



# Solución numérica de la ecuación de onda sobre los espacio-tiempos de Minkowski y Schwarzschild en un dominio que contiene al futuro infinito nulo

Tesis  
para obtener el grado de

Maestría en Ciencias en el área de Física

presenta

**Alejandro Cruz Osorio**

*Instituto de Física y Matemáticas  
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo*

Febrero 2010

Director de tesis:  
Dr. Francisco S. Guzmán Murillo  
Instituto de Física y Matemáticas,  
UMSNH.



# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Foliaciones hiperboloidales y compactificación conforme</b>	<b>9</b>
2.1	Compactificación conforme . . . . .	10
2.2	Foliaciones Hiperboloidales . . . . .	11
2.3	Diagramas conformes . . . . .	12
2.4	Minkowski en 1+1 dimensiones . . . . .	13
2.4.1	Foliación . . . . .	14
2.4.2	Diagramas del espacio-tiempo . . . . .	15
2.5	Minkowski en 3+1 dimensiones . . . . .	17
2.5.1	Foliación . . . . .	17
2.5.2	Diagramas del espacio-tiempo . . . . .	19
2.6	Espacio-tiempo de Schwarzschild . . . . .	21
2.6.1	Foliación . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Solución de la ecuación de onda</b>	<b>29</b>
3.1	Minkowski en 1+1 dimensiones . . . . .	30
3.2	Minkowski en 3+1 dimensiones . . . . .	32
3.3	Espacio-tiempo de Schwarzschild . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Colas de decaimiento de campo escalar sin masa</b>	<b>45</b>
4.1	Solución de la ecuación de onda en el espacio-tiempo de Schwarzschild	46
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>65</b>
<b>A</b>	<b>Transformaciones conformes</b>	<b>67</b>
<b>B</b>	<b>Métodos numéricos</b>	<b>69</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Los avances alcanzados dentro del área de la relatividad numérica han sido enfocados a la solución de problemas de relatividad general que involucran fuentes de ondas gravitacionales, entre los que se encuentran la evolución de sistemas binarios como agujeros negros o estrellas de neutrones, y el colapso gravitacional de objetos compactos, como el caso de las supernovas [1].

En este campo la práctica común consiste en plantear las ecuaciones de Einstein como un problema de valores iniciales en una descomposición 3+1 del espacio-tiempo. La mayoría de los avances en este campo se han logrado mediante la aproximación de las ecuaciones de Einstein con diferencias finitas y otros métodos de aproximación, y debido a que los recursos computacionales son finitos, los problemas han sido formulados en un dominio espacial y temporal finito, es decir, tanto el dominio espacial es finito y se imponen fronteras artificiales tipo tiempo, como la evolución de los sistemas es finito también, de modo que se calcula la estructura del espacio-tiempo en solamente un trozo del dominio formal del problema.

Esta estrategia es consistente con el hecho de que en la mayoría de los problemas de valores iniciales formulados se basan en un espacio con foliaciones tipo Cauchy, cuyas hipersuperficies espaciales se aproximan al infinito espacial y es necesario imponer condiciones de frontera absorbentes en las fronteras artificiales [2] o radiativas según el caso en estudio.

En la actualidad, dados los avances en la solución del choque de agujeros negros orbitando desde el 2005 [19] y hasta la fecha, con diversos parámetros astrofísicos, es posible plantear la solución del problema de los sistemas que trata la relatividad numérica. El caso ideal consistiría en la solución de las ecuaciones de Einstein en la formulación deseada, por ejemplo la 3+1, pero en un dominio que contiene la totalidad del espacio-tiempo, es decir, los infinitos espacial, nulo y temporal contenidos en el dominio.

Debido a que la radiación gravitacional es uno de los objetivos primordiales del trabajo en relatividad numérica, es importante que las simulaciones contengan al

futuro infinito nulo (por sobre los otros infinitos), que es la frontera del espacio-tiempo en la que esta bien definida matemáticamente la radiación gravitacional [7, 8]. De hecho, en la actualidad existe la controversia de que si bien la radiación gravitacional se encuentra definida en el futuro infinito nulo, los interferómetros detectores de ondas gravitacionales se encuentran en una trayectoria tipo tiempo. De manera que ahora la controversia radica en optar por la definición matemática o la naturaleza tipo-tiempo de la trayectoria de los detectores como lo astrofísicamente relevante [23].

Para lograr que en los cálculos el dominio numérico contenga al futuro infinito nulo es necesario describir el espacio-tiempo con coordenadas adecuadas. Para construir coordenadas adecuadas es necesario tener la noción de las foliaciones del espacio-tiempo. Algunas foliaciones con hipersuperficies que llegan al futuro infinito nulo pueden también comportarse como las foliaciones convencionales  $3 + 1$  cerca del horizonte de eventos y lejos del horizonte asintóticamente nulos al aproximarse al futuro infinito nulo [12, 11, 10]. Estas foliaciones se llaman hiperboloidales [11]. Por otra parte, el uso de las foliaciones hiperboloidales es idóneo porque estas foliaciones llegan al futuro infinito nulo, que denotaremos de aquí en adelante como  $\mathcal{J}^+$  y para espacio-tiempos asintóticamente planos, la radiación gravitacional esta bien definida en esta frontera [7, 8].

En la actualidad, las foliaciones con fronteras en el futuro infinito nulo se han empezado a usar para diferentes aplicaciones, por ejemplo en soluciones de ecuaciones de perturbación [3, 4, 5] y en el estudio de colas o "Tails" por su nombre en inglés [6]. También ya ha sido posible hacer una conexión (*matching*) de hipersuperficies de tipo Cauchy con hipersuperficies que llegan al futuro infinito nulo para el problema del choque de agujeros negros [9], aunque aún no se presenta una versión detallada de este caso.

En el ámbito de los cálculos numéricos, algunas consecuencias importantes de tener el futuro infinito nulo en el dominio numérico son: i) que es posible calcular correctamente la masa de Bondi del sistema [7] en el caso en el que se tienen perturbaciones y así estimar las cantidades del espacio-tiempo asociadas a procesos radiativos (emisión de radiación gravitacional o escalar), ii) también es posible determinar con exactitud dentro del ambito numérico la ubicación del horizonte de eventos de un agujero negro porque es posible verificar si las 2-superficies nulas que salen de esta región cerca del horizonte llegan o no al futuro infinito nulo. Por estas razones, tener foliaciones que llegan al futuro infinito nulo, es matemáticamente correcto.

La compactificación ya sea del infinito espacial o del infinito nulo involucran la construcción de nuevas coordenadas espaciales, lo que comunmente lleva a que la métrica en las nuevas coordenadas sea singular en los infinitos. Una manera de resolver las singularidades consiste en regularizar la métrica mediante la construcción de una métrica conforme. Esto bastaría para resolver los problemas en el caso ideal, sin embargo, las ecuaciones de Einstein no son conformalmente invariantes y se escoge una

formulación de las ecuaciones conformes de Einstein. Existen estudios que involucran dicho caso, por ejemplo un agujero negro de Schwarzschild perturbado con una onda de Brill [13]. Sin embargo en la actualidad aún no se desarrolla un esquema de ecuaciones que permita la solución de los casos más generales, con simetrías más arbitrarias.

Sin embargo, ya es posible explorar la solución de problemas sencillos que no involucran la solución de las ecuaciones de Einstein, como es el caso de este trabajo. Es decir, se supone que el espacio-tiempo es fijo y se resuelve la ecuación de onda sobre éste. Con este problema es posible extraer información importante acerca del espacio-tiempo de fondo o simplemente aprender el comportamiento de la propagación de señales cuando se incluye al futuro infinito nulo en el dominio numérico. En este trabajo se presentan ambas perspectivas.

Así, los ingredientes principales de este trabajo son:

- i) la elección de coordenadas adecuadas, es decir, una foliación que permita contener  $\mathcal{J}^+$  en el dominio numérico,
- ii) pagar el precio de usar una métrica conforme,
- iii) resolver dicho problema usando la ecuación de onda conformalmente invariante, o lo que es equivalente, la ecuación de un campo escalar sin masa conformalmente invariante.

En este trabajo se construyen foliaciones adecuadas para tres espacio-tiempos: Minkowski en dos dimensiones, Minkowski en cuatro dimensiones en coordenadas esféricas, y la solución de Schwarzschild.

Los primeros dos casos ilustran con claridad la construcción de foliaciones hiperboloidales del espacio-tiempo. El tercer caso además, permite extraer información importante acerca del espacio-tiempo de Schwarzschild, a saber:

- El comportamiento de la función de onda según la estructura causal del espacio-tiempo de Schwarzschild.
- Los modos cuasinormales correspondientes a dicha solución.
- Con los métodos numéricos implementados ha sido posible estudiar las colas polinomiales de decaimiento del campo escalar sin masa.
- La dependencia de éstos fenómenos de la posición de los observadores con respecto al horizonte de eventos del agujero negro.

De hecho, el estudio de los *tails* es importante porque se espera que sean observadas en los detectores de ondas gravitacionales [21]. Las predicciones en este respecto son

decisivas para la relevancia astrofísica del futuro infinito nulo, porque como se verifica aquí, los exponentes de decaimiento son distintos para un detector en  $\mathcal{I}^+$  que para un detector en una trayectoria tipo tiempo.

Este trabajo está presentado con el siguiente orden: en el capítulo 2 se construyen las foliaciones hiperboloidales para los tres casos estudiados y se presenta la compactificación conforme. En el capítulo 3 se plantea la solución de la ecuación de onda como problema hiperbólico de valores iniciales en la métrica conforme, por supuesto se considera el operador de onda conformalmente invariante; en los casos de cuatro dimensiones se supone que la onda es esférica. En el capítulo 4 se presenta un estudio de la solución del campo escalar no masivo sobre el espacio-tiempo de Schwarzschild, considerando dependencia angular del campo, lo que permite el estudio de los modos cuasinormales del espacio-tiempo y su dependencia de la posición de los detectores; también se estudian las colas de decaimiento polinomial del campo escalar y su dependencia también de la posición de los detectores.



## Capítulo 2

# Foliaciones hiperboloidales y compactificación conforme

En relatividad numérica, cuando se llevan a cabo simulaciones para la construcción de espacio-tiempos se procede comunmente usando un dominio finito, y se imponen fronteras artificiales tipo tiempo debido a que los recursos computacionales son finitos. De modo que las fronteras suelen ponerse a enormes distancias -en términos de las coordenadas espaciales- y la radiación gravitacional producida por los objetos estudiados también se estudia en esta región. Durante las simulaciones al no contar con condiciones de frontera totalmente adecuadas, los errores numéricos contaminan regiones donde se lleva a cabo la extracción de la información física cuando se pretende lograr evoluciones suficientemente prolongadas. Por esta razón es necesaria la implementación de condiciones de frontera artificiales adecuadas al problema en estudio y al espacio-tiempo en cuestión.

Esta búsqueda de las condiciones de frontera adecuadas a llevado varios años, sin embargo una solución a este problema puede ser la implementación de nuevas herramientas matemáticas, como lo es en este caso la compactificación conforme del espacio-tiempo, lo cual consiste en definir nuevas coordenadas espaciales de tal manera que el infinito espacial se sitúe en un lugar finito en el dominio numérico. Esto se ha implementado en el pasado (por ejemplo [19]), sin embargo el precio a pagar es que la métrica diverge en el infinito espacial.

Por otra parte, los rayos nulos llegan al futuro infinito nulo, y parten del pasado infinito nulo. Según se ha discutido, matemáticamente la radiación gravitacional solo esta bien definida en el futuro infinito nulo  $\mathcal{I}^+$  [7, 8], es por ello que en lugar de compactificar el infinito espacial se estudia ahora la posibilidad de compactificar el futuro infinito nulo para un mejor entendimiento de la radiación gravitacional [23].

Es por tal motivo que en este trabajo estamos interesados en estudiar el comportamiento asintótico de la solución de la ecuación de onda en un espacio-tiempo fijo

con el futuro infinito nulo en el dominio numérico.

## 2.1 Compactificación conforme

Este proceso puede describirse del siguiente modo:

1. Se eligen hipersuperficies cuyo infinito espacial se localice en  $\mathcal{J}^+$ . Esto se hace eligiendo una foliación hiperboloidal con curvatura extrínseca media constante. Esto se logra con la transformación de la coordenada temporal.
2. Se compactifica el infinito de las hipersuperficies, al costo de que la métrica es singular.
3. Para resolver dicho problema se define una métrica conforme que es regular en las hipersuperficies.

Consideremos una métrica de la forma

$$\tilde{g} = \tilde{q}_{\tilde{t}\tilde{t}}d\tilde{t}^2 + \tilde{q}_{\tilde{y}\tilde{y}}d\tilde{y}^2 + \tilde{y}^2d\sigma^2 \quad (2.1)$$

donde las componentes  $\tilde{q}_{\tilde{t}\tilde{t}}$  y  $\tilde{q}_{\tilde{y}\tilde{y}}$  dependen solo de  $\tilde{y}$  y  $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  es la métrica de la 2-esfera. Suponiendo una descomposición del espacio-tiempo, para que la región asintótica de las hipersuperficies sea  $\mathcal{J}^+$  se hace una transformación de la coordenada temporal de la forma  $t = \tilde{t} - h(\tilde{y})$ , donde  $h$  se llama función de peso [16]. Esta transformación preserva la forma del vector de Killing tipo tiempo, por lo tanto la simetría temporal se preserva ante este tipo de transformaciones para los casos aquí tratados. La métrica resultante de esta transformación puede reescribirse de la forma  $\tilde{g} = \tilde{q} + \tilde{y}^2d\sigma^2$ , donde

$$\tilde{q} = \tilde{q}_{\tilde{t}\tilde{t}}dt^2 + 2\tilde{q}_{\tilde{t}\tilde{y}}h'dtd\tilde{y} + (\tilde{q}_{\tilde{t}\tilde{t}}h'^2 + \tilde{q}_{\tilde{y}\tilde{y}})d\tilde{y}^2. \quad (2.2)$$

A  $\tilde{q}$  se le conoce como la métrica cociente [15], y las componentes de la métrica dependen de  $\tilde{y}$  y  $h' = \frac{dh}{d\tilde{y}}$ . Siguiendo los trabajos de [4] para compactificar la coordenada espacial  $\tilde{y}$ , se define una transformación de la coordenada  $\tilde{y} = \frac{y}{\Omega(y)}$ , donde  $\Omega(y)$  es una función que compactifica  $\tilde{y}$  y que posteriormente actuará como factor conforme; se pide que cumpla las condiciones  $\Omega|_{\mathcal{J}^+} = 0$  y  $\Omega \neq 0$  y en el resto espacio-tiempo. Entonces se tiene ahora que

$$d\tilde{y} = \frac{\Omega - y\Omega'}{\Omega^2}dy,$$

con  $\Omega' = \frac{d\Omega}{dy}$ . Definiendo una métrica conforme de la forma  $g = \Omega^2\tilde{g}$  que implica que  $q = \Omega^2\tilde{q}$ , se tiene

$$q = \Omega^2 \tilde{q}_{\tilde{t}\tilde{t}} dt^2 + 2\tilde{q}_{\tilde{t}\tilde{y}} h'(\Omega - y\Omega') dt dy + \frac{\tilde{q}_{\tilde{t}\tilde{t}} h'^2 + \tilde{q}_{\tilde{y}\tilde{y}}}{\Omega^2} (\Omega - y\Omega')^2 dy^2, \quad (2.3)$$

Se puede ver a partir de esta expresión que cuando  $\Omega = 0$  (el futuro infinito nulo),  $\partial_t$  que es el vector de Killing tipo tiempo se vuelve nulo. Se pide además que la componente de la métrica  $g_{yy}$  sea bien comportada en cualquier punto del espacio-tiempo, y la métrica (2.3) satisface esta condición. Ahora se tiene una métrica reescalada por un factor conforme, es decir, se tiene una métrica conforme regular con una coordenada radial compactificada que contiene  $\mathcal{J}^+$ .

## 2.2 Foliaciones Hiperboloidales

Como ya se ha mencionado, en este trabajo estamos interesados en el estudio de la solución de la ecuación de onda, por esta razón es interesante usar foliaciones del espacio-tiempo que llegan a  $\mathcal{J}^+$  pues esta frontera corresponde al futuro de dicha onda. Para construir las foliaciones que aquí se usan, se parte de hipersuperficies tipo Cauchy con  $t$  constante, las cuales llegan al infinito espacial.

Para construir foliaciones con hipersuperficies que lleguen al futuro infinito nulo es conveniente definir la curvatura extrínseca media, que es la traza del tensor de curvatura extrínseca de las hipersuperficies y ese define como la divergencia del vector normal a la hipersuperficie espacial,

$$\tilde{k} = \nabla_\mu n^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} n^\mu), \quad (2.4)$$

donde  $n^\mu$  es el vector unitario normal a las hipersuperficies espaciales y  $g$  es el determinante de la métrica. En términos de la métrica estándar  $1 + 1$

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \gamma^2 \beta^y \beta^y) dt^2 + 2\beta^y \gamma^2 dt dy + \gamma^2 dy^2, \quad (2.5)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  en la forma usual de la descomposición del espacio-tiempo, se conocen como la función lapso y el vector de corrimiento respectivamente. Dicho vector unitario se define como

$$\begin{aligned} n_\mu &= (-\alpha, 0), \\ n^\mu &= \frac{1}{\alpha} (1, \beta^y). \end{aligned}$$

Haciendo la identificación de las métricas (2.3) y (2.5) se tiene que

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 &= -\Omega^2 \frac{\tilde{q}_{\tilde{t}\tilde{t}}\tilde{q}_{\tilde{y}\tilde{y}}}{\tilde{q}_{\tilde{t}\tilde{t}}h'^2 + \tilde{q}_{\tilde{y}\tilde{y}}}, \\
 \beta^y &= \Omega^2 \frac{\tilde{q}_{\tilde{t}\tilde{t}}h'}{(\tilde{q}_{\tilde{t}\tilde{t}}h'^2 + \tilde{q}_{\tilde{y}\tilde{y}})(\Omega - y\Omega')}, \\
 \gamma^2 &= \frac{(\tilde{q}_{\tilde{t}\tilde{t}}h'^2 + \tilde{q}_{\tilde{y}\tilde{y}})(\Omega - y\Omega')^2}{\Omega^2}.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Por lo tanto, dadas las componentes de la métrica y el factor conforme, es posible obtener una expresión que relaciona  $\tilde{k}$  y la derivada de la función de peso  $h'$ . Se requiere que la función de peso  $h(\tilde{y})$  sea tal que las hipersuperficies espaciales lleguen a  $\mathcal{J}^+$ . En los casos aquí tratados, Minkowski en 1+1, Minkowski y Schwarzschild la coordenada  $\tilde{y}$  juega el papel de coordenada cartesiana y radial respectivamente.

$$\tilde{k} = \nabla_{\tilde{y}} n^{\tilde{y}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\tilde{y}} \left( \sqrt{-g} \Omega^2 \frac{h'}{\sqrt{(\tilde{q}_{\tilde{t}\tilde{t}}h'^2 + \tilde{q}_{\tilde{y}\tilde{y}})(\Omega - y\Omega')}} \sqrt{\frac{\tilde{q}_{\tilde{t}\tilde{t}}}{\tilde{q}_{\tilde{y}\tilde{y}}}} \right). \tag{2.7}$$

Para resolver esta ecuación y poder encontrar el valor de la función de peso, se impone la condición de curvatura extrínseca media constante *CMC* por sus siglas en inglés "Constant Mean Curvature" [16] en  $t = 0$ . A las hipersuperficies resultantes de imponer esta condición, se les conoce como "hiperboloidales", este nombre se debe a que asintóticamente estas hipersuperficies son similares a hiperboloides en el espacio-tiempo de Minkowski.

Al conjunto de estas condiciones y las hipersuperficies se le llama "Foliaciones Hiperboloidales". Se cuenta ahora con herramientas para construir coordenadas que describan el espacio-tiempo y contengan  $\mathcal{J}^+$  en el dominio a estudiar. En las siguientes secciones de éste capítulo se construyen coordenadas (2.6) que describen a espacio-tiempos con foliaciones hiperboloidales cuyas hipersuperficies espaciales llegan a  $\mathcal{J}^+$  y además tales que  $\mathcal{J}^+$  esté situado en un valor finito de la coordenada  $y$ . En suma, se construyen coordenadas de un espacio-tiempo conformalmente compactificado con CMC.

## 2.3 Diagramas conformes

Para una mejor descripción de las nuevas coordenadas es útil construir los diagramas conformes de los espacio-tiempos en cuestión. Esta construcción se puede hacer de manera sencilla siguiendo los pasos descritos a continuación. Consideremos un espacio-tiempo con coordenadas  $t$  y  $y$

1. Se construyen coordenadas nulas.

- $u = t - y$ ,  $v = t + y$ , lo cual implica;
  - $t = \frac{1}{2}(u + v)$ ,  $y = \frac{1}{2}(v - u)$
  - $dt = \frac{1}{2}(du + dv)$ ,  $dy = \frac{1}{2}(dv - du)$
  - $ds^2 = -dudv + \frac{1}{4}(v - u)^2 d\Omega^2$ , donde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ . Para el caso de Minkowski 1+1 este término  $d\Omega^2$  no aparece en esta expresión.
2. Se compactifica usando alguna transformación, usualmente se trata de la función tangente. Posteriormente se recuperan las coordenadas  $T$  y  $R$ .
- Compactificando ahora de la forma  $u = \tan U$ ,  $v = \tan V$ , con  $U, V \in (-\pi/2, \pi/2)$ ,  $u \leq v$ .
  - Regresando a las coordenadas  $T, Y$  con  $T = V + U$ ,  $Y = V - U$ , con  $Y \in [0, \pi)$ ,  $|T| + Y < \pi$ .
3. La métrica resultante es de la forma:

$$ds^2 = -\frac{1}{\omega^2}(-dT^2 + dY^2 + \sin^2 Y d\Omega^2),$$

$$\omega = 2 \cos U \cos V = \cos T + \cos Y. \quad (2.8)$$

4. Reescribiendo las nuevas coordenadas en términos de las originales se tiene finalmente:

$$\begin{aligned} T &= V + U = \arctan v + \arctan u \\ &= \arctan(t + y) + \arctan(t - y) \\ Y &= V - U = \arctan v - \arctan u \\ &= \arctan(t + y) - \arctan(t - y) \end{aligned} \quad (2.9)$$

5. Ahora usando las coordenadas  $T$  y  $Y$  se grafican las líneas con  $t$  fijo y  $y$  fijo. Para construir los casos particulares se usa la notación  $Y = X$  para Minkowski en 1+1 y  $Y = R$ , con  $R$  la coordenada radial para los casos en cuatro dimensiones con simetría esférica.

## 2.4 Minkowski en 1+1 dimensiones

El primer caso a tratar es el espacio-tiempo de Minkowski en 1 + 1 dimensiones. En este sencillo caso se implementan las herramientas antes descritas. Para este espacio-tiempo la coordenada  $y$  juega el papel de la coordenada espacial  $x$ .

### 2.4.1 Foliación

Se escogen coordenadas del espacio-tiempo  $\tilde{x}^\mu = (\tilde{t}, \tilde{x})$  y un elemento de línea

$$d\tilde{s}^2 = -d\tilde{t}^2 + d\tilde{x}^2, \quad (2.10)$$

donde  $\tilde{t}, \tilde{x} \in (-\infty, +\infty)$ . Siguiendo a [15], para obtener las foliaciones hiperboloides, se hace una transformación de la coordenada temporal  $t = \tilde{t} - h(\tilde{x})$ . Usando esta nueva coordenada, la métrica (2.10) tiene la forma

$$d\tilde{s} = -dt^2 - 2h'dtd\tilde{x} + [1 - h'^2]d\tilde{x}^2. \quad (2.11)$$

Para esta métrica el vector unitario normal  $n^\mu$  toma la forma

$$n_\mu = \left( -\frac{1}{\sqrt{1 - h'^2}}, 0 \right), \quad n^\mu = \left( \sqrt{1 - h'^2}, \frac{h'}{\sqrt{1 - h'^2}} \right). \quad (2.12)$$

Sustituyendo esta ecuación en (2.4), se obtiene un expresión para la curvatura extrínseca promedio y de ahí para  $\tilde{k}$  constante se obtiene una expresión para  $h'$ :

$$\tilde{k} = \partial_{\tilde{x}} \left( \frac{h'}{\sqrt{1 - h'^2}} \right), \quad \Rightarrow \tilde{k}\tilde{x} = \left( \frac{h'}{\sqrt{1 - h'^2}} \right) + C, \quad (2.13)$$

donde  $C$  es una constante de integración. Para nuestros propósitos es suficiente escoger esta constante igual a cero. Entonces esta ecuación puede ser escrita de manera adecuada para que nos de una descripción completa de las funciones métricas

$$h' = \frac{\tilde{k}\tilde{x}}{\sqrt{1 + (\tilde{k}\tilde{x})^2}} \quad \Rightarrow \quad h(\tilde{x}) = \sqrt{a^2 + \tilde{x}^2}, \quad (2.14)$$

donde  $a = \frac{1}{\tilde{k}}$ , para  $\tilde{k}$  constante.

Para compactificar el infinito espacial de las hipersuperficies del espacio-tiempo es suficiente definir una nueva coordenada  $x$ , tal que  $\tilde{x} = \frac{x}{\Omega}$ . En este caso se escoge un factor conforme conveniente de la forma  $\Omega = 1 - x^2$ , debido a que se quieren dos límites asintóticos localizados en  $x = \pm 1$ , estas fronteras corresponde a  $\mathcal{J}^+$ . Este factor conforme se escoge así siguiendo a [5] donde se usó para resolver la ecuación de perturbaciones de un agujero de gusano cargado. Usando  $\tilde{x} = x/\Omega$  con  $\Omega = 1 - x^2$ ,  $h(\tilde{x}) = \sqrt{a^2 + \tilde{x}^2}$ , implica  $h' = \frac{x}{\sqrt{a^2(1-x^2)^2 + x^2}}$ , y finalmente se obtiene una métrica conforme

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(1 - x^2)^2 dt^2 - \frac{2x(1 + x^2)}{\sqrt{a^2(1 - x^2)^2 + x^2}} dt dx \\ &+ \frac{a^2(1 + x^2)^2}{a^2(1 - x^2)^2 + x^2} dx^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Para encontrar las funciones de norma de esta métrica se identifican estas funciones con la métrica 1 + 1 estándar (2.5) que para el presente caso es:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\alpha^2 dt^2 + \gamma^2(dx + \beta^x dt)(dx + \beta^x dt) \\ &= (-\alpha^2 + \gamma^2\beta^x\beta^x)dt^2 + 2\beta^x\gamma^2 dt dx + \gamma^2 dx^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

De la identificación se obtienen las siguientes funciones de norma

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{x^2}{a^2} + (1 - x^2)^2, \\ \beta^x &= -\frac{x}{a^2} \frac{\sqrt{a^2(1 - x^2)^2 + x^2}}{1 + x^2}, \\ \gamma^2 &= \frac{a^2(1 + x^2)^2}{a^2(1 - x^2)^2 + x^2}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

las cuales completan la definición las componentes de la métrica conforme.

### 2.4.2 Diagramas del espacio-tiempo

En el camino a construir los diagramas del espacio-tiempo y los diagramas conformes calculamos primero las geodésicas nulas para lo cual basta resolver la condición  $ds = 0$ , lo cual implica

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{x(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2 \sqrt{a^2(1 - x^2)^2 + x^2}} \pm \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2},$$

cuya solución es

$$t = t_0 + \frac{-\sqrt{a^2(1 - x^2)^2 + x^2} \pm x}{1 - x^2}. \quad (2.18)$$

El resultado se muestra en la Fig. 2.1. En estas gráficas se puede aprender que para valores pequeños de  $\tilde{k}$  los conos de luz tienden a cerrarse cuando se acercan a  $x = \pm 1$ , es decir, al futuro infinito nulo. Esto implica que los pulsos de los datos iniciales que se propagan hacia afuera van disminuyendo su velocidad en el caso de  $\tilde{k}$  pequeños, es decir sufren el efecto llamado corrimiento al azul [19]. Pasa lo contrario cuando el valor de la curvatura es grande, los conos de luz llegan al futuro infinito nulo abiertos, es decir, los pulsos emitidos al tiempo inicial se propagan a través de las hipersuperficies hiperboloidales y salen fácilmente a través del futuro infinito nulo en  $x = \pm 1$  sufriendo incluso corrimiento al rojo.

Para tener un mejor entendimiento de la naturaleza de la estructura global del espacio-tiempo se presentan los diagramas conformes para distintos valores de  $\tilde{k}$ . El diagrama

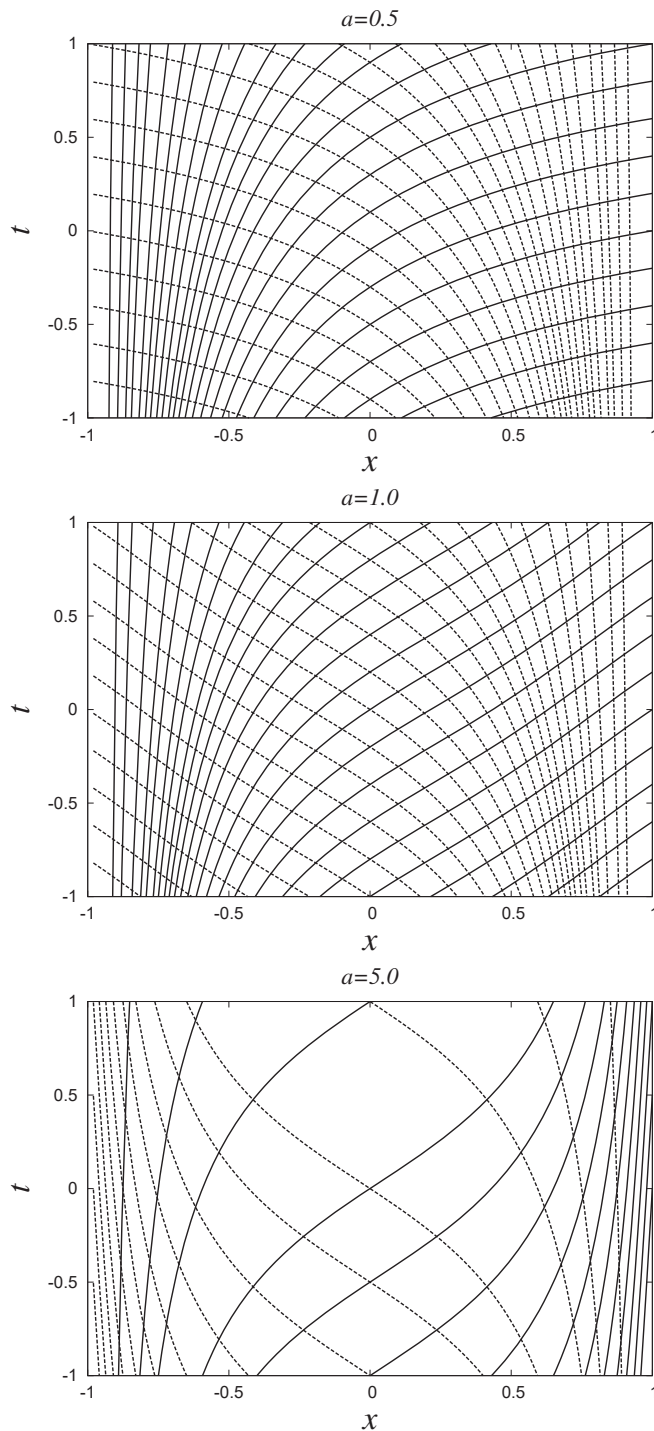


Figura 2.1: Diagramas del espacio-tiempo del caso Minkowski en 1+1 dimensiones con foliaciones construidas con diferentes valores de  $\tilde{k} = 2, 1, 0.2$  o equivalentemente  $a = 0.5, 1, 5$ . Las líneas continuas y punteadas representan rayos nulos moviéndose hacia las fronteras  $x = +1$  y  $x = -1$  respectivamente. Estas gráficas fueron construidas usando (2.18) con diferentes valores de  $t_0$ .



conforme se construye ahora usando  $\tilde{t} = \tilde{t}(t, x)$  y  $\tilde{x} = \tilde{x}(t, x)$ . Considerando que  $h(\tilde{x}) = \sqrt{a^2 + \tilde{x}^2}$  y  $\Omega = 1 - x^2$ , la coordenada espacial se escribe como  $\tilde{x} = \frac{x}{1-x^2}$ . Con esta información las coordenadas tilde estan dadas por

$$\tilde{t} = t + \sqrt{a^2 + \frac{x^2}{(1-x^2)^2}}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{1-x^2},$$

es decir, las coordenadas  $T$  y  $X$  en este caso toman la forma

$$\begin{aligned} T &= \arctan \left( t + \sqrt{a^2 + \frac{x^2}{(1-x^2)^2}} + \frac{x}{1-x^2} \right) \\ &+ \arctan \left( t - \sqrt{a^2 + \frac{x^2}{(1-x^2)^2}} - \frac{x}{1-x^2} \right), \\ X &= \arctan \left( t + \sqrt{a^2 + \frac{x^2}{(1-x^2)^2}} + \frac{x}{1-x^2} \right) \\ &- \arctan \left( t - \sqrt{a^2 + \frac{x^2}{(1-x^2)^2}} - \frac{x}{1-x^2} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

El resultado de graficar  $T, X$  para  $t, x$  constantes se muestra en la Fig. 2.2. Estos diagramas son útiles para interpretar los efectos de la norma usada. En esta figura se puede apreciar con claridad el efecto que tiene escoger diferentes valores de la curvatura en las hipersuperficies con  $t$  constante. Para pequeños valores de  $\tilde{k}$  las hipersuperficies resultantes de imponer la condición CMC en el espacio-tiempo de Minkowski conformalmente compactificado, llegan claramente a  $\mathcal{J}^+$ , sin embargo se puede ver que en efecto al disminuir el valor de  $\tilde{k}$  las hipersuperficies espaciales llegan a  $\mathcal{J}^+$  pero se aglomeran cerca de  $i^0$ .

## 2.5 Minkowski en 3+1 dimensiones

Ahora se presenta el caso del espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas esféricas. La coordenada  $y$  juega el papel de la coordenada radial  $r$  y un factor conforme adecuado es  $\Omega = 1 - r$ , puesto que ahora  $r$  solo tiene valores positivos y solo necesitamos regularizar el espacio-tiempo en  $r = +1$ , aunque también funcionaría  $\Omega = 1 - r^2$ .

### 2.5.1 Foliación

Se considera el elemento de línea para el espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas esféricas  $x^\mu = (\tilde{t}, \tilde{r}, \theta, \phi)$  para la métrica física dada por

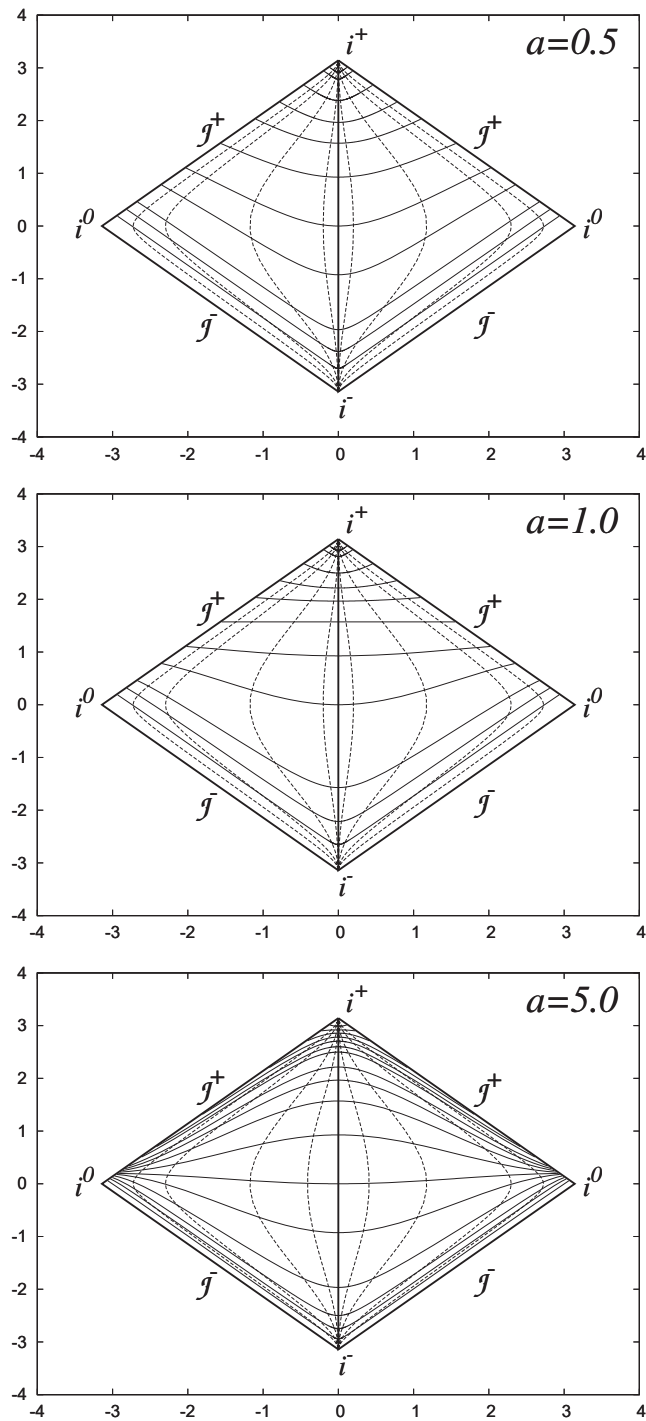


Figura 2.2: Diagramas conformes para el espacio tiempo de Minkowski 1+1 con hipersuperficies hiperboloidales para  $\tilde{k} = 2, 1, 0.2$  o equivalentemente  $a = 0.5, 1, 5$ . Las líneas continuas representan curvas de  $t$  constante y las líneas punteadas representan curvas de  $x$  constante.

$$d\tilde{s}^2 = -d\tilde{t}^2 + d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.20)$$

donde  $\tilde{t} \in (-\infty, \infty)$  y  $\tilde{r} \in [0, \infty)$ . Se usa la transformación  $t = \tilde{t} - h(\tilde{r})$  y se obtiene

$$d\tilde{s}^2 = -dt^2 - 2h'dtd\tilde{r} + [1 - h'^2]d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.21)$$

donde ahora  $h' = \frac{dh}{d\tilde{r}}$ . En este caso el vector normal a las hipersuperficies espaciales  $n^\mu$  se escribe como

$$n^\mu = \left( \sqrt{1 - h'^2}, \frac{h'}{\sqrt{1 - h'^2}}, 0, 0 \right). \quad (2.22)$$

Esto implica que la curvatura extrínseca promedio es:

$$\tilde{k} = \nabla_\mu n^\mu = \frac{1}{\tilde{r}^2} \partial_{\tilde{r}} \left( \frac{\tilde{r}^2 h'}{\sqrt{1 - h'^2}} \right). \quad (2.23)$$

Ahora, se pide que la curvatura extrínseca promedio sea constante para poder integrar  $h(\tilde{r})$ :

$$\frac{\tilde{k}\tilde{r}^3}{3} = \left( \frac{\tilde{r}^2 h'}{\sqrt{1 - h'^2}} \right) + C, \quad (2.24)$$

donde  $C$  es una constante de integración que escogemos igual a cero. Nuevamente es posible manipular la ecuación anterior y obtener la forma explícita para  $h'$

$$h' = \frac{\tilde{r}}{\sqrt{a^2 + \tilde{r}^2}}, \quad (2.25)$$

donde  $a$  es una constante que está dada en términos de la curvatura como  $\tilde{k} = \frac{3}{a}$ . También en este caso es posible integrar para  $h$ :

$$h(\tilde{x}) = \sqrt{a^2 + \tilde{x}^2}, \quad (2.26)$$

con lo cual se tiene una descripción completa de la métrica.

### 2.5.2 Diagramas del espacio-tiempo

En este caso  $\mathcal{J}^+$  se puede compactificar también con la transformación  $\tilde{r} = \frac{r}{\Omega}$ . A diferencia del caso de Minkowski 1+1, aquí solo es necesario regularizar en  $r = 1$ . Entonces el elemento de línea de la métrica conforme  $g = \Omega^2 \tilde{g}$  se escribe como

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -(1-r)^2 dt^2 - \frac{2r}{\sqrt{a^2(1-r)^2 + r^2}} dt dr \\
 &+ \frac{a^2}{a^2(1-r)^2 + r^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

de donde se pueden obtener las siguientes funciones de norma al hacer una comparación de la métrica (2.27) con (2.5)

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 &= (1-r)^2 + \frac{r^2}{a^2}, \\
 \beta^r &= -\frac{r}{a^2} \sqrt{a^2(1-r)^2 + r^2}, \\
 \gamma^2 &= \frac{a^2}{a^2(1-r)^2 + r^2}.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Igual que antes se quiere vesualizar la estructura del espacio-tiempo, en este caso se calculan los rayos nulos del espacio-tiempo que obedecen  $ds = 0$ , esto implica la ecuación

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{(1-r)^2} \left( -\frac{r}{\sqrt{a^2(1-r)^2 + r^2}} \pm 1 \right), \tag{2.29}$$

cuya solución se escribe como

$$t - t_0 = \frac{\sqrt{(a^2 + 1)(r - 1)^2 + 2r - 1}}{r - 1} \pm \frac{1}{1 - r}. \tag{2.30}$$

Los resultados se presentan en la Fig. 2.3 para los valores  $a = 0.5, 1, 5$  o equivalentemente  $\tilde{k} = 6, 3, 0.6$ . En esta figura se tiene el espacio-tiempo de Minkowski resultante de la compactificación conforme y con la condición CMC. Los efectos de la curvatura sobre los conos de luz siguen surtiendo el mismo efecto que en el caso anterior: para valores grandes de  $\tilde{k}$  los conos de luz llegan a  $\mathcal{J}^+$  abiertos y para valores pequeños de  $\tilde{k}$  los conos de luz tienden a cerrarse al aproximarse a  $\mathcal{J}^+$ .

En este caso, las coordenadas  $T$  y  $R$  para Minkowski en 3+1 dimensiones en coordenadas esféricas son

$$\begin{aligned}
T &= \arctan \left( t + \sqrt{a^2 + \frac{r^2}{(1-r)^2}} + \frac{r}{1-r} \right) \\
&+ \arctan \left( t - \sqrt{a^2 + \frac{r^2}{(1-r)^2}} - \frac{r}{1-r} \right), \\
R &= \arctan \left( t + \sqrt{a^2 + \frac{r^2}{(1-r)^2}} + \frac{r}{1-r} \right) \\
&- \arctan \left( t - \sqrt{a^2 + \frac{r^2}{(1-r)^2}} - \frac{r}{1-r} \right). \tag{2.31}
\end{aligned}$$

El diagrama conforme resultante se muestra en la Figura 2.4 para diferentes valores  $a = 0.5, 1, 5$  o equivalentemente  $\tilde{k} = 6, 3, 0.6$ . Estos diagramas son similares a los que se tienen en Minkowski 1+1, pero solo para valores positivos de la coordenada espacial. Se puede ver que para valores grandes de la curvatura las hipersuperficies llegan claramente separadas al futuro infinito nulo y para valores de la curvatura pequeños la separación entre las hipersuperficies tiende a estrecharse cuando se aproximan a dicha frontera.

## 2.6 Espacio-tiempo de Schwarzschild

Este es un caso más general, en este espacio-tiempo se tiene simetría esférica, pero además se tiene un horizonte de eventos y las funciones métricas  $\tilde{q}_{\tilde{t}\tilde{t}}$  y  $\tilde{q}_{\tilde{r}\tilde{r}}$  son no triviales como en los casos anteriores en los que  $\tilde{q}_{\tilde{t}\tilde{t}} = -1$  y  $\tilde{q}_{\tilde{r}\tilde{r}} = 1$ . Dado que se pretende estudiar el comportamiento de una onda en el espacio-tiempo, deseamos que las hipersuperficies tengan dos propiedades: i) que penetren el horizonte de eventos y ii) que lleguen a  $\mathcal{J}^+$ .

### 2.6.1 Foliación

Partiendo de la métrica de Schwarzschild

$$d\tilde{s}^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{\tilde{r}} \right) d\tilde{t}^2 + \frac{d\tilde{r}^2}{1 - \frac{2M}{\tilde{r}}} + \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \tag{2.32}$$

se procede a construir una foliación hiperboloidal y hacer una compactificación conforme. Se introduce nuevamente el cambio de coordenadas de la forma  $t = \tilde{t} - h(\tilde{r})$

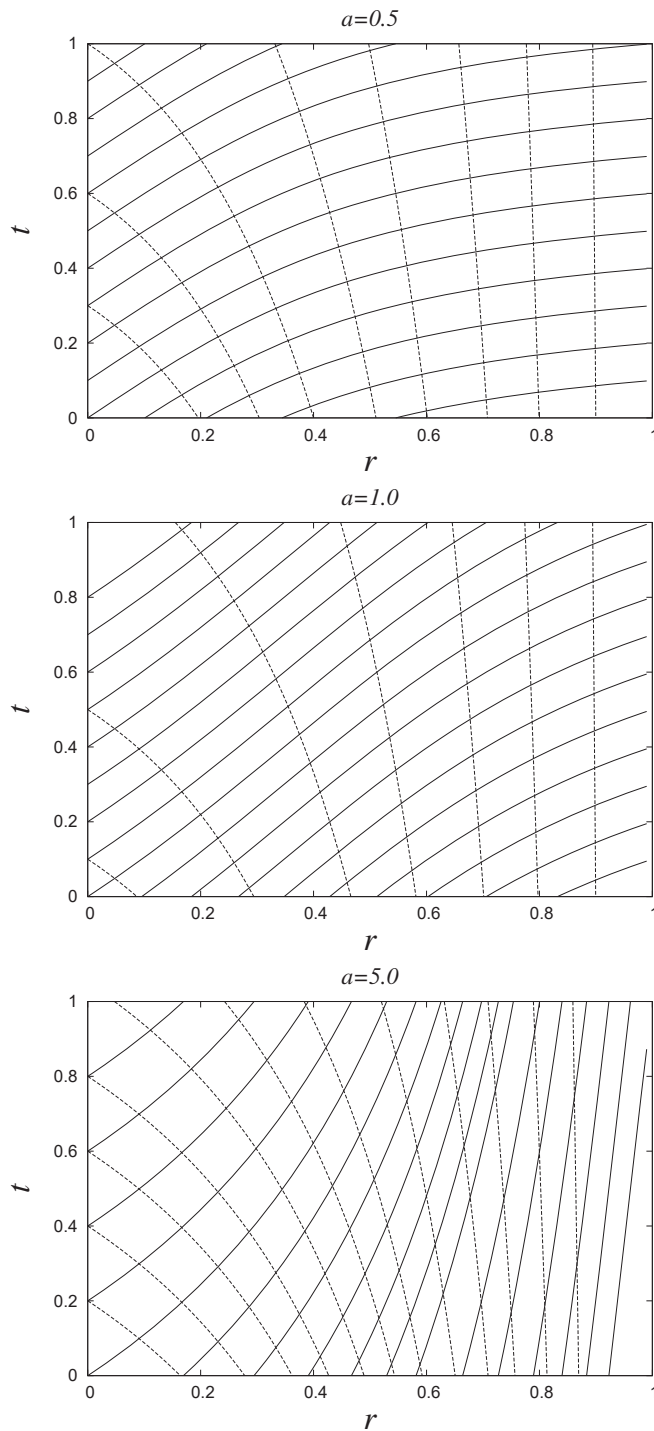


Figura 2.3: Diagramas del espacio-tiempo de Minkowski 3+1 para hipersuperficies hiperboloidales con  $\tilde{k} = 6, 3, 0.6$ , o equivalentemente  $a = 0.5, 1, 5$ . Las líneas continuas y punteadas indican los rayos nulos salientes y entrantes respectivamente. Como en el caso anterior, los conos de luz se vuelven más estrechos al acercarse a la frontera para valores pequeños de la curvatura.

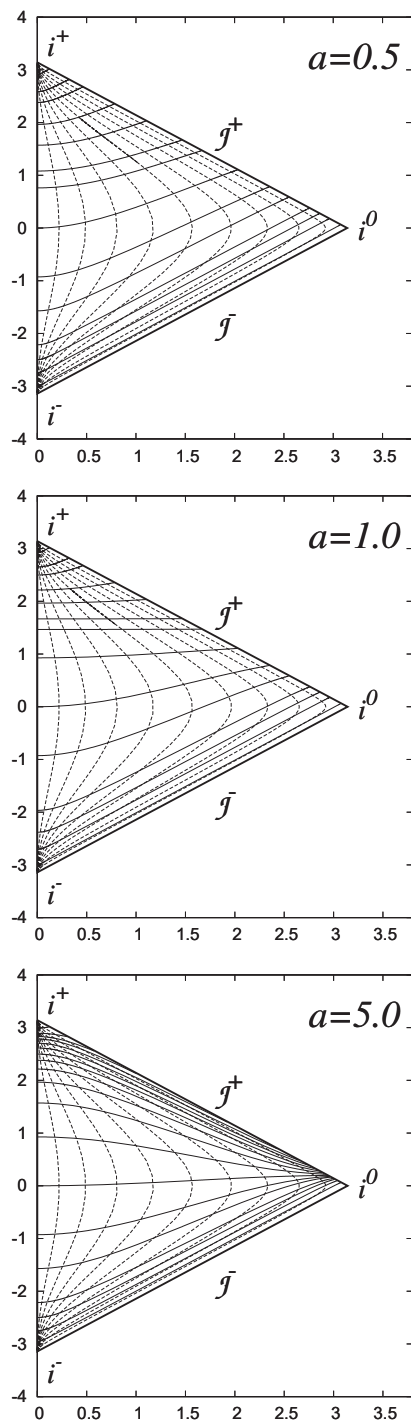


Figura 2.4: Diagramas conformes para hipersuperficies hiperbolicas en simetría esférica del espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas esféricas para varios valores de  $a = 0.5, 1, 5$  o  $\tilde{k} = 6, 3, 0.6$ . Estos diagramas son parecidos a los que se tiene en el caso del espacio-tiempo de Minkowski en 1+1, sin embargo en este caso se usa un factor conforme diferente y también la relación entre la curvatura extrínseca y el factor  $a$  son distintos.

en (2.32) y el elemento de línea toma la forma

$$\begin{aligned}
 d\tilde{s}^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right) dt^2 - 2h' \left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right) dt d\tilde{r} \\
 &+ \left[ \left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right) h'^2 \right] d\tilde{r}^2 \\
 &+ \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

donde  $h' = \frac{dh}{d\tilde{r}}$ , y de donde se obtienen las siguientes cantidades de norma

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{\gamma}, \\
 \beta^r &= -\frac{h'(1 - \frac{2M}{\tilde{r}})}{\gamma^2}, \\
 \gamma^2 &= \left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right) h'^2.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Por otro lado, el vector unitario normal a las hipersuperficies espaciales que apunta hacia el futuro esta dado por

$$n^\mu = \left[ \gamma, \frac{h'}{\gamma} \left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right), 0, 0 \right]. \tag{2.35}$$

Ahora, la curvatura extrínseca promedio en la hipersuperficie al tiempo inicial, está dada según (2.4) como

$$\tilde{k} = \frac{1}{\tilde{r}^2} \partial_{\tilde{r}} \left[ \frac{\tilde{r}^2 h'}{\gamma} \left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right) \right], \tag{2.36}$$

y es posible integrar para  $\tilde{k}$  constante:

$$\frac{\tilde{k}\tilde{r}^3}{3} - C = \frac{\tilde{r}^2 h'}{\gamma} \left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right), \tag{2.37}$$

donde ahora  $h'$  es

$$h' = \frac{\left(\frac{\tilde{k}\tilde{r}^3}{3} - C\right)}{\left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right) \sqrt{\left(\frac{\tilde{k}\tilde{r}^3}{3} - C\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right) \tilde{r}^4}}. \tag{2.38}$$

En este caso, no es fácil encontrar la forma de  $h$  como en los casos anteriores. Para hacer una mejor descripción de la forma de las hipersuperficies es necesario integrar de



manera numérica de la ecuación 2.38. Por otro lado, para hacer la compactificación del espacio-tiempo se escoge el factor conforme dado por  $\Omega = 1 - r$  y la compactificación de la coordenada radial dada por  $\tilde{r} = \frac{r}{\Omega}$ . El espacio-tiempo de Schwarzschild usando la compactificación conforme esta dadá por el elemento de línea:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M\Omega}{r}\right) \Omega^2 dt^2 - \frac{2(\tilde{k}r^3/3 - C\Omega^3)}{P(r)} dt dr + \frac{r^4}{P^2(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.39)$$

donde

$$P(r) = \Omega^3 \tilde{P}(r) = \sqrt{\left(\frac{\tilde{k}r^3}{3} - C\Omega^3\right)^2 + \left(1 - \frac{2M\Omega}{r}\right) \Omega^2 r^4}. \quad (2.40)$$

Los valores de  $\tilde{k}$  y  $C$  estan restringidos de tal manera que  $P(r)$  sea real. Algunas características de estas coordenadas son que i) el horizonte de eventos se localiza en  $r = 2/3$ , usando  $M = 1$ , ii) las hipersuperficies penetran el horizonte de eventos, iii) las hipersuperficies no evitan la singularidad  $r = 0$  y iv) llegan al futuro infinito nulo. La condición (iii) nos lleva a efectuar una excisión dentro del horizonte, que consiste en remover un trozo del dominio numérico que se sabe que se encuentra dentro del horizonte de eventos de hoyo negro, lo cual significa que el dominio  $r \leq r_{exc} < r_{HE}$  es removido. El dominio donde se resolverá la ecuación de onda se reduce entonces a  $r \in [r_{exc}, 1]$ , por lo tanto es necesario imponer condiciones de frontera que discutiremos más adelante.

El diagrama del espacio-tiempo resultante de la compactificación conforme con CMC, se muestra en la Figura. 2.5, donde se ve que las geodésicas nulas salientes que inician por fuera del horizonte de eventos llegan al futuro infinito nulo y las que salen desde dentro del horizonte de eventos llegan a la frontera de excisión ubicada en  $r_{exc} = 0.6$ . Se ha elegido  $r_{exc} = 0.6$  porque para los valores de  $\tilde{k}$  y  $C$  usados en este trabajo  $P(r)$  es real y está suficientemente lejos (por dentro) del horizonte en  $r = 2/3$ . También se puede ver la ubicación exacta del horizonte eventos a partir de la métrica reescalada,  $r = 2/3$ . Se muestra en la Figura, haciendo una selección cuidadosa de rayos nulos, que las geodésicas salientes aún estando muy cerca del horizonte llegan  $\mathcal{J}^+$ .

En principio la posición del horizonte de eventos en simulaciones numéricas debiera calcularse en términos de superficies nulas que llegan al futuro infinito nulo, mientras que en la práctica, debido a que los cálculos se desarrollan sobre un dominio finito del espacio-tiempo, se decide que una 3-superficie es el horizonte de eventos si superficies nulas 2-dimensionales lanzadas del futuro en las simulaciones, y desde las fronteras artificiales numéricas convergen hacia él [20]. Para localizar el horizonte de eventos en

la Figura 2.5 se evolucionaron rayos nulos radiales salientes del pasado al futuro, y se espera que en la práctica la precisión con que se localizan los horizontes de eventos no cambie significativamente si se considera que los rayos nulos llegan a futuro infinito nulo o si se considera un dominio con fronteras tipo tiempo a una distancia finita.

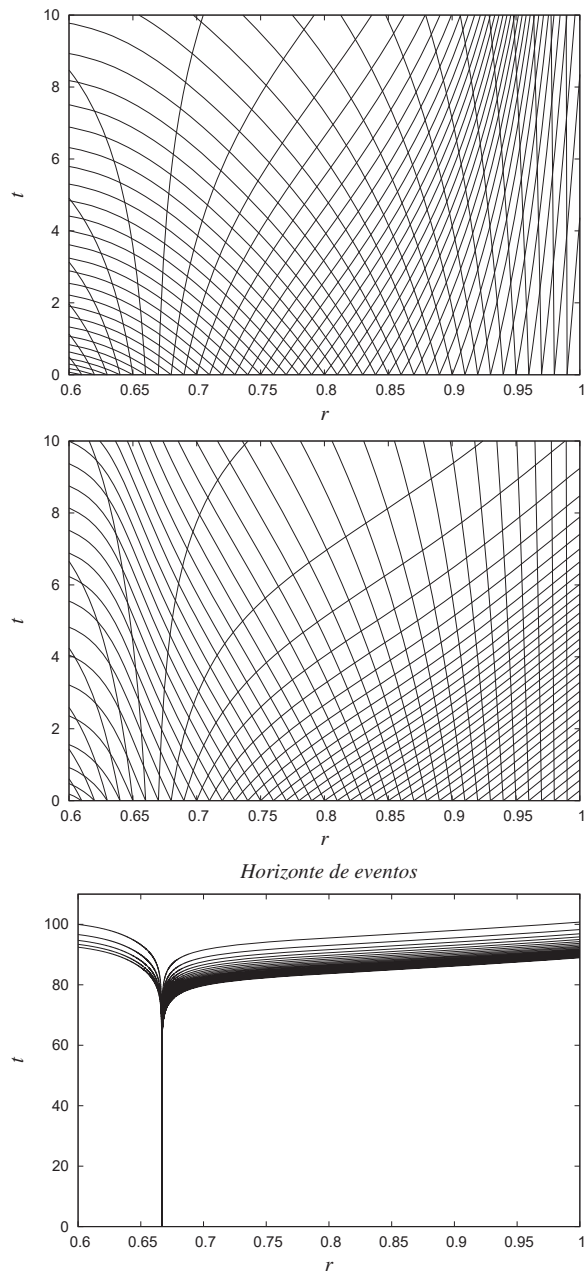


Figura 2.5: Se muestra el diagrama de espacio-tiempo (2.39) para dos valores distintos de  $\tilde{k} = 0.1$  (arriba),  $\tilde{k} = 0.4$  (en medio). En este caso se puede decir que los rayos nulos llegan a  $\mathcal{J}^+$  (localizado en  $r = 1$ ). Se observa el corrimiento al azul en el primer caso. Queda claro que los conos de luz son regulares en el horizonte de eventos. Haciendo un acercamiento más fino es posible localizar el sitio exacto en el cual los rayos nulos salientes se pueden escapar del hoyo negro y llegar al futuro infinito nulo y los que llegan a la frontera de excisión; de esta manera se localiza el horizonte de eventos (abajo), estrictamente dentro de los límites de la precisión numérica usada para calcular  $P$  y para resolver las geodésicas nulas.



# Capítulo 3

## Solución de la ecuación de onda

El siguiente paso es resolver la ecuación de onda en los espacio-tiempos estudiados en el capítulo anterior, es decir, con el futuro infinito nulo incluido en el dominio numérico y con hipersuperficies que llegan a  $\mathcal{J}^+$ . Se resuelve la ecuación de onda como un problema de valores iniciales en la métrica reescalada con el fin de aprovechar que  $\mathcal{J}^+$  se encuentra en el dominio numérico. La ecuación de onda o bien la de un campo escalar sin masa para una métrica física arbitraria es

$$\tilde{\square}\tilde{\phi} = \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\partial_\mu[\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu\tilde{\phi}] = 0, \quad (3.1)$$

donde  $\sqrt{-\tilde{g}}$  es el determinante de la métrica,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  y  $\tilde{\phi}$  es el campo escalar sin masa. Esta ecuación diferencial parcial de segundo orden se puede reescribir como un sistema de ecuaciones de primer orden. Para ello se introducen variables de primer orden  $\psi$  y  $\pi$  que definiremos en cada caso. Si se define  $\mathbf{u} = (\pi, \psi)^T$ , entonces la ecuación de onda puede ser escrita en la forma

$$\partial_t\mathbf{u} + \mathbf{A}\partial_y\mathbf{u} = -\partial_y(\mathbf{A})\mathbf{u}, \quad (3.2)$$

que está en términos de la funciones de norma  $\alpha(y)$ ,  $\beta(y)$  y  $\gamma(y)$ . Las velocidades características están dadas por

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_\pm, \quad (3.3)$$

donde  $\lambda_\pm$  son eigenvalores de la matriz  $\mathbf{A}$ , como se podrá verificar más adelante en cada uno de los casos aquí tratados. Estos eigenvalores son distintos, reales y los vectores propios forman un conjunto completo, lo que garantiza que el sistema de ecuaciones es fuertemente hiperbólico para  $\alpha, \gamma \neq 0$ , lo cual implica que el sistema de ecuaciones con valores iniciales para  $\psi$  y  $\pi$  es un problema de valores iniciales bien planteado [17, 18].

Debido a que la ecuación de onda se resolverá en la métrica conforme es importante mencionar que la ecuación de onda  $\square\phi = 0$  en cuatro dimensiones no es invariante ante transformaciones conformes. El operador de onda invariante es el siguiente para la métrica física:

$$\tilde{\square}\tilde{\phi} - \frac{(n-2)}{4(n-1)}\tilde{R}\tilde{\phi} = \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\partial_\mu[\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu\tilde{\phi}] - \frac{(n-2)}{4(n-1)}\tilde{R}\tilde{\phi} = 0, \quad (3.4)$$

donde  $\tilde{R}$  es el escalar de Ricci relacionado a la métrica física  $\tilde{g}$ . Esta ecuación sí es invariante ante transformaciones conformes y en general se cumple la relación

$$\left[\tilde{\square} - \frac{(n-2)}{4(n-1)}\tilde{R}\right]\tilde{\phi} = \Omega^{(-1-n/2)}\left[\square - \frac{(n-2)}{4(n-1)}R\right]\phi. \quad (3.5)$$

De esta ecuación se puede ver que  $\square\phi - \frac{(n-2)}{4(n-1)}R\phi = 0$  sí y solo sí se cumple la ecuación (3.4). La expresión que nos interesa es la ecuación de onda reescalada para la métrica conforme:

$$\left[\square - \frac{(n-2)}{4(n-1)}R\right]\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] - \frac{(n-2)}{4(n-1)}R\phi = 0, \quad (3.6)$$

donde ahora  $R$  es el escalar de Ricci relacionado a la métrica conforme  $g$  ( Ver Apéndice A). Para el caso de  $n = 2$  (como lo es caso de Minkowski en 1+1) se puede ver en la ecuación (3.6) que la ecuación de onda  $\square\phi = 0$  es invariante ante transformaciones conformes,  $\square\phi = 0 \Leftrightarrow \tilde{\square}\tilde{\phi} = 0$ . Pero para el caso  $n = 4$  - Minkowski 3+1 y Schwarzschild - se tiene

$$\left[\tilde{\square} - \frac{1}{6}\tilde{R}\right]\tilde{\phi} = \Omega^{-3}\left[\square - \frac{1}{6}R\right]\phi, \quad (3.7)$$

es decir, la métrica conforme tiene un escalar de Ricci no trivial.

### 3.1 Minkowski en 1+1 dimensiones

Se considera primero el espacio-tiempo de Minkowski en 1+1 dimensiones. Se quiere resolver la ecuación de onda  $\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] = 0$  para la métrica (2.16) con funciones de norma (2.17) como un problema de valores iniciales. Dado que la ecuación de onda homogénea es invariante, se resuelve directamente en la métrica conforme. El sistema de ecuaciones de primer orden para la ecuación de onda en este caso esta dado por

$$\begin{aligned}
\partial_t \psi &= \partial_x \left( \frac{\alpha}{\gamma} \pi + \beta \psi \right), \\
\partial_t \pi &= \partial_x \left( \beta \pi + \frac{\alpha}{\gamma} \psi \right), \\
\partial_x \phi &= \psi,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

donde  $\alpha = \alpha(x)$ ,  $\gamma = \gamma(x)$  y  $\pi = \frac{\gamma}{\alpha} \partial_t \phi - \frac{\gamma}{\alpha} \beta^x \partial_x \phi$ . Para este sistema de ecuaciones se toma que  $\alpha\gamma \neq 0$ . La tercera ecuación de (3.8) es la definición de  $\psi$ , pero es también una restricción del sistema que se debe satisfacer durante toda la evolución. El valor de la función de onda se obtiene de la definición de  $\pi$ , que es  $\partial_t \phi = \frac{\alpha}{\gamma} \pi + \beta^x \psi$  y que puede ser integrada junto con  $\pi$  y  $\psi$ . Adicionalmente se escoge  $\mathcal{J}^+$  contenido en el dominio numérico, en  $x = +1$ . La ventaja de tener el futuro infinito nulo en el dominio numérico es que en la frontera  $x = \pm 1$  no es necesario implementar condición de frontera de ningún tipo.

Para este caso, se encuentra que en (3.2)

$$\mathbf{A} = - \begin{pmatrix} \beta^x & \alpha/\gamma \\ \alpha/\gamma & \beta^x \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

y las velocidades características del sistema están dadas por

$$\frac{dx}{dt} = -\beta^x \pm \frac{\alpha}{\gamma}. \tag{3.10}$$

Estos eigenvalores son reales y distintos y en efecto corresponden a un conjunto completo de eigenvectores, lo cual garantiza que el sistema de ecuaciones es fuertemente hiperbólico para  $\alpha, \gamma \neq 0$ , lo cual implica que el problema de valores iniciales para  $\psi$  y  $\pi$  es un problema bien planteado para el caso de Minkowski en 1 + 1.

Se resuelve la ecuación de onda (3.8) como un problema de valores iniciales, usando una aproximación de diferencias finitas a segundo orden (ver Apéndice B). Se necesita tener solo los valores del estado inicial para las variables  $\psi$ ,  $\pi$ . Para la evolución de estos valores iniciales se usa el método de líneas con el integrador Runge-Kutta de tercer orden. Los datos iniciales corresponden a un perfil Gaussiano para  $\phi$  simétrico en el tiempo inicialmente. Para ilustrar el comportamiento para distintas foliaciones se fija en este caso los datos iniciales  $\phi = A e^{-(x-x_0)^2/(\sigma)^2}$ ,  $A = 1$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\psi = \partial_x \phi$  y  $\pi = 0$  para distintos valores de  $\tilde{k}$ . En este caso se escoge que el futuro infinito nulo esté en la frontera  $x = \pm 1$ , por lo tanto no se necesita implementar condiciones de frontera ya que esta es una frontera nula.

Los resultados de la evolución para tres diferentes valores de la curvatura extrínseca promedio  $\tilde{k}$  son los que se muestran en la Figura 3.1. Se puede verificar que el efecto sobre los pulsos, es consistente con los diagramas del espacio-tiempo de la Figura 2.1, es decir, los pulsos tiende a comprimirse al acercarse a la frontera para valores pequeños de la curvatura extrínseca, y sufre el efecto de corrimiento al azul, mientras que para valores grandes de la curvatura el pulso sale de las fronteras sin problemas, incluso más ancho (corrimiento al rojo) que al tiempo inicial.

Puesto que la solución de la ecuación se obtuvo de manera numérica, es necesario verificar la convergencia de la solución (ver Apéndice B), así como también se verifica que se cumpla la constricción. La prueba de auto-convergencia se muestra en la Figura 3.2 para  $\phi$ , donde se consideran tres resoluciones distintas para la solución de la ecuación de onda y se puede ver que efectivamente para resoluciones más finas el error numérico disminuye a razón de cuatro como se esperaba al usar aproximaciones de diferencias finitas a segundo orden. También es de esperarse que la constricción se cumpla en el límite continuo durante la evolución. En la Figura 3.3 se muestra la norma  $L_2$  de la constricción.

## 3.2 Minkowski en 3+1 dimensiones

Se quiere resolver de nueva cuenta la ecuación de onda  $\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] = 0$  para la cuatro métrica (2.27) y las funciones de norma (2.28) como un problema de valores iniciales. Como en el caso previo, se asume que  $\alpha = \alpha(r)$  y  $\gamma = \gamma(r)$ ,  $y = r$ . En este caso la ecuación de onda invariante en términos de las variables de primer orden es

$$\begin{aligned}\partial_t\psi &= \partial_r\left(\frac{\alpha}{\gamma}\pi + \beta^r\psi\right), \\ \partial_t\pi &= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2(\beta^r\pi + \frac{\alpha}{\gamma}\psi)\right) - \frac{\alpha\gamma}{6}R\phi, \\ \partial_r\phi &= \psi,\end{aligned}\tag{3.11}$$

donde  $\pi = \frac{\gamma}{\alpha}\partial_t\phi - \frac{\gamma}{\alpha}\beta^r\partial_r\phi$  y  $\psi = \partial_r\phi$ . Ahora, para evitar la singularidad de la ecuación de evolución para  $\pi$  en el origen, reemplazamos el lado derecho de la ecuación usando una derivada con respecto a  $r^3$ :  $\partial_t\pi = 3\partial_{r^3}\left(r^2(\beta^r\pi + \frac{\alpha}{\gamma}\psi)\right)$ .

Por otro lado se tiene que la parte principal del sistema (3.11) tiene la misma estructura característica que en el caso de Minkowski en 1+1 dimensiones estudiado anteriormente, que es un sistema simétrico hiperbólico y las velocidades características son:



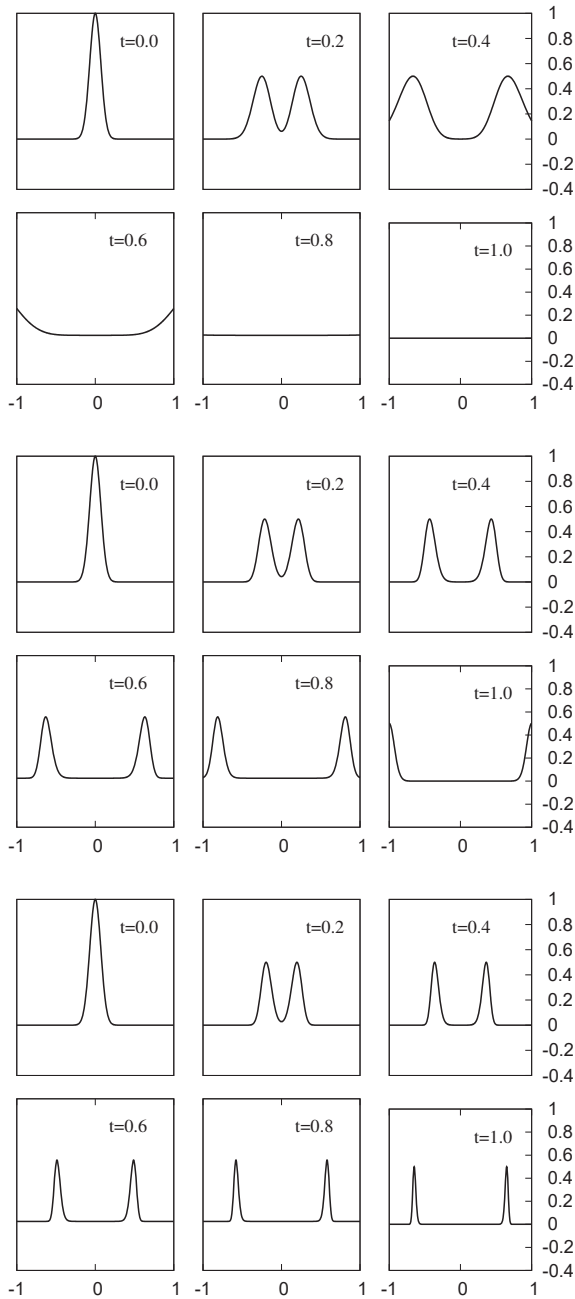


Figura 3.1: Evolución de la función de onda en el espacio-tiempo de Minkowski en 1+1 dimensiones para  $a = 0.5$  (arriba),  $a = 1$  (en medio) y  $a = 5$  (abajo) o equivalentemente  $\tilde{k} = 2, 1, 0.2$  respectivamente. Estos resultados son consistentes con los diagramas del espacio-tiempo en la Fig. 2.1, donde los conos de luz tienden a cerrarse cerca de las fronteras para valores grandes de  $a$  (valores pequeños de la curvatura), para cualquier pulso que se aproxime a las fronteras. Los datos iniciales usados son  $A = 1$ ,  $\sigma = 0.1$  y  $x_0 = 0$ .

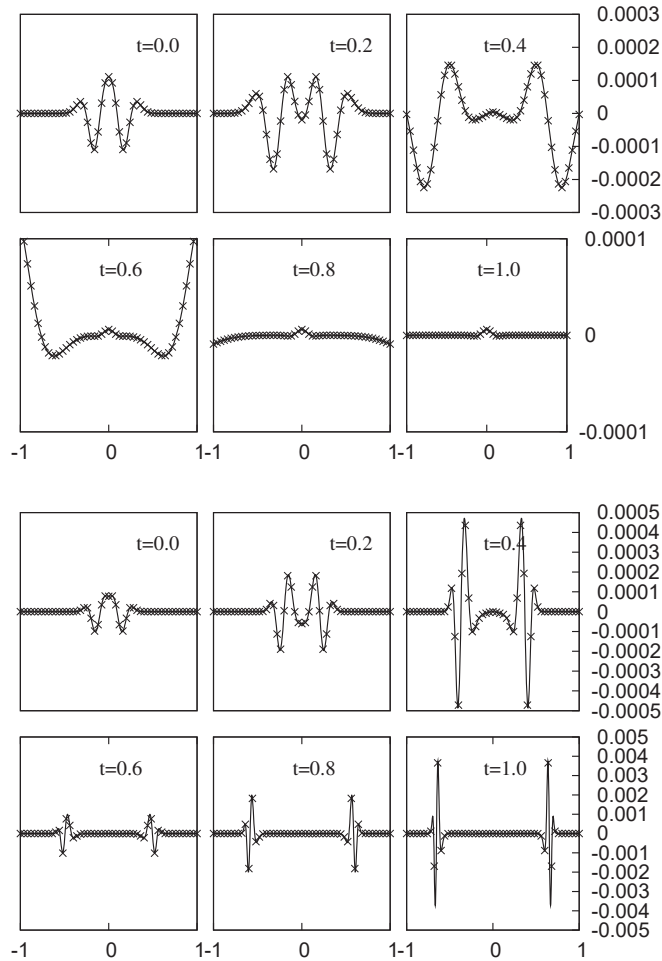


Figura 3.2: Gráficas de auto-convergencia para  $\phi$  en el caso de Minkowski en 1+1. Se tiene dos valores para la curvatura  $\tilde{k} = 2$  (arriba) y  $\tilde{k} = 0.2$  (abajo). Esta gráfica muestra que para tres resoluciones distintas el factor de convergencia es 4 como se esperaba para distintos valores del tiempo. La línea continua es la diferencia de  $\phi$  calculada usando las resoluciones  $\Delta x = 2 \times 10^{-3}$  y  $\Delta x = 1 \times 10^{-3}$  y las líneas con los símbolos  $\times$  es la diferencia de  $\phi$  calculada con las resoluciones  $\Delta x = 1 \times 10^{-3}$  y  $\Delta x = 5 \times 10^{-4}$  multiplicada por 4.

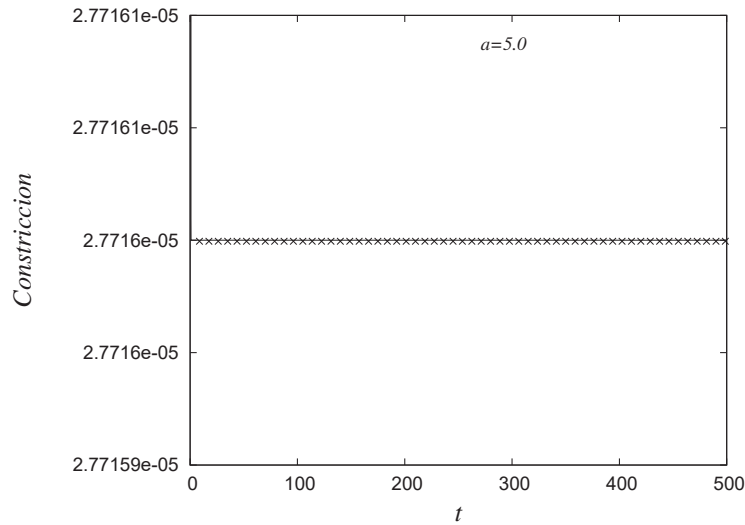


Figura 3.3: Gráfica de la norma  $L_2$  de la constricción  $c = \psi - \partial_x \phi$  en el caso de Minkowski 1+1, para las resoluciones  $\Delta x = 1 \times 10^{-3}$  y  $\Delta x = 5 \times 10^{-4}$  multiplicada por 4.

$$\frac{dr}{dt} = -\beta^r \pm \frac{\alpha}{\gamma}. \quad (3.12)$$

Estas ecuaciones de evolución aplican también para el caso del espacio-tiempo de Schwarzschild que se desarrollará en la siguiente sección. En el presente caso se usa nuevamente un dato inicial correspondiente a una función de onda con un perfil Gaussiano simétrico en el tiempo. En este caso se usa un perfil de la forma  $\phi = e^{-r^2/(0.1)^2}$ ,  $\psi = \partial_r \phi$  y  $\pi = 0$ . Nuevamente en este caso la frontera es nulas. Los resultados se muestran en la Fig. 3.4.

Una vez más, se puede notar que para valores pequeños de  $\tilde{k}$  los pulsos llegan a la frontera, sin embargo van frenando su velocidad cuando se aproximan a la frontera, y sufren un corrimiento al azul. La razón otra vez es que las hipersuperficies con curvatura pequeña llegan a  $\mathcal{J}^+$  pero se juntan cerca de la frontera tal y como se puede ver en los diagramas conformes de la Fig. 2.4. A diferencia del caso anterior también se puede notar que la amplitud del pulso inicial disminuye conforme esta avanza a las fronteras como  $1/r$ , esto se debe a que ahora se tiene una onda esférica.

La prueba de auto-convergencia para Minkowski en 3+1 dimensiones se muestra en la Figura 3.5. Nuevamente esta prueba se hace considerando tres resoluciones en el dominio numérico. La línea continua muestra la diferencia de  $\phi$  calculada con las

resoluciones baja y media, la línea marcada con  $\times$  es la diferencia de  $\phi$  usando las resoluciones numéricas media y alta multiplicada por 4. Nuevamente se verifica que el error disminuye a la razón adecuada.

También en la Figura 3.6 se tiene la constricción  $c = \psi - \partial_x \phi$  que como en el caso anterior converge durante la evolución con segundo orden.

### 3.3 Espacio-tiempo de Schwarzschild

En este caso se quiere resolver la ecuación de onda en un espacio-tiempo de fondo de Schwarzschild en coordenadas en la que se tiene dos propiedades importantes: i) la onda penetra el horizonte de eventos del hoyo negro y ii) la onda llega y sale a través del futuro infinito nulo.

En este caso se considera nuevamente que la función de onda  $\phi$  depende de  $t, r$ . Usando nuevamente las variables  $\psi$  y  $\pi$ , la ecuación de onda en el espacio-tiempo conforme se transforma en las ecuaciones de evolución

$$\begin{aligned}\partial_t \psi &= \partial_r \left( \frac{\alpha}{\gamma} \pi + \beta^r \psi \right), \\ \partial_t \pi &= \frac{1}{r^2} \partial_r \left( r^2 (\beta^r \pi + \frac{\alpha}{\gamma} \psi) \right) - \frac{\alpha \gamma}{6} R \phi, \\ \partial_r \phi &= \psi,\end{aligned}\tag{3.13}$$

donde

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{\gamma}{\alpha} \partial_t \phi - \frac{\gamma}{\alpha} \beta^r \partial_r \phi, \\ R &= \frac{12\Omega}{r^2} (r + m(2r - 1)).\end{aligned}\tag{3.14}$$

Recordando que  $R$  es el escalar de Ricci asociado a la métrica reescalada y conformemente compactificada,  $\Omega$  es el factor conforme,  $m$  es la masa del hoyo negro. Usando las funciones de norma en (2.34) se resuelve la ecuación de onda en el espacio-tiempo resultante usando las ecuaciones (3.13). Recordemos también que se quiere resolver este sistema de ecuaciones como un problema de valores iniciales. En este caso se escoge que la función  $\phi$  satisfaga las siguientes condiciones iniciales en la hipersuperficie inicial:

$$\begin{aligned}\phi(0, r) &= A e^{-(r-r_0)^2/\sigma^2}, \\ \psi(0, r) &= -2 \frac{(r-r_0)}{\sigma^2} \phi(0, r), \\ \pi(0, r) &= 0,\end{aligned}\tag{3.15}$$

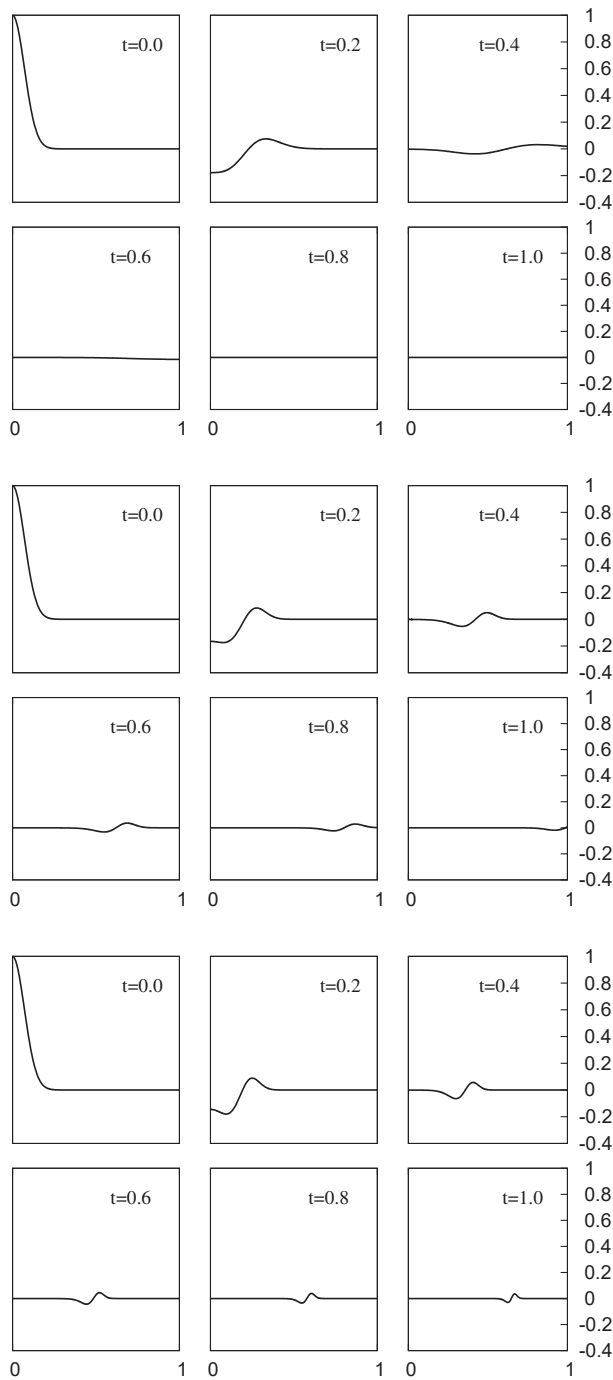


Figura 3.4: Evolución de la función de onda para  $a = 0.5$  (arriba),  $a = 1$  (en medio) y  $a = 5$  (abajo) o equivalentemente  $\tilde{k} = 6, 3, 0.6$ , para el espacio-tiempo de Minkowski en 3+1 dimensiones en coordenadas esféricas. Se puede ver que para valores grandes de la curvatura la onda llega fácilmente a la frontera (en  $\mathcal{J}^+$ ), así como para valores pequeños de la curvatura la función de onda sufre el corrimiento al azul cuando se aproxima a la frontera y el perfil inicial se va comprimiendo como sugiere la estructura de los conos de luz presentados en el capítulo 2.

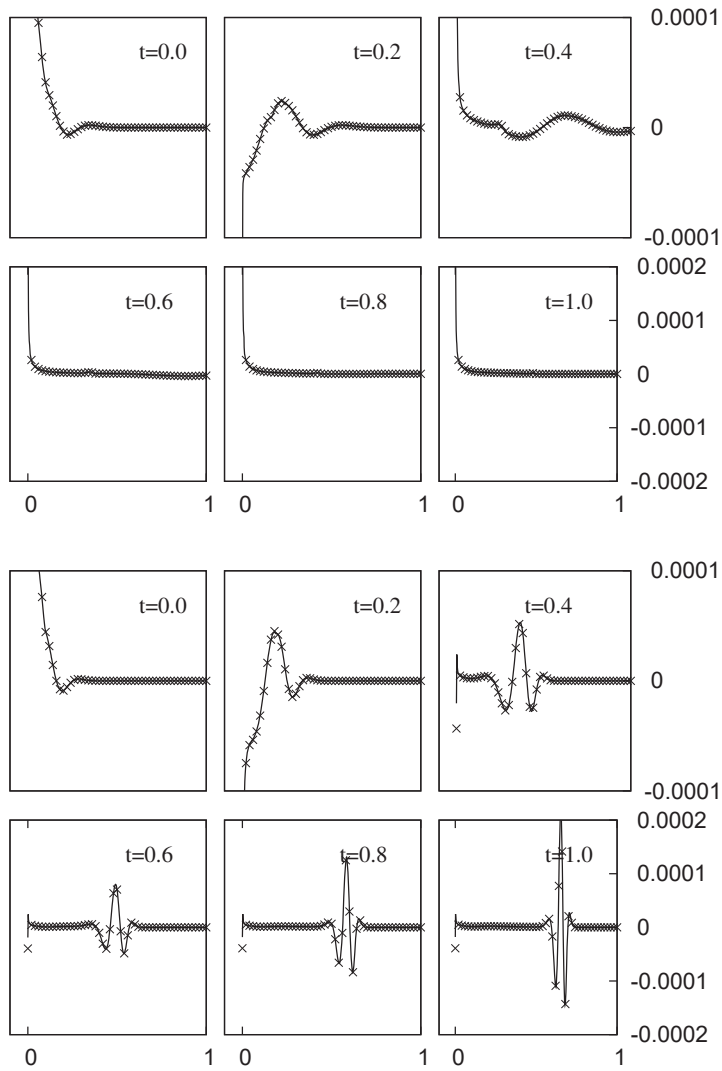


Figura 3.5: Gráficas de auto-convergencia para el espacio-tiempo de Minkowski en 3+1 dimensiones. Se muestran casos para dos valores de  $a$ ,  $a = 0.5$  (arriba) y  $a = 5.0$  (abajo). Se tienen casos con tres resoluciones distintas  $\Delta r = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\Delta r = 51 \times 10^{-4}$  y  $\Delta r = 2.51 \times 10^{-4}$ , el factor de convergencia es 4. La línea continua es la diferencia de  $\phi$  usando las dos primeras resoluciones y las líneas con los símbolos  $\times$  es la diferencia de  $\phi$  usando las dos últimas resoluciones multiplicada por 4.

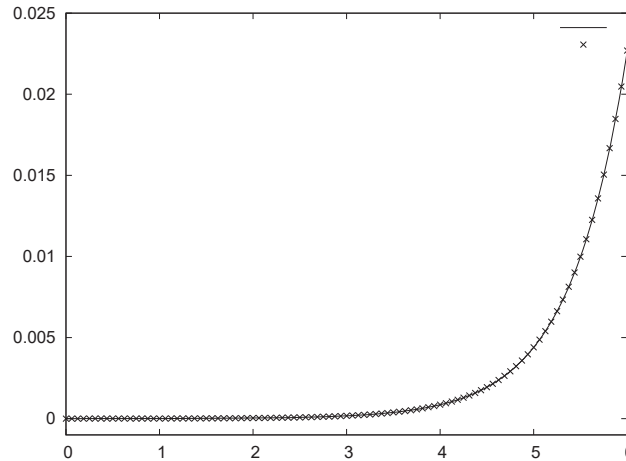


Figura 3.6: Gráfica de la norma  $L_2$  de la constricción,  $c = \psi - \partial_r \phi$  para el caso de Minkowski en 3+1 dimensiones con  $a = 0.5$ . Las resoluciones usadas son  $\Delta r = 5 \times 10^{-4}$  y  $\Delta r = 2.5 \times 10^{-4}$ . El factor de convergencia es cuatro debido que se usa una aproximación de diferencias finitas de segundo orden. La línea continua es la constricción calculada usando la primera resolución y la línea  $\times$  es la constricción calculada usando la segunda resolución multiplicada por 4.

$A$  es la amplitud del perfil Gaussiano,  $r_0$  la posición inicial del pulso,  $\phi(0, r)$  es un perfil Gaussiano simétrico en el tiempo, localizado fuera del horizonte de eventos. Nuevamente la frontera exterior es nula. Adicionalmente se tiene una frontera en el interior del horizonte de eventos en  $r_{exc}$ , pero tampoco se imponen condiciones de frontera debido a que los conos de luz apuntan hacia dentro del horizonte. Sin embargo al resolver la ecuación de onda aparecen ruidos de altas frecuencias por lo cual fue necesario extrapolar los lados derechos de las ecuaciones para  $\phi$ ,  $\psi$  y  $pi$ .

Se verificó que  $P(r)$  es siempre real para valores de  $C$  y los de  $\tilde{k}$  que se usan aquí (ver ecuación (2.40)). Se escoge un radio de excisión  $r_{exc} = 0.6 < 2/3$  tal que en el dominio numérico se cumpla que  $P(r)$  sea real.

Finalmente se resuelven las ecuaciones (3.15) con las funciones de norma (2.34) usando el integrador Runge-Kutta de tercer orden y estenciles de segundo orden (ver apéndice B). Los resultados de la evolución se muestran en la Figura 3.7, donde recordamos que el pulso inicial se convierte en dos: uno moviéndose a la derecha, que se va a través de  $\mathcal{J}^+$  y otro que se mueve a la izquierda, en dirección del horizonte. Para valores pequeños de  $\tilde{k}$  el pulso moviéndose hacia la derecha sufre el mismo efecto que se ha visto en los casos anteriores, principalmente, los pulsos reducen su velocidad cuando

se aproximan a  $\mathcal{J}^+$  como se puede observar en los diagramas de espacio-tiempo en la Fig. 2.5, donde para valores grandes de  $\tilde{k}$  el pulso moviéndose a la derecha llega fácilmente a  $\mathcal{J}^+$ . La prueba de convergencia del código numérico para este caso se muestra en la Figura 3.9, donde se usan tres resoluciones distintas. Se puede ver en la Figura 3.9 que efectivamente se cumple que el error disminuye al aumentar la resolución en el dominio numérico con segundo orden. Se puede ver en esta figura que para  $t = 45$  se tiene un error mayor y se debe mencionar que esto se debe a que para la resolución mas baja  $\Delta x = 1 \times 10^{-3}$  a este tiempo se tiene un error de alta frecuencia rebotando de la frontera que se resuelve aumentando la resolución.



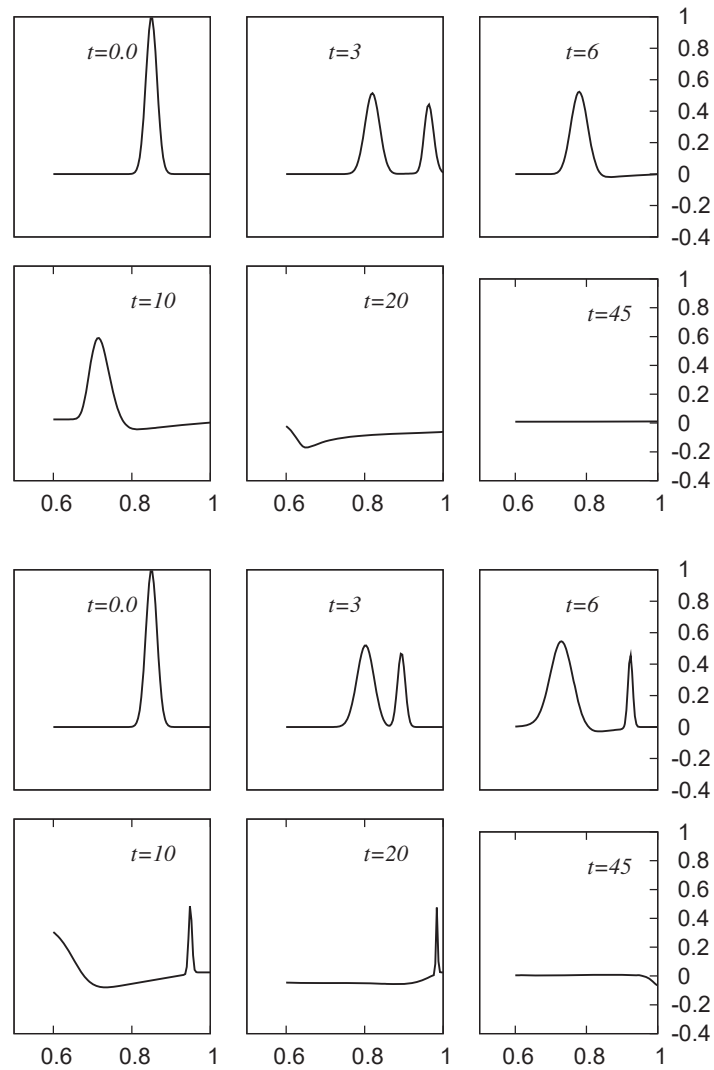


Figura 3.7: Se muestra la función de onda en el espacio-tiempo de Schwarzschild a diferentes tiempos para valores de la curvatura  $\tilde{k} = 0.4, 0.1$  (arriba y abajo respectivamente) para la ecuación de onda en el espacio-tiempo dado por (2.39). Nuevamente, las hipersuperficies espaciales 3 dimensionales con curvatura pequeña implican que los pulsos se compriman y se vayan deteniendo antes de llegar a  $\mathcal{J}^+$ , sin embargo para valores grandes de la curvatura los pulsos salientes llegan al futuro infinito nulo fácilmente. La Gaussiana inicial está localizada en  $r = 0.8$ . El pulso inicial se divide en dos, uno que llega a la frontera de excisión y otro que va en dirección de  $\mathcal{J}^+$ .

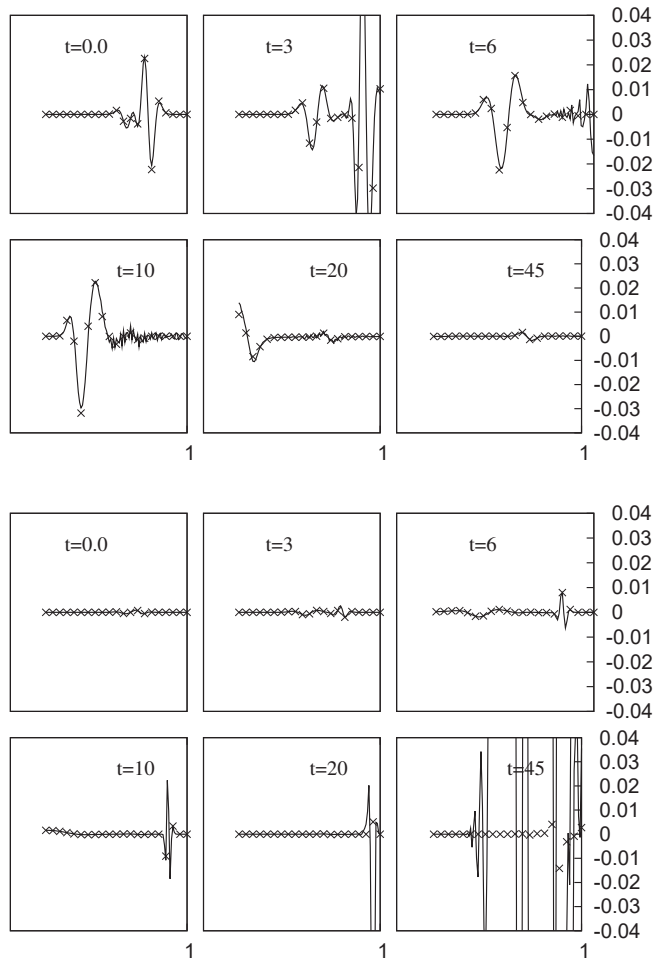


Figura 3.8: Gráficas de auto-convergencia para la función de onda en el espacio-tiempo de Schwarzschild para dos valores distintos de la curvatura  $\tilde{k} = 0.4$  (arriba) y  $\tilde{k} = 0.1$  (abajo). Se usan tres resoluciones  $\Delta r = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\Delta r = 5 \times 10^{-5}$  y  $\Delta r = 2.5 \times 10^{-5}$ . La línea continua es la diferencia de las resoluciones baja y media mientras que la línea marcada con  $\times$  es la diferencia de las resoluciones media y alta multiplicada por 4. Se puede ver que la convergencia se pierde para  $\tilde{k} = 0.1$ , esto se debe a que para la resolución más baja rebota de la frontera un error de alta frecuencia, este error se elimina aumentando la resolución del dominio numérico.

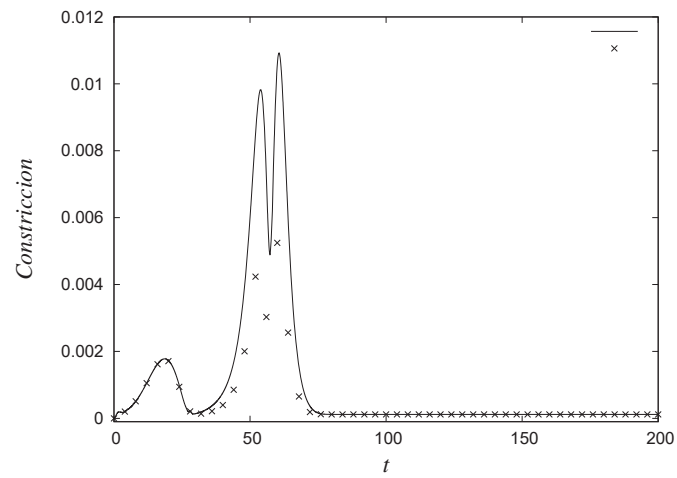


Figura 3.9: Gráfica de la norma  $L_2$  de la constricción,  $c = \psi - \partial_r \phi$  para las resoluciones  $\Delta r = 5 \times 10^{-5}$  y  $\Delta r = 2.5 \times 10^{-5}$  multiplicada por 4.



# Capítulo 4

## Colas de decaimiento de campo escalar sin masa

Matemáticamente, solo en el futuro infinito nulo es donde se puede tener la definición de la radiación gravitacional. Es por eso que el infinito nulo tiene una gran relevancia astrofísica en la predicción de señales de radiación gravitacional que se esperan detectar por detectores gravitacionales.

Sin embargo la noción de futuro infinito nulo dificulta la detección de ondas gravitacionales, puesto que los detectores solo pueden estar a una distancia finita de la fuente y se mueven a lo largo de curvas tipo tiempo. Por otro lado ha sido demostrado por *Pürrer et al.* en [21] que una característica adecuada para estimar la validez del concepto de infinito nulo en la predicción de detección de señales es el estudio del comportamiento de las colas en la radiación. Este efecto en la función de onda aparece cuando se hace un estudio a larga escala en el tiempo. Esta razón de decaimiento es polinomial.

Un tratamiento matemático de las colas en la solución de onda en [22], sugiere que el decaimiento asintótico de la solución de la ecuación de onda sea de la forma

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(t, \tilde{r})| = Ct^p \quad (4.1)$$

donde  $C$  depende de  $r$ , y  $p$  es el exponente de decaimiento.

Para medir este efecto en la solución de la ecuación de onda es necesario posicionar detectores a lo largo del dominio numérico que midan el valor de la función de onda a diferentes distancias de la fuente, en particular se está interesado en el comportamiento de un campo escalar no masivo sobre el espacio-tiempo de un hoyo negro descrito por la métrica de Schwarzschild. Cada detector estará en un lugar finito en el dominio numérico.

## 4.1 Solución de la ecuación de onda en el espacio-tiempo de Schwarzschild

Se considera en este caso una función de onda  $\Phi$  que depende de  $t, r, \theta, \varphi$ . Se usa el método de separación de variables  $\Phi(t, r, \theta, \varphi) = \phi(t, r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , donde  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  son los armónicos esféricos usuales. Finalmente, usando nuevamente las variables de primer orden  $\psi$  y  $\pi$ , la ecuación de onda invariante conforme dependiente de  $\theta$  y  $\varphi$ , se transforma en las ecuaciones de evolución

$$\begin{aligned}\partial_t \psi &= \partial_r \left( \frac{\alpha}{\gamma} \pi + \beta^r \psi \right), \\ \partial_t \pi &= \frac{1}{r^2} \partial_r \left( r^2 (\beta^r \pi + \frac{\alpha}{\gamma} \psi) \right) - \alpha \gamma \left( \frac{1}{6} R \phi + \frac{l(l+1)}{r^2} \phi \right),\end{aligned}\quad (4.2)$$

donde

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{\gamma}{\alpha} \partial_t \phi - \frac{\gamma}{\alpha} \beta^r \partial_r \phi, \\ R &= \frac{12\Omega}{r^2} (r + m(2r - 1)),\end{aligned}\quad (4.3)$$

recordemos que  $R$  es el escalar de Ricci asociado a la métrica con compactificación conforme,  $l$  está asociado a la parte angular de la función de onda, el resto de las cantidades son idénticas al caso de la sección 3.3. En este trabajo se resuelve la ecuación de onda para tres diferentes valores  $l = 0, 1, 2$ . Usando las funciones de norma en (2.34) se resuelve la ecuación de onda en el espacio-tiempo conforme usando las ecuaciones (4.2). Recordemos también que se quiere resolver este sistema de ecuaciones como un problema de valores iniciales. En este caso se escoge que la función  $\phi$  satisfaga la condición de que el pulso se aleje del horizonte de eventos

$$\partial_t(r\phi) + \lambda_+ \partial_r(r\phi) = 0, \quad (4.4)$$

en la hipersuperficie inicial, donde  $\lambda_+$  es la velocidad característica de pulso que avanza hacia el futuro infinito nulo, que para este caso es  $\lambda_+ = -\beta + \frac{\alpha}{\gamma}$ . Se tiene entonces los datos iniciales

$$\begin{aligned}\phi(0, r) &= A e^{-(r-r_0)^2/\sigma^2}, \\ \psi(0, r) &= -2 \frac{(r-r_0)}{\sigma^2} \phi(0, r), \\ \pi(0, r) &= -\psi(0, r) - \frac{\phi(0, r)}{r} \left( \beta^r - \frac{\alpha}{\gamma} \right).\end{aligned}\quad (4.5)$$

Se exploran varias posibilidades para resolver numéricamente este sistema. Se obtuvo que para resolver este sistema de ecuaciones de una manera eficaz y precisa es necesario usar una aproximación en diferencias finitas a sexto orden, y un integrador de Runge-Kutta a cuarto orden (ver Apéndice B). Las condiciones de frontera son las mismas que en el caso de la onda esférica.

Para que los observadores puedan medir el valor de la función de onda en posiciones distintas en el dominio numérico, se colocan detectores a distancias igualmente espaciadas. Esta posición no necesariamente coincide con los punto de la malla numérica, por lo cual es necesario hacer una interpolación de los valores de la función de onda.

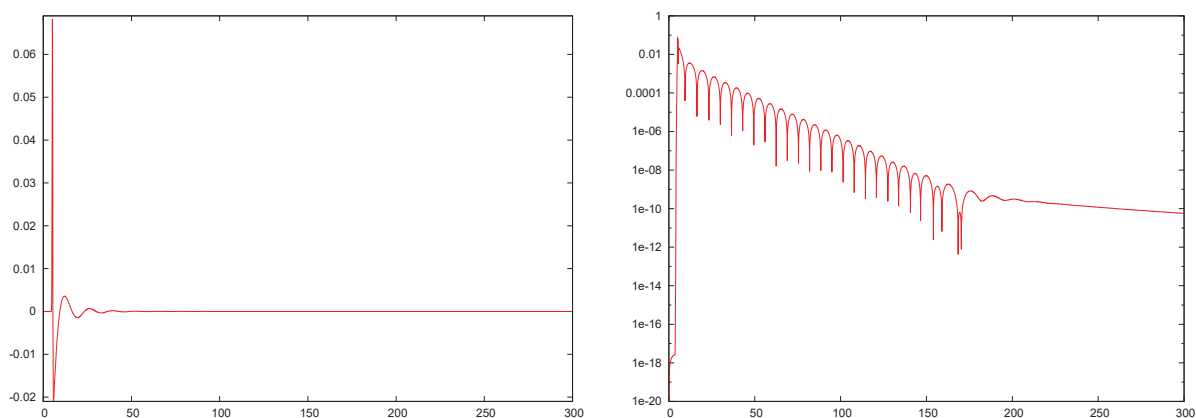


Figura 4.1: Se tiene la gráfica de la solución de la ecuación de onda a largas escalas en el tiempo (izquierda) y la gráfica semi-logarítmica  $\log|\phi| - t$  (derecha), donde se puede ver en la primera figura el comportamiento de la solución de onda y en la segunda los modos cuasinormales y la cola a tiempos muy grandes para el caso de  $l = 2$ . El detector está situado en  $\mathcal{I}^+$ .

Se explora el espacio de parámetros, que para la construcción de las foliaciones hiperbolicas son la constante de integración  $C$  y la curvatura extrínseca media  $\tilde{k}$ , y para los datos iniciales son la amplitud  $A$ , el ancho del pulso inicial  $\sigma$  y la posición inicial. En este trabajo estamos interesados en el estudio de las frecuencias de los modos cuasinormales y el comportamiento de las colas. Por lo tanto se fijan los parámetros  $C$  y  $\tilde{k}$  y nos concentramos en un estudio más detallado del comportamiento de la solución de la ecuación de onda dependiente de los valores iniciales de  $\phi$ .

Ahora se muestran los resultados de la solución de la ecuación de onda a largas escalas en el tiempo, para observadores a distintas distancias de la fuente.

Se presenta el caso más típico en el estudio de las colas. En la Figura 4.1. Se tiene el perfil de la solución de la ecuación de onda con el futuro infinito nulo en un lugar finito a tiempos largos, se puede observar los modos cuasinormales y también que la función de onda decae en una cola. Este perfil de la función de onda se mide por un detector en  $\mathcal{J}^+$ . Más adelante se hace un tratamiento mas detallado de este decaimiento cambiando los parámetros antes mencionados, para tres diferentes valores de la parte angular  $l$ .

### Solución de la ecuación de onda para $l = 2$

Se considera como primer caso, la solución de la ecuación de onda para  $l = 2$ , fijando este parámetro. Ahora se tiene la libertad de variar la amplitud, el ancho de la onda y la posición inicial del pulso Gaussiano.

Se está interesado en estudiar el comportamiento de la función de onda a tiempos largos, al variar todos estos parámetros libres que se tienen. En particular se escoge evolucionar la función de onda hasta un tiempo  $t = 1000$ , pues se mantiene la convergencia.

Fijando  $x_0 = 0.8$ ,  $\sigma = 0.01$ , la evolución de los datos iniciales con diferentes amplitudes se muestra en la Figura 4.2. Se puede ver los modos cuasinormales para amplitudes  $A = 0.1, 10, 1000$ .

También se puede apreciar que para tiempos suficientemente grandes la función de onda tiende a decaer en colas, cuyos exponentes de decaimiento se muestran en la tabla 4.1. Para este y todos los casos posteriores se muestran dos gráficas una para un observador situado en el futuro infinito nulo y uno para un observador a una distancia finita de la fuente. En la tabla así como en las gráficas se tienen los valores de los exponentes para dos observadores; uno en futuro infinito nulo y otro en  $\tilde{r} = 110M$ , de los cuales se puede aprender que la razón de decaimiento es la misma para los tres valores de la amplitud, sin embargo este exponente cambia para cada uno de los detectores. Para determinar el exponente de decaimiento se hace un estimación usando una función de la forma  $f(x) = a/x^b + c$  y los datos obtenidos de la evolución de la función de onda  $\phi$ , obteniendo así los valores de  $a, b$  y  $c$ . Debido a que las colas aparecen a tiempos grandes, esta estimación se hace en el intervalo de tiempo  $\tilde{r} = [300, 1000]$  en este caso.

Ahora se fija  $A = 0.1$ ,  $\sigma = 0.01$  para evolucionar el perfil inicial cambiando la posición inicial de dicho perfil. Se usan tres diferentes valores de la posición inicial  $x_0 = 0.7, 0.8, 0.9$ . Se puede ver que para el observador en scri plus el exponente de decaimiento de la cola no cambia, como se puede ver en la Figura 4.3 y en la tabla



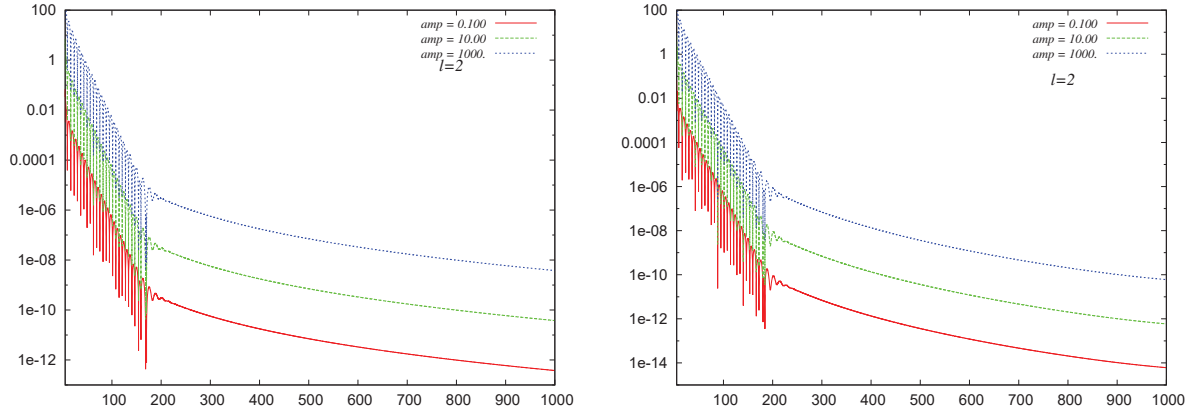


Figura 4.2: Gráfica de  $|\phi|$  contra  $t$  para diferentes valores de la amplitud de la función de onda con  $x_0 = 0.8$  y  $\sigma = 0.01$ . Se tiene el comportamiento de la función de onda para dos observadores, uno de ellos colocado en  $\mathcal{J}^+$  (izquierda) y otro en  $\tilde{r} = 110M$  (derecha). Se puede observar de manera clara que para cierto intervalo de tiempo se tienen los modos cuasinormales de oscilación y las colas a tiempos posteriores.

	<i>Amplitud</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
$\mathcal{J}^+$	0.1	0.885164	4.112026	- 0.41261e-13
	10	88.51640	4.112026	- 0.41261e-11
	100	8851.640	4.112026	- 0.41261e-9
$\tilde{r} = 110M$	0.1	918.002	5.69975	-2.46463e-15
	10	91800.2	5.69975	-2.46463e-13
	100	9180020	5.69975	-2.46463e-11

Tabla 4.1: Tabla de parámetros para diferentes amplitudes de la función de onda, con  $l = 2$  y un observador en  $\mathcal{J}^+$  y otro en  $\tilde{r} = 110M$ .  $f(x) = a/x^b + c$ . En esta tabla se tiene los valores de los exponentes de decaimiento de la solución de la ecuación de onda para diferentes valores de la amplitud, se puede notar que variar la amplitud no cambia la razón de decaimiento, es decir, distintos datos iniciales implican igual decaimiento.

4.2. Así como también se puede verificar que ocurre lo mismo para un observador situado en  $\tilde{r} = 110M$  en la tabla 4.2. Sin embargo un error de alta frecuencia rebota de la frontera interna a tiempos muy grandes y afecta a las mediciones hechas por un observador situado cerca de la fuente, como se puede observar en la Figura 4.3 para el observador situado en  $\tilde{r} = 110M$  y con  $x_0 = 0.7$ . Este efecto se debe a que no se usa disipación como se sugiere en trabajos previos, sin embargo esto se soluciona aumentando la resolución del dominio numérico.

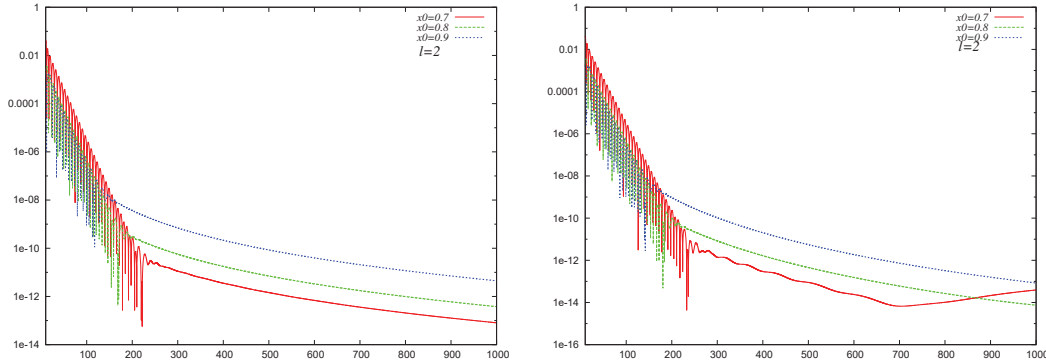


Figura 4.3: Gráfica  $\log-t$  para diferentes valores de la posición inicial,  $A = 0.1$ ,  $\sigma = 0.01$ .(izquierda en  $\mathcal{J}^+$ ) (derecha en  $\tilde{r} = 110M$ )

	$x_0$	$a$	$b$	$c$
$\mathcal{J}^+$	0.7	0.102621	4.01847	- 1.30350e-14
	0.8	0.267254	3.91406	- 1.08631e-13
	0.9	9.967160	4.09981	- 7.19793e-13
$\tilde{r} = 110M$	0.7	201.027	5.72939	- 1.19104e-14
	0.8	918.002	5.69975	- 1.46463e-15
	0.9	16176.4	5.75941	- 2.13529e-14

Tabla 4.2: Tabla de parámetros para diferentes posiciones iniciales,  $l = 2$  y un observador en  $\mathcal{J}^+$  y en  $\tilde{r} = 110M$ .  $f(x) = a/x^b + c$ . En esta tabla se tiene los valores de los exponentes de decaimiento de la solución de la ecuación de onda para diferentes valores de la amplitud, se puede notar que al variar la amplitud la razón de decaimiento cambia significativamente en algunos casos, debido a que . La aproximación se hace en el intervalo  $M = [300, 1000]$ .

El último caso para  $l = 2$ , es dejar fijos  $A = 0.1$  y  $x_0 = 0.8$ , variando ahora el parámetro  $\sigma$ . Los resultados se muestran en la Figura 4.4 para observadores en scri plus y en  $\tilde{r} = 110M$  respectivamente. Los exponentes de decaimiento que miden estos observadores se muestra en la tabla 4.3.

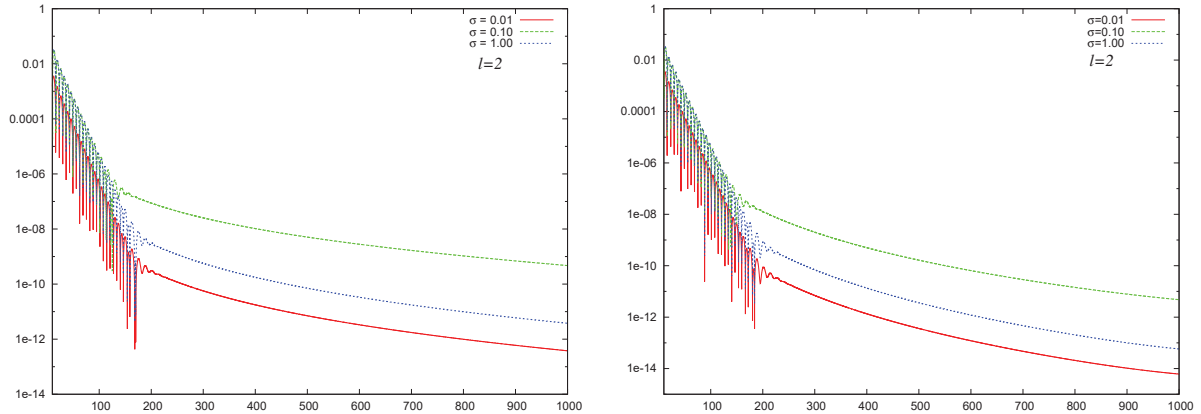


Figura 4.4: Gráfica  $\log-t$  para diferentes valores de  $\sigma$ ,  $A = 0.1$ ,  $x_0 = 0.8$ . El valor de la función de onda se mide por dos observadores situados en  $\mathcal{J}^+$  (izquierda) y  $\tilde{r} = 110M$  (derecha).

	$\sigma$	$a$	$b$	$c$
$\mathcal{J}^+$	0.01	0.2204944	3.85496	-2.65521e-13
	0.1	1.1820900	3.09427	-1.74011e-10
	1.0	6.2238400	4.05312	-7.63042e-13
$\tilde{r} = 110M$	0.01	918.002	5.69975	-2.46463e-15
	0.1	1815.39	4.82531	-2.46027e-12
	1.0	9183.02	5.69981	-2.77828e-14

Tabla 4.3: Tabla de parámetros para diferentes valores de  $\sigma$ ,  $l = 2$  y un observador en scri plus.  $f(x) = a/x^b + c$ . En esta tabla se tiene los valores de los exponentes de decaimiento de la solución de la ecuación de onda para diferentes valores de la amplitud, se puede notar que variar la amplitud no cambia la razón de decaimiento. Esta medición se hace en el intervalo  $M = [300, 1000]$ .

Finalmente se presenta la gráfica 4.5 donde se presenta el comportamiento de la evolución de la función de onda medida por diez diferentes detectores igualmente espaciados. Donde se puede observar que en cierto intervalo de tiempo se tienen modos cuasinormales y en otro intervalo de tiempo se tiene colas de decaimiento de la función de onda. De esta figura se puede aprender que el exponente de decaimiento de las colas es distinta para cada observador, como se podrá verificar más adelante en la tabla 4.5. En este caso estamos interesados en medir las frecuencias real  $\omega_2$  e imaginaria  $\omega_1$  de los modos cuasinormales, las cuales se obtienen de considerar una solución de la ecuación de onda de la forma  $f(x) = ae^{-\omega_1 x} \cos(\omega_2 x + \chi)$ , donde  $a$  es la amplitud del perfil Gaussiano y  $\chi$  es la fase, para el caso de  $l = 2$  estas frecuencias medidas por diez detectores a diferentes distancias se pueden ver en la tabla 4.4. Un resultado muy importante es que las frecuencias medidas por los detectores que se encuentran a distintas distancias de la fuente son ligeramente distintas, y disminuyen al alejarse de la fuente.

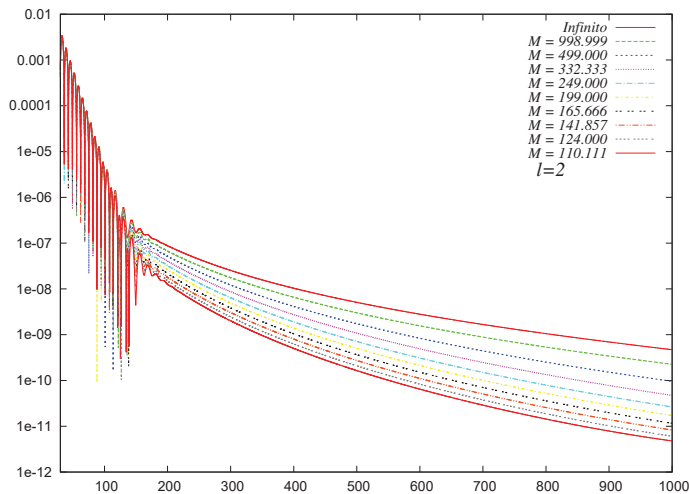


Figura 4.5: Gráfica  $\log-t$  de la función de onda medido por diferentes detectores situados a distancias finitas de la fuente incluso al futuro infinito nulo. Para este caso se usa  $A = 0.1$ ,  $x_0 = 0.8$  y  $\sigma = 0.1$ .

### Solución de la ecuación de onda para $l = 1$

Ahora se tiene la solución de la ecuación de onda para el caso  $l = 1$ , se consideraron varios casos. Cambiando la amplitud se obtuvo la Figura 4.6, cambiando la posición inicial se obtiene la Figura 4.7 y para diferentes valores de  $\sigma$ , la Figura 4.8. También se compara la función de onda medida en diferentes posiciones, es decir por diferentes detectores posicionados en diferentes lugares en el dominio, Figura 4.9.

$M$	$a$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\chi$
$\mathcal{J}^+$	0.0105208	0.103072	0.477734	6.12947
999	0.0104615	0.102990	0.477770	6.13583
499	0.0104029	0.102908	0.477805	6.14223
332	0.0103448	0.102827	0.477840	6.14864
249	0.0102873	0.102747	0.477875	6.15507
199	0.0102305	0.102667	0.477909	6.16151
165	0.0101743	0.102589	0.477943	6.16797
142	0.0101187	0.102511	0.477976	6.17445
124	0.0100630	0.102434	0.478009	6.18094
110	0.0100093	0.102357	0.478041	6.18744

Tabla 4.4: Tabla de frecuencias de los modos cuasinormales de la solución de la ecuación de onda para  $A = 0.1$ ,  $\sigma = 0.01$ ,  $x_0$  y  $l = 2$ . Estas frecuencias se miden en el intervalo  $t = [20, 80]$  comparando la solución numérica con una función de la forma  $f(x) = ae^{-\omega_1 x} \cos(\omega_2 x + \chi)$ .

Detector ( $M$ )	a	b	c
$\mathcal{J}^+$	-0.62233	4.05310	7.58370e-14
999	-2.28181	4.32949	4.45549e-14
499	-8.94095	4.61773	4.14424e-14
332	-28.1004	4.86515	2.56436e-14
249	-72.4827	5.07554	1.57587e-14
199	-145.370	5.23743	1.09730e-14
165	-260.678	5.37764	0.84573e-14
142	-429.359	5.50106	0.50875e-14
124	-660.507	5.61072	0.21014e-14
110	-918.002	5.69975	1.76463e-15

Tabla 4.5: Tabla para diferentes observadores.  $f(x) = a/x^b + c$ ,  $l = 2$ . Aquí se muestra como cambia el exponente  $b$  para diez detectores que se encuentran a diferentes distancias de la fuente incluso  $\mathcal{J}^+$ . Se puede apreciar que para un detector en  $\mathcal{J}^+$  el exponente de decaimiento es menor al exponente que mide un observador que está a  $110M$  de la fuente.

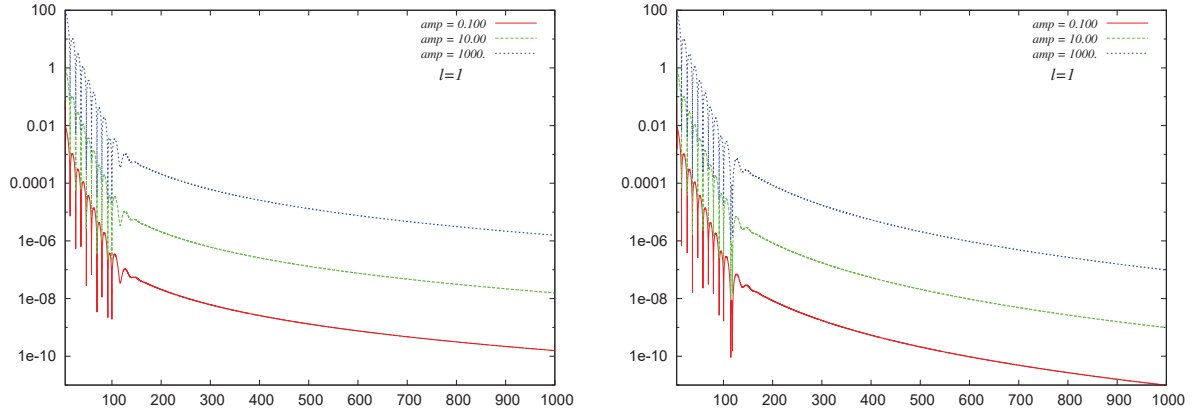


Figura 4.6: Función de onda con diferentes valores de la amplitud y  $x_0 = 0.8$ ,  $\sigma = 0.01$ . (izquierda en  $\mathcal{J}^+$ ) (derecha detector en  $\tilde{r} = 110M$ )

	<i>Amplitud</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
$\mathcal{J}^+$	0.1	0.162729	2.99754	-8.92627e-12
	10	16.27290	2.99754	-8.92691e-10
	100	1627.290	2.99754	-8.92691e-8
$\tilde{r} = 110M$	0.1	23.0114	4.08482	-3.38986e-12
	10	2301.14	4.08482	-3.38986e-10
	100	2301140	4.08482	-3.38986e-8

Tabla 4.6: Tabla de parámetros para diferentes amplitudes de la función de onda, con  $l = 1$  y un observador en  $\mathcal{J}^+$  y otro en  $\tilde{r} = 110M$ .  $f(x) = a/x^b + c$ . En esta tabla se tiene los valores de los exponentes de decaimiento de la solución de la ecuación de onda para diferentes valores de la amplitud, se puede notar que variar la amplitud no cambia la razón de decaimiento.

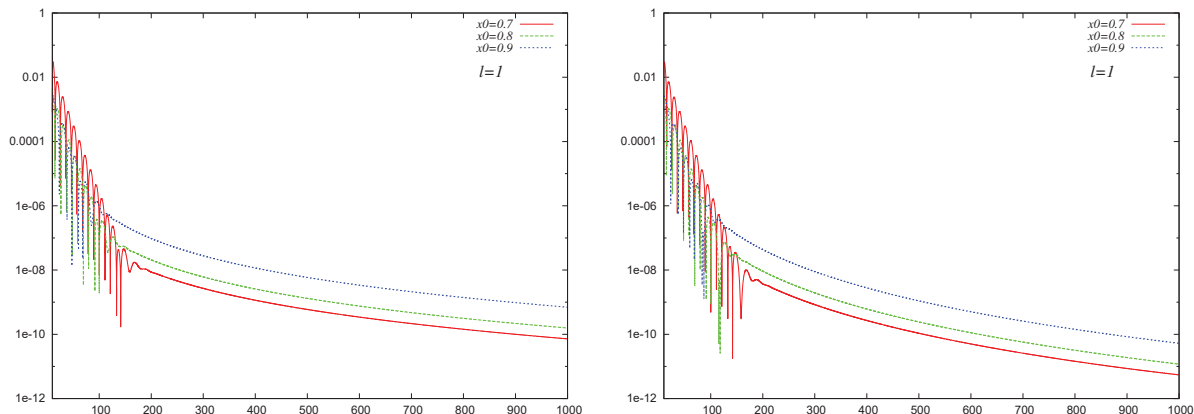


Figura 4.7: Función de onda para  $l = 0$  para diferentes valores de la posición inicial,  $A = 0.1$ ,  $\sigma = 0.01$ .(izquierda en  $\mathcal{J}^+$ ) (derecha detector en  $\tilde{r} = 110M$  )

	$x_0$	$a$	$b$	$c$
$\mathcal{J}^+$	0.7	0.0520618	2.94145	-6.72562e-12
	0.8	0.1627290	2.99754	-8.92627e-12
	0.9	0.8802090	3.02802	-2.58862e-11
$\tilde{r} = 110M$	0.7	6.79609	4.01868	- 1.64769e-12
	0.8	23.0114	4.08482	- 3.38967e-12
	0.9	130.254	4.12116	- 1.28115e-11

Tabla 4.7: Tabla de parámetros para diferentes posiciones iniciales,  $l = 1$  y un observador en  $\mathcal{J}^+$  y en  $\tilde{r} = 110M$ .  $f(x) = a/x^b + c$ . En esta tabla se tiene los valores de los exponentes de decaimiento de la solución de la ecuación de onda para diferentes valores de la amplitud, se puede notar que variar la amplitud no cambia la razón de decaimiento. La aproximación se hace en el intervalo  $M = [300, 1000]$ .

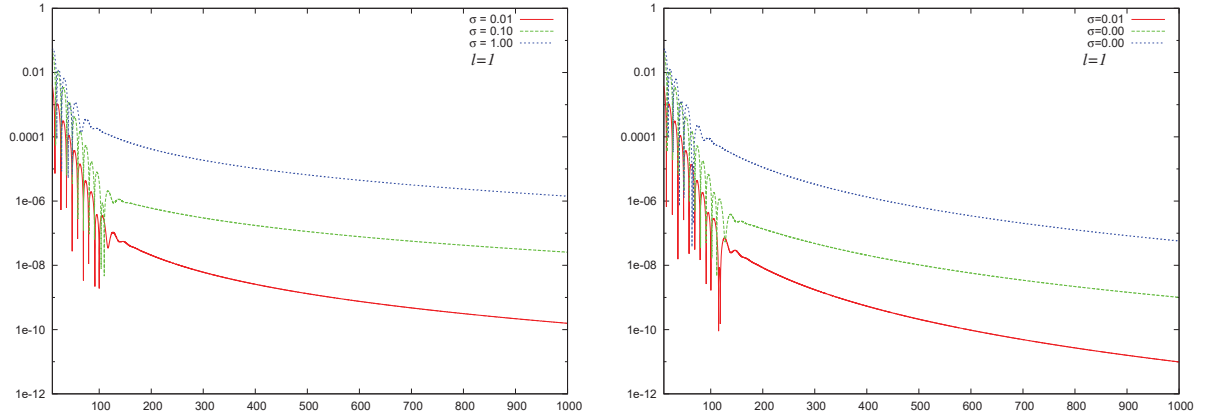


Figura 4.8: Gráfica de  $\phi$  para diferentes valores de  $\sigma$ ,  $A = 0.1$ ,  $x_0 = 0.8$ . (izquierda en  $\mathcal{J}^+$ ) (derecha detector en  $\tilde{r} = 110M$ )

	$\sigma$	$a$	$b$	$c$
$\mathcal{J}^+$	0.01	0.162729	2.99754	-8.92627e-12
	0.1	-0.00979275	1.81660	9.58273e-09
	1.0	-1.58466	1.98694	3.27169e-07
$\tilde{r} = 110M$	0.01	23.0114	4.08482	-3.38967e-12
	0.1	-0.84147	2.92056	5.01853e-10
	1.0	-251.387	3.17659	1.94295e-08

Tabla 4.8: Tabla de parámetros para diferentes valores de  $\sigma$ ,  $l = 1$  y un observador en scri plus.  $f(x) = a/x^b + c$ . En esta tabla se tiene los valores de los exponentes de decaimiento de la solución de la ecuación de onda para diferentes valores de la amplitud, se puede notar que variar la amplitud no cambia la razón de decaimiento. Esta medición se hace en el intervalo  $M = [300, 1000]$ .



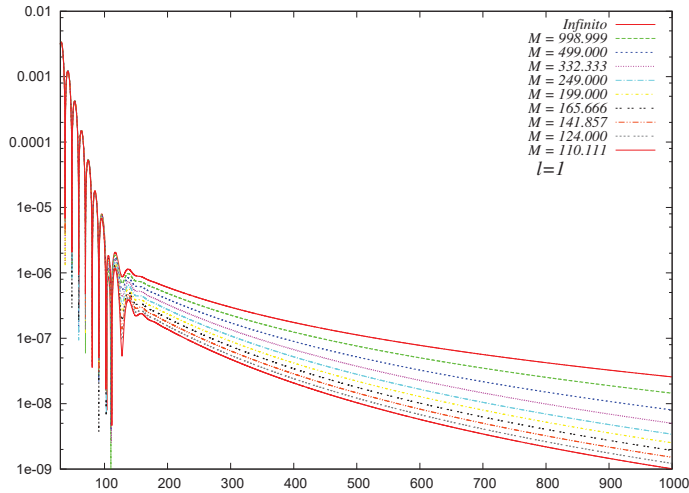


Figura 4.9: Función de onda que se mide por diferentes detectores situados a distancias finitas de la fuente. Los parámetros que se usan son  $A = 0.1$ ,  $x_0 = 0.8$ ,  $\sigma = 0.1$

$M$	$a$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\chi$
$\mathcal{J}^+$	0.00900903	0.107206	0.290892	6.43664
999	0.00895872	0.107119	0.290922	6.44097
499	0.00890868	0.107031	0.290956	6.44518
332	0.00885895	0.106944	0.290989	6.44941
249	0.00880953	0.106856	0.291022	6.45366
199	0.00876046	0.106769	0.291054	6.45793
165	0.00871173	0.106682	0.291086	6.46221
142	0.00866335	0.106595	0.291117	6.46650
124	0.00861533	0.106508	0.291147	6.47081
110	0.00856770	0.106422	0.291177	6.47513

Tabla 4.9: Tabla de frecuencias de los modos cuasinormales de la solución de la ecuación de onda para  $A = 0.1$ ,  $\sigma = 0.01$ ,  $x_0$  y  $l = 1$ . Estas frecuencias se miden en el intervalo  $t = [8, 60]$  comparando la solución numérica con una función de la forma  $f(x) = ae^{-\omega_1 x} \cos(\omega_2 x + \chi)$ .

Detector ( $M$ )	a	b	c
$\mathcal{J}^+$	0.162729	2.99754	-8.92626e-12
999	0.391446	3.17840	-1.86646e-11
499	0.921343	3.35581	-1.87336e-11
332	1.966750	3.51590	-1.30344e-11
249	3.738660	3.65484	-1.15637e-11
199	6.125720	3.76594	-0.84614e-11
165	9.316150	3.86280	-5.97642e-12
142	13.30580	3.94763	-5.04445e-12
124	18.04940	4.02240	-3.53953e-12
110	23.01140	4.08482	-3.38967e-12

Tabla 4.10: Tabla para diferentes observadores.  $f(x) = a/x^b + c$ ,  $l = 1$ . Aquí se muestra como cambia el exponente  $b$  para diez detectores que se encuentra a diferentes distancias de la fuente incluso  $\mathcal{J}^+$ . Se puede apreciar que para un detector en  $\mathcal{J}^+$  el exponentes de decaimiento es menor al que mide un observador que esta a  $110M$  de la fuente.

Se puede verificar en las tablas 4.6, 4.7 y 4.8 que los valores iniciales no afectan el comportamiento de las colas dela función de onda, tal como en le caso anterior. También es posible ver en la tabla 4.10 como cambia el exponente de la cola para diferentes observadores. Las frecuencias de los modos cuasinormales calculados para este caso se muestran en la tabla 4.9.

### Solución de la ecuación de onda para $l = 0$

En la Figura 4.10 se muestra la solución de la ecuación de onda para  $l = 0$ , con diferentes amplitudes. Aprovechando las herramientas disponibles se construyeron las gráficas para diferentes valores de  $\sigma$ , Figura 4.12, así como también las gráficas cambiando la posición inicial de la onda, Figura 4.11. En la Figura 4.13 se tiene el valor de la función de onda medida a diferentes distancias de la fuente.

Al hacer una aproximación de las colas que aparecen en la Figura 4.10 con una función de la forma  $f(x) = a/x^b + c$ , se obtiene un tabla de valores para  $a$ ,  $b$  y  $c$ . En la tabla 4.11 se puede ver la razón de decaimiento  $b$  es la misma para los tres valores de la amplitud, y que la razón de cambio de  $a$  y  $c$  es la misma razón que se usa para los valores de la amplitud.

En las tablas 4.11, 4.12, 4.13 y 4.14 se muestran los valores del exponente de decaimiento de la función de onda para distintos valores iniciales, así como los valores

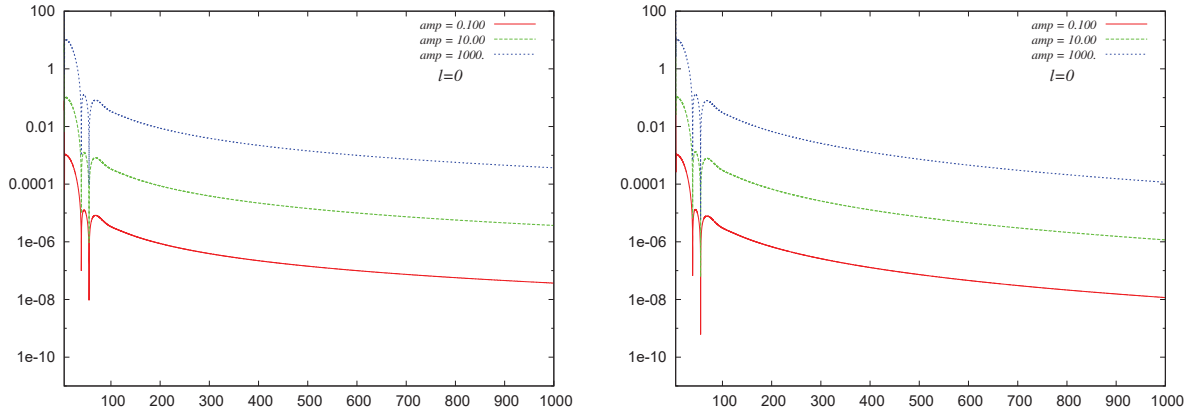


Figura 4.10: Función de onda para  $l = 0$  con diferentes valores de la amplitud,  $x_0 = 0.8$ ,  $\sigma = 0.01$ , (izquierda en  $\mathcal{J}^+$  y derecha detector en Gráfica  $\tilde{r} = 110M$ ).

Amplitud	$a$	$b$	$c$
0.1	-0.0299988	1.97294	-9.16549e-10
10	-2.9998800	1.97294	-9.16549e-08
100	-299.98800	1.97294	-9.16549e-06
0.1	-0.288869	2.43814	2.76242e-09
10	-28.88690	2.43814	2.76242e-07
100	-2888.690	2.43814	2.76242e-05

Tabla 4.11: Tabla de parámetros para diferentes amplitudes,  $l = 0$ .  $f(x) = a/x^b + c$ . En esta tabla se tiene los valores de los exponentes de decaimiento de la solución de la ecuación de onda para diferentes valores de la amplitud, se puede notar que variar la amplitud no cambia la razón de decaimiento.

	$x_0$	$a$	$b$	$c$
$\mathcal{J}^+$	0.7	-0.00913199	1.80743	2.90166e-09
	0.8	-0.02999880	1.97294	-9.16549e-10
	0.9	-0.06024520	1.98955	-2.35190e-09
$\tilde{r} = 110M$	0.7	-0.0768643	2.25652	3.50729e-09
	0.8	-0.288869	2.43814	2.76242e-09
	0.9	-0.586267	2.45588	3.74880e-09

Tabla 4.12: Tabla de parámetros para diferentes posiciones iniciales,  $l = 0$  y un observador en  $\mathcal{J}^+$  y en  $\tilde{r} = 110M$ .  $f(x) = a/x^b + c$ . En esta tabla se tiene los valores de los exponentes de decaimiento de la solución de la ecuación de onda para diferentes valores de la amplitud, se puede notar que variar la amplitud no cambia la razón de decaimiento. La aproximación se hace en el intervalo  $M = [300, 1000]$ .

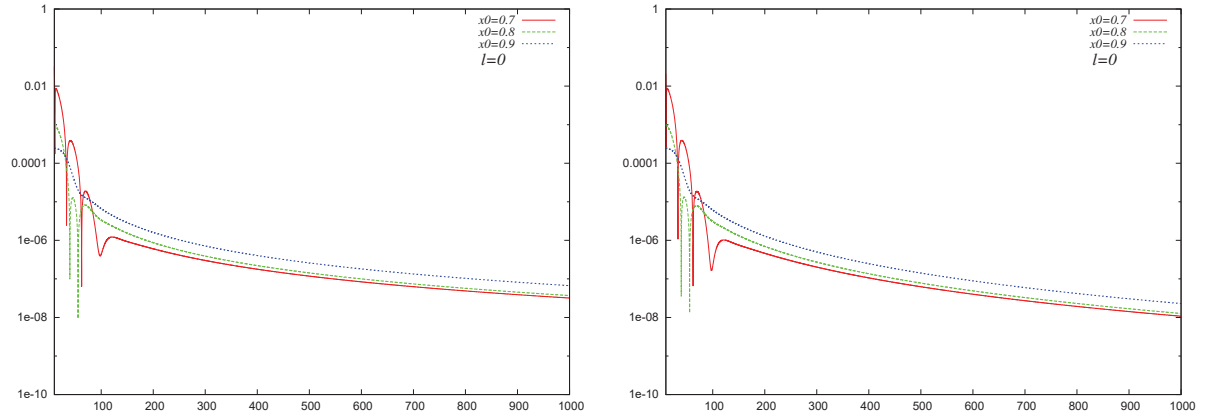


Figura 4.11: Función de onda con  $l = 0$  situado en diferentes posiciones iniciales,  $A = 0.1$ ,  $\sigma = 0.01$ . (izquierda en  $\mathcal{J}^+$  y derecha detector en  $\tilde{r} = 110M$ ).

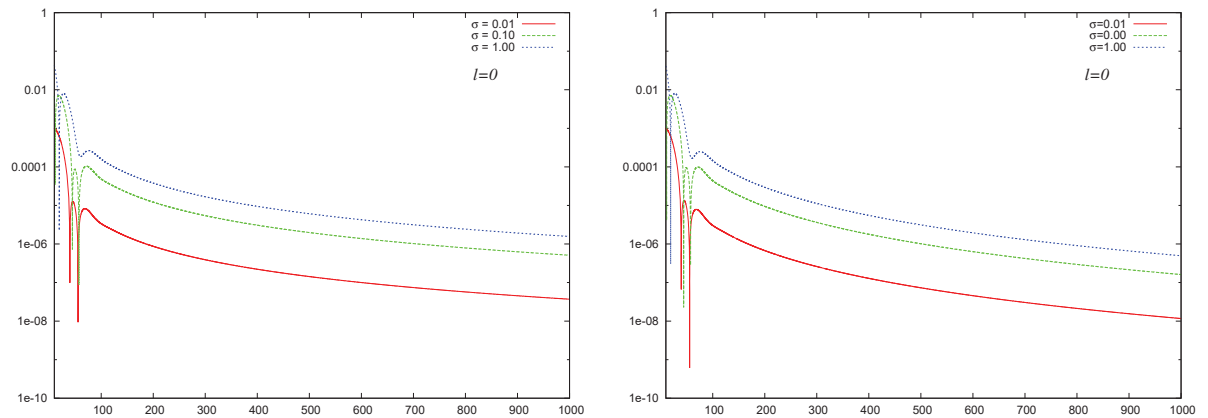


Figura 4.12: Gráfica de  $|\phi|$  para diferentes valores de  $\sigma$ ,  $A = 0.1$ ,  $x_0 = 0.8$ . (izquierda en  $\mathcal{J}^+$  y derecha detector en  $\tilde{r} = 110M$ )

	$\sigma$	$a$	$b$	$c$
$\mathcal{J}^+$	0.01	-0.0299988	1.97294	-9.16549e-10
	0.1	-0.4413320	1.98279	-1.55675e-08
	1.0	-1.4513900	1.99374	-5.87166e-08
$\tilde{r} = 110M$	0.01	-0.288869	2.43814	2.56242e-09
	0.1	-4.270940	2.44843	3.72198e-08
	1.0	-14.14920	2.46021	1.10310e-07

Tabla 4.13: Tabla de parámetros para diferentes valores de  $\sigma$ ,  $l = 0$  y un observador en scri plus.  $f(x) = a/x^b + c$ . En esta tabla se tiene los valores de los exponentes de decaimiento de la solución de la ecuación de onda para diferentes valores de la amplitud, se puede notar que variar la amplitud no cambia la razón de decaimiento. Esta medición se hace en el intervalo  $M = [300, 1000]$ .

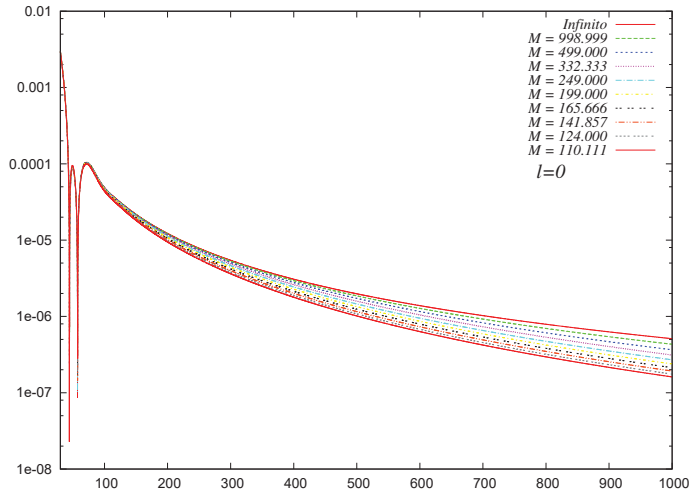


Figura 4.13: Gráfica  $\log-t$  para detectores colocados a diferentes distancias del horizonte de eventos. En esta gráfica se usan  $A = 0.1$ ,  $x_0 = 0.8$ ,  $\sigma = 0.1$ . Se puede ver a simple vista en este caso que la pendientes de las colas cambia conforme se cambia de posición del detector, lo cual se verifica en la tabla 4.14.

Detector ( $M$ )	a	b	c
$\mathcal{J}^+$	-0.0299988	1.97294	-9.16549e-10
999	-0.0374324	2.01440	2.74754e-09
499	-0.0503678	2.07184	4.52542e-09
332	-0.0709434	2.13949	4.94080e-09
249	-0.0982650	2.20523	4.76245e-09
199	-0.1300220	2.26330	4.33645e-09
165	-0.1661150	2.31525	3.88859e-09
142	-0.2055740	2.36149	3.46808e-09
124	-0.2474160	2.40265	3.09102e-09
110	-0.2888690	2.43814	2.56242e-09

Tabla 4.14: Tabla para diferentes observadores.  $f(x) = a/x^b + c$ ,  $l = 0$ . Aquí se muestra como cambia el exponente  $b$  para diez detectores que se encuentra a diferentes distancias de la fuente incluso  $\mathcal{J}^+$ . Se puede apreciar que para un detector en  $\mathcal{J}^+$  el exponentes de decaimiento es menor al exponente que mide un observador que esta a  $110M$  de la fuente.

de este exponente medido a distintas distancias por diez detectores.

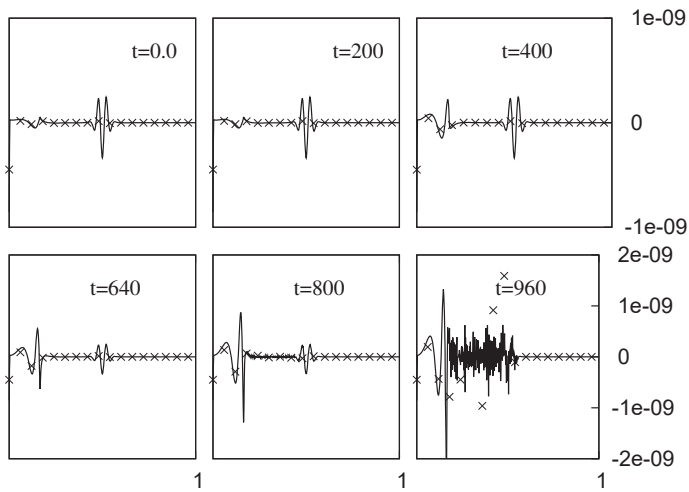


Figura 4.14: Gráfica de convergencia de  $\phi$  para las resoluciones  $\Delta r = 4 \times 10^{-4}$ ,  $\Delta r = 2 \times 10^{-4}$  y  $\Delta r = 1 \times 10^{-4}$ . Se puede ver que para  $t = 960$  existe ruido de alta frecuencia proveniente de la frontera interna, por esta razón la evolución de la función se onda se hace hasta  $t = 1000$ . Es este caso tampoco se usa disipación.





# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado con detalle la construcción de foliaciones hiperbolicas para los espacio-tiempos de Minkowski y Schwarzschild. También se ha descrito con detalle el proceso de compactificación y de regularización mediante la construcción de una métrica conforme.

Se resolvió la ecuación de onda conformalmente invariante sobre los espacio-tiempos construidos, con la finalidad de verificar los efectos de la estructura de conos de luz sobre la evolución de una onda para tres casos: Minkowski en 1+1 dimensiones, Minkowski en 3+1 dimensiones en coordenadas esféricas para una onda esférica y el espacio-tiempo de Schwarzschild para una onda esférica.

Usando la tecnología desarrollada para la solución de dichos casos ilustrativos, se procedió a estudiar el comportamiento de las *tails* o *colas* de campo escalar no masivo para tres valores del parámetro de momento angular  $l = 0, 1, 2$ . Adicionalmente se estudiaron las frecuencias cuasinormales de oscilación en cada caso.

Para tales efectos se estudió la dependencia de los *tails* en la posición de los observadores. Se verificaron resultados previos en esta dirección. Se verificó que el decaimiento polinomial no depende de los parámetros de los datos iniciales de la función de onda en el dominio explorado.

También se verificó los valores de las frecuencias de los modos cuasinormales para dichos valores de  $l$ .

Algo especial en los cálculos presentados es que se verificó la convergencia de las evoluciones, a diferencia de los artículos revisados en los que no se presentan pruebas de convergencia que respalden los resultados obtenidos.

Una dirección posible de desarrollo es el estudio de la acreción de campo escalar o el colapso de campo escalar en el régimen no lineal, es decir, considerando que la geometría está evolucionando. Esto permitirá estudiar los *tails* y modos cuasinormales en el régimen no lineal. Para tal efecto se han comenzado los estudios siguiendo el procedimiento de regularización del futuro infinito nulo descrito en [13].



# Apéndice A

## Transformaciones conformes

Las transformaciones conformes consisten en multiplicar por un factor la métrica en estudio  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ , a este factor se llama *factor conforme*  $\Omega$  y a la métrica resultante se le llama *métrica conforme*  $g_{\mu\nu} = \Omega^2 \tilde{g}_{\mu\nu}$ . La propiedad de esta transformación es que deja invariantes a los conos de luz definidos en la métrica física  $\tilde{g}$ . Por ejemplo en el espacio-tiempo de Minkowski los conos de luz son verticales y los rayos nulos a 45 grados. Si construimos una métrica conforme estos conos de luz seguirán teniendo la misma orientación.

Si  $\nabla$  y  $\tilde{\nabla}$  son las derivadas covariantes consistentes con  $g$  y  $\tilde{g}$  respectivamente, el operador de derivada covariante  $\tilde{\nabla}$  para un tensor  $w_\beta$  se puede escribir ahora en términos de  $\nabla$

$$\tilde{\nabla}_\alpha w_\beta = \nabla_\alpha w_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma w_\gamma, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  esta dado por la ecuación

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\tilde{\gamma}\delta} \{ \nabla_\alpha \tilde{g}_{\beta\gamma} + \nabla_\beta \tilde{g}_{\alpha\gamma} - \nabla_\gamma \tilde{g}_{\alpha\beta} \}, \quad (\text{A.2})$$

donde  $\nabla g_{\alpha\beta}$ , usando que  $\nabla g_{\alpha\beta} = 0$ , cumple con

$$\nabla_\gamma (\Omega^2 g_{\alpha\beta}) = 2\Omega g_{\alpha\beta} \nabla_\gamma \Omega. \quad (\text{A.3})$$

El escalar de Ricci  $\tilde{R}$  esta dado por

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} \{ R - 2(n-1)g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \ln \Omega - (n-2)(n-1)g^{\mu\nu} \nabla_\mu \ln \Omega \nabla_\nu \ln \Omega \}. \quad (\text{A.4})$$

Ahora estamos interesado en calcular la ecuación de onda  $\tilde{\square} \tilde{\phi} = \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\phi}$  en término de la ecuación de onda  $\square \phi$ , usando las expresiones anteriores se tiene que

$$\begin{aligned}
\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\mu\tilde{\nabla}_\nu\tilde{\phi} &= \Omega^{-2}g^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\mu[\nabla_\nu(\Omega^s\phi)] \\
&= \Omega^{-2}g^{\mu\nu}[\nabla_\mu\nabla_\nu(\Omega^s\phi) - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha\nabla_\alpha(\Omega^s\phi)] \\
&= \Omega^{-2}g^{\mu\nu}[\Omega^s\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + s\Omega^{s-1}\nabla_\mu\Omega\nabla_\nu\phi + s\phi\Omega^{s-1}\nabla_\mu\nabla_\nu\Omega] \\
&+ \Omega^{-2}g^{\mu\nu}[s(s-1)\phi\Omega^{s-2}\nabla_\mu\Omega\nabla_\nu\Omega + s\Omega^{s-1}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\Omega] \\
&- \Omega^{-2}g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(\Omega^s\nabla_\alpha\phi + s\phi\Omega^{s-1}\nabla_\alpha\Omega) \\
&= \Omega^{s-2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + (2s+s-2)\Omega^{s-3}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Omega\nabla_\nu\phi \\
&+ s\phi\Omega^{s-3}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Omega + s(n+s-3)\Omega^{s-4}\phi^{\mu\nu}\nabla_\mu\Omega\nabla_\nu\Omega, \tag{A.5}
\end{aligned}$$

Si se escoge  $s = 1 - \frac{n}{2}$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\mu\tilde{\nabla}_\nu\tilde{\phi} &= \Omega^{s-2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + \frac{1}{2}(2-n)\phi\Omega^{s-3}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Omega \\
&+ \frac{1}{4}(2-n)(n-4)\Omega^{s-4}\phi^{\mu\nu}\nabla_\mu\Omega\nabla_\nu\Omega, \tag{A.6}
\end{aligned}$$

usando el escalar de Ricci conforme (A.5) y multiplicando por el factor  $(n-2)/4(n-1)$  se tiene que

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - \frac{(n-2)}{4(n-1)}R\phi = 0, \tag{A.7}$$

y esta ecuación es conformalmente invariante, es decir cumple que

$$\left[\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\mu\tilde{\nabla}_\nu - \frac{(n-2)}{4(n-1)}\tilde{R}\right][\Omega^{(1-n/2)}\phi] = \Omega^{(-1-n/2)}\left[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{(n-2)}{4(n-1)}R\right]\phi. \tag{A.8}$$

Se puede ver facilmente que para el caso de dos dimensiones  $n = 2$  se cumple que

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\mu\tilde{\nabla}_\nu\tilde{\phi} = 0. \tag{A.9}$$

En el caso de  $n = 4$ , la expresión (A.8) se reduce a

$$\left[\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\mu\tilde{\nabla}_\nu - \frac{1}{6}\tilde{R}\right][\Omega^{-1}\phi] = \Omega^{-3}\left[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{1}{6}R\right]\phi. \tag{A.10}$$

Entonces en este caso se cumple que

$$\left[\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\mu\tilde{\nabla}_\nu - \frac{1}{6}\tilde{R}\right]\tilde{\phi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{1}{6}R\right]\phi = 0. \tag{A.11}$$

# Apéndice B

## Métodos numéricos

### Aproximación en diferencias finitas aplicada a la solución de IVPs

El dominio del espacio tiempo que se quiere estudiar en este caso es discreto, es decir el dominio espacial y temporal están dados por  $t^n = n\Delta t$ ,  $x_j = j\Delta x$ , donde los valores  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  y  $\Delta x = x_{j+1} - x_j$  indican la resolución temporal y espacial de la malla discreta como se puede ver en la figura ??.

Considerese ahora una función  $f$  que tenga dependencia de  $t$  y  $r$ , es decir,  $f = f(t, r)$  analítica. Se hace una aproximación en serie de Taylor a primer orden de esta función alrededor del punto a  $x_j$  con un error de segundo orden:

$$\begin{aligned} f(x_{j-1}) &= f(x_j) - \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) + O(\Delta x^3), \\ f(x_j) &= f(x_j), \\ f(x_{j+1}) &= f(x_j) + \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) + O(\Delta x^3), \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1}))}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \tag{B.2}$$

se puede ver fácilmente que esta expresión coincide con la definición de la derivada en el límite  $\Delta x \rightarrow 0$ . Lo cual significa que al aumentar la resolución de la malla numérica nos aproximamos más al valor analítico de la variable en cuestión.

También se puede construir una aproximación para la segunda derivada de  $f(t, r)$  por hacer una expansión de Taylor a tercer orden y encontrando una combinación adecuada. También es posible construir las expresiones para la primera derivada usando



aproximaciones no centradas, usualmente conocidas como *upwind* [27]. Para tener una mejor precisión se pueden construir aproximaciones de mayor orden, tales como las que se muestran en la tabla, con precisiones de segundo, cuarto y sexto. En este trabajo solamente se usan las de segundo y sexto orden y se incluye la de cuarto orden por completitud.

### Prueba de convergencia

Hasta ahora se ha mostrado que las expresiones para las funciones en la malla discreta son solo aproximaciones con un error asociado a cierto orden. Es de esperar que este error disminuya en cuanto mayor sea la resolución de la malla. La *convergencia* es entonces la noción que relaciona el ritmo al cual decrece el error en términos del orden de la aproximación en diferencias finitas de los operadores en una ecuación diferencial [27].

Ahora considérese una función  $f_l$  que es una solución numérica de una ecuación diferencial parcial a un tiempo dado y ha sido discretizado en una aproximación de segundo orden. Ahora, para verificar que en efecto el error disminuya se hace la siguiente prueba.

Cuando se conoce la solución exacta  $f_0$  el resultado numérico se escribe como  $f_l(x) = f_0 + E_l(x) * (\Delta x^2) + O(\Delta x^3)$ , donde  $E$  el error de segundo orden. Entonces se puede conocer el error usando distintas resoluciones. Consideremos dos resoluciones  $\Delta x$  y  $\frac{\Delta x}{2}$ , la razón entre los errores se define como:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{f_1 - f_0}{f_2 - f_0} = 4 + O(\Delta x^3), \quad (\text{B.3})$$

donde el número 4 se llama **factor de convergencia**, que es la razón en la que disminuye el error, y se debe cumplir siempre que se use una aproximación de segundo orden, esta factor tiene diferentes valores para diferentes ordenes de aproximación. Cuando se conoce la solución exacta a esta prueba se le llama *convergencia*.

Cuando no se tiene una solución exacta, se hace una prueba de convergencia de tipo Cauchy, usando tres resoluciones distintas, se agrega una resolución  $\frac{\Delta x}{4}$ . Ahora la razón de los errores se define como:

$$\frac{f_1 - f_2}{f_2 - f_3} = 4 + O(\Delta x^3), \quad (\text{B.4})$$

nuevamente el factor de convergencia es 4. A esta prueba se llama *auto-convergencia*.

### Método de líneas MoL

Este método consiste en suponer que para cada  $j$  la ecuación diferencial parcial en estudio se satisface a lo largo de las líneas verticales en el plano  $x - t$  que aparecen

en la Fig. ???. Este método es poderoso puesto que es estable. Para los casos que se estudian en este trabajo, para calcular el valor de la función  $f(t^{n+1}, x_j)$  es necesario saber los valores de la función en los puntos vecinos, en esta caso Mol es muy útil.

## Método de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta es un método de resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Fue desarrollado alrededor del año 1900 por los matemáticos C. Runge y M. W. Kutta. El método de Runge-Kutta se basa en la fórmula de Euler que está dada por

$$y_{n+1} = y_n + \Delta\lambda f'(x_n, y_n), \quad (\text{B.5})$$

donde  $\Delta\lambda$  es el intervalo entre  $x_n$  a  $x_{n+1}$ , que son dos puntos adjacentes en un dominio discreto de la variable independiente  $x$ . El método de Runge-Kutta es un método iterativo que en su forma más general se tiene que  $y_{n+1}$  como

$$y_{n+1} = y_n + \Delta\lambda \sum_{i=1} b_i k_i, k_i = F \left( y_n + \Delta\lambda \left( \sum_{i=1} a_{ij} k_i \right) x_n + c_i \Delta\lambda \right), \quad (\text{B.6})$$

donde  $a, b, c$  son constantes del esquema numérico. En la versión de cuarto orden se hacen cuatro iteraciones para obtener la solución. Se definen las cuatro funciones auxiliares  $k_i$  como sigue

$$k_1 = \Delta\lambda f(x_n, y_n), \quad (\text{B.7})$$

$$k_2 = \Delta\lambda f\left(x_n + \frac{\Delta\lambda}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \quad (\text{B.8})$$

$$k_3 = \Delta\lambda f\left(x_n + \frac{\Delta\lambda}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \quad (\text{B.9})$$

$$k_4 = \Delta\lambda f(x_n + \Delta\lambda, y_n + k_3). \quad (\text{B.10})$$

La pendiente entre la solución en  $n$  y  $n+1$  es un promedio ponderado de pendientes:  $k_1$  es la pendiente al principio del intervalo;  $k_2$  es la pendiente en el punto medio del intervalo, usando  $k_1$  para determinar el valor de  $y$  en el punto  $x_n + h/2$  usando el método de Euler,  $k_3$  es otra vez la pendiente del punto medio, pero ahora usando  $k_2$  para determinar el valor de  $y$ ,  $k_4$  es la pendiente al final del intervalo, con el valor



de  $y$  determinado por  $k_3$ . La pendiente promedio de las pendientes después de las cuatro iteraciones es:

$$\bar{m} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

en este caso en que se hacen 4 iteraciones, se tiene que el error es de quinto orden, pues los términos que se desprecian en la aproximación de cuarto orden son  $O(\Delta\lambda^5)$ . La solución obtenida para  $y$  es

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta\lambda, \quad (\text{B.11})$$

donde  $y_{n+1}$  es la función a calcular numéricamente [28].



# Bibliografía

- [1] M. Alcubierre, *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*, Oxford University Press, 2008.
- [2] O. Sarbach, *J.Phys.Conf.Ser.91:012005,2007*. arXiv:0708.4266v1 [gr-qc].
- [3] Anil Zenginoglu, Dario Nunez, Sascha Husa, *Class.Quant.Grav.* **26**, 035009:2009. arXiv:0810.1929v1 [gr-qc].
- [4] A. Zenginoglu, arXiv:0911.2450v1 [gr-qc].
- [5] J. A. González, F. S. Guzmán, O. Sarbach, *Phys. Rev. D.* **80**, 024023:2009.
- [6] Anil Zenginoglu, Manuel Tiglio, *Phys. Rev. D* **80**, 024044:2009. arXiv:0906.3342v2 [gr-qc]
- [7] H. Bondi, M. G. J. Burg, A. W. K. Metzner, *Proc. Royal Soc. London A* **269** 21-52:1962.
- [8] R. K. Sachs, *Proc. Royal Soc. London A* **270** 103-126:1962.
- [9] C. Reisswig, N. T. Bishop, D. Pollney, B. Szilagyi, arXiv:0907.2637v2 [gr-qc].
- [10] J. Frauendiener, *Liv. Rev. Phys.* **7**, 1: 2004.
- [11] H. Friedrich, *Comm. Math. Phys.* **91** 445-472:1983.
- [12] J. M. Stewart, H. Friedrich, *Proc. R. Soc. A.* 384-427:1982.
- [13] O. Rinne, arXiv:0910.0139v1 [gr-qc].
- [14] V. Moncrief, O. Rinne, Regularity of the Einstein equations at future null infinity, *Class. Quantum Grav.* **26** 125010, 2009.
- [15] Anil Zenginoglu, *Class. Quantum Grav.* **25** (2008) 145002.
- [16] E. Malec and N. O Murchadha, *Phys. Rev. D.* **68**, 124019:2003.

- 
- [17] Randall J. LeVeque, Numerical Methods fro Conservation Laws. 1992 Birkhäuser.
- [18] J. W. Thomas. Numerical Partial Differential Equations. Springer 1995.
- [19] Frans Pretorius, *Class. Quantum Grav.* **22**, (2005) 425-452.
- [20] P. Diener. A new general purpose event horizon finder for 3D numerical space-times. *Class. Quantum Grav.* **20**, (2003) 4901-4918.
- [21] Pürrer M , Husa S and Aichelburg P C 2005 *Phys. Rev. D* **71** 104005
- [22] Nikodem Szpak, Piotr Bizón, Tadeusz Chmaj, and Andrzej Rostworowski, Linear and nonlinear tails II: exact decay rates in spherical symmetry, arXiv:0712.0493v1.
- [23] Anil Zenginoglu, A hyperboloidal study of tail decay rates for scalar and Yang-Mills fields, *Class. Quantum Grav.* **25** (2008) 175013.
- [24] Piotr Bizón, Tadeusz Chmaj, and Andrzej Rostworowski, Late-time tails of a self-gravitating massless scalar field, revised, *Class. Quantum Grav.* **26** (2009) 175006.
- [25] Carsten Gundlach, Richard H price, and Jorge Pullin, Late-time behavior of stellar collapse and explosion. I. Linearized perturbations *Physical Review D.* **49**, num. 2,0556-2821 (1994).
- [26] Robert M. Wald *General Relativity*, The University of Chicago Press, USA, 1984.
- [27] F. S Gusmán, *Solución de la ecuación de onda como un problema de valores iniciales usando diferencias finitas.*
- [28] Wiliam H. Press, Saul A Teukolsky, Wiliamy T. Vetterling y Brian P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 77*, Segunda edición, Cambridge,USA, 2003.