Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

Controlabilidad de Sistemas Bilineales en el Plano

TESINA

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Leonardo Ramiro Laura Guarachi

Director: Dr. Abdon E. Choque Rivero

Morelia, Michoacán - agosto de 2010.

Índice general

Agradecimientos

Mis mayores agradecimientos a las instituciones y autoridades que sustentan el programa de Posgrado Conjunto en ciencias Matemáticas (PCCM) UNAM - UMSNH, por el apoyo y oportunidad que me dieron. Y un agradecimiento muy especial a los profesores que formaron parte importante de mi formación Dr. Abdon Choque Rivero, Dr. Efrain Cruz Mullisaca y Dr. Fernando Hernandez Hernandez.

INTRODUCCIÓN

Sobre la teoría de control

El objeto principal de este trabajo son los sistemas de ecuaciones diferenciales que dependen de un parámetro u, control del sistema, tales sistemas se llaman sistemas de ecuaciones diferenciales controlables, los cuales, en general, describen procesos dinámicos de fenómenos físicos. Estos procesos se describen mediante sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarios (EDO), ecuaciones en diferencias o a través de ecuaciones derivadas parciales.

Una clase de sistemas de mucha importancia son los sistemas de la forma

$$\dot{x} = f(x) + ug(x),$$

donde f y g son funciones vectoriales diferenciables y u es la función de control localmente integrable. Estos sistemas han sido ampliamente estudiados por varios autores, entre ellos, [**1**], [**6**]. Esta clase de sistemas de control incluye los sistemas lineales

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ A \in M_{n\times n}, B \in M_{n\times 1} \tag{1}$$

y los sistemas de control bilineal

$$\dot{x}(t) = Ax + uBx. \tag{2}$$

Este último sistema es el que abordaremos en este trabajo.

Planteamiento del problema

Nosotros consideramos en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ el sistema de control:

$$\dot{x}(t) = Ax + uBx. \tag{3}$$

Donde A, B son matrices reales 2×2, u es una función real constante por partes, denominada función de control.

DEFINICIÓN 0.1. El sistema de control (3) se dice controlable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ si para cada par de punto $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ existe una solución $\varphi(t)$ del sistema (3) para algún control u tal que $\varphi(0) = x$ y $\varphi(t_0) = 0$.

Se requiere hallar las condiciones necesarias y suficientes para el sistema (3) sea controlable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Importancia del problema

Para los sistemas lineales (1) se tiene el criterio de controlabilidad de Kalman que dice: El sistema (1) es controlable si y solo el rango de la matriz extendida,

$$rang(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n.$$

Mientras que para sistemas bilineales (3) solo se cuenta con criterios parciales y no un criterio general que permita decidir si un sistema de control bilineal es controlable o no. De hecho, para sistemas de dimensión $n \geq 3$ el problema planteado es aún un problema abierto.

Además, es interesante notar que los sistemas bilineales de la forma (3) tienen un número de importante de aplicaciones en la ingeniería y física.

Métodos de resolución

En el presente trabajo revisamos dos métodos de resolución del problema planteado:

- Método de los grupos de Lie. Realizado por Jurdjevic, Kupka [**2**], Sussman [**1**], Ayala, San Martin.[**3**]
- Método de Colonius-Kliemann [**6**], el cual es un método analítico de resolución del problema planteado.

Podemos observar que el método de los grupos de Lie, hasta ahora, está restringido para sistemas de dimensión 2. Mientras que el método de Colonius-Kliemann, aunque es general, no cuenta con un criterio en términos de las matrices del sistema. Además este método requiere de la proyección del sistema de control al espacio proyectivo.

Lo hecho en la tesina y tareas por realizar

En un primer capítulo analizaremos de manera detallada mediante la teoría de grupos de Lie y algebras de Lie la controlabilidad del sistema (4) en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ cuando el algebra de Lie generado por el sistema es $\mathbf{sl}(2)$ y concluimos con un criterio de controlabilidad para este caso. En el siguiente capitulo realizamos la interpretación geométrica del criterio de controlabilidad obtenido en el capitulo anterior. Considerando [**6**], el problema de controlabilidad se reduce a la controlabilidad en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^1$ del sistemas proyectado asociado. En este capitulo se aborda la controlabilidad de un sistema bilineal en el plano mediante el sistema proyectado correspondiente y para este sistema se obtiene un criterio de controlabilidad elemental.

Nuestro objetivo a futuro es abordar el problema controlabilidad de sistemas bilineales para $n \geq 3$.

Capítulo 1

Preliminares

1. Grupos de Lie y algebras de Lie lineales

Una estructura importante en el area de la teoría de control son los grupos de Lie y los álgebras de Lie. Recordemos que una variedad diferenciable G es un grupo de Lie si: G tiene estructura de grupo y la operación de grupo es una aplicación diferenciable.

Ejemplo 1.1. Las siguientes variedades son grupos de Lie con el producto usual de matrices:

1. El grupo general lineal de matrices reales invertibles de tamaño $n \times n$:
$$Gl(n) = \{X \in M(n) : \det X \neq 0\}.$$
2. El grupo general lineal de matrices reales invertibles de tamaño $n \times n$:
$$Gl^{+}(n) = \{X \in M(n) : \det X > 0\}.$$
3. El grupo especial lineal :
$$Sl(n) = \{X \in M(n) : \det X = 1\}.$$
4. El grupo ortogonal:
$$O(n) = \{X \in M(n) : XX^{T} = I\}.$$
5. El grupo especial ortogonal:
$$SO(n) = \{X \in M(n) : XX^{T} = I, \det X = 1\}.$$

Cada grupo de Lie G esta asociado a un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ denominado algebra de Lie en el que esta definido una operación $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ bilineal que satisface las siguientes propiedades: $[A, B] = -[B, A]$ y $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]$ para cada $A, B \in \mathfrak{g}$

Los siguientes espacios vectoriales junto con el conmutador de matrices $[A, B] = AB - BA$ son algebras de Lie:

El Conjunto de todas la matrices reales de tamaño $n \times n$, $\mathbf{gl}(n)$.
El álgebra de Lie de $Sl(n)$:
$$\mathbf{sl}(n) = \{X \in M(n) : \mathrm{tr} X = 0\}.$$

El álgebra de Lie de $SO(n)$:

$$\mathbf{so}(n) = \{X \in M(n) : X + X^T = 0\}.$$

2. Acciones de grupos de Lie sobre una variedad

Otro concepto importante en la teoría de control es la acción de grupos de Lie sobre variedades.

Definición 2.1. Se dice que un grupo de Lie actúa sobre una variedad diferenciable M si existe una aplicación diferenciable $\psi : G \times M \to M$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\psi(gh, x) = \psi(g, \psi(h, x))$ para todo $g, h \in G$ y todo $x \in M$;
2. $\psi(e, x) = x$ para todo $x \in M$, donde e es la identidad del grupo G.

Los grupos lineales $Gl(n), Gl^+(n), Sl(n), SO(n)$ y $O(n)$ actúan sobre $\mathbb{R}^n$. Mediante la operación evaluación.

Definición 2.2. Un grupo de Lie G actúa transitivamente sobre una variedad M si existe una acción $\psi : G \times M \to M$, de modo que para cada $x, y \in M$ existe $g \in G$ tal que $\psi(g, x) = y$.

Es muy usual denotar a $\psi(g, x)$ mediante $g \cdot x$.

Definición 2.3. Dada una acción del grupo grupo de Lie G sobre la variedad M. Para cada $x \in M$ el conjunto $Gx = \{g \cdot x : g \in G\}$ se conoce como la orbita de x.

En estos términos una acción de un grupo de Lie sobre una variedad M, $\psi : G \times M \to M$ es transitivo si y solo si existe $x \in M$ tal que $Gx = M$.

Proposición 2.1. *Los grupos de Lie:*

$$Gl^+(2), \quad Sl(2) \quad y \quad SO(2) \times (\mathbb{R}^+ I)$$

actúan transitivamente sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Demostración. En principio demostremos que $Sl(2)$ actúa transitivamente. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, si $x \neq 0$, la matriz $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ esta en $Sl(2)$ y se tiene

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

por otra parte si $y \neq 0$, entonces $\begin{pmatrix} x & -\frac{1}{y} \\ y & 0 \end{pmatrix}$ esta en $Sl(2)$ y

$$\begin{pmatrix} x & -\frac{1}{y} \\ y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De esta manera la orbita de $(1,0)$ es todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, por lo tanto $Sl(2)$ actúa transitivamente. En consecuencia como $Sl(2) \subset Gl^+(2)$, entonces $Gl^+(2)$ también actúa transitivamente. Finalmente dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, de la igualdad

$$\begin{aligned}(x,y) &= |(x,y)|(\cos\theta, \sin\theta)\\ &= \begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix} |(x,y)| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

donde $|(x,y)| > 0$ y θ es el ángulo entre (x,y) y $(1,0)$. Concluimos que $So(2) \times (\mathbb{R}^2 I)$ también actúa transitivamente sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ■

En [**3**] se muestra que estos son los únicos grupos lineales que actúan transitivamente sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

3. Teoría de control y grupos de Lie

Consideramos en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ el sistema de control bilineal

$$(4) \qquad \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) B_i x(t), \qquad t \in \mathbb{R},\ x(t) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

donde $A, B_1, ..., B_m \in M_n(\mathbb{R})$ y $u \in \mathcal{U} = \{u : \mathbb{R} \to U \subset \mathbb{R}^m, u \text{ localmente integrable}\}$ es el conjunto de controles admisibles. La solución de (4) se denota por $\varphi(t,x,u)$ para el valor inicial $\varphi(0,x,u) = x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y un control fijo $u \in \mathcal{U}$.

La órbita positiva mediante el sistema (4) de un punto $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se define como:

$$\mathcal{O}^+(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \text{ Existe } u \in \mathcal{U} \text{ y } t \geq 0 \text{ con } \varphi(t,x,u) = y\}.$$

Definición 3.1. El sistema de control (4) se dice controlable en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bajo el conjunto de control $\mathcal{U}$, si para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se tiene $\mathcal{O}^+(x) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Obviamente de manera análoga esta definición se extiende de manera general sobre toda variedad diferenciable M, donde $A, B_1, ..., B_m$ son campos diferenciables sobre M.

Un caso de particular importancia que consideraremos en este trabajo es cuando cuando el conjunto de controles admisibles $\mathcal{U}$ es el conjunto de funciones constantes por trozos.

Denotemos el conjunto:

$$\Sigma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i : \ u = (u_1, ..., u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\} \subset M_n(\mathbb{R}).$$

Entonces las soluciones del sistema (4) son de la forma:

$$x(t) = \exp t_k X_k \cdots \exp t_1 X_1 x(0), \text{ con } t_1 + ... + t_k = t \text{ y } X_i \in \Sigma.$$

Esto nos permite considerar el semigrupo:

$$S_\Sigma = \left\{ e^{t_k X_k} \cdots e^{t_1 X_1} : X_i \in \Sigma, t_i \geq 0, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

con lo que $\mathcal{O}^+(x) = S_\Sigma x$, para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Por tanto: El sistema (4) es controlable si y solo si S_Σ actúa transitivamente sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Luego una condición necesaria para la controlabilidad del sistema es que el grupo generado por S_Σ:

$$G_\Sigma = \left\{ e^{t_k X_k} \cdots e^{t_1 X_1} : X_i \in \Sigma, t_i \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \right\} \subset Gl_n(\mathbb{R}),$$

actué transitivamente sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Así, la tarea del estudio del sistema de control se traduce en estudiar los grupos y semigrupos que actúan transitivamente.

El algebra de Lie generado por Σ lo denotamos por:

$$\mathcal{L}A(\Sigma) = \mathrm{Span}_{\mathcal{L}A} \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i : \ u \in \mathcal{U} \right\} \subset M_n(\mathbb{R}).$$

Se ha establecido en [**1**] que G_Σ es un grupo de Lie conexo cuyo algebra de Lie es $\mathcal{L}A(\Sigma)$ y que S_Σ es un subsemigrupo de G_Σ con puntos interiores.

Para un elemento $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ consideramos el subespacio vectorial

$$\mathcal{L}A(\Sigma)x = \{Ax : A \in \mathcal{L}A(\Sigma)\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Definición 3.2. El sistema de control bilineal (4) satisface la condición de rango de algebra de Lie en $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si

$$\dim(\mathcal{L}A(\Sigma)x) = n. \tag{5}$$

Si esta condición se satisface en cada punto $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, se dice que el sistema bilineal satisface la condición de rango de algebra de Lie (LARC).

Definición 3.3. El sistema de control (4) tiene la *propiedad de accesibilidad* en $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si la orbita de este elemento tiene interior no vacío, es decir $\mathrm{int} G_\Sigma x \neq \emptyset$. Si esta condición se cumple en todos los puntos $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, diremos que (4) satisface la propiedad de accesibilidad.

En el trabajo [**1**], Sussman y Jurdjevic muestran que:

Teorema 3.1. *El sistema (4) tiene la propiedad de accesibilidad si y solo si satisface LARC.*

4. Dinámica de sistemas de control

Consideremos en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x} = A(t)x(t), \quad x(0) = x_0.$$

Donde $A : [0, \infty) \to M_n(\mathbb{R})$, es una aplicación diferenciable. Este sistema admite una proyección sobre la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$. Sea $x(t)$ una solución de este sistema anterior mediante la definición y $s(t) = \frac{x(t)}{|x(t)|}$, donde $|x(t)| = \langle x(t), x(t)\rangle^{1/2}$ denota la norma euclidiana de $x(t)$. Entonces, por la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \frac{\dot{x}(t)|x(t)| - x(t)\langle \dot{x}(t), x(t)\rangle/|x(t)|}{|x(t)|^2} \\ &= \frac{A(t)x(t)|x(t)| - x(t)\langle A(t)x(t), x(t)\rangle/|x(t)|}{|x(t)|^2} \\ &= A(t)\left(\frac{x(t)}{|x(t)|}\right) - \left(\frac{x(t)}{|x(t)|}\right)\langle A(t)\left(\frac{x(t)}{|x(t)|}\right), x(t)\rangle \\ &= A(t)s(t) - \langle A(t)s(t), s(t)\rangle s(t) \\ &= \left(A(t) - s^T(t)A(t)s(t)I\right) s(t). \end{aligned}$$

Denotemos $h(A, s) = [A - s^T As]s$, entonces el sistema anterior se escribe como $\dot{s}(t) = h(A(t), s)$

Ahora consideremos sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ el sistema de control:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)B_i x(t) \tag{6}$$

donde $A, B_1, ..., B_m$ son matrices reales de tamaño $n \times n$. Dada una solución $\varphi(t, x, u)$ de (6), el exponente de Lyapunov es definido como

$$\lambda(u, x) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \| \varphi(t, x, u) \|$$

y el conjunto de todos los exponentes de Lyapunov se denota por:

$$\Sigma_{Ly} = \{\lambda(u, x) : (u, x) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\},$$

que es conocido como el espectro de Lyapunov del sistema (4).
Los valores extremales de los exponentes de Lyapunov se define por

$$\kappa^* = \inf_{u\in\mathcal{U}} \inf_{x\neq 0} \lambda(u,x), \qquad \kappa = \sup_{u\in\mathcal{U}} \sup_{x\neq 0} \lambda(u,x).$$

Por otra parte, al sistema (6) se asocia el sistema proyectado a la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$:

$$\dot{s}(t) = h(A, s(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) h(B_i, s(t))$$

donde $h(A,s) = (A - (s^T A s)I)s$ y $u \in \mathcal{U}$. Este sistema a su vez induce un nuevo sistema sobre el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n-1}$ el cual lo denotamos por $\mathbb{P}\Sigma$ y se conoce como el sistema angular.

En [**6**] se muestra el siguiente resultado sobre la controlabilidad del sistema (6)

TEOREMA 4.1. *Considérese el sistema de control bilineal (6) y el sistema proyectivo* $\mathbb{P}\Sigma$ *satisfaciendo LARC. Asumimos que el rango de control* $U \subset \mathbb{R}^m$ *es compacto. Entonces, (6) es controlable en* $\mathbb{P} \setminus \{0\}$ *si y solo si*

1. $\mathbb{P}\Sigma$ *es controlable sobre* $\mathbb{P}^{n-1}$, *y*
2. $0 \in int[\kappa^*, \kappa]$.

Capítulo 2

Controlabilidad en $\mathbb{R}^2$, Caso $Sl(2)$

Consideremos en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ el sistema de control

$$\dot{x} = (A + uB)\,x. \tag{7}$$

Donde A, B son matrices reales 2×2 y u es una función real constante por partes. Sea el semigrupo

$$S_\Sigma = \{e^{t_k X_k} \cdots e^{t_1 X_k} : t_i \geq 0, X_k \in \{A, \pm B\} \text{ y } k > 0\}.$$

Tenemos que el sistema (7) es controlable si y solo si el semigrupo S_Σ actúa transitivamente sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, [**2**]. Por lo tanto, una condición necesaria para la controlabilidad del sistema (7) es que el grupo

$$G_\Sigma = \{e^{t_1(A+u_1 B)} \cdots e^{t_k(A+u_k B)} : t_i \in \mathbf{R}, u_i \in \mathbf{R} \text{ y } k > 0\}.$$

generado por S_Σ sea transitivo sobre $\mathbf{R}^2 - \{0\}$.

En los preliminares se mostró que los grupos de Lie $Gl^+(2)$, $Sl(2)$ y $SO(2) \times (\mathbb{R}^+ I)$ actúan transitivamente sobre $\mathbf{R}^2 - \{0\}$, además estos son los únicos grupos lineales con esta propiedad [**3**].

A continuación nosotros realizaremos un análisis detallado del sistema de control (7) cuando $G_\Sigma = Sl(2)$, es decir cuando $A, B \in \mathbf{sl}(2) = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : \mathrm{tr} X = 0\}$ y el algebra de Lie generado por el conjunto $\{A, B\}$ es $\mathbf{sl}(2)$, [**3**].

Recordemos que si $C \in \mathbf{sl}(2)$, entonces la forma Jordan de esta matriz es de alguna de las siguientes formas:

a) $\det C > 0$	a) $\det C = 0$	a) $\det C < 0$
$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$

Lema 0.1. *Sea $A, B \in \mathbf{sl}(2)$. Entonces*

a. *Supóngase que* $\det B > 0$. *Entonces* $\det[A, B] \leq 0$ *y:*
   i. $\det[A, B] = 0$ *si y solo si A y B son linealmente dependientes,*

ii. $\{A, B, [A; B]\}$ *is linealmente independiente si y solo si* $\det[A, B] < 0$.

b. *Asumamos que* $\det B = 0$. *Luego* $\det[A, B] \leq 0$ *y:*

i. $\det[A, B] = 0$ *si y solo si* $[A, B]$ *y* B *son linealmente dependientes,*

ii. $\{A, B, [A; B]\}$ *es independiente si y solo si* $\det[A, B] < 0$.

c. *Si* $\det B < 0$. *Entonces* $\{A, B, [A; B]\}$ *es linealmente independiente si y solo si* $\det[A, B] \neq 0$.

Demostración.

a. Sea $\det B > 0$, asumamos que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$$

para algún $a \neq 0$. Ya que

$$[A, B] = \begin{pmatrix} a(y+z) & -2ax \\ -2ax & -a(y+z) \end{pmatrix} \text{ y } \det[A, B] = -a^2\left[(y+z)^2 + 4x^2\right].$$

Notemos que $[A, B]$ es una matriz simétrica y $\det[A, B] \leq 0$.

i. La igualdad $\det[A, B] = 0$ se satisface si y solo si $y = -z$ y $x = 0$ lo cual equivale a la dependencia lineal de A y B.

ii. Por otra parte, si $\{A, B, [A, B]\}$ es un conjunto linealmente independiente de matrices, entonces por lo anterior $\det[A, B] < 0$. Recíprocamente, escribimos $A = A_1 + A_2$, donde A_1 es una matriz simétrica y A_2 una matriz antisimétrica:

$$A_1 = \begin{pmatrix} x & \frac{y+z}{2} \\ \frac{y+z}{2} & -x \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{z-y}{2} \\ \frac{z-y}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Suponemos $\det[A, B] < 0$, entonces A y B son linealmente independientes, de donde $A_1 \neq 0$, es decir $x \neq 0$ y $y + z \neq 0$. De lo anterior realizando un cálculo directo se concluye que $\{A, B, [A, B]\}$ es un conjunto linealmente independiente.

b. Si $\det B = 0$ podemos asumir que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente

$$[A, B] = \begin{pmatrix} -z & 2x \\ 0 & z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \det[A, B] = -z^2 \leq 0.$$

i. La igualdad se tiene si y solo si $[A, B] = 2xB$.
ii. Realizando una operación simple se obtiene que A, B y $[A, B]$ son linealmente independientes si y solo si $z \neq 0$.

c. Sean
$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$$
con $a \neq 0$. Tenemos
$$[A, B] = \begin{pmatrix} 0 & -2ay \\ 2az & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \det[A, B] = 4a^2yz\,,$$
por tanto $\det[A, B] \neq 0$ si y solo si $yz \neq 0$. Si $yz = 0$ entonces A, B y $[A, B]$ son triangulares de manera que este conjunto de matrices no es linealmente independiente. Finalmente un cálculo directo muestra la independencia lineal de A, B y $[A, B]$, en caso de que $yz \neq 0$.

■

A partir de este lema se sigue inmediatamente el siguiente criterio para verificar si el algebra de Lie generado por A y B es $\mathbf{sl}(2)$.

Corolario 0.1. *Sean A, B elementos del conjunto* $\mathbf{sl}(2)$. *Las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *El algebra de Lie generado por $\Sigma = \{A, B\}$ es* $\mathbf{sl}(2)$.
2. *A, B y $[A, B]$ son linealmente independientes.*
3. $\det[A, B] \neq 0$.

Ahora asumiremos que $A, B \in \mathbf{sl}(2)$ y $\det[A, B] \neq 0$. Ya que G_Σ es un grupo conexo, por el Corolario 0.1, tenemos que $G_\Sigma = Sl(2)$. Recordemos que nuestro interés es obtener condiciones necesarias y suficientes para la transitividad del semigrupo S_Σ, que en este caso será un subsemigrupo de $Sl(2)$. En el siguiente apartado analizaremos los semigrupos del grupo $Sl(2)$.

1. Semigrupos de $Sl(2)$

Denotemos por $\mathbb{P}^1$ al espacio proyectivo real que se obtiene al identificar los puntos opuestos de $\mathbb{S}$, como $Sl(2)$ actúa transitivamente sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, entonces en particular, también actúa transitivamente sobre $\mathbb{P}^1$ mediante la acción $g[x] = [gx]$, $g \in Sl(2)$, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

La descripción de semigrupos con puntos interiores que actúan transitivamente sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es realizada en el Apéndice A en el que se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 1.1. *Sea $S \subset Sl(2)$ un semigrupo con puntos interiores. Supóngase que S actúa transitivamente sobre $\mathbb{P}^1$. Entonces $S = Sl(2)$.*

Teorema 1.2. *Sea S un semigrupo de $Sl(2)$ con int$S \neq \emptyset$. Entonces S actúa transitivamente sobre $\mathbb{P}^1$ si y solo si no existen subconjuntos compactos propios $C \subset \mathbb{P}^1$, con $\operatorname{int} C \neq \emptyset$, que son $S-$invariantes, esto es, $gC = \{gh : h \in C\} \subset C$ para todo $g \in S$.*

Demostración. Si $x \in \mathbb{P}^1$, la órbita de x por medio de S es $Sx = \{gx : g \in S\}$ y como $\mathbb{P}^1$ es compacto, el subconjunto $\mathrm{cl}(Sx) \subset \mathbb{P}^1$ es compacto, $S-$invariante y con puntos interiores. Recíprocamente, si existe tal subconjunto compacto C, entonces para cada $x \in C$ se tiene $\mathrm{cl}(Sx) \subset C$. Por consiguiente, la existencia del subconjunto compacto C es equivalente a la existencia de algún $x \in \mathbb{P}^1$ de modo que $\mathrm{cl}(Sx)$ sea un subconjunto propio.

Por otra parte, si suponemos que no existe ningún x con dicha propiedad, es decir, $\mathrm{cl}(Sx)$ es todo $\mathbb{P}^1$ para cada $x \in \mathbb{P}^1$, esto significaría que todas las orbitas son densas. Entonces, como $S^{-1} = \{g^{-1} : g \in S\}$ es también un semigrupo de $Sl(2)$ con puntos interiores, tendríamos que para $x, y \in \mathbb{P}^1$, la intersección $S^{-1}y \cap Sx$ es no vacía, sean entonces $h, k \in S$ tal que $h^{-1}y = kx$, esto es $y = (hk)x$, lo cual significa que S actúa transitivamente sobre $\mathbb{P}^1$. Recíprocamente, es claro que si S actúa transitivamente sobre $\mathbb{P}^1$, cada órbita por medio de S serán todo $\mathbb{P}^1$. Por tanto, la transitividad de S es equivalente a que todas las orbitas por medio de S sean densas en $\mathbb{P}^1$.

En resumen S actúa transitivamente sobre $\mathbb{P}^1$ si y solo si no existe ningún conjunto compacto $C \subset \mathbb{P}^1$ con tales características, luego por el teorema anterior esto es equivalente a $S = Sl(2)$. ■

Con los resultados anteriores concluimos que S_Σ actúa transitivamente sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ si y solo si actúa transitivamente sobre $\mathbb{P}^1$ y para verificar este ultimo basta probar que S_Σ no deja subconjuntos compactos invariantes de $\mathbb{P}^1$.

2. Criterio de controlabilidad

Ahora estamos interesados en dar condiciones sobre las matrices A y B de modo que S_Σ no deje conjuntos compactos invariantes en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^1$. La existencia o no de estos conjuntos invariantes será detectado observando las trayectorias de los sistemas lineales correspondientes. Recordemos que si C es una matriz con tr$C = 0$, su polinomio característico es $x^2 + \det(C)$ y los eigenvalores son $\pm\sqrt{-\det(C)}$. Entonces tenemos los tres casos anteriormente mencionados

a. Si $\det C > 0$, C es de la forma,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

las trayectorias del sistema $\dot{x} = Cx$ son círculos centrados en el origen. En la acción proyectiva inducida sólo hay una trayectoria.

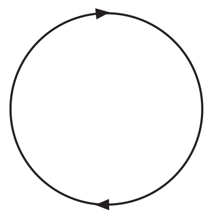


Figura 1. Orbita en $\mathbb{P}^1$

b. Si $\det C = 0$ con $C \neq 0$ tenemos

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y las trayectorias del sistema lineal definidas por C son las líneas rectas perpendiculares al eje y y los puntos en el eje x son puntos estacionarios. En la acción proyectiva hay dos trayectorias; un punto fijo y una trayectoria densa que comienza y termina en el punto fijo.

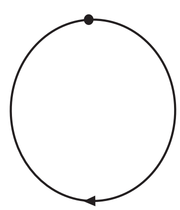


Figura 2. Orbita en $\mathbb{P}^1$

c. Si $\det C < 0$, tenemos que

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

y las trayectorias son hipérbolas. La acción proyectiva inducida consta de dos puntos fijos $\{f_1^C, f_2^C\}$ y dos trayectorias que unen estos puntos fijos. De la dinámica del sistema se observa que uno de los puntos, digamos f_1^C, es un punto fijo repulsor, del cual salen las trayectorias, este punto se corresponde con el espacio propio asociado con el menor valor propio de C. El otro f_2^C es un punto fijo atractor, al cual las trayectorias se dirigen y este punto se corresponde con el espacio propio asociado al mayor valor propio de C.

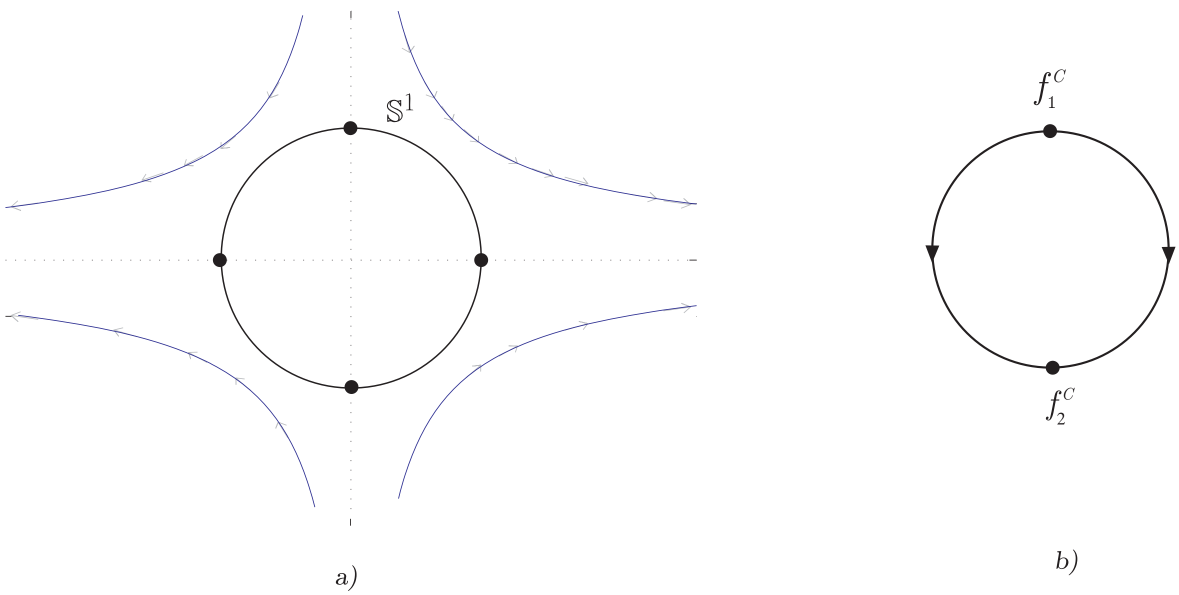
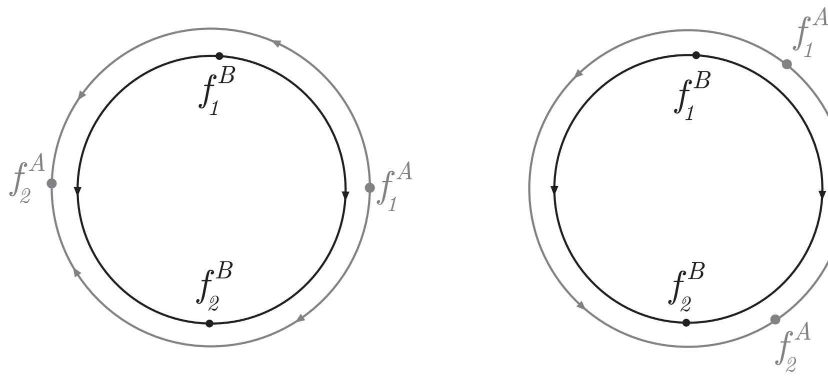


Figura 3. a) Trayectorias de C en $\mathbb{R}^2$. b) Orbita en $\mathbb{P}^1$.

Ahora, para obtener la controlabilidad del sistema $\dot{x} = (A + uB)x$ con $A, B \in \mathbf{sl}(2)$ veremos caso por caso de acuerdo al $\det B$.

1. Si $\det B > 0$ y A es una matriz con tal que $\det[A, B] \neq 0$ entonces el sistema es controlable. Esto se debe a que las trayectorias de $\dot{x} = Bx$ son lo círculos, y no es posible encontrar algún subconjunto compacto en la línea proyectiva que sea invariante bajo el semigrupo del sistema.
2. Si $\det B = 0$ y $\det[A, B] \neq 0$ tenemos controlabilidad de manera análoga al caso anterior, no es posible encontrar un subconjunto compacto invariante en el espacio proyectivo. encontrar algún subconjunto compacto e invariante en el espacio proyectivo.
3. Sea $\det B < 0$. Entonces existen las siguientes posibilidades:
   a. Si $\det A \geq 0$ y $\det[A, B] \neq 0$, las trayectorias proyectivas de A son densas y tenemos la controlabilidad.
   b. Si $\det A < 0$. En este caso la controlabilidad depende del signo de $\det[A, B]$. Geométricamente tenemos dos casos. Denotemos por $\{f_1^A, f_2^A\}$ a los puntos fijos de A en $\mathbb{P}^1$, donde f_1^A es repulsor y f_2^A atractor. Estos pueden estar en trayectorias diferentes o en una misma trayectoria de B.



a) b)

En el caso a) el sistema no es controlable, por ejemplo la órbita de f_2^A no es densa en $\mathbb{P}^1$. En el caso b) el sistema es controlable, ya que todas las órbitas son densas. Aquí los puntos fijos no se trasponen por que $\det[A, B] \neq 0$.
El significado algebraico de estas condiciones geométricas es como sigue. Suponemos que

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

Los puntos fijos de A están en la misma trayectoria de B si y solo si los eigenvectores de A están en el mismo cuadrante. En este caso los eigenvalores de A son $\pm\sqrt{\alpha^2 + \gamma\beta}$. El eigenvector (x, y) correspondiente a la matriz A satisface las ecuaciones

$$\begin{aligned} \left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \gamma\beta}\right) x + \beta y \quad &= 0 \\ \gamma x + \left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \gamma\beta}\right) y \quad &= 0. \end{aligned}$$

Ya que $y \neq 0$ podemos asumir que $y = 1$ y tenemos los eigenvectores

$$(x_\pm, 1) = \left(-\frac{\beta}{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \gamma\beta}}, 1\right).$$

Estos vectores propios pertenecen al mismo cuadrante, si y sólo si x_+ y x_- son de mismo signo, y esto a su vez es equivalente a

$$-\beta\gamma = \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \gamma\beta}\right)\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \gamma\beta}\right) > 0.$$

Puesto que $\det[A, B] = 4a^2\gamma\beta$ tenemos que el sistema es controlable en el caso $\det[A, B] < 0$, y no controlable si $\det[A, B] > 0$.

Con esto concluye el análisis caso por caso de los sistemas que generan $\mathbf{sl}(2)$. En resumen, observamos el siguiente hecho que viene de este análisis.

Teorema 2.1. *Sea $A, B \in \mathbf{sl}(2)$. Entonces el semigrupo S_Σ coincide con $Sl(2)$ si y solo si* $\det[A, B] < 0$.

Demostración. Como se mencionó en los preliminares, S_Σ tiene puntos interiores como subespacio de $G_\Sigma = Sl(2)$ luego por el Teorema 1.1 se tiene que $S_\Sigma = Sl(2)$ si y solo si Σ es controlable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ de modo que es suficiente comprobar que la controlabilidad se produce si y sólo si $\det[A, B] < 0$. Este resultado se sigue del Lema 0.1. ■

Finalmente tenemos el criterio de controlabilidad.

Teorema 2.2. *Supongase que $A, B \in \mathbf{sl}(2)$. Entonces (4) es controlable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ si y solo si* $\det[A, B] < 0$.

Capítulo 3

Interpretación Geométrica del Criterio de Controlabilidad

En el capítulo anterior consideramos en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ el sistema de control

$$\dot{x} = (A + uB)x. \tag{8}$$

Donde $A, B \in \mathbf{sl}(2)$ y u es una función real constante por partes. Por el Teorema 2.2, si $\det[A, B] \neq 0$, el sistema (8) es controlable si y solo si $\det[A, B] < 0$. En este capítulo realizaremos la interpretación geométrica de ese criterio en términos de la localización de la recta $\mathscr{L} = \{A + uB, u \in \mathbb{R}\}$ que está contenido en $\mathbf{sl}(2)$, [**4**].

Recordemos que si $\mathfrak{g}$ es un algebra de Lie y X es un elemento de $\mathfrak{g}$, entonces la función adjunta de X se define como $\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, dado por $\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]$. La forma de Cartan-Killing [**7**] $\mathcal{K} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, definida por $\mathcal{K}(X, Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))$ y la forma traza $\langle , \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ es dada por $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(XY)$.

En nuestro caso $\mathfrak{g} = \mathbf{sl}(2)$, para nuestros fines en este espacio consideramos la siguiente base ordenada:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego si $X \in \mathbf{sl}(2)$, entonces

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} = xU + \left(\frac{y+z}{2}\right)V + \left(\frac{z-y}{2}\right)W.$$

Proposición 0.1. *En* $\mathbf{sl}(2)$ *se satisface la relación*

$$\mathcal{K}(X, Y) = 4\langle X, Y\rangle.$$

Demostración.

Sea $u = (u_1, u_2, u_3)$ un elemento de $\mathbf{sl}(2)$, entonces $\mathrm{ad}(u) : \mathbf{sl}(2) \to \mathbf{sl}(2)$ es una transformación lineal cuya representación matricial es

$$\begin{pmatrix} 0 & -2u_3 & 2u_2 \\ 2u_3 & 0 & -2u_1 \\ 2u_2 & -2u_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De donde, si $v \in \mathbf{sl}(2)$ con $v = (v_1, v_2, v_3)$, entonces

$$\mathcal{K}(u,v) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(u)\operatorname{ad}(v)) = 8u_1v_1 + 8u_2v_2 - 8u_3v_3 = u^T \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} v,$$

similarmente

$$\langle u, v\rangle = u^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} v. \tag{9}$$

Por lo tanto $\mathcal{K}(u,v) = 4\langle u, v\rangle$. ■

1. Interpretación geométrica

Ahora consideramos la forma cuadrática no degenerada

$$Q(X) = \langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(X^2).$$

Sea $C = \{X \in \mathbf{sl}(2) : Q(X) = 0\}$, de la igualdad (9), C es un doble cono circular con eje la recta generado por W y toda recta que genera C pasa por el origen y forma un ángulo de 45° con W.

Si $X \in \mathbf{sl}(2)$, su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \det(X)$$

luego por el teorema de Cayley-Hamilton se sigue

$$X^2 + \det(X)I = 0, \tag{10}$$

de donde $\operatorname{tr}(X^2) + 2\det(X) = 0$ en consecuencia

$$Q(X) = -2\det(X). \tag{11}$$

Observemos que de las igualdades (10) y (11) se ve que los elementos de C son nilpotentes.

Ahora consideramos los siguientes conjuntos

$$C_{\text{int}} = \{X \in \mathbf{sl}(2) : Q(X) < 0\} \qquad \text{y} \qquad C_{\text{ext}} = \{X \in \mathbf{sl}(2) : Q(X) > 0\}.$$

Es fácil ver que los elementos de C_{int} tienen eigenvalores imaginarios puros y los elementos de C_{ext} tienen eigenvalores reales distintos.

Sean $A, B \in \mathbf{sl}(2)$ tal que $\det[A, B] \neq 0$, es decir el algebra de Lie generado por ellos es todo $\mathbf{sl}(2)$. Consideremos la recta

$$\mathscr{L} = \{A + uB : u \in \mathbb{R}\}.$$

Esta recta esta enteramente contenida en $\mathbf{sl}(2)$ y no pasa por el origen ya que A y B son linealmente independientes. Por otra parte, la existencia de puntos en común entre $\mathscr{L}$ y C esta determinado por los ceros de $Q(A+uB)$. A continuación analizaremos este aspecto. Como $Q(A+uB) = -2\det(A+uB)$, veamos que sucede con $\det(A+uB)$, $u \in \mathbb{R}$.

Ya que $A, B \in \mathbf{sl}(2)$ y $A+uB \in \mathbf{sl}(2)$ para todo $u \in \mathbb{R}$, entonces $A^2 = -(\det A)I$, $B^2 = -(\det B)I$ y $\det(A+uB)I = -(A+uB)^2$, de donde $\det(A+uB)I = (\det B)Iu^2 - (AB+BA)u + (\det A)I$, de esta igualdad vemos que $AB+BA$ es una matriz escalar, por lo cual asumiremos en nuestras notaciones como un número real, con lo que:

$$\det(A+uB) = (\det B)u^2 - (AB+BA)u + (\det A). \tag{12}$$

De esta igualdad, $\det(A+uB)$ es un polinomio cuadrático si y solo si $\det B \neq 0$. En este caso el discriminante de este polinomio cuadrático es

$$(AB+BA)^2 - 4\det A \det B. \tag{13}$$

Para evaluar el termino $(AB+BA)^2$ usamos el hecho de que $[A,B] \in \mathbf{sl}(2)$ y por consiguiente se satisface la igualdad $-(\det[A,B])I = [A,B]^2$. Desarrollando el conmutador obtenemos

$$\begin{aligned} -(\det[A,B])I &= [A,B]^2 \\ &= (AB)^2 + (BA)^2 - AB^2A - BA^2B \\ &= (AB)^2 + (BA)^2 - 2(\det A)(\det B)I. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} (AB+BA)^2 &= (AB)^2 + (BA)^2 + AB^2A + BA^2B \\ &= (AB)^2 + (BA)^2 + 2(\det A)(\det B)I. \end{aligned}$$

De estas dos ultimas relaciones obtenemos

$$(AB+BA)^2 - 4\det A \det B = -\det[A,B]. \tag{14}$$

Proposición 1.1. *El discriminante del polinomio* $\det(A+uB)$ *es* $-\det[A,B]$.

Notemos que, $u_0 \in \mathbb{R}$ es una raíz de $\det(A+uB) = -\frac{1}{2}Q(A+uB)$ si y solo si $A+u_0B \in C$. Por tanto, $\det[A,B]$ mide el número de intersecciones de la recta $\mathscr{L}$, con el doble cono C. Precisamente, este calculo nos proporciona la siguiente ilustración geométrica.

Proposición 1.2. *Supongase que* $\det[A,B] \neq 0$. *Entonces la linea recta* $\mathscr{L} = \{A+uB : u \in \mathbb{R}\}$ *ingresa al interior del doble cono* C *si y solo si* $\det[A,B] < 0$.

Demostración. En el caso de que $\det B \neq 0$, el polinomio

$$\det(A + uB) = (\det B)u^2 - (AB + BA)u + \det A$$

es cuadrático entonces el resultado es consecuencia de la proposición previa. Si asumimos que $\det B = 0$. La igualdad (14) implica que $AB + BA \neq 0$ si y solo si $\det[A, B] < 0$. En este caso $\det(A + u_0 B) > 0$ para algún u_0, lo cual significa que $\mathscr{L}$ ingresa al interior de C. ■

Por lo tanto, el criterio del Teorema2.2 es interpretado como la siguiente condición geométrica para la controlabilidad.

Teorema 1.1. *Supóngase que* $\det[A, B] \neq 0$*. Entonces el sistema (1) con controles no restringidos es controlable si y solo si la linea recta* $\mathscr{L} = \{A + uB : u \in \mathbb{R}\}$ *ingresa al interior de* C*. En otras palabras, bajo la condición de rango del algebra de Lie en* $\mathbf{sl}(2)$*, La controlabilidad es equivalente a la existencia de* $u_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $A + u_0 B$ *tiene eigenvalores imaginarios puros.*

2. Ejemplos

Ejemplo 2.1. Consideremos el siguiente sistema de control bilineal en $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$

$$\dot{x} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right) x, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Denotemos por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \quad \det[A, B] = -12,$$

luego por el Teorema2.2, el sistema es controlable. Observemos que las trayectorias de A y de B son hipérbolas ya que $\det A < 0$ y $\det B < 0$. Por otra parte,

$$Q(A + uB) = -\frac{1}{2}\det(A + uB) = -\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 1 + 2u & -3u \\ u & -(1 + 2u) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[(u + 2)^2 - 3\right].$$

La recta $\mathscr{L}$ ingresa al interior del cono C cuando $u_0 = -2 - \sqrt{3}$ y sale en $u_0 = -2 + \sqrt{3}$. Para $u \in \left(-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\right)$ la matriz $A + uB$ tiene eigenvalor imaginario puro y cuando $u \in \mathbb{R} \setminus \left[-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\right]$ la matriz $A+uB$ tiene eigenvalores reales distintos uno positivo y otro negativo.

Ejemplo 2.2. Otro sistema bilineal controlable

$$\dot{x} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) x, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces $\det[A, B] = -4$ y $Q(A + uB) = -\frac{1}{2}\det(A + uB) = u + \frac{1}{2}$. La recta $\mathscr{L}$ interseca al cono C únicamente en el punto $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2.3. Ahora veamos el siguiente sistema de control bilineal

$$\dot{x} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) x, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

entonces, $\det[A, B] = 4$ por lo que el sistema no es controlable aunque $span\{A, B\} = \mathbf{sl}(2)$. Por otra parte $\det(A + uB) = -(1 + u)^2 - u^2$, entonces la recta no ingresa al interior del cono. En este caso cada matriz $A + uB$, $u \in \mathbb{R}$ tiene eigenvalores reales distintos.

Capítulo 4

Controlabilidad de Sistemas de control Bilineal en $\mathbb{P}^1$

El principal interés que tenemos es describir los sistemas bilineales controlables sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, en este sentido el Teorema 4.1 enunciado en los preliminares nos sugiere analizar la controlabilidad del sistema correspondiente en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^1$, [**5**].

Consideremos en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ el sistema de control bilineal

$$(15) \quad \Sigma : \qquad \dot{x}(t) = \left(A + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) B_i \right) x(t)\,, \qquad t \in \mathbb{R},\ x(t) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

donde $A, B_1, ..., B_m \in M_n(\mathbb{R})$ y

$$u \in \mathcal{U} = \{u : \mathbb{R} \to U \subset \mathbb{R}^m, u \text{ localmente integrable } \}$$

es el conjunto de controles admisibles. La solución de (15) se denota por $\varphi(t, x, u)$ para el valor inicial $\varphi(0, x, u) = x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Para el sistema de control (15), se define la órbita positiva de un punto por:

$$\mathcal{O}^+(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \text{ Existe } u \in \mathcal{U} \text{ y } t \geq 0 \text{ con } \varphi(t, x, u) = y\}\,.$$

Definición 0.1. El sistema de control (15) se dice controlable bajo el conjunto de control $\mathcal{U}$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, si para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se tiene $\mathcal{O}^+(x) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

El algebra de Lie de (15) es definido por

$$\mathcal{L}A(\Sigma) = \text{Span}_{\mathcal{L}A} \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i,\ u \in U \right\} \subset M_n(\mathbb{R}).$$

Definición 0.2. El sistema de control bilineal (15) satisface la condición de rango del algebra de Lie en $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si

$$(16) \qquad \dim(\mathcal{L}A(\Sigma))(x) = n.$$

Si (16) se satisface para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, se dice que el sistema bilineal satisface la condición de rango del algebra de Lie, LARC.

1. Controlabilidad en el espacio $\mathbb{P}^1$

Ahora consideramos el sistema angular asociados a (15) definido sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ por:

$$\dot{s}(t) \quad = \quad h(A, s(t)) + \textstyle\sum_{i=1}^{m} u_i(t) h(B_i, s(t)), \qquad s \in \mathbb{P}^{n-1}, \tag{17}$$

donde $h(A, s) = (A - s^T A s I)s$.

Denotamos por $\mathbb{P}\Sigma$ al sistema que induce (17) sobre el espacio proyectivo $\mathbb{P}^1$. Si (15) satisface LARC para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, entonces el sistema $\mathbb{P}\Sigma$ satisface su correspondiente LARC para cada $s \in \mathbb{P}^{n-1}$, pero el recíproco no es cierto, por ejemplo cuando las matrices $A, B_1, ..., B_m$ son antisimétricas.

Consideramos nuevamente el sistema de control Bilineal

$$\Sigma : \qquad \dot{x} = (A + uB)x\,,\; x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \qquad A, B \in M_2(\mathbb{R})\,, u(t) \in U \subset \mathbb{R}. \tag{18}$$

En lo que sigue del capítulo supondremos que el sistemas de control Σ satisfacen LARC.

Observemos que si para algún control constante u las trayectorias de Σ son rotaciones, entonces tendremos la controlabilidad de $\mathbb{P}\Sigma$ en $\mathbb{P}^1$. Pero las trayectorias de Σ para ese control u serán rotaciones si y solo si $A + uB$ es antisimétrica o equivalentemente, si la matriz $A + uB$ tiene eigenvalor propio complejo. En resumen, si existe un control constantes u_0 tal que $A + u_0 B$ tiene eigenvalor propios complejo, entonces el sistema $\mathbb{P}\Sigma$ es controlable sobre $\mathbb{P}^1$. A continuación veremos que esta condición además de ser suficiente para la controlabilidad del sistema $\mathbb{P}\Sigma$, es también necesaria.

En adelante nuestro conjunto de controles $\mathcal{U}$ será el conjunto de funciones reales constantes con valores en $U \subset \mathbb{R}$, por lo que solo nos referiremos como $u \in U$.

El polinomio característico de la matriz $A + uB$, es $p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A + uB)\lambda + \det(A + uB)$, de modo que para ver si esta matriz tiene valores propios complejos analizamos el discriminante del polinomio caracteristico

$$y_{[A+uB]}(u) = \mathrm{tr}^2(A + uB) - 4\det(A + uB),$$

esta igualad se puede reescribir mediante un cálculo directo como

$$y_{[A+uB]}(u) = \alpha u^2 + 2\beta u + \gamma, \tag{19}$$

donde

$$\alpha = (\mathrm{tr}(B))^2 - 4\det(B), \tag{20}$$

$$\beta = 2\mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B), \tag{21}$$

$$\gamma = (\mathrm{tr}(A))^2 - 4\det(A). \tag{22}$$

Definición 1.1. Asociamos al sistema bilineal Σ, el *polinomio discriminante* $y_{[A+uB]}(u) : U \to \mathbb{R}$, definida por (19). Si no hay ambigüedad usaremos $y(u)$ en lugar de $y_{[A+uB]}(u)$.

El siguiente lema muestra que el polinomio discriminante es invariante bajo la transformación Jordan.

Lema 1.1. *Consideremos el conjunto de matrices* $\{A + uB : u \in U\}$ *y la transformación real Jordan* $\mathcal{J} : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$*, definida por* $\mathcal{J}(C) = P^{-1}CP$*. Entonces*

$$y_{[A+uB]}(u) = y_{[\mathcal{J}(A)+u\mathcal{J}(B)]}(u).$$

Demostración. Se sigue de las propiedades $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ y $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. ■

Para ver que la matriz $A + uB$ tine eigenvalor complejo para cierto $u \in U$, usaremos el siguiente hecho.

Lema 1.2. *La matriz* $A + uB$ *tiene eigenvalores complejos sii* $\inf\{y(u), u \in U\} < 0$.

Observemos que cuando $\inf\{y(u), u \in \mathbb{R}\} < 0$, tenemos la controlabilidad del sistema $\mathbb{P}\Sigma$ en $\mathbb{P}^1$, además por el lema anterior existe $u_0 \in \mathbb{R}$ tal que la matriz $A + u_0B$ tiene eigenvalor complejo. Ahora pasamos a analizar los casos cuando $\inf\{y(u), u \in \mathbb{R}\} \geq 0$, en este caso ninguna matriz $A + uB$ tiene eigenvalor complejo, nosotros probaremos que además no se tiene controlabilidad en $\mathbb{P}^1$.

Caso I. Cuando $\alpha = 0$ i.e. B tiene eigenvalor repetido.

En este caso $y(u) = 2\beta u + \gamma$ y caben las siguientes posibilidades.

a) Cuando $\beta = 0$ y $\gamma = 0$: En este caso tenemos que:
- A tiene eigenvalores repetidos,
- $\inf\{y(u) : u \in \mathbb{R}\} = 0$,
- Σ no satisface LARC. Esto se verifica como sigue:

Supongamos que

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Ya que A tiene eigenvalor repetido, podemos asumir que A esta en su forma Jordan, es decir $a_3 = 0$ y $a_1 = a_4$. Ahora bien:

Si $a_2 \neq 0$, entonces de la condición $\beta = \operatorname{tr}(AB) - 2\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) = 2a_2b_3 = 0$, tenemos $b_3 = 0$ y $\alpha = 0$ implica $b_1 = b_4$. Por tanto

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que el corchete de Lie satisface $[A, B] = 0$, luego $\mathcal{L}A\{A + uB, u \in \mathbb{R}\} = span\{A, B\}$ y

$$(A, B)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1 & b_1x_1 + b_2x_2 \\ a_1x_2 & b_1x_2 \end{pmatrix},$$

del cual se obtiene que $\dim\left(\mathcal{L}A\{A + uB, u \in \mathbb{R}\}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1$, por tanto el sistema de control no satisface LARC.

Si $a_2 = 0$ y $b_1 = b_4$, entonces de $\alpha = \operatorname{tr}^2(B) - 4\det(B) = 4b_2b_3 = 0$ tenemos $b_2 = 0$ o $b_3 = 0$, por tanto A y B son simultáneamente triangulares, entonces el sistema no satisface LARC como en el caso previo.

Si $a_2 = 0$ y $b_1 \neq b_4$, entonces de $\alpha = (b_1 - b_4)^2 + 4b_2b_3 = 0$ tenemos $b_2b_3 < 0$; supongamos que $b_2 < 0$ y $b_3 >$. Como A es una matriz diagonal, $[A, B] = 0$ y

$$(A, B)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1 & b_1x_1 + b_2x_2 \\ a_1x_2 & b_3x_1 + b_4x_2 \end{pmatrix}.$$

Nótese que $\det((A, B)(x)) = a_1(b_3x_1^2 + (b_4 - b_1)x_1x_2) - b_2x_2^2)$, y con $(b_1 - b_4)^2 = 4(-b_2)b_3$ se tiene $\det((A, B)(x)) = (\sqrt{b_3}x_1 + \sqrt{-b_2}x_2)^2a_1$. Para $x = (-\sqrt{-b_2}/\sqrt{b_3}, 1) \neq 0$, se tiene $\det((A; B)(x)) = 0$. No se satisface LARC.

b) Si $\beta = 0$ y $\gamma > 0$. Tenemos que:
- A tiene eigenvalores reales distintos,
- $\inf\{\gamma(u) : u \in \mathbb{R}\} > 0$,

- Σ no satisface LARC. Estos se verifica como sigue.

  A en su forma Jordan es una matriz diagonal. De $\beta = 0$ tenemos $b_1 = b_4$ y de $\alpha = 0$ tenemos $b_2 = 0$ o $b_3 = 0$.

  Si $b_2 = 0$ y $b_3 = 0$, entonces $B = b_1 I$ donde I es la matriz identidad, entonces $[A, B] = 0$ y
$$(A, B)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1 & b_1x_1 \\ a_4x_2 & b_1x_2 \end{pmatrix},$$
  y $\dim\left(\mathcal{L}A\{A + uB, u \in \mathbb{R}\}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1$, el sistema de control no LARC.

  Si $b_2 \neq 0$ y $b_3 = 0$, las matrices A y B son de la forma
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}.$$
  Calculando el corchete de Lie tenemos
$$[A, B] = \begin{pmatrix} 0 & b_2(a_1 - a_4) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [A, [A, B]] = (a_1 - a_4)[A, B], \quad [B, [A, B]] = 0.$$
  Entonces, $\mathcal{L}A\{A + uB, u \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{A, B, [A, B]\}$ y
$$(A, B, [A, B])\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1 & b_1x_1 + b_2x_2 & b_2(a_1 - a_4)x_2 \\ a_4x_2 & b_1x_2 & 0 \end{pmatrix},$$
  de donde $\dim\left(\mathcal{L}A\{A + uB, u \in \mathbb{R}\}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1$. No se satisface LARC.

Caso II. Cuando $\alpha > 0$.

En este caso el polinomio $y(u)$ es cuadrático y tenemos los siguientes casos:

a) Cuando el valor mínimo de $y(u)$ satisface $\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha} > 0$. En este caso:

- $\inf\{y(u) : u \in \mathbb{R}\} > 0$,
- $\mathbb{P}\Sigma$ no es controlable en $\mathbb{P}^1$.

  Ya que $\gamma > 0$, podemos asumir que A esta en su forma canónica Jordan, i.e. $a_2 = a_3 = 0$, y
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}.$$
  Los eigenvalores de la matriz $A + uB$ son:
$$\lambda_1(u) = \frac{(a_1 + ub_1 + a_4 + ub_4) + \sqrt{y(u)}}{2},$$

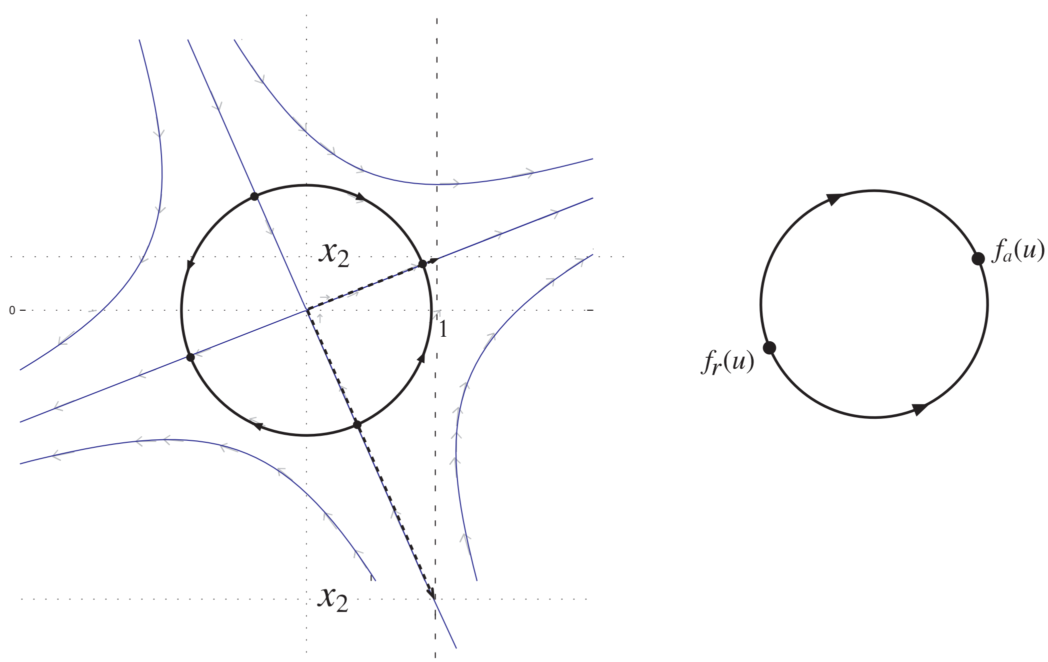
$$\lambda_2(u) = \frac{(a_1 + ub_1 + a_4 + ub_4) - \sqrt{y(u)}}{2},$$

donde $y(u) = \alpha u^2 + 2\beta u + \gamma > 0$, para todo $u \in \mathbb{R}$.

Si $b_2 = 0$ y $b_3 = 0$, entonces B es una matriz diagonal y el sistema no satisface LARC.

Si $b_2 \neq 0$ y $b_3 = 0$, o $b_2 = 0$ y $b_3 \neq 0$, el análisis es similar al **caso I**.b), no se satisface LARC.

Si $b_2 \neq 0$ y $b_3 \neq 0$ se analizaran los eigenvectores del sistema para controles constantes, normalizamos el componente x_1- de los eigenvectores a 1, en el caso que $x_1 = 0$ se normaliza x_2 a 1 y el análisis es similar.



Denotemos por $f_r(u)$ como en la figura previa, al punto fijo atractor y por $f_a(u)$ al punto fijo repulsor del sistema $\mathbb{P}\Sigma$, estos puntos dependen de manera continua de u.

Los eigenvectores de la matriz $A + uB$, para $u \neq 0$ son:

$$(1, x_2) = \left(1, \frac{\lambda_1(u) - (a_1 + ub_1)}{ub_2}\right) = \left(1, \frac{(a_4 + ub_4) + \sqrt{y(u)} - (a_1 + ub_1)}{2ub_2}\right),$$

$$(1, x_2) = \left(1, \frac{\lambda_2(u) - (a_1 + ub_1)}{ub_2}\right) = \left(1, \frac{(a_4 + ub_4) - \sqrt{y(u)} - (a_1 + ub_1)}{2ub_2}\right).$$

En coordenadas polares con $\theta = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ se obtiene:

$$\theta_1(u) = \arctan\left(\frac{(a_4 + ub_4) + \sqrt{y(u)} - (a_1 + ub_1)}{2ub_2}\right),$$
$$\theta_2(u) = \arctan\left(\frac{(a_4 + ub_4) - \sqrt{y(u)} - (a_1 + ub_1)}{2ub_2}\right).$$

A medida que u cambia, se describen dos conjuntos, el primero consiste de puntos repulsores y el otro de puntos atractores, afirmamos que estos conjuntos no se intersecan, por lo que no es posible que $O^+(x) = \mathbb{P}^1$, para todo $x \in \mathbb{P}^1$, por tanto el sistema no es controlable. Para demostrar esa afirmación, probaremos que:

Afirmación 1.1. El rango de las eigendirecciones no tienen intersección, es decir para todo $u_1, u_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $u_1 \neq u_2$, se tiene $\theta_1(u_1) \neq \theta_2(u_2)$.

Demostración. Supongamos que existen u_1, u_2 en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $u_1 \neq u_2$ y que $\theta_1(u_1) = \theta_2(u_2)$. Aplicando la función tangente y reduciendo se obtiene

$$u_2\sqrt{y(u_1)} + u_1\sqrt{y(u_2)} = (u_1 - u_2)(a_4 - a_1)$$
$$u_2^2 y(u_1) + 2u_1u_2\sqrt{y(u_1)}\sqrt{y(u_2)} + u_1^2 y(u_2) = (u_1 - u_2)^2(a_4 - a_1)^2$$

Como $\gamma = (a_4 - a_1)^2$, obtenemos

$$\alpha u_1u_2 + \beta(u_1 + u_2) + \gamma = -\sqrt{y(u_1)}\sqrt{y(u_2)},$$

reemplazamos $y(u_i) = \alpha u_i^2 + 2\beta u_i + \gamma$,luego de reducir tenemos

$$\beta(u_1 - u_2)^2 = \alpha\gamma(u_1 - u_2)^2.$$

de donde $\beta^2 = \alpha\gamma$, lo cual es una contradicción. ■

b) Cuando el valor mínimo de $y(u)$ satisface $\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha} = 0$. Tenemos
- $\inf\{y(u) : u \in \mathbb{R}\} = 0$,
- $\mathbb{P}\Sigma$ no es controlable en $\mathbb{P}^1$.

Si $\beta \neq 0$, entonces $\gamma > 0$ y la matriz A tiene eigenvalores distintos, luego $a_1 = a_2 = 0$ y $a_1 \neq a_4$. La condición $\alpha\gamma = \beta^2$ implica que $b_2b_3 = 0$.

Si $b_2 = b_3 = 0$, entonces A, B son simultaneamente diagonales, y el sistema no satisface LARC.

Si $b_2 \neq 0$ y $b_3 = 0$, o $b_2 = 0$ y $b_3 \neq 0$, el sistema tampoco satisface LARC ya que la matriz A y B son simultaneamente triangulares.

Si $\beta = 0$, entonces $\gamma = 0$ y A es una matriz que tiene eigenvalores repetidos, luego podemos suponer que $a_3 = 0$ y $a_1 = a_4$.
Consideremos primero el caso $a_2 \neq 0$. La condición $\beta = 0$ da $b_3 = 0$, en consecuencia el sistema no satisface LARC.
En otro caso, si $a_2 = 0$, entonces A es una matriz diagonal. Si B satisface $b_2 = 0$ o $b_3 = 0$, el sistema no satisface LARC. Pero si $b_2 \neq 0$ y $b_3 \neq 0$, las matrices A y B tienen la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Los eigenvalores del sistema de control son:

$$\lambda_1(u) = \frac{(2a_1 + ub_1 + ub_4) + \sqrt{y(u)}}{2},$$

$$\lambda_2(u) = \frac{(2a_1 + ub_1 + ub_4) - \sqrt{y(u)}}{2},$$

ya que $y(u) = \alpha u^2 \geq 0$, los eigenvectores de $A + uB$, $x_i = (x_1^i, x_2^i)$, con $x_1^i = 1$ y $u \neq 0$ satisfacen

$$x_2^1 = \frac{\lambda_1(u) - (a_1 + ub_1)}{b_2 u} = \frac{b_4 - b_1 + \sqrt{\alpha}}{2b_2},$$

$$x_2^2 = \frac{\lambda_2(u) - (a_1 + ub_1)}{b_2 u} = \frac{b_4 - b_1 - \sqrt{\alpha}}{2b_2},$$

en coordenadas polares

$$\theta_1(u) = \arctan\left(\frac{b_4 - b_1 + \sqrt{\alpha}}{2b_2}\right),$$

$$\theta_2(u) = \arctan\left(\frac{b_4 - b_1 - \sqrt{\alpha}}{2b_2}\right).$$

Se verifica que la intersección de eigendirecciones es vacía, por tanto Σ no es controlable.

En virtud de todos los casos analizados tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.2. *Considere el sistema de control bilineal (18) con $U = \mathbb{R}$ y asuma que Σ satisface LARC en $\mathbb{R}^2$. Entonces $\mathbb{P}\Sigma$ es controlable en $\mathbb{P}^1$ sii existe constante $u \in \mathbb{R}$ tal que la matriz $A + uB$ tiene eigenvalores complejos.*

2. Ejemplos

Ejemplo 2.1. Consideramos el sistema de control bilineal,

$$\dot{x} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) x, \quad u \in \mathbb{R}.$$

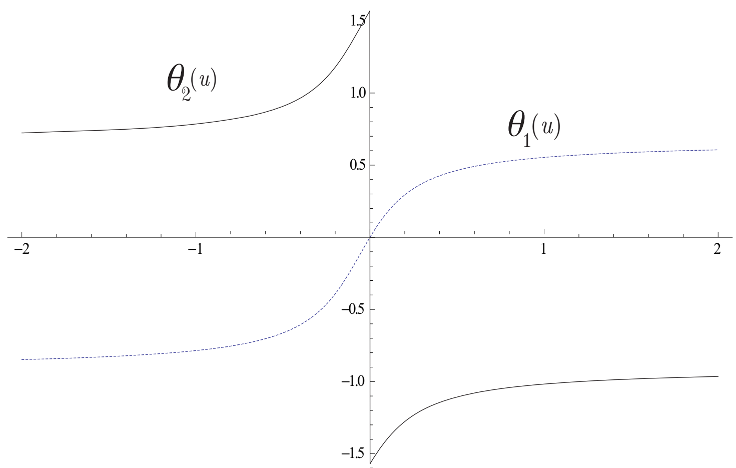
El polinomio discriminante es $y(u) = 17u^2 + 2u + 1 = (1+u)^2 + 16u^2 > 0$ con $\alpha\gamma > \beta^2$. Los valores propios de la matriz $A + uB$ son

$$\lambda_{1,2} = \frac{3(1+u) \pm \sqrt{(1+u)^2 + 16u^2}}{2}.$$

Para $u \neq 0$, sus eigenvectores son

$$(1, x_{\pm}(u)) = \left(1, \frac{-(u+1) \pm \sqrt{(u+1)^2 + 16u^2}}{4u}\right).$$

Este sistema no es controlable en $\mathbb{P}^1$, ya que las eigendireciones no se intersecan, esto se ilustra en la siguiente gráfica.



Ejemplo 2.2. Consideremos el sistema de control Bilineal

$$\dot{x} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) x, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $y(u) = -16u^2 + 12u - 4$. El sistema es controlable en $\mathbb{P}^1$ ya que $y(u) < 0$, para cada $u \in \mathbb{R}$. Los valores propios de la matriz $A + uB$ son $\lambda_{1,2}(u) = 1 \pm i\sqrt{4u^2 - 3u + 1}$, todas esas matrices tienen eigenvalor complejo con parte real 1. Este sistema es controlable en $\mathbb{P}^1$ y en virtud del Teorema 4.1 este sistema no es controlable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Apéndice A

1. Semigrupos en $Sl(2)$.

En este capítulo se describe los subsemigrupos de $Sl(2)$ con puntos interiores que actúan transitivamente sobre $\mathbb{P}^1$, [**3**].

Teorema 1.1. *Sea S un subsemigrupo de un grupo topológico G con puntos interiores. Entonces el conjunto $\operatorname{int} S$ de puntos interiores de S es un ideal en S.*

Demostración. Dado $h \in S$, $h\operatorname{int}S = \{hg : g \in \operatorname{int}S\}$ es un conjunto abierto contenido en S, por tanto $h\operatorname{int}S \subset \operatorname{int}S$. En particular $\operatorname{int} S$ es un semigrupo. ■

Lema 1.1. *Sea $S \subset Sl(2)$ un semigrupo y supóngase que existe $X \in \mathbf{sl}(2)$ con eigenvalor imaginario puro tal que $\exp X$ está en $\operatorname{int} S$. Entonces $S = Sl(2)$.*

Demostración. Si X tiene eigenvalor imaginario puro, entonces la forma Jordan real de X es

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

por tanto

$$\exp(tX) = \begin{pmatrix} \cos(ta) & -\sin(at) \\ \sin(ta) & \cos(at) \end{pmatrix}.$$

Ya que $\exp X \in \operatorname{int}S$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\exp(tX) \in \operatorname{int}S$ y $ta \in \mathbb{Q}$. Sea $h = \exp(tX)$, tenemos $h^n \in \operatorname{int}S$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $h^m = 1$ para algún entero $m > 0$, por que ta es racional. Luego $1 \in \operatorname{int}S$, lo que implica $S = Sl(2)$, ya que en un grupo topológico conexo el semigrupo generado por un abierto que contiene a la unidad es todo el grupo. ■

Lema 1.2. *Sea S un subsemigrupo de $Sl(2)$. Si existe un elemento nilpotente X tal que $\exp X$ está en $\operatorname{int} S$. Entonces $S = Sl(2)$.*

Demostración. Para $X = 0$ se sigue inmediatamente de los argumentos del lema anterior. Si $X \neq 0$, entonces su forma Jordan es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $X_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/n & 0 \end{pmatrix}$, tenemos que $\exp X_n \to \exp X$, luego existe n_0 tal que $\exp X_{n_0} \in \mathrm{int} S$ y X_{n_0} tiene eigenvalor imaginario puro, con lo que por el lema anterior $\mathrm{int} S = S$. ■

Lema 1.3. *Sea S un subsemigrupo de $Sl(2)$ con $\mathrm{int}S \neq \emptyset$ y asumamos que S es transitivo sobre $\mathbb{P}^1$. Dado $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Entonces existe $w \in \mathbb{R}^2$ y $h \in \mathrm{int}S$ tal que $\{u, w\}$ es una base y en esta base h se escribe como*

$$h = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}$$

para algún $\mu > 0$.

Demostración. Tomemos $g \in \mathrm{int} S$ tal que $g[v] = [v]$. Para esta existencia, fijamos $h_1 \in \mathrm{int} S$. Ya que S actúa transitivamente sobre $\mathbb{P}^1$, existe $h_2 \in S$ ta que $h_2(h_1[v]) = [v]$, sea $g = h_1 h_2$, $g \in \mathrm{int} S$ y fija $[v]$. Ahora sea $u \in \mathbb{R}^2$ tal que $\{u, v\}$ es una base. Ya que v es un eigenvector de g, en esta base la matriz g es de la forma

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

con $a,\ b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Nuevamente, $g^2 \in \mathrm{int} S$ y

$$g^2 = \begin{pmatrix} \mu & c \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}$$

con $c \in \mathbb{R}$ y $\mu > 0$. Si $\mu = 1$ entonces

$$g^2 = \exp Y \quad \text{con} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por tanto el Lema 1.2 implica $S = Sl(2)$, y vemos que S contiene elementos diagonales. En otro caso, sea $w = u + c/(\mu^{-1} - \mu)v$. Entonces $h = g^2$en la base $\{v, w\}$ tiene la forma diagonal deseada. ■

Este lema muestra que asumir la transitividad de S sobre $\mathbb{P}^1$ implica que todo vector es eigenvector de un elemento diagonalizable de $\mathrm{int}\, S$.

Lema 1.4. *Con la notación y las condiciones del lema anterior, sea $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Entonces existe w y $h \in intS$ tal que $\{v, w\}$ es una base y la matriz h con respecto a esta base se representa como*

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}$$

con $\mu > 1$.

Demostración. Sea $\{u, v\}$ como en el Lema1.3. Todas las matrices estarán en esa base. Primero observemos la siguiente descomposición del elemento $g_1 \in Sl(2)$ con $g_1[v] = w$: Para este elemento existen matrices

$$h_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad n_1 = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tal que

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} h_1 n_1.$$

De hecho, ya que $g_1 v = aw$ para algún $a \neq 0$ y $\det g_1 = 1$ existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 & -a^{-1} \\ a & b \end{pmatrix}$$

la descomposición se tiene de

$$\begin{pmatrix} 0 & -a^{-1} \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Análogamente, si $g_2 \in Sl(2)$ y $g_2[w] = v$ tenemos que g_2 también se descompone como

$$g_2 = h_2 n_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con h_2 y n_2 de la misma forma que h_1 y n_1 respectivamente.

Ahora demostramos el lema. Sea $h \in \operatorname{int}S$ como en el Lema 1.3. Si $\mu > 1$, el resultado es obvio. Supongamos que $0 < \mu < 1$ suficientemente pequeño, si es necesario tomamos h^n en lugar de h y μ^n e lugar de μ para $n \geq 0$ suficientemente grande. Ya que S es transitivo sobre $\mathbb{P}$ existe $g_1, g_2 \in S$ tal que $g_1[v] = w$ y $g_2[w] = v$. Tenemos $g_2 h g_1 \in \operatorname{int}S$ por que $h \in \operatorname{int}S$. Tomando la descomposición previa de g_1 y g_2 tenemos

$$\begin{aligned} g_2 h g_1 &= h_2 n_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} h_1 n_1 \\ &= h_2 n_2 \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} h_1 n_1. \end{aligned}$$

Esta igualdad se puede escribir como $g_2hg_1 = h_3n_3$, de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
h_2n_2\begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}h_1n_1 &= h_2\begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}n_2\begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}h_1n_1 \\
&= h_2\begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}h_1 \cdot h_1^{-1}\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}n_2\begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}h_1n_1 \\
&= h_3 \cdot n_3
\end{aligned}
$$

donde

$$h_3 = h_2\begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}h_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \text{ para algún } \lambda > 1$$

y

$$
\begin{aligned}
n_3 &= h_1^{-1}\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}n_2\begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}h_1n_1 \\
&= h_1^{-1}\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}h_1n_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}n_1 = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ para algún número real } * .
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$g_2hg_1 = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in \operatorname{int}S \quad \text{con} \quad \lambda > 1.$$

Ahora mediante un cambio de base como en el Lema 1.3 obtenemos la matriz diagonal deseada. ■

TEOREMA 1.2. *Sea $S \subset Sl(2)$ un semigrupo con puntos interiores. Supóngase que S actúa transitivamente sobre $\mathbb{P}$. Entonces $S = Sl(2)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 1.4 existe una base $\{v, w\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $h \in \operatorname{int}S$ que en esa base se escribe como

$$h = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}$$

con $\mu > 1$. También tenemos que existe $g \in \operatorname{int}S$ tal que $gw = \lambda w$ con $\lambda > 1$. En esta base $\{v, w\}$ podemos escribir g como

$$g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ * & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ya que $h,\ g \in \mathrm{int}S$ entonces sus potencias también están en $\mathrm{int}\,S$. Por tanto existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ * & t \end{pmatrix} \in \mathrm{int}S.$$

Luego su producto también está en $\mathrm{int}\,S$ y

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ * & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}.$$

Con lo que el teorema se sigue del Lema 1.2. ■

Bibliografía

[1] Jurdjevic, V. and H.J. Sussmann. *Control systems on Lie groups*. J. of Diff. Eq., 12, pp. 313-329, 1972.

[2] Jurdjevic, V. and I. Kupka. *Control systems subordinated to a group action: Accessibility*. J. of Diff. Eq., 39, pp. 180-211, 1981.

[3] C. J. Braga Barros, J. Ribeiro Gonçalvez, O. do Rocio and L. A. B. San Martin *Controllability of two-dimensional bilinear systems*. Rev. Proyecciones, 15, pp. 111-139, 1996.

[4] Victor Ayala, Luiz A. B. San Martin *Controllability of two-dimensional bilinear systems: restricted controls and discrete-time*. Rev. Proyecciones, 15, Vol.18 (2):207-223, 1999.

[5] Victor Ayala, Efrain Cruz, Wolfgang Kliemann *Controllability of bilinear systems on the projective space* Computer and Mathematics with Applications,2009.

[6] Fritz Colonius and Wolfgang Kliemann *The dynamics of control*. Birkhauser 2000.

[7] Humphreys, James E. *Introduction to Lie algebras and representation theory* New York, Springer-Verlag, 1972.