas para representar los tetra vectores, esta notación será útil en el estudio de la DMG a temperatura finita. Trabajando en la aproximación arcoiris, ignorando las funciones que no dependen de M en el propagador fermiónico y utilizando la formulación de tiempo imaginario de la teoría térmica de campos, tomando $Q = (iw_n, \mathbf{q})$, $P = (iw, \mathbf{p})$ donde $w_n = (2n + 1)\pi T$ y $w = (2m + 1)\pi T$ son frecuencias fermiónicas discretas, T es la temperatura y n, m son números enteros. En este formalismo, obtenemos:

$$M(w, |\mathbf{p}|) = \frac{(3 + \xi)\alpha}{2\pi^2} T \sum_n \int d^3|\mathbf{q}| \quad (4.2)$$

$$\times \frac{M(w_n, |\mathbf{q}|)}{[w_n^2 + \mathbf{q}^2 + M^2(Q)]} \frac{1}{[(w_n - w)^2 + |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2]}.$$

¹En este trabajo, no hemos derivado las ecuaciones de Schwinger Dyson sino que hemos tomado la expresión 6 de [14].

Una solución trivial de esta ecuación es $M(w, |\mathbf{p}|) = 0$, que corresponde a la solución perturbativa. Sin embargo estamos interesados en una solución no trivial. Con ese objetivo, tomaremos en cuenta los siguientes puntos :

- Consideramos solo la contribución de la frecuencia mas baja de Matsubara, es decir, $n, m = 0$. Esta aproximación es muy buena, cuando tenemos altas temperaturas. Por lo tanto, $w_0 = \pi T$ y $w_n - w = 0$.
- De acuerdo al punto anterior, tenemos entonces que la función de masa $M(w, |\mathbf{p}|) \rightarrow M(\pi T, p)$, y $M(w_n, |\mathbf{q}|) \rightarrow M(\pi T, q)$.
- Como mencionamos anteriormente, usamos $\alpha T = \alpha'$ y T como variables independientes, para mostrar la relación con QED_3 [15].

Ahora utilizamos estos puntos en la ecuación para la función de masa obteniendo

$$M(\pi T, p) = \frac{(3 + \xi)\alpha'}{2\pi^2} \int d^3q \frac{M(\pi T, q)}{[\pi^2 T^2 + q^2 + M^2(\pi T, q)]} \frac{1}{|p - q|^2}. \quad (4.3)$$

Haciendo uso de que en coordenadas esféricas $d^3q = q^2 dq \sin \theta d\theta d\phi$,

$$M(\pi T, p) = \frac{(3 + \xi)\alpha'}{\pi} \int_0^\infty dq \frac{q^2 M(\pi T, q)}{\pi^2 T^2 + q^2 + M^2(\pi T, q)} \int_0^\pi \frac{d\theta \sin \theta}{p^2 + q^2 - 2pq \cos \theta}$$

finalmente si hacemos $x = \cos \theta$, tenemos que

$$M(\pi T, p) = \frac{(3 + \xi)\alpha'}{\pi} \int_0^\infty dq \frac{q^2 M(\pi T, q)}{\pi^2 T^2 + q^2 + M^2(\pi T, q)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{p^2 + q^2 - 2pqx} \quad (4.4)$$

Dado que no poseemos artificios matemáticos simples para resolver la ecuación (4.4), intentaremos convertir la ecuación integral en un conjunto de ecuaciones no lineales, las cuáles trataremos de resolver mediante un programa numérico del cuál hablaremos en detalle mas adelante.

4.2. Estudio Analítico

Con el objeto de hacer un estudio analítico de algunas de las propiedades del kernel obtenido en la ecuación (4.4), notemos que podemos simplificar esta ecuación como

$$M(\pi T, p) = \frac{(3 + \xi)\alpha'}{\pi p} \int_0^\infty dq \frac{q M(\pi T, q)}{\pi^2 T^2 + q^2 + M^2(\pi T, q)} \ln \left| \frac{q + p}{q - p} \right|. \quad (4.5)$$

Ahora utilicemos la aproximación

$$\ln \left| \frac{q+p}{q-p} \right| \equiv \frac{2p}{q} \theta(q-p) + \frac{2q}{p} \theta(p-q) . \quad (4.6)$$

Ésta es una buena aproximación cuando $p \ll q$ y $p \gg q$. Usemos también que si la masa generada es pequeña entonces podemos despreciar la contribución de $M^2(\pi T, q)$ en el denominador. Bajo estas simplificaciones tenemos que

$$M(\pi T, p) = \frac{2(3+\xi)\alpha'}{\pi} \int_0^\infty dq \frac{M(\pi T, q)}{\pi^2 T^2 + q^2} \left(\theta(q-p) + \frac{q^2}{p^2} \theta(p-q) \right) . \quad (4.7)$$

Utilizando πT como un corte infrarojo, la ecuación anterior sufre la siguiente modificación

$$M(\pi T, p) = \frac{2(3+\xi)\alpha'}{\pi} \left(\int_{\pi T}^p dq \frac{M(\pi T, q)}{p^2} + \int_p^\infty dq \frac{M(\pi T, q)}{q^2} \right) . \quad (4.8)$$

Podemos ahora analizar como se comporta esta ecuación particularmente para valores asintóticos del momento, para esto la convertiremos en una ecuación diferencial de segundo orden, con sus dos condiciones de frontera correspondientes. La primera viene de observar que de acuerdo a (4.8) cuando $p \rightarrow \infty$, la función de masa va a cero, es decir,

$$M(\pi T, p) = 0|_{p \rightarrow \infty} . \quad (4.9)$$

Para obtener la segunda condición de frontera, derivamos la ecuación (4.8), usando el teorema fundamental del cálculo nuevamente, para obtener

$$\frac{dM(\pi T, p)}{dp} = \frac{-4(3+\xi)\alpha'}{\pi} \frac{1}{p^3} \int_{\pi T}^p dq M(\pi T, q) . \quad (4.10)$$

de donde

$$p^3 \frac{d}{dp} \left(M(\pi T, p) \right) = 0|_{p=\pi T} . \quad (4.11)$$

Reacomodando términos en la ecuación (4.10) y derivando una vez mas, obtenemos que

$$\frac{d}{dp} \left[p^3 \frac{dM(\pi T, p)}{dp} \right] + \frac{4(3+\xi)\alpha' M(\pi T, p)}{\pi} = 0 . \quad (4.12)$$

Tenemos entonces, que nuestra ecuación diferencial de segundo orden es

$$\frac{d^2}{dp^2} \left(M(\pi T, p) \right) p^3 + 3 \frac{d}{dp} \left(M(\pi T, p) \right) p^2 + \frac{4(3 + \xi)\alpha'}{\pi} M(\pi T, p) . \quad (4.13)$$

La solución de esta ecuación es

$$M(\pi T, p) = \frac{8(3 + \xi)\alpha'}{\pi p} \left[c_1 J_2 \left(4 \sqrt{\frac{(3 + \xi)\alpha'}{\pi p}} \right) - c_2 Y_2 \left(4 \sqrt{\frac{(3 + \xi)\alpha'}{\pi p}} \right) \right], \quad (4.14)$$

donde $J(x)$ y $Y(x)$ son las funciones de Bessel de primer y segundo orden respectivamente, y están definidas por

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n\tau - x \sin \tau)} d\tau , \\ Y_\alpha(x) &= \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - (-1)^\alpha J(\alpha x)}{\sin(\alpha\pi)} . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Notemos que la primera condición de frontera (4.9) se satisface si $c_2 = 0$. Dado que $J(1/\sqrt{p}) \rightarrow 1/p$ cuando $p \rightarrow \infty$, podemos entonces concluir que $M(\pi T, p) \rightarrow \frac{1}{p^2}$ en este límite. Más adelante comprobaremos este resultado numéricamente también. Vamos ahora a realizar un análisis que nos permite obtener resultados concretos acerca de la criticalidad en la temperatura. Para ello recordemos la segunda condición de frontera dada en (4.11), notemos que esta relación nos permite establecer una ecuación para el acoplamiento dictada por

$$J_2(4a) - a[J_1(4a) - J_3(4a)] = 0 , \quad (4.16)$$

donde

$$a = \sqrt{(3 + \xi)\alpha'/\pi^2 T} . \quad (4.17)$$

Veamos ahora que si a es una constante, esto implica que α' y T son proporcionales, de manera que si incrementamos el valor del acoplamiento también se incrementa el valor de la temperatura y exactamente con el mismo factor. La primera solución no trivial, nos indica que $a = 0.958$ con una temperatura $T_c = 0.02636$ en la norma de Landau, y con $\alpha' = 1/4\pi$. Este valor difiere solo en un diez por ciento del valor $T_c = 0.0379$ que obtuvimos de forma numérica.

Nos preocupa ahora el hecho de la dependencia de nuestros resultados con respecto a la norma que hemos utilizado. Sin embargo, no esperamos dicha independencia debido a algunas razones que mencionaremos a continuación:

- Asumimos desde un principio que $F(p) = 1$, y los estudios a temperatura cero, indican que la inclusión de $F(p)$ juega un papel importante en la restauración de la invarianza de norma [16].
- La aproximación arcoiris no respeta las identidades de Ward-Green-Takahashi (WGT), ni las transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin (LKF), y ambas son consecuencias de la invarianza de norma. La dependencia que existe entre la elección de la norma y la temperatura crítica T_c es mostrada explícitamente en las gráficas (4.2), (4.3) y cuyos datos provienen de nuestros resultados numéricos. Como otra comprobación analítica de la información expresada en (4.17), numéricamente hemos encontrado la dependencia de T_c de la norma utilizada. De hecho el valor para la temperatura crítica en cualquier norma se calcula en base a la norma de Landau,

$$T_c(\xi) = \frac{(3 + \xi)}{3} T_c. \quad (4.18)$$

Por otra parte, los resultados numéricos que hemos obtenido con el uso del kernel (4.4) se muestran en la siguiente sección.

4.3. Análisis Numérico

- En la figura (4.1) dibujamos la función de masa $M(\pi T, p)$ para $\alpha' = \frac{1}{4\pi}$ y varios valores de T , en la norma de Landau. De esta gráfica, es fácil ver que cuando la temperatura se incrementa, la masa generada decrece rápidamente.
- Pudimos corroborar en base a nuestros resultados numéricos, que la función de masa decrece como $1/p^2$ en la región asintótica del momento. Lo cuál está acorde a la predicción analítica.
- Veamos también que la masa generada, que es el centro de nuestro interés, puede ser aproximada por $M(0)$, pues para momentos pequeños, pues, en este caso, $M(\pi T, p)$ es casi constante.

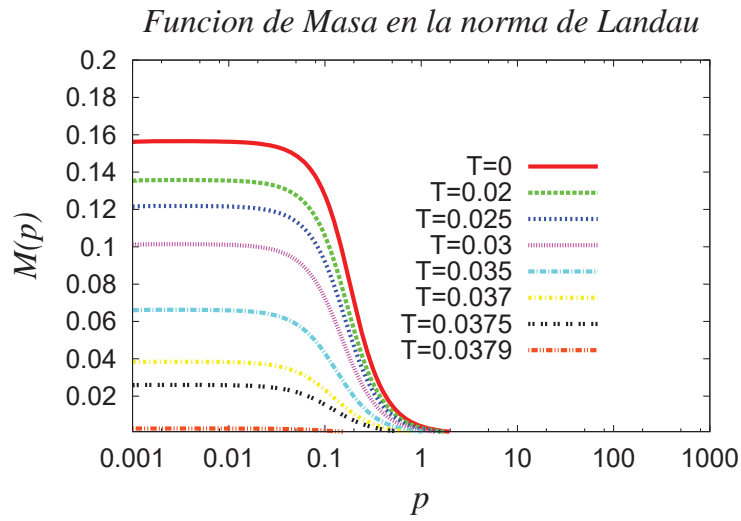


Figura 4.1: La función de masa para varios valores de temperatura y $\alpha' = \frac{1}{4\pi}$ en la norma de Landau.

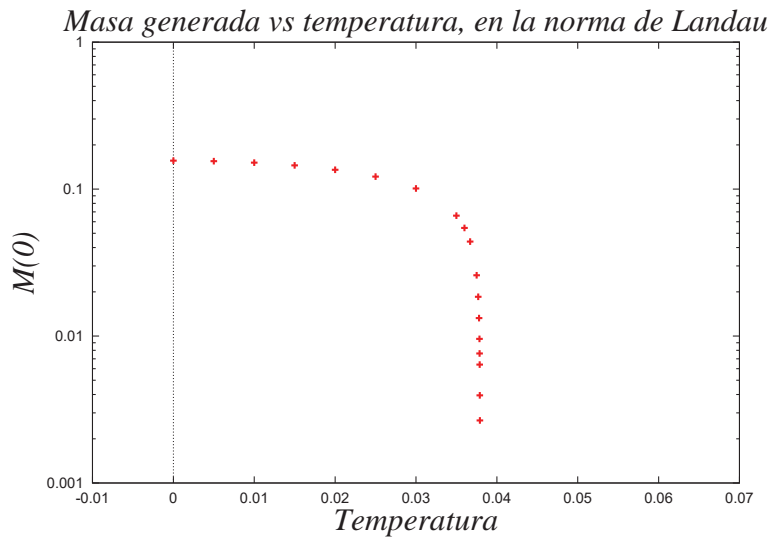


Figura 4.2: Masa generada para varios valores de temperatura y $\alpha' = \frac{1}{4\pi}$ en la norma de Landau.

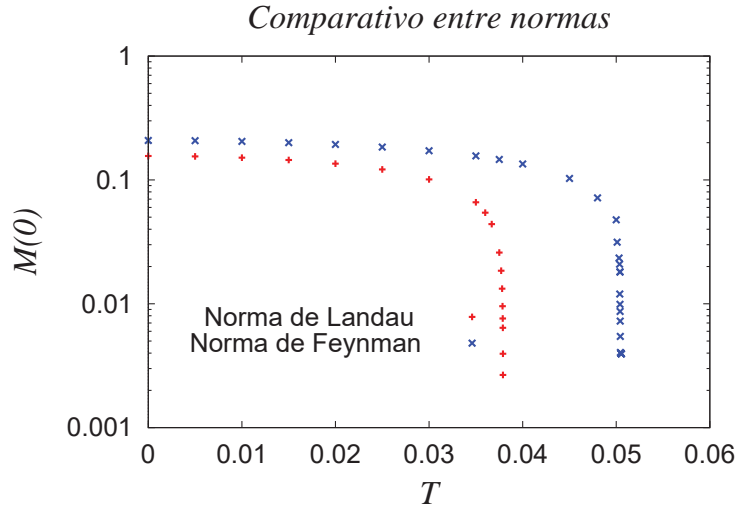


Figura 4.3: Masa generada en la norma de Landau y de Feynman para $\alpha' = \frac{1}{4\pi}$.

- En la gráfica (4.2), mostramos el valor de la masa generada como función de la temperatura, es claro ahora la existencia de una temperatura crítica cuyo valor es de $T_c \approx 0.037915$, y arriba de la cuál ya no existe una generación dinámica de masa. Es importante recalcar, que este valor coincide con el encontrado previamente en la referencia [14].
- El la figura (4.3) mostramos la dependencia de la masa con respecto a la temperatura, en la norma de Landau y en la norma de Feynman. Como es claro en la figura, la elección de la norma afecta el valor de la temperatura crítica. Dicha dependencia fué explicada en la sección anterior

En los últimos dos capítulos, hemos realizado un estudio detallado de las modificaciones que sufre la función de masa en presencia de un campo magnético uniforme de fondo y en presencia de temperatura finita. Pudiendo constatar, el papel inverso que realizan, pues el campo magnético favorece la DMG, en tanto que la temperatura logra eventualmente la restauración de la simetría quiral. El siguiente paso en nuestro estudio, será naturalmente el análisis de la DMG en presencia de ambos factores simultaneamente.

Capítulo 5

Fermiones en Campos Magnéticos a Temperatura Finita.

En este capítulo, estudiaremos el rompimiento dinámico de la simetría quiral en un campo magnético externo uniforme, a una temperatura distinta de cero. Notemos que en principio, el resolver la ecuación para determinar el valor de la masa, al considerar ambos ingredientes, implica un alto grado de dificultad. Para una jerarquía arbitraria del valor del campo magnético \sqrt{eB} , y temperatura T , necesitamos evaluar simultáneamente, las sumas sobre las frecuencias de Matsubara y sobre los niveles de Landau. Sin embargo, nuestros programas computacionales actuales, no son capaces de realizar las dos sumas al mismo tiempo. Por lo tanto, nos restringiremos a tomar los términos mas dominantes en estas sumas, esperando obtener resultados cualitativamente correctos. La DGM en la presencia simultánea de estos dos ingredientes ha sido estudiada en la referencia [10]. En este artículo, utilizarón la aproximación de masa constante, para poder realizar la suma sobre las frecuencias de Matsubara. Sin embargo, nosotros queremos ir más allá de esta aproximación, y realizar el estudio de la dependencia de la función de masa con respecto al momento. Una de las razones para hacerlo, es que la aproximación de masa constante, no es capaz de capturar la física correcta, para valores intermedios y grandes del momento, por lo cuál falla para hacer la conexión entre la teoría perturbativa y no perturbativa, pues pierde el poder de predecir algunas cantidades no perturbativas, tales como el condensado quiral.

5.1. La Función de Masa

En esta sección, veremos el papel que juega la existencia simultánea del campo magnético y la temperatura finita sobre la DMG. Recordemos que el efecto de la temperatura es intentar restaurar la simetría quiral, en tanto que el campo magnético cataliza su rompimiento. Entonces, la interacción de estos efectos diametralmente opuestos, darán como consecuencia una física interesante. Partimos nuevamente de la expresión (3.27), cuya expresión correspondiente es

$$M(p_{\parallel}) \simeq e^2(4eB) \int \frac{d^4\hat{q}}{(2\pi)^4} \frac{e^{-\hat{q}_{\perp}^2}}{\hat{q}^2} \frac{M(p_{\parallel} - q_{\parallel})}{(p_{\parallel} - q_{\parallel})^2 + M^2(p_{\parallel} - q_{\parallel})},$$

donde $q_{\parallel} = (q_0, q_3)$ y $q_{\perp} = (q_1, q_2)$, son las componentes del momento, en la dirección paralela y transversal al campo magnético y, como hemos mencionado anteriormente, $\hat{q}_3 = q_3/\sqrt{2eB}$. Tomando en cuenta la relación existente entre la carga del fermión y el acoplamiento, dada por $e^2 = 4\pi\alpha$, es claro que podemos reescribir la ecuación anterior como

$$M(p_{\parallel}) \simeq (16\pi)\alpha eB \int \frac{d^2\hat{q}_{\parallel} d^2\hat{q}_{\perp}}{(2\pi)^4} \frac{e^{-\hat{q}_{\perp}^2}}{\hat{q}_{\parallel}^2 + \hat{q}_{\perp}^2} \frac{M(p_{\parallel} - q_{\parallel})}{(p_{\parallel} - q_{\parallel})^2 + M^2(p_{\parallel} - q_{\parallel})}. \quad (5.1)$$

Notemos que esta expresión no contiene información explícita acerca de la temperatura, la cuál será introducida más adelante. Observemos ahora que es posible integrar la parte transversal de la ecuación (5.1), de la siguiente manera :

$$\int d^2\hat{q}_{\perp} \frac{e^{-\hat{q}_{\perp}^2}}{\hat{q}_{\parallel}^2 + \hat{q}_{\perp}^2} = \int_0^{\infty} \hat{q}_{\perp} d\hat{q}_{\perp} \int_0^{2\pi} d\hat{\theta}_{\perp} \frac{e^{-\hat{q}_{\perp}^2}}{\hat{q}_{\parallel}^2 + \hat{q}_{\perp}^2} = \pi e^{\hat{q}_{\parallel}^2} \Gamma(0, \hat{q}_{\parallel}^2), \quad (5.2)$$

donde la función Γ esta definida por $\Gamma(\alpha, z) = \int_z^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$. Tenemos entonces que al reemplazar el resultado anterior en la ecuación (5.1), podemos expresar la función de masa, como se describe a continuación

$$M(p_{\parallel}) \simeq \frac{\alpha}{\pi^2} eB \int d^2\hat{q}_{\parallel} \frac{M(p_{\parallel} - q_{\parallel})}{(p_{\parallel} - q_{\parallel})^2 + M^2(p_{\parallel} - q_{\parallel})} e^{\hat{q}_{\parallel}^2} \Gamma(0, \hat{q}_{\parallel}^2). \quad (5.3)$$

Ahora, procedemos a uniformizar la expresión, usando la definición dada en (3.28), y hacemos un cambio de variable dado por $p_{\parallel} - q_{\parallel} = \tilde{q}_{\parallel}$, para obtener

$$M(p_{\parallel}) \simeq \frac{\alpha}{2\pi^2} \int d^2\tilde{q}_{\parallel} \frac{M(\tilde{q}_{\parallel})}{(\tilde{q}_{\parallel})^2 + M^2(\tilde{q}_{\parallel})} e^{(p_{\parallel} - \tilde{q}_{\parallel})^2/2eB} \Gamma\left(0, \frac{(p_{\parallel} - \tilde{q}_{\parallel})^2}{2eB}\right). \quad (5.4)$$

Por otro lado, la introducción de la temperatura finita, y la escritura explícita del tetramomento, nos indican, que debemos hacer el siguiente cambio

$$\int \frac{d^2 \tilde{q}_{\parallel}}{(2\pi)^2} = T \sum_n \int \frac{d\tilde{q}_3}{(2\pi)}, \quad (5.5)$$

donde $\tilde{q}_{\parallel} = (w_m - w_n)^2 + (p_3 - q_3)^2$, $w_m = (2m + 1)\pi T$ y $w_n = (2n + 1)\pi T$. Tenemos entonces que nuestra función de masa esta dada por

$$M(w_n, p_3) \simeq \frac{\alpha}{\pi} \frac{T}{\sqrt{2eB}} \int d\tilde{q}_3 \frac{M(w_n, \tilde{q}_3)}{w_n^2 + \tilde{q}_3 + M^2(w_n, \tilde{q}_3)} \text{Exp} \left[\frac{(w_m - w_n)^2 + (p_3 - \tilde{q}_3)^2}{2eB} \right] \Gamma \left(0, \frac{(w_m - w_n)^2 + (p_3 - \tilde{q}_3)^2}{2eB} \right). \quad (5.6)$$

Ahora bien, si tomamos solamente la contribución de la frecuencia mas baja de Matsubara, es decir, $n, m = 0$, tenemos entonces finalmente

$$M(\pi T, p_3) \simeq \frac{\alpha}{\pi} T \int_0^{\infty} d\tilde{q}_3 \frac{M(\pi T, \tilde{q}_3)}{(\pi T)^2 + \tilde{q}_3 + M^2(\pi T, \tilde{q}_3)} \times \text{Exp} \left[\frac{(p_3 - \tilde{q}_3)^2}{2eB} \right] \Gamma \left(0, \frac{(p_3 - \tilde{q}_3)^2}{2eB} \right). \quad (5.7)$$

Notemos la dependencia explícita de la función de masa con respecto al momento, la cuál intentaremos mantener hasta el final. La ecuación (5.7) será el kernel que utilizaremos para realizar nuestro análisis numérico y cuyos resultados serán dados en la siguiente sección.

5.2. Resultados Numérico

Resolviendo la ecuación (5.7), hemos encontrado las siguientes relaciones entre la masa dinámicamente generada (DMG), y los parámetros asociados con el de campo magnético, acoplamiento y la temperatura. Dichos resultados estan expresados en forma de gráficas de las cuáles debemos hacer las siguientes anotaciones.

- En la figura (5.1), hemos graficado el valor de la función de masa cuando variamos el valor del campo magnético, manteniendo el resto de los

parámetros constantes. Como era de esperarse, el efecto del campo magnético es contribuir a la generación dinámica de masa. Otro dato a mencionar sobre esta gráfica, es la aparición de una joroba poco antes del lugar geométrico que representa el valor de la masa, y que se encuentra justo en la intersección de las curvas con la línea recta, cuyo origen no está en la superposición lineal de los efectos asociados con la temperatura y el campo magnético. En este punto, es relevante recalcar que como un primer intento hemos utilizado el límite del nivel mas bajo de Landau y la frecuencia mas baja de Matsubara. Sin embargo, dependiendo de la jerarquía de las escalas involucradas, en principio, necesitamos realizar la suma sobre las frecuencias de Matsubara ó bien sobre los niveles de Landau. Es prematuro afirmar si la joroba se debe al comportamiento opuesto de la temperatura y del campo magnético o si proviene de la aproximación que hemos utilizado.

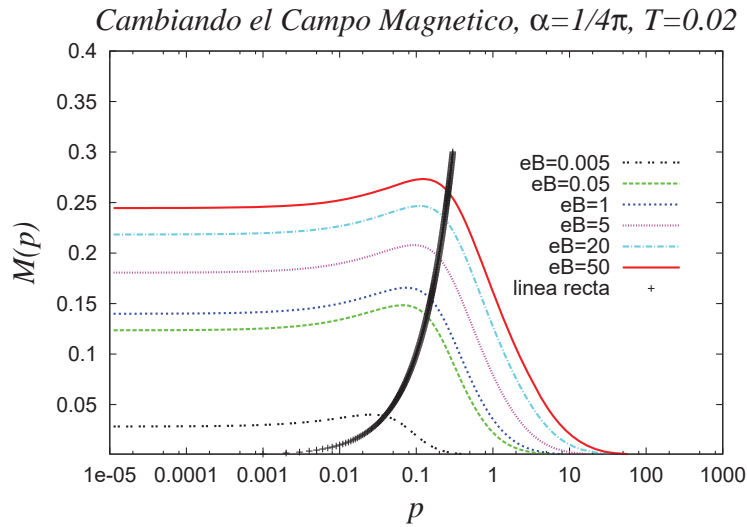


Figura 5.1: La función de masa $M(p)$ para varios valores del campo magnético con $\alpha = 1/4\pi$ y $T = 0.02$ en la norma de Feynman.

- En la figura (5.2), podemos observar claramente, como cambia la función de masa cuando cambiamos el valor del campo magnético.

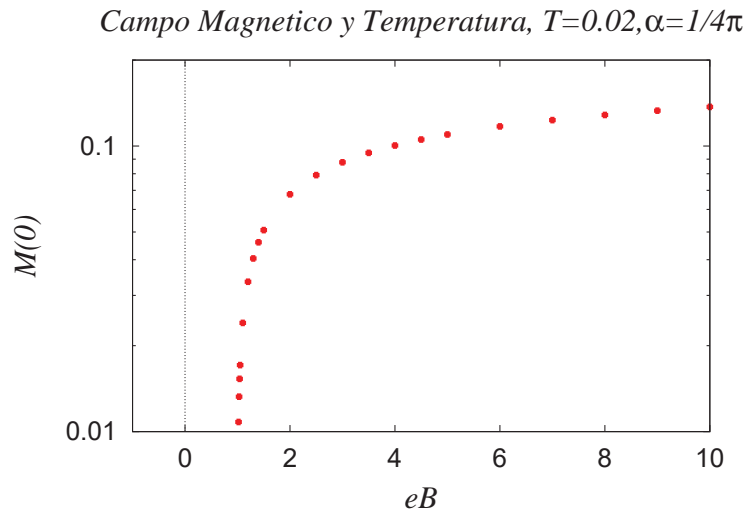


Figura 5.2: Esta gráfica muestra la variación del valor de la masa generada cuando cambiamos el valor del campo magnético.

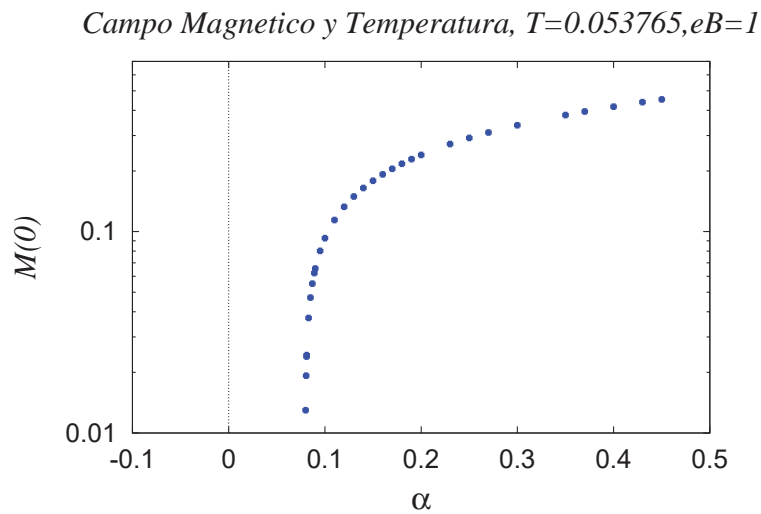


Figura 5.3: Esta gráfica muestra la variación del valor de la masa generada cuando cambiamos el valor del acoplamiento.

De esta forma, podemos concluir que el aumento del valor de la magni-

tud del campo magnético favorece al incremento de la masa dinámicamente generada y que existe un valor crítico para el campo magnético. Este resultado es contrario al caso cuando la temperatura es cero, donde cualquier valor del campo magnético, es suficiente para generar masa en forma dinámica. Notemos además que

$$\begin{aligned}
 T = eB = 0 & \rightarrow \alpha_c \text{ finito} \\
 T = 0, eB \neq 0 & \rightarrow \alpha_c \rightarrow 0 \\
 T \neq 0, eB \neq 0 & \rightarrow \alpha_c \text{ finito}
 \end{aligned}$$

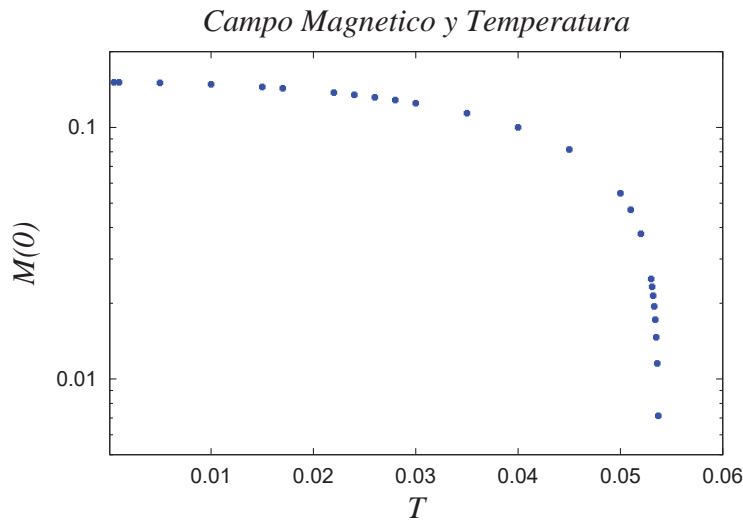


Figura 5.4: Esta gráfica nos muestra la criticalidad de la temperatura

- La figura (5.3), refleja el comportamiento del valor de la masa, cuando aumenta el acoplamiento. De esta manera si el valor del acoplamiento aumenta también lo hace el valor de la masa generada. Sin embargo, de esta ilustración es fácil ver la existencia de un valor crítico del acoplamiento abajo del cuál ya no tenemos la generación de masa fermiónica.
- En la figura (5.4), notamos que cuando el valor de la temperatura se incrementa, el valor de la masa decrece. De esta ilustración podemos

ver la existencia de un valor crítico de temperatura arriba del cuál ya no hay (DMG). Comprobamos de esta manera que el aumento progresivo de la temperatura logra la restauración de la simetría quiral.

En conclusión, las figuras anteriores nos indican la existencia de una criticalidad en el campo magnético, acoplamiento y temperatura. En un lado de estos valores críticos, los fermiones adquieren masa a través de autointeracciones, y del otro lado de estos valores, las autointeracciones no generan la suficiente fuerza en el kernel de las ecuaciones de SD, para producir este fenómeno. De estas gráficas podemos observar fácilmente el papel opuesto que juega el campo magnético y la temperatura en la generación dinámica de masas.

5.3. Comparando con Resultados Anteriores

En esta sección, intentaremos confirmar que no solo hemos capturado la dependencia correcta de la función de masa, respecto al momento, en la presencia de campo magnético y temperatura finita, sino que también hemos mejorado los anteriores resultados conocidos en la literatura.

- De la referencia [10], tomamos la ecuación

$$M^2(0) + \pi^2 T^2 \simeq \alpha' \sqrt{2\pi eB}, \quad (5.8)$$

que refleja una relación analítica entre la masa, la temperatura y el campo magnético. De la expresión anterior, podemos deducir que si tomamos $eB = 1$ y $\alpha' = 1/4\pi$, entonces cuando $T \rightarrow 0$ tenemos que $M(0) \rightarrow 0.44$. Además, en esta misma ecuación podemos calcular el valor de la temperatura crítica, que en este caso, está dada por $T_c \simeq 0.14$. Como hemos mencionado antes, este resultado fué obtenido usando la aproximación de masa constante. Al realizar un ajuste de la gráfica que nosotros hemos obtenido en forma numérica, y realizando un ajuste a la misma, encontramos una expresión muy similar a la dada en (5.8), dada por

$$M^2(0) + a \pi^2 T^2 \simeq b \alpha' \sqrt{2\pi eB}, \quad (5.9)$$

donde $a = 0.7982$, $b = 0.1139$. De esta expresión y tomando los mismos valores anterioremente citados para eB y α' , encontramos que si $T \rightarrow 0$ entonces $M(0) \rightarrow 0.15$ y que el valor de la temperatura crítica

es $T_c \simeq 0.0537$. Dicho comportamiento esta representado en la gráfica en 3D, dada en la figura (5.5). Donde mostramos de manera clara el comportamiento opuesto del campo magnético, (que favorece a la generación dinámica de masas), y la temperatura que logra eventualmente restablecer la simetría quiral.

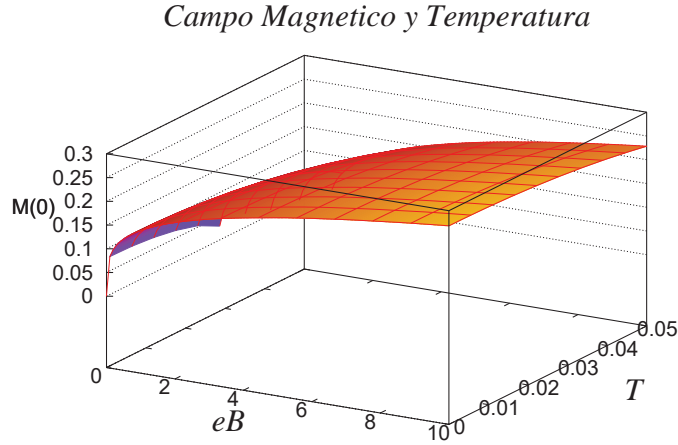


Figura 5.5: Esta gráfica muestra el comportamiento de la masa dinámicamente generada con respecto al valor de la temperatura y al campo magnético, con $\alpha' = 1/4\pi$ fijo.

La misma gráfica también nos proporciona información acerca de los puntos críticos para estos parámetros. De la ecuación (5.8) es claro que para acoplamientos débiles, ($\alpha \ll 1$) y altas temperaturas ($T > \sqrt{eB}$) no hay una solución real para $M^2(0)$. Los límites corresponden al comportamiento perturbativo de la función de masa.

Podemos también, realizar un ajuste numérico a nuestros datos, con la siguiente parametrización

$$M(0) \simeq c \alpha \text{Exp} \left[\frac{a}{\sqrt{-T^2/T_c^2 + 1}} + b \right], \quad (5.10)$$

con $a = -0.7564$, $b = 1.3228$, $c = 1.0544$.

Campo Magnetico y Temperatura

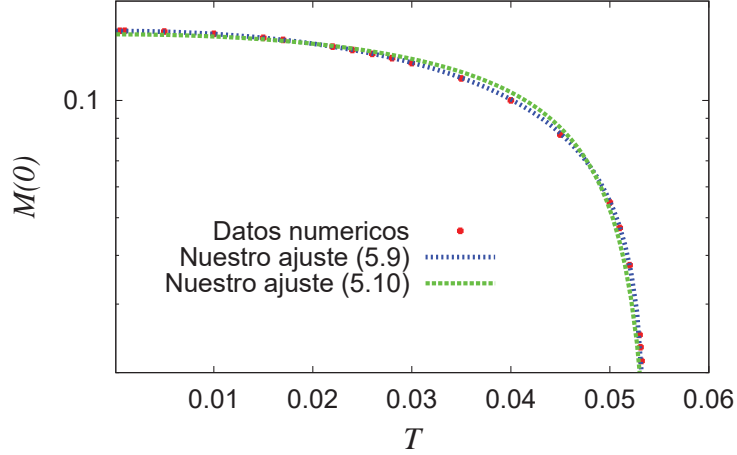


Figura 5.6: Esta gráfica muestra la validez de nuestros resultados en el régimen perturbativo y no perturbativo, para $eB = 1$ y $\alpha' = 1/4\pi$.

En la figura (5.6), podemos ver que ambos ajustes describen exactamente los resultados numéricos. No esperamos que la aproximación de masa constante, capture la física del régimen cinemático perturbativo. Sin embargo, sí esperamos que nuestros resultados sean válidos en el dominio perturbativo y no perturbativo, pues nuestro análisis captura correctamente la dependencia de la función de masa, respecto al momento en la región correspondiente a momentos intermedios y grandes.

- Debemos recalcar, que el resultado de los puntos anteriores, es nuestra capacidad de calcular el condensado quiral. El trabajo de Leung et al. no puede hacer este cálculo. Para argumentar nuestra afirmación, recordemos que hemos mencionado anteriormente, que la función de masa esta directamente relacionada con el condensado quiral, de hecho en la referencia [16], se da una expresión general para la misma, dada por

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 4p^2 \frac{M(p)}{2 + \xi} \quad \text{cuando } p \rightarrow \infty. \quad (5.11)$$

Como es bien sabido, el valor del condensado quiral es una constante (no depende de p). Notemos ahora, que si usamos la aproximación de masa

constante, y la sustituimos en la expresión (5.11), obtendremos una dependencia incorrecta del condensado quiral, respecto del momento. Por otra parte, nuestros resultados numéricos, nos permiten fácilmente el cálculo del condensado quiral, y podemos mostrar de manera explícita, su independencia del momento. Con esta finalidad, veamos que la siguiente tabla,

P	M(P)	$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$
99.99	6.3228×10^{-6}	0.0842
446.6835	3.1603×10^{-7}	0.0840
999.9999	6.3031×10^{-8}	0.0840

que fué realizada en la norma de Feynmann, para $eB = 1$, $\alpha' = 1/4\pi$ y $T = 0.005$, tomando varios valores del momento y su función de masa correspondiente, y de la cuál podemos observar, que el valor del condensado quiral para momentos suficientemente grandes es una constante. Podemos además, mostrar la dependencia del valor de esta constante, con respecto al campo magnético y a la temperatura, como se muestra en las siguiente tablas.

- Para un valor fijo de $T = 0.02$, $\alpha = 1/4\pi$, tenemos

eB	$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$
0.5	0.0375
1	0.0777
5	0.4144

de esta tabla, podemos concluir que el aumento del campo magnético contribuye al aumento del condensado quiral

- Podemos también calcular que si fijamos $eB = 1$, $\alpha = 1/4\pi$, obtenemos

T	$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$
0.0005	0.0840
0.03	0.0691
0.05	0.0301

esta tabla exhibe el comportamiento esperado, es decir, cuando aumentamos la temperatura, el valor del condensado quiral disminuye.

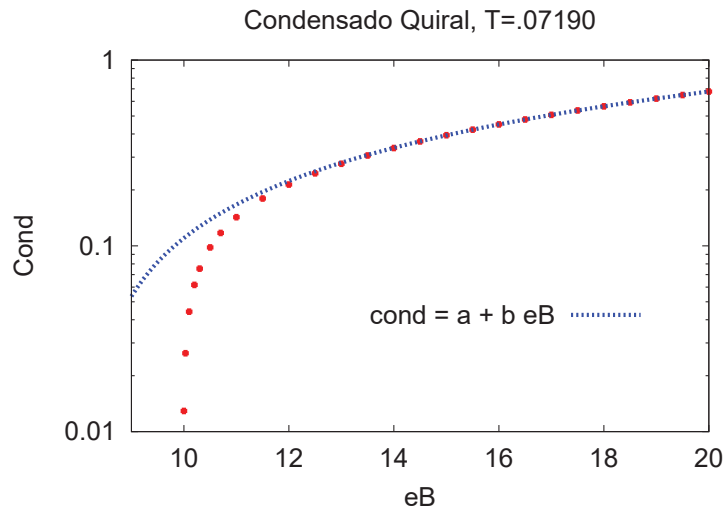


Figura 5.7: Esta gráfica muestra la variación del valor del condensado respecto al valor del campo magnético. Hemos hecho un ajuste con una línea recta, para valores de $a=-0.4555$ y $b=0.0566$.

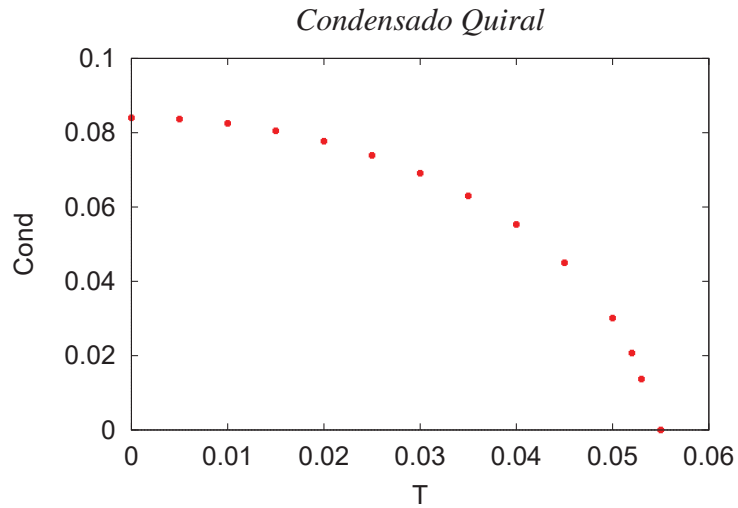


Figura 5.8: Esta gráfica muestra el comportamiento del condensado cuando variamos el valor de la temperatura, para un valor fijo de $eB=1$.

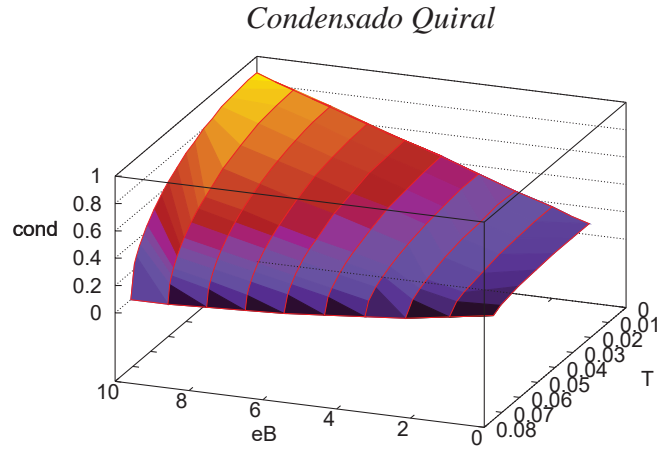


Figura 5.9: Esta gráfica nos muestra de manera simultánea el comportamiento del condensado ante el cambio de campo magnético y temperatura.

En las figuras (5.7) y (5.8), mostramos la manera en que se modifica el valor del condensado, ante el cambio en la magnitud del campo magnético y de la temperatura respectivamente. Exhibiendo el comportamiento esperado, es decir, el condensado esta favorecido por el campo magnético, pero su valor disminuye cuando la temperatura lo hace. Este análisis puede verse de manera simultánea, en la figura (5.9), en esta gráfica, podemos ver adems que el valor del condensado es lineal con el campo magnético para algunos valores de éste, así como los valores críticos de ambos parámetros. De la figura (5.10), podemos leer los valores del campo magnético y la temperatura, para los cuáles el valor del condensado es cero.

- Es importante mencionar, que hemos podido corroborar con nuestro análisis, la relación existente entre el valor de la temperatura y el campo magnético. De hecho queremos analizar la veracidad de la ecuación encontrada por Leung et. al en [10], que al pie de la letra nos indica que

$$T_c \simeq \frac{\alpha}{\pi^2} \sqrt{2\pi eB}. \quad (5.12)$$

Para ello, mostramos la figura (5.11), la cuál ha sido realizada tomando

el valor del acoplamiento, y campo magnético como una constante y calculando el valor de la temperatura crítica.

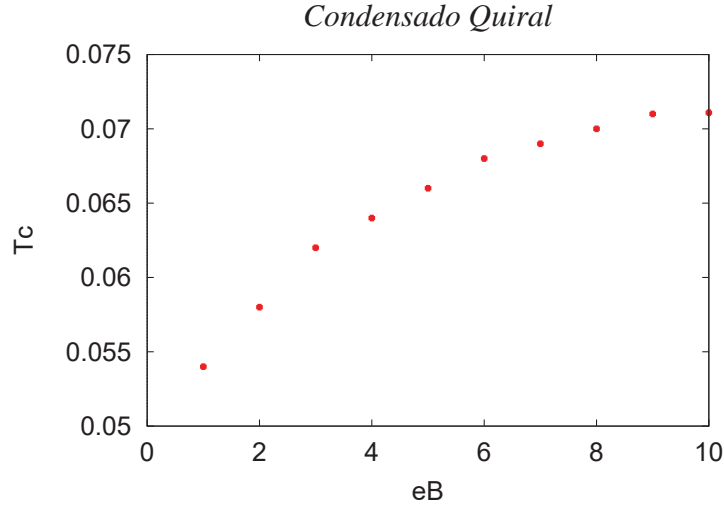


Figura 5.10: Esta gráfica muestra la curva de criticalidad entre el campo magnético y la temperatura.

En esta gráfica exhibimos el lugar geométrico donde se dá la generación dinámica de masas y la región donde se dá la simetría quiral. La ecuación (5.12), indica que $T_c = 0$ para $eB = 0$, pero sabemos que este resultado no es correcto y nuestros resultados numéricos exhiben que $T_c \simeq 0.05$. Por lo tanto, necesitaremos un nuevo fit. Realizando un ajuste a nuestros datos obtenemos la siguiente expresión para la temperatura crítica, dada por

$$T_c \simeq 0.0505333 + 0.0066\sqrt{2\pi eB}. \quad (5.13)$$

Notemos que el primer valor de la constante, es aproximadamente igual a la temperatura crítica que ha sido encontrada, en nuestro previo análisis de generación dinámica de masas en presencia únicamente de temperatura, y cuyo análisis fué realizado en el capítulo 4.

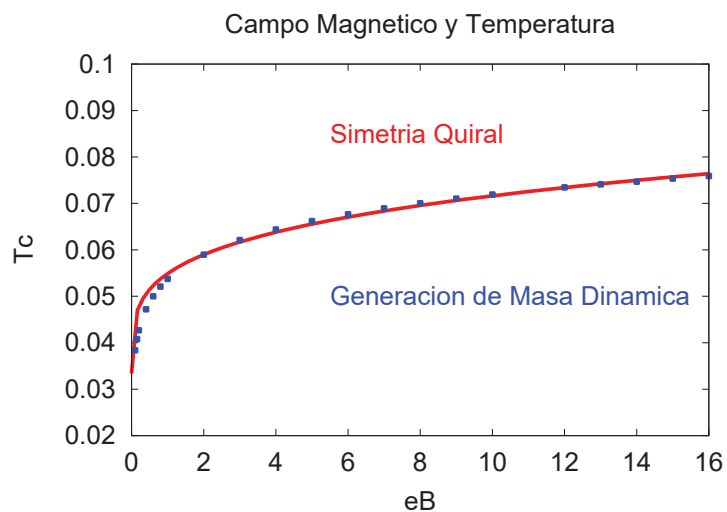


Figura 5.11: Esta gráfica muestra la variación de la temperatura crítica cuando cambiamos el valor del campo magnético, y está dada por la ecuación $T_c = a + b\sqrt{2\pi eB}$, con $a = 0.0505$ y $b = 0.0066$.

Este resultado es totalmente congruente, pues sabemos que aún si el campo magnético se apaga, existe una temperatura crítica que restaura la simetría quiral.

De esta manera concluimos el estudio del rompimiento de simetría quiral en un campo externo a través de las ecuaciones de Schwinger Dyson.

Capítulo 6

Discusiones y Conclusiones

El propósito general de esta tesis, es el estudio de la generación dinámica de masas. Para ello, hemos tenido que estudiar la relación existente entre la masa fermiónica, el propagador del fermión y el condensado quiral, así como entender el rol fundamental que juegan las ecuaciones de Schwinger Dyson para entender el rompimiento dinámico de la simetría quiral. En particular estamos interesados en el estudio de la DGM en la presencia de

1. Campo magnético.
2. Temperatura finita.
3. Campos magnéticos y temperatura finita.

Los primeros dos casos han sido ampliamente estudiados en las referencias dadas en [7-11], y mediante nuestro análisis numérico realizado con el software de Mathematica 6.0, hemos sido capaces de reproducir los resultados mas importantes conocidos en la literatura. Por ejemplo, en el caso de la DMG en presencia de un campo magnético externo, y basandonos en [10], encontramos los siguientes resultados en la norma de Feynman

- El campo magnético cataliza la generación dinámica de masas, y el aumento de la magnitud del acoplamiento provoca también el incremento de la masa generada. En este caso, no existen valores críticos para ninguno de estos parámetros.
- Comprobamos numéricamente, que la función de masa decae como $1/p^2$ cuando $p \rightarrow \infty$, y la proporcionalidad de la masa con respecto a \sqrt{eB} , sin la necesidad de utilizar la aproximación de masa constante.

En el caso de la DMG a temperatura finita, y basados en el artículo dado en la referencia [14], hemos sido capaces de fundamentar las siguientes conclusiones

- El incremento de la temperatura, tiene el efecto de que eventualmente logrará restaurar la simetría quiral, además obtuvimos un valor para dicha temperatura crítica, muy cercano al valor teórico esperado, en la norma de Landau y en la norma de Feynman.
- Comprobamos los valores obtenidos en [14], para la función de masa en la norma de Landau, obteniendo una gran similitud con los mismos, y realizamos el mismo análisis en la norma de Feynman.
- También pudimos comprobar numéricamente, que la función de masa efectivamente decae como $1/p^2$.

Finalmente, el caso tres, donde están presentes tanto el campo magnético como la temperatura, ha sido el menos explorado en la literatura. Nosotros, hemos sido capaces de realizar contribuciones interesantes y hacer nuevas predicciones en el régimen perturbativo, donde los resultados dados en [10] fallan. Las conclusiones más relevantes, en este caso son que

- Pudimos constatar que el papel que juegan el campo magnético y la temperatura es completamente opuesto, puesto que el campo magnético cataliza la DGM, y la temperatura restaura la simetría quiral, para un valor suficientemente alto. Además, tenemos que el aumento de la magnitud del acoplamiento logra elevar el valor de la masa generada.
- Comprobamos que existen valores críticos para el campo magnético, la temperatura y el acoplamiento, como lo había predicho Leung et al. Pero, con nuestros datos, hicimos un ajuste, encontrando una relación analítica que describe correctamente la relación entre estos parámetros críticos, aún si apagamos el campo magnético. Encontramos además que el comportamiento de la masa con respecto a la temperatura, satisface la escala de Miransky.
- Pudimos encontrar una igualdad analítica entre la masa, el campo magnético y el acoplamiento, y de cuya gráfica correspondiente, pueden verse fácilmente cada uno de los valores críticos.

- Nuestra contribución mas relevante, proviene de que no hemos utilizado la aproximación de masa constante, en nuestros algoritmos numéricos, esto nos permite hacer cálculos en el régimen perturbativo y no perturbativo. De esta manera, a diferencia del artículo de Leung et al, nosotros hemos sido capaces de encontrar el valor del condensado quiral y realizar un estudio cuidadoso de su comportamiento al variar los parámetros de campo magnético y temperatura.

A partir del trabajo realizado en esta tesis, han surgido nuevas metas que intentaremos realizar en el futuro. La más importante de ellas consistirá en mejorar nuestras aproximaciones, y para ellos nos veremos forzados a realizar la suma sobre las frecuencias de Matsubara ó bien la suma sobre los niveles de Landau. Sin embargo, estamos convencidos de que al menos de manera cualitativa nuestros resultados para el caso de la generación dinámica de masas a temperatura finita en presencia de campos magnéticos, son correctos, y nos marcan la pauta a seguir, en trabajos posteriores.

Apéndice A

Cuadraturas y Programmas numéricos

En este capítulo, haremos una breve descripción de los elementos usados en el análisis numérico. Iniciaremos con una explicación de la cuadratura Gaussiana, debido a su importancia en la obtención de los resultados numéricos. Mostraremos además, los programas numéricos desarrollados en el software mathematica 6.0.

A.1. Cuadratura Gaussiana

En análisis numérico, una cuadratura, es una aproximación a la integral definida de una función, la cuál se hace mediante una suma ponderada de los valores de la función en puntos específicos del dominio de integración. Elegimos la cuadratura Gaussiana sobre el resto de las cuadraturas, debido a que nos proporciona el menor número de iteraciones, con las cuáles logramos minimizar el error de nuestro cálculo numérico. Una cuadratura Gaussiana de n puntos, denominada así por Carl Friedrich Gauss, aproxima el valor de una integral como una combinación lineal del integrando evaluado en óptimas abscisas que denotaremos por x_j . Decimos que las abscisas son óptimas en el sentido de que la fórmula de la cuadratura es exacta para todos los polinomios de grado $2n - 1$. Veamos que la expresión

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{j=1}^n w_j f(x_j) , \quad (\text{A.1})$$

tiene $2n$ parámetros libres a determinar, correspondientes a x_j y w_j , donde w_j se refiere al peso asociado a cada una de las funciones correspondientes. El método de la cuadratura Gaussiana de n puntos consiste en seleccionar los nodos x_1, x_2, \dots, x_n en el intervalo $[a, b]$ y los pesos w_1, w_2, \dots, w_n de manera que minimicen el error $E_n(f)$, definido como

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{j=1}^n w_j f(x_j) + E_n(f) . \quad (\text{A.2})$$

Para entender mejor a la cuadratura Gaussiana veamos un par de ejemplos.

A.2. Cuadratura Gaussiana de Dos Puntos

La cuadratura Gaussiana de dos puntos, es una extensión de la regla del trapecio donde los argumentos de la función son variables desconocidas x_1 , y x_2 . Entonces, se aproxima la integral de la siguiente manera

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) . \quad (\text{A.3})$$

Hay cuatro variables x_1, x_2, c_1, c_2 a determinar. El método consiste en asumir que la fórmula da un resultado exacto mediante la integración de un polinomio de orden 3, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Entonces

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)dx . \quad (\text{A.4})$$

Por lo tanto, la fórmula nos dice que

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \\ &= c_1(a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3) + c_2(a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3) \\ &= a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) + a_2\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) + a_3\left(\frac{b^4-a^4}{4}\right) \\ &= a_0(c_1+c_2) + a_1(c_1x_1+c_2x_2) + a_2(c_1x_1^2+c_2x_2^2) + a_3(c_1x_1^3+c_2x_2^3) . \end{aligned}$$

De la expresión anterior podemos obtener cuatro ecuaciones

$$\begin{aligned} b-a &= c_1 + c_2 , & \frac{b^2-a^2}{2} &= c_1x_1 + c_2x_2 , \\ \frac{b^3-a^3}{3} &= c_1x_1^2 + c_2x_2^2 , & \frac{b^4-a^4}{4} &= c_1x_1^3 + c_2x_2^3 , \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

cuyas soluciones correspondientemente son

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{b-a}{2}, \\
 c_2 &= \frac{b-a}{2}, \\
 x_1 &= \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}, \\
 x_2 &= \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}.
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Tenemos entonces que

$$I = \frac{b-a}{2}f\left(\frac{b-a}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right) + \frac{b-a}{2}f\left(\frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right) \tag{A.7}$$

y dado que escogemos tan solo dos puntos, esta cuadratura la llamamos cuadratura Gaussiana de dos puntos. Podemos establecer fórmulas para cuadraturas Gaussianas de ordenes mayores, siguiendo el mismo método. Por ejemplo:

$$\int_a^b f(x)dx = c_1f(x_1) + c_2f(x_2) + c_3f(x_3) \tag{A.8}$$

es la llamada fórmula Gaussiana de tres puntos y los argumentos de la función x_1, x_2, x_3 , son determinados asumiendo que la fórmula proporciona un resultado exacto para el polinomio de grado cinco dado por

$$\int_a^b a_0 + a_1x_1 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 + a_5x_5^2.$$

De manera general la fórmula de la cuadratura Gaussiana de n puntos se aproxima mediante la integral

$$\int_a^b f(x)dx = c_1f(x_1) + c_2f(x_2) + \dots + c_{n-1}f(x_{n-1}) + c_nf(x_n). \tag{A.9}$$

Una vez que hemos entendido el concepto de cuadratura, podemos proceder ahora al estudio del método mediante el cual hemos propuesto una solución numérica de las ecuaciones de Schwinger Dyson.

A.3. Solución Numérica de las Ecuaciones de Schwinger Dyson (SD)

En esta sección, explicaremos el método general que hemos implementado en el algoritmo numérico que esquematiza el comportamiento de la generación dinámica de masas (DMG). Para ello, veamos que las expresiones dadas en las ecuaciones (3.38), (4.4), y (5.7), corresponden a las funciones de masa en presencia de

- Campo magnético.
- Temperatura finita.
- Campo magnético y temperatura finita.

En todos estos casos, la función de masa tiene la forma general

$$M(p) = \int_0^\infty K(k, M(k); p, M(p)) dk , \quad (\text{A.10})$$

con K , una función determinada por la teoría que estemos estudiando. En nuestro caso, QED determina esta función de manera única. Dado que no podemos hacer una integral numérica en un intervalo infinito, buscamos una aproximación tal que podamos elegir un k_{\max} suficientemente grande y un k_{\min} suficientemente pequeño, de manera que en forma aproximada sea válido sustituir la ecuación anterior por

$$M(p) = \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} K(k, M(k); p, M(p)) dk . \quad (\text{A.11})$$

Podemos aproximar la integral mediante una suma, utilizando el método de rectángulos o la regla de Simpson. Además, podemos usar el método de la cuadratura Gaussiana, por la economía que representa respecto al número de iteraciones y la exactitud de su aproximación.

$$M(p) = \sum_{i=1}^N K(k_i, M(k_i); p, M(p)) w_i , \quad (\text{A.12})$$

con k_i , w_i dadas por la cuadratura elegida. Ahora bien, las ecuaciones anteriores son infinitas y dependen del valor de p para su solución. Así que lo

que haremos será considerar una malla de los diferentes valores del momento externo, y cuyo j -ésimo punto queda determinado por

$$M(p_j) = \sum_{i=1}^N K(k_i, M(k_i); p_j, M(p_j))w_i, \quad (\text{A.13})$$

ó usando una notación más compacta,

$$M_j = \sum_{i=1}^N K(k_i, M_i; k_j, M_j)w_i, \quad (\text{A.14})$$

donde $j, i = 1, 2, \dots, N$. De manera que tenemos un sistema de N ecuaciones con N incógnitas M_i , esquematizado por

$$\begin{aligned} M_1 &= \sum_{i=1}^N K(k_i, M_i; k_1, M_1)w_i \\ M_2 &= \sum_{i=1}^N K(k_i, M_i; k_2, M_2)w_i \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ M_N &= \sum_{i=1}^N K(k_i, M_i; k_N, M_N)w_i. \end{aligned}$$

Como hemos dicho, la forma exacta del sistema que tenemos involucra una integración en el intervalo $[0, \infty)$, pero hemos dado el razonamiento para que esta integración sea sobre el intervalo $[k_{\min}, k_{\max}]$, con el problema natural de elegir a k_{\min} y k_{\max} , de forma adecuada para que nuestra aproximación sea suficientemente buena. Sabiendo que cuando $p \rightarrow \infty$ entonces $M(p) \sim 1/p^2$, en particular para valores mayores que 10^3 , el integrando es tan pequeño que puede considerarse que no contribuye en la integración. Por otro lado, hemos visto que la función de masa es prácticamente una constante para valores pequeños del momento p , lo cuál tiene por consecuencia, que la contribución al valor de la integral correspondiente a la región en el infrarojo, es despreciable. Por lo tanto, una posible elección de estos límites esta dada por $k_{\min} = 10^{-3}$ y $k_{\max} = 10^3$, para el intervalo de integración. En necesario mencionar que estos límites pueden variar dependiendo del kernel, y la

elección correcta para ellos, tendrá que ser encontrada mediante un análisis numérico.

Ahora, es necesario elegir una partición del espacio sobre el cual integraremos, y debido a la forma de la función de masa es natural que en la región donde el momento es pequeño, y la función de masa es prácticamente una constante, no necesitamos que la cuadratura gaussiana asigne un gran número de nodos, contrario a lo que requerimos en la región para momentos grandes. Elegimos entonces una malla de modo que nos proporcione m puntos en cada década. Para la cuál la cuadratura gaussiana asigne el valor de los nodos y sus pesos correspondientes. Es claro que entre mayor sea el número de puntos por década mejor será nuestra aproximación, y este valor debe determinarse mediante pruebas numéricas de manera independiente para cada problema. Para la solución numérica de esta clase de ecuaciones usamos el paquete de mathematica 6.0.

A.4. Programas Numéricos

En esta sección mostramos los programa con los que fueron realizadas todas las gráficas correspondientes. Para la generación dinámica de masas en presencia de un campo magnético, cuyos resultados están en el capítulo tres, usamos el kernel dado en (3.38)

$$M(p_{\parallel}) \simeq \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int q_{\parallel} dq_{\parallel} \frac{M(\tilde{q})}{\tilde{q}^2 + M^2(\tilde{q})} \quad (\text{A.15})$$

$$\times \int d\theta_{\parallel} e^{(p_{\parallel}^2 + \tilde{q}^2 - 2p_{\parallel} \tilde{q} \cos \theta)\beta^2} \Gamma(0, (p_{\parallel}^2 + \tilde{q}^2 - 2p_{\parallel} \tilde{q} \cos \theta)^2 \beta^2) .$$

Este kernel fué introducido en la siguiente rutina del paquete de Mathematica 6.0.

```

Clear[p, q, x]
nnodos = 128;
m = 20;
xmax = 103;
xmin = 10-5;
λ =  $\frac{\text{Log}[10]}{m}$ ;
tole = 10-3;

```

```

na = 64;
cont = 0; iter = 0; T = 0;  $\alpha = 0.1$ ;
 $A = \frac{(4\pi\alpha)}{(2\pi)^3}$ ;  $B = \frac{1}{\sqrt{2(180)}}$ ;
(*Inicia el programa*)
(*defino los pesos para ambas integrales*)
pesosq = GaussianQuadratureWeights [nnodos, Log  $\left[\frac{1}{1-e^{-\lambda}}\right]$ ,
Log  $\left[\frac{x_{\max}}{x_{\min}(1-e^{-\lambda})}\right]$ ];
pesosx = GaussianQuadratureWeights[na, 0,  $2\pi$ ];

Do[paq[i] = pesosq[[i, 1]], {i, 1, nnodos}];
Do[ppq[i] = pesosq[[i, 2]], {i, 1, nnodos}];
Do[pax[i] = pesosx[[i, 1]], {i, 1, na}];
Do[ppx[i] = pesosx[[i, 2]], {i, 1, na}];
(*Esta es la condicion inicial*)
Do[cr[i] = 0.6, {i, 1, nnodos}];
paso[1_] =  $x_{\min} e^{\lambda} (1 - e^{-\lambda})$ ;
(*Esta es la condicion inicial*)
Do[q[i] = paso[paq[i]], {i, 1, nnodos}];
Do[p[j] = paso[paq[j]], {j, 1, nnodos}];
(*primera integral*)

fun[q_, p_, x_] =  $e^{(p^2+q^2-2pq\cos[x])B^2}$  Gamma [0,  $(p^2 + q^2 - 2pq\cos[x]) B^2$ ];

Do[r[i, j] = Sum[fun[q[i], p[j], pax[l]]ppx[l], {l, 1, na}],
{j, 1, nnodos}, {i, 1, nnodos}];
func[q_, p_, cond_] =  $A \frac{(q)q_{\text{cond}}}{q^2 + \text{cond}^2}$ ;
(*aqui se redefine el kernel como el producto de las dos funciones*)

ker[i_, j_] = func[q[i], p[j], cr[i]]r[i, j];
(*aqui se hace la integral dos*)
(*Print[{Iteracion, Error}]*)
While[cont < 1,
Do[rfun[j] = Sum[ker[i, j]ppq[i], {i, 1, nnodos}], {j, 1, nnodos}];

error = Max [Table [err[j] = Abs  $\left[\frac{\text{rfun}[j]-\text{cr}[j]}{\text{cr}[j]}\right]$ , {j, 1, nnodos}]]];

```

```

iter+=1;
(*Print[{iter, error}];*)
If[error > tole, Do[cr[j] = rfun[j], {j, 1, nnodos}], cont+=1;]]
absres = Table[{p[j], rfun[j]}, {j, 1, nnodos}];
ListLogLinearPlot[absres, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 2],
PlotRange -> All, Joined -> True]

```

Para la generación dinámica de masas a temperatura finita hemos utilizado el kernel dado en la expresión (4.4)

$$M(\pi T, p) = \frac{(3 + \xi)\alpha'}{\pi} \int_0^\infty dq \frac{q^2 M(\pi T, q)}{\pi^2 T^2 + q^2 + M^2(\pi T, q)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{p^2 + q^2 - 2 p q x}.$$

Que al ser implementado en el siguiente código nos da la información contenida en las gráficas del capítulo cuatro.

```

nnodos = 128;
m = 20;
xmax = 103;
xmin = 10-3;
λ =  $\frac{\text{Log}[10]}{m}$ ;
tole = 10-3;
na = 512;
cont = 0; iter = 0; T = 0.025;
pesosq = GaussianQuadratureWeights [nnodos, Log  $\left[ \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \right]$ ,
Log  $\left[ \frac{\text{xmax}}{\text{xmin}(1-e^{-\lambda})} \right]$  ];
pesosx = GaussianQuadratureWeights[na, -1, 1];

Do[paq[i] = pesosq[[i, 1]], {i, 1, nnodos}];
Do[ppq[i] = pesosq[[i, 2]], {i, 1, nnodos}];
Do[pax[i] = pesosx[[i, 1]], {i, 1, na}];
Do[ppx[i] = pesosx[[i, 2]], {i, 1, na}];
Do[cr[i] = 0.6, {i, 1, nnodos}];
paso[1_] = xminet (1 - e-λ);
q[i_] = paso[paq[i]];
p[j_] = paso[ppq[j]];

```



```

fun[p-, q-, x-] =  $\frac{1}{q^2 + p^2 - 2qp x}$ ;
Do[r[i, j] = Sum[fun[paso[paq[j]], paso[paq[1]], pax[l]]ppx[l],
{l, 1, na}], {j, 1, nnodos}, {i, 1, nnodos}]
func[q-, cond-] =  $\frac{3}{4\pi^2} \frac{q^3 \text{cond}}{q^2 + \text{cond}^2 + (\pi T)^2}$ ;
qer[i-, j-] = func[paso[paq[i]], cr[i]]r[i, j];

While[cont < 1,
Do[rfun[j] = Sum[ker[i, j]ppq[i], {i, 1, nnodos}], {j, 1, nnodos}];

error = Max [Table [err[j] = Abs [ $\frac{\text{rfun}[j] - \text{cr}[j]}{\text{cr}[j]}$ ], {j, 1, nnodos}]]];
iter+=1;
Print[{iter, error}]
If[error > tole, Do[cr[j] = rfun [j], {j, 1, nnodos}], cont+=1;]
absres = Table[{paso[paq[j]], rfun[j]}, {j, 1, nnodos}];
ListLogLinearPlot[absres, PlotStyle → RGBColor[1, 0, 2],
PlotRange → All, Joined → True]

```

Finalmente para el estudio de la generación dinámica de masas en presencia de campo magnético y temperatura finita, hemos usado el kernel dictado por la expresión (5.7)

$$\begin{aligned}
M(\pi T, p_3) \simeq & \frac{\alpha}{\pi} T \int_0^\infty d\tilde{q}_3 \frac{M(\pi T, \tilde{q}_3)}{(\pi T)^2 + \tilde{q}_3 + M^2(\pi T, \tilde{q}_3)} \\
& \times \text{Exp} \left[\frac{(p_3 - \tilde{q}_3)^2}{2eB} \right] \Gamma \left(0, \frac{(p_3 - \tilde{q}_3)^2}{2eB} \right).
\end{aligned}$$

el cual se introduce en la rutina

```

m = 20;
pmin = 10-6;
pmax = 103;
n = (Log[10, pmax] - Log[10, pmin])m + 1;
lambda =  $\frac{\text{Log}[10]}{m}$ ;
y = pmin;
alfa =  $\frac{1}{\pi}$ ;
Temp = .02;

```

```

eB = 1;
Do[h = pminExp[(j - 1)lambda](Exp[lambda] - 1); p[j] = N[y];
y = y + h, {j, 1, n} ]
Do[strip[j] = (p[j + 1] - p[j - 1])/2, {j, 2, n - 1}]
strip[1] = (p[2] - p[1])/2;
strip[n] = (p[n] - p[n - 1])/2;
Do[
ker[i, j] =
If [i ≠ j,  $\frac{\text{alfa}}{\pi} \frac{M[i]}{(\pi \text{Temp})^2 + p[i]^2 + M[i]^2} \text{Exp} \left[ \frac{(p[j] - p[i])^2}{2eB} \right]$ 
Gamma [0,  $\frac{(p[j] - p[i])^2}{2eB}$ ],
 $\frac{-\text{alfa}}{\pi} \frac{M[j] \left( -2 + N[\text{EulerGamma}] + \text{Log} \left[ \frac{\text{strip}[j]^2}{8eB} \right] \right)}{(\pi \text{Temp})^2 + p[j]^2 + M[j]^2}$ ], {j, 1, n},
{i, 1, n}];
Do[kernint[j] = Sum[ker[i, j]strip[i], {i, 1, n}], {j, 1, n}];
ecuaciones = Table[M[j] == kernint[j], {j, 1, n}];
condini = Table[{M[i], 0.2}, {i, 1, n}];
res = FindRoot[ecuaciones, condini, MaxIterations → 1000];
Do[M[i] = M[i]/.res, {i, 1, n}];
TablaM = Table[{p[i], M[i]}, {i, 1, n}];
ListLogLinearPlot[TablaM, PlotRange → All]

```

obteniendo como resultado las gráficas mostradas en el capítulo cinco.

Bibliografía

- [1] D.J. Gross, Rev. Mod. Phys. **77** 837 (2005); H.D. Politzer, Rev. Mod. Phys. **77** 851 (2005); F. Wilczek, Rev. Mod. Phys. **77** (2005).
- [2] G. Bali *et. al.* Nucl. Phys. Proc. Supp. **63** 209 (1997).
- [3] F.J. Dyson, Phys. Rev. **75** 1736 (1949).
- [4] J.S. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sc. **37** 452 (1951).
- [5] R. Fukuda, T. Kugo, Nucl. Phys. **B117** 250 (1976).
- [6] V.A. Miransky, II Nuovo Ciminto **90A** 149 (1985).
- [7] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy, Phys. Rev. Lett. **73** 3499 (1994); Phys. Rev. **D52** 4718 (1995); Phys. Lett. **B349** 477 (1995); Phys. Rev. **D52** 4747 (1995).
- [8] C. N. Leung, Y. J. Ng, A. W. Ackley, Phys. Rev. **D54** 4181 (1996).
- [9] V. P. Gusynin, I. A. Shovkovy, Phys. Rev. **D56** 5251 (1997).
- [10] D.-S. Lee, C.N. Leung, Y.J. Ng, Phys. Rev. **D55** 6504 (1997).
- [11] D.-S. Lee, C.N. Leung, Y.J. Ng, Phys. Rev. **D57** 5224 (1998).
- [12] M.J Anguiano, Tesis de Maestria, “Fermiones en Campos Magnéticos” (2007).
- [13] M.J Anguiano, A. Bashir, A. Raya, Phys. Rev. **D76** 127702 (2007).
- [14] A. Ayala, A. Bashir, Phys. Rev. **D67** 076005 (2003).
- [15] P. Ginsparg, Nucl. Phys. **B170** 388 (1980).

- [16] A. Bashir, A. Huet, A. Raya, Phys. Rev. **D50** 7679 (1994).
- [17] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory” Reading, USA: Addison-Wesley (1995).
- [18] F. Hanzel, A. D. Martin, “Quarks and Leptons: An introductory course in modern particle physics” John Wiley & Sons. Durham, Inglaterra (1984).
- [19] J. Kapusta, “Finite Temperature Field theory” University Press, Cambridge, Inglaterra (1989).