Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
IMATE-UNAM
IFM-UMSNH

Propiedades de Finitud de Grupos

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

L.M. Kenneth Jair Morales Uc

Asesor: Dr. Daniel Juan Pineda

Morelia, Michoacán Enero del 2010

Kenneth J. Morales Uc

Propiedades de Finitud de Grupos

Dualidad.
MATEMÁTICAS... chico poco
atractivo de interior desconocido.
MATEMÁTICAS... caprichosa chica linda
a la que soportamos todo.

Dedicado con gratitud al Creador,
por las oportunidades;
a mi familia, por incondicionales;
a los amigos
por la deliciosa compañia;
al que enseña: por su paciencia...

Introducción

En teoría de grupos hay dos propiedades “básicas”de finitud bastante estudiadas: el que un grupo sea finitamente generado o que sea finitamente presentado. Hay muchos ejemplos de grupos finitamente generados que no son finitamente presentados. Pero la cosa no ha quedado ahí. C.T.C. Wall introduce en *Finiteness Conditions for CW-Complexes*, publicado en 1965 en *The Annals of Mathematics*, volumen 81, en el año de 1965, otra propiedad de finitud para grupos: *un grupo G se dice que es de tipo F_n si tiene un complejo de Eilenberg-MacLane con n-esqueleto finito*. Esta definición se puede expresar de la siguiente manera: ***un grupo es de tipo $\mathbf{F_n}$ si éste actúa libre, fiel, propia, celular y cocompactamente en un complejo celular $(\mathbf{n-1})$-conexo***. Consideremos la homología celular con coeficientes en un anillo R de un complejo celular X. Si cambiamos la condición de n-conexidad por la condición de n-conexidad homológica (n-aciclicidad) en la anterior definición obtenemos una condición de finitud más débil que será denominada $FH_n(R)$. Si pedimos R-aciclicidad, diremos que el grupo es de tipo $FH(R)$.

Por otra parte, dado un R-módulo M, y un grupo G, debemos recordar que la definición de los functores $H_*(G, M)$ y $H^*(G, M)$ nos permite elegir una resolución proyectiva arbitraria P de M, visto como RG-módulo. Si interpretamos “pequeño”en términos de la longitud de P, tenemos la noción de *dimensión cohomológica* de G. Ahora bien, si lo que nos interesa estudiar en P es la generación finita de los P_i que lo conforman, entonces obtenemos la noción de las propiedades de finitud $FP_n(R)$ y $FP(R)$ de G.

Si lo que estudiamos son resoluciones libres, en el mismo contexto del párrafo anterior, obtenemos la propiedades de finitud $FL_n(R)$ y $FL(R)$.

Teniendo este cúmulo de propiedades de finitud para un grupo, cabe preguntarse cuáles son las relaciones entre dichas propiedades. Las relaciones conocidas, así como las que no se cumplen y las que aún no han sido probadas, se exponen en el capítulo dos de este material; pero no es el objetivo de este trabajo analizar dichas implicaciones. El tema de estudio de este trabajo es usar las propiedades topológicas $FH_n(R)$ para detectar cuando un grupo satisface las condiciones de finitud $FP_n(R)$ y $FP(R)$.

El objetivo original de Bestvina y Brady al publicar su artículo ***Finiteness Properties and Morse Theory***, el cual es la base de esta tesis, fue proporcionar un teorema para dar ejemplos de grupos con determinadas propiedades de finitud pero carentes de otras. En particular se obtienen grupos de tipo $FP(\mathbb{Z})$ los cuales no son finitamente presentados.

La búsqueda del teorema que nos pueda ofrecer contraejemplos para unas u otras propiedades empieza en la clase de los llamados *$\pi/2$-grupos de Artin*. Estos grupos surgen como asociados a *complejos bandera* finitos. Si L es un complejo bandera finito y G_L su $\pi/2$-grupo de Artin asociado, estaremos interesados en estudiar el núcleo, H_L, de un epimorfismo $G_L \to \mathbb{Z}$ el cual envia los elementos "base"a la unidad. El cubriente universal X_L de un complejo cúbico Q_L que construiremos resultará ser métrico geodésico de tipo CAT(0) en donde G_L actuará de tal manera que la función de Morse $f : X_L \to \mathbb{R}$ será equivariante con respecto al homomorfismo $G_L \to \mathbb{Z}$, en donde $\mathbb{Z}$ actúa en $\mathbb{R}$ de manera usual por translaciones. Al actuar H_L cocompactamente sobre los conjuntos de nivel de X_L, se tendrá información acerca de las propiedades de finitud de éste núcleo. Con todo este material a la mano podemos probar el teorema principal:

Teorema de Bestvina-Brady. *Sea L un complejo bandera finito, G_L el $\pi/2$-grupo de Artin asociado a L, y H_L el subgrupo de G_L tal como se describió anteriormente. Si R es un anillo conmutativo en donde $1 \neq 0$, entonces se cumplen las* *siguientes afirmaciones:*

(1) $H_L \in FP_{n+1}(R)$ *si y sólo si L es homológicamente n-conexo.*

(2) $H_L \in FP$ *si y sólo si L es acíclico.*

(3) H_L *es finitamente presentado si y sólo si L es simplemente conexo.*

La prueba del teorema anterior se realiza obteniendo propiedades homotópicas y homológicas en subconjuntos especiales de un complejo celular afín. Dichos complejos son definidos y estudiados a través de la teoría de Morse sintética en el primer capítulo.

El segundo capítulo define y relaciona propiedades de finitud de grupos: FP_n, FP, y sus versiones libres, FH_n, FH, F_n y F, estás últimas cuatro siendo de un corte mas topológico que algebraico. En la última sección de éste capítulo se expone un teorema el cual da condiciones suficientes sobre los enlaces ascendentes y descendentes de los vértices de un complejo celular afín en donde actúa un grupo G (complejo que satisface hipótesis adicionales a las de su estructura celular), para que un subgrupo de G sea de tipo FH_n, FH o finitamente presentado, según sea la condición impuesta sobre los enlaces.

El objetivo del tercer capítulo es dar la prueba de tres de las seis implicaciones del teorema de Bestvina-Brady. Para alcanzar este objetivo se estudian las propiedades básicas de los espacios $CAT(0)$. Este tipo de espacios aparecen de manera natural al estudiar los enlaces esféricos en un *complejo celular euclidiano a piezas* (CCEP). La sección dos de este capítulo estudia el núcleo de un epimorfismo entre un $\pi/2$-grupo de Artin G_L y $\mathbb{Z}$. Este grupo G_L está asociado a un complejo celular L el cual tiene la propiedad de estar completamente determinado por su 1-esqueleto. A L le asociamos un CCEP en cuyo cubriente universal el epimorfismo interacciona con una función de Morse de manera equivariante; así pues podemos utilizar los resultados del capítulo anterior para derivar el resultado que buscamos. La última sección del capítulo estudia el concepto de "hojas"que será utilizado en el cuarto capítulo.

El penúltimo capítulo explora las propiedades homológicas y homotópicas de las hojas; además como resultado del estudio homológico se prueban dos más de las implicaciones del teorema principal. El estudio homotópico da la última implicación.

El último capítulo agrupa las pruebas de las implicaciones y hace observaciones para el uso correcto de los resultados ya que los teoremas y proposiciones enunciados en los capítulos anteriores están en contextos distintos, unos en el simplicial y otros en el esférico. Se concluye con un breve paseo por las aplicaciones y los alcances del Teorema de Bestvina-Brady, en especial en la aplicación mostrada en el artículo principal. Dicha aplicación da por resultado el que una de dos conjeturas, a saber, la conjetura de Eilenberg-Ganea o la de Whitehead, es falsa.

Se termina el texto con una serie de apéndices en donde se agrupan los principales teoremas y resultados usados en las diferentes pruebas.

Índice general

Capítulo 1

Teoría de Morse Sintética

La teoría de Morse Sintética, tal como se le llama en [10], es una modificación de la Teoría de Morse usual cuyo fin en este trabajo es analizar el cambio del tipo de homotopía de la función inclusión al pasar por un tipo específico de puntos. En la Teoría de Morse el espacio es una variedad Riemanniana completa y las llamadas funciones de Morse son funciones suaves con puntos críticos no degenerados y aislados. Aquí, la Teoría de Morse Sintética es desarrollada en la categoría cuyos objetos son CW-complejos afines y los morfismos son las funciones PL (ver apéndice A definición A.0.7); así que dado un polihédro en dicha categoría sus vértices hacen el papel de los puntos críticos de las llamadas funciones de Morse sintéticas. Así mismo la n-conexidad homológica de un enlace descendente (o ascendente) corresponde al índice de un punto crítico en la teoría de Morse usual.

Indicaciones. Puesto que las células consideradas como dominios de funciones características son todas de tipo convexo y polihédrico, únicamente en la definición de Complejo Celular Afín se mencionarán con ese nombre, después nos referiremos a ellas como células convexas. Como es usual denotamos al i-esqueleto de X por $X^{(i)}$. Por brevedad nos referiremos a las funciones de Morse Sintéticas simplemente como funciones de Morse. Los grupos de homología tomarán coeficientes en un anillo conmutativo R con $1 \neq 0$.

1.1. Complejos Celulares Afines

Iniciamos nuestro trabajo definiendo los *Complejos Celulares Afines*. En la sección 2 del capítulo 3 usaremos un tipo particular de complejos celulares afines, donde aplicaremos los resultados de esta primera sección.

Definición 1.1.1. *Sea X un complejo CW. Decimos que X es un* ***complejo celular afín****, si está equipado con la siguiente estructura: para cada n-célula e de X damos una célula polihédrica convexa $C_e \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función característica $\chi_e : C_e \to e$ tal que la restricción de χ_e a cualquier cara de C_e es una función característica de otra célula, posiblemente precompuesta por un homeomorfismo parcial afín (es decir, la restricción de un homeorfismo afín) de $\mathbb{R}^n$.*

En el contexto de la definición, llamaremos *función característica admisible* para una célula e de X, a cualquier función obtenida de χ_e por precomposición con un homeomorfismo parcial afín. Claramente la restricción a una cara de una función característica admisible, es una función característica admisible de otra célula.

Ejemplo 1.1.1. Puesto que todo polígono regular $P \subset \mathbb{R}^2$ de n lados puede ser triangulado, P tiene una estructura CW-compleja. Esta triangulación (de hecho todas las triangulaciones de un polígono regular) tiene n 0-células, $(2n+3)$ 1-células y $(n-2)$ 2-células. Tomemos e, una k-célula en P a $C_e = e$ y $\chi_e = id$. Esto demuestra que P es un complejo celular afín.

Ejemplo 1.1.2. Una estructura CW-compleja del toro está dada por la representación celular del grupo con presentación: $G = (a, b | ab = ba)$ donde atamos la única 2-célula a una rosa con lados a, b. Claramente esta descomposición da al toro una estructura compleja celular afín.

Ejemplo 1.1.3. Sea G un grupo con presentación: $G = (a, b, c | c^{-1}ac = b, c^{-1}bc = aba^{-1})$, G tiene la representación compleja CW construída atando dos 2-células, a una rosa con lados a, b, c.

Ejemplo 1.1.4. Analizaremos estructuras CW-complejas para S^2, dos de las cuales no serán de tipo afín.

(a) Descompongamos S^2 en una 0-célula e y una 2-célula, e identificamos $S^1 \subset D^2$ con la función constante $\chi : S^1 \to e$. Ésta no es una descomposición celular afín; si lo fuera, puesto que hay una 2-célula, hay por lo menos una función característica para una 1-célula, pero esta descomposición no tiene 1-células.

(b) Eligiendo polos norte y sur para S^2 triangulamos su ecuador con dos 0-células e_1, e_2, y dos 1-células l_1, l_2. Si además tomamos dos 2-células c_1, c_2 y las adjuntamos por su frontera al ecuador tendremos una estructura CW-compleja en S^2. La menor cantidad de lados de un polihedro convexo en $\mathbb{R}^2$ es tres, si la descomposición anterior fuera afín, dos de los tres vértices de dicho polihedro convexo, v_1, v_3, serían identificados en, por ejemplo e_1, pero esto significa que la restricción de la función característica de esta 2-célula convexa al lado determinado por v_1 y v_3 es una función característica de una 1-célula la cual identifica sus extremos en un punto; está descomposición de S^2 no tiene una tal función característica para sus 1-células.

(c) La descomposición celular del ecuador de S^2 dada por tres 0-células y tres 1-células con dos 2-células como hemisferios, es una descomposición celular afín.

Observemos que si un complejo celular afín X tiene células de dimensión n, entonces X tiene células de dimensión $n - 1$, como ocurre con los CW-complejos triangulables.

Definición 1.1.2. *Una función $f : X \to \mathbb{R}$ definida en un complejo celular afín X, es una* ***función de Morse sintética*** *si*

1. *Para cualquier m-célula e de X $f\chi_e : C_e \to \mathbb{R}$ se extiende a una función afín $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, y $f\chi_e$ es constante solo cuando dim $e = 0$.*

2. *$f(X^{(0)})$ es discreto en $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 1.1.5. Consideremos a $S^1 \subset \mathbb{R}^3$ en el plano generado por los vectores canónicos e_1 y e_2. Si z_0, z_1 y z_2 son las 3 raíces cúbicas de la unidad, entonces S^1 tiene una estructura CW-compleja afín sobre la cual la proyección sobre el eje generado por e_1 es una función de Morse.

Ejemplo 1.1.6. Las funciónes proyección sobre el eje x_i, donde $1 \leqslant i \leqslant n$, definidas sobre el n-simplejo estándar en $\mathbb{R}^n$ de dimensión mayor que uno, no son de Morse, puesto que hay 1-células que tiene imagen constante bajo estas funciones.

Usamos en lo sucesivo la siguiente notación y terminología. Para un subconjunto cerrado y no vacío $J \subset \mathbb{R}$, denotamos por X_J al conjunto $f^{-1}(J)$. También $X_t = X_{\{t\}}$. Llamamos a los conjuntos X_t *conjuntos de nivel de la función de Morse* f y nos referimos al conjunto $X_{(-\infty,t]}$ como el *conjunto de subnivel de* X_t.

En el siguiente lema hacemos uso del siguiente resultado que exponemos sin demostración: *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ una célula polihédrica convexa con* dim C=q. *Sean F y G dos caras disjuntas de C, donde* $\dim F = q-1$ *y G puede incluso ser un vértice. Entonces, cualquier retracto fuerte por deformación de $\overline{\partial C \backslash F}$ a G se extiende a un retracto fuerte por deformación de C a G.*

Lema 1.1.3. *Si $J \subset J' \subset \mathbb{R}$ son conexos, cerrados y $X_{J'} \backslash X_J$ no contiene vértices de X, entonces $X_J \hookrightarrow X_{J'}$ es una equivalencia homotópica.*

Observación. Debido a los distintos tipos de cerrados y conexos en $\mathbb{R}$ hay varias posibilidades para los subconjuntos J y J'. En la prueba supondremos que *ínf J=ínf J'*$=-\infty$, y la prueba revelará que los demás casos se demuestran utilizando un procedimiento análogo.

Prueba. Para cada célula e de X y cada función característica admisible $\chi_e : C_e \to X$ construímos un retracto fuerte por deformación $H_t^{\chi_e}$ de $C_e \cap (f\chi_e)^{-1}(J')$ a $C_e \cap (f\chi_e)^{-1}(J)$ tal que

1. Si χ_e está precompuesto por un homeomorfismo parcial afín h, entonces $H_t^{\chi_e}$ está conjugado por h, es decir, $H_t^{\chi_e h} = h^{-1}H_t^{\chi_e}h$.

2. La restricción de $H_t^{\chi_e}$ a una cara de C_e es el retracto por deformación asociado a dicha cara.

Como dijimos, supongamos que $J = (-\infty, b]$ y que $J' = (-\infty, d]$. La construcción es por inducción sobre la dimensión de e.

- Si dim e =0, $f\chi_e$ es constante; luego, si $X_J \cap X^0 \neq \emptyset$, $C_e \cap (f\chi_e)^{-1}(J) = C_e \cap (f\chi_e)^{-1}(J') = C_e$. C_e es trivialmente un retracto fuerte por deformación de sí mismo. Esto prueba el paso base.

- Supongamos que, para cada célula e de X de dimensión $n \geqslant 0$ y cada función característica admisible $\chi_e : C_e \to X$, existe un retracto fuerte por deformación $H_t^{\chi_e}$ de $C_e \cap (f\chi_e)^{-1}(J')$ a $C_e \cap (f\chi_e)^{-1}(J)$ tal que 1. y 2. se satisfacen.

- Sea $e \subset X$ una $(n+1)$-célula, y $\chi_e : C_e \to X$ una función característica admisible. Se demostrará que $(f\chi_e)^{-1}(b)$ es retracto fuerte por deformación de $(f\chi_e)^{-1}[b, d]$. La gráfica de la extensión de $f\chi_e$ es un hiperplano en $\mathbb{R}^{n+2}$ (ver apéndice C), así que $(f\chi_e)^{-1}(b)$ y $(f\chi_e)^{-1}(d)$ son hiperplanos en $\mathbb{R}^{n+1}$ y por lo tanto son caras del convexo $(f\chi_e)^{-1}[b, d] \cap C_e$; dado que $(f\chi_e)^{-1}(b) \cap (f\chi_e)^{-1}(d) = \emptyset$, la hipótesis inductiva garantiza que hay un retracto fuerte por deformación de $Cl[\partial((f\chi_e)^{-1}[b, d] \cap C_e) - (f\chi_e)^{-1}(d)]$ a $(f\chi_e)^{-1}(b)$, el cual por la observación precedente al enunciado del lema se extiende a un retracto fuerte por deformación $F_t^{\chi_e}$ de $(f\chi_e)^{-1}[b,d]$ a $(f\chi_e)^{-1}(b)$. Finalmente definimos

$$H_t^{\chi_e}(x,t) = \begin{cases} x & si\ x \in (f\chi_e)^{-1}(-\infty, b] \\ F_t^{\chi_e}(x,t) & si\ x \in (f\chi_e)^{-1}(-\infty, d] \end{cases}$$

Que $H_t^{\chi_e}$ cumple 2. se tiene del hecho que $F_t^{\chi_e}$ extiende a homotopías definidas en la frontera que cumplen 1. y 2..

El trabajo anterior se hizo en las células polihédricas convexas, pero la homotopía que necesitamos para demostrar que la inclusión es una equivalencia homotópica, debe tener dominio $X \times I$. Tenemos que

$$X_{(-\infty,b]} = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} Y^i \text{ y } X_{(-\infty,d]} = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} Z^i,$$

donde

$$Y^i = \bigsqcup_{\lambda\in\Delta_i} e_\lambda^i \cap X_{(-\infty,b]} \text{ y } Z^i = \bigsqcup_{\lambda\in\Delta_i} e_\lambda^i \cap X_{(-\infty,d]}.$$

Por hipótesis $Y^0 = Z^0$, y por tanto Y^0 es trivialmente un retracto fuerte por deformación de Z^0. Llamaremos a esta homotopía H^0. Ahora bien, para $i > 0$ y para cada $\lambda \in \Delta_i$, ya probamos que existen homotopías $H_t^{\chi_{e_\lambda^i}}$ que hacen a la inclusión de $e_\lambda^i \cap X_{(-\infty,b]}$ en $e_\lambda^i \cap X_{(-\infty,d]}$ una equivalencia homotópica. Con estas homotopías definimos

$$H^i : \bigsqcup_{\lambda\in\Delta_i} e_\lambda^i \cap X_{(-\infty,b]} \to \bigsqcup_{\lambda\in\Delta_i} e_\lambda^i \cap X_{(-\infty,d]}$$

como $H^i(x,t) = H_t^{\chi_{e_\lambda^i}}(x,t)$, donde $x \in e_\lambda^i$. Esto prueba que $Y^i \hookrightarrow Z^i$ es una equivalencia homotópica. Finalmente definimos $H : X_{(-\infty,b]} \to X_{(-\infty,d]}$ como $H(x,t) = H^i(x,t)$ si $x \in e_\lambda^i$ para alguna $\lambda \in \Delta_i$. Al ser $f^{-1}([a,b])$ retracto fuerte por deformación de $f^{-1}([a,d])$ —gracias a H—, $X_{(-\infty,b]} \hookrightarrow X_{(-\infty,d]}$ es una equivalencia homotópica. □

De la prueba del paso inductivo en la demostración anterior se desprenden dos hechos importantes: X_t y X_J son complejos celulares afines. Esta estructura afín es inducida a partir de la ya existente en X añadiendo inductivamente las células necesarias. Esto se puede hacer gracias a que la imagen inversa de un punto bajo $(f\chi_e)^{-1}$ es un subconjunto de un hiperplano en el espacio euclidiano en el cual vive la célula convexa C_e.

1.2. $Lk_{\uparrow}(v,X)$ y $Lk_{\downarrow}(v,X)$

Todo complejo celular afín X es un polihédro, es decir, es triangulable. Esto se ve procediendo por inducción sobre la dimensión de los esqueletos $X^{(i)}$, mientras que al mismo tiempo probamos que todas las funciones características admisibles son PL. Para el paso inductivo, primero observamos que cualquier función atante admisible $\partial C \to X^{(i)}$ es PL, puesto que la restricción a cada cara de C es PL por hipótesis inductiva. Así $X^{(i+1)}$ tiene una estructura PL como el espacio de adjunción de $X^{(i)}$ y las funciones atantes definidas en las fronteras de las $(i+1)$-células convexas euclidianas.

Inductivamente podemos probar que dado un polihédro triangulado X, existe una función de Morse para dicha triangulación. Procedemos de la siguiente manera: iniciamos numerando $X^{(0)}$ y definimos una función $f^{(0)} : X^{(0)} \to \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ como la asignación $f^{(0)}(x_n) \mapsto n$. Es claro que $f^{(0)}$ es de Morse con dominio $X^{(0)}$. Dado $\sigma_e \in X^{(1)}$ —donde e es el 1-simplejo estándar pegado en σ_e— con $\sigma_e(0)$ y $\sigma_e(1)$ por extremos, tales que $f^{(0)}(\sigma_e(0)) \leqslant f^{(0)}(\sigma_e(1))$, definimos $f^{(1)} : \sigma_e \to \mathbb{R}$ como

$$\sigma_e(t) \mapsto (1-t)f^{(0)}(\sigma_e(0)) + tf^{(0)}(\sigma_e(1)),\ t \in e \approx [0,1].$$

Puesto que en la estructura de X no hay lazos, ya que X está triangulado, $f^{(1)}$ no colapsa 1-células; por tanto $f^{(1)}$ es de Morse sobre $X^{(1)}$. Con las líneas anteriores queda probado el paso base. Para la prueba inductiva es más instructivo mostrar como se define la función de Morse $f^{(2)}$ sobre el 2-esqueleto de X y entonces pensar en que la definición de $f^{(n)}$ sobre el n-esqueleto es similar, así que a continuación sólo detallaremos la contrucción de $f^{(2)}$. Sea σ_e una 2-célula de X, que al estar triangulado, es homeomorfo a un 2-simplejo estándar. La definición de $f^{(1)}$ prueba que el mínimo en la frontera de σ_e, bajo $f^{(1)}$, se alcanza en un vértice, digamos e_1. Si $x \in Int\ e$, existe un único punto x_{e_1} en el lado opuesto a e_1 tal que el segmento $\overline{e_1 x_{e_1}}$ contiene a x. El homeomorfismo que existe entre $\overline{e_1 x_{e_1}}$ y $\overline{f^{(1)}(e_1)\ f^{(1)}(\chi_{\sigma_e}(x_{e_1}))}$ permite definir

$$f^{(2)}|_{\sigma_e} : \sigma_e \to \mathbb{R}$$

y con esta familia de restricciones, uno para cada 2-célula, definimos $f^{(2)} : X^{(2)} \to \mathbb{R}$, la cual es de Morse. Finalmente, la descomposición celular disjunta de X nos permite definir una función de Morse $f : X \to \mathbb{R}$ adjuntando las funciones $f^{(n)}$.

Cuando $\alpha : A \to B$ es una función PL entre polihédros y $a \in V(A)$ es un punto aislado de $V(A) \cap \alpha^{-1}\alpha(a)$, entonces α induce una función entre enlaces simpliciales $Lk(a, A) \to Lk(\alpha(a), B)$. Ésta función simplicial será denotada por α_*.

En particular, cuando $\chi_e : C_e \to X$ es una función característica admisible de una célula e de un complejo celular afín X y w es un vértice de C_e, tenemos una función bien definida $\chi_{e*} : Lk(w, C_e) \to Lk(\chi_e(w), X)$. Entonces podemos identificar el enlace $Lk(v, X)$ de un vértice v de X con

$$Lk(v, X) = \bigcup\{\chi_{e^*}(Lk(w, C_e)) : \chi_e(w) = v\}$$

donde la unión se toma sobre todos los C_e en donde a lo menos uno de sus vértices es atado en v.

Definición 1.2.1. *Sea X un complejo celular afín triangulado y f una función de Morse sobre X. El **enlace ascendente**, denotado por $\uparrow$-enlace, es*

$$Lk_\uparrow(v, X) = \bigcup\{\chi_{e^*}(Lk(w, C_e)) : \chi_e(w) = v \text{ y } f\chi_e \text{ tiene un mínimo en } w\} \subset Lk(v, X)$$

*y el **enlace descendente**, denotado en este caso por $\downarrow$-enlace, es*

$$Lk_\downarrow(v, X) = \bigcup\{\chi_{e^*}(Lk(w, C_e)) : \chi_e(w) = v \text{ y } f\chi_e \text{ tiene un máximo en } w\} \subset Lk(v, X)$$

Lema 1.2.2. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función de Morse definida en un complejo celular afín. Supongamos que $J \subset J' \subset \mathbb{R}$ son cerrados y conexos tales que $\inf J = \inf J'$, y $J' \backslash J$ contiene sólo un punto $r \in f(X^{(0)})$. Entonces $X_{J'}$ es homotópicamente equivalente a X_J unido con los conos de espacio base $Lk_{\downarrow}(v, X)$ y picos v, donde v es un vértice con $f(v) = r$.*

Observaciones. Puesto que $X_{J' \cap (-\infty, r]} \hookrightarrow X_{J'}$ y la diferencia de ellos no contiene ningún vértice de X, el lema 2.1.3. garantiza que podemos suponer que *sup J'=r*. Además, basta probar el lema cuando *ínf J*$=-\infty$ puesto que $(f\chi_e)^{-1}(J')$ es una célula convexa contenida en C_e. Si una célula $e \subset X$ satisface que mín $f|_e > r$, entonces e es disjunta de $X_{J'}$, consideraremos células que no satisfagan lo anterior. Por último podemos suponer que v es único, si hubiera más de uno, unimos los conos que pueden ser tomados disjuntos en base a la triangulación de X.

Prueba. Si e es una célula, con función característica $\chi_e : C_e \to X$ y $r - \epsilon$ el supremo de J; construímos un retracto fuerte por deformación de $(f\chi_e)^{-1}(-\infty, r]$ sobre el subconconjunto:

$$(f\chi_e)^{-1}(-\infty, r-\epsilon] \cup \bigcup \{F : F \textit{ es una cara de } C_e \textit{ con } (f\chi_e)(F) \subset (-\infty, r]\} \quad (1.1)$$

La construcción del retracto por deformación anterior se hará por inducción sobre la dimensión de e. Se procederá como en la prueba de lema de la sección anterior, en el sentido de que dichos retractos fuertes por deformación se obtendrán primero para el conjunto $(f\chi_e)^{-1}[r-\epsilon, r]$ sobre $(f\chi_e)^{-1}(r-\epsilon)$, y posteriormente se definirán de $(f\chi_e)^{-1}[-\infty, r]$ sobre $(f\chi_e)^{-1}[-\infty, r-\epsilon]$.

- Si *dim e=0*, el resultado es claro puesto que el conjunto expuesto en (1.1) es exactamente $(f\chi_e)^{-1}(-\infty, r]$.

- Supongamos que dicho retracto se ha construído para una célula de dimensión $\leqslant i$.

- Sea e una i+1-célula. Por hipótesis inductiva cada i-cara distinta de $(f\chi_e)^{-1}(r)$ del convexo polihédrico $(f\chi_e)^{-1}[r-\epsilon, r]$ se deforma fuertemente por deformación en $(f\chi_e)^{-1}(r-\epsilon)$, nuevamente la observación previa al lema 1.1.3 termina la prueba.

Estos retractos satisfacen las propiedades 1 y 2 pedidas en el lema 1.1.3.

Notemos que si $w \in C_e$ y $f\chi_e(w) = v$, tendremos dos casos: $f\chi_e$ alcanza un máximo en w o no. En el primer caso, al ser C_e una célula convexa, el cono sobre $Lk_{\downarrow}(v, e)$ y pico v es la célula completa e; de lo contrario w define una cara F de C_e que satisface $f\chi_e(F) \subset (-\infty, r]$. Usando la misma técnica que se expuso para inducir un retracto fuerte por deformación de $X_{J'}$ en X_J al probar el lema 1.1.3 concluímos la demostración. □

Cambiando ínfimos por supremos, $\downarrow$ por $\uparrow$ en la prueba anterior, queda probado el siguiente lema.

Lema 1.2.3. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función de Morse definida en un complejo celular afín. Supongamos que $J \subset J' \subset \mathbb{R}$ son cerrados y conexos tales que $\sup J = \sup J'$, y $J' \backslash J$ contiene solo un punto $r \in f(X^{(0)})$. Entonces $X_{J'}$ es homotópicamente equivalente a X_J unido con los conos de espacio base $Lk_{\uparrow}(v, X)$ y picos v, donde v es un vértice con $f(v) = r$.*

Corolario 1.2.4. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función de Morse en un complejo celular afín que satisface alguna de las hipótesis de los lemas anteriores. Supóngase también que $J \subset J' \subset \mathbb{R}$ son cerrados no vacíos y conexos.*

(1) Si cada enlace $\uparrow$- y $\downarrow$- es homológicamente n-conexo, entonces $X_J \hookrightarrow X_{J'}$ induce isomorfismos en $\widetilde{H}_i$ para $i \leqslant n$ y un epimorfismo en $\widetilde{H}_{n+1}$.

(2) Si cada enlace $\uparrow$- y $\downarrow$- es simplemente conexo, entonces $X_J \hookrightarrow X_{J'}$ induce un isomorfismo en π_1.

(3) *Si cada enlace $\uparrow$- y $\downarrow$- es conexo, entonces $X_J \hookrightarrow X_{J'}$ induce un epimorfismo en π_1.*

Prueba. $f(X^{(0)}) \subset \mathbb{R}$ es discreto y si el cardinal del conjunto $f(X^{(0)}) \cap (J' \backslash J)$ es finito, digamos $\{w_1, ..., w_m\}$ con $w_j < w_{j+1}$; entonces si suponemos que $J' \backslash J$ solo contiene a w_m y probamos la veracidad del lema en este caso, podemos usar después la transitividad de los isomorfismos para probar el resultado general. Si $f(X^{(0)}) \cap (J' \backslash J)$ es infinito, reenumeramos a los elementos de dicha intersección $\{w_1, w_2, ...\}$ de tal manera que $w_i < w_j$ para $i < j$. De manera inductiva probamos (inducción sobre el número de w_i que haya en el conjunto en consideración) que tenemos una familia de R-módulos o grupos isomorfos entre sí e isomorfos a $H_i(X_J)$ o $\pi_i(X_J)$ respectivamente, por lo tanto su límite directo, el cual es $H_i(X_{J'})$ o $\pi_i(X_{J'})$, según sea el caso, es isomorfo a $H_i(X_J)$ o al grupo $\pi_i(X_J)$ según corresponda.

Lo anterior garantiza que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $X_{J'} \backslash X_J$ contiene exactamente un vértice v. Al cono sobre el espacio $Lk_{\downarrow}(v, X)$ y vértice v lo denotaremos por C; y sea $K = C \cup X_J$. El lema precedente prueba que $\widetilde{H}_i(X_{J'}) \cong \widetilde{H}_i(K)$ para toda i.

Existe $0 < t' < 1$ tal que X_J está contenido en la unión de X_J y el interior del truncamiento del cono C en el tiempo t', a esta unión la denotamos por L. Entonces $K = L \cup C$. Además, $Lk_{\downarrow}(v, X) \subset X_J$ y es un retracto fuerte por deformación del subconjunto de C determinado por $0 \leqslant t \leqslant t'$, por lo tanto $\widetilde{H}_i(X_J) \cong \widetilde{H}_i(L)$ para toda i.

$Lk_{\downarrow}(v, X)$ es un retracto por deformación de $L \cap C$, por lo tanto $\widetilde{H}_i(Lk_{\downarrow}(v, X)) \cong \widetilde{H}_i(L \cap C)$ para toda i.

(1) $L, C \subset K$ satisfacen las hipótesis del Teorema de Mayer-Vietoris y dado que $\downarrow$-enlace es homológicamente n conexo y todo cono es contraíble, entonces para todo $1 \leqslant i \leqslant n$ se cumple que $\widetilde{H}_i(X_J) \cong \widetilde{H}_i(X_{J'})$. Por otra parte, puesto que C es conexo por trayectorias $\widetilde{H}_0(C) = 0$, y también en este caso

$\widetilde{H}_0(X_J) \cong \widetilde{H}_0(X_{J'})$. Cuando $i = n+1$ tenemos la siguiente sección en la sucesión exacta de Mayer-Vietoris (sustituyendo los isomorfismos necesarios y ya expuestos)

$$\cdots \to H_{n+1}(X_J) \to H_{n+1}(X_{J'}) \to 0 \to \cdots$$

la cual prueba que la inclusión de X_J en $X_{J'}$ induce un epimorfismo.

(2) La descomposición expuesta al inicio de esta prueba también es útil si queremos aplicar el teorema de Seifert-Van Kampen —recordemos que si una función entre determinados espacios es una equivalencia homotópica, dicha función induce un isomorfismo entre grupos fundamentales—, ya que al ser $L \cap C$ simplemente conexo éste es por definición conexo por trayectorias. El producto libre entre los grupos $\pi_1(X_J)$ y $\pi_1(C)$, donde $\pi_1(C) = 0$, es isomorfo a $\pi_1(X_J)$. Por lo tanto $\pi_1(X_J) \cong \pi_1(X_{J'})$.

(3) Nuevamente la descomposición del principio de la prueba nos sirve en este caso. Notemos lo siguiente: $Lk_{\downarrow}(v, X) \subset (L \cap C)$, y este $\downarrow$-enlace es un CW conexo, por lo tanto $L \cap C$ es conexo por trayectorias. Nuevamente Seifert-Van Kampen concluye la prueba.

□

Capítulo 2

Cohomología de Grupos

Introducimos propiedades de finitud de grupos, relacionadas con resoluciones proyectivas y libres de un RG-módulo y otras relacionadas con la acción de un grupo sobre un complejo celular. Después de estudiar las relaciones lógicas entre estas propiedades tomamos una G-complejo afín y una función de Morse ϕ-equivariante, donde $\phi : G \to \mathbb{Z}$ es un epimorfismo. Añadiendo hipótesis derivamos un teorema el cual da condiciones suficientes sobre los enlaces ascendentes y descendentes de los vértices del complejo celular afín, de tal manera que el núcleo de ϕ cumpla determinadas propiedades de finitud.

Indicaciones. En esta sección G es un grupo topológico discreto y R un anillo conmutativo con $1 \neq 0$, el cual será considerado como un RG-módulo trivial. También, $\tilde{X}$ denotará al cubriente universal del espacio X. Como es costumbre los grupos de homotopía son denotados por π_i.

2.1. Propiedades de Finitud

Definición 2.1.1. *Un grupo G se dice ser de tipo $FP_n(R)$ si existe una resolución proyectiva*

$$P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to R \to 0$$

del RG-módulo trivial R por RG-módulos proyectivos finitamente generados P_i.

Frecuentemente escribimos $G \in FP_n(R)$ para decir que G es de tipo $FP_n(R)$. De igual manera, si $G \in FP_n(R)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, decimos que $G \in FP_\infty(R)$.

Ejemplo 2.1.1. Sea $G = \langle x \rangle$ un grupo cíclico de orden finito k y $D, N \in \mathbb{Z}G$ elementos de la forma:

$$D = x - 1 \text{ y } N = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}$$

Entonces la siguiente sucesión es una resolución libre sobre el anillo $\mathbb{Z}G$ de $\mathbb{Z}$

$$\cdots \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{D} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{D} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

donde ϵ es el morfismo aumentación y los otros morfismos son multiplicación por D y N respectivamente (ver [16, pág.872]). Por lo tanto, $G \in FP_\infty(\mathbb{Z}G)$.

Definición 2.1.2. *Un grupo G se dice ser de tipo $FP(R)$ si existe una resolución finita*

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \to R \to 0$$

de R de RG-módulos proyectivos finitamente generados.

Un grupo satisfaciendo la definición anterior será denotado por $G \in FP(R)$. Cuando se tiene la situación de que G es de tipo FP, se dice que *la dimensión proyectiva de R sobre RG* es a lo más n. Esto lo denotamos por *dim proy*$_{RG}R \leqslant n$.

Sea G un grupo y Y un complejo CW que satisface las siguientes condiciones:

1. Y es conexo.

2. $\pi_1(Y) = G$.

3. El cubriente universal de Y es contraíble.

Un tal Y se llama un complejo de Eilenberg-MacLane de tipo $(G, 1)$ o simplemente un complejo $K(G, 1)$. El punto 3. en la definición anterior es equivalente a las siguientes dos afirmaciones:

1. $H_i(X) = 0,$ *para toda* $i \geqslant 2$

2. $\pi_i(X) = 0,$ *para toda* $i \geqslant 2$

Definición 2.1.3. *Un grupo G es de tipo F_n si existe un $K(G, 1)$-complejo con n-esqueleto finito.*

Cuando un grupo G es de tipo F_n, lo denotaremos por $G \in F_n$.

Ejemplo 2.1.2. La figura ocho es un complejo CW conexo cuyo grupo fundamental G es libre en dos generadores y tiene por cubriente universal un árbol, por lo tanto la figura ocho es un $K(G, 1)$ y así $G \in F_2$.

Proposición 2.1.4. *Si existe una resolución*

$$0 \to Z_n \to P_n \to \cdots \to P_0 \to R \to 0$$

donde los P_i son todos finitamente generados y proyectivos sobre RG y Z_n no es finitamente generado sobre RG, entonces $G \in FP_n(R)$ pero no es de tipo $FP_{n+1}(R)$.

Prueba. Supongamos por contradicción que $G \in FP_{n+1}(R)$.

Probaremos que si

$$0 \to Z'_n \to P'_n \to \cdots \to P'_0 \to R \to 0$$

es una sucesión exacta con P_i proyectivos para toda i, entonces

$$P_0 \oplus P'_1 \oplus P_2 \oplus P'_3 \oplus \cdots \cong P'_0 \oplus P_1 \oplus P'_2 \oplus P_3 \oplus \dots$$

lo cual demostrará que si P'_i es finitamente generado como RG-módulo para toda i y Z'_n también lo es, entonces Z_n es finitamente generado, lo cual es una contradicción. Esto lo probaremos por inducción sobre n.

Si $k = 0$ es el lema de Schanuel[1]. Sean K y K' los núcleos de los homomorfismos $P_{n-1} \mapsto P_{n-2}$ y $P'_{n-1} \mapsto P'_{n-2}$ respectivamente. Supongamos que la afirmación es cierta para $0 \leqslant k \leqslant (n-1)$ y provemos su veracidad para $k = n$. Por hipótesis inductiva

$$K \oplus \underbrace{P'_{n-1} \oplus P_{n-2} \oplus \ldots}_{\text{Q}} \cong K' \oplus \underbrace{P_{n-1} \oplus P'_{n-2} \oplus \ldots}_{\text{Q'}}$$

Tenemos dos sucesiones exactas:

$$0 \to Z_n \to P_n \oplus Q \to K \oplus Q \to 0$$
$$0 \to Z'_n \to P'_n \oplus Q' \to K' \oplus Q' \to 0.$$

Las anteriores sucesiones más el hecho de que $K \oplus Q \cong K' \oplus Q'$; y puesto $P_n \oplus Q$ y $P'_n \oplus Q'$ son proyectivos, nos permiten usar el lema de Schanuel para terminar la prueba. □

Una de las maneras más importantes de producir resoluciones proyectivas, de hecho libres, de R sobre RG viene de la topología algebraica.

Recordemos algunos tipos de acciones de un grupo G sobre un complejo CW X:

- **Cocompacta**. Se dice que la acción es de este tipo si el espacio cociente X/G es compacto.

- **Celular**. G actúa celularmente en X si dada una célula c y $g \in G$, entonces $g \cdot c$ es nuevamente una célula de X.

- **Fiel**. La acción es de este tipo si para cualesquiera $g, h \in G$ distintos, existe $x \in X$ tal que $g \cdot x \neq h \cdot x$, o de manera equivalente, si $g \in G \backslash \{e\}$ existe $x \in X$ tal que $h \cdot x \neq x$.

[1]El lema de Schanuel afirma que dadas dos sucesiones exactas de R-módulos $0 \to K \to P \to M \to 0$ y $0 \to K' \to P' \to M' \to 0$, donde P y P' proyectivos, entonces $P \oplus K' \cong P' \oplus K$.

- **Libre**. La acción es libre si para cualesquiera $g, h \in G$ distintos, se cumple que para toda $x \in X$, que $g \cdot x \neq h \cdot x$; de manera equivalente, si $g \cdot x = x$ para alguna x, entonces $g = e$.

- **Propiamente discontinua**. Se dice que la acción es de este tipo si para toda $x \in X$ existe una vecindad U de x tal que si $gU \cap U \neq \emptyset$, entonces $g = e$.

Definición 2.1.5. *Un grupo G se dice ser de tipo $FH_n(R)$ si este actúa libre, celular, fiel, propiamente discontinua y cocompactamente en un complejo celular X tal que $\widetilde{H}_i(X, R) = 0$ para toda $i \leq n-1$.*

Definición 2.1.6. *Un grupo G se dice ser de tipo $FH(R)$ si este actúa libre, celular, fiel, propiamente discontinua y cocompactamente en un complejo celular X que es R-acíclico.*

En el primer caso escribimos: $G \in FH_n(R)$, en el segundo caso: $G \in FH(R)$.

Los siguientes dos lemas relacionan las definiciones topológicas FH_n y FH, a las condiciones de finitud clásicas FP_n y FP.

Lema 2.1.7. *Sea G un grupo.*

(1) Si $G \in FH_n(R)$ entonces $G \in FP_n(R)$.

(2) Si $G \in FH(R)$ entonces $G \in FP(R)$

Prueba. (1) Escribamos el complejo de cadenas celular aumentada con coeficientes en R de X:

$$\cdots \to C_{n+1}(X; R) \to C_n(X; R) \to C_{n-1}(X; R) \to \cdots \to C_0(X; R) \to R \to 0.$$

Puesto que G actúa celularmente en X, G actúa en $C_i(X; R)$, para toda $i \in \mathbb{Z}$. Esta acción es la siguiente: $(g, \sum_{j\leq k} r_j\sigma_j) \mapsto \sum_{j\leq k} r_j(g\cdot\sigma_j)$. Si $r \in R$ y $g \in G$, definimos $rg * \sum_{i\leq k} r_j\sigma_j = \sum_{i\leq k} rr_j(g\cdot\sigma_j)$, y si extendemos linealmente la anterior definición, es decir,

$$\sum_{l\leq m} r_l g_l * \sum_{j\leq k} r_j \sigma_j = \sum_{l\leq m} \sum_{j\leq k} r_l r_j (g_l \cdot \sigma_j)$$

tendremos que $C_i(X;R)$ es un RG-módulo para toda $i \in \mathbb{Z}$. Además, de la acción de G en $C_i(X;R)$ mostrada arriba se ve que los morfismos de R-módulos de la sucesión exacta son también morfismos de RG-módulos. Que $\tilde{H}_i(X,R) = 0$ para $0 \leqslant i \leqslant (n-1)$, implica que el complejo es exacto hasta el subíndice $n-1$.

Definimos $D_i \subset C_i(X;R)$ como el conjunto que tiene exactamente un representante por cada órbita celular en $C_i(X;R)$. Si $\widetilde{\sigma} \in D_i$, sea $C_i^{\widetilde{\sigma}}(X;R) = \{\sum r_g(g\cdot\widetilde{\sigma})|r_g \in R,\ g \in G\}$ considerado como un RG-módulo. El procedimiento para probar que el conjunto $C_i^{\widetilde{\sigma}}(X;R)$ es un RG-módulo es análogo al que se usó cuando probamos que $C_i(X,R)$ es un RG-módulo. Puesto que $C_i^{\widetilde{\sigma}}(X;R) \cong RG$, entonces tendremos que $C_i(X;R) \cong \sum_{\widetilde{\sigma}\in D_i} C_i^{\widetilde{\sigma}}(X;R) \cong \sum_{\widetilde{\sigma}\in D_i} RG$, esto hace la anterior resolución de R una resolución RG-proyectiva.

Finalmente veamos que para toda $i \in \mathbb{Z}$, el RG-módulo $C_i(X;R)$ es finitamente generado. Observemos que X/G es un CW-complejo, ya que la acción de G en X es celular. Como la acción es cocompacta, X/G es finito, por lo tanto D_i es un conjunto finito; entonces, si $\sum r_\sigma\sigma \in C_i(X;R)$, $\sum r_\sigma\sigma = \sum r_{\widetilde{\sigma}}(g\cdot\widetilde{\sigma})$, con $\widetilde{\sigma} \in D_i$ y $g \in G$.

(2) La prueba del inciso anterior nos sirve para encontrar un complejo proyectivo de RG-módulos con $C_{-1}(X;R) = R$. La exactitud de dicho complejo lo da la R-aciclicidad de X. □

Nótese que en la sucesión exacta que prueba las afirmaciones (1) y (2) del lema superior es en realidad una resolución libre.

Antes de enunciar el siguiente lema, debemos de hacer un par de observaciones. La primera es que si G es un grupo: $G \in F_0$; y la segunda es que $G \in F_1$ si y sólo si G es finitamente generado. Las observaciones anteriores justifican porque en el siguiente lema $n \geqslant 2$. Podemos añadir en este punto que un grupo G es de tipo F_2 si y sólo si G es finitamente presentado (ver [10, pág.169]).

Lema 2.1.8. *Sea G un grupo que actúa libre, celular, fiel, propiamente discontin-*

ua y cocompactamente en un CW-complejo X que es n-conexo (ver apéndice B), donde $n \geqslant 2$*. Entonces G es de tipo* F_{n+1}.

Prueba. El tipo de acción de G en X prueba que $Y = X \backslash G$ es un CW-complejo finito —en particular tiene $(n+1)$-esqueleto finito— con $\pi_1(Y) \cong G$ y cubriente universal X. Puesto que X es n-conexo, Y es n-aesférico (ver B.0.8 en el apéndice B). Adjuntando a Y células de dimensión mayor o igual a $n+1$ podemos aniquilar los grupos de homotopía superiores, el CW-complejo resultante, prueba que $G \in F_{n+1}$.

□

EL siguiente lema da un criterio para saber cuando grupo G es $FH_n(R)$ pero no FP_{n+1}. Este lema será aplicado posteriormente en conjuntos de nivel y subnivel que satisfacen sus hipótesis, puesto que la observación de la página 7 nos dice que dichos conjuntos tienen una estructura CW-compleja.

Lema 2.1.9. *Supóngase que un grupo G actúa libre, fiel, celular, propiamente discontinua y cocompactamente en un CW-complejo X el cual satisface:*

1. $\widetilde{H}_i(X, R) = 0$ *para* $0 \leqslant i \leqslant n-1$
2. $\widetilde{H}_n(X, R)$ *no es finitamente generado como un RG-módulo.*

Entonces $G \in FH_n(R)$*, pero no de tipo* $FP_{n+1}(R)$*.*

Prueba. Dadas las hipótesis sobre la acción de G en X es inmediato que $G \in FH_n(R)$. $\widetilde{H}_n(X, R) = ker\ \partial_n / im\ \partial_{n+1}$, como este grupo de homología no es finitamente generado como RG-módulo, $ker\ \partial_n$ no es finitamente generado como RG-módulo. Entonces la sucesión exacta

$$0 \to ker\ \partial_n \hookrightarrow C_n(X; R) \to C_{n-1}(X; R) \to \cdots \to C_0(X; R) \to R$$

junto con la proposición 2.1.4 culminan la demostración. □

Otras propiedades de finitud de grupos se definen simplemente cambiando todas las veces que aparece la palabra *proyectivo* por la palabra *libre* en las definiciones 2.1.1 y 2.1.2. En el primer caso decimos que el grupo es de tipo $FL_n(R)$, y en el segundo que el grupo es de tipo $FL(R)$.

Definición 2.1.10. *Si G es un grupo, decimos que G es de tipo finito, y lo denotamos por $G \in F$, si este tiene un espacio de Eilenberg-MacLane finito.*

El grupo libre en n generadores es un grupo de tipo finito, su espacio de Eilenberg-MacLane es la adjunción por un punto de una colección de n 1-esferas.

Dadas las definiciones anteriores, dirigimos nuestra atención hacia las relaciones lógicas entre ellas.

Las siguientes cadenas de implicaciones serán probadas de izquierda a derecha.

$$F_n \Rightarrow FH_n \Rightarrow FL_n \Rightarrow FP_n$$

Sea X $K(G,1)$-complejo con 1-esqueleto finito. Tenemos dos posibilidades para este espacio X: o tiene $X^{(2)}$ finito o no. Si lo tiene podemos proceder como se explica en el caso $n > 2$ que se explica más adelante, de lo contrario hacemos lo siguiente: tomamos el cubriente universal de $X^{(2)}$ en el cual G actúa, puesto que $\pi_1(X^{(2)}) \cong G$, y restringimos esa acción a $\tilde{X}^{(2)}$. Esta restricción tiene las mismas propiedades que la acción de G en $\tilde{X}$, pero además es cocompacta, puesto que $\tilde{X}^{(2)}/G \subseteq X^{(1)}$, por tanto $G \in FH_1$. Para $n \geqslant 2$ consideramos el cubriente universal del n-esqueleto del complejo X que garantiza que $G \in F_n$. $\pi_1(X^{(n)}) \cong G$ y $\pi_k(X^{(n)}) \cong 0$ para $2 \leqslant k \leqslant n-1$. Entonces $\tilde{X}^{(2)}$ es $(n-1)$-conexo, y por lo tanto $\tilde{H}_k(\tilde{X}^{(n)}; R) = 0$ para toda $0 \leqslant k \leqslant n-1$ (los resultados usados en esta demostración están en B). La segunda implicación se obtiene de la prueba al lema 2.1.7(1). La tercera implicación se tiene del hecho de que todo R-módulo libre es un R-módulo proyectivo.

$$F \Rightarrow FH \Rightarrow FL \Rightarrow FP$$

Si $G \in F$ y X es el complejo de tipo $K(G, 1)$ finito que lo garantiza, entonces la acción de G en $\tilde{X}$ es tal que cumple la definición de FH; además, puesto que $\tilde{X}$ es n-conexo para toda $n \geqslant 0$, entonces $\tilde{H}_k(\tilde{X}; R) = 0$ para toda $k \geqslant 0$ (ver el teorema de Hurewicz en el apéndice B). La segunda implicación se obtiene de la prueba al lema 2.1.7(2). La tercera implicación se tiene del hecho de que todo R-módulo libre es un R-módulo proyectivo.

Si $G \in FH_1$ entonces $Y = X/G$ es un CW-complejo finito y conexo puesto que $\tilde{H}_0(X; R) = 0$. Esto implica que $Y^{(1)} \neq \emptyset$. Si $Y^{(2)} = \emptyset$, puesto que $\pi_1(Y^{(1)}) \cong G$ y $\pi_i(Y^{(1)}) = 0$ para todo $i > 1$, entonces $G \in f_1$. si $Y^{(2)} \neq \emptyset$, $\pi_1(Y^{(2)}) = G$ y añadiendo células de dimensión mayor a 2 obtenemos un CW-complejo de tipo $K(G, 1)$ Z tal que $Z^{(2)} = Y^{(2)}$. Esto prueba que $FH_1 \Rightarrow F_1$.

La condición FP_n es equivalente a la condición FL_n. La prueba de esta afirmación es la proposición (4.3) en [6, pág.193].

Arriba notamos que si $G \in FL_1$ entonces $G \in FP_1$, además $G \in FP_1$ si y solo si G es finitamente generado; y así, la acción de G en el *complejo de Cayley*[2], prueba que $G \in FH_1$. Por otra parte, si $G \in FL_2$ entonces el primer grupo de homología de el cociente de este complejo de Cayley es finitamente generado; así que para ver que el grupo es de tipo FH_2, adjuntamos equivariantemente 2-células a dicho complejo de Cayley y así trivializamos el primer grupo de homología del complejo.

Las implicaciones que no se pueden invertir son: $F \Rightarrow FH$ y $F_n \Rightarrow FH_n$ con $n \geqslant 2$. Esto quedará demostrado en las aplicaciones del teorema de Bestvina-Brady en el capítulo 5.

Las implicaciones para las cuales aún no hay respuesta si pueden o no invertirse son: $FP \Rightarrow FL$, $FL \Rightarrow FH$ y $FL_n \Rightarrow FH_n$ para $n \geqslant 3$.

La siguiente proposición dice que si un grupo finitamente presentado G actúa libre, fiel, propia, celular y cocompactamente en un complejo celular Y, entonces

[2]El complejo de Cayley para un grupo G es el cubriente universal de la presentación compleja del grupo. El 1-esqueleto del complejo de Cayley es la conocida como gráfica de Cayley.

$\pi_1(Y)$ está finitamente generado módulo la acción de G. Antes de enunciar la proposición definimos lo que es una *función celular G-equivariante*; éste concepto será útil en la prueba y en la sección sucesiva.

Teniendo en mente que un G-conjunto, donde G es un grupo, es un conjunto equipado con una G-acción izquierda por permutaciones, y que un G-espacio es un espacio equipado con una G-acción izquierda por homeomorfismos damos la siguiente definición:

Definición 2.1.11. *Una función $f : A \to B$ entre G-espacios es una función G-equivariante (o una G-función) si $f(g \cdot a) = g \cdot f(a)$, para toda $a \in A$ y $g \in G$.*

Proposición 2.1.12. *Sea G un grupo finitamente presentado. Supóngase que G actúa libre, fiel, propia, celular y cocompactamente en un complejo celular conexo Y. En este caso es posible atar a Y una cantidad finita de G-órbitas de 2-células tal que el complejo resultante es simplemente conexo.*

Prueba. Al ser G finitamente presentado $G \in F_2$, así G actúa libre, fiel, propia, celular y cocompactamente en el cubriente universal Z del $K(G, 1)$-complejo existente.

Sean $\{\overline{y}\}$ y $\{\overline{z}\}$ conjuntos de representantes de G-órbitas en los 0-esqueletos de Y y Z respectivamente. La asignación entre los conjuntos de representantes $\overline{y} \mapsto \overline{z}$ nos permite definir la función G-equivariante $\alpha^{(0)} : Y^{(0)} \to Z^{(0)}$ definida para toda $g \in G$ como

$$g \cdot \overline{y} \in Y^{(0)} \mapsto g * \overline{z},$$

ésta función junto con la acción celular de G en Y y Z determinan la función G-equivariante $\alpha : Y^{(2)} \to Z^{(2)}$.

Análogamente definimos la función G-equivariante $\beta : Z^{(1)} \to Y^{(1)} \subset Y$. Atamos tantas G-órbitas de 2-células a Y como G-órbitas de 2-células tenga Z (al ser la acción cocompacta en Z, éste número de órbitas es finito); así que β se extiende a una función G-equivariante $\tilde{\beta} : Z^{(2)} \to Y^{(2)}$.

La función $f : Y^{(1)} \times \{0, 1\} \to Y$ definida por

$$(y, 0) \mapsto y, \ (y, 1) \mapsto \beta\alpha(y)$$

se extiende a una función celular G-equivariante

$$F : Y^{(1)} \times \{0, 1\} \cup Y^{(0)} \times [0, 1] \to Y$$

definida por $(v, t) \mapsto tf(v, 0) + (1 - t)f(v, 1)$ si $(v, t) \in Y^{(0)} \times [0, 1]$, y si $(x, t) \in Y^{(1)} \times \{0, 1\}$ entonces $F(x, t) = f(x, t)$. Que el dominio de F es un CW-complejo se ve la estructura CW-compleja inducida por $Y^{(1)}$ en $Y^{(1)} \times \{0, 1\}$ y de la estructura CW-compleja de $Y^{(0)} \times [0, 1]$ siendo estas compatibles al ser adjuntadas por sus 0-esqueletos; además dicho dominio es un G-espacio.

Adjuntamos a Y tantas órbitas de 2-células como órbitas de 1-células tenga el mismo Y (atadas según la acción de G en Y). Estás orbitas de 1-células al ser atadas al conjunto $Y^{(1)} \times \{0, 1\} \cup Y^{(0)} \times [0, 1]$, producirán -utilizando la primera construcción de funciones G-equivariantes expuesta en esta prueba- una función celular G-equivariante $\tilde{F} : Y^{(1)} \times [0, 1]$, que extiende a F.

Sea ℓ un lazo en $Y^{(1)}$. Entonces $\tilde{F}$ da una homotopía entre ℓ y $\beta\alpha(\ell)$. El lazo $\alpha(\ell)$ es homotópicamente nulo en $Z^{(2)}$ y por lo tanto $\tilde{\beta}\alpha(\ell) = \beta\alpha(\ell)$. □

2.2. Núcleos de Homomorfismos a $\mathbb{Z}$

En esta sección asumiremos que G actúa libre, fiel, propia, celular y cocompactamente en un complejo celular afín contraíble X. Haremos una suposición extra acerca de la acción del grupo, pero antes daremos una definición.

Definición 2.2.1. *Sea X un complejo afín y G un grupo actuando en el. Si $e \subset X$ es una célula con función característica admisible χ_e y para toda $g \in G$ se satisface que $g\chi_e$ es la función característica admisible de $g \cdot e$, entonces decimos que la acción preserva la estructura afín de X.*

Asumiremos que la acción de G en X es como en el párrafo primero de esta sección y que además preserva la estructura afín de X.

También asumimos que el homomorfismo de grupos que consideramos en esta sección $\phi : G \to \mathbb{Z}$ es suprayectivo, que $\mathbb{Z}$ actúa por translaciones en $\mathbb{R}$, y que $f : X \to \mathbb{R}$ es una función de Morse ϕ-equivariante[3].

Al ser f ϕ-equivariante $H = ker(\phi)$ actúa en X_t, además actúa libremente puesto que G lo hace de esta manera sobre X. Notemos que la acción de H en X_t es celular (en donde consideramos a X_t un CW-complejo celular afín con la estructura inducida por la función f, tal como se explicó en la página 7), puesto que si $h \in H$ y $e \subset X$ es una i-célula que intersecta a X_t, la acción envía $e \cap X_t$ a $h \cdot e \cap X_t$, que es célula de X_t. Del hecho anterior se desprende que la acción es cocompacta ya que cada célula de X_t está contenida en una célula de X, y al actuar G sobre X y H sobre X_t se tendrá que toda célula de X_t/H estará incluída en una célula de X/G, éste último siendo finito.

En el siguiente teorema se asume que X es un CW-complejo celular afín en el cual G actúa tal como se asumió en el segundo párrafo de esta sección; además, suponemos que la función de Morse f, cumple las hipótesis del lema 1.2.2.

Teorema 2.2.2. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función de Morse y $H = Ker(\phi)$.*

(1) Supongamos que cada enlace $\uparrow$- y $\downarrow$- es homológicamente n-conexo. Entonces $H \in FH_{n+1}(R)$.

(2) Si todos los enlaces $\uparrow$- y $\downarrow$- son R-acíclicos, entonces $H \in FH(R)$.

(3) Si todos los enlaces $\uparrow$- y $\downarrow$- son simplemente conexos, entonces H es finitamente presentado.

Prueba. (1) Para cada par de reales que satisfacen: $t < s$, el corolario 1.2.4(1) afirma que la inclusión $X_{(-\infty,t]} \hookrightarrow X_{(-\infty,s]}$ induce isomorfismos $\tilde{H}_i(X_{(-\infty,t]}) \cong$

[3]Sea $f : X_1 \to X_2$ una función entre G_i-espacios y $\phi : G_1 \to G_2$ un homomorfismo de grupos. f es ϕ-equivariante si para toda $g \in G_1$ y para toda $x \in X_1$, $f(g \cdot x) = \phi(g) * f(x)$.

$\tilde{H}_i(X_{(-\infty,s]})$ para toda $i \leqslant n$, y un epimorfismo $\tilde{H}_{n+1}(X_{(-\infty,t]}) \to \tilde{H}_{n+1}(X_{(-\infty,s]})$. Dado $t \in \mathbb{R}$ e $i \leqslant n$, $\tilde{H}(X_{(-\infty,t]}) = 0$, puesto que $X = \bigcup_{r\in\mathbb{Z}} X_{(-\infty,r]}$ y éste es contraíble. Con la ayuda del lema 1.2.2 y el corolario 1.2.4(1) garantizamos que para toda $t \in \mathbb{R}$ e $i \leqslant n$, $\tilde{H}_i(X_{[t,\infty)}) = 0$. Expresamos a X como la unión: $X = X_{(-\infty,t]} \cup X_{[t,\infty)}$, y así el teorema de Mayer-Vietoris prueba que X_t es homológicamente n-conexo. Ya habíamos dicho que H actúa libre y cocompactamente en X_t, por tanto $H \in FH_{n+1}(R)$.

(2) Se sigue de la prueba del inciso anterior, pero en este caso tenemos que X_t es R-acíclico.

(3) Al ser los enlaces $\uparrow$- y $\downarrow$- 1-conexos el teorema de Hurewicz afirma que éstos serán homológicamente 1-conexos, y así el inciso (1) prueba que X_t es conexo por trayectorias; esto se debe a que H, que actúa en X_t, es de tipo FH_2, y por lo tanto $\tilde{H}_0(X_t, R) = 0$. La conexidad de X_t garantiza que no importa el punto base al calcular $\pi_1(X_t)$. Por el corolario 1.2.4(2) la inclusión $X_t \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo en los grupos fundamentales de dichos conjuntos. Por lo tanto X_t es simplemente conexo. La acción de H sobre X_t es de tal que X_t/H es un complejo celular finito, así que añadiendo células de dimensión mayor que 2 aniquilamos los grupos de homotopía superiores a uno, en consecuencia tendremos un $K(H, 1)$ finito; en particular $H \in F_2$ lo cual ocurre si y sólo si H es finitamente presentado.

□

Capítulo 3

$\pi/2$-Grupos de Artin

En esta sección se obtienen las implicaciones $\Leftarrow$ del ***Teorema de Bestvina-Brady***, aunque la descripción exacta de como se da esto se pospone hasta el capítulo 5. Dado un *complejo bandera L*, le asociamos un $\pi/2$-*grupo de Artin*[1] y para este grupo construímos un espacio de Eilenberg-MacLane Q_L. Q_L resultará tener un cubriente universal de tipo $CAT(0)$ en donde habrá definida una función de Morse ϕ-equivariante (donde ϕ es un homomorfismo con las propiedades descritas en el capítulo anterior)

$$f : X \to \mathbb{R}$$

la cual es el levantamiento de una función $Q_L \to S^1$. Los enlaces esféricos $\uparrow -$ y $\downarrow -$ asociados a f resultarán ser isomorfos (simplicialmente) a L. Así que los resultados del capítulo anterior podrán ser utilizados para demostrar las implicaciones $\Leftarrow$ del teorema principal de este trabajo.

[1]En inglés a este tipo de grupos se les denominan ***right angled Artin groups***

3.1. CAT(0) y CAT(1)

La nomenclatura matemática $CAT(\kappa)$[2], con $\kappa \in \mathbb{R}$, se utiliza para denotar un tipo especial de espacios métricos geodésicos. A continuación definimos los espacios $CAT(\kappa)$ para aquellos κ que utilizamos. Las definiciones generales así como las pruebas a las observaciones y resultados aquí expuestos se pueden consultar en [4].

Un *segmento geodésico* (geodésica) entre dos puntos p y q en un espacio métrico X es la imagen de una trayectoria de longitud $d(p,q)$ uniendo los puntos p y q. Un segmento geodésico elegido entre p y q será denotado por $[p,q]$. Una *geodésica local* en X es una función $\gamma : I \to X$, en donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo cerrado con la propiedad de que para cualquier $t \in I$, existe $\epsilon > 0$ tal que $d(\gamma(t'), \gamma(t'')) =| t' - t'' |$ para todo $t', t'' \in I \cap [t - \epsilon/2, t + \epsilon/2]$. Si para todo $p, q \in X$ existe un segmento geodésico que los une decimos que X es un *espacio métrico geodésico*. Un *triángulo geodésico* en un espacio métrico X consiste de tres puntos $p, q, r \in X$ (vértices), y una elección de tres segmentos geodésicos $[p,q]$, $[q,r]$ $[r,p]$ (lados); éste será denotado por $\Delta(p,q,r)$. Si $x \in X$ es tal que $x \in [p,q] \cup [q,r] \cup [r,p]$, entonces escribiremos $x \in \Delta(p,q,r)$.

Un espacio métrico geodésico el cual es necesario describir brevemente es S^n. Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno usual en $\mathbb{R}^{n+1}$, definimos una métrica en S^n como el único número real $d(x,y) \in [0,\pi]$, donde $x, y \in S^n$, tal que

$$\cos d(x,y) = \langle x, y \rangle. \tag{3.1}$$

Definición 3.1.1. *Sea $\kappa \in \mathbb{R}$ un número no negativo. Denotaremos por M^n_κ a los siguientes espacios métricos:*

(1) si $\kappa = 0$, entonces M^n_0 es el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$,

[2] CAT es un acrónimo utilizado por Mikhail Gromov para denotar este tipo de espacios que se obtiene de los nombres de los matemáticos Élie **Cartan**, Aleksandr Danilovich **Aleksandrov** y Victor Andreevich **Toponogov**.

(2) *si $\kappa > 0$, entonces M^n_κ se obtiene de la esfera S^n multiplicando su métrica por $1/\sqrt{\kappa}$,*

Definimos el *diámetro de M^n_κ* como sigue: si $\kappa > 0$ $D_\kappa = \pi/\sqrt{\kappa}$ y si $\kappa = 0$ $D^n_\kappa = \infty$.

Sea X un espacio métrico. Un triángulo $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ en M^2_κ es llamado *un triángulo de comparación* para $\Delta = \Delta([p,q],[q,r],[r,p])$ en X si $d(\bar{p},\bar{q}) = d(p,q)$, $d(\bar{q},\bar{r}) = d(q,r)$ y $d(\bar{r},\bar{p}) = d(r,p)$. Un punto $\bar{x} \in [\bar{q},\bar{r}]$ se llama *punto de comparación* para $x \in [q,r]$ si $d(q,x) = d(\bar{q},\bar{x})$.

Definición 3.1.2. *Sea X un espacio métrico y $\kappa \in \mathbb{R}$ no negativo. Sea Δ un triángulo geodésico en X con perímetro menor que $2D_\kappa$. Sea $\bar{\Delta} \subset M^2_\kappa$ un triángulo de comparación para Δ. Entonces, Δ se dice que satisface de desigualdad $CAT(\kappa)$ si para todo $x, y \in \Delta$ y todos los puntos de comparación $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Delta}$,*

$$d(x,y) \leqslant d(\bar{x},\bar{y}).$$

El hecho de que Δ sea un triángulo geodésico en X con perímetro menor que $2D_\kappa$, garantiza que existe un triangulo de comparación para el en M^2_κ. Además, dicho triángulo de comparación será único salvo isometría.

Definición 3.1.3. *Un espacio métrico geodésico X es un espacio $CAT(0)$ si todo triángulo geodésico en él satisface la desigualdad $CAT(0)$.*

Un espacio métrico X es r-geodésico si para todo par $x, y \in X$ tal que $d(x,y) < r$ existe una geodésica que los une.

Definición 3.1.4. *Un espacio métrico geodésico X es un espacio $CAT(1)$, si X es π-geodésico y todos los triángulos geodésicos de perímetro menor que 2π que están en él satisfacen la desigualdad $CAT(1)$.*

La siguiente definición fue propuesta por A.D. Alexandrov, y está dada en el contexto de las definición general de espacio $CAT(\kappa)$, es decir, admitimos que κ sea un número real arbitrario.

Definición 3.1.5. *Un espacio métrico X se dice tener* curvatura $\leqslant \kappa$ *si éste es localmente un espacio $CAT(\kappa)$, es decir, si para toda $x \in X$ existe $r_x > 0$ tal que la bola $B(x, r_x)$, dotada con la métrica inducida, es un espacio $CAT(\kappa)$.*

Caundo $\kappa \leqslant 0$ decimos que el espacio tiene *curvatura no positiva*.

Diremos que un conjunto $C \subseteq X$ de un espacio geodésico es *convexo* si para todo par de puntos en él, existe una geodésica que los une y que está en C. Si esta condición se cumple para todos los puntos con distancia $< r \in \mathbb{R}$, decimos que X es *r-convexo*.

Hacemos unas observaciones respecto a los espacios $CAT(0)$ y $CAT(1)$ que serán útiles en el trabajo sucesivo.

1. En un espacio $CAT(0)$ toda geodésica uniendo dos puntos en él será única; en un espacio $CAT(1)$, está unicidad se tendrá si la distancia entre los puntos a unir con la geodésica es menor que π.

2. En un espacio $CAT(0)$ toda geodésica local será una geodésica; en un espacio $CAT(1)$ toda geodésica local de longitud a lo más π es una geodésica.

3. Las bolas de radio finito en un $CAT(0)$ son convexas; las bolas de radio a lo más $\pi/2$ en un $CAT(1)$ son convexas.

La siguiente resultado será directamente utilizado en la observación posterior al teorema 3.2.11.

Proposición 3.1.6. *Para $\kappa \leqslant 0$, cualquier espacio $CAT(\kappa)$ es contraíble. En particular estos espacios son simplemente conexos y todos sus grupos de homotopía superiores son triviales.*

Además de la importante proposición anterior vale la pena mencionar que el producto cartesiano de espacios $CAT(0)$ es nuevamente un espacio $CAT(0)$, considerando al producto con la métrica: $d((x_1, y_1), (x_2, x_2)) = \sqrt{d(x_1, y_1)^2 + d(x_2, y_2)^2}$

. Así también, todo subconjunto convexo de un $CAT(0)$ hereda estructura métrica similar; en el caso de que el espacio sea $CAT(1)$, éste heredará su estructura métrica a sus subconjuntos π-convexos.

3.2. Complejos Bandera

Enunciamos una definición de *complejo bandera* que servirá exactamente a nuestros propósitos. En [5, pág.28] se puede consultar el teorema que garantiza el uso de esta definición en el contexto de complejos simpliciales.

Definición 3.2.1. *Un complejo simplicial L es un* ***complejo bandera*** *si cualquier colección finita de vértices de L, los cuales son adyacentes por pares, generan un simplejo en L.*

Nótese que la definición anterior es puramente combinatoria puesto que no hace alusión a la topología de L. También es inmediato que un complejo bandera está completamente determinado por su 1-esqueleto. Esto quedará claro al observar los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.2.1. Tomemos la frontera de un triángulo T en $\mathbb{R}^2$ y consideremos el simplejo simplicial definido por sus vértices y sus lados. Este no es un complejo bandera puesto que para el conjunto que contiene a sus tres vértices no hay un 2-simplejo en L que los contenga. Este ejemplo nos da un ejemplo más general. Si L es una triangulación de una 2-variedad el 1-esqueleto determinado por esta triangulación no es un complejo bandera.

Ejemplo 3.2.2. Si L es un simplejo y L' su primera subdivisión baricéntrica, entonces L' es un complejo bandera. La prueba de esto se puede consultar en [5, pág.28].

Definición 3.2.2. *El* $\pi/2$***-grupo de Artin*** G_L *asociado a un complejo bandera L tiene conjunto generador* $\{g_1, ..., g_N\}$ *en correspondencia biyectiva con el conjunto* *de vértices* $L^{(0)} = \{v_1, ..., v_N\}$*, y tiene presentación finita*

$$G_L = \langle g_1, ..., g_N : [g_i, g_j] = 1 \textit{ para todo lado } \{v_i, v_j\} \in L^{(1)} \rangle$$

Ejemplo 3.2.3. Si L es un n-complejo simplicial, L es bandera, entonces su $\pi/2$-grupo de Artin asociado es un grupo libre abeliano con $n + 1$ generadores.

Ejemplo 3.2.4. Un complejo consistiendo de una colección de n vértices tiene por $\pi/2$-grupo de Artin al grupo libre F_n. Si el complejo simplicial L es un cuadrado con su estructura usual, entonces L es bandera, y $G_L \cong (F_2)^2$. Para el octahedro es $(F_2)^3$. En general, una polihédro regular L con 2^n caras de codimensión 1 en $\mathbb{R}^n$ tiene a G_L isomorfo a $(F_2)^n$.

La presentación del grupo $\mathbb{Z}^N$ en términos de los vértices del complejo L de la definición anterior es

$$\mathbb{Z}^N = \langle g_1, ..., g_N : [g_i, g_j] = 1 \textit{ para todo } i, j \rangle,$$

por lo que la presentación de G_L expuesta anteriormente es una subpresentación de la presentación estándar de $\mathbb{Z}^N$, así que existe un epimorfismo natural $G_L \to \mathbb{Z}^N$ que envía los generadores g_i en la base estándar de $\mathbb{Z}^N$. Por otra parte tenemos un epimorfismo $\mathbb{Z}^N \to \mathbb{Z}$ definido por

$$(x_1, ..., x_N) \mapsto \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} x_i.$$

Componiendo los epimorfismos anteriores obtenemos un tercero: $\phi : G_L \to \mathbb{Z}$, el cual se caracteriza por el hecho de que $g_i \mapsto 1$, para toda i.

Nombremos al núcleo de ϕ como H_L, con éste construímos la sucesión exacta corta de grupos

$$0 \to H_L \to G_L \to \mathbb{Z} \to 0. \tag{3.2}$$

Exploraremos en las propiedades de finitud del grupo H_L, y esto lo hacemos construyendo un espacio de Eilenberg-MacLane Q_L para G_L que satisface ciertas propiedades que nos permitirán utilizar los resultados previos.

Empezamos dando unas definiciones. Denotamos por $\square^n$ al n-cubo regular en $\mathbb{R}^n$ con un vértice en el origen y teniendo lados definidos a partir de los vectores unitarios básicos.

Definición 3.2.3. *Un **complejo cúbico euclidiano por piezas** es un complejo celular construído a partir de una colección disjunta y finita de cubos regulares adjuntados por sus caras a través de isometrías. Nos referimos a este tipo de complejos como: **CCEP**.*

Todo CCEP es un complejo celular afín y un espacio métrico geodésico, esto último es cierto puesto que podemos definir la distacia entre dos puntos de un CCEP como la longitud mínima de las trayectorias que unen éstos puntos. En general los CCEP no son $CAT(0)$, por ejemplo el 1-esqueleto de todo n-cubo regular, con $n \geqslant 2$, no es $CAT(0)$. Además, la métrica Euclidiana en $\mathbb{R}^n$ da un producto interno en el espacio tangente $T_v(\mathbb{R}^n)$.

Definición 3.2.4. *Sea $v \in \square^n \subset \mathbb{R}^n$ un vértice. Definimos el **enlace esférico** de $v \in \square^n$ (denotado por $Lk^\circ(v, \square^n)$) a ser el conjunto de vectores tangentes unitarios en v los cuales apuntan hacia $\square^n$. De igual manera definimos $Lk^\circ(v, X)$ como $\bigcup\{Lk(v, \square^n) | v \in \square^n\}$.*

El $Lk^\circ(v, \square^n)$ es un subconjunto de S^{n-1} el cual es homeomorfo a la realización geométrica de un simplejo simplicial de dimensión $n-1$. A este simplejo se le denomina el *simplejo simplicial determinado por* $\square^n$.

Un ***complejo esférico por piezas*** es un complejo celular polihédrico X junto con una métrica d tal que cada célula (simplejo esférico) de X es isométrica a una célula polihédrica convexa en S^n para alguna n, además

$$d(x, y) = \text{ínf}\{longitud(\gamma) | \gamma \text{ es una trayectoria de } x \text{ a } y\} \tag{3.3}$$

Notemos que $Lk^\circ(v, \square^n)$ tiene la estructura de un $(n-1)$-simplejo esférico en el cual los 1-simplejos esféricos son de longitud $\pi/2$ (si tuviera 1-simplejos, de lo contrario serían de longitud cero); cuando esto ocurre en un simplejo esférico se le denomina ***simplejo* $\pi/2$*-lateral***[3]. Un complejo esférico por piezas en el cual todos sus simplejos son $\pi/2$-laterales será llamado un ***complejo esférico* $\pi/2$*-lateral***[4]. Así que, si X es un CCEP, $Lk^{\circ}(v,X)$ es un complejo esférico $\pi/2$-lateral.

La siguiente definición da una versión combinatoria de curvatura no positiva para un CCEP. La justificación del uso de está definición puede consultarse en [15, Sección 7].

Definición 3.2.5. *Un CCEP se dice tener curvatura no positiva si el enlace esférico de cada vértice es un complejo bandera.*

La prueba del siguiente lema puede ser encontrada en [4, Pág.211].

Lema 3.2.6. *Sea L un complejo esférico por piezas $\pi/2$-lateral. Entonces L es un espacio $CAT(1)$ si y solo si éste es un complejo bandera.*

Hacemos dos observaciones útiles en pruebas posteriores. Podemos encontrar una lectura de estas observaciones en [8, Sección I], aunque irremediablemente tenemos que ir a [11] para encontrar las pruebas detalladas de las mismas:

1. Un CCEP cuyos enlaces esféricos son espacios $CAT(1)$ satisface una desigualdad $CAT(0)$ localmente.

2. Si $\kappa \leqslant 0$ y X es localmente un espacio $CAT(\kappa)$, entonces el cubriente universal de X es un espacio $CAT(\kappa)$.

La siguiente definición servirá en la descripción de la estructura de los enlaces esféricos en los CCEP que consideraremos. El símbolo $*$ que aparece en dicha definición denota la ***unión esférica*** de las 0-esferas. Éste tipo de unión tiene un contexto más general que el de las esferas y se puede consultar en [4, pág.63,64]. El siguiente corolario es útil en la prueba del lema 3.2.8: *hay una isometría natural de $S^n * S^m$ a S^{n+m+1}.*

[3]En inglés se les denomina ***all right simplices***

[4]En inglés ***all right spherical complex***

Definición 3.2.7. *Sea L un complejo simplicial, y sea*

$$\{S^0_\alpha\}_{\alpha \in L^{(0)}}$$

una colección de 0-esferas teniendo por índice el conjunto de vértices en L. El complejo esférico asociado a L es denotado por $S(L)$ y está definido a ser la unión:

$$S(L) = \bigcup \{S^0_{\alpha_0} * \cdots * S^0_{\alpha_m} : \langle \alpha_0, ..., \alpha_m \rangle \; es\; un\; m - simplejo\; de\; L\}$$

Lema 3.2.8. *Sea L un complejo bandera. Entonces el complejo esférico asociado S(L) es también un complejo bandera.*

Prueba. Definimos $\pi : S(L)^{(0)} \to L^{(0)}$ como la función que toma los dos vértices de S^0_α y los envía a α, para toda $\alpha \in L^{(0)}$.

De la definición de $S(L)$ se ve que el par de vértices en cada 0-esfera S^0_α no son adyacentes. Entonces, dada una colección $\{v_0, ..., v_k\}$ de vértices adyacentes por pares en $S(L)$, el conjunto $\{\pi(v_0), ..., \pi(v_k)\}$ es una colección de vértices (distintos) adyacentes por pares en L. Al ser L un complejo bandera, estos vértices generan un simplejo en L, y los vértices originales generan un simplejo esférico en la correspondiente k-esfera en $S(L)$. □

En la siguiente proposición hacemos uso de las definiciones simpliciales de ***estrella*** y ***estrella cerrada*** (ver apéndice A, sección *Polihédros*) de un simplejo σ en un complejo simplicial L.

Proposición 3.2.9. *Sea L un complejo bandera equipado con la métrica $CAT(1)$ que lo hace $\pi/2$-lateral, y sea σ un simplejo de L. Entonces se cumple que*

(1) $St'(\sigma, L)$ *es contraíble.*

(2) Si τ es otro simplejo de L y asumimos que $d(a, b) < \pi/2$ para un punto $a \in \tau$ y un punto $b \in \sigma$, entonces $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$.

Prueba. (1) Observemos lo siguiente: la intersección tomada sobre la familia de simplejos $St(\sigma, L)$ de L es una cara, ρ, común a todo simplejo en dicha familia que además contiene a σ. Puesto que todo simplejo realizado se puede retraer fuertemente por deformación a cualquiera de sus caras, $St(\sigma, L)$ se retrae fuertemente por deformación a ρ y éste a su vez hace lo mismo a σ, siendo el último simplejo contraíble. Por tanto $St(\sigma, L)$ es contraíble.

Dada una colección de vértices $\{v_1, ..., v_k\}$ de σ, sea $\langle v_1, ..., v_k\rangle$ la cara de σ generada por dichos vértices. Puesto que L es un complejo bandera, el párrafo superior demuestra que

$$St(v_1, L) \cap \cdots \cap St(v_k, L) = St(\langle v_1, ..., v_k\rangle, L)$$

es contraíble. Así que la unión

$$St'(\sigma, L) = \bigcup \{St(v, L) : v \textit{ es un vértice } \sigma\}$$

también es contraíble puesto que $St(\sigma, L) \subseteq St'(\sigma, L)$, y además $St'(\sigma, L)$ se deforma fuertemente por deformación a la estrella cerrada de σ.

(2) Sea I el complejo esférico a piezas de dimensión 1 y compuesto por dos 0-simplejos $\{e_0, e_1\}$ y un 1-simplejo ℓ, además I puede ser tomado de tal manera que tenga longitud $\pi/2$ con la métrica construída según la ecuación 3.1.

Definimos la función simplicial $f : St'(\sigma, L) \to I$ de la siguiente manera (nótese que todo simplejo en la estrella de σ se caracteriza por tener por lo menos un vértice en σ o no tener ninguno, nótese que esta observación define la “orientación”en la cual la función que sigue pega los simplejos sobre ℓ):

$$f(\tau) = \begin{cases} e_0 & \text{si } \tau = \sigma \\ e_1 & \text{si } \tau \in Lk(\sigma, St'(\sigma, L)) \\ \ell & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Tomemos dos puntos distintos $a, b \in St'(\sigma, L)$. Si a y b están en σ ó en $Lk(\sigma, St'(\sigma, L))$, es claro que la distancia entre sus imágenes bajo f es cero. Si suponemos que $a, b \in \tau$, donde τ es un simplejo que no es σ ni está en $Lk(\sigma, St'(\sigma, L))$, entonces la distancia entre éstos es menor o igual a $\pi/2$, y puesto que L es un espacio $CAT(1)$, entonces las imagenes bajo f de estos puntos no aumentan su distancia. Puesto que esto ocurre para cualquier simplejo en L podemos concluir que f es una función simplicial que no incrementa la distancia.

Supongamos que $a \in \tau$ y $b \in \sigma$ son puntos tales que $d(a, b) < \pi/2$ y que además $\tau \cap \sigma = \emptyset$. Entonces cada geodésica γ uniendo a con b intersecta $Lk(\sigma, St'(\sigma, L))$, y si tomamos un punto $c \in \gamma \cap Lk(\sigma, St'(\sigma, L))$ dado que f no incrementa la distancia tendremos que $d(c, b) \geqslant \pi/2$, y entonces $d(a, b) \geqslant \pi/2$, lo cual es una contradicción.

□

El siguiente lema también está relacionado con la geometría esférica de los complejos simpliciales esféricos $\pi/2$-laterales. El lema se debe a Gromov y se puede consultar en [11, Pág.122]. Este resultado es el componente de geometría esférica en la prueba del lema 3.2.6. Necesitaremos de este resultado en la prueba de un lema posterior. Aquí aparece por motivos de afinidad en su contenido.

Lema 3.2.10. *Sea v un vértice en un complejo simplicial esférico por piezas $\pi/2$-lateral, y sea B la bola (estrella cerrada) de radio $\pi/2$ alrededor de v. Sean $x, y \in \partial B$ (la esfera de radio $\pi/2$ alrededor de v), finalmente sea γ una geodésica de x a y el cual intersecta el interior de B. Entonces la longitud de γ es a lo menos π.*

Cerramos esta sección con un teorema que define y describe un CCEP Q_L asociado a un complejo bandera finito L. En la prueba del siguiente teorema se utilizan los *enlaces ascendentes (descendentes) esféricos*, que son definidos de manera análoga a los enlaces ascendentes (descendentes) simpliciales; de igual manera se extiende la notación a estos nuevos enlaces utilizando $\circ$ como superíndice.

Teorema 3.2.11. *Sea L un complejo bandera finito, G_L el $\pi/2$-grupo de Artin asociado a L. Sea $\phi : G_L \to \mathbb{Z}$ el epimorfismo que aparece en la sucesión 3.2. Entonces existe un CCEP de curvatura no positiva Q_L y una función $l : Q_L \to S^1$ que satisface las siguientes condiciones:*

(1) l induce el homomorfismo $\phi : G_L \to \mathbb{Z}$;

(2) Q_L tiene sólo un vértice w y $Lk^\circ(w, Q_L)$ es isomorfo a $S(L)$;

(3) el levantamiento de l a la cubierta universal es una función de Morse ϕ-equivariante $f : X \to \mathbb{R}$;

(4) todos los enlaces esféricos $\uparrow$- y $\downarrow$- de X (con respecto a la función de Morse f) son isomorfos a L.

Prueba. Sea N el número de vértices de L. La realización geométrica de L en $\mathbb{R}^N$ se construye enviando cada vértice $v_i \in L$ a la punta del vector básico canónico e_i, luego enviamos un m-simplejo

$$\sigma = \{v_{i_0}, ..., v_{i_m}\}$$

al convexo mínimo en $\mathbb{R}^N$ que contiene a las imágenes de los v_{i_j} bajo la asignación anterior. Para cada σ definimos $\square_\sigma$ como el $(m+1)$-cubo regular con un vértice en el origen de $\mathbb{R}^N$ y lados definidos por los vectores básicos e_{i_j}.

Definimos Q_L como la imagen de la unión de los cubos

$$\bigcup\{\square_\sigma : \sigma \ simplejo \ de \ L\}$$

bajo la proyección $\mathbb{R}^N \to T^N = \mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$, donde $\mathbb{Z}^N$ actúa en $\mathbb{R}^N$ por translaciones de la manera usual. Así, T^N es justamente el N-toro estándar.

Q_L es un CCEP puesto que al pasar al cociente cada cara de $\square_\sigma$ se identifica con su cara opuesta vía una isometría. Puesto que los vértices de cada $\square_\sigma$ tienen coordenadas enteras, el paso al cociente los colapsa a un punto en T^N y por esta razón el complejo Q_L tiene sólo un vértice que denotaremos por w. A cada m-simplejo $\sigma \in L$ le corresponde un $(m+1)$-cubo $\square_\sigma \subset \mathbb{R}^N$ el cual desciende a un $(m+1)$-toro en Q_L. Analicemos $Lk^\circ(w, Q_L)$. El toro obtenido a través de un m-simplejo σ, contribuye al enlace esférico con una m-esfera, y éste último es la unión esférica de $(m+1)$ S^0 esferas, por lo tanto el enlace del vértice en Q_L es precisamente el complejo esférico $S(L)$. Este párrafo prueba (2).

Al ser L un complejo bandera, el lema 3.2.8 asegura que $S(L)$ también es un complejo bandera, y puesto que sólo hay un vertice en Q_L, la definición 3.2.5 afirma que Q_L tiene curvatura no positiva.

La función lineal

$$l : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : (x_1, ..., x_N) \mapsto x_1 + \cdots + x_N$$

seguida de la función cociente $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$, llamémosla Π, tiene por núcleo el conjunto de N-adas cuya suma de coordenadas es entera, entonces el núcleo de la función cociente $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$ está contenido en el núcleo de Π, por tanto l induce una función lineal continua que va de $\mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$ a S^1. Restringiendo ésta última función al subcomplejo $Q_L \subseteq T^N$, obtenemos una función continua $Q_L \to S^1$ el cual denotaremos por la letra l nuevamente.

Q_L es conexo por trayectorias, así que podemos escoger como un punto distinguido a w para calcular su grupo fundamental. Sabemos que basta estudiar lazos no trivales contenidos en el 2-esqueleto de Q_L, así que tomemos un lazo ℓ de éste tipo. Al ser Q_L la unión de toros, uno para cada simplejo en L, podemos suponer que ℓ está contenido en uno de estos toros T_ℓ (de lo contrario, podemos descomponerlo como unión finita de lazos cada uno contenido en uno toro); esto significa que existe un $\sigma \in L^{(1)}$ con vértices v_0, v_1 que corresponde a $\square_\sigma$, y éste se corresponde con T_ℓ al pasar al cociente. Esto prueba que $\pi_1(T_\ell) \cong \langle v_0, v_1 : [v_0, v_1] = 1\rangle$, por lo tanto hay un homomorfismo de $\pi_1(Q_L)$ en G_L, éste homomorfismo tiene por inversa al que toma un elemento $v_{i_0}\cdots v_{i_m} \in G_L$, y le asocia el elemento que es el resultado del producto de los lazos definidos por las v_{i_m} en $\pi_1(Q_L)$. Por lo tanto $G_L \cong \pi_1(Q_L)$.

$e_i \mapsto 1 \in \mathbb{R}$ bajo la función l; así que $l_* : \pi_1(Q_L) \to \mathbb{Z}$ envía los generadores de $\pi_1(Q_L)$ a $1 \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $\phi = l_*$ y esto prueba (1).

Sea (X, p) el cubriente universal de Q_L, el cual también es un CCEP (ver [10, Pág.193]), y $(\mathbb{R}, q)$ el cubriente universal de S^1 donde $q(t) = (\sin(t), \cos(t))$. La función $l \circ p : X \to S^1$ se levanta a la función continua $f : X \to \mathbb{R}$. G_L actúa en X y si hacemos actuar a $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ por translaciones, entonces f es ϕ-equivariante; esto se ve de la siguiente manera: primero probamos por contradicción que para todo generador $a_i \in G_L$ se cumple que $f(a_i x) = 1 + f(x)$, posteriormente, dado que al tomar $g \in G_L$ entonces $g = a_{i_1}\cdots a_{i_m}$

$$f(gx) = f(a_{i_1}\cdots a_{i_m}x) = f(a_{i_1}(a_{i_2}\cdots a_{i_m}x)) = \underbrace{1+\cdots+1}_{\text{m veces}} + f(x) = \phi(g) + f(x).$$

Sea $e \subset X$ una m-célula con función característica χ_e (ésta puede estar precompuesta por una isometría $\square^m \to \square^m$). Sea $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una translación entera; y sea $l : \square^m \to \mathbb{R}$ la restricción de la función lineal:

$$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R} : (x_1, ..., x_m) \mapsto x_1 + \cdots + x_m.$$

Claramente $f\chi_e$ se estiende a una función afín en $\mathbb{R}^m$, también es claro que dicha función es constante sólo cuando e es una 0-célula. La imagen de $X^{(0)}$ está contenida en $\mathbb{Z}$ y por lo tanto es discreta en $\mathbb{R}$. Esto prueba que f es una función de Morse, lo cual da por concluída la prueba de (3).

Para cada vértice $v_i \in L$ existe un 1-cubo $\square_{v_i}$ tal que al pasar al cociente:

$$\square_{v_i} \mapsto S^1_{v_i} \subset Q_L.$$

Sea $v \in X$ un vértice, entonces $p(v) = w \in Q_L$, y la asignación superior testifica que el cubriente de $S^1_{v_i}$ es una línea ℓ_{v_i} (el cual tiene una partición en 1-cubos que lo hace un CCEP). Además $f(\ell_{v_i})$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ (esto es a causa de que f levanta a l y l manda los básicos al [0,1]). Ahora bien,

$$Lk^\circ(v, \ell_{v_i}) \cong S^0 = \{v_i^+, v_i^-\}$$

y puesto que $f(v_i^-) < f(v) < f(v_i^+)$, entonces $Lk^\circ_\uparrow(v, \ell_{v_i}) = v_i^+$ y $Lk^\circ_\downarrow(v, \ell_{v_i}) = v_i^-$, por lo cual hay una asignación biyectiva que va de $L^{(0)}$ a alguno de los enlaces, ya sea el ascendente o descendente. Ahora, si tomamos $\sigma \in L^{(1)}$, $\square_\sigma$ es un 2-cubo, y por lo tanto el cubriente en X de su correspondiente célula en Q_L —célula que es un toro— es un plano P_σ particionado en cubos el cual es generado por ℓ_{v_i} y ℓ_{v_j} —donde v_i y v_j son los vértices de σ—; luego, $Lk^\circ(v, P_\sigma)$ es la unión esférica de $Lk^\circ(v, \ell_{v_i})$ con $Lk^\circ(v, \ell_{v_j})$ siendo éste último homeomorfo a S^1; además $Lk^\circ_\uparrow(v, P_\sigma)$ es la unión esférica de $Lk^\circ_\uparrow(v, \ell_{v_i}) = v_i^+$ con $Lk^\circ_\uparrow(v, \ell_{v_j}) = v_j^+$ y ésta es homeomorfa a [0,1]. Nuevamente tenemos una asignación biyectiva que va de $L^{(1)}$ al enlace ascendente o descendente asociado v, ésta biyección es compatible con la expuesta para el caso de simplejos de dimensión 0. Es claro que usando éste razonamiento en cada $L^{(k)}$ encontramos un isomorfismo entre complejos simpliciales abstractos que va de L a $Lk^\circ(v, X)$. $\square$

Notemos que al ser X un espacio $CAT(0)$, X es contraíble; luego, Q_L en $K(G_L, 1)$-complejo.

3.3. Hojas

En la sección anterior identificamos a Q_L con la unión de toros, uno para cada simplejo perteneciente al complejo bandera L. Con esto en mente damos la definición de *piso* y *hoja* en un espacio métrico $CAT(0)$, así como algunas propiedades interesantes de las hojas.

Definición 3.3.1. *Sea X un espacio métrico $CAT(0)$. Un n-piso es un subconjunto convexo de X el cual es un encajamiento isométrico de un espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Un piso en X es un n-piso para alguna n.*

Definición 3.3.2. *Una n-hoja en X es un n-piso el cual es un subcomplejo de la preimagen en X de uno de los toros en Q_L. Una hoja es una n-hoja para alguna n.*

Ejemplo 3.3.1. Consideremos el complejo bandera L que consiste unicamente de dos puntos, es decir, la dimensión de L es cero. El cubriente universal X de Q_L es un árbol, puesto que al tomar el cociente a los unicos dos 1-cubos son enviados a una *figura 8*. El cardinal del conjunto de geodésicas infinitas en X es no numerable. Por otra parte, sólo tenemos dos 1-toros en Q_L, sus cubrientes son homeomorfos a $\mathbb{R}$ y poseen una estructura inducida por los enteros que los hacen CCEP; los mismos enteros determinan las maneras en las cuales se puede encajar isométricamente $\mathbb{R}$ en dicha estructura celular: el cardinal de estos encajamientos isométricos es numerable. Concluímos en base a este ejemplo que en general no todo piso es una hoja.

Alternativamente, podemos describir las hojas como sigue: cualquier función simplicial $L' \to L$ induce una función $Q_{L'} \to Q_L$, y si suponemos por un momento que L' es un simplejo en L, entonces ésta última función puede ser considerada como una inclusión hacia un subcomplejo —con espacio subyacente un toro—. Una *hoja* es una componente de la preimagen en X de un tal subcomplejo cuando L' recorre sobre todos los simplejos en L.

Definición 3.3.3. *Sea $v \in X$ y $A \subset X$ una unión de hojas, denotamos por $St(v, A)$ al cono de base $Lk^\circ(v, A)$ y vértice v.*

Consideraremos a $St(v, A)$ como una vecindad de v en A. De manera similar definimos $St_\uparrow(v, A)$ y $St_\downarrow(v, A)$ utilizando los enlaces esféricos $\uparrow -$ y $\downarrow -$ respectivamente.

Nótese que $Lk^\circ(v, X)$ es un conjunto simétrico, con simetría respecto a v , entonces existe una retracción $r_v : Lk^\circ(v, X) \to Lk^\circ_\downarrow(v, X)$ que toma los vértices de $Lk^\circ_\uparrow(v, X)$ y los envía a los vértices de $Lk^\circ_\downarrow(v, X)$. Ésta retracción fija los vértices de $Lk^\circ_\downarrow(v, X)$, y se extiende simplicialmente para dar una función $Lk^\circ(v, X) \to Lk^\circ_\downarrow(v, X)$ entre complejos esféricos. La función r_v puede ser modificada de tal manera que se obtiene una retracción, denominada también r_v, que va de $St(v,X)$ a $St_{\downarrow}(v,X)$.

Proposición 3.3.4. *(1) X está cubierto por hojas;*

(2) la intersección de cualquier colección de hojas en X es vacía, un vértice o una hoja;

(3) todos los conjuntos de (sub)nivel de f restringida a una hoja son contraíbles. Además, todos los enlaces esféricos $\uparrow -$ y $\downarrow -$ de la restricción son simplejos individuales;

(4) si $A \subseteq X$ es una unión de hojas y $v \in A$, entonces la restricción de r_v induce retracciones $Lk^{\circ}(v,A) \to Lk^{\circ}_{\downarrow}(v,A)$ y $St(v,A) \to St_{\downarrow}(v,A)$ (que denotaremos por r_v nuevamente). Además, $r_v^{-1}(Lk^{\circ}_{\downarrow}(v,A)) = Lk^{\circ}(v,A)$. Este comportamiento se expresa diciendo que la retracción r_v preserva hojas por v.

Prueba. (1) Dado $x \in X$, se tiene que $p(x) \in Q_L$, y así existe un n-toro $T^n \subset Q_L$ tal que $p(x) \in T^n$. Por tanto existe un n-plano $P_n \subset X$ tal que $p(P_n) = T^n$, entonces $x \in P_n$ y éste n-plano es un n-piso, al cual después de darle la una estructura cubica natural nos testifica que existe una n-hoja que contiene a x.

(2) El procedimiento es inductivo y basta probar la afirmación en el caso cuando la colección de hojas contiene unicamente a h_i, $i = \{1,2\}$. Puesto que las hojas son k_i-pisos (y estos son k_i-planos), entonces $h_1 \cap h_2$ es un vértice o un m-piso, el cual es en particular un m-plano. Así, $p(h_1 \cap h_2) = T^m$, y por lo tanto $h_1 \cap h_2$ es un subcomplejo de la imagen inversa de $T^m \subset Q_L$ bajo p, ya que es una componente conexa de dicha imagen inversa.

(3) La restricción de f a una n-hoja se obtiene a partir de la función:

$$\mathbb{R}^k \to \mathbb{R} : (x_1, ..., x_k) \mapsto x_1 + \cdots + x_k$$

lo cual prueba que la restricción de los conjuntos de (sub)nivel de f a la k-hoja son subconjuntos conexos, y puesto que las hojas son imágenes isometricas convexas de espacios euclidianos, dicha restricción será conexa por trayectorias, lo cual prueba que son contraíbles. Tomemos un vértice v en una k-hoja. La segunda parte de ésta afirmación se obtiene del hecho de que $\mathbb{R}^m$ está particionado en los cubos usuales, y dado que los enlaces esféricos, ascendentes y descendentes en v, son resultado de uniones esféricas de vértices -aquellos vértices v_i^+ o v_i^- expuestos en la prueba del teorema 3.2.11 página 41- adyacentes al propio v, tenemos que serán $(m-1)$-simplejos esféricos individuales.

(4) La afirmación es inmediata de la definición de hojas y del hecho de que la retracción r_v manda un vértice w en una hoja a su simétrica que está en la misma hoja que contiene a w.

$\square$

En este punto podemos enunciar el Teorema de Bestvina-Brady puesto que ya hemos definido todos los elementos que aparecen en su hipótesis. A pesar de que algunas implicaciones ya se pueden probar a través de los teoremas 3.2.11 y 2.2.2 esperaremos hasta el último capítulo para así no dejar pruebas dispersas que puedan confundir.

Capítulo 4

Conjuntos de Nivel y Subnivel

La prueba de las tres implicaciones $\Rightarrow$ en el teorema estudiado se hará por contradicción. En el caso de las dos primeras implicaciones necesitamos resultados que vinculen propiedades homológicas de L con la generación finita del n-ésimo grupo de homología con coeficientes en R, ya que la acción de H_L sobre los conjuntos de (sub)nivel del cubriente universal X del CCEP Q_L, satisface las hipótesis del lema 2.1.9. Estos resultados se estudian en la primera sección de este capítulo. En el caso de la tercera implicación se estudiarán las propiedades homotópicas de los conjuntos de (sub)nivel. Esto dará por resultado un teorema que afirma la equivalencia homotópica entre dichos conjuntos de (sub)nivel y un espacio que es el producto cuña de enlaces esféricos descendentes. El análisis en la conexidad y simplemente conexidad de dicho producto cuña nos probará por contradicción el resultado deseado.

4.1. La Homología de X_J

Fijemos un complejo bandera L y sea G_L el $\pi/2$-grupo de Artin asociado a L. Denotamos por X al cubriente universal de Q_L, $\phi : G_L \to \mathbb{Z}$ el epimorfismo con las propiedades definidas en la página 24 con H_L por núcleo —véase la sucesión 3.2—, y por último sea $f : X \to \mathbb{R}$ como en el teorema 3.2.11. Esta sección tiene por objetivo calcular los grupos de homología de los conjuntos X_J, donde $J \subset \mathbb{R}$ es no vacío, cerrado y conexo. Tomaremos un anillo conmutativo con $1 \neq 0$ R, y la homología se tomará con coeficientes en éste anillo, así que el isomorfismo del teorema 4.1.1 es un isomorfismo de R-módulos.

Hacemos una observación sobre los conjuntos de (sub)nivel X_J. La clave de esta observación está en el diagrama conmutativo que se obtiene en la prueba del teorema 3.2.11:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ Q_L & \xrightarrow{l} & S^1 \end{array}$$

Denotemos por A una hoja en X, y sea $A_J = A \cap X_J$. La afirmación es: *A_J es retracto fuerte por deformación de A*. Supongamos que A cubre a un 1-toro $T \subset Q_L$, es decir A es homeomorfo a $\mathbb{R}$, entonces $q(J) \subseteq S^1$ es un conexo y luego $l^{-1}(q(J)) \cap T$ es conexo; haciendo conmutar el diagrama tenemos que A_J es conexo en A, y como ya sabíamos que A es homeomorfa a $\mathbb{R}$, tenemos el resultado deseado. Si A es una n-hoja basta observar que ésta es generada por un número finito de 1-hojas, y por el caso anterior: $A_J \approx \square^n$; además $A \approx \mathbb{R}^n$, se concluye que A_J es retracto fuerte por deformación de A.

Teorema 4.1.1. *Sea A una unión posiblemente infinita de hojas y vértices en X y $A_J = A \cap X_J$. Entonces*

$$H_*(A, A_J) \cong \bigoplus_{v \notin A_J} H_*(St_\downarrow(v, A), Lk_\downarrow(v, A))$$

donde $v \in A$ es un vértice.

Puesto que $H_*(\emptyset, \emptyset) = 0$ podríamos sumar sobre todos los vértices en X no contenidos en X_J.

Prueba. Primero construímos un homomorfismo

$$\Psi_A : H_*(A, A_J) \to \bigoplus_{v \notin A_J} H_*(St_\downarrow(v, A), Lk^\circ_\downarrow(v, A)) \tag{4.1}$$

y luego probamos que éste es un isomorfismo.

La coordenada de Ψ_A que corresponde a $v \in A \backslash A_J$ está definida por la composición

$$\begin{aligned} H_*(A, A_J) \to H_*(A, A\backslash U) &\cong H_*(A, A\backslash int(St_\downarrow(v, A))) \\ &\cong H_*(St_\downarrow(v, A), Lk^\circ_\downarrow(v, A)) \xrightarrow{r_{A*}} H_*(St_\downarrow(v, A), Lk^\circ_\downarrow(v, A)). \end{aligned}$$

Donde el primer homomorfismo de izquierda a derecha es inducido por una inclusión de pares, ya que tomamos a U como una vecindad abierta de v contenida en $A\backslash A_J$. La existencia de U es porque A_J es cerrado en la topología del subespacio de A y del hecho de que $St(v, A)$ es un cono. El isomorfismo que sigue se debe a que $A\backslash int(St(v, A))$ es retracto fuerte por deformación de $A\backslash U$. El isomorfismo central usa escisión considerando el par $(A, A\backslash int(St(v, A)))$ y como subconjunto a extraer: $A\backslash St(v, A)$. El homomorfismo r_{A*} es inducido por los retractos construídos en la página 42. Si π es el homomorfismo que resulta de componer todos los homomorfismos anteriores, entonces $\Psi_A(v) = \pi(v)$.

Sea $\sigma \in H_*(A, A_J)$, y supongamos además que es un generador de $H_i(A, A_J)$. Entonces σ es un i-célula en $A\backslash A_J$. Definimos

$$\Psi_A(\sigma) = \sum_{v \in \sigma \text{ vértice}} \pi(v) \in \bigoplus_{v \in \sigma} H_*(St_\downarrow(v, A), Lk^\circ_\downarrow(v, A)),$$

ahora, si consideramos a σ como un elemento arbitrario, $\sigma = \sum_{finita} \tau_i$ donde $\tau_i \in H_i(A, A_J)$; entonces definimos

$$\Psi_A(\sigma) = \Sigma_{finita} \Psi_A(\tau_i) \in \bigoplus_{v \notin A_J} H_*(St_\downarrow(v, A), Lk^\circ_\downarrow(v, A)),$$

ésta es una función y es claramente un homomorfismo de grupos abelianos.

Si $A \subset A'$ y $A'_J = A' \cap X_J$, entonces el siguiente diagrama, donde las flechas verticales son inducidas por inclusiones, es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_*(A, A_J) & \overset{\Psi_A}{\to} & \bigoplus H_*(St_\downarrow(v, A), Lk_\downarrow^\circ(v, A)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_*(A', A'_J) & \overset{\Psi_{A'}}{\to} & \bigoplus H_*(St_\downarrow(v, A'), Lk_\downarrow^\circ(v, A')) \end{array}$$

es decir, Ψ_A es natural.

Ambos, el producto tensorial y la homología conmutan con límites directos, así que es suficiente probar el teorema cuando A es la unión finita de hojas y vértices de X. Veamos primero los siguientes casos:

1. Si $A = \emptyset$, ambos lados de 4.1 son cero;

2. si A es una hoja, la observación hecha antes ser enunciado el teorema, concluye que ambos lados de 4.1 son cero;

3. si $A = v \in A_J$, v un vértice, es claro que ambos lados de 4.1 son cero;

4. si $A = v \in A \backslash A_J$, v un vértice, entonces los únicos grupos de homología no triviales son los de grado cero, éstos son isomorfos al anillo R y nuevamente ambos lados de 4.1 son isomorfos.

Procederemos por inducción sobre el número de hojas y vértices en A. El paso base está demostrado en el párrafo anterior. Supongamos que Ψ_A es un isomorfismo cuando A es una unión de hojas y vértices $\leqslant k$. Si A una unión de $k+1$ hojas y vértices, entonces podemos escribirla como $A = A' \cup S$, donde S es una hoja o un vértice y A' es una unión de k hojas y vértices. Según la proposición 3.3.4(2), $A' \cap S$ es unión de hojas y vértices con cardinal menor o igual que k. Por hipótesis inductiva: $\Psi_{A'}, \Psi_{A' \cap S}, \Psi_S$ son isomorfismos. La sucesión de Mayer-Vietoris aplicado al par escisivo de parejas $\{(A', A'_J), (S, S_J)\}$, donde $A'_J = A' \cap X_J$ y $S_J = S \cap X_J$, nos proporciona el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to & \tilde{H}_i(A') \oplus \tilde{H}_i(S) & \to & \tilde{H}_i(A) & \to & \tilde{H}_i(A' \cap S) & \to \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots \to & \Psi_{A'}(\tilde{H}_i(A')) \oplus \Psi_S(\tilde{H}_i(S)) & \to & \Psi_A(\tilde{H}_i(A)) & \to & \Psi_{A' \cap S}(\tilde{H}_i(A' \cap s)) & \to \cdots \end{array}$$

de donde concluímos, gracias el lema del quinto isomorfismo y la naturalidad de los homomorfismos Ψ, que la flecha central es un isomorfismo. □

Corolario 4.1.2. *Hay un isomorfismo de RH_L-módulos:*

1. $\tilde{H}_*(X_{(-\infty,t]}) \cong \bigoplus_{v\in X_{(t,\infty]}} \tilde{H}_*(L)$,

2. $\tilde{H}_*(X_t) \cong \bigoplus_{v\notin X_t} \tilde{H}_*(L)$.

Prueba. En secciones anteriores ya habíamos probado que H_L actúa en los conjuntos de nivel X_t y en los subconjuntos de subnivel X_J. Esto justifica que $\tilde{H}_*(X_{(-\infty,t]})$ y $\tilde{H}_*(X_t)$ sean RH_L-módulos graduados.

Notemos que la acción de G_L en X, y por lo tanto la de H_L, es tal que dados dos vértices adyacentes bajo la acción, vienen de vértices adyacentes (puesto que la acción es celular), entonces G_L envía enlaces simpliciales en enlaces simpliciales. Ahora bien, ya sabemos que los enlaces esféricos tienen una estructura simplicial, y los enlaces descendentes (ascendentes) en un complejo cúbico son disjuntos, por lo tanto, H_L actúa en $\bigsqcup Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, X)$, donde $Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, X) \cong L$. Esto justifica que los lados derechos sean H_L-módulos.

Ya sabemos que X es una unión de hojas, entonces podemos tomar $A = X$ en el teorema anterior y dado que los morfismos fueron definidos puntualmente en los grupos de homología, tendremos que el isomorfismo de R-módulos es también de RH_L-módulos. Esto prueba (1) del corolario.

Para probar (2) usamos (1), tomando primero $A_{(-\infty,t]} = X_{(-\infty,t]}$ y luego $A_{[t,\infty)} = X_{[t,\infty)}$ los respectivos isomorfismos y la sucesión de Mayer-Vietoris asociada a la triada $(X, X_{(-\infty,t]}, X_{[t,\infty)})$ termina la prueba. □

Este corolario prueba dos implicaciones $\Rightarrow$ del teorema de Bestvina-Brady. Los detalles de esto se exponen en el último capítulo.

4.2. El Tipo de Homotopía de X_J

En esta sección construiremos X usando hojas. Empezamos con hojas que pasan a través de un vértice y luego añadimos hojas que pasan por vértices cercanos. Esta manera de ver a X nos permitirá determinar el tipo de homotopía de los conjuntos de (sub)nivel en el teorema que a continuación se enuncia. Éste finalizará la prueba del Teorema de Bestvina-Brady. Para esto consideramos al enlace $Lk_{\downarrow}^{\circ}(w, K)$, donde w es un vértice y K es una unión de hojas con ciertas características.

Teorema 4.2.1. *Sea $t \in \mathbb{R}$ y X_J el conjunto de subnivel de $X_t \subset X$. X_J es homotópicamente equivalente al producto cuña de $L = Lk_{\downarrow}^{\circ}(v, X)$, uno por cada vértice $v \in X \backslash X_J$.*

Primero nos concentramos en probar los lemas que tienen por corolario este teorema.

Lema 4.2.2. *Sea w un vértice de X y sea K la unión de una colección de hojas que contienen a w. Sea $J \subset \mathbb{R}$ un subconjunto cerrado, conexo y no vacío. Entonces*

(1) K es contraíble.

(2) Todos los enlaces esféricos $\uparrow -$ y $\downarrow -$ de K son contraíbles, excepto posiblemente el de w, y en w ambos enlaces esféricos son naturalmente isomorfos.

(3) $K_J = K \cap X_J$ es homotópicamente equivalente a $Lk_{\downarrow}^{\circ}(w, K)$ cuando $w \notin X_J$ y éste es contraíble si $w \in X_J$.

Prueba. (1) Las hojas son conjuntos convexos, así que K es la unión de conjuntos convexos con intersección no vacía, ya que w está en esta intersección, y por tanto K es convexo; lo cual prueba que para todo punto en K hay una trayectoria en él que lo une con w, lo cual prueba que K puede ser contraído a w.

(2) Hacemos la prueba para un enlace esférico descendente, el caso ascendente es análogo. Tomemos un vértice $v \neq w$ en K. Es claro que existe una hoja mínima $S \subset K$ —mínima bajo $\subseteq$—, que contiene ambos vértices y en donde la afirmación es verdadera; esto es a causa de que $Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, S)$ es homeomorfo a un m-simplejo estándar, el cual es contraíble.

Puesto que

$$Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, K) = \bigcup Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, S')$$

donde $S' \subset K$ recorre sobre todas las hojas que contienen a v y a w, y dado que $Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, S) \subset Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, S')$ para todo S', podemos concluír que $Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, K)$ es contraíble. Ahora bien, el secreto de la contractibilidad cuando tomamos un vértice distinto de w es el hecho de que $Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, S)$ es conexo, así que cuando tomamos $Lk^{\circ}_{\downarrow}(w, K)$ lo que puede ocurrir es que éste sea disconexo, lo cual lo haría no contraíble.

Sea S una hoja en la colección. En esta hoja hay una simétria con respecto a w de $Lk^{\circ}(w, S)$, utilizando esta simetría tenemos que

$$Lk^{\circ}_{\uparrow}(w, S) \cong Lk^{\circ}_{\downarrow}(w, S),$$

así que tomando todas las hojas que están en la colección y los isomorfismos que inducen tenemos que

$$Lk^{\circ}_{\uparrow}(w, K) \cong Lk^{\circ}_{\downarrow}(w, K).$$

(3) Primero supongamos que $w \in X_J$. Podemos definir una sucesión creciente de intervalos cerrados I_m conteniendo a $J = I_0$ de tal manera que $I_m \backslash I_{m-1}$ sólo tenga un número entero. La sucesión anterior define un sistema directo $(K_{J_m}, \hookrightarrow)$, donde $K_{J_m} = X_{J_m} \cap K$, que tiene por límite directo a K. Entonces el lema 1.2.2 prueba que la inclusión $K_J \hookrightarrow K$ es una equivalencia homotópica, y así K_J es contraíble.

Si $w \notin X_J$, asumimos para concretar ideas que para toda $t \in J$, $f(w) > t$.

También podemos suponer que $|f(w) - sup\ J| < 1$. Elegimos $\epsilon \in (0, 1)$ de tal manera que $f(w) - t > \epsilon$ para todo $t \in J$. Nuevamente definimos sistemas directos para probar que los lemas 1.1.3 y 1.2.2, justifican que las inclusiones

$$K_J \hookrightarrow K_{(-\infty, f(w)-\epsilon]} \hookleftarrow K_{f(w)-\epsilon}$$

son equivalencias homotópicas. A continuación demostraremos que $K_{f(w)-\epsilon}$ es homotópicamente equivalente a $Lk^{\circ}_{\downarrow}(w, K)$.

Una cubierta cerrada y localmente finita de $Lk^{\circ}_{\downarrow}(w, K)$ está dada por la familia de enlaces $Lk^{\circ}_{\downarrow}(w, S)$, donde $S \subset K$ es una hoja. Una cubierta cerrada y localmente finita de $K_{f(w)-\epsilon}$ es la dada por los subconjuntos $S \cap X_{f(w)-\epsilon}$. En ambos casos las familias son cerradas bajo intersecciones y tienen elementos contraíbles. La correspondencia uno-uno definida por las hojas S:

$$Lk^{\circ}_{\downarrow}(w, S) \leftrightarrow S \cap X_{f(w)-\epsilon}$$

prueba que la nervadura de la cubierta de $Lk^{\circ}_{\downarrow}(w, K)$ es isomorfa simplicialmente a la nervadura de la cubierta de $K_{f(w)-\epsilon}$. El teorema C.0.2 en el apéndice C prueba transitivamente que $Lk^{\circ}_{\downarrow}(w, K)$ y $K_{f(w)-\epsilon}$ son homotópicamente equivalentes.

$\square$

Antes de enunciar el siguiente lema hacemos notar que el un CCEP, los cubos que lo conforman son conjuntos convexos si tenemos la hipótesis adicional de que el espacio es $CAT(0)$. Esto se puede observar a partir de que el pegado de las células cúbicas es a través de isometrías, lo cual implica que todo n-cubo que sea cara de un $(n+1)$-cubo será convexo ya que la geodésica entre dos puntos $[\chi_{\square}(x), \chi_{\square}(y)]$ —donde $\chi_{\square}$ es una función característica— es la imagen de isométrica de $[x, y]$; si por el contrario existe un n-cubo $\square$ el cual no es cara de un cubo de dimensión superior, es claro entonces que toda geodésica uniendo dos puntos interiores de $\square$ está contenida en $\square$.

Lema 4.2.3. *Sea X un CCEP $CAT(0)$, $Q \subset X$ un cubo, y $v \in X$ un vértice. Entonces existe un sólo punto en Q tal que la distancia mínima de v a Q es la distancia de v a dicho punto. Además, este punto es un vértice de Q.*

Prueba. La existencia de dicho punto x es debido a que Q es un subconjunto compacto de X. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que γ es una geodésica cuyos únicos puntos vértice son $\gamma(0) = v$ y $\gamma(1) = x$.

Supongamos que existen dos puntos que satisfacen la propiedad enunciada en la afirmación del lema: $x, y \in Q$. Al ser Q un cubo, Q es convexo en X, entonces $[x, y] \subset Q$. El triángulo geodésico $\Delta(x, y, v)$ tiene por triángulo de comparación a $\bar{\Delta}$, siendo éste isósceles en $\mathbb{R}^2$. Si tomamos $z \in [x, y]$, la desigualdad $CAT(0)$ prueba que:

$$d(z, v) \leqslant d(\bar{z}, \bar{v}) < d(\bar{x}, \bar{v}) = d(x, v),$$

lo mismo ocurre si consideramos a y; esto contradice la elección de x y y, puesto que z está más cercano a v que ambos puntos.

Sea $[c, v]$ una geodésica uniendo al único punto $c \in Q$ cuya longitud es la distancia mínima de v a Q. Si c no es un vértice de Q, entonces c pertenece al interior de alguna cara de Q (estamos dotando a esta cara de la topología del subespacio de X), tomemos un lado e^0 en dicha cara. Nótese que e^0 no contiene a c.

En el párrafo anterior e^0 puede ser tomado como un vértice, esto ocurre cuando c pertenece al interior de un 1-cubo. En este caso el cubo Q^0 también puede ser elegido siguiendo dicho procedimiento.

Para cada $p \in \gamma$ elegimos un cubo mínimo (bajo la inclusión) $Q_p \subset X$ que lo contenga. A la familia de dichos Q_p lo denotaremos por $\square_\gamma$. Sea $Q_0 \in \square_\gamma$ el cubo que contiene al lado e^0, al segmento inicial de γ, y tal que es mínimo con esta propiedad. Este cubo contiene a la cara de Q a la cual pertenece c y tiene una estructura de espacio métrico producto: $e^0 \times$ (*cara de Q_0 de codimensión* 1), ambas componentes vistas como subespacios métricos de X. Puesto que γ minimiza la distancia de v a Q, y $\gamma \cap Q_0$ minimiza la distancia de $(\gamma \cap Q_0)(0)$ a la cara que contiene a c (reparametrizando $\gamma \cap Q_0$), entonces $\gamma \cap Q_0$ es perpendicular al eje determinado por e^0 puesto que es perpendicular a la cara que contiene a c; esto es debido a que Q_0 con la métrica producto definida en la página 31, tiene la propiedad de los segmentos perpendiculares a un plano y que comienzan en un punto dado, minimizan la distancia de dicho punto al plano en cuestión.

La estructura métrica producto en Q_0 induce por restricción una métrica producto en la cara que contiene a $(\gamma \cap Q_0)(0)$. Nótese que $(\gamma \cap Q_0)(0)$ está en el interior de dicha cara. Repitiendo el proceso para construir Q_0 sólo que ahora utilizando $(\gamma \cap Q_0)(0)$ en lugar de c y la cara que lo contiene, obtenemos Q_1, en donde $\gamma \cap Q_1$ tiene las mismas propiedades que $\gamma \cap Q_0$, solo que ahora respecto a un eje e^1. Después de un número finito de pasos logramos cubrir a γ con los cubos Q_m en donde $\gamma \cap Q_m$ es perpendicular a un eje e^m.

Tomemos Q_m y colapsemos los ejes coordenados distintos de e^m al origen en su estructura métrica producto. Al ser $\gamma \cap Q_m$ perpendicular a e^m, $\gamma \cap Q_m$ se reduce a un punto sobre el eje e^m. Ahora bien, al hacer el colapso anterior, e^m será un lado paralelo al eje e^{m-1} y luego, al repetir el colapso en Q^{m-1} obtenemos que $e^m \mapsto e^{m-1}$ y $\gamma \cap Q_{m-1}$ se colapsa a un punto en e^{m-1}. Al final obtenemos que

$$e^m \mapsto e^{m-1} \mapsto \cdots \mapsto e^0$$

y que γ se colapsa a un punto en e^0.

El procedimiento anterior de colapso nos proporciona una función celular $\bigcup_{0 \leqslant i \leqslant m} Q_i \to I$, donde I tiene la estructura celular compuesta de dos 0-células y una 1-célula. Al ser γ colapsado por dicha función a un punto interior en I, su punto inicial no es un vértice en $\bigcup_{0 \leqslant i \leqslant m} Q_i$, y por lo tanto dicho punto no es un vértice en X. Esto es una contradicción. $\square$

Comenzamos a construir a X como una unión de hojas. Fijemos un vértice $v \in X$ y un ordenamiento $v = v_1, v_2, v_3, ...$ de todos los vértices en X donde $i \leqslant j$ siempre que $d(v, v_i) \leqslant d(v, v_j)$. Denotemos por K_i a la unión de todas las hojas a través de v_i. Estudiaremos el tipo de homotopía de $K_1 \cup ... \cup K_n$ por inducción sobre n. Para esto fijamos $n > 1$, $w = v_n$ y $K = K_n \cap (K_1 \cup ... \cup K_{n-1})$.

Lema 4.2.4. *Sea $x \in X$ un vértice y K_x la unión de todas las hojas que contienen a x. Entonces K_x es un subconjunto convexo de X.*

Prueba. Dividimos la prueba en 5 pasos.

Formulación local de convexidad. Demostraremos que K_x es convexo en X verificando que cada geodésica en K_x es también una geodésica en X.

Note lo siguiente: Un segmento de geodésica que está totalmente contenida en un cubo en K_x será una geodésica local en X, puesto que los cubos que conforman a X son euclidianos y están adjuntados por isométrias; así que nos basta ver que ocurre cuando una geodésica pasa a través de un vértice de X o pasa de un cubo a otro por alguna de sus caras en común.

Tomemos una geodésica $\gamma \subset K_x$ que pasa a través de un vértice $v \in K_x$. Si γ no intersecta a $Lk^\circ(v, X)$ la longitud de la geodésica es menor que π y la unicidad de las geodésicas en los espacios $CAT(1)$ prueban el resultado. Si γ intersecta $Lk^\circ(v, X)$, sean γ_0 y γ_1 los puntos de intersección. Si queremos que la restricción de γ al segmento comprendido entre γ_0 y γ_1 sea una geodésica y entonces una geodésica local en X, debemos tener que $d(\gamma_0, \gamma_1) \geqslant \pi$ en $Lk^\circ(v, X)$, de lo contrario al ser éste $CAT(1)$, existiría una geodésica en dicho enlace de longitud menor que π uniendo ambos puntos. La condición en la distancia entre γ_0 y γ_1 se satisface si

$$Lk^\circ(v, K_x) \subset Lk^\circ(v, X)\; es\; \pi - convexo. \tag{4.2}$$

Utilizando el razonamiento anterior, si una geodésica intersecta a un cubo $Q \subset X$ en un sólo punto interior (si la geodésica pasa a través de una cara de un cubo a otro cubo contiguo, Q es la cara común a ambos la cual es atravesada por la geodésica), entonces ésta será una geodésica local en X dado que $Lk^\circ(Q, K_x) \subseteq Lk^\circ(Q, X)$[1] es π-convexo. Sea $y \in Q$ un vértice y σ_Q el simplejo de $Lk^\circ(y, X)$ determinado por Q. Hay una identificación natural de $Lk^\circ(Q, K_x)$

[1] El enlace esférico de una n-célula en un espacio celular X se define como el conjunto de vectores tangentes unitarios ortogonales a la n-célula en cualquier x en el interior relativo de dicha n-célula.

con $Lk^\circ(\sigma_Q, Lk^\circ(y, K_x))$, de igual manera $Lk^\circ(Q, X)$ puede ser identificado con $Lk^\circ(\sigma_Q, Lk^\circ(y, X))$, así la condición de convexidad viene a ser la siguiente:

$$Lk^{circ}(\sigma_Q, Lk(y, K_x)) \subset Lk^\circ(\sigma_Q, Lk(y, X))\ es\ \pi - convexo \tag{4.3}$$

para todos los cubos $Q \subset K_x$ y vértices $y \in Q$.

Dadas las modificaciones anteriores basta probar las condiciones 4.2 y 4.3 expuestas anteriormente.

Condición combinatoria para convexidad en complejos esféricos por piezas $\pi/2 - laterales$. En esta etapa probamos lo siguiente: si $M \subset N$ es un subcomplejo completo[2] de un complejo simplicial esférico por piezas π/2-lateral N, entonces M es π-convexo en N.

Tomemos $M \subset N$ completo y $a, b \in M$ tales que $d_N(a, b) < \pi$. Sean σ_a y σ_b los simplejos mínimos (bajo la inclusión) de N que contienen a a y b respectivamente. Es claro que tanto σ_a como σ_b están contenidos en M.

Puesto que el resultado es trivial cuando $a = b$, tomamos $a \neq b$; así que la colección de todos los simplejos σ que intersectan en sus interiores no trivialmente a la geodésica $[a, b]$ es no vacío. Probaremos en el siguiente párrafo que el conjunto de vértices de un simplejo σ en dicha familia está contenido en la unión de los conjuntos de vértices de σ_a y σ_b; por la completitud de M: $\sigma \subset M$, lo cual demuestra que $[a, b]$ está contenido en M, ya que la familia anterior de simplejos cubre a la geodésica.

Sea σ un simplejo de N cuyo interior intersecta a $[a, b]$ no trivialmente, y sea $v \in \sigma$ un vértice. $[a, b]$ intersecta la bola abierta con centro en v y radio $\pi/2$ ya que la distancia de todo vértice de σ a v es $\pi/2$ (N es complejo simplicial esférico $\pi/2$-lateral), lo cual indica que todo vértice de σ está en $B_N(v, \pi/2)$, esto implica que $int\ \sigma \subseteq B_N(v, \pi/2)$. Si $d_N(v, a) \geqslant \pi/2$ y $d_N(v, b) \geqslant \pi/2$ entonces $a, b \in N \backslash B_N(v, \pi/2)$ y luego el lema 3.2.10 implica que toda geodésica (en nuestro

[2]Un subcomplejo completo $M \subset N$ de un complejo simplicial N es aquél que dado un subconjunto de vértices en M que generan un simplejo en $\sigma \in N$ tendrá a σ como elemento.

caso única) $[a,b]$ mide por lo menos π; así que $d_N(v,a) < \pi/2$ o $d_N(v,b) < \pi/2$. Supongamos que $d_N(v,a) < \pi/2$. Si $d_N(v,a) = 0$, $v = a$ y por tanto σ_a es un vértice; claramente v está en la unión de los vertices de σ_a y σ_b. Si $v \neq a$, a es elemento del interior de un simplejo que tiene por vértice a v y por esta razón dicho simplejo es el mínimo en N que contiene a a, por lo tanto v es un vértice de σ_a.

Reducción a vértices de K_x. El paso anterior dice que en vez de probar 4.2 y 4.3 debemos probar que:

$$Lk^{\circ}(v, K_x) \text{ } es\ un\ subcomplejo\ completo\ de\ Lk^{\circ}(v, X) \tag{4.4}$$

para todo vértice $v \in K_x$ y

$$Lk^{\circ}(\sigma_Q, Lk^{\circ}(y, K_x)) \text{ } es\ un\ subcomplejo\ completo\ de\ Lk^{\circ}(\sigma_Q, Lk^{\circ}(y, X)) \tag{4.5}$$

para todo cubo $Q \subset K_x$ y todo vértice $y \in Q$.

Notemos el siguiente hecho claro de la definición de enlace simplicial: si M es un subcomplejo completo de un complejo simplicial N y $\sigma \subset M$ es un simplejo, entonces $Lk^{\circ}(\sigma, M)$ es un subcomplejo completo de $Lk^{\circ}(\sigma, N)$. Por lo tanto 4.5 sigue de 4.4, así que nuestra atención estará en probar 4.4.

Reducción a enlaces descendentes. Nótese que si M es un subcomplejo completo de un complejo simplicial N, y si $S(M)$ y $S(N)$ son los complejos esféricos asociados a M y N respectivamente, entonces $S(M)$ es un subcomplejo completo esférico de $S(N)$. Por esta razón 4.4 se obtiene a partir de:

$$Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, K_x) \text{ } es\ un\ subcomplejo\ completo\ de\ Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, X) = L \tag{4.6}$$

para cada vértice $v \in K_x$; porque $S(Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, K_x))$ y $S(Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, X))$ son homeomorfos a $Lk^{\circ}(v, K_x)$ y $Lk^{\circ}(v, X)$ respectivamente.

Prueba de 4.6. Tomemos un vértice $v \in K_x$. Si $v = x$ entonces por la construcción de K_x: $Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, K_x) = Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, X)$, siendo el lado derecho de la ecuación un conjunto π-convexo, esto implica que 4.6 se cumple. Asumimos que $v \neq x$.

La geodésica $[x, v]$ intersecta a $Lk^{\circ}(v, X)$ en un sólo punto p. A este punto p le asociamos un punto que volveremos a denotar p en L asignado por la retracción natural $r_v : Lk^{\circ}(v, X) \rightarrow Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, X)$. Puesto que K_x es una unión de hojas, las cuales son espacios geodésicos, y dado que existe una hoja que contiene a x y v en K_x, vemos que $p \in Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, K_x)$; de hecho $Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, K_x)$ es la unión de todos aquellos simplejos en L que contienen a p, así que la estructura simplicial inducida por la función de Morse en $Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, K_x)$ se puede describir como: un simplejo $\tau \in Lk_{\downarrow}(y, K_x)$ si y solo si existe un simplejo $\sigma \in L$ tal que contiene a τ y a p.

Sea σ_p el simplejo mínimo de L que contiene a p, entonces es claro que σ_p es una cara de todo aquel simplejo que contenga a p, en particular, si $y \in Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, K_x)$ es un vértice, $y \in \sigma_p$ o $y \cup \sigma_p$ genera un simplejo, así que si tomamos una colección de vértices en $Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, K_x)$, $\{v_1, ..., v_j\}$, los cuales generan un simplejo $\sigma \subset L$, entonces $\{v_1, ..., v_j\} \cup \sigma_p$ genera un simplejo de $Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, K_x)$; por lo tanto $\sigma \subset Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, K_x)$, lo cual prueba que $Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, K_x)$ es completo en L. □

Lema 4.2.5. *Sea $K = K_n \cap (K_1 \cup \cdots \cup K_{n-1})$ tal como se describió anteriormente. Entonces K es la unión de aquellas hojas que contienen a w y al menos una v_j, con $j < n$.*

Prueba. Es claro que la unión está contenida en K, así que sólo debemos probar que K está contenido en la unión mencionada, esto es: dado $x \in K$, existe una hoja $S \subset X$ por w el cual contiene alguna v_i $(j < n)$ y contiene a x.

Supondremos primero que x es un vértice. El hecho de que $x \in K$ implica que $x \in K_n \cap K_i$ para alguna $i < n$. Así que $v_i, v_n \in K_x$.

El lema 4.2.4 demuestra que $K_x \subseteq X$ es convexo y por tanto esta contiene a la geodésica $[v_i, w]$. Denotemos por Q al cubo mínimo que contiene a w y al segmento final de la geodésica $[v_i, w]$. Por la condición de minimalidad, $Q \subset K_x$ y así Q vive en una hoja S que pasa por x. Afirmamos que uno de los vértices de Q está en el conjunto $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$. Así la hoja S contiene a x, w y alguna v_j como era requerido. Para probar la afirmación anterior notemos que el orden dado sobre el conjunto de vértices de X implica que la geodésica $[v_1, v_i]$ no tiene una longitud mayor que la de $[v_1, w]$, y así la desigualdad $CAT(0)$ implica que la distancia de v_1 a algún punto interior de $[v_i, w]$ es estrictamente más pequeña que $d(v_1, w)$ (esto se ve a partir del triángulo geodésico $\Delta(v_1, v_i, w)$). En particular esto se cumple para los puntos en Q que viven en el interior de $[v_i, w]$, por esta razón $w \in Q$ no es el punto más cercano a v_1 en Q, y así el lema 4.2.3 asegura que uno de los otros vértices de Q es v_j, para alguna $j < n$.

Si ahora $x \in K$ no es un vértice, existe una hoja $S' \subset K_n \cap K_i$ para alguna $i < n$. Sabemos que cada vértice de S' está contenido en una hoja que pasa a través de w y alguna v_j ($j < n$) (probado en el caso anterior). Puesto que sólo hay un número finito de hojas pasando a través de w (ya que X cubre a un complejo un CCEP finito), existe una hoja S que contiene un subconjunto máximo y en posición general del conjunto de vértices de S', y al ser ambos hojas, S debe contener a todos los vértices de S'. Esto finaliza la prueba. □

El último lema que a continuación probamos estudia el comportamiento del enlace de w en K.

Lema 4.2.6. *$Lk^\circ_\downarrow(w, K) \cong Lk^\circ_\uparrow(w, K)$ es contraíble.*

Prueba. Sea $a \in Lk^\circ(w, X)$ el punto determinado por la geodésica $[w, v]$ y sea $b = r_w(a) \in Lk^\circ_\downarrow(w, X)$, donde r_w es la retracción descrita en la página 42. Sea σ el simplejo más pequeño en $Lk^\circ_\downarrow(w, X)$ que contiene a b.

Sea $\mathcal{T}$ la colección de simplejos $\tau \in L$ (ver 4.6 en el lema anterior) tal que la hoja por w correspondiendo a τ contiene a uno de los $v_i (i \leqslant n-1)$. La simetría central que hay en el enlace esférico de w, y el lema anterior prueban que $Lk_\uparrow(w, K)$ y $Lk_\downarrow$ son isomorfos al complejo simplicial determinado por $\mathcal{T}$.

Cualquier cara de σ está en $\mathcal{T}$. Sea S_0 una hoja por w tal que $Lk^\circ_\downarrow(w, S_0) = \sigma$. Puesto que $r_w^{-1}[(Lk^\circ_\downarrow)(w, S_0)] = Lk^\circ(w, S_0)$, $a \in Lk^\circ(w, S_0)$. Sea Q el más pequeño cubo que contiene a w y tal que $a \in Lk^\circ(w, Q)$. Por la minimalidad de Q y puesto que S_0 es una hoja en donde tenemos una estructura cúbica deducimos que $Q \subset S_0$, por esta razón: $r_w(Lk(w,Q)) \subseteq \sigma = Lk(w,S_0) = Lk^\circ_\downarrow(w,S_0) = \sigma$, por otra parte la minimalidad en la elección de σ garantiza que está contenida en $r_w(Lk(w,Q))$.

A continuación demostraremos que todo vértice de Q que tenga una distancia unitaria al vértice w está en la colección $\{v_1,...,v_{n-1}\}$. Esto implicará que σ y cualquier cara de ella está en $\mathcal{T}$.

Sea $v' \in Q$ un vértice el cual dista una unidad de w. El ángulo definido en w por las geodésicas $[w,v]$ y $[w,v']$ es menor que $\pi/2$, ya que $a \in Lk^\circ(w,Q)$ y v' al ser un vértice distando uno de w también está en dicho enlace, en donde las distancias entre dos de sus puntos son a lo mas $\pi/2$ y son exactamente $\pi/2$ cuando ambos son vértices, lo cual no es el caso. Por lo tanto la distancia entre v y un punto cercano a w en $[w,v']$ es menor que $d(v,w)$, entonces

$$d(v,v') = d(v,[w,v']) < d(v,w)$$

y por la definición de los v_i, v' debe ser uno de ellos.

$\mathcal{T} = \{\tau \text{ } un \text{ } simplejo \text{ } de \text{ } L: \tau \cap \sigma \neq \emptyset\}$. Sea $\tau \in \mathcal{T}$ y S la correspondiente hoja en K descrita en el segundo párrafo de esta demostración. Entonces S contiene a v_i para alguna $i < n$. En el triángulo geodésico $\Delta(w,v,v_i)$, el ordenamiento en los vértices garantiza que $d(v,w) \geqslant d(v,v_i)$, y también que $d(v,w) \geqslant d(w,v_i)$, lo que dice que en su triángulo de comparación el ángulo con vértice en $\bar{w}$ no es recto, puesto que dicho vértice tiene por lado opuesto al segmento con extremos $\bar{v}, \bar{v}_i$. De esto se sigue que existe un punto en $Lk^\circ_\downarrow(w,S)$ contiene un punto a distancia menor que $\pi/2$ del punto a. Luego

$$\tau = LK^\circ_\downarrow(w,S) = r_w(Lk(w,S))$$

contiene un punto a distancia menor que $\pi/2$ de $b = r_w(a)$. Así, la proposición 3.2.9(2) asegura que $\tau \cap \sigma \neq \emptyset$. Esto prueba la contención $' \subseteq'$.

Primero la siguiente observación: si $S_1 \subseteq S_2$ son hojas y $Lk^\circ_\downarrow(w,S_1) \subseteq \mathcal{T}$, entonces $Lk^\circ_\downarrow(w,S_2) \subseteq \mathcal{T}$; esta observación es inmediata porque todo simplejo en el segundo enlace tiene un lado en $Lk^{\circ}_{\downarrow}(w, S_1)$. En particular, si un vértice de un simplejo $\tau \in L$ está en $\mathcal{T}$, entonces $\tau \in \mathcal{T}$. Si además suponemos que $\tau \cap \sigma \neq \emptyset$, ya que ambos son simplejos de L, estos se intersectarán en una cara, lo cual implica que τ contiene por lo menos un vértice de σ. Por otro lado la afirmación 1 garantiza que todos los vértices de σ están en $\mathcal{T}$, por lo tanto $\tau \in \mathcal{T}$. Esto prueba '$\supseteq$'.

Esta última afirmación prueba que $\mathcal{T}$ es realmente $St'(\sigma, L)$, donde L satisface las hipótesis de la proposición 3.2.9, y por (1) en esa misma proposición, $St'(\sigma, L)$ es contraíble. □

Ahora si estamos en condiciones de probar el teorema 4.2.1 enunciado al principio de esta sección.

Prueba del teorema 4.2.1. Definimos una sucesión creciente de conjuntos X_n:

$$X_n = X_J \cap (K_1 \cup \cdots \cup K_n) = X_{n-1} \cup (X_J \cap K_n).$$

La expresión de arriba de X_n y una sucesión de operaciones conjuntistas prueban que

$$X_{n-1} \cap (X_J \cap K_n) = X_J \cap (K_n \cap (K_1 \cup \cdots \cup K_{n-1})).$$

Por el lema 4.2.5 $K_n \cap (K_1 \cup \cdots \cup K_{n-1})$ es una unión de hojas que contienen a $w = v_n$, entonces el lema 4.2.2 inciso (3) y el lema 4.2.6 prueban que $X_{n-1} \cap (X_J \cap K_n)$ es contraíble.

Nuevamente el lema 4.2.6 en su inciso (3) implica que $X_J \cap K_n$ será contraíble si $v_n \in X_J$. Ahora podemos afirmar que el tipo de homotopía de X_n es el del espacio que se obtiene por el producto cuña de tantos L como vértices v_i, $i \leqslant n$ que no estén en X_J. Esta afirmación la probamos por inducción. Si $n = 1$, $X_1 = X_J \cap K_1$ y además suponemos que $v_1 \notin X_J$, entonces por el lema 4.2.6 inciso (3), tendremos que $X_1 = X_J \cap K_1$ es homotópicamente equivalente a $L = Lk^{\circ}_{\downarrow}(v_1, K_1)$, éste último siendo un producto cuña de L una vez consigo mismo. Si suponemos que la afirmación es cierta para $k < n$ y la probamos para $k = n$ tenemos que $X_n = X_{n-1} \cup (X_J \cap K_n)$;

entonces, si $v_n \in X_J$ el tipo de homotopía de X_n es el tipo de homotopía de X_{n-1} puesto que $X_J \cap K_n$ es contraíble, y por hipótesis inductiva tenemos probada la afirmación. Si por el contrario $v_n \notin X_J$, el paso base terminará la demostración puesto que ya tenemos que X_{n-1} es homotópicamente equivalente a un producto cuña de L, y basta añadir una copia más de L a dicho producto cuña para probar este nuevo espacio es homotópicamente equivalente a X_J.

$X_J = \bigcup X_n$, por lo tanto este es el límite directo del sistema directo $(X_n, \hookrightarrow)$, donde $X_{n-1} \hookrightarrow X_n$ son inclusiones, las cuales respetan la estructura cuña. Con esto finalizamos la prueba. $\square$

Capítulo 5

El Teorema de Bestvina-Brady

Este último capítulo está dedicado en su primera sección a organizar los resultados expuestos de tal manera que el teorema principal queda demostrado. La segunda sección tiene por objetivo desarrollar ejemplos e introducirnos en aquellos artículos en los cuales el teorema juega un papel importante.

5.1. El Teorema de Bestvina-Brady

Iniciamos esta sección haciendo una observación que nos permitirá usar de manera indistinta las propiedades enunciadas sobre los enlaces simpliciales y sobre los enlaces esféricos.

Según la proposición 3.3.4(1) el cubriente de Q_L, X, está cubierto por hojas que como sabemos son isométricamente homeomorfas a un espacio euclidiano. Por tanto, si tomamos un vértice $w \in X$, w es vértice de un n-cubo máximo $\square_w$. En este n-cubo, independientemente de la triangulación que se le haya dado, tenemos el homeomorfismo

$$Lk(w, \square_w) \approx Lk^{\circ}(w, \square_w).$$

Este heomorfismo se ve de a partir de que el enlace simplicial (mejor dicho: la realización geométrica de la unión de los simplejos en $Lk(w, \square_w)$) de un vértice en

$\square_w$, es homeomorfo a un $(n-1)$-simplejo realizado y dado que $Lk^{\circ}(w, \square_w)$ también lo es. Esto ocurre en cada cubo que contenga a w; así que los homeomorfismos existentes en cada cubo inducen un homeomorfismo entre $Lk(w, X)$ y $Lk^{\circ}(w, X)$, por lo tanto, las propiedades topológicas de uno se transmiten a otro.

Hecha la observación entramos a la prueba del teorema.

Teorema 5.1.1. *Sea L un complejo bandera finito, G_L su $\pi/2$-grupo de Artin asociado y $\phi : G_L \to \mathbb{Z}$ el homomorfismo con núcleo H_L como el estudiado en el teorema 3.2.11. Calculamos la homología con coeficientes en un anillo R con $0 \neq 1$.*

(1) $H_L \in FP_{n+1}(R)$ si y sólo si L es homológicamente n-conexo.

(2) $H_L \in FP(R)$ si y sólo si L es acíclico.

(3) H_L es finitamente presentado si y sólo si L es simplemente conexo.

***Prueba de (1)**.* $(\Rightarrow)$ Supongamos que L no es homológicamente n-conexo, es decir, $\tilde{H}_i(L, R) = 0$ para $0 \leqslant i \leqslant n-1$ y $\tilde{H}_n(L, R) \neq 0$. Si tomamos $t \in \mathbb{R}$, puesto que f envía una 1-hoja ℓ de manera suprayectiva en $\mathbb{R}$ de manera que un vértice $v \in \ell$ es asignado a un entero, el cardinal del conjunto de vértices que no están en X_t es infinito; lo cual implica que -usando el isomorfismo expuesto en el corolario 4.1.2(2) -$\tilde{H}_n(X_t)$ no es finitamente generado como RH_L-módulo, y dado que H_L actúa libre, propia, celular, y cocompactamente en X_t tendremos que $H_L \notin FP_{n+1}(R)$ por el lema 2.1.9.

$(\Leftarrow)$ El teorema 3.2.11(4) garantiza que los enlaces simpliciales $\uparrow -$ y $\downarrow -$ son isomorfos a L. Si L es homológicamente n-conexo, el teorema 2.2.2(1) prueba que $H_L \in FH_{n+1}(R)$, entonces $H_L \in FP_{n+1}(R)$.

$\square$

***Prueba de (2)**.* $(\Rightarrow)$ Si L no es R-acíclico y n el menor entero tal que $\tilde{H}_n(L, R) \neq 0$, entonces la prueba de la suficiencia de (1), dice que $H_L \notin FP_{n+1}(R)$, es decir, $H_L \notin FP_\infty(R)$.

Sea G un grupo. La *dimensión cohomológica de* G, denotado por $cd\,G$ es el entero más pequeño m tal que $dim\ proy_{RG}R \leqslant m$ (ver página 14).

En [6, pág.199] se prueba que $G \in FP$ *si y sólo si* $cd\,G < \infty$ y $G \in FP_\infty(R)$. Al no cumplirse la segunda condición se concluye que H_L no es FP.

($\Leftarrow$) El teorema 3.2.11(4) garantiza que los enlaces simpliciales $\uparrow -$ y $\downarrow -$ son isomorfos a L. Si L es acíclico, el teorema 2.2.2(2) prueba que $H_L \in FH(R)$, entonces $H_L \in FP(R)$.

$\square$

Prueba de (3). ($\Rightarrow$) Tenemos que analizar dos casos: L conexo o no.

Si L no es conexo el inciso (1) de éste mismo teorema afirma que $H_L \notin FP_0$, lo cual implica que $H_L \notin FH_0$. Ya habíamos observado que un grupo G es de tipo FH_0 si y sólo si G es finitamente generado, entonces H_L no es finitamente generado y consecuentemente H_L no es finitamente presentado.

Si L es conexo pero no simplemente conexo, entonces $\pi_1(X_t)$ es isomorfo al producto libre de los grupos $\pi_1(L)$, uno para cada vértice de X que no esté en X_t. Si suponemos que H_L es finitamente presentado, entonces la proposición 2.1.12 implica que $\pi_1(X_t)$ es generado por H_L-translaciones de una cantidad finita de lazos. Puesto que X es contraíble, cada uno de estos lazos son homotópicamente nulos en X. Como son una cantidad finita de lazos y para anularlos se necesitan añadir a X_t una cantidad finita de 2-células, existe $T \in \mathbb{R}$ tal que en $X_{[t-T,t+T]}$ también son homotópicamente nulos. La acción de H_L en los conjuntos de nivel garantiza que un lazo en $X_{[t-T,t+T]}$ es enviado bajo la acción de H_L a un lazos en él mismo, esto implica que las H_L órbitas son homotópicamente nulas $X_{[t-T,t+T]}$, entoncces la inclusión $X_t \hookrightarrow X_{[t-T,t+T]}$ induce un homomorfismo trivial en grupos fundamentales. Por otro lado el corolario 1.2.4(3) afirma que esta inclusión es induce en realidad un epimorfismo en grupos fundamentales, por tanto $X_{[t-T,t+T]}$ es simplemente conexo, lo cual contradice el teorema 4.2.1.

($\Leftarrow$) El teorema 3.2.11(4) prueba que los enlaces simpliciales $\uparrow -$ y $\downarrow -$ son isomorfos a L. Si L es simplemente conexo, el teorema 2.2.2(3) prueba que H_L es finitamente presentado.

□

5.2. Eilenberg-Ganea vs Whitehead

Vamos a analizar algunos ejemplos, empezamos por los mas sencillos, posteriormente se enunciará un teorema en el cual el teorema de Bestvina-Brady es determinante en decidir la veracidad o falsedad de un par de conjeturas. Y concluímos dando una paseo a través de algunos artículos en los cuales éste teorema es útil.

Ejemplo 5.2.1. Sea $L = S^n$ y sea R un anillo conmutativo con $1 \neq 0$. S^n es triangulable de tal manera que como simplejo abstracto es isomorfo (y geométricamente son homeomorfos) a un complejo simplicial de cuya realización geométrica es un polihédro regular convexo de $2n$ caras en $\mathbb{R}^{n+1}$, siendo estas caras de dimensión n. Por lo tanto el ejemplo 3.2.4 demuestra que G_L es F_2^{n+1}. El teorema afirma entonces que H_L es $FP_n(R)$ pero no $FP_{n+1}(R)$.

Ejemplo 5.2.2. Sea L un complejo bandera finito R-acíclico no simplemente conexo. El teorema 2.2.2(2) testifica que $H_L \in FH$, pero (3) del teorema principal dice que H_L no es finitamente generado, por lo tanto $H \notin F$. Ahora si tomamos L como homológicamente n-conexo no simplemente conexo, $n \leqslant 1$, entonces nuevamente 2.2.2(1) garantiza que $H_L \in FH_{n+1}$, pero $H \notin F_n$.

El ejemplo que sigue tiene una importancia mayor que el anterior, ya que proporciona una familia de contraejemplos para uno u otro par de conjeturas. Así que antes de analizar el ejemplo enunciamos las dos conjeturas que están en juego.

(1) ***La conjetura de Whitehead (1941).*** Cualquier subcomplejo conexo de un CW-complejo asférico de dimensión dos es asférico.

(2) ***La conjetura de Eilenberg-Ganea (1957).*** Si un grupo G es tal que $cd\,G = 2$, entonces éste tiene un espacio de Eilenberg-MacLane $K(G,1)$ de dimensión 2.

Para $n > 2$ se sabe que un grupo G de dimensión cohomológica n tiene un espacio n-dimensional de Eilenberg-MacLane. También se conoce que un grupo de dimensión cohomológica 2 tiene un espacio 3-dimensional de Eilenberg-MacLane.

Ejemplo 5.2.3. Si L es un complejo bandera de dimensión 2, acíclico y no simplemente conexo, el teorema de Bestvina-Brady garantiza que $H_L \in FP(R)$ pero no es finitamente presentado.

Al ser H_L no trivial, $cd\,H_L > 0$ y luego

$$0 < cd\,H_L$$

Ahora bien, si L es un complejo bandera de dimensión 2, entonces Q_L es un CCEP de dimensión 3, lo cual implica que su cubriente universal $\tilde{Q}_L$ es un CCEP de dimensión 3; entonces el conjunto de nivel $\tilde{Q}_{L_t}$ para la función de Morse f (dicha función ya sabemos que existe) tiene dimensión 2 y H_L actúa de buena manera en él. De esto obtenemos la sucesión exacta de R-módulos libres

$$\cdots 0 \to 0 \to C_2(\tilde{Q}_{L_t};R) \to C_1(\tilde{Q}_{L_t};R) \to C_0(\tilde{Q}_{L_t};R) \to R \to 0$$

el cual dada la acción de H_L en $\tilde{Q}_{L_t}$ se convierte en un complejo de RH_L-módulos, dicho complejo es exacto puesto que $\tilde{Q}_{L_t}$ es R-acíclico ya que L es R-acíclico (usando el isomorfismo del corolario 4.1.2). Por tanto $cd\,H_L \leqslant 2$. Como H_L no es libre (si lo fuera sería finitamente presentado) entonces $cd\,H_L \neq 1$ (ver [19] y [20], donde queda demostrado que un grupo es libre si y sólo si su dimensión cohomológica es 1), por tanto la única posibilidad es que $cd\,H_L = 2$. Al preguntarnos si existe un espacio de Eilenberg-MacLane de dimensión 2 para H_L, tendremos una familia de contraejemplos para la conjetura de Eilenberg-Ganea.

Una 3-variedad compacta X la cual satisface que $H^0(X) = H^3(X) = \mathbb{Z}$ y $H^i(X) = 0$ para todo $i \neq 0, n$, es llamada una *esfera homológica de Poincarè*. Una primer resultado es que X es conexo. Existen varias formas de obtener una esfera homológica de Poincaré, pero de entre todas ellas consideramos solamente aquella que se obtiene como el espacio cociente de un dodecahédro (para consultar esta construcción véase en internet un árticulo de R.C. Kirby titulado *Eight Faces of the Poincarè Homology 3-Sphere*). Al considerar esta construcción obtenemos que $\pi_1(X) \cong A_5$.

Definición 5.2.1. *Sea X una 3-variedad con frontera. Una 2-espina P es un poliedro de dimensión 2 encajado en X tal que P es un retracto fuerte por deformación de X.*

Un teorema de existencia de espinas en una 3-variedad con determinadas condiciones es dada por B.G. Casler en [7]. Lo reproducimos a continuación.

Teorema 5.2.2. *Si X es una 3-variedad conexa compacta y con frontera, entonces existe una 2-espina P en X.*

Dado un vértice $v \in X$, X un CCEP, hemos identificado L con $Lk^{\circ}_{\downarrow}(v, X)$ y también hemos probado que cada punto $x \in L$ determina una geodésica única que pasa a través de v y que además está en K_v, donde K_v es la una unión de una colección de hojas conteniendo a v. Llamaremos a esta geodésica g_x.

Definición 5.2.3. *Sea X un CCEP, $f : X \to \mathbb{R}$ un función de Morse, $t \in \mathbb{R}$ y $v \in X$ un vértice tal que $f(v) > t$. Si $M \subseteq L$ es un subcomplejo de L definimos la sombra de M en X_t como el conjunto*

$$S_{v,M} = \bigcup \{g_x : x \in M\} \cap X_t.$$

Lo primero que observamos es que si $M = L$ la función simplicial definida para cada simplejo $\sigma \in L$, induce la inclusión $S_{v,\sigma} \subseteq S_{v,L}$, lo cual prueba que L es homeomorfo a $S_{v,L}$.

En general, a cada 2-simplejo lo podemos dotar de una métrica en la cual su triángulo de comparación sea equilátero. En particular, si X es un CCEP, L tiene una estructura de complejo simplicial de dimensión dos y podemos hacer cada 2-simplejo en él equilátero. Si tomamos a L y hacemos el procedimiento anterior con sus 2-simplejos teniendo éstos lados de longitud $|f(v) - t|$ y posteriormente definimos la métrica global en L como la métrica inducida por las trayectorias (véase la ecuación 3.3), hacemos al homeomorfismo existente entre L y $S_{v,L}$ una casi isometría[1], cuyas constantes son independientes de $|f(v) - t|$. Esta última afirmación es verdadera si $S_{v,L}$ hereda la métrica de K_v, ya que las constantes de la casi isometría están acotadas por múltiplos de la cardinalidad de el 1-esqueleto de L; al ser K_v convexo en X, obtenemos la misma desigualdad de la casi isométrica para $S_{v,L}$ como subconjunto de X.

El siguiente teorema es el más famoso de entre los resultados que ofrece el Teorema de Bestvina-Brady. El teorema discrimina entre dos conjeturas famosas en cuanto a su veracidad.

Teorema 5.2.4. *Sea L una triangulación bandera de una 2-espina de una esfera homológica de Poincarè. Entonces H_L es un contraejemplo a la conjetura de Eilenberg-Ganea o existe un contraejemplo a la conjetura de Whitehead.*

Prueba. Puesto que H_L tiene dimensión cohomológica 2 y $cd\ H_L \leqslant gd\ H_L$, si

[1]Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Una función $f : X_1 \to X_2$ es una (λ, ϵ)-encajamiento casi isométrico si existen constantes $\lambda \geqslant 1$ y $\epsilon \geqslant 0$ tal que para todo $x, y \in X_1$

$$(1/\lambda)d_1(x, y) - \epsilon \leqslant d_2(f(x), f(y)) \leqslant \lambda d_1(x, y) + \epsilon.$$

Si además existe una constante $C \geqslant 0$ tal que cualquier punto en X_2 vive en una vecindad de radio C de la imagen de f, entonces decimos que f es una (λ, ϵ)-casi isometría. Si existe una de tales casi isometrías decimos que X_1 y X_2 son casi isométricos.

suponemos que $gd\ H_L \neq 2$ entonces $H_L \notin F_2$, lo cual indica que la conjetura de Eilenberg-Ganea es falsa.

Si $gd\ H_L = 2$ consideremos el cubriente universal del espacio X que garantiza que $H_L \in F_2$. Utilizando la función proyección de $\tilde{X}$ en X definimos una función PL H_L-equivariante que va de $X_t^{(0)}$ en $\tilde{X}^{(0)}$, al ser $\tilde{X}$ contraíble podemos extender dicha función entre 0-esqueletos a una PL $\phi : X_t \to \tilde{X}$ la cual es H_L-equivariante.

Si metrizamos X_t y $\phi(X_t)$ por métricas definidas por la trayectoria mínima entre dos de sus puntos y que además dichas métricas sean H_L-equivariantes, tendremos que X_t y $\phi(X_t)$ son casi isométricos; así, los puntos preimágenes de ϕ tienen un diamétro acotado por las constantes de la casi isometría. Denotamos la restricción de ϕ a la sombra de L en X_t para el vértice v como ϕ_v (es decir $\phi_v := \phi|_{S_{v,L}}$).

La independencia de las constantes de la casi isometría y $|f(v) - t|$ nos permite elegir un vértice w tal que al compararlos éste último sea grande.

Dado $x \in S_{x,L}$ la geodésica g_x determina un único simplejo $\sigma \subset L$. Entonces $\phi_w^{-1}(\phi_w(x)) \subset S_{w,St'(\sigma,L)}$, siendo el último conjunto contraíble por la proposición 3.2.9. Para vértices v con $|f(v) - t|$ bastante grande podemos definir una inversa homotópica izquierda a ϕ_v tomando cada vértice de $\phi_v(S_{v,L})$ a un punto de su ϕ-preimagen y entonces extendiendola sobre su esqueleto.

Así la sombra $S_{v,L}$ es un retracto homotópico de $\phi_v(S_{v,L})$ y por lo tanto tenemos que:

$$\pi_2(\phi_v(S_{v,L})) \supset \phi_2(S_{v,L}) = \pi_2(L) = \pi_2(\tilde{L}) = H_2(S^3 - \{120\ puntos\}) \neq 0.$$

La última igualdad se tiene del hecho de que L es una 2-espina de la 3-esfera homológica de Poincarè. Si incluímos el complejo conexo $\phi_v(S_{v,L})$ en $\tilde{X}$, tenemos un contraejemplo a la conjetura de Whitehead. $\square$

5.3. Conclusiones

El núcleo del epimorfismo ϕ que tanto nos fue útil y que fue denotado por H_L, recibe el nombre de *Grupo de Bestvina-Brady o Núcleo de Artin*. Éstos grupos tienen sus principales aplicaciones en la *Teoría Geométrica de Grupos*.

Al exhibir un grupo de tipo FP pero no finitamente presentado, los autores del teorema principal no dieron una presentación explícita de H_L. Este detalle fue abordado en un documento titulado *Presentations for Subgroups of Artin Groups* por los doctores Warren Dicks e Ian J. Leary. El estudio de la presentación de los grupos de Bestvina-Brady produce, bajo un trío de hipótesis sobre L, un grupo finitamente presentado pero no de tipo FP.

Es claro del estudio que hemos hecho que la aplicación primaria del teorema principal es la búsqueda de contraejemplos a propiedades de finitud de grupos, sin embargo, la investigación actual se concentra en determinar invariantes de H_L, para un complejo bandera finito L.

Apéndice A

Estructuras Celulares

El apéndice A tiene por objetivo recordar como se definen los espacios CW-complejos, así como sus principales propiedades topológicas. También se definen y analizan las células polihédricas convexas en los espacios euclidianos. En general, en el texto principal no se hace referencia directa a este apéndice, pero su contenido es indispensable para entender los puntos finos de las demostraciones del primer capítulo.

Complejos CW

Sea X un espacio topológico arbitrario y $D^n \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, el disco unitario de dimensión n. Si $e \subset X$ es homeomorfo a $int(D^n)$, entonces e será llamado *n-célula o n-célula abierta* en X. Una *n-célula cerrada en X* es la cerradura en X de una n-célula en X.

Sea $n \in \mathbb{N}$, Y una suma topológica de n-discos, A un espacio topológico, y $f : Y \to A$ una función continua cuyo dominio es la unión de las fronteras de los n-discos que forman Y -es decir, la unión de copias de S^{n-1}-. Si $X = A \bigsqcup_f Y$, entonces el par (X, A) se denomina una *adjunción de n-células*. Para cada D^n que conforma Y, f induce por restricción una función llamada *función característica*.

La restricción de una función característica a la frontera de su dominio -S^{n-1}-, es llamada *función atante* (o función de adjunción).

Una *filtración* de un espacio X es una sucesión finita o infinita $\{X^n : n = 0, 1, ...\}$ de subespacios cerrados de X los cuales cubren X y tales que X^{n-1} es un subespacios de X^n para $n = 1, 2, ...$

Una *estructura CW* para un espacio X es una filtración de X tal que

(1) X^0 es un espacio discreto

(2) para cualquier $n \geqslant 0$ el par (X^n, X^{n-1}) es una adjunción de n-células y

(3) X está determinado por la familia de subespacios $\{X^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Un *complejo CW* es un espacio dotado de una estructura CW.

Observación A.0.1. Todo complejo CW X se puede ver como la unión disjunta de las i-células abiertas que lo conforman, esto lo escribimos de la siguiente manera: para cada $i \geqslant 0$ sea Δ_i un conjunto de índices, si $\Delta_i \neq \emptyset$ y $\lambda \in \Delta_i$, sea $e^i_\lambda \subset X$ la λ-ésima i-célula, entonces

$$X = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} \bigsqcup_{\lambda\in\Delta_i} e^i_\lambda$$

Si $\Delta_i = \emptyset$, entendemos que no hay i-células en X, y por lo tanto $\bigsqcup_{\lambda\in\Delta_i} e^i_\lambda = \emptyset$.

Polihédros

Comenzamos esta sección dando información combinatoria para después interpretar esta geométricamente.

Un *complejo simplicial* K consiste de un conjunto de vértices $V(K)$ y un conjunto $\{s\}$ de subconjuntos no vacíos de $V(K)$ llamados *simplejos* tales que

(a) Cualquier conjunto que consiste de exactamente un vértice es un simplejo.

(b) Cualquier subconjunto no vacío de un simplejo es un simplejo.

Un simplejo s conteniendo exactamente $q+1$ vértices es llamado un q-simplejo, en este caso también diremos que la *dimensión de s* es q, esto lo denotamos por *dim* s=q. Si $s' \subset s$, entonces s' es llamada una *cara de s* (una *cara propia* si $s' \neq s$) y si s' es un p-simplejo, entonces diremos que s' es una p-cara de s. La *dimensión* de un complejo simplicial K —escribimos esto como *dim* K— se define como -1 si K es vacío, y como $sup\ \{dim\ s | s \in K\}$.

Un subconjunto L de un complejo simplicial K es un *subcomplejo* si éste es un complejo simplicial en sí mismo. Listamos a continuación definiciones que se utilizan en el cuerpo de la tesis.

Definición A.0.1. Sea K un complejo simplicial y σ un simplejo de éste. El subcomplejo de K consistiendo de todos los simplejos que contienen a una cara de σ será llamado la estrella de σ. Este subcomplejo será denotado por $St'(\sigma, K)$.

Definición A.0.2. Sea K un complejo simplicial y σ un simplejo de éste. El subcomplejo de K consistiendo de todos los simplejos que contienen a σ será llamado la estrella cerrada de σ. Este subcomplejo será denotado por $St(\sigma, K)$.

Definición A.0.3. Sea K un complejo simplicial y s un simplejo de K. El enlace de s es el subcomplejo simplicial de K, denotado por $Lk(s, K)$ y definido por

$$Lk(s, K) := \{t \in K | t \cap s = \emptyset\ y\ t \cup s \in K\}$$

A continuación vamos a nombrar a un tipo de funciones que van de un complejo simplicial K_1 al conjunto potencia del conjunto de vértices de otro complejo simplicial K_2.

Definición A.0.4. Sean K_1 y K_2 complejos simpliciales. Una función simplicial $\phi : K_1 \to K_2$ es una función del conjunto de vértices de K_1 al conjunto de vértices de K_2, tal que, si $s \in K_1$ entonces $\phi(s) \in K_2$.

Una *célula convexa* P es un subconjunto no vacío y compacto de $\mathbb{R}^n$ que es la solución de un número finito de ecuaciones lineales $f_i(x) = 0$ y desigualdades lineales $g_j \geqslant 0$, también recordemos que $F \subset P$ es una *cara* de P si existe j tal que $g_j(x) = 0$ para toda $x \in F$. Es claro que si $F \subset P$ es una cara, entonces F es una célula convexa. Un *vértice* de P es una cara que sólo contiene un punto.

Si P es una célula convexa, entonces P es la cáscara convexa de sus vértices.

Antes de definir lo que es la realización geométrica de un simplejo $s \in K$ debemos dar la siguiente definición.

Definición A.0.5. Sea $n \geqslant k$. El conjunto $\{x_0, x_1, ..., x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es afínmente independiente si y solo si $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, ..., x_k - x_0\}$ es linealmente independiente.

En el contexto de la definición anterior, llamaremos al subespacio generado por $\{x_1 - x_0, ..., x_k - x_0\}$: *subespacio afín de dimensión k* generado por $\{x_0, ..., x_k\}$. Si el subespacio afín generado por P es de dimensión k, entonces decimos que P es una *k-célula convexa*.

Si $s \in K$ es un q-simplejo, diremos que la *realización geométrica o q-simplejo geométrico* de s -denotado por $|s|$- es la cáscara convexa de $q + 1$ puntos en $\mathbb{R}^q$. Si escogemos los anteriores $q + 1$ puntos como los básicos e_i, entonces la realización geométrica será llamada *q-simplejo estándar*.

Recordemos que para cada $s \in K$, con *dim s*=q, a $|s|$ lo estamos dotando con la topología del subespacio de $\mathbb{R}^q$. Sea K un complejo simplicial y $|K| = \bigcup_{s \in K} |s|$. El espacio topológico $(|K|, \tau)$ donde τ es la *topológía débil* inducida por la familia de inclusiones $|s| \hookrightarrow |K|$, se llamará la realización geométrica del complejo simplicial K, y se denotará simplemente por $|K|$.

Definición A.0.6. Una triangulación (K, f) de un espacio espacio topológico X consiste de un complejo simplicial K y un homeomorfismo $f : |K| \to X$. Si X tiene una triangulación, X es llamado un polihédro.

Observaciones A.0.2. La siguiente lista de observaciones se refieren a propiedades de las células polihédricas convexas.

a Las células convexas, como las definimos arriba, son polihédros, así que podemos denominar estas como células polihédricas convexas.

b Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ una célula polihédrica convexa con *dim C=q*. Sean F y G dos caras disjuntas de C, con *dim F=q-1* y G puede incluso ser un vértice. Entonces, cualquier retracto fuerte por deformación de $\overline{\partial C \backslash F}$ a G se extiende a un retracto fuerte por deformación de C a G.

Definición A.0.7. Sean P y Q polihédros y $f : P \to Q$ una función. Si existen triangulaciones de P y Q que hacen a la restricción de f a los vértices de P simplicial, entonces decimos que f es una función lineal a trozos, o que f que es una función PL (piecewise-linear).

Podemos comentar un poco acerca del término 'lineal' en la anterior definición. Dada un función simplicial $f : K_1 \to K_2$, podemos inducir una función continua $|f|$, que va de $|K_1|$ a $|K_2|$ definida de la siguiente manera: si $\{a_1, ...\}$ y $\{b_1, ...\}$ son vértices de K_1 y K_2 respectivamente, y $\Sigma_{i=1}^{\infty} r^i a_i \in |K_1|$ expresado en coordenadas baricéntricas, entonces

$$|f|(\Sigma_{i=1}^{\infty} r^i a_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} r^i f(a_i) = \Sigma_{j=1}^{\infty} r^j b_j$$

donde s^j es la suma sobre todos los r^i para los cuales $f(a_i) = b_j$, si una tal i existe, de lo contrario $s^j = 0$. De la definición vemos que la función inducida por f es lineal respecto a las coordenadas baricéntricas correspondientes.

Apéndice B

Topología Algebraica

Este apéndice agrupa los teoremas que prueban muchos de los lemas y afirmaciones hechas en el texto principal. La primera parte agrupa todos los teoremas en teoría de homotopía. La segunda sección se concentra en los resultados homológicos y aquellos resultados que vinculan la teoría de homotopía con la teoría de homología.

Teoría de Homotopía

Definición B.0.1. El n-ésimo grupo de homotopía de un espacio topológico punteado X es el conjunto de clases de homotopía de funciones $(S^n, s) \to (X, x)$, donde $s \in S^n$ es un punto fijo base para la n-esfera. Denotamos a este conjunto lo denotamos por $\pi_n(X, x)$.

El conjunto $\pi_n(X, x)$ resulta ser un grupo para $n \geqslant 1$, que será abeliano cuando $n \geqslant 2$. $\pi_1(X, x)$ recibe el nombre de *grupo fundamental del espacio X*.

Definición B.0.2. Un espacio topológico no vacío X es n-conexo si $\pi_k(X, x) = 0$ para toda $0 \leqslant k \leqslant n$.

X es *simplemente conexo* cuando X es conexo por trayectorias y $\pi_1(X, x) = 0$.

En lo sucesivo tomaremos espacios topológicos conexos por trayectorias a menos que se especifique lo contrario. Cuando X es conexo por trayectorias hay un isomorfismo entre $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, x')$ para toda $x' \in X$, por lo tanto, podemos suprimir la escritura del punto base de X respecto al cual se ha calculado el grupo fundamental.

Teorema B.0.3. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una equivalencia homotópica. Entonces la función inducida por f: $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ es un isomorfismo para toda $x \in X$.

Afirmaciones útiles acerca del grupo fundamental de un espacio conexo X:

1. Para todo $n \geqslant 2$, $\pi_1(\tilde{X}) \cong \pi_1(X)$, donde $\tilde{X}$ es un espacio cubriente de X.

2. Si la dimensión de un CW-complejo X es mayor o igual a 2, $\pi_1(X) \cong \pi_1(X^{(n)})$ para todo $n \geqslant 2$.

Dos aplicaciones del Teorema de Seifert-Van Kampen (en nuestro caso útiles), cuyas pruebas se pueden consultar en [14, Cap.IV], son expuestos a continuación. En ambos resultados suponemos que el espacio topológico X es la unión de dos de sus subconjuntos U, V, los cuales son abiertos y conexos por trayectorias y además, $U \cap V \neq \emptyset$ es también conexo por trayectorias. Técnicamente necesitamos decir que el punto base para el calculo de los grupos fundamentales mencionados a continuación está en $U \cap V$.

Teorema B.0.4. Si $U \cap V$ es simplemente conexo, entonces $\pi_1(X)$ es el producto libre de los grupos $\pi_1(U)$ y $\pi_1(V)$ con respecto a los homomorfismos inducidos por las inclusiones de U y V en X.

Teorema B.0.5. Si asumimos que V es simplemente conexo, entonces el homomorfismo inducido por $U \hookrightarrow X$, $\phi : \pi_1(U) \to \pi_1(X)$ es un epimorfismo.

A continuación presentamos resultados de la teoría de homotopía aplicados al caso concreto de espacios CW. Las pruebas se pueden consultar en [10, Caps.1,7]

Teorema B.0.6. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre CW-complejos y $A \subset X$ un subcomplejo tal que $f|_A : A \to Y$ es celular. Entonces f es homotópica relativo a A a una función celular.

Un corolario del teorema anterior es el hecho de que un CW-complejo X es n-conexo si y solo si X^{n+1} es n-conexo.

Definición B.0.7. Un espacio topológico no vacío X es n-aesférico, $n \geqslant 0$, si X es conexo por trayectorias y para toda $2 \geqslant k \geqslant n$, $\pi_k(X) = 0$. Si para toda n, X es n-aesférico, entonces decimos que X es aesférico.

Teorema B.0.8. Un CW-complejo conexo X es n-aesférico si y solo si su cubriente universal $\widetilde{X}$ es n-conexo.

Teoría de Homología

Para describir la homología celular damos por sentado el hecho de que estamos familiarizados con la homología singular.

Definición B.0.1. Sea X un espacio celular y $k \geqslant 0$, definimos

$$H_k(X) = H_k(X^k, X^{k-1}) \; (homolog\acute{\imath}acelular);$$

también definimos $d_k : W_k(X) \to W_{k-1}(X)$ como la composición $d_k = i_*\partial$, donde i_* es el homomorfismo inducido por la inclusión de pares $(X^{k-1}, \emptyset) \hookrightarrow (X^k, X^{k-1})$, y ∂ es el homomorfismo conectante que aparece en la sucesión exacta larga del par (X^k, X^{k-1}).

Se prueba que $(W_*(X), d)$ es una cadena compleja llamada *complejo de cadena celular* de la filtración dada a X. Otras observaciones importantes son las siguientes, en donde tomamos $p > q$:

1. $H_n(X^{(p)}, X^{(q)}) = 0$ si $q \geqslant n$ o $n > p$;

2. $H_n(X, X^{(q)}) = 0$ para toda $q \geqslant n$;

3. $H_n(X^{(p)}, X^{(q)}) \cong H_n(X^{(n+1)}, X^{(q)})$ si $q < n$.

De estas ibservaciones se puede concluir que para $k \geqslant 0$, $H_k(W_*(X)) \cong H_k(X, X^{-1})$, y si $X^{-1} = \emptyset$, entonces $H_k(W_*(X)) \cong H_k(X)$ para toda k.

Teorema de Mayer-Vietoris B.0.2. Si X es un CW-complejo con CW-subcomplejos Y_1 y Y_2 tales que su unión es X, entonces tenemos una sucesión exacta larga

$$\cdots \to H_k(Y_1(X) \cap Y_2) \to H_k(Y_1) \oplus H_k(Y_2) \to H_k(X) \to H_{k-1}(Y_1 \cap Y_2) \to \cdots$$

cuyos homomorfismos pueden darse explícitamente.

El siguiente teorema nos da una relación entre los grupos de homotopía y los de homología cuando X es un espacio simplemente conexo.

Teorema de Hurewicz B.0.3. Si X es un espacio n-conexo, con $n \geqslant 2$, entonces $\tilde{H}_i(X) = 0$ para toda $0 \leqslant i \leqslant n$ y para $n+1$ tenemos que

$$\pi_{n+1}(X) \cong \tilde{H}_{n+1}(X)$$

.

Si (c_*, ∂) es un complejo y G un grupo, entonces $(C_* \otimes G, \partial \otimes 1_G)$ también es un complejo. Al tomar un par de espacios (X, A), obtenemos su complejo de cadenas singular $(S_*(X, A), \partial)$ y de ésta el *complejo de cadenas con coeficientes en G*:

$$\cdots \longrightarrow S_{n+1}(X, A) \otimes G \xrightarrow{\partial \otimes 1_G} S_n(X, A) \otimes G \xrightarrow{\partial \otimes 1_G} S_{n-1}(X, A) \otimes G \longrightarrow \cdots$$

Definimos el n-ésimo grupo de homología singular de (X, A) con coeficientes en G como

$$H_n(X, A, G) = ker(\partial_n \otimes 1)/im(\partial_{n+1} \otimes 1).$$

Así que la homología con coeficientes de un espacio X está definida cuando consideramos homología celular.

Dado que el trabajo hecho en la tesis trabaja con anillos conmutativos con unitario R no triviales, necesitamos un teorema que vincule la homología celular con la homología con coeficientes en R. Este teorema es el *teorema de los coeficientes universales*.

Teorema de los Coeficientes Universales B.0.4. Para cualquier espacio X y G un grupo abeliano.

1. Existen sucesiones exactas para toda $n \geqslant 0$:

$$0 \to H_n(X) \otimes G \to H_n(X;G) \to Tor(H_{n-1}(X), G) \to 0,$$

   donde los homomorfismos se pueden dar explicitamente.

2. Esta sucesión se descompone; es decir,

$$H_n(X;G) \cong (H_n(X) \otimes G) \oplus Tor(H_{n-1}(X), G).$$

Notemos que cuando el grupo G es libre de torsión, $H_n(X;G) \cong (H_n(X) \otimes G)$, lo cual nos dice que $H_n(X;\mathbb{Z}) \cong H_n(X) \otimes \mathbb{Z} \cong H_n(X)$ (véase [17][páginas 264 y 229]).

Apéndice C

Espacios Métricos

Este apéndice es un tanto extraño, porque no tiene una sucesión definida en los resultados, más bien explica algunas observaciones y resultados útiles en las pruebas de los capítulos anteriores.

Funciones Afines

Una *función afín*, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, es una función de la forma $f = T + b$, donde T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

Si $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es una transformación lineal, entonces la gráfica de T es un hiperplano en $\mathbb{R}^{m+1}$; por lo tanto, si suponemos que $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es afín, su gráfica también será un hiperplano en $\mathbb{R}^{m+1}$.

Probaremos un resultado que vincula la convexidad de un subconjunto de $\mathbb{R}$ y la convexidad de su imagen inversa bajo una función afín.

Proposición C.0.1. Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función afín y $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Entonces $f^{-1}([a, b])$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^m$.

Demostración. Tomemos $x, y \in f^{-1}([a, b])$ y supongamos que existe $w \in [0, 1]$ tal que $xw + y(1 - w)$ no pertenece a $f^{-1}([a, b])$. Dado que f es afín, $f(\{xt + y(1 - t)|t \in$

$[0, 1]\})$ es un intervalo con extremos en $[a, b]$, por lo tanto $f(\{xt + y(1 - t)|t \in [0, 1]\}) \subset [a, b]$ lo cual implica que $xw + y(1 - w) \in f^{-1}([a, b])$. Esto es una contradicción. $\square$

Claramente, la proposición afirma que imágenes inversas bajo funciones afines real valuadas de conjuntos conexos son conexas.

Nervaduras

Un espacio métrico X es un *retracto absoluto* (RA) si y sólo si X es un retracto de algún espacio métrico el cúal contiene a éste como un subespacio cerrado. Un resultado equivalente es que un espacio métrico X es RA si y sólo X es contraíble.

Definición C.0.1. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{X_i\}_{i\in I}$ una cubierta de éste. La nervadura de la cubierta es un complejo simplicial abstracto, denotado por $\mathcal{N}(\mathcal{U})$, cuyo conjunto de vértices está dado por I y cuyo conjunto de simplejos está descrito como sigue: el subconjunto finito $S \in I$ da un simplejo de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ si y sólo si $\bigcap_{i\in S} X_i \neq \emptyset$.

Sea X un espacio y $(X_i)_{i\in I}$ una cubierta localmente finita de X por subconjuntos cerrados no vacíos. Sea T una nervadura de esta cubierta. Denotamos por S el conjunto de simplejos de T, y por $|T|$ y $|s|$las realizaciones geométricas de la nervadura y de un simplejo s respectivamente. Demos a $|T|$ la topología débil y hagamos las siguientes suposiciones: T tiene dimensión finita y para todo simplejo S, $\bigcap_{i\in S} X_i$ es un RA.

Teorema C.0.2. Los espacios X y $|T|$ tienen el mismo tipo de homotopía.

La prueba de este teorema se puede encontrar en [2, pág.468].

Bibliografía

[1] Bestvina, Mladen y Noel Brady (1997) Morse Theory and Finiteness Properties of Groups, Inventiones Mathematicae, Springer-Verlag pág. 445-470.

[2] Borel, A y Serre, J.P. (1973) Corners and Arithmetic Groups, Commentarii Mathematici Helvetici Vol. 48 Pág. 436-483.

[3] Bredon, Glen E. (1993) Topology and Geometry, Springer Science+Business Media Inc.

[4] Bridson, Martin R. y André Haeflinger (1964) Metric Spaces of Non-Positive Curvature, A Series of Comprenhensive Studies in Mathematics. Springer-Verlag Berlin.

[5] Brown, Kenneth S. (1989) Buildings, Springer-Verlag New York.

[6] Brown, Kenneth S. (1982) Cohomology of Groups, Springer-Verlag New York.

[7] Casler, B. G. (1965) An Imbedding Theorem for Connected 3-Manifolds with Boundary, Proc. Amer. Math. Soc. 16, pág. 559-566.

[8] Davis, Michael (1994) Nonpositive Curvature and Reflection Groups, Proceedings of the Eleventh Annual Workshop in Geometric Topology, Park City, Utah.

[9] Fritsch, Rudolf y Piccinini R.A.(1990) Cellular Structures in Topology, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 19. Cambridge University Press.

[10] Geoghegan, Ross (2008) Topological Methods in Group Theory, Springer Science+Business Media, LLC. Springer.

[11] Gromov, Mikhail(1897) Hyperbolic Groups, Essays in Group Theory, M.S.R.I. Publicación 8, Springer N.Y.

[12] Hudson, J.F.P.(1969) Piecewise linear topology, University of Chicago Lecture Notes prepared with the assistance of J. L. Shaneson and J. Lees, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam.

[13] Kozlov, Dmitry (2008) Combinatorial Algebraic Topology, Springer Science+Business Media, LLC. Springer-Verlag.

[14] Massey, William S. (1997) A Basic Course in Algebraic Topology, Graduate Texts in Mathematics Springer-Verlag.

[15] Meier, John y Vanwyk, Leonard (1995) The Bieri-Neumann-Strebel Invariants for Graph Groups, Proc. London Math. Soc. (3) 71, 263-280.

[16] Rotman, Joseph J. (2003) Advanced Modern Algebra, Prentice Hall.

[17] Rotman, Joseph J. (1998) An Introduction to Algebraic Topology, Graduate Texts in Mathematics Springer-Verlag.

[18] Spanier, Edwin H. (1966) Algebraic Topology, Springer-Verlag New York.

[19] Stallings, J.R. (1968) On torsion Free Groups with Infinitely many Ends, Ann. of Math. 88, 312-334.

[20] Swan, G. (1969) Groups of Cohomological Dimension One, J. Algebra 12, 585-601.