UNIVERSIDAD MICHOACANA DE

SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

FORMAS DIFERENCIALES Y ALGUNAS APLICACIONES A LA RELATIVIDAD GENERAL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRA EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA:

ALMA LILIA DENI FLORES TINOCO

ASESOR:

DR. THOMAS ZANNIAS

MORELIA, MICHOACÁN DICIEMBRE DEL 2010.

Contenido

Resumen

En esta tesis introducimos la teoría básica de formas diferenciales y discutimos algunas aplicaciones de esta teoría en el contexto de relatividad general. En el capítulo 1 introducimos el álgebra exterior de Grassmann basandose en el espacio tangente T_xM de una variedad M diferenciable de $\dim M = n$, (pero nuestro análisis es válido si T_xM se reemplaza por un espacio vectorial real E, $\dim E = n$). También en el mismo capítulo introducimos el operador de Hodge, la operación producto interior y sus propiedades básicas.
En el capítulo 2 introducimos campos de formas diferenciales definidos sobre una variedad M suave, con $\dim M = n$. Nuestro enfoque de este capítulo es la introducción del operador derivada exterior d y el operador co-derivada $d^\dagger$ y sus propiedades básicas. También conectamos los operadores $\nabla .$, $\nabla \times$ del análisis vectorial con los operadores d, $d*$ y el operador de Hodge.
El capítulo 3 es dedicado a aplicaciones elementales de la teoría de formas diferenciales. Como primera aplicación en la sección (3.1) formulamos las ecuaciones de Maxwell en el lenguaje de formas diferenciales, tomando como fondo el espacio tiempo de Minkowski. En las secciones (3.2) y (3.3) introducimos las formas de conexión y derivamos las ecuaciones de estructura de

Cartán. En la sección (3.4) discutimos soluciones de las ecuaciones de Cartán con enfásis particular en soluciones de dichas ecuaciones con la conexión de Levi-Civita. En la sección (3.5) usado el análisis de la sección anterior, evaluamos la curvatura de una familia de métricas estáticas y esféricamente simétricas. Como una aplicación de estas fórmulas resolvemos las ecuaciones de Einstein en el vacío para una métrica con simétria esférica y derivamos la solución de Schwarzchild. En la sección (3.6) formulamos las ecuaciones de Einstein-Maxwell y bajo la suposición de estaticidad y simetría esférica, resolvemos el sistema acoplado y llegamos a la solución Reissner-Nordström. En el apéndice 1, se encuentran algunas demostraciones de los teoremas y algunas definiciones que usamos a lo largo de esta tesis.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción al álgebra tensorial.

Empezamos con una introducción a las nociones básicas que serán necesarias más adelante en el desarrollo de esta tesis. Aún podriamos empezar con un espacio vectorial real E, $\dim E = n < \infty$, para concretizar tomamos E como el espacio tangente de una variedad.

Sea M una variedad de clase C^∞ de dimensión n y sea $x \in M$. Denotamos de aquí en adelante con T_xM y T_x^*M los respectivos espacios tangente y cotangente y recordamos que

$$\dim T_xM = \dim T_x^*M = n. \tag{1.1}$$

Un tensor T de tipo (r,p), es decir un tensor de orden contravariante r y de orden covariante p, $\;r = 0,1,\ldots \;\; p = 0,1,\ldots$ en $x \in M$, es un mapa multilineal:

$$T : \underbrace{T_x^*(M) \times T_x^*(M) \times \ldots \times T_x^*(M)}_{\text{r veces}} \times \underbrace{T_x(M) \ldots \times T_x(M)}_{\text{p veces}} \to R. \tag{1.2}$$

Denotamos el conjunto de todos los tensores tipo (r, p) en x como:

$$M_x(r,p) = \{T | T \text{es un tensor de tipo } (r,p)\} \tag{1.3}$$

y si $T_1, \; T_2 \in M_x(r,p)$ y $\alpha \in R$, el mapa:

$$T_1 + \alpha T_2 : T_x^* M \times \ldots \times T_x^* M \times T_x M \times \ldots \times T_x M \to R$$

$$(T_1 + \alpha T_2)(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_p) = T_1(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_p)$$

$$+\alpha T_2(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_p) \tag{1.4}$$

esta bien definido y se sigue que $M_x(r,p)$ para cada $r = 0, 1, \ldots \;\; p = 0, 1, \ldots$ son espacios vectoriales reales.

El producto tensorial $\otimes$ es una operación definida por:

$$\otimes : M_x(r,p) \times M_x(r', p') \to M_x(r + r', p + p') : (T_1, T_2) \to T_1 \otimes T_2,$$

en donde:

$$T_1 \otimes T_2 : T_x^*(M) \times \ldots \times T_x^*(M) \times T_x(M) \times \ldots \times T_x(M) \to R \tag{1.5}$$

$$(\omega^1, \ldots, \omega^{r+r'}, X_1, \ldots, X_{p+p'}) \to (T_1 \otimes T_2)(\omega^1, \ldots, \omega^{r+r'}, X_1, \ldots, X_{p+p'})$$

$$= T_1(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_p) T_2(\omega^{r+1}, \ldots, \omega^{r+r'}, X_{p+1}, \ldots, X_{p+p'}),$$

tal mapa esta bien definido y es multilineal. El producto tensorial $\otimes$ satisface:

$$T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3) = (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3, \tag{1.6}$$

$$T_1 \otimes (T_2 + T_3) = (T_1 \otimes T_2) + (T_1 \otimes T_3), \tag{1.7}$$

$$(T_2 + T_3) \otimes T_1 = (T_2 \otimes T_1) + (T_3 \otimes T_1), \tag{1.8}$$

notese que en (1.7) y (1.8) T_2 y T_3 son tensores del mismo tipo y mencionamos en general que:

$$T_1 \otimes T_2 \neq T_2 \otimes T_1. \tag{1.9}$$

Sean $X_1, X_2 \in T_x(M)$, entonces definimos $X_1 \otimes X_2$ a través de:

$$\begin{aligned} & X_1 \otimes X_2 : T_x^*(M) \times T_x^*(M) \to R : (\omega^1, \omega^2) \to (X_1 \otimes X_2)(\omega^1, \omega^2) \\ & = X_1(\omega^1) X_2(\omega^2) = \left\langle \omega^1, X_1 \right\rangle \left\langle \omega^2, X_2 \right\rangle \end{aligned} \tag{1.10}$$

y las propiedades del par natural $<,>$[1] implican que $X_1 \otimes X_2 \in M_x(2,0)$. Similarmente para $\omega^1, \omega^2 \in T_x^*(M)$ tenemos:

$$\begin{aligned} & \omega^1 \otimes \omega^2 : T_x(M) \times T_x(M) \to R : (X_1, X_2) \to \omega^1 \otimes \omega^2(X_1, X_2) \\ & = \left\langle \omega^1, X_1 \right\rangle \left\langle \omega^2, X_2 \right\rangle \end{aligned} \tag{1.11}$$

y $\omega^1 \otimes \omega^2 \in M_x(0,2)$. Finalmente si $X_1 \in T_x(M)$ y $\omega^1 \in T_x^*(M)$ entonces:

$$\begin{aligned} & X_1 \otimes \omega^1 : T_x^*(M) \times T_x(M) \to R : (\omega, X) \to X_1 \otimes \omega^1(\omega, X) \\ & X_1 \otimes \omega^1(\omega, X) = \langle \omega, X_1 \rangle \left\langle \omega^1, X \right\rangle \end{aligned} \tag{1.12}$$

y se sigue también que $X_1 \otimes \omega^1 \in M_x(1,1)$.

Estas consideraciones nos permiten ver elementos de $T_x(M)$ y $T_x^*(M)$ de una manera diferente pero complementaria: cada $X \in T_x(M)$ define un elemento de $M_x(1,0)$ como:

$$X : T_x^*(M) \to R : \omega \to X(\omega) = \langle \omega, X \rangle \tag{1.13}$$

[1]Sea E un espacio vectorial arbitrario con dim$E = n < \infty$ y $E^* = \{f | f : E \to R, \text{ lineal}\}$ su dual, entonces para cada $f \in E^*$ el mapa $f : E \to R : X \to f(X) \equiv \langle f, X \rangle$, satisface: $\alpha)\langle f, X_1 + X_2 \rangle = \langle f, X_1 \rangle + \langle f, X_2 \rangle$, $\beta)\langle f_1 + f_2, X \rangle = \langle f_1, X \rangle + \langle f_2, X \rangle$.

y similarmente para cada $\omega \in T_x^*(M)$ se define un elemento de $M_x(0,1)$ a través de:

$$\omega : T_x(M) \to R : X \to \omega(X) = \langle \omega, X \rangle \,. \tag{1.14}$$

Debido a que $M_x(r,p)$ $r = 0,1,\ldots,p = 0,1,\ldots$ son espacios vectoriales, será conveniente construir bases para estos espacios. Para hacer esto comenzamos con $\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base arbitraria de $T_x(M)$ y definimos:

$$e^i : T_x(M) \to R : e_j \to e^i(e_j) = \langle e^i, e_j \rangle = \delta^i{}_j \quad i,j = 1,\ldots,n \tag{1.15}$$

y las extendemos sobre elementos arbitrarios por linealidad. Puede verificarse que $\{e^1,\ldots,e^n\}$ son elementos de $T_x^*(M)$ y además es una base de $T_x^*(M)$. De aquí en adelante las bases [2] $\{e^1,\ldots,e^n\}$ y $\{e_1,\ldots,e_n\}$ que cumplen:

$$\langle e^i, e_j \rangle = \delta^i{}_j \quad i,j = 1,\ldots,n, \tag{1.16}$$

son referidas como un par de bases duales.

Tomando el producto tensorial:

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2}, \; e^{i_1} \otimes e^{i_2}, \; e_{i_1} \otimes e^{i_2}, \quad i_1, i_2 \in \{1,\ldots,n\} \tag{1.17}$$

generamos elementos de $M_x(2,0)$, $M_x(0,2)$ y $M_x(1,1)$ y por extensión:

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_p} \quad i_1,\ldots,i_r, j_1,\ldots,j_p \in \{1,\ldots,n\} \tag{1.18}$$

[2] Las bases $\{e_1,\ldots,e_n\}$ y $\{e^1,\ldots,e^n\}$ son arbitrarias, pero como vemos en el capítulo 2, para cada (U,φ) carta de M define un par de bases preferidas $\{\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}\}$ y $\{dx^1,\ldots,dx^n\}$ y la demostración de esta propiedad se puede revisar en [1]. Nuestro análisis es general e independiente del par de bases duales.

define elementos de $M_x(r,p)$. La colección de estos tensores elementales forman una base del espacio $M_x(r,p)$ como muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.1 : Sean $\{e_1,\ldots,e_n\}$ y $\{e^1,\ldots,e^n\}$ un par de bases duales para $T_x(M)$ y $T_x^*(M)$, entonces:

α) El conjunto:

$$\mathbf{B}(r,p)=\{e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\ldots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\ldots\otimes e^{j_p}|\ \ i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_p\in\{1,\ldots,n\}\}$$

es una base de $M_x(r,p)$.

β) $\dim M_x(r,p)=n^{r+p}$.

Demostración: (ver el apéndice).

1.2 La noción de Formas Diferenciales

Con la ayuda de los espacios vectoriales $M(0,p)$ introducimos la noción de p-formas.

Definición 1.2: Una p-forma es cualquier $\omega\in M(0,p)_x$ la cual es completamente antisimétrica, es decir:

$$\begin{aligned}&\omega:\underbrace{T_xM\times T_xM\times T_xM\times\ldots\times T_xM}_{\text{p-veces}}\to R: X_1,X_2,\ldots,X_p\to\omega\left(X_1,\ldots,X_p\right)\\&\omega(X_1,\ldots X_i,\ldots,X_j,\ldots,X_p)=-\omega(X_1,\ldots X_j,\ldots,X_i,\ldots,X_p)\\&\forall i,j=1,\ldots,p.\end{aligned}\tag{1.19}$$

Denotamos por Λ_x^p el espacio de p-formas y sean $\omega_1,\omega_2\in\mathbf{\Lambda}_x^p$ y $\alpha_1,\alpha_2\in R$, entonces: $\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2\in\mathbf{\Lambda}_x^p$ lo cual verifica que $\mathbf{\Lambda}_x^p$ es un espacio vectorial real. Es consistente y permisible para $p = 0$ tomar: $\mathbf{\Lambda}_x^0 \equiv R$ (la línea recta), mientras que la definición (1.19) implica que $\mathbf{\Lambda}_x^p \equiv \{0\}$ si $(p > n)$.

Nuestra primera tarea es dar una construcción de los espacios $\mathbf{\Lambda}_x^p$, $0 \leq p \leq n$. Para esto sea el grupo de permutaciones S_p del conjunto $\{1, 2, \ldots, p\}$, en donde recordamos que una permutación σ es una biyección:

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, p\} \to \{1, 2, \ldots, p\} : i \to \sigma(i),\ i = 1, \ldots, n.$$

y frecuentemente se representará tal σ como:

$$\sigma(1, 2, \ldots, p) = \sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(p). \tag{1.20}$$

El grupo S_p contiene $p!$ distintos elementos y el signo de $\sigma \in S_p$ se define como:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \sigma = \text{permutación par.} \\ -1 & \sigma = \text{permutación impar.} \end{array} \right\}$$

Para cada $\sigma \in S_p$ el mapa:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\sigma} : T_xM \times T_xM \times T_xM \times \ldots \times T_xM \longrightarrow T_xM \times T_xM \times T_xM \times \ldots \times T_xM \\ &(X_1, X_2, \ldots, X_p) \longrightarrow \widetilde{\sigma}(X_1, X_2, \ldots, X_p) = \left(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(p)}\right) \end{aligned} \tag{1.21}$$

esta bien definido y $\forall\ T \in M_x(0, p)$, sea la composición:

$$\begin{aligned} &\sigma T \equiv T \circ \tilde{\sigma} : T_xM \times T_xM \times T_xM \times \ldots \times T_xM \longrightarrow R \\ &(X_1, X_2, \ldots, X_p) \longrightarrow \sigma T(X_1, X_2, \ldots, X_p) = \\ &= (T \circ \tilde{\sigma})(X_1, \ldots, X_p) = T\left(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(p)}\right), \end{aligned} \tag{1.22}$$

de la que se sigue $\sigma T \in M_x(0,p)$. Usando el mapa σT definimos el operador de antisimetrización A como:

$$A : M_x(0,p) \to M_x(0,p) : T \to AT,$$
$$AT = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}\sigma\, (\sigma T) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}\sigma \;\; (T \circ \tilde{\sigma}) \tag{1.23}$$

y de acuerdo con (1.22) tenemos:

$$AT\,(X_1,\; X_2, \ldots,\; X_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}\sigma \;\; (T \circ \tilde{\sigma}) \;\; (X_1,\; X_2,\; \ldots,\; X_p)$$
$$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}\sigma \; T\left(X_{\sigma(1)},\; X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(p)}\right). \tag{1.24}$$

Afirmamos que si $AT \neq 0$ entonces AT es totalmente antisimétrico, es decir $AT \in \Lambda_x^p$. Tenemos $\forall \tau \in S_p$ y $\forall\; X_1, \ldots, X_p \in T_xM$:

$$\tau AT(X_1, \ldots, X_p) = (AT \circ \tilde{\tau})(X_1, \ldots, X_p)$$
$$= AT(X_{\tau(1)}, \ldots, X_{\tau(p)}) = AT(Y_1, \ldots, Y_p)$$
$$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn}\sigma)\, \sigma T(Y_1, \ldots, Y_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn}\sigma)\, T(Y_{\sigma(1)}, \ldots, Y_{\sigma(p)})$$
$$= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn}\sigma)\, T(X_{\tau\sigma(1)}, \ldots, X_{\tau\sigma(p)}) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn}\sigma)\, (\tau \circ \sigma) T(X_1, \ldots, X_p)$$
$$= (\text{sgn}\tau) \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn}(\tau \circ \sigma))\, (\tau \circ \sigma) T(X_1, \ldots, X_p) = (\text{sgn}\tau) AT(X_1, \ldots, X_p),$$

de esta relación concluímos:

$$\tau AT = (\text{sgn}\tau) AT. \tag{1.25}$$

Tomando $\tau \in S_p$ como:

$$\tau(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_p) = (X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_p),$$

se sigue de (1.25) que $AT \in \mathbf{\Lambda}_x^p$ segun la definición (1.2).

Para ver que hace el operador A consideramos un ejemplo:

Ejemplo 1.2.1: Sean $T \in M_x(0,3)$ y $\{X_1, X_2, X_3\} \in T_x(M)$, usando la definición (1.24) tenemos:

$$\begin{aligned} &AT(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{3!}\sum_{\sigma\in S_3}(\mathrm{sgn}\sigma)\sigma T(X_1, X_2, X_3) \\ &= \frac{1}{3!}\sum_{\sigma\in S_3}(\mathrm{sgn}\sigma)T(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}) \\ &= \frac{1}{3!}[T(X_1, X_2, X_3) - T(X_2, X_1, X_3) + T(X_2, X_3, X_1) \\ &-T(X_3, X_2, X_1) + T(X_3, X_1, X_2) - T(X_1, X_3, X_2)], \end{aligned} \tag{1.26}$$

en donde se ve concretamente que el lado derecho es totalmente antisimétrico. Notamos también que si T es simétrico respecto a dos de sus entradas, entonces $AT = 0$.

Discutimos enseguida algunas propiedades del operador A.

Lema 1.2.1 : Sean $\omega \in M(0,p)_x$ y $\eta \in M(0,q)_x$, entonces:

$$A[(A\omega)\otimes\eta] = A(\omega\otimes\eta) = A(\omega\otimes A\eta). \tag{1.27}$$

Demostración: Será suficiente mostrar:

$$A[(A\omega)\otimes\eta] = A(\omega\otimes\eta), \tag{1.28}$$

la demostración de $A[\omega\otimes(A\eta)] = A(\omega\otimes\eta)$ se sigue del mismo razonamiento. Por definición de A tenemos:

$$(A\omega)\otimes\eta = \left[\frac{1}{p!}\sum_{\sigma'\in S_p}\mathrm{sgn}\sigma'(\sigma'\omega)\right]\otimes\eta, \tag{1.29}$$

entonces:

$$A[(A\omega)\otimes\eta] = \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}(\mathrm{sgn}\sigma)\sigma\left[\frac{1}{p!}\sum_{\sigma'\in S_p}\mathrm{sgn}\sigma'(\sigma'\omega)\otimes\eta\right]. \quad (1.30)$$

Por otra parte:

$$A(\omega\otimes\eta) = \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}\mathrm{sgn}\sigma\sigma(\omega\otimes\eta). \quad (1.31)$$

Queremos mostrar que (1.30) y (1.31) son iguales, para esto notamos que cada $\sigma'\in S_p$ define un elemento $\hat{\sigma}'\in S_{p+q}$ como:

$$\hat{\sigma}'(1,2,\ldots,p,p+1,\ldots,p+k) = \sigma'(1),\sigma'(2),\ldots,\sigma'(p),p+1,\ldots,p+q \quad (1.32)$$

y son $p!$ distintas permutaciones $\hat{\sigma}'$ en S_{p+q}. Denotamos por $\hat{S}_{p+q}$ las $p!$ permutaciones de S_{p+q} de la forma (1.32) y sean $(X_1,\ldots,X_{p+q})$ vectores arbitrarios, entonces:

$$\begin{aligned}
&[(\sigma'\omega)\otimes\eta](X_1,\ldots,X_{p+q}) = (\omega\circ\sigma')(X_1,\ldots,X_p)\eta(X_{p+1},\ldots,X_{p+q})\\
&= \omega(X_{\sigma'(1)},\ldots,X_{\sigma'(p)})\eta(X_{p+1},\ldots,X_{p+q})\\
&= \hat{\sigma}'(\omega\otimes\eta)(X_1,\ldots,X_{p+q}). \quad (1.33)
\end{aligned}$$

Debido a que $\mathrm{sgn}\sigma' = \mathrm{sgn}\hat{\sigma}'$ la suma (1.30) toma la forma:

$$\begin{aligned}
&A[(A\omega)\otimes\eta] = \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}\mathrm{sgn}\sigma\sigma\left(\frac{1}{p!}\sum_{\sigma'\in\hat{S}_{p+q}}\mathrm{sgn}\sigma'\hat{\sigma}'(\omega\otimes\eta)\right)\\
&= \frac{1}{(p+q)!}\,\frac{1}{p!}\sum_{S_{p+q}}\sum_{\hat{S}_{p+q}}\mathrm{sgn}\sigma\ \mathrm{sgn}\hat{\sigma}'\sigma\left(\hat{\sigma}'\left(\omega\otimes\eta\right)\right)\\
&= \frac{1}{p!}\sum_{\hat{S}_{p+q}}\mathrm{sgn}\hat{\sigma}' A\left[\hat{\sigma}'(\omega\otimes\eta)\right] = \frac{1}{p!}\sum_{\hat{S}_{p+q}}(\mathrm{sgn}\hat{\sigma}')^2 A(\omega\otimes\eta) = A(\omega\otimes\eta)
\end{aligned}$$

donde para pasar de la penúltima a la última igualdad hemos hecho uso del siguiente lema:

Lema 1.2.2: $\forall\ T \in M_x(0, p)$ y $\forall\ \sigma \in S_p$, entonces:

$$A(\sigma T) = \text{sgn}\sigma(AT). \tag{1.34}$$

Demostración: Sean $\{X_1, \ldots, X_p\}$ vectores arbitrarios, entonces:

$$A(\sigma T)(X_1, \ldots, X_p) = AT(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(p)}) = \sigma AT(X_1, \ldots, X_p), \tag{1.35}$$

entonces $A(\sigma T) = \sigma AT$ y de la relación (1.25) se verifica (1.34).

Como una consecuencia de las proposiciones anteriores, sean $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{e^1, \ldots, e^n\}$ un par de bases duales arbitrarias y sea $\alpha = AT$, entonces:

$$\begin{aligned}
&\alpha(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_p}) = AT(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_p}) = \left(\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} \text{sgn}\sigma\ \sigma T\right)(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_p}) \\
&= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} \text{sgn}\sigma\ T(e_{\alpha_{\sigma(1)}}, \ldots, e_{\alpha_{\sigma(p)}}) \\
&= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} \text{sgn}\sigma\ T_{\alpha_{\sigma(1)}\ldots\alpha_{\sigma(p)}},
\end{aligned} \tag{1.36}$$

la cual implica que las componentes $\alpha(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_p})$ son totalmente antisimétricas y son obtenidas antisimetrizando las componentes $T_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ de T.

1.3 El producto cuña

En esta sección introducimos la operación de producto cuña denotado por $\wedge$ la cual es análoga a la operación $\otimes$ que definimos en (1.5).

Empezamos con $\mathbf{\Lambda}_x^p$ y $\mathbf{\Lambda}_x^q$, $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq n$, sea:

$$\wedge : \mathbf{\Lambda}_x^p \times \mathbf{\Lambda}_x^q \to \Lambda_x^{p+q} : (\omega, \eta) \longrightarrow \omega \wedge \eta \tag{1.37}$$

$$\omega \wedge \eta := \frac{(p+q)!}{p!q!} \; A\,(\omega \otimes \eta) \tag{1.38}$$

$$= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}\sigma \; \sigma\,(\omega \otimes \eta)\,.$$

Si $(X_1, \ldots, X_{p+q})$ son vectores, se sigue que:

$$(\omega \wedge \eta)(X_1, \ldots, X_{p+q}) = \frac{(p+q)!}{p!q!} A(\omega \otimes \eta)(X_1, \ldots, X_{p+q})$$
$$= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega \left(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(p)}\right) \eta \left(X_{\sigma(p+1)}, \ldots, X_{\sigma(p+q)}\right)$$

y de esta expresión se ve que: $\omega \wedge \eta \in \Lambda_x^{p+q}$.

Proposición 1.3.1 : Para $\omega \in \mathbf{\Lambda}_x^p$, $\eta \in \mathbf{\Lambda}_x^q$ y $\theta \in \mathbf{\Lambda}_x^m$, el producto cuña $\wedge$ satisface:

$$\alpha)\ \omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega, \tag{1.39}$$

$$\beta)\ (\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)\,, \tag{1.40}$$

$$\gamma)\ \omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2, \tag{1.41}$$

$$\delta)\ (\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta, \tag{1.42}$$

$$\epsilon)\ \alpha(\omega \wedge \eta) = \omega \wedge (\alpha\eta) = (\alpha\omega) \wedge \eta, \quad \forall \alpha \in R. \tag{1.43}$$

Demostración: Para demostrar el inciso α), consideremos la permutación particular:

$$\sigma\,(1, 2, \ldots, p, \ldots, p+q) = (q+1, \ldots, q+p, 1, 2, \ldots, q)\,, \tag{1.44}$$

y tal σ satisface:

$$\eta \otimes \omega = \sigma(\omega \otimes \eta) = (\omega \otimes \eta) \circ \tilde{\sigma}. \tag{1.45}$$

Para verificar esta propiedad calculamos:

$$(\omega \otimes \eta) \circ \tilde{\sigma}(X_1, \ldots, X_{p+q}) = (\omega \otimes \eta)(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(p+q)})$$

$$(\omega \otimes \eta)(X_{q+1}, \ldots, X_{q+p}, X_1, \ldots, X_q) = \omega(X_{q+1}, \ldots, X_{q+p})\eta(X_1, \ldots, X_q)$$

$$= (\eta \otimes \omega)(X_1, \ldots, X_{p+q}),$$

lo cual comprueba (1.45). Usando (1.45) tenemos:

$$\begin{aligned}
\eta \wedge \omega &= \frac{(p+q)!}{p!\ q!} \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\tau \in S_{p+q}} (\mathrm{sgn}\tau)\, \tau(\eta \otimes \omega) \\
&= \frac{1}{p!\ q!} \sum_{\tau \in S_{p+q}} (\mathrm{sgn}\tau)\, (\mathrm{sgn}\sigma)\, (\mathrm{sgn}\sigma)\, \tau(\sigma(\omega \otimes \eta)) \\
&= \frac{\mathrm{sgn}\sigma}{p!\ q!} \sum_{\tau \in S_{p+q}} (\mathrm{sgn}\tau)\, (\mathrm{sgn}\sigma)\, (\tau \circ \sigma)(\omega \otimes \eta) \\
&= \mathrm{sgn}\sigma \frac{(p+q)!}{p!\ q!} A(\omega \otimes \eta) = (-1)^{pq}(\omega \wedge \eta),
\end{aligned}$$

en donde hemos usado la propiedad: $\mathrm{sgn}\sigma = (-1)^{pq}$, por tanto $\eta \wedge \omega = (-1)^{pq}(\omega \wedge \eta)$.

Para demostrar el inciso β), empezamos con:

$$\begin{aligned}
(\omega \wedge \eta) &= \frac{(p+q)!}{p!\ q!} A(\omega \otimes \eta) \Rightarrow (\omega \wedge \eta) \wedge \theta \\
&= \frac{(p+q)!}{p!\ q!} \frac{(p+q+m)!}{(p+q)!\ m!} A(A(\omega \otimes \eta) \otimes \theta),
\end{aligned}$$

pero por el lema (1.2.1) se tiene:

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \frac{(p+q+m)!}{p!\ q!\ m!} A(\omega \otimes \eta \otimes \theta). \tag{1.46}$$

Usando el mismo razonamiento, calculamos :

$$
\begin{aligned}
\omega \wedge (\eta \wedge \theta) &= \frac{(q+m)!(p+q+m)!}{q!\ m!\ p!\ (q!+m!)} A(\omega \otimes A(\eta \otimes \theta)) \\
&= \frac{(p+q+m)!}{q!\ m!\ p!} A(\omega \otimes \eta \otimes \theta),
\end{aligned} \tag{1.47}
$$

entonces de (1.46) y (1.47), se tiene

$$
(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta), \tag{1.48}
$$

lo cual demuestra el inciso β).

La demostración de los incisos $\gamma) - \epsilon)$ son consecuencias inmediatas de la definición (1.38).

Comentario: Notese que la asociatividad de $\wedge$ implica que expresiones como: $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge \delta \ldots$ esten bien definidas.

1.4 Algunas propiedades básicas de formas.

En esta sección derivarémos algunas propiedades básicas de formas y para estas derivaciones primero recordamos que si $A = (a^i{}_j)$ es una matriz $n \times n$ entonces el determinante $\det A \equiv \det[a^i{}_j]$ se puede representar como:

$$
\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{sgn}\sigma) \alpha^{\sigma(1)}{}_1 \alpha^{\sigma(2)}{}_2 \ldots \alpha^{\sigma(n)}{}_n = \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{sgn}\sigma) \alpha^1{}_{\sigma(1)} \alpha^2{}_{\sigma(2)} \ldots \alpha^n{}_{\sigma(n)} = (\det A^T).
\end{aligned} \tag{1.49}
$$

Proposición 1.4.1: Tenemos las siguientes propiedades:

1) Sean $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{e^1, \ldots, e^n\}$ un par de bases duales, entonces:

$$
e^1 \wedge \ldots \wedge e^n \neq 0 \text{ y } e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(e_1, \ldots, e_n) = 1. \tag{1.50}
$$

2) Sean $(\omega^1, \ldots, \omega^k)$, $(\tau^1, \ldots, \tau^k)$ 1-formas y $\omega^i = a^i{}_j \tau^j$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, k$ entonces:

$$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k = \det[a^i{}_j] \tau^1 \wedge \ldots \wedge \tau^k. \tag{1.51}$$

3) Sean ω una k-forma y sean $(u_1, \ldots, u_k), (v_1, \ldots, v_k)$ vectores con $u_j = b^k{}_j v_k$ entonces:

$$\omega(u_1, \ldots, u_k) = \det[b^k{}_j] \omega(v_1, \ldots, v_k). \tag{1.52}$$

4) Sean $a^1, \ldots, a^k$ 1-formas, entonces $a^1 \wedge \ldots \wedge a^k \neq 0$ si y sólo si $a^1, \ldots, a^k$ son linealmente independientes.

5) Sea $a \neq 0$ una 1-forma y sea ω una k-forma, entonces $a \wedge \omega = 0$ si y sólo si $\omega = a \wedge \tau$ con τ una (k-1)-forma.

Demostración: Para la demostración de 1), de la asociatividad de $\wedge$ tenemos:

$$\begin{aligned}
&e^1 \wedge \ldots \wedge e^n = \frac{(1 + \ldots + \ldots 1)!}{1! \ldots 1!} A(e^1 \otimes \ldots \otimes e^n) = \sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{sgn}\sigma) \sigma(e^1 \otimes \ldots \otimes e^n), \\
&e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(e_1, \ldots, e_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma(e^1 \otimes \ldots \otimes e^n)(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma(e^1 e_{\sigma(1)}) \ldots (e^n e_{\sigma(n)}) \equiv \det[e^i(e_j)] = \det[< e^i, e_j >] = \det[\delta^i_j] = 1 \\
&\Rightarrow e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(e_1, \ldots, e_n) = 1 \ \Rightarrow \ e^1 \wedge \ldots \wedge e^n \neq 0,
\end{aligned} \tag{1.53}$$

en la cuarta igualdad hemos usado la definición (1.49).

Usando nuevamente (1.49) notamos que:

$$\begin{aligned}
&\det[e^i(e_j)] = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma(e^1 e_{\sigma(1)}) \ldots (e^n e_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma(e^{\sigma(1)} e_1) \ldots (e^{\sigma(n)} e_n) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma(e^{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes e^{\sigma(n)})(e_1, \ldots, e_n),
\end{aligned} \tag{1.54}$$

por tanto tambien se demuestra la siguiente representación útil:

$$e^1 \wedge \ldots \wedge e^n = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma (e^{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes e^{\sigma(n)}). \tag{1.55}$$

2) Para demostrar (1.51) usamos otra vez la asociatividad de $\wedge$:

$$\begin{aligned}
&(\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k)(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (\mathrm{sgn}\sigma)\sigma(\omega^1 \otimes \ldots \otimes \omega^k)(u_1, \ldots, u_k) \\
&= \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}\sigma(\omega^1 \otimes \ldots \otimes \omega^k)(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma \in S_k} (\mathrm{sgn}\sigma)\omega^1(u_{\sigma(1)}) \ldots \omega^k(u_{\sigma(k)}) \\
&= \det[\omega^i(u_k)] = \det[a^i_j \tau^j(u_k)] = \det[a^i_j]\det[\tau^j(u_k)] \\
&= \det[a^i_j] \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}\sigma(\tau^1 u_{\sigma(1)}) \ldots (\tau^k u_{\sigma(k)}) = \\
&= \det[a^i_j] \sum_{\sigma \in S_k} (\mathrm{sgn}\sigma)\sigma \left(\tau^1 \otimes \ldots \otimes \tau^k\right)(u_1, \ldots, u_k) = \\
&= \det[a^i_j]\tau^1 \wedge \ldots \wedge \tau^k(u_1, \ldots, u_k) \Rightarrow \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k = \det[a^i{}_j]\tau^1 \wedge \ldots \wedge \tau^k
\end{aligned} \tag{1.56}$$

3) Para demostrar (1.52) primero evaluamos ω sobre k-vectores $(u_1, \ldots, u_k)$:

$$\begin{aligned}
\omega(u_1, \ldots, u_k) &= \omega(a^{k_1}{}_1 v_{k_1}, \ldots, a^{k_j}{}_k v_{k_j}) = a^{k_1}{}_1 \ldots a^{k_j}{}_k \omega(v_{k_1}, \ldots, v_{k_j}) \\
&= [a^{k_1}{}_1 \ldots a^{k_j}{}_k \mathrm{sgn}\sigma]\omega(v_1, \ldots, v_k) = \det[a^k_j]\omega(v_1, \ldots, v_k),
\end{aligned} \tag{1.57}$$

en donde pasamos a la segunda igualdad usando la hipótesis y al pasar a la tercera igualdad hemos usado las propiedades básicas de formas: $\tau\omega = (\mathrm{sgn}\tau)\omega$.

4) $\Rightarrow$) Suponemos que $a^1, \ldots, a^k$ son linealmente dependientes, es decir: $a^j = b_1 a^1 + \ldots + b_{k-1} a^{k+1}$, entonces se sigue de las propiedades de $\wedge$: $a^1 \wedge \ldots \wedge a^k = 0$.

$\Leftarrow$) Por otra parte sea que $a^1, \ldots, a^k$ son linealmente independientes y formamos la n-forma:

$$a^1 \wedge \ldots \wedge a^k \wedge a^{k+1} \wedge \ldots \wedge a^n, \tag{1.58}$$

en donde $\{a^1, \ldots, a^n\}$ son linealmente independientes, entonces (1.58) es base de $\Lambda^n(E)$,

$$\begin{aligned}
&\underbrace{a^1 \wedge \ldots \wedge a^k}_{\alpha} \wedge \underbrace{a^{k+1} \wedge \ldots \wedge a^n}_{\beta}(a_1, \ldots, a_n) = (\alpha \wedge \beta)(a_1, \ldots, a_n) \\
&= \frac{1}{k!(n-k)!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\sigma \alpha \otimes \beta(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) \\
&= \alpha(a_1, \ldots, a_k)\beta(a_{k+1}, \ldots, a_n) \neq 0. \qquad (1.59)
\end{aligned}$$

5) Si $\omega = a \wedge \tau \Rightarrow a \wedge \omega = a(a \wedge \tau) = (a \wedge a) \wedge \tau = 0$.

Suponemos ahora que $a \wedge \omega = 0$, como $a \neq 0$ elegimos $a^2, \ldots, a^n$ tal que $a, a^2, \ldots, a^n$ es una base de E^*

$$\begin{aligned}
&\omega \in \Lambda^k(E), \quad \omega = \omega_{i_1 \ldots i_k} a^{i_1} \wedge \ldots \wedge a^{i_k} \; i_1 < \ldots < i_k. \\
&a \wedge \omega = a \wedge (\omega_{i_1 \ldots i_k} a^{i_1} \wedge \ldots \wedge a^{i_k}) = \omega_{i_1 \ldots i_k} a \wedge a^{i_1} \wedge \ldots \wedge a^{i_k} \\
&\Rightarrow \text{si } a \wedge \omega = 0, \; \omega = \omega_{i_1 \ldots i_k} a^{i_1} \wedge \ldots \wedge a^{i_k} = \omega_{i_1 \ldots i_{k-1}} a \wedge a^{i_1} \wedge \ldots \wedge a^{i_{k-1}} \\
&= a \wedge \beta, \quad \beta \text{ es } (k-1) - \text{forma}. \qquad (1.60)
\end{aligned}$$

El siguiente teorema, es análogo al teorema (1.1), para el caso de los espacios vectoriales $\Lambda^p_x, \; 0 \leq p \leq n$.

Teorema 1.4.1: Sea $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\}$ una base de $T^*_p M$, entonces:

α) el conjunto:

$$B[\Lambda^p_x] = \left\{ e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} | 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n \right\} \qquad (1.61)$$

es una base para $\mathbf{\Lambda}^p_x$.

β) Para cada p tenemos:

$$\dim \Lambda^p_x := \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad 0 \leq p \leq n, \qquad (1.62)$$

en donde $\binom{n}{p}$ es el número de combinaciones de p elementos tomados de n objetos distintos, sin repetición.

Demostración: Para mostrar que el conjunto:

$$B[\Lambda_x^p] = \{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} | \ 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq n\}, \tag{1.63}$$

constituye una base para Λ_x^p, $0 \leq p \leq n$, consideramos una combinación lineal de los elementos de $\mathbf{B}(\Lambda_x^p)$:

$$\alpha_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}, \quad \text{con} \ \ \alpha_{i_1 \ldots i_p} \in R \ \ \text{y} \ \ 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n. \ [3]$$

y asumimos que:

$$\alpha_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} = 0 \in \Lambda_x^p, \tag{1.64}$$

mostrarémos que esta condición implica:

$$\alpha_{i_1 \ldots i_p} = 0 \in R \quad \forall 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n.$$

Para esto se actua ambos lados de (1.64) con el elemento:

$$(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_p}), \ \ 1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p \leq n,$$

en donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base dual de $\{e^1, \ldots, e^n\}$. De (1.64) se sigue:

$$\alpha_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_p}) = 0, \tag{1.65}$$

[3]Notese que tal combinación, por ejemplo para $n = 4$ y Λ_x^3 tiene la forma:

$$\alpha_{123} e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + \alpha_{134} e^1 \wedge e^3 \wedge e^4 + \alpha_{124} e^1 \wedge e^2 \wedge e^4 + \alpha_{234} e^2 \wedge e^3 \wedge e^4.$$

expresando los productos $\wedge$ en terminos de productos tensoriales $\otimes$ y recordando la propiedad: $e^i(e_j) = \langle e^i, e_j \rangle = \delta^i{}_j$, se sigue de (1.65) que:

$$\alpha_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = 0, \quad 1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p \leq n,$$

lo cual comprueba la independencia lineal de los elementos de $B[\Lambda_x^p]$.

Para completar el teorema, se mostrará que cualquier elemento de Λ_x^p, $0 \leq p \leq n$, se puede escribir como combinación lineal de los elementos de $B[\Lambda_x^p]$. Para esto sea $a \in \Lambda_x^p$. Debido a que Λ_x^p es un subespacio de $M(0,p)_x$ entonces a admite la expansión:

$$a = a_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}, \quad a_{i_1 \ldots i_p} = a(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}), \tag{1.66}$$

donde los índices en las sumatorias corren en $\{1, \ldots, n\}$. Recordamos de relación (1.36) que los $\alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$ son totalmente antisimétricos.

Aplicando el operador A recordando que $Aa = a$ tenemos:

$$\begin{aligned} a = Aa = A[a_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}] &= a_{i_1 \ldots i_p} A[e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}] \\ = \frac{1}{p!} a(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} &= \frac{1}{p!} a_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Los p índices $i_1, \ldots, i_p$ en (1.67) siguen corriendo sobre el intervalo $\{1, \ldots, n\}$. Sin embargo como los elementos $(e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p})$ son completamente antisimétricos, (1.67) es cero si algún elemento: $i_1, \ldots, i_n$ se repite. Si $\sigma \in S_k$, entonces:

$$a(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} = a(e_{i_{\sigma(1)}}, \ldots e_{i_{\sigma(k)}}) e^{i_{\sigma(1)}} \wedge \ldots \wedge e^{i_{\sigma(k)}}, \tag{1.68}$$

esto porque $a(e_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, e_{i_{\sigma(k)}})$ y $e^{i_{\sigma(1)}} \wedge \ldots \wedge e^{i_{\sigma(k)}}$ cambian por un factor de sgnσ. Pero el lado derecho de (1.67) muestra que un $\alpha \in \Lambda_x^p$ puede representarse como combinación lineal de los elementos de $\mathbf{B}(\Lambda_x^p)$.

Como hemos comprobado $B[\Lambda_x^p]$ es una base de Λ_x^p y el número de elementos en $\mathbf{B}[\Lambda_x^p]$ son todas las posibles combinaciones $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$ de los n elementos de la base $\{e^1, \ldots, e^n\}$ y este número es $\binom{n}{p}$.

Comentarios: Expresión (1.67), es decir:

$$\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}, \ \alpha_{i_1 \ldots i_p} = \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}), \tag{1.69}$$

da una representación de $\alpha \in \Lambda_x^p$ en términos de los elementos $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$ en $B[\Lambda_x^p]$, las sumatorias corren sobre los n índices mientras el término $p!$ toma en cuenta los valores repetidos. Notar que hay otra manera más conveniente para representar $\alpha \in \Lambda_x^p$ la cual evita el factor $p!$. Representamos α como:

$$\alpha = \alpha_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}, \ 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq n. \tag{1.70}$$

y en esta tesis usamos ambas representaciones, pero cuando empleamos (1.70) indicamos explícitamente el orden en que corren los índices.

Para aclerar la naturaleza de la representación (1.70), sea $\dim T_x(M) = 4$ y sea $\{e^1, \ldots, e^4\}$ una base de $T_x^*(M)$, entonces:

$$B[\Lambda_x^2] = \{e^1 \wedge e^2, e^1 \wedge e^3, e^1 \wedge e^4, e^2 \wedge e^3, e^2 \wedge e^4, e^3 \wedge e^4\},$$

$$B[\Lambda_x^3] = \{e^1 \wedge e^2 \wedge e^3, e^1 \wedge e^3 \wedge e^4, e^1 \wedge e^2 \wedge e^4, e^2 \wedge e^3 \wedge e^4\}.$$

se sigue que $\alpha \in \Lambda_x^2$ y $\beta \in \Lambda_x^3$ se representan como:

$$\alpha = \alpha_{12} e^1 \wedge e^2 + \alpha_{13} e^1 \wedge e^3 + \alpha_{14} e^1 \wedge e^4$$

$$+\alpha_{23} e^2 \wedge e^3 + \alpha_{34} e^3 \wedge e^4 + \alpha_{24} e^2 \wedge e^4,$$

$$\beta = \beta_{123} e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + \beta_{134} e^1 \wedge e^3 \wedge e^4$$

$$+\beta_{234} e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 + \beta_{124} e^1 \wedge e^2 \wedge e^4.$$

en donde $\alpha_{ij} = \alpha(e_i, e_j)$, $\beta_{ijk} = \beta(e_i, e_j, e_k)$.

De la fórmula (1.62) vemos:

$$\dim\Lambda_x^0 = \dim\Lambda_x^n, \quad \dim\Lambda_x^1 = \dim\Lambda_x^{n-1}, \quad \dim\Lambda_x^2 = \dim\Lambda_x^{n-2}, \ldots$$

lo cual implica que podemos establecer isomorfismos entre los espacios: $(\Lambda_x^0, \Lambda_x^n)$, $(\Lambda_x^1, \Lambda_x^{n-1})$, ... Estudiarémos más adelante un isomorfismo particular que recibe el nombre de operador de Hodge.

1.5 El álgebra exterior de Grassmann.

Aún nuestro análisis hasta este punto se basó en T_xM y T_x^*M, los resultados y demostraciones son válidos si reemplazamos T_xM por un espacio vectorial real E, $\dim E = n$ y T_x^*M por E^* (dual de E).

La definición de un tensor de tipo (r, p) es la misma como en (1.2) con la única diferencia de que T_xM es reemplazado por E y T_x^*M por E^*, como consecuencia los espacios $M_x(r, p)$ y $\Lambda^p(E)$ están bien definidos. Debido a esta propiedad y por generalidad continuamos el desarrollo de la teoría basandose en un espacio vectorial real E arbitrario.

Debido a que para cualquier (E, R), $\dim E = n < \infty$, se definen naturalmente espacios vectoriales:

$$\Lambda^p(E), \ 0 \leq p \leq n \ \text{ y } \ \Lambda^p(E) = \{0\} \text{ para } \ p > n, \tag{1.71}$$

consideramos la suma directa:

$$\Lambda(E) = \Lambda^0(E) \oplus \Lambda^1(E) \oplus \ldots \oplus \Lambda^n(E), \tag{1.72}$$

donde:

$$\Lambda(E)=\Big\{\alpha|\alpha=\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n,\ \alpha_i\in\Lambda^i(E)\ \ 0\leq i\leq n\Big\}. \tag{1.73}$$

Tal $\Lambda(E)$ admite la estructura de un espacio vectorial: si $\alpha,\beta\in\Lambda(E)$, el elemento:

$$\alpha+\beta=(\alpha_0+\beta_0)+(\alpha_1+\beta_1)+\ldots+(\alpha_n+\beta_n), \tag{1.74}$$

y debido a que $\alpha_i+\beta_i,\ 0\leq i\leq n$ es una i-forma, entonces: $\alpha+\beta\in\Lambda(E)$ y similarmente para cualquier $\lambda\in R$ y $\alpha\in\Lambda(E):\lambda\alpha=\lambda\alpha_0+\ldots+\lambda\alpha_n\in\Lambda(E)$. Por su definición:

$$\dim\Lambda(E)=\dim\Lambda^0(E)+\dim\Lambda^1(E)+\ldots+\dim\Lambda^n(E)=2^n.$$

Adicionalmente para $\alpha_p\in\Lambda^p(E)$ y $\beta_q\in\Lambda^q(E)\Rightarrow\alpha_p\wedge\beta_q\in\Lambda^{p+q}$, entonces $\Lambda(E)$ con el producto cuña $\wedge$ es un álgebra, tal álgebra es conocida como el álgebra exterior de formas ó el álgebra de Grassmann (basandose en el espacio vectorial E).

1.6 Orientación de espacios vectoriales.

En esta sección discutimos la noción de orientación de un espacio vectorial real E.

Una base $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ de E es ordenada cuando el orden de sus elementos es tomado en cuenta. Por ejemplo si $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ es una base de E, entonces sabemos que $\{e_2,e_1,\ldots,e_n\}$ tambien es una base, pero en el contexto de base ordenada $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}\neq\{e_2,e_1,\ldots,e_n\}$.

Denotamos el conjunto de todas las bases ordenadas de E como:

$$A(E) = \{\vec{\mathbf{u}} = (u_1, \ldots, u_n)|\ (u_1, \ldots, u_n) \text{ es base ordenada.}\}$$

en donde frecuentemente por conveniencia tipográfica se denota una base de E como: $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, \ldots, u_n)$.

Sea $\mathbf{a} = a^i{}_j\ (= a_{ij})$ una matriz $(n \times n)$ no singular con entradas reales. Tal a actúa sobre $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}\mathbf{a} = \overrightarrow{\mathbf{u}}', \quad \overrightarrow{\mathbf{u}}' = \{u'_1, \ldots, u'_n\}, \quad u'_i = a^j{}_i u_j \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{1.75}$$

y como es bien conocido $\overrightarrow{\mathbf{u}}'$ es otra base de E. Los conjuntos:

$$\Gamma_+(E) \subset A(E) \times A(E) \;\text{ y }\; \Gamma_-(E) \subset A(E) \times A(E)$$

con:

$$\Gamma_+(E) = \Big\{(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}') \mid \overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{u}}'\mathbf{a}, \;\; \det(\mathbf{a}) = \det(a^i{}_j) > 0\Big\}$$
$$\Gamma_-(E) = \Big\{(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}') \mid \overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{v}}'\mathbf{a}, \;\; \det(\mathbf{a}) = \det(a^i{}_j) < 0\Big\},$$

definen dos distintas relaciones de equivalencia $\sim$ en $A(E)$ a través de :

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} \sim \overrightarrow{\mathbf{u}}' \text{ si } \;\; \overrightarrow{\mathbf{u}} \text{ y } \overrightarrow{\mathbf{u}}' \in \Gamma_+(E), \tag{1.76}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} \sim \overrightarrow{\mathbf{v}}' \text{ si } \;\; \overrightarrow{\mathbf{v}} \text{ y } \overrightarrow{\mathbf{v}}' \in \Gamma_-(E). \tag{1.77}$$

Sea $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in A(E)$ y sea $\mu_+[\overrightarrow{\mathbf{u}}]$ la clase de equivalencia:

$$\mu_+[\overrightarrow{\mathbf{u}}] = \{\overrightarrow{\mathbf{u}}' \in A(E) \mid \overrightarrow{\mathbf{u}} \sim \overrightarrow{\mathbf{u}}', \Rightarrow \exists \mathbf{a}, \;\; \det\mathbf{a} > 0, \;\; \overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{u}}'\mathbf{a}\}. \tag{1.78}$$

y similarmente $\mu_-[\overrightarrow{\mathbf{v}}]$:

$$\mu_-[\overrightarrow{\mathbf{v}}] = \{\overrightarrow{\mathbf{v}}' \in A(E) \mid \overrightarrow{\mathbf{v}} \sim \overrightarrow{\mathbf{v}}', \Rightarrow \exists \mathbf{a}, \;\; \det\mathbf{a} < 0, \;\; \overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{v}}'\mathbf{a}\}. \tag{1.79}$$

A través de $\mu_+[\overrightarrow{\mathbf{u}}]$ y $\mu_-[\overrightarrow{\mathbf{v}}]$ introducimos la orientación de E.

Definición 1.6.1 : Una orientación de E es la selección de una clase de equivalencia $\mu_+[\overrightarrow{\mathbf{u}}]$ ó $\mu_-[\overrightarrow{\mathbf{v}}]$, si eligimos $\mu_+[\overrightarrow{\mathbf{u}}]$ decimos que $(E, \mu_+[\overrightarrow{\mathbf{u}}])$ es orientado positivo ó bien si consideramos el par $(E, \mu_-[\overrightarrow{\mathbf{v}}])$ decimos que E es orientado negativo.

Sean $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\overrightarrow{\mathbf{w}} = \{w_1, \ldots, w_n\} \in \mu_+[\overrightarrow{\mathbf{u}}]$, entonces existe una matriz $\mathbf{a} = a^i{}_j$ con $\det(a^i{}_j) > 0$ tal que $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{w}}\mathbf{a}$. Por otro lado las n-formas:

$$\mathbf{u} = u^1 \wedge u^2 \wedge \ldots \wedge u^n \ , \ \mathbf{w} = w^1 \wedge w^2 \wedge \ldots \wedge w^n,$$

son distintas de cero y debido que $\dim \Lambda^n(E) = 1$, entonces existe $\lambda \neq 0$ tal que $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{w}$, la cual implica:

$$(u^1 \wedge u^2 \wedge \ldots \wedge u^n)(u_1, \ldots, u_n) \tag{1.80}$$

$$= \lambda (w^1 \wedge \ldots \wedge w^n)(u_1, \ldots, u_n) \tag{1.81}$$

y debido a la propiedad (1.50) tenemos:

$$(u^1 \wedge \ldots \wedge u^n)(u_1, \ldots, u_n) = 1, \tag{1.82}$$

mientras:

$$w^1 \wedge w^2 \wedge \ldots \wedge w^n(u_1, \ldots, u_n) = \left[\det(a^{-1})^i{}_j\right],$$

por tanto:

$$1 = \lambda(\det\ (a^{-1})^i{}_j) \rightarrow \lambda > 0.$$

Esta propiedad de las n-formas $\mathbf{u} = u^1 \wedge \ldots \wedge u^n$ y $\mathbf{w} = w^1 \wedge \ldots \wedge w^n$ nos lleva a introducir otra manera de orientar el espacio E basandose en $\Lambda^n(E)$.

Introducimos:

$$\begin{aligned}\Omega_+ &= \{(\alpha,\beta)|\alpha = \lambda\ \beta,\ \lambda > 0\}\,,\\ \Omega_- &= \{(\alpha',\beta')|\alpha' = \lambda'\ \beta',\ \lambda' < 0\}\,.\end{aligned} \tag{1.83}$$

y se puede verificar que Ω_+, Ω_- definen una relación de equivalencia sobre $\Lambda^n(E)$. Sea $\alpha \in \Lambda^n(E)$ y sea $\mu_+[\alpha]$ la clase de equivalencia:

$$\mu_+[\alpha] = \{\beta \in \Lambda^n(E)|\beta = \lambda\alpha,\ \lambda > 0\}.$$

Sea $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, \ldots, u_n)$ es una base de E y suponemos : $\alpha(\overrightarrow{\mathbf{u}}) = \alpha(u_1, \ldots, u_n) > 0$, entonces decimos que $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ es base positivamente orientada de E. Notamos que si $\alpha' \in \mu_+[\alpha]$ también implica que $\alpha'(\overrightarrow{\mathbf{u}}) = \lambda\alpha(\overrightarrow{\mathbf{u}}) > 0$ entonces la conclusión que $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ es una base positivamente orientada depende sólo de $\mu_+[\alpha]$. Sean $(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}})$ dos bases de E positivamente orientadas en el sentido anterior, es decir $a(\overrightarrow{u}) > 0$, $a(\overrightarrow{w}) > 0$. Sin pérdida de generalidad podemos usar $u^1 \wedge \ldots \wedge u^n$ como una base de $\Lambda^n(E)$, entonces: $\alpha = \mu^2 u^1 \wedge \ldots \wedge u^n$, $\mu \neq 0$. Por otro lado:

$$\begin{aligned}
&\alpha(\overrightarrow{\mathbf{w}}) = \mu^2 u^1 \wedge \ldots \wedge u^n(w_1, \ldots, w_n)\\
&= \mu^2 \alpha^{i_1}{}_1 \alpha^{i_2}{}_2 \ldots \alpha^{i_n}{}_n u^1 \wedge \ldots \wedge u^n(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n})\\
&= \mu^2 \left[\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \alpha^{i_{\sigma(1)}}{}_1 \alpha^{i_{\sigma(2)}}{}_2 \ldots \alpha^{i_{\sigma(n)}}{}_n\right] u^1 \wedge \ldots \wedge u^n(u_1, \ldots, u_n)\\
&= \mu^2 \det(\alpha^i{}_j) > 0.
\end{aligned} \tag{1.84}$$

Lo que verifica que $\det(\alpha^i{}_j) > 0$ y por tanto la orientación inducida sobre E por $\mu_+[\alpha]$ es la misma que se espacificó con la clase de equivalencia $\mu_+[\overrightarrow{\mathbf{u}}]$. Entonces existen dos maneras equivalentes de orientar un espacio vectorial

E: Especificando una clase de equivalencia de bases $\mu_+[\overrightarrow{\mathbf{u}}]$ ó especificando una clase de equivalencia $\mu_+[\alpha]$ de elementos en $\Lambda^n(E)$.

1.7 El concepto de métrica.

En esta sección se introducirá la noción de métrica g definida sobre un espacio vectorial real E y se estudiarán algunas de sus propiedades básicas.

Definición 1.7.1 : Una métrica en E si g es un mapa:

$$g : E \times E \to R : (X, Y) \to g(X, Y),$$

la cual satisface las propiedades siguientes : $\forall\ X, Y, Z, W\ \in E$

α) g es bilineal: $g(X+Y, Z+W) = g(X, Z) + g(X, W) + g(Y, Z) + g(Y, W)$,

β) g es simétrica: $g(X, Y) = g(Y, X)$,

γ) g es no degenerada: Si existe $Y \in E$ tal que $\forall\ X \in E\ \ g(X, Y) = 0 \Rightarrow Y = 0$.

Señalamos que un producto interno $\tilde{g}$ en E es también un mapa:

$$\tilde{g} : E \times E \to R : (X, Y) \to \tilde{g}(X, Y) \tag{1.85}$$

que satisface α) y β) pero en lugar de γ) se tiene:

$$\forall X \in E\ \ \tilde{g}(X, X) \geq 0,\ \tilde{g}(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0 \in E. \tag{1.86}$$

Como una consecuencia de esta propiedad un producto interno $\tilde{g}$ es una métrica pero no podemos concluir que cada métrica g es producto interno, debido a que las propiedades $\alpha) - \gamma)$ no imponen ninguna restricción sobre el signo de $g(X, X)$.

Las propiedades $\alpha), \beta)$ y $\gamma)$ de una métrica g nos permiten establecer un número de teoremas importantes y comenzamos con el siguiente teorema.

Teorema 1.7.1: Sea g una métrica sobre E, entonces existe una base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ llamada base ortonormal, tal que:

$$g(u_i, u_j) = \pm\delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Demostración: Primero mostrarémos que existe $u_1 \neq 0$ tal que $g(u_1, u_1) \neq 0$. Supongamos que no es el caso es decir $g(u, u) = 0$ para cada $u \in E$. Consideremos:

$$g(u_1 + w, u_1 + w) = 0, \quad w \in E, \ u_1 \neq 0$$

y notamos que como consecuencia de bilinealidad:

$$g(u_1 + w, u_1 + w) = g(u_1, u_1) + g(w, w) + 2g(u_1, w) = 0$$
$$\Rightarrow g(u_1, w) = 0 \ \ \forall w \in E,$$

pero de esta relación y debido a que g no es degenerada concluimos que $u_1 = 0$ lo cual es una contradicción y entonces existe un $\tilde{u}_1 \neq 0$ tal que $g(\tilde{u}_1, \tilde{u}_1) \neq 0$. Usando tal $\tilde{u}_1$ considerémos el conjunto: $S = \{u \in E \mid g(\tilde{u}_1, u) = 0\}$, el cual es un subespacio S de E y sea además el subespacio: $\hat{R} = \{\alpha\ \tilde{u}_1 \mid \alpha \in R\}$, $\dim\hat{R} = 1$. Notamos que $S \cap \hat{R} = \{0\}$ y además : $E = \hat{R} + S \ \Rightarrow \ \forall x \in E: \ x = \alpha\tilde{u}_1 + \beta$.

Consideramos la restricción de g sobre S y afirmamos que g no es degenerada sobre S. Para mostrarlo supongamos que no es el caso, es decir existe $x \in$

$S,\ x \neq 0$ tal que $g(x,y) = 0\ \ \forall\ y \in S$. Por otro lado para cada $u \in E$:

$$g(u,x) = g(\alpha\tilde{u}_1 + \beta, x) = \alpha g(\tilde{u}_1, x) + g(\beta, x) = 0 \tag{1.87}$$

y como g no es degenerada en E y $g(u,x) = 0\ \ \forall\ u \in E$, concluimos que $x = 0$ lo cual es una contradicción. Entonces existe un $\tilde{u}_2 \in S$ tal que $g(\tilde{u}_2, \tilde{u}_2) \neq 0$ y $g(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = 0$.

Continuamos este proceso considerando los subespacios: $\hat{S} = \{u | g(u, \tilde{u}_1) = g(u, \tilde{u}_2) = 0\}$ y $R_2 = \{\alpha_1\tilde{u}_1 + \alpha_2\tilde{u}_2 | (\alpha_1, \alpha_2) \in R\}$ y como el caso anterior tenemos: $E = R_2 + \hat{S}$ y $R_2 \cap \hat{S} = \{0\}$.

Restringimos nuevamente g sobre $\hat{S}$ y afirmamos que g es no degenerada en $\hat{S}$. Para cada $u \in E$ tenemos la descomposición: $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta$ con $\beta \in \hat{S}$ y además:

$$g(u,x) = \alpha_1 g(\tilde{u}_1, x) + \alpha_2 g(\tilde{u}_2, x) + g(\beta, x) = 0, \tag{1.88}$$

entonces $x = 0$, lo cual es una contradicción y entonces existe $\tilde{u}_3 \neq 0$ tal que $g(\tilde{u}_3, \tilde{u}_3) \neq 0$ y $g(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3) = g(\tilde{u}_2, \tilde{u}_3) = 0$. Continuando este proceso establecemos la existencia de n vectores $\{\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n\}$ tal que $g(\tilde{u}_i, \tilde{u}_i) \neq 0$ y $g(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j) = 0\ \ i \neq j$. Obviamente $\{\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n\}$ son linealmente independientes y como $\dim E = n \Rightarrow \{\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n\}$ es una base de E.

Enseguida construirémos una base ortonormal. Del análisis anterior si existe $k,\ 0 \leq k \leq n$ tal que $g(\tilde{u}_i, \tilde{u}_i) = a^2 > 0$, entonces:

$$u_i = \frac{\tilde{u}_i}{[g(\tilde{u}_i, \tilde{u}_i)]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \quad g(\tilde{u}_i, \tilde{u}_i) = +1, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{1.89}$$

mientras que para : $i = k+1, \ldots, n.\ \ g(\tilde{u}_i, \tilde{u}_i) = -\beta^2, \quad \beta \neq 0$ entonces:

$$u_i = \frac{\tilde{u}_i}{\sqrt{-g(\tilde{u}_i, \tilde{u}_i)}} \Rightarrow \quad g(u_i, u_i) = -1. \tag{1.90}$$

La colección $\{u_1, \ldots, u_n\}$ definida por (1.89) y (1.90) es una base ortonormal de E.

Por definición $g \in M(0,2)$, entonces g se puede representar en la forma:

$$g = g_{\alpha\beta}\ v^\alpha \otimes v^\beta, \quad g_{\alpha\beta} = g(v_\alpha, v_\beta), \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n, \tag{1.91}$$

con $g_{\alpha\beta}$ las componentes de g relativas a una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ erbitraria de E. En términos de la base ortonormal $\{u_1, \ldots, u_n\}$ que acabamos de discutir y su base dual $\{u^1, \ldots, u^n\}$, g admite la representación:

$$g = \pm\delta_{\alpha\beta}\ u^\alpha \otimes u^\beta.$$

y esta representación nos permite introducir el concepto de signatura de la métrica.

Definición 1.7.2: La signarura de una métrica g, es el número de valores propios positivos de la matriz $g_{\mu\nu} = g(\hat{u}_\mu, \hat{u}_\nu)$ menos el número de valores propios negativos (al respecto de una base ortonormal).

Teorema 1.7.2 La signarura de una métrica g es independiente de la base ortonormal.

Como consecuencia de este teorema hay una clasificación de g respecto a la signatura:

$$\mathrm{sgn} g = \left\{ \begin{array}{rl} n, & g_r \text{ es de Riemman.} \\ n-1, & g_l \text{ es de Lorentz.} \\ n-k, & g_{sr} \text{ es semiriemmaniana.} \end{array} \right\} \tag{1.92}$$

Para una métrica de Lorentz g_l hay una clasificación natural sobre vectores $X \in E$: un vector X es tipo tiempo si $g(X, X) < 0$, tipo espacio si $g(X, X) >$

0 y nulo si $g(X, X) = 0$. Los vectores nulos forman un doble cono en E el cual separa los vectores tipo tiempo de los vectores tipo espacio.

Acontinuación mostramos que una métrica g establece un isomorfismo natural entre el espacio E y su dual E^*.

Teorema 1.7.3: Para cada $f \in E^*$ existe un único $\alpha \in E$, tal que $f = g(\ ,\alpha) \in E^*$, en donde:

$$f = g(\ ,\alpha) : E \to R : \beta \to f(\beta) \equiv g(\beta, \alpha) \in R.$$

Demostración: Para cada $\alpha \in E$, el mapa:

$$f = g(\ ,\alpha) : E \to R : \beta \to f(\beta) = g(\beta, \alpha) \tag{1.93}$$

es un mapa lineal es decir $f = g(\ ,\alpha) \in E^*$.

Sean $\{u_1, \ldots, u_n\}$ n-vectores linealmente independientes y sean:

$$f_{u_i} : E \to R : \beta \to f_{u_i}(\beta) = g(\beta, u_i), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.94}$$

y afirmamos que $\{f_{u_1}, \ldots, f_{u_n}\}$ constituye una base de E^*. Para esto consideramos la combinación lineal:

$$0 = \lambda_1 f_{u_1} + \ldots + \lambda_n f_{u_n} = g(\ ,\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n), \quad \lambda_i \in R, \tag{1.95}$$

de esta relación notamos que:

$$\forall\ \beta \in E \Rightarrow\ g(\beta, \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n) = 0$$

y como g es no degenerada concluímos:

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0. \tag{1.96}$$

lo cual implica que $\{f_{u_1}, \ldots, f_{u_n}\}$ son elementos linealmente independientes de E^*. Como dim$E$ = dim$E^* = n$ entonces $\{f_{u_1}, \ldots, f_{u_n}\}$ es una base de E^*, por tanto $\forall\ \hat{g} \in E^*$ existen: $\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_n \in R$ tal que

$$\hat{g} = g(\ , \hat{\lambda}_1 u_1 + \ldots + \hat{\lambda}_n u_n) = g(\ , \alpha) \qquad \alpha = \hat{\lambda}_1 u_1 + \ldots + \hat{\lambda}_n u_n.$$

Como consecuencia de este teorema tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.7.1 : El mapa

$$F : E \to E^* : \alpha \to F(\alpha) = g(\ , \alpha), \tag{1.97}$$

es un isomorfismo.

Demostración: Primero F es un mapa lineal: $F(\mu\alpha + \beta) = g(\ , \mu\alpha + \beta) = \mu g(\ , \alpha) + g(\ , \beta)\quad \mu \in R$, esto por la bilinealidad de g, además por la no degeneración de g se tiene Ker$F = \{\alpha \in E \mid F(\alpha) = g(\ , \alpha) = 0\} = \{0\}$, por otra parte sabemos que dim$E$ = dim$E^* = n$ por tanto se verifica la afirmación.

Como una aplicación del isomorfismo (1.97) demostrarémos que g se puede inducir una métrica naturalmente sobre los espacios $\Lambda^p(E)\ \ 0 \leq p \leq n$. Para ver esto consideramos primero $\Lambda^0(E) = R$ y definimos:

$$\hat{g} : \Lambda^0(E) \times \Lambda^0(E) \to R : (c_1, c_2) \to \hat{g}(c_1, c_2) = c_1 c_2 \tag{1.98}$$

y se puede ver fácilmente que $\hat{g}$ es métrica porque cumple con propiedades de simetría, bilinealidad y no degeneración.

Enseguida consideramos $\Lambda^1(E) \equiv E^*$ y definimos:

$$\hat{g} : \Lambda^1(E) \times \Lambda^1(E) \to R : (\omega^1, \omega^2) \to \hat{g}(\omega^1, \omega^2) \equiv g(\alpha, \beta) \tag{1.99}$$

donde (α, β) son los únicos elementos de E que satisfacen: $\omega^1 = g(\ ,\alpha)$ y $\omega^2 = g(\ ,\beta)$.

Mostrarémos que $\hat{g}$ es una métrica sobre $\Lambda^1(E)$. Por las propiedades del isomorfismo (1.97), se sigue que $\hat{g}$ es bilineal. Sean $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{e^1, \ldots, e^n\}$ un par de bases duales, entonces tenemos las expansiones:

$$\omega^1 = f_\mu e^\mu \quad \omega^2 = g_\nu e^\nu \quad \text{y} \quad \alpha = \alpha^\mu e_\mu, \quad \beta = \beta^\mu e_\mu,$$

mientras $\omega^1 = g(\ ,\alpha)$ y $\omega^2 = g(\ ,\beta)$ implican:

$$f_\mu = g_{\mu\nu}\alpha^\nu \quad \text{y} \quad g_\mu = g_{\mu\nu}\beta^\nu,$$

Por la definición de $\hat{g}$:

$$\hat{g}(\omega^1, \omega^2) = \hat{g}(f_\mu e^\mu, g_\nu e^\nu) = f_\mu g_\nu \hat{g}(e^\mu, e^\nu) = f_\mu g_\nu \hat{g}^{\mu\nu} \tag{1.100}$$

por otro lado

$$g(\alpha, \beta) = g(\alpha^\mu e_\mu, \beta^\nu e_\nu) = \alpha^\mu \beta^\nu g(e_\mu, e_\nu) = \alpha^\mu \beta^\nu g_{\mu\nu} \tag{1.101}$$

y debido a que $\hat{g}(\omega^1, \omega^2) = g(\alpha, \beta)$ se tiene:

$$f_\mu g_\nu \hat{g}^{\mu\nu} = \alpha^\mu \beta^\nu g_{\mu\nu}, \tag{1.102}$$

en donde $\hat{g}^{\mu\nu} = \hat{g}(e^\mu, e^\nu)$ son las componencias de $\hat{g}$ al respecto de la base $\{e^1, \ldots, e^n\}$. Usando $f_\mu = g_{\mu\alpha}\alpha^\alpha$ y $g_\nu = g_{\nu\beta}\beta^\beta$ en (1.102) nos lleva a:

$$g_{\mu\alpha}\alpha^\alpha g_{\nu\beta}\beta^\beta \hat{g}^{\mu\nu} = \alpha^\mu \beta^\nu g_{\mu\nu} \Rightarrow \alpha^\alpha \beta^\beta (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \hat{g}^{\mu\nu} - g_{\alpha\beta}) = 0$$

y como α y β son arbitrarios concluimos:

$$g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\hat{g}^{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}. \tag{1.103}$$

Queremos resolver esta ecuación, es decir encontrar $\hat{g}^{\mu\nu}$, para esto sabemos que de la no degeneración de g, se sigue $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ por lo que existe la matriz inversa de g y sus elementos los denotamos con $g^{\mu\nu}$. Por definición cumplen con la propiedad: $g^{\mu\nu}g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}{}_{\alpha}$. Entonces multiplicando ambos lados de (1.103) por $g^{\rho\alpha}g^{\tau\beta}$ se tiene:

$$g^{\rho\alpha}g_{\mu\alpha}g^{\tau\beta}g_{\nu\beta}\hat{g}^{\mu\nu} = g^{\rho\alpha}g^{\tau\beta}g_{\alpha\beta} \quad \Rightarrow \hat{g}^{\rho\tau} = g^{\rho\tau}. \tag{1.104}$$

De esta relación concluímos que

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \hat{g}(e^{\mu}, e^{\nu}) = g^{\mu\nu}, \tag{1.105}$$

la cual indica que $\hat{g}$ esta índucida directamente por g. La simetría de $\hat{g}$ se verifica fácilmente :

$$\hat{g}(\omega^1, \omega^2) = g(\alpha, \beta) = g(\beta, \alpha) = \hat{g}(\omega^1, \omega^2)$$

Para mostrar la no degeneración de $\hat{g}$ supongamos $\omega^1 \in \Lambda^1(E)$ tal que $\hat{g}(\omega^1, \omega) = 0$ para cada $\omega \in \Lambda^1(E)$. Usando una base ortonormal $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$ de E y $\{\hat{e}^1, \ldots, \hat{e}^n\}$ la base dual de $\Lambda^1(E)$, expandemos $\omega^1 = \omega_\mu \hat{e}^\mu$ entonces:

$$0 = \hat{g}(\omega_1, \omega) = \hat{g}(\omega_\mu \hat{e}^\mu, \hat{e}^i) = \omega_\mu \hat{g}(\hat{e}^\mu, \hat{e}^i) = \pm\omega_\mu \delta^{\mu\ i} = \pm\omega_i \ \ \forall \ \ \hat{e}^i \ \ i = 1, \ldots, n,$$

por tanto $\omega_i = 0 \ \ \forall \ \ i = 1, \ldots, n \Rightarrow \omega^1 = 0$ lo cual implica que $\hat{g}$ es no degenerada. En resumen $\hat{g}$ definida por (1.97) es una métrica en $\Lambda^1(E)$ naturalmente inducida por la métrica g en E.

Considerémos enseguida los espacios $\Lambda^p(E)$, $2 \leq p \leq n$ y sea el mapa:

$$\hat{g} : \Lambda^p(E) \times \Lambda^p(E) \to R : (\omega_1, \omega_2) \to \hat{g}(\omega_1, \omega_2) \tag{1.106}$$

en donde $\hat{g}(\omega^1, \omega^2)$ es definido de la siguiente manera: sea $\{e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n\}$ una base para $\Lambda^p(E)$. Respecto a tal base tenemos:

$$\begin{aligned} &\omega_1 = \alpha_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \text{ y } \omega_2 = \beta_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}, \\ &1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq n \end{aligned} \tag{1.107}$$

y a través de esta expansión, usando las componentes $\hat{g}^{\alpha\beta} \equiv g^{\alpha\beta}$ de la métrica en $\Lambda^1(E)$, definimos:

$$\begin{aligned} &\hat{g}(\omega^1, \omega^2) = \alpha_{i_1 \ldots i_p} \beta^{i_1 \ldots i_p} = \\ &= g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \ldots g^{i_p j_p} \alpha_{i_1 \ldots i_p} \beta_{j_1 \ldots j_p} = \alpha^{j_1 \ldots j_p} \beta_{j_1 \ldots j_p}, \\ &1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq n \end{aligned} \tag{1.108}$$

y mostramos que tal $\hat{g}$ también es una métrica en $\Lambda^p(E)$.

Primero demostramos que el lado derecho de (1.108) no depende de la base particular de $\Lambda^p(E)$, para ver esto sea : $\{\hat{e}^{i_1} \wedge \hat{e}^{i_2} \wedge \ldots \wedge \hat{e}^{i_p} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n\}$ otra base de $\Lambda^p(E)$, entonces:

$$\omega_1 = \alpha'_{i_1 \ldots i_p} \hat{e}^{i_1} \wedge \hat{e}^{i_2} \wedge \ldots \wedge \hat{e}^{i_p} \text{ y } \omega_2 = \beta'_{i_1 \ldots i_p} \hat{e}^{i_1} \wedge \hat{e}^{i_2} \wedge \ldots \wedge \hat{e}^{i_p} \tag{1.109}$$

y al respecto de tal base también tenemos:

$$\hat{g}(\omega^1, \omega^2) = \alpha'_{i_1 \ldots i_p} \beta'^{\, i_1 \ldots i_p} \tag{1.110}$$

Mostrarémos que (1.110) es igual a (1.108). Para esto sea $e'_i = a^k{}_i e_k$ y $e'^i = (a^{-1})^i{}_k e^k$, en donde $a = (a^k{}_i)$ es una $n \times n$ matriz no singular. Debido a que:

$$\begin{aligned} g'^{j_l i_l} &= g(e'^{j_l}, e'^{i_l}) = (a^{-1})^{j_l}{}_{\alpha_l} (a^{-1})^{i_l}{}_{\beta_l} g(e^{\alpha_l}, e^{\beta_l}) \\ &= (a^{-1})^{j_l}{}_{\alpha_l} (a^{-1})^{i_l}{}_{\beta_l} g^{\alpha_l \beta_l} \end{aligned} \tag{1.111}$$

y

$$\begin{aligned} a'_{i_1 \ldots i_p} &= a(e'_{i_1}, \ldots, e'_{i_p}) = a^{b_1}{}_{i_1} \ldots a^{b_p}{}_{i_p} a(e_{b_1}, \ldots, e_{b_p}) \\ &= a^{b_1}{}_{i_1} \ldots a^{b_p}{}_{i_p} a_{b_1 \ldots, b_p} \end{aligned} \tag{1.112}$$

se sigue que:

$$\hat{g}(\omega^1, \omega^2) = \alpha'_{i_1 \ldots i_p} \beta'^{i_1 \ldots i_p} = \alpha_{i_1 \ldots i_p} \beta^{i_1 \ldots i_p} \tag{1.113}$$

El mapa (1.106) es bilineal y se puede ver de (1.108) que es simétrico: $\hat{g}(\omega_1, \omega_2) = \hat{g}(\omega_2, \omega_1)$.

Por otra parte supongamos que existe $\alpha \in \Lambda^p(E)$ tal que $\hat{g}(\alpha, \beta) = 0 \ \ \forall \beta \in \Lambda^p(E)$ entonces para cada:

$$e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \qquad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n. \tag{1.114}$$

$$\hat{g}(\alpha, e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}) = 0 \tag{1.115}$$

y demostrarémos que esta relación implica $\alpha = 0$. Por eso sea:

$$\beta = e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} = \frac{1}{p!} \beta_{j_1 \ldots j_p} e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_p},$$

$$\beta_{j_1 \ldots j_p} = \left\{ \begin{array}{rl} 1 & \text{si } j_1 \ldots j_n \text{ es una permutación par.} \\ -1 & \text{si } j_1 \ldots j_n \text{ es una permutación impar.} \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{array} \right\} \tag{1.116}$$

Se sigue de (1.115) que:

$$\hat{g}(\alpha, e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}) = \alpha^{\mu_1 \ldots \mu_p} \beta_{\mu_1 \ldots \mu_p}, \tag{1.117}$$

pero tal sumatoria implica que $\alpha^{i_1 \ldots i_p} = 0$, lo cual comprueba que $\hat{g}$ cumple con la propiedad de no degeneración, por lo tanto (1.108) es una métrica sobre $\Lambda^p(E)$.

Para las necesidades de la sección próxima mostramos la siguiente proposición.

Proposición 1.7.2: Sea $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$ una base ortonormal de E y $\{\hat{e}^1, \ldots, \hat{e}^n\}$ la base dual de $E^* = \Lambda^1(E)$, entonces:

$$\left\{\hat{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}^{i_p} |\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n\right\} \tag{1.118}$$

es una base ortonormal de $(\Lambda^p(E), \hat{g})$.

Demostración: Sea $\alpha = \hat{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}^{i_p}$ y $\beta = \hat{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}^{j_p}$ con $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_p \leq n$ elementos fijos de $\Lambda^p(E)$. Representamos:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{p!} \alpha_{l_1 \ldots l_p} \hat{e}^{l_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}^{l_p}, \\ \beta &= \frac{1}{p!} \beta_{m_1 \ldots m_p} \hat{e}^{m_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}^{m_p}, \end{aligned} \tag{1.119}$$

en donde $\alpha_{l_1 \ldots l_p}$ y $\beta_{m_1 \ldots m_p}$ son definidos de la misma manera que (1.116), entonces:

$$\begin{aligned} \hat{g}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{p!} \alpha^{m_1 \ldots m_p} \beta_{m_1 \ldots m_p} \\ &= \frac{1}{p!} g^{m_1 l_1} \ldots g^{m_p l_p} \alpha_{l_1 \ldots l_p} \beta_{m_1 \ldots m_p} \\ &= \frac{1}{p!} g^{m_1 m_1} \ldots g^{m_p m_p} \alpha_{m_1 \ldots m_p} \beta_{m_1 \ldots m_p} \end{aligned} \tag{1.120}$$

Pero por la definición de los coeficientes $\alpha_{m_1 \ldots m_p}$, $\beta^{m_1 \ldots m_p}$ el lado derecho de (1.120) es cero, excepto cuando $\{i_1, \ldots, i_p\} = \{j_1, \ldots, j_p\}$. Entonces:

$$\hat{g}(\hat{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}^{i_p}, \hat{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}^{j_p}) = g(\hat{e}^{i_1}, \hat{e}^{j_1}) \ldots g(\hat{e}^{i_p}, \hat{e}^{j_p}) \quad (1.121)$$

y debido a la ortonormalidad de la base $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$, tenemos: $g(\hat{e}^{\mu}, \hat{e}^{\nu}) = \pm\delta^{\mu\nu}$, la cual demuestra la afirmación del teorema.

Terminamos esta sección discutiendo otra aplicación del isomorfismo natural F entre E y E^*. Mostramos que induce un isomorfismo entre los espacios $M(r,s)$ y $M(s,r)$, $\quad r,s = 0,1,\ldots$. Discutirémos la naturaleza de este isomorfismo para el caso particular $M(0,r)$ y $M(r,0)$ $r \geq 1$.

Sea el mapa:

$$\begin{aligned} & F_* : M(0,r) \to M(r,0) : T \to F_*T, & (1.122) \\ & F_*T : E^* \times E^* \times \ldots \times E^* \to R : (\omega^1 \ldots \omega^r) \to (F_*T)(\omega^1 \ldots \omega^r) & \\ & (F_*T)(\omega^1 \ldots \omega^r) = T(F^{-1}(\omega^1), \ldots, F^{-1}(\omega^r)), & \end{aligned}$$

en donde F^{-1} es la inversa de el mapa (1.97).

De (1.122) se ve que F_* esta bien definido, es lineal y $\mathrm{Ker}F_* = \{0\} \in M(0,r)$ y como $\dim M(0,r) = \dim M(r,0) = n^r$, entonces F_* es un isomorfismo. Sean $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{e^1, \ldots, e^n\}$ un par de bases duales de E y E^*. Evaluarémos las componentes $(F_*T)^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ de (F_*T) relativas a este par de bases:

$$(F_*T)^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = (F_*T)(e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_r}) = T(F^{-1}(e^{\alpha_1}), \ldots, F^{-1}(e^{\alpha_r})) \quad (1.123)$$

y por las propiedades de F, tenemos:

$$F^{-1}(e^{\alpha_1}) = g^{\alpha_1\beta_1} e_{\beta_1}, \ldots, F^{-1}(e^{\alpha_r}) = g^{\alpha_r\beta_r} e_{\beta_r}$$

y entonces

$$
\begin{aligned}
&(F_*T)^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = T(g^{\alpha_1\beta_1}e_{\beta_1},\ldots,g^{\alpha_r\beta_r}e_{\beta_r})\\
&= g^{\alpha_1\beta_1}\ldots g^{\alpha_r\beta_r}T(e_{\beta_1},\ldots,e_{\beta_r}) = g^{\alpha_1\beta_1}\ldots g^{\alpha_r\beta_r}T_{\beta_1,\ldots,\beta_r}. \qquad (1.124)
\end{aligned}
$$

Es común escribir:

$$
(F_*T)^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \equiv T^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = g^{\alpha_1\beta_1}\ldots g^{\alpha_r\beta_r}T_{\beta_1\ldots\beta_r} \qquad (1.125)
$$

y de esta forma decimos que el tensor (F_*T) con componentes definidas por (1.125) es obtenido de T subiendo los índices usando la métrica g.

El isomorfismo (1.122) se puede extender a los espacios $M(r,s)$ y $M(s,r)$ de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&G : M(s,r) \to M(r,s) : T \to G(T), \qquad (1.126)\\
&G(T) : E \times E \times \ldots \times E \times E^* \times \ldots \times E^* \to R\\
&(X_1,\ldots,X_r,\omega^1\ldots\omega^s) \to G(T)(X_1,\ldots,X_r,\omega^1\ldots\omega^s)\\
&= T(F^{-1}(\omega^1),\ldots,F^{-1}(\omega^s),F(X_1),\ldots,F(X_r)),
\end{aligned}
$$

de forma análoga a (1.125) las componentes de G estan dadas como:

$$
G(T)^{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}_{\gamma_1\ldots\gamma_s} = g^{\alpha_1\beta_1}\ldots g^{\alpha_r\beta_r}g_{\gamma_1\rho_1}\ldots g_{\gamma_s\rho_s}T^{\rho_1\ldots\rho_s}{}_{\beta_1\ldots\beta_r} \qquad (1.127)
$$

En la siguiente sección se mostrará que la métrica g en E, selecciona una única n-forma en $\Lambda^n(E)$ a excepción de el signo y es referida como el elemento de volumen.

1.8 Elemento de volumen de una métrica g.

Consideramos un par de bases ortonormales y positivamente orientadas: $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y afirmamos primero que:

$$u^1 \wedge \ldots \wedge u^n = v^1 \wedge \ldots \wedge v^n. \tag{1.128}$$

Para la demostración notamos que la ortonormalidad de las bases implica:

$$g_{\mu\nu} = g(u_\mu, u_\nu) = \pm\delta_{\mu\nu}, \quad g'_{\alpha\beta} = g(v_\alpha, v_\beta) = \pm\delta_{\alpha\beta}, \tag{1.129}$$

mientras que la suposición que son positivamente orientadas implica que existe una matriz $\mathbf{a} = a^i{}_j$ con $\det(a^i{}_j) > 0$, tal que $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}}\mathbf{a} \Rightarrow u_\mu = \alpha^\rho{}_\mu v_\rho$ entonces:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g(u_\mu, u_\nu) = g(a^\rho{}_\mu v_\rho, a^k{}_\nu v_k) = a^\rho{}_\mu a^k{}_\nu g(v_\rho, v_k) \\ \pm\delta_{\mu\nu} &= a^\rho{}_\mu a^k{}_\nu(\pm\delta_{\rho k}) = \pm a^\rho{}_\mu \delta_{\rho k}(a^T)_\nu{}^k \end{aligned}$$

donde $(a^T)_\nu{}^k$ es la transpuesta de $(a^T)^k{}_\nu$, es decir $(a^T)_\nu{}^k = a^k{}_\nu$. Multiplicando por (-1) si es necesario y tomando determinantes, tenemos: $(\det \mathbf{a})^2 = 1 \Rightarrow \det \mathbf{a} = +1$, pero esto significa:

$u^1 \wedge \ldots \wedge u^n = [\det(\mathbf{a}^{-1})]\, v^1 \wedge \ldots \wedge v^n \;\Rightarrow\; u^1 \wedge \ldots \wedge u^n = v^1 \wedge \ldots \wedge v^n$,

por tanto cada par de bases ortonormales $(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$ positivamente orientados definen la misma n-forma:

$$u^1 \wedge \ldots \wedge u^n = v^1 \wedge \ldots \wedge v^n. \tag{1.130}$$

Demostramos enseguida que tal propiedad es invariante si empleamos bases arbitrarias pero positivamente orientadas. Por eso supongamos que $\overrightarrow{\mathbf{u}'} =$

$\{\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n\}$ es una base positivamente orientada, pero no necesariamente ortonormal y sea:

$$g_{\alpha\beta} = g(\tilde{u}_\alpha, \tilde{u}_\beta),\ \alpha, \beta = 1, \ldots, n.$$

las componentes de g al respecto de tal base. Consideramos también una base ortonormal $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y positivamente orientada. Por elección existe una matriz $\mathbf{a}$ no singular tal que: $\overrightarrow{\mathbf{u}}' = \overrightarrow{\mathbf{u}}\mathbf{a}$, $\det\mathbf{a} > 0$ y adicionalmente:

$$\begin{aligned}
&g_{\alpha\beta} = g(\tilde{u}_\alpha, \tilde{u}_\beta) = g(a^\kappa{}_\alpha u_\kappa, a^\mu{}_\beta u_\mu) = \\
&a^\kappa{}_\alpha a^\mu{}_\beta g(u_\kappa, u_\mu) = \pm a^\kappa{}_\alpha a^\mu{}_\beta \delta_{\kappa\mu} = \pm a^\kappa{}_\alpha a^\kappa{}_\beta
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \sqrt{|g_{\alpha\beta}|} \equiv \sqrt{|g|} = +\det\ (a^\kappa{}_\alpha)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
&u^1 \wedge u^2 \ldots \wedge u^n = (a^{-1})^1{}_{j_1}\ \tilde{u}^{j_1} \wedge (a^{-1})^2{}_{j_2}\ \tilde{u}^{j_2} \wedge \ldots \wedge (a^{-1})^n{}_{j_n}\ \tilde{u}^{j_n} \\
&= (a^{-1})^1{}_{j_1}(a^{-1})^2{}_{j_2} \ldots (a^{-1})^n{}_{j_n}\ \tilde{u}^{j_1} \wedge \tilde{u}^{j_2} \wedge \ldots \wedge\ \tilde{u}^{j_n} \\
&= \left[\sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn}\ \sigma)(a^{-1})^1{}_{\sigma(1)}(a^{-1})^2{}_{\sigma(2)} \ldots (a^{-1})^n{}_{\sigma(n)}\right]\ \tilde{u}^1 \wedge \tilde{u}^2 \wedge \ldots \wedge\ \tilde{u}^n \\
&= \left[\det(\mathbf{a}^{-1})\right] \tilde{u}^1 \wedge \tilde{u}^2 \wedge \ldots \wedge\ \tilde{u}^n, \\
&\Rightarrow (\det\ \mathbf{a}) u^1 \wedge u^2 \ldots \wedge u^n = \tilde{u}^1 \wedge \tilde{u}^2 \wedge \ldots \wedge\ \tilde{u}^n \\
&\Rightarrow \sqrt{|g|} u^1 \wedge u^2 \ldots \wedge u^n = \tilde{u}^1 \wedge \tilde{u}^2 \wedge \ldots \wedge\ \tilde{u}^n.
\end{aligned} \tag{1.131}$$

Pero esta propiedad implica que para cada par de bases $(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$ positivamente orientadas, tenemos la siguiente conclusión que representamos como teorema:

Teorema 1.8.1 : Sean $\{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ dos bases arbitrarias pero positivamente orientadas, entonces

$$\sqrt{|g|}u^1 \wedge u^2 \wedge \ldots \wedge\ u^n = \sqrt{|g'|}v^1 \wedge v^2 \wedge \ldots \wedge\ v^n. \qquad (1.132)$$

Definición 1.8.1: La n-forma $\eta(g) = \sqrt{|g|}u^1 \wedge u^2 \wedge \ldots \wedge\ u^n$ es llamada elemento de volumen de g relativo a una base positivamente orientada $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de E. (Si la base es negativamente orientada el elemento de volumen esta dado por: $-\sqrt{|g|}u'^1 \wedge u'^2 \wedge \ldots \wedge\ u'^n$ con $\{u'_1, \ldots, u'_n\} \in \Gamma_-(E)$.)

Para las secciones próximas será conveniente notar que relativo a una base positivamente orientada $\{u_1, \ldots, u_n\}$ el elemento de volúmen $\eta(g)$ puede escribirse como:

$$\eta(g) = \sqrt{|g|}u^1 \wedge u^2 \wedge \ldots \wedge u^n = \frac{1}{n!}\eta_{\mu_1 \ldots \mu_n} u^{\mu_1} \wedge u^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge u^{\mu_n}, \quad (1.133)$$

en donde:

$$\eta_{\mu_1 \ldots \mu_n} := \sqrt{|g|}\ \epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n}\ ,\ \mu_1, \ldots, \mu_n \in \{1, \ldots, n\},$$

son las componentes de η relativas a $\{u^1, \ldots, u^n\}$ base de $E^* = \Lambda^1(E)$ y hemos definido el símbolo de Levi-Civita $\epsilon_{\mu_1,\ldots,\mu_n}$ a través de:

$$\epsilon_{\mu_1,\ldots,\mu_n} = \left\{ \begin{array}{rl} 1 & \mu_1, \ldots, \mu_n \text{ permutación par de } (1, \ldots, n), \\ -1 & \mu_1, \ldots, \mu_n \text{ permutación impar de } (1, \ldots, n), \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{array} \right\} \quad (1.134)$$

1.9 El Operador de Hodge.

En la sección (1.3) hemos notado que los espacios $\Lambda^p(E),\ \ 0 \leq p \leq n$ tienen la propiedad: $\dim\Lambda^0(E) = \dim\Lambda^n(E),\ \ \dim\Lambda^1(E) = \dim\Lambda^{n-1}(E)$, etcetera, y esta propiedad, deja abierta la posibilidad de establecer isomorfismos entre: $(\Lambda^0(E), \Lambda^n(E))$, $(\Lambda^1(E), \Lambda^{n-1}(E)), \ldots$. Mostrarémos en esta sección que la presencia de g nos permite definir un isomorfismo natural denotado por $*$ y llamado operador de Hodge.

Definición 1.9.1: El operador de Hodge denotado por $*$, se define como el mapa:

$$* : \Lambda^p(E) \rightarrow \Lambda^{n-p}(E) : a \rightarrow *a \tag{1.135}$$

donde la (n-p)-forma $*\alpha$ satisface:

$$\forall \beta \in \Lambda^{n-p}(E) \Rightarrow a \wedge \beta = (-1)^s g(*a, \beta)\eta(g) \tag{1.136}$$

$s :=$ el número de eigenvalores negativos de g y $\eta(g) :=$ el elemento de volumen al respecto de las bases positivamente orientadas.[4]

Enseguida discutirémos algunas propiedades del operador $*$. Asumirémos primero existencia, es decir supondrémos que existe un $*$ que satisface (1.135) y estudiamos sus propiedades. Primero mostramos que $*$ es un mapa lineal. Sea $a \in \Lambda^p(E)$, $\lambda \neq 0$, entonces $*\lambda a$ satistace:

$$\lambda a \wedge \beta = (-1)^s g(*\lambda a, \beta)\eta(g), \tag{1.137}$$

pero por las propiedades de el producto cuña, se tiene:

$$\lambda a \wedge \beta = a \wedge \lambda\beta = (-1)^s g(*a, \lambda\beta)\eta(g) \tag{1.138}$$

$$= (-1)^s g(\lambda * a, \beta)\eta(g), \tag{1.139}$$

[4] Si consideramos el operador $*$ al respecto de una base negativamente orientada se cambia $\eta(g)$ por $-\eta(g)$ y $*$ en (1.135) es reemplazado por $-*$. De aquí en adelante empleamos sin otro aviso sólo bases positivamente orientadas y decimos que la $(n-p)$-forma $*a$ es la dual de Hodge de la p-forma a.

entonces: $g(*\lambda a - \lambda * a, \beta) = 0, \;\; \forall \beta \in \Lambda^{n-p}(E)$ y como g no es degenerada: $*\lambda a = \lambda * a$. Mas general, se ve fácilmente que:

$$*(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) = \lambda_1 * a_1 + \lambda_2 * a_2, \; \forall \; a_1, a_2 \in \Lambda^p(E) \text{ y } \lambda_1, \lambda_2 \in R.$$

Enseguida verificarémos que:

$$\text{Ker } * = \{a \in \Lambda^p(E) | * a = 0\} = \{0\}. \tag{1.140}$$

Sea $a \in$ Ker$*$ y se elige una base en $\Lambda^p(E)$ tal que $a = a_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}, \;\; 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$. Tomemos un elemento particular $a_{j_1 \ldots j_p} e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_p}$ (sin sumatoria) y sea $\beta = e^{j_{p+1}} \wedge \ldots \wedge e^{j_n} \in \Lambda^{n-p}(E)$ tal que $\{e^{j_1}, \ldots, e^{j_p}, e^{j_{p+1}}, \ldots, e^{j_n}\}$ es una base de E, si $a \in$ ker$*$, entonces:

$$a \wedge \beta = a_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \wedge e^{i_{p+1}} \wedge \ldots \wedge e^{i_n} = 0 \tag{1.141}$$

y debido a que $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_n} = \eta(g)$, concluímos que $a_{i_1 \ldots i_p} = 0$.
Continuando de esta manera concluímos que $a \equiv 0$ lo cual implica que Ker$* = \{0\}$ y por tanto el operador de Hodge es un isomorfismo entre $\Lambda^p(E)$ y $\Lambda^{n-p}(E)$.
Ensegida mostrarémos la existencia del operador $*$, esta se hará con una construcción explícita. Comenzamos con $\{\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_n\}$ una base ortonormal de E y $\{\hat{u}^1, \ldots, \hat{u}^n\}$ su dual:

$$g(\hat{u}_i, \hat{u}_j) = \pm \delta_{ij} \text{ y } g(\hat{u}^i, \hat{u}^j) = \pm \delta^{ij}. \tag{1.142}$$

Como hemos visto en la proposición (1.7.2) los elementos: $\hat{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{u}^{i_p}$ y $\hat{u}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \hat{u}^{j_p}$ satisfacen:

$$g(\hat{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{u}^{i_p}, \hat{u}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \hat{u}^{j_p}) = g(\hat{u}^{i_1}, \hat{u}^{j_1}) \ldots g(\hat{u}^{i_p}, \hat{u}^{j_p}) \tag{1.143}$$

y la colección $\{\hat{u}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}^{i_p},\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n\}$ constituye una base ortonormal de $B[\Lambda^p(E)]$.

Consideramos primero: $a = \hat{u}^1 \wedge \ldots \wedge \hat{u}^p$ y construirémos $*a$ resolviendo la ecuación:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^s g(*a, \beta)\eta(g), \tag{1.144}$$

para esto sea $\beta = \hat{u}^{p+1} \wedge \ldots \wedge \hat{u}^n$ tal que $\{\hat{u}^1, \ldots, \hat{u}^p, \ldots, \hat{u}^n\}$ es una base positivamente orientada de E. Por elección: $a \wedge \beta = \eta(g)$ y (1.144) implica:

$$1 = (-1)^s g(*a, \hat{u}^{p+1} \wedge \ldots \wedge \hat{u}^n). \tag{1.145}$$

Proponemos como solución:

$$*a = \lambda \hat{u}^{p+1} \wedge \ldots \wedge \hat{u}^n, \quad \lambda \in R. \tag{1.146}$$

usando la relación (1.143), se tiene:

$$1 = (-1)^s \lambda g(\hat{u}^{p+1}, \hat{u}^{p+1}) \ldots g(\hat{u}^n, \hat{u}^n) \Rightarrow \tag{1.147}$$

$$\lambda = \frac{(-1)^s}{g(\hat{u}^{p+1}, \hat{u}^{p+1}) \ldots g(\hat{u}^n, \hat{u}^n)} \tag{1.148}$$

por otro lado, la ortonormalidad de las bases implica:

$$(-1)^s = g(\hat{u}^1, \hat{u}^1) \ldots g(\hat{u}^n, \hat{u}^n),$$

entonces:

$$\lambda = g(\hat{u}^1, \hat{u}^1) \ldots g(\hat{u}^n, \hat{u}^p) \tag{1.149}$$

y sustituyendo esta relación en (1.146) tenemos:

$$*a = *(\hat{u}^1 \wedge \ldots \wedge \hat{u}^p) = \lambda \hat{u}^{p+1} \wedge \ldots \wedge \hat{u}^n$$

$$= g(\hat{u}^1, \hat{u}^1) \ldots g(\hat{u}^n, \hat{u}^p) \hat{u}^{p+1} \wedge \ldots \wedge \hat{u}^n. \tag{1.150}$$

A través de este proceso podemos construir el dual para cada elemento de la base ortonormal de $\Lambda^p(E)$. Una manera rápida de hacer esto es evaluar:

$$*(\hat{u}^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \hat{u}^{\sigma(p)}), \tag{1.151}$$

en donde σ es una permutación en S_n, con $\sigma(1) < \ldots < \sigma(p)$.
Tomamos $\beta = \hat{u}^{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge \hat{u}^{\sigma(n)} \in \Lambda^{n-p}(E)$, con: $\sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \ldots < \sigma(n)$, y notamos por hipótesis:

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \hat{u}^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \hat{u}^{\sigma(p)} \wedge \hat{u}^{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge \hat{u}^{\sigma(n)} \\ &= (\text{sgn}\sigma)\hat{u}^1 \wedge \ldots \wedge \hat{u}^n = (\text{sgn}\sigma)\eta(g). \end{aligned} \tag{1.152}$$

Regresando a (1.144) se sigue que:

$$\begin{aligned} &*(\hat{u}^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \hat{u}^{\sigma(p)}) = (\text{sgn}\sigma) g(\hat{u}^{\sigma(1)}, \hat{u}^{\sigma(1)}) \ldots g(\hat{u}^{\sigma(p)}, \hat{u}^{\sigma(p)}) \\ &\hat{u}^{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge \hat{u}^{\sigma(n)}, \\ &\sigma(1) < \ldots < \sigma(p),\ \sigma(p+1) < \ldots < \sigma(n). \end{aligned} \tag{1.153}$$

Con esta relación, dada cualquier $a \in \Lambda^p(E)$ la expandemos en términos de elementos de una base ortonormal en $\Lambda^p(E)$ y por linealidad y usando (1.146) y (1.153) se evalúa $*a$.
Terminamos esta sección mostrando la unicidad del operador $*$. Sea $*'$ otro operador lineal que satisface:

$$a \wedge \beta = (-1)^s g(*'a, \beta)\eta(g), \quad \forall\ \beta \in \Lambda^{n-p}(E). \tag{1.154}$$

restando las ecuaciones (1.136) y (1.154) tenemos:

$$g(*a - *'a, \beta) = 0 \quad \forall\ \beta \in \Lambda^{n-p}(E) \tag{1.155}$$

y de la no degeneración de g se sigue de inmediato que

$$*a = *'a, \quad \forall a \in \Lambda^p(E), \tag{1.156}$$

por tanto $* = *'$.

Antes de estudiar más propiedades del operador $*$, considerémos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.9.1: Sea $(E, g) = (R^4, g)$ donde $g : R^4 \times R^4 \to R$ es una métrica de Lorentz tal que:

$$g = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3, \tag{1.157}$$

donde $\{dx^0, \ldots, dx^3\}$ es la base dual de $\{\frac{\partial}{\partial x^0}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^3}\}$.

Asumimos que $dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ define la orientación positiva y notamos:

$$dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}) = 1,$$

entonces $\left\{\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right\}$ es base positivamente orientada de (E, g).

A través de los resultados de la sección anterior, queremos estudiar los mapas $*$ entre los Λ^p, $0 \leq p \leq n$.

Sean las bases ortonormales $\left\{\frac{\partial}{\partial x^0}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^3}\right\}$ y $\{dx^0, \ldots, dx^3\}$ y consideremos el elemento de volumen: $\eta(g) = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, sea primero:

$$* : \Lambda^0 \to \Lambda^4 : c \to *c, \tag{1.158}$$

debido a que $*c$ satisface:

$$c \wedge \beta = (-1)^s g(*c, \beta)\eta(g) = c\beta, \tag{1.159}$$

se ve que:

$$\forall c \in \Lambda^0 \Rightarrow *c = cdx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = c\eta(g) \tag{1.160}$$

$$\Rightarrow *1 = \eta(g). \tag{1.161}$$

Considerémos enseguida el mapa:

$$* : \Lambda^1 \to \Lambda^3 : \gamma \to *\gamma = * \left[\gamma_0 dx^0 + \gamma_1 dx^1 + \gamma_2 dx^2 + \gamma_3 dx^3\right], \tag{1.162}$$

Por linealidad es suficiente evaluar $*$ sobre los elementos de la base de Λ^1: $\{*dx^0, *dx^1, *dx^2, *dx^3, \}$.
Usando la propiedad (1.136) y escogiendo: $\beta = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ tenemos:

$$dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -g(*dx^0, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)\eta(g)$$
$$-g(\lambda dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)\eta(g) = -\lambda\eta(g) \Rightarrow \lambda = -1,$$
$$*dx^0 = -dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \tag{1.163}$$

De manera similar, para evaluar $*dx^1$ elegimos $\beta = -dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3$:

$$-dx^1 \wedge dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -g(*dx^1, -dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3)\eta(g)$$
$$-g(\lambda dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3, -dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3)\eta(g) = -\lambda\eta(g) \Rightarrow \lambda = -1,$$
$$*dx^1 = -dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \tag{1.164}$$

Continuando este proceso obtenemos:

$$*dx^2 = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \quad \text{y} \quad *dx^3 = -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2, \tag{1.165}$$

entonces:

$$*\gamma = \gamma_0 * dx^0 + \gamma_1 * dx^1 + \gamma_2 * dx^2 + \gamma_3 * dx^3$$

$$= -\gamma_0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \gamma_1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

$$+\gamma_2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - \gamma_3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2. \tag{1.166}$$

De manera análoga:

$$* : \Lambda^2 \to \Lambda^2 : \mu \to *\mu =$$

$$= \mu_{01} * dx^0 \wedge dx^1 + \mu_{02} * dx^0 \wedge dx^2 + \mu_{03} * dx^0 \wedge dx^3$$

$$+\mu_{12} * dx^1 \wedge dx^2 + \mu_{13} * dx^1 \wedge dx^3 + \mu_{23} * dx^2 \wedge dx^3$$

$$= -\mu_{01} dx^2 \wedge dx^3 + \mu_{02} dx^1 \wedge dx^3 - \mu_{03} dx^1 \wedge dx^2$$

$$+\mu_{12} dx^0 \wedge dx^3 - \mu_{13} dx^0 \wedge dx^2 + \mu_{23} dx^0 \wedge dx^1.$$

Acontinuación demostramos algunas propiedades de $*$.

Proposición 1.9.1: El operador $*$ satisface:

$$\forall \alpha \in \Lambda^p(E) \Rightarrow * * \alpha = (-1)^{n(n-p)+s} \alpha,$$

$$\forall \alpha, \beta \in \Lambda^p(E) \Rightarrow \alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha = g(\alpha, \beta)\eta(g),$$

Demostración: Sea $\alpha \in \Lambda^p(E)$ y sea

$$\alpha = \alpha_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p},\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n, \tag{1.167}$$

en donde $\{e^1, \ldots, e^n\}$ es una base ortonormal de $\Lambda^1(E) = E^*$. Debido a la linealidad de $*$, tenemos:

$$* * \alpha = \alpha_{i_1 \ldots i_p} * *(e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}), \tag{1.168}$$

entonces será suficiente demostrar que

$$* * (e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}) = (-1)^{n(n-p)+s} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}. \tag{1.169}$$

Por eso sea $\alpha = e^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(p)}$, $\beta = e^{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(n)}$ en donde $\sigma \in S_n$ con $\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(n)$. Como hemos visto:

$$*\alpha = *(e^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma_p}) = (\mathrm{sgn}\sigma) g(e^{\sigma(1)}, e^{\sigma(1)}) \ldots g(e^{\sigma(p)}, e^{\sigma(p)})$$
$$e^{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(n)} = (\mathrm{sgn})\sigma g(e^{\sigma(1)}, e^{\sigma(1)}) \ldots g(e^{\sigma(p)}, e^{\sigma(p)})\beta.$$

Para $\alpha = e^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(p)}$ y $\beta = e^{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(n)}$

$$\sigma(1) < \ldots < \sigma(p), \ \sigma(p+1) < \ldots < \sigma(n)$$

tenemos de las propiedades de Λ:

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{(n-p)p} \alpha \wedge \beta = (-1)^{(n-p)p} e^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(n)}$$
$$= (-1)^{(n-p)} (\mathrm{sgn}\sigma) \eta(g). \tag{1.170}$$

Por otro lado, por la definición de $*$, tenemos:

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^s g(*\beta, \alpha) \eta(g), \tag{1.171}$$

entonces de (1.170) y (1.171), tenemos: $(-1)^{(n-p)}\mathrm{sgn}\sigma = (-1)^s g(*\beta, \alpha)$, tomando $*\beta = \lambda\alpha \Rightarrow$

$$\lambda = (-1)^{(n-p)p} \mathrm{sgn}\sigma g(e^{\sigma(p+1)}, e^{\sigma(p+1)}) \ldots g(e^{\sigma(n)}, e^{\sigma(n)}). \tag{1.172}$$

Entonces:

$$* * \beta = * \left[(-1)^{(n-p)p} (\mathrm{sgn}\sigma) g(e^{\sigma(p+1)}, e^{\sigma(p+1)}) \ldots g(e^{\sigma(n)}, e^{\sigma(n)}) e^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(p)} \right]$$
$$= (-1)^{(n-p)p} \mathrm{sgn}\sigma g(e^{\sigma(p+1)}, e^{\sigma(p+1)}) \ldots g(e^{\sigma(n)}, e^{\sigma(n)}) * e^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(p)}$$
$$= (-1)^{(n-p)p+s} (\mathrm{sgn}\sigma)^2 e^{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(n)}, \tag{1.173}$$

en donde

$$(-1)^s = g(e^{\sigma(1)}, e^{\sigma(1)}) \ldots g(e^{\sigma(n)}, e^{\sigma(n)}). \qquad (1.174)$$

Pero la propiedad

$$* * \beta = * * (e^{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge e^{\sigma(n)}) = (-1)^{(n-p)p+s}, \qquad (1.175)$$

implica la validéz de (1.169).

Para demostrar la propiedad (2), sean

$$\alpha, \beta \in \Lambda^p(E) \Rightarrow *\beta \in \Lambda^{n-p}(E),$$

$$\begin{aligned} *\beta \wedge \alpha &= (-1)^s g(* * \beta, \alpha)\eta(g) \\ &= (-1)^{2s}(-1)^{(n-p)p} g(\beta, \alpha)\eta(g), \end{aligned} \qquad (1.176)$$

por otro lado:

$$*\beta \wedge \alpha = (-1)^{(n-p)p} \alpha \wedge *\beta, \qquad (1.177)$$

entonces de (1.176) y (1.177) entonces:

$$\alpha \wedge *\beta = g(\alpha, \beta). \qquad (1.178)$$

Terminamos esta sección con el siguiente teorema.

Teorema 1.9.1: Para cada $\alpha \in \Lambda^p(E)$, el dual de Hodge $*\alpha$ de α esta dado por:

$$*\alpha \equiv \frac{1}{p!} C(F_* \alpha \otimes \eta(g)) \qquad (1.179)$$

donde $C(F_*\alpha \otimes \eta(g))$ es la contracción de p índices contravariantes del $(p, 0)$ tensor $F_*\alpha$ con p índices covariantes del tensor $\eta(g)$. Con F_* el isomorfismo que hemos definido en (1.122).

Demostración: (Ver apéndice 4.2)

1.10 Producto Interior

Terminamos este capítulo introduciendo la operación de producto interior ó contracción de una p-forma ω y un vector $X \in E$.

Definición 1.10.1 Sea $X \in E$, entonces el producto interior i_X es el siguiente mapa:

$$i_X : \Lambda^p(E) \to \Lambda^{p-1}(E) : \omega \to i_X\omega$$

en donde $\forall\ (X_1, \ldots, X_{p-1}) \in E,\ \ i_X\omega$ satisface:

$$\alpha)\ \ (i_X\omega)(X_1, \ldots, X_{p-1}) = \omega(X, X_1, \ldots, X_{p-1})\,. \tag{1.180}$$

La (p-1)-forma $i_X\omega$ es el producto interior de una p-forma ω con el vector X (ó la contracción de ω con X). Aceptamos las siguientes propiedades:

$$i_X : \Lambda^0(E) \to \{0\} : c \to i_X(c) = 0\ ,$$
$$i_X : \Lambda^1(E) \to \Lambda^0(E) : \omega \to i_X(\omega) = \omega(X) = \langle\omega, X\rangle \in \Lambda^0(E)\,.$$

Teorema 1.10.1: El producto interior i_X, satisface:

$$\alpha)\ \ i_X i_Y\omega = -i_Y i_X\omega \Rightarrow i_X^2 = i_X i_X = 0$$
$$\beta)\ \ i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X\omega) \wedge \eta + (-1)^p\omega \wedge i_X\eta, \tag{1.181}$$

Demostración: (La demostración de estas propiedades puede verse en el apéndice 4.2.)

Capítulo 2

Campos tensoriales y de formas sobre una variedad

En las primeras secciones del capítulo anterior hemos hecho uso de la estructura de una variedad M sólo para definir el espacio tangente $T_xM,\ x \in M$. El cotangente T_x^*M, los espacios $M_x(r,p)$, así como los espacios $\Lambda_x^p, \quad 0 \leq p \leq n$ han sido naturalmente definidos una vez que $T_x(M)$ es definido primero. La estructura diferenciable [1] de M se mezcla muy bien con la existencia puntual de tensores y formas y esta mezcla nos permite introducir la importante

[1]Con el término de estructura diferenciable de una variedad M de clase $C^k,\ k \geq 1$ nos referimos a la topología T de M (para una introducción a espacios topológicos ver [5]) y el atlas maximal B de M. Recordemos que $B = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\ |\alpha \in I,\ \psi_\alpha : U_\alpha \subset M \to R^n\}$ en donde $\psi_\alpha : U_\alpha \to \psi_\alpha[U_\alpha] \subset R^n$ es un homomorfismo entre conjuntos abiertos de M y R^n, y además $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ y las cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ con intersección no vacía, satisfacen condiciones de compatibilidad. (Para una introducción a la teoría de variedades diferenciables ver [1, 2, 3])

noción de campos tensoriales y campos de formas definidos sobre M. En esta sección discutirémos brevemente la noción de campos tensoriales definidos sobre M y empezamos primero fijando notación. Siempre asumirémos que M es una variedad de clase C^∞, dim$M = n < \infty$, conectada y con un atlas maximal B y sin otro aviso, cualquier carta (U, φ) que se use de aquí en adelante pertenece a B (para una descripción de estos conceptos vease [1, 2, 3]).
Cada carta (U, φ) define las funciones coordenadas x^i:

$$x^i : U \subseteq M \to R : x \to x^i(x) = (pr^i \circ \varphi)(x), \quad i = 1, \ldots, n,$$

y $(x^1(x), \ldots, x^n(x))$ son referidas como las coordenadas de $x \in M$ asignadas por (U, φ). Denotamos por:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}_x, \quad \left\{dx^1, \ldots, dx^n\right\}_x, \quad x \in U \tag{2.1}$$

el par de bases coordenadas duales, de $T_x(M)$ y $T_x^*(M)$ respectivamente (ver [1, 2, 3]) y los n-elementos: $dx^1, \ldots, dx^n \in T_x^*(M)$, satisfacen:

$$dx^i : T_x(M) \to R : \frac{\partial}{\partial x^j} \to dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \equiv \left\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle = \delta^i{}_j$$

Si (V, ψ) es otra carta de M tal que $U \cap V \neq \{\emptyset\}$ y $\{y^1, \ldots, y^n\}$ son las funciones coordenadas asociadas a (V, ψ), entonces $\forall\ x \in U \cap V$ las matrices jacobianas:

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_x \equiv \frac{\partial(x^i \circ \psi^{-1})}{\partial y^j}|_{\psi(x)}, \quad \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}|_x \equiv \frac{\partial(y^\alpha \circ \varphi^{-1})}{\partial x^\beta}|_{\varphi(x)}, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

satisfacen:

$$\det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right)_x = \det\left(\frac{\partial(y^\alpha \circ \varphi^{-1})}{\partial x^\beta}\right)_{\varphi(x)} \neq 0, \tag{2.3}$$

y una es inversa de la otra.

Dada M, definimos:

$$C^\infty(M) = \{f | f : M \to R, \quad f \ \text{ es } \ C^\infty\}, \tag{2.4}$$

en donde $f : M \to R : x \to f(x)$ es C^∞ si y sólo si $\forall\ (U, \varphi)$ carta de M, la función: $f \circ \varphi^{-1} : \varphi[U] \subseteq R^n \to R$ es C^∞ en $\varphi[U]$, en el sentido de funciones valuadas en R.

Ahora introducimos la noción de campos tensoriales y campos de p-formas definidos sobre M, y comenzarémos por la definición de un campo vectorial.

Definición 2.1: Un campo vectorial X sobre M es una asignación para cada x de M de un único elemento de $T_x(M)$.

Si (U, φ) es una carta de M entonces X admite la representación local:

$$X(x) = X^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \ x \in U \tag{2.5}$$

donde

$$X^\mu(x) = \langle dx^\mu, X\rangle\,|_x, \quad \mu = 1, \ldots, n$$

son las n-componentes coordenadas de X relativas a la carta (U, φ). Sea (V, ψ) otra carta con:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right\}_y, \quad \left\{dy^1, \ldots, dy^n\right\}_y \tag{2.6}$$

las bases coordenadas de $T_y(M)$ y $T_y^*(M)$, entonces X tambien admite la representación:

$$X(y) = Y^\mu(y)\frac{\partial}{\partial y^\mu}, \quad y \in V. \tag{2.7}$$

Se adoptará la siguiente definición de suavidad de un campo vectorial X.

Definición 2.2: Un campo vectorial X definido en M es C^∞ si y sólo si para cada (U, φ), las componentes X^i de X son funciones C^∞:

$$X^i : U \subset M \to R : x \to X^i(x) = \left\langle dx^i, X \right\rangle_x \tag{2.8}$$

$$X^i \circ \varphi^{-1} : \varphi[U] \subset R^n \to R \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.9}$$

Los campos tensoriales, son definidos de manera similar:

Definición 2.3: Un campo tensorial T de tipo (r, p), es una asignación de un único tensor (r, p) para cada $x \in M$.

Si (U, φ) es una carta de M, entonces T admite la expansión:

$$T(x) = T^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}{}_{\beta_1 \ldots \beta_l}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_2}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_k}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes dx^{\beta_2} \otimes \ldots dx^{\beta_l}$$

donde[2]:

$$T^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}{}_{\beta_1 \ldots \beta_l}(x) = T(dx^{\alpha_1}, dx^{\alpha_2}, \ldots, dx^{\alpha_k}, \frac{\partial}{\partial x^{\beta_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{\beta_l}}) \tag{2.10}$$

son las componenes coordenadas de T relativas a la carta (U, φ), $x \in U$. Si (V, ψ) es otra carta entonces T tiene la forma:

$$T(x) = T'^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l}(x)\frac{\partial}{\partial y^{\mu_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\mu_2}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\mu_k}} \otimes dy^{\nu_1} \otimes dy^{\nu_2} \otimes \ldots dy^{\nu_l}$$

[2] Como en el caso de un campo vectorial, el campo tensorial T es C^∞, si las componentes (2.10): $T^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}{}_{\beta_1 \ldots \beta_l}$ al respecto de cada carta (U, φ) son C^∞.

donde:

$$T'^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}(x) = T(dy^{\mu_1}, dy^{\mu_2}, \ldots, dy^{\mu_k}, \frac{\partial}{\partial y^{\nu_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^{\nu_l}}) \tag{2.11}$$

son las componenes coordenadas de T relativas a la carta (V, ψ), $x \in V$. Si $U \cap V \neq \{\emptyset\}$, entonces para cada $x \in U \cap V$,

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_j}} = \frac{\partial y^{\beta_j}}{\partial x^{\alpha_j}} \frac{\partial}{\partial y^{\beta_j}}, \quad dx^{\alpha_i} = \frac{\partial x^{\alpha_i}}{\partial y^{\mu_i}} dy^{\mu_i} \tag{2.12}$$

y la multilinearidad de T implica:

$$\begin{aligned}
&T^{\alpha_1\ldots\alpha_k}{}_{\beta_1\ldots\beta_l} = T(dx^{\alpha_1}, dx^{\alpha_2}, \ldots, dx^{\alpha_k}, \frac{\partial}{\partial x^{\beta_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{\beta_l}})\\
&= \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\alpha_k}}{\partial y^{\mu_k}} \frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial x^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial y^{\nu_l}}{\partial x^{\beta_l}} T(dy^{\mu_1}, dy^{\mu_2}, \ldots, dy^{\mu_k}, \frac{\partial}{\partial y^{\nu_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^{\nu_l}})\\
&= \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\alpha_k}}{\partial y^{\mu_k}} \frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial x^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial y^{\nu_l}}{\partial x^{\beta_l}} \quad T'^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Campos de p-formas sobre M, son definidos de manera similar. Decimos que en M es definido un campo ω de p-formas si para cada $x \in M$, asignamos un elemento ω de Λ^p_x. Si (U, φ) es una carta, entonces ω admite la expansión local:

$$\omega = \omega_{\alpha_1\,\ldots\,\alpha_p} dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_p} \tag{2.14}$$

$$1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p \leq n,$$

donde:

$$\omega_{\alpha_1\,\ldots\,\alpha_p} = \omega(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_p}}) \tag{2.15}$$

son las componentes coordenadas totalmente antisimétricas de ω relativas a la carta (U, φ). El campo ω es C^∞ si y sólo si para cada carta (U, φ), el conjunto de funciones:

$$\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p} : U \subseteq M \to R : x \to \omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(x)$$
$$= \omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_p}})(x) \quad 1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p \leq n \tag{2.16}$$

son funciones C^∞ en el mismo sentido que (2.8 y 2.9).

En lo que sigue denotaremos como:

$$\mathcal{X}(M) = \{X |\ X \text{ es un campo tensorial } C^\infty \text{ sobre } M\}, \tag{2.17}$$

mientras que todos los campos C^∞ de p-formas sobre M, se denotarán como: $\Lambda^p(M)$ $0 \leq p \leq n$, y en particular notese:

$$\Lambda^0(M) = C^\infty(M) \text{ y } \Lambda^p(M) = \{0\}, \text{ p > n.}$$

El conjunto $\mathcal{X}(M)$ es un espacio vectorial y para las necesidades de la próxima sección introducimos el bracket de Lie:

$$[\ ,\ ] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M) : (X, Y) \to [X, Y], \tag{2.18}$$
$$[X, Y](f) \equiv X(Y(f)) - Y(X(f)), \tag{2.19}$$

en donde $(Yf)(x)$ representa la derivada direccional de f en $x \in M$ y en la dirección especificada por $Y(x) \in T_x(M)$.

Para cada $f, g \in C^\infty(M)$ el braket de Lie satisface:

$$\alpha)\ [fX, gY] = fg[X, Y] + f(X(g)Y) - g(Y(f)X), \tag{2.20}$$

$$\beta)[X, Y] = [X, Y]^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = (X^\alpha \frac{\partial Y^\beta}{\partial x^\alpha} - Y^\alpha \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\alpha})\frac{\partial}{\partial x^\beta}. \tag{2.21}$$

Será útil introducir en este punto la noción de métrica g.

Definición 2.6: Decimos que g es una métrica C^∞ definida en M si:

α) g es un campo tensorial C^∞ de tipo $(0,2)$.

β) $\forall\ x \in M$, g_x es una métrica sobre T_xM, es decir:

$$g_x : T_xM \times T_xM \to R, \tag{2.22}$$

satisface las propiedades: $\forall\ X, Y, Z, W\ \in T_xM$

α) $g_x(X+Y, Z+W) = g_x(X,Z) + g_x(X,W) + g_x(Y,Z) + g_x(Y,W)$,

β) $g_x(X,Y) = g_x(Y,X)$,

γ) g_x es no degenerada: Si existe $Y \in T_xM$ tal que $\forall\ X \in T_xM\ \ g_x(X,Y) = 0 \Rightarrow Y = 0$.

Aquí sólo mencionamos g como un campo tensorial tipo $(0,2)$, entonces al respecto de una carta (U,φ), admite la representación:

$$g = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha \otimes dx^\beta, \quad x \in U,\ \alpha, \beta = 1, \ldots, n \tag{2.23}$$

y en donde:

$$g_{\alpha\beta}(x) = g(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta})(x) \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n. \tag{2.24}$$

son las componentes coordenadas de g respecto de la carta (U,φ). (Para una discusión de las propiedades básicas e implicaciones de una métrica vease la sección 2.6 de [2].)

Finalmente para introducir el operador de Hodge necesitamos definir una variedad orientable:

Definición 2.7: Una variedad es orientable si existe un atlas $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ en el atlas maximal tal que para cualquier intersección no vacía $U_\alpha \cap U_\beta$, el jacobiano $|\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}|$ es positivo, donde $(x^1, \ldots, x^n)$ y $(x'^1, \ldots, x'^n)$ son coordenadas en U_α y U_β respectivamente.

Con esta introducción breve a la noción de campos tensoriales, en las secciones próximas discutimos algunas propiedades de campos de formas. Asumimos una (M, g) con M orientable y con g una métrica de signatura arbitraria. Cuando usamos el operador $*$ siempre empleamos cartas que pertenecen al atlas de la definición anterior, el sistema de coordenadas positivamente orientado.

2.1 El Operador Derivada Exterior

Empezamos mencionando que las propiedades de formas establecidas en el capítulo 1 son válidas en el presente contexto, en el entendimiento de que se aplican sobre cada punto en M. Por ejemplo, si α, β representan dos campos de p-formas en M, el producto cuña $\alpha \wedge \beta$ se define por:

$$(\alpha \wedge \beta)_x = \alpha_x \wedge \beta_x, \ x \in M. \tag{2.25}$$

Con el entendimiento de que $\alpha_x, \beta_x \in \Lambda^p(T_x M)$.

Con el mismo razonamiento se define el operador de Hodge como:

$$\begin{aligned} &* : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{n-p}(M) : \alpha \to *\alpha, \\ &\alpha \wedge \beta = (-1)^s g(*\alpha, \beta)\eta(g), \ \forall \ \beta \in \Lambda^{n-p}(M). \end{aligned} \tag{2.26}$$

donde $*\alpha$ es definido puntualmente y satisface $\forall x \in M$:

$$(\alpha \wedge \beta)_x = (-1)^s g(*\alpha, \beta)_x \eta(g)_x, \tag{2.27}$$

al lado derecho $g(*\alpha, \beta)_x$ y $\eta(g)_x$ se entiende la métrica g_x extendida en ${\Lambda^p}_x(T_xM)$ y $\eta_x(g)$ es el elemento de volumen.

Notamos como en el capítulo 1, tenemos las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} &* * \alpha_x = (-1)^{(n-p)p+s} \alpha_x, \\ &(\alpha \wedge *\beta)\ _x = g(\alpha, \beta)_x \eta(g)_x \quad \forall\ \alpha,\ \beta \in \Lambda^p(M). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Similarmente para cada $X \in \mathcal{X}(M)$ el producto interior i_X, asociado a este campo X es el mapa:

$$i_X : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p-1}(M) : \omega \to i_X\omega$$

tal que $\forall\ (X_1, \ldots, X_{p-1}) \in \mathcal{X}(M)$, i_X satisface:

$$\alpha)\ \ (i_X\omega)(X_1, \ldots, X_{p-1}) = \omega(X, X_1, \ldots, X_{p-1}). \tag{2.29}$$

Con la (p-1)-forma $i_X\omega$ nos referimos al producto interior de una p-forma ω con el campo vectorial X. Aceptamos las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} &i_X : \Lambda^0(M) \to \{0\} : f \to i_X(f) = 0\ , \\ &i_X : \Lambda^1(M) \to \Lambda^0(M) : \omega \to i_X(\omega) = \omega(X) \in \Lambda^0(M). \end{aligned}$$

El producto interior i_X, satisface:

$$\alpha)\ \ i_X i_Y \omega = -i_Y i_X \omega \Rightarrow i_X^2 = i_X i_X = 0$$

$$\beta)\ \ i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge i_X\eta,$$

Demostración:(Ver apéndice (4.3))

La nueva operación que ahora introducimos es el operador de diferenciación exterior d.

Teorema 2.1.2 : Existe un único operador lineal d definido por:

$$d : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p+1}(M) : \alpha \to d\alpha \tag{2.30}$$

que satisface:

α) para toda $f \in \Lambda^0(M)$, $df \in \Lambda^1(M)$ en donde:

$$d\ f(X) = X(f) = \langle df, X\rangle \ \ \forall X \in \mathcal{X}(M). \tag{2.31}$$

β) Si $\alpha \in \Lambda^p(M)$ y $\beta \in \Lambda^q(M)$ entonces:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta. \tag{2.32}$$

γ) $\forall \alpha \in \Lambda^p(M)$ se tiene:

$$d^2\alpha = (d \circ d)\alpha = 0 \ \text{ ó } \ d^2 = 0. \tag{2.33}$$

Demostración: Sea una carta (U, φ) y sea $\alpha \in \Lambda^p(M)$, tal α en U admite la expansión:

$$\alpha = \alpha_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n, \tag{2.34}$$

y usando esta representación definimos:

$$\begin{aligned} d\alpha &= d\left[\alpha_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\right] = d\alpha_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Mientras $\forall f \in \Lambda^0(M) = C^\infty(M)$ definimos:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu. \tag{2.36}$$

El operador d definido por (2.35) y (2.36), es un operador lineal y satisface por construcción:

$$d : \Lambda^p(U) \to \Lambda^{p+1}(U) : \alpha \to d\alpha \tag{2.37}$$

y además satisface $\alpha) - \gamma)$.

Tomando f como las n-funciones coordenadas x^i, $i = 1, \ldots, n$, vemos de (2.36) que $dx^i \equiv dx^i$ y $(d \circ d)x^i = 0$.

Por otro lado $\forall\ \alpha \in \Lambda^p(U)$:

$$\begin{aligned}(d \circ d)\alpha = dd\alpha = d^2\alpha = d\left[\frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x^\mu}\right] \wedge dx^\mu \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \\ = \frac{\partial^2 \alpha_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} dx^\nu \wedge dx^\mu \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} = 0\end{aligned} \tag{2.38}$$

debido a la conmutación de las segundas derivadas, con la propiedad $dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$ y $d(dx^i) = 0$.

Si $\alpha \in \Lambda^p(U)$ y $\beta \in \Lambda^q(U)$, entonces relativas a la carta (U, φ) ,

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \qquad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n \\ \beta &= \beta_{j_1 \ldots j_q} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} \qquad 1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_q \leq n\end{aligned} \tag{2.39}$$

y el producto cuña $\alpha \wedge \beta$ tiene la forma:

$$\alpha \wedge \beta = \alpha_{i_1 \ldots i_p} \beta_{j_1 \ldots j_q} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}, \tag{2.40}$$

Aplicando d se obtiene:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d(\alpha_{i_1\ldots i_p}\beta_{j_1\ldots j_q}) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}$$

$$= (\frac{\partial \alpha_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^\mu}\beta_{j_1\ldots j_q} + \frac{\partial \beta_{j_1\ldots j_q}}{\partial x^\mu}\alpha_{i_1\ldots i_p})dx^\mu \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}$$

$$= \frac{\partial \alpha_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge \beta_{j_1\ldots j_q} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}$$

$$+(-1)^p \alpha_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge \frac{\partial \beta_{j_1\ldots j_q}}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}$$

$$= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta. \tag{2.41}$$

donde el factor $(-1)^p$ se obtiene al conmutar sucesivamente dx^μ, con $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$.

El operador d definido por (2.35) y (2.36) es único. Si d' es otro operador que satisface (2.35) y (2.36) en (U, φ), entonces de (2.36), se sigue que $d'x^i = dx^i$, mientras de (2.35), se obtiene:

$$\begin{aligned} d'\alpha &= d'(\alpha_{i_1\ldots i_p}) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{\partial \alpha_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} = d\alpha \end{aligned} \tag{2.42}$$

en donde hemos pasado de la primera a la segunda igualdad tomando en cuenta que d' satisface el análogo de (2.36). De (2.42) se sigue que $d' = d$.

El operador d definido por (2.34) es independiente de la carta (U, φ). Si

(V, ψ) es otra carta tal que $U \cap V \neq \{\emptyset\}$, entonces:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha'_{i_1 \ldots i_p} dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_p} \quad \text{y} \\ d\alpha &= d(\alpha'_{i_1 \ldots i_p}) \wedge dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_p}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Pero las componentes de α respecto de las dos cartas se relacionan por:

$$\alpha'_{i_1 \ldots i_p} = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{\alpha_p}}{\partial y^{i_p}} \alpha_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \tag{2.44}$$

y usando tal relación de (2.43) obtenemos:

$$\begin{aligned} d\alpha &= d\left(\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{\alpha_p}}{\partial y^{i_p}} \alpha_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \right) \wedge dy^{i^1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_p} \\ &= d\alpha_{\alpha_1 \ldots, \alpha_p} \wedge \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_1}} dy^{i_1} \wedge \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_2}} dy^{i_2} \wedge \ldots \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{i_p}} dy^{i_p} \\ &= d\alpha_{i_1 \ldots, i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

También en $U \cap V$ tenemos:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu = \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} dy^\alpha \tag{2.46}$$

y combinando estas propiedades con la unicidad, se sigue que d es globalmente definido.

Aún el operador d tiene muchas propiedades interesantes, para nuestras necesidades mostrarémos la siguente proposición:

Proposición 2.1.1 Sea ω un campo de 1-formas y X, Y campos vectoriales, entonces:

$$d\omega := X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \tag{2.47}$$

Demostración: Será suficiente mostrar esta identidad relativa a alguna carta (U, φ). Sea $\omega = \omega_\mu dx^\mu \Rightarrow d\omega = d\omega_\mu \wedge dx^\mu$

$$
\begin{aligned}
d\omega(X,Y) &= (d\omega_\mu \wedge dx^\mu)(X,Y) = (d\omega_\mu \otimes dx^\mu)(X,Y) - (d\omega_\mu \otimes dx^\mu)(Y,X) \\
&= d\omega_\mu(X)dx^\mu(Y) - d\omega_\mu(Y)dx^\mu(X) = -\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu} X^\mu Y^\nu + \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu} X^\nu Y^\mu \qquad (2.48)
\end{aligned}
$$

Por otro lado:

$$X(\omega(Y)) = X(\omega_\alpha Y^\alpha) = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\omega_\alpha Y^\alpha) \qquad (2.49)$$

y

$$\omega([X,Y]) = [X,Y]^\alpha \omega_\alpha = \left(X^\beta \frac{\partial Y^\alpha}{\partial x^\beta} - Y^\beta \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \omega_\alpha. \qquad (2.50)$$

De estas relaciones se obtiene la igualdad.

2.2 El Operador Co-derivada $d^\dagger$

En esta sección introducimos el operador co-derivada $d^\dagger$ y derivamos algunas de sus propiedades básicas.

Haciendo uso de los operadores $*$ y derivada exterior d, se define el operador co-derivada $d^\dagger$, como:

$$
\begin{aligned}
&d^\dagger : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p-1}(M) : \alpha \to d^\dagger \alpha \\
&d^\dagger \alpha = -(-1)^{n(p+1)+s} * d * \alpha = (-1)^{n(n+p)+1+s} * d * \alpha. \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

y por las propiedades del operador $*$ y el operador d, se sigue que $\forall \alpha \in \Lambda^p(M) \Rightarrow d^\dagger \alpha \in \Lambda^{p-1}(M)$ y que además $d^\dagger$ es un operador lineal.

Lema 2.2.0: El operador $d^\dagger$ satisface:

$$d^\dagger \circ d^\dagger = (d^\dagger)^2 \equiv 0 \tag{2.52}$$

Demostración: Es una cosecuencia directa de $d \circ d = d^2 = 0$. si $\alpha \in \Lambda^p(M)$, entonces:

$$\begin{aligned}
&(d^\dagger \circ d^\dagger)\alpha = d^\dagger(d^\dagger \alpha) = d^\dagger(*d * \alpha) \\
&= *d * (*d * \alpha) = *d * *d * \alpha \\
&= *dd * \alpha = 0,
\end{aligned} \tag{2.53}$$

en donde por siplicidad hemos ignorado el factor $(-1)^{(n-p)p+s}$ en la definición de $d^\dagger$ y también hemos usado la propiedad $* * \alpha = \alpha$ (sin tomar en cuenta los pre-factores).

Debido a que la mayoría de las propiedades de $d^\dagger$ involucran la operación de integración de formas, enseguida mencionamos algunas propiedades básicas de $d^\dagger$ sin dar su derivación.

Lema 2.2.1: Para toda $\alpha \in \Lambda^p(M)$, las componentes coordenadas $(d^\dagger \alpha)^{i_1 \ldots i_{p-1}}$ de $d^\dagger \alpha$, son:

$$(d^\dagger \alpha)^{i_1 \ldots i_{p-1}} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{|g|} \alpha^{\mu \ i_1 \ldots i_p} \right) \tag{2.54}$$

Como en la sección (1.7), la mética g en M induce una métrica en los $\Lambda^p(M)$, $0 \leq p \leq n$, la cual denotamos como: $\langle \ , \ \rangle$ y se define por:

$$\begin{aligned}
&\langle \ , \ \rangle : \Lambda^p(M) \times \Lambda^p(M) \to R : \alpha, \beta \to \langle \alpha, \beta \rangle \\
&\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha(x) \wedge *\beta(x) = \int_M g(\alpha(x), \beta(x)) \eta(g(x))
\end{aligned} \tag{2.55}$$

A excepción de convergencia para variedades abiertas (2.55) esta bien definido y define una métrica sobre $\Lambda^p(M)$[3] y se ve que $\forall\ x \in M \quad \alpha(x) \wedge *\beta(x) = \beta(x) \wedge *\alpha(x)$, entonces:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle \quad \forall\ \alpha, \beta \in \Lambda^p(M). \tag{2.56}$$

Más aún, recordando:

$$g_x(\alpha(x), \beta(x)) = \alpha^{i_1 \ldots i_p}(x)\ \beta_{i_1 \ldots i_p}(x) \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$$

se sigue:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha^{i_1 \ldots i_p}(x) \beta_{i_1 \ldots i_p}(x) \sqrt{|g(x)|} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \tag{2.57}$$

por tanto si $\langle \alpha, \beta \rangle = 0, \ \ \forall \beta \in \Lambda^p(M)$, entonces $\alpha = 0$ y

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha(x) \wedge *\beta(x) = \int_M g(\alpha(x), \beta(x)) \eta(g(x))$$

$$= \int_M g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \ldots g^{i_p j_p}\ \alpha_{i_1 \ldots i_p}\ \beta_{j_1 \ldots j_p}\ \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n, \tag{2.58}$$

define un producto interno sobre $\Lambda^p(M)$.

Teorema 2.2.1: Si (M, g) es una variedad compacta sin frontera y orientable, entonces $\forall\ \alpha \in \Lambda^p(M)$ y $\forall \beta \in \Lambda^{p+1}(M)$

$$\langle d\alpha, \beta \rangle = \left\langle \alpha, d^\dagger \beta \right\rangle \tag{2.59}$$

[3] Para una demostración vease [7].

Discutimos previamente como se muestra tal propiedad de $d^\dagger$, sin entrar en detalles finos. Primero $\forall\ x \in M$, tenemos:

$$d(\alpha(x) \wedge *\beta(x)) = d\alpha \wedge *\beta + (-1)^p \alpha \wedge (d * \beta), \tag{2.60}$$

entonces:

$$\int_M d(\alpha \wedge *\beta) = \int_M d\alpha \wedge *\beta + (-1)^p \int_M \alpha \wedge (d * \beta), \tag{2.61}$$

usando la propiedad:

$$\begin{aligned} &\int_M d(\alpha \wedge *\beta) = \int_{\partial M} \alpha \wedge *\beta = 0, \\ &\langle d\alpha, \beta \rangle = \int_M d\alpha \wedge *\beta = -(-1)^p \int_M \alpha \wedge (d * \beta) \end{aligned} \tag{2.62}$$

Como $\beta \in \Lambda^{p+1}(M)$, entonces $*\beta \in \Lambda^{n-p-1}(M)$ y $d * \beta \in \Lambda^{n-p}(M)$, se sigue que $\quad * *(d * \beta) = (-1)^{(n-p)p+s} d * \beta$, pero tambien:

$$* * (d * \beta) = *(*d * \beta)$$

y como β es una (p+1)-forma,

$$d^\dagger \beta = (-1)^{n(p+2)+1+s} * d * \beta,$$

por lo que

$$* * (d * \beta) = *(-1)^{-n(p+2)-1-s} d^\dagger \beta = (-1)^{-n(p+2)-1-s} * d^\dagger \beta,$$

entonces

$$\begin{aligned} &(-1)^{(n-p)p+s} d * \beta = (-1)^{-n(p+2)-1-s} *\ d^\dagger \beta \\ &\text{ó bien}\ \ (-1)^{(n-p)p+s+n(p+2)+1+s} d * \beta = *\ d^\dagger \beta \\ &d * \beta = (-1)^{p^2-1} *\ d^\dagger \beta, \qquad\qquad (2.63) \\ &d * \beta = (-1)^{p^2+1} *\ d^\dagger \beta, \end{aligned}$$

regresando a (2.62) y usando (2.63), obtenemos

$$\langle d\alpha, \beta \rangle = (-1)^p \int_M \alpha \wedge d * \beta = -(-1)^p \int_M \alpha \wedge (-1)^{p^2+1} * \ d^\dagger \ \beta$$

$$= -(-1)^{p^2+p+1} \int_M \alpha \wedge * \ d^\dagger \ \beta = (-1)^{p(p+1)} \int_M \alpha \wedge * \ d^\dagger \ \beta = \left\langle \alpha, d^\dagger \beta \right\rangle .$$

Entonces $\langle d\alpha, \beta \rangle = \left\langle \alpha, d^\dagger \beta \right\rangle, \quad \forall \alpha \in \Lambda^p(M)$ y $\beta \in \Lambda^{p+1}(M)$.

Definición 2.2.1 : Una p-forma en $\Lambda^p(M)$ es harmónica si $d^\dagger \alpha = 0$ y $d\alpha = 0$ y por tanto

$$\triangle \alpha = -(dd^\dagger + d^\dagger d)\alpha = 0$$

$\triangle = -(dd^\dagger + d^\dagger d)\alpha$, es el laplaciano, actuando sobre campos de p-formas $0 \leq p \leq n$.

2.3 Los operadores ∇, $\nabla.$, $\nabla\times$, d, $d^\dagger$ y $*$

En esta sección conectamos los operadores d, $d^\dagger$ y $*$ con los operadores clásicos ∇, $\nabla.$, $\nabla\times$, que frecuentemente se encuentran en varios problemas físicos y matemáticos.

Sea $(M, g) = (R^n, g)$, Riem$(g) = 0$ y g la métrica riemanniana y cubrimos (R^n, g) con una carta cartesiana tal que

$$g = dx^1 \otimes dx^1 + \ldots + dx^n \otimes dx^n = (dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2, \tag{2.64}$$

y tomamos $\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ como la n-forma que da una orientación positiva a (R^n, g), se sigue que $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$ es una base positivamente orientada. Sea $\Lambda^p(R^n)$, $0 \leq p \leq n$, el espacio vectorial de todas las p-formas y sea:

$$d : \Lambda^p(R^n) \to \Lambda^{p+1}(R^n),$$
$$d^\dagger : \Lambda^p(R^n) \to \Lambda^{p-1}(R^n),$$
$$* : \Lambda^p(R^n) \to \Lambda^{n-p}(R^n),$$

notamos que para $p = 0$, $\Lambda^{-1}(R^n) = \{\emptyset\}$ y entonces:

$$d^\dagger : \Lambda^0(R^n) = C(R^n) \to \Lambda^{-1}(R^n) : f \to d^\dagger(f) = 0.$$

Similarmente $\Lambda^{n+1}(R^n) = \{\emptyset\}$ y

$$d : \Lambda^n(R^n) \to \Lambda^{n+1}(R^n) : \alpha \to d\alpha = 0. \tag{2.65}$$

El isomorfismo natural:

$$F : T_x(R^n) \to T_x^*(R^n) : X \to F(X) = g(\ , X)$$
$$F^{-1} : T_x^*(R^n) \to T_x(R^n) : \hat{X} \to F^{-1}(\hat{X}) \tag{2.66}$$

Ahora asociarémos los operadores gradiente divergencia y rotacional a los operadores d, $d^\dagger$ y $*$.

α) Sea $\Lambda^0(R^n) = C^\infty(R^4)$ y $d : \Lambda^0(R^4) \to \Lambda^1(R^4) : f \to df$, entonces ∇f se define por:

$$\nabla f = F^{-1}(df) = g^{\mu\nu} \tfrac{\partial f}{\partial x^\nu} \tfrac{\partial}{\partial x^\nu}. \tag{2.67}$$

β) De $df = \frac{\partial f}{\partial x^\nu} dx^\mu$, entonces:

$$d^\dagger f = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^{1^2}} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x^{n^2}} \right). \tag{2.68}$$

γ) Sea $\xi = \xi^\mu e_\mu = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, un campo vectorial suave, y sean las siguientes operaciones:

$$1)\xi \to F(\xi) = \omega \to *\omega \to d(*\omega) = (\nabla.\xi)\eta(g), \tag{2.69}$$

$$2)\xi \to F(\xi) = \omega \to d\omega \to *d(\omega) = (\nabla \times \xi). \tag{2.70}$$

Capítulo 3

Aplicaciones de Formas Diferenciales

Este capítulo tiene como finalidad dar dos aplicaciones de la teoria de formas diferenciales como primera aplicación estudiarémos una reformulación de las ecuaciones de Maxwell en términos de formas diferenciales.

3.1 Ecuaciones de Maxwell y Formas Diferenciales

En física prerelativista las ecuaciones de Maxwell en el vacío se conocen como:

$$\nabla.\overrightarrow{E} = 4\pi\rho, \qquad \nabla.\overrightarrow{B} = 0, \tag{3.1}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \overrightarrow{B} = \frac{4\pi}{c}\overrightarrow{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}, \tag{3.2}$$

donde hemos empleado el sistema de unidades de Gauss y $\nabla.$, $\nabla\times$ representan las operaciones de divergencia y rotacional respectivamente.

Como es bien conocido [vease [4]] la transición a la forma relativista de las ecuaciones (3.1) y (3.2) empieza considerando que el espacio físico y el tiempo se unen para definir el espacio tiempo continuo de Minkowski (R^4, g_L) en donde g_L es la métrica de Lorentz:

$$g_L = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 \tag{3.3}$$

define un marco inercial global, con $-\infty < x^i < \infty,\ x^0 = ct,\ i = 0, \ldots, 3$. A través de los campos:

$$\overrightarrow{E} = E^i(\overrightarrow{x}, t)\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \overrightarrow{B} = B^i(\overrightarrow{x}, t)\frac{\partial}{\partial x^i},\ i = 1, 2, 3 \tag{3.4}$$

pasamos a los campos de 1-formas:

$$F_*(\overrightarrow{E}) = E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3, \tag{3.5}$$

$$F_*(\overrightarrow{B}) = B_1 dx^1 + B_2 dx^2 + B_3 dx^3, \tag{3.6}$$

y también empleando la densidad de carga eléctrica ρ y de corriente $\overrightarrow{J}$ se define la cuatro-corriente:

$$J = J^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \rho c \frac{\partial}{\partial x^0} + J^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{3.7}$$

Bajando los índices obtenemos la 1-forma:

$$\hat{J} = (F_* J) = g_{\mu\nu} J^\nu dx^\mu = -\rho c dx^0 + J_i dx^i. \tag{3.8}$$

El campo de Maxwell F es una 2-forma definida por:

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = E_1 dx^0 \wedge dx^1 + E_2 dx^0 \wedge dx^2 \tag{3.9}$$

$$+E_3 dx^0 \wedge dx^3 - B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^1 \wedge dx^3 - B_3 dx^1 \wedge dx^2.$$

Tomando la derivada exterior:

$$dF = d[E_1 dx^0 \wedge dx^1 + E_2 dx^0 \wedge dx^2 + E_3 dx^0 \wedge dx^3 \tag{3.10}$$
$$-B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^1 \wedge dx^3 - B_3 dx^1 \wedge dx^2] =$$
$$\frac{\partial E_1}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^0 \wedge dx^1 + \frac{\partial E_2}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^0 \wedge dx^2 + \frac{\partial E_3}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^0 \wedge dx^3$$
$$-\frac{\partial B_3}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial B_1}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial B_2}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^1 \wedge dx^3$$
$$= [\frac{\partial E_1}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial B_3}{\partial x^0}] dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + [\frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial B_2}{\partial x^0} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1}] dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3$$
$$+[\frac{\partial E_2}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_1}{\partial x^0}] dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + [-\frac{\partial B_2}{\partial x^2} - \frac{\partial B_1}{\partial x^1} - \frac{\partial B_3}{\partial x^3}] dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Del lado derecho notamos que: $dF \equiv 0$ si y sólo si

$$\nabla . \overrightarrow{B} = 0, \ \nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial x^0}. \tag{3.11}$$

Por otra parte tomamos el dual de F:

$$*F = *[E_1 dx^0 \wedge dx^1 + E_2 dx^0 \wedge dx^2 + E_3 dx^0 \wedge dx^3 \tag{3.12}$$
$$-B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^1 \wedge dx^3 - B_3 dx^2 \wedge dx^1]$$
$$= E_1 * (dx^0 \wedge dx^1) + E_2 * (dx^0 \wedge dx^2) + E_3 * (dx^0 \wedge dx^3)$$
$$-B_3 * (dx^1 \wedge dx^2) + B_2 * (dx^1 \wedge dx^3) - B_3 * (dx^1 \wedge dx^2)$$
$$= -E_1 dx^2 \wedge dx^3 + E_2 dx^1 \wedge dx^3 - E_3 dx^1 \wedge dx^2$$
$$-B_3 dx^0 \wedge dx^3 - B_2 dx^0 \wedge dx^2 - B_1 dx^0 \wedge dx^1. \tag{3.13}$$

[1]

[1]Notamos que $*F$ se obtiene al intercambiar $\vec{B} \to \vec{E}$ y $\vec{E} \to -\vec{B}$, además en ausencia de ρ y $\vec{J}$ las ecuaciones de Maxwell permanecen invariantes bajo esta transformación.

y tomando la derivada exterior tenemos:

$$
\begin{aligned}
d(*F) = &[-\frac{\partial B_1}{\partial x^3} + \frac{\partial E_2}{\partial x^0} + \frac{\partial B_3}{\partial x^1}]dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\
+&[-\frac{\partial B_2}{\partial x^3} + \frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_1}{\partial x^0}]dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
+&[-\frac{\partial E_1}{\partial x^1} - \frac{\partial E_2}{\partial x^2} - \frac{\partial E_3}{\partial x^3}]dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
+&[-\frac{\partial B_1}{\partial x^2} + \frac{\partial B_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_3}{\partial x^0}]dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2.
\end{aligned}
$$

Por otra parte del campo de 1-formas definido por (3.8), tenemos:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{4\pi}{c} * \hat{J} = -\frac{4\pi}{c} * (g_{\mu\nu} J^\nu dx^\mu) = -\frac{4\pi}{c} g_{\mu\nu} J^\nu * dx^\mu \\
&= -\frac{4\pi}{c}[\rho c dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - J^1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&+ J^2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - J^3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2]
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Formando la suma:

$$d * F + \frac{4\pi}{c} * \hat{J}, \tag{3.15}$$

y comparando con:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad \nabla . \vec{E} = 4\pi\rho. \tag{3.16}$$

Vemos que:

$$d * F = -\frac{4\pi}{c} * \hat{J} \tag{3.17}$$

si y sólo si (3.16) son válidas. Aplicando el operador $*$ a ambos lados de (3.17) se tiene: $*d * F = -\frac{4\pi}{c} * * \hat{J}$.

Recordamos la definición del operador coderivada $d^{\dagger}$, ecuación (2.51) y tomando $n = 4, p = 2$ y por la métrica g_L definida en (3.3), llegamos a:

$$\delta F = -\frac{4\pi}{c}\hat{J}, \quad \delta \equiv *d* \tag{3.18}$$

y debido a la propiedad $\delta^2 = 0$, entonces $\delta\hat{J} = 0$ la cual es equivalente a la ecuación de continuidad $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla.\vec{J} = 0$.

En resumen haciendo uso de las formas diferenciales las ecuaciones de Maxwell en el espacio de Minkowski son equivalentes al sistema:

$$dF = 0 \qquad \delta F = -\frac{4\pi}{c}\hat{J},\ \delta\hat{J} = 0. \tag{3.19}$$

La teoría de Maxwell es una teoría de norma y como es bien conocido (vease [4]), tal propiedad implica que para los campos $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ los potenciales $(\Phi, \overrightarrow{A})$ no son únicamente definidos. Si

$$\overrightarrow{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t} - \nabla\Phi,\ \overrightarrow{B} = \nabla\times\overrightarrow{A}, \tag{3.20}$$

entonces:

$$\overrightarrow{A}' = -\overrightarrow{A} + \nabla\chi,\ \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{3.21}$$

también satisface:

$$\overrightarrow{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{A}'}{\partial t} - \nabla\Phi',\ \overrightarrow{B} = \nabla\times\overrightarrow{A}'. \tag{3.22}$$

Es interensante ver como esta propiedad se manifiesta en la formulación (3.19). A través de la relación $dF = 0$ ya que F es cerrada y por el lema de Poincaré[2] existe una 1-forma A tal que al menos localmente:

$$F = dA \Rightarrow dF = d(dA) = 0. \tag{3.23}$$

[2]Para una discusión de este lema y su derivación, vease [3].

y el campo de 1-forma A es referido como el potencial de norma para F. Por su definición A no es único, de hecho bajo la transformación:

$$A^{'} = A + d\Lambda,\ \Lambda \in \Lambda^0(R^4) = C^\infty(R^4), \tag{3.24}$$

se sigue:

$$dA^{'} = dA + d(d\Lambda) = dA = F. \tag{3.25}$$

Aplicando el operador δ a ambos lados de (3.24) se tiene:

$$\delta A' = \delta A + \delta d\Lambda = \delta A + (\delta d + d\delta)\Lambda = \delta A + \triangle\Lambda \tag{3.26}$$

tal condición implica que empezando con una 1-forma A, eligiendo Λ, siempre podemos imponer la condición $\delta A' = 0$. Por otro lado de la definición de δ, tenemos:

$$\begin{aligned}\delta A^{'} &= *d*(A^{'}{}_{\mu}dx^{\mu}) = *d(A^{'}{}_{\mu} * dx^{\mu}) = *[\frac{\partial A^{'}}{\partial x^{\nu}}dx^{\nu} \wedge *dx^{\mu}] \\ &= \frac{\partial A^{'}}{\partial x^{\nu}} * (dx^{\nu} \wedge *dx^{\mu}) = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial A^{'}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial A^{'}_0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^{'}_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^{'}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^{'}_3}{\partial x^3} \\ &= \frac{1}{c}\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \nabla . A'\end{aligned} \tag{3.27}$$

entonces la condición $\delta A' = 0$ es equivalente a la condición familiar de Lorentz.

$$\delta A^{'} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c}\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \nabla . A' = 0, \tag{3.28}$$

Terminamos esta sección, recordando que para un campo electromagnético en el espacio tiempo de Minkowski, asociamos el tensor de energía momento T cuyas componentes relativas a la carta (3.3), tiene la forma (vease [4]):

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}F_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{L\mu\nu}F^{\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}, \tag{3.29}$$

la cual satisface:

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0, \quad T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}, \quad g_L^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0. \tag{3.30}$$

3.2 La torsión y curvatura de una conexión.

Como segunda aplicación de la teoría de formas diferenciales que desarrollamos en capítulo (2) derivarémos las ecuaciones de estructura de Cartán. Para empezar recordamos la definición de una conexión lineal ∇, la curvatura R y torsión T.

Definición 3.2.1: Una conexión lineal ∇ en M, es un mapa:

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M) : (X, Y) \to \nabla_Y X \tag{3.31}$$

que satisface:

$$\forall f, g \in C^{\infty}(M), \; \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M) \text{ y } \alpha, \; \beta \in R.$$

$$(\alpha) \;\; \nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z,$$

$$(\beta) \;\; \nabla_X(\alpha Y + \beta Z) = \alpha \nabla_X Y + \beta \nabla_X Z,$$

$$(\gamma) \;\; \nabla_X(fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y.$$

Entonces una conexión ∇ define para cada $(X, Y) \in \mathcal{X}(M)$ un campo vectorial $\nabla_X Y \in \mathcal{X}(M)$ referido como la derivada direccional de Y al respecto de X. Para ver las implicaciones de las propiedades $\alpha) - \gamma)$ sea (U, φ) una carta, entonces:

$$X(x) = X^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \text{ y } Y(x) = Y^{\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \quad x \in U, \tag{3.32}$$

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}} \left(Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = X^\mu \left[\frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + Y^\nu \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \right]. \quad (3.33)$$

De esta perspectiva una conexión ∇, especifica al respecto de una carta (U, φ), n^3 funciones:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\rho} = \Gamma^\nu{}_{\mu\rho} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Rightarrow \Gamma^\nu{}_{\mu\rho} = \left\langle dx^\nu, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \right\rangle, \quad (3.34)$$

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} : U \subset M \to R : x \to \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}(x) = \left\langle dx^\nu, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \right\rangle_x . \quad (3.35)$$

Las n^3 funciones $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ reciben el nombre de símbolos de Christoffel, asociados a la conexión ∇ y la carta (U, φ). Con los símbolos de Christoffel (3.33) toma la forma:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}} \left(Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = X^\mu \left[\frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} + Y^\rho \Gamma^\nu{}_{\mu\rho} \right] \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ &\equiv X^\mu (\nabla_\mu Y^\nu) \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Respecto a otra carta (V, ϕ) los símbolos de Christoffel $\Gamma'^\nu_{\mu\rho}$ estan definidos como:

$$\Gamma'^\nu{}_{\mu\rho} = \left\langle dy^\nu, \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\mu}} \frac{\partial}{\partial y^\rho} \right\rangle \quad (3.37)$$

y del mismo razonamiento que nos llevó a (3.36) tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X'^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu}} \left(Y'^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right) = X'^\mu \left[\frac{\partial Y'^\nu}{\partial y^\mu} + Y'^\rho \Gamma'^\nu{}_{\mu\rho} \right] \frac{\partial}{\partial y^\nu} \\ &\equiv X'^\mu (\nabla_\mu Y'^\nu) \frac{\partial}{\partial y^\nu}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Se verificará que (3.36) y (3.38) representan para cada $x \in U \cap V$ el mismo campo vectorial. Para verificar esto primero veamos como cambia $\Gamma^\nu{}_{\mu\rho}$

cuando cambiamos la carta:

$$\Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho} = \left\langle dx^{\nu}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\gamma}} dy^{\gamma}, \nabla_{\frac{\partial y^{\eta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial y^{\eta}}} \frac{\partial y^{\kappa}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial}{\partial y^{\kappa}} \right\rangle,$$

aplicando otra vez las propiedades $(\alpha{-}\gamma)$ y de las propiedades del par natural $<\ ,\ >$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho}(x) &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\gamma}} \left\langle dy^{\gamma}, \nabla_{\frac{\partial y^{\eta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial y^{\eta}}} \frac{\partial y^{\kappa}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial}{\partial y^{\kappa}} \right\rangle \\ &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\gamma}} \left\langle dy^{\gamma}, \frac{\partial^2 y^{\kappa}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\rho}} \frac{\partial}{\partial y^{\kappa}} + \frac{\partial y^{\eta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial y^{\kappa}}{\partial x^{\rho}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^{\eta}}} \frac{\partial}{\partial y^{\kappa}} \right\rangle \\ &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\gamma}} \left[\frac{\partial^2 y^{\kappa}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\rho}} \delta^{\gamma}{}_{\kappa} + \frac{\partial y^{\eta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial y^{\kappa}}{\partial x^{\rho}} \Gamma'^{\lambda}{}_{\eta\kappa} \delta^{\gamma}{}_{\lambda} \right] = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\gamma}} \frac{\partial^2 y^{\gamma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\rho}} + \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\gamma}} \frac{\partial y^{\eta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial y^{\kappa}}{\partial x^{\rho}} \Gamma'^{\gamma}{}_{\eta\kappa}(x).\end{aligned} \tag{3.39}$$

de esta expresión observamos que el primer término a la derecha no cambia tensorialmente respecto al cambio de carta, esta propiedad de las funciones $\Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho}$ nos determinará que el campo $\nabla_X Y$ cambia tensorialmente respecto al cambio de carta.

Como es bien conocido (vease [2] pag. 30) una ∇ puede ser naturalmente extendida sobre campos tensoriales suaves y esta extensión cumple las propiedades: Sean $X \in \mathcal{X}(M)$ y $f \in C^{\infty}(M)$, entonces:

$$(\alpha') \quad \nabla_X(S \otimes T) = (\nabla_X S) \otimes T + S \otimes (\nabla_X T),$$

$$(\beta') \quad \nabla_X(CT) = C(\nabla_X T),$$

$$(\gamma') \quad \nabla_X f = df(x) = X(f),$$

donde C denota el mapa de contracción. Las propiedades $\alpha') - \gamma')$ son suficientes para evaluar la derivada direccional $\nabla_X T$ de un campo T al respecto de una carta (U, φ) arbitraria. Por ejemplo, calcularémos $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}} dx^{\beta}$ usando la propiedad (β'):

$$\begin{aligned}0 &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} C(dx^\beta \otimes \frac{\partial}{\partial x^\mu}) = C[\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}}(dx^\beta \otimes \frac{\partial}{\partial x^\mu})] \\ &= C[(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} dx^\beta) \otimes \frac{\partial}{\partial x^\mu} + dx^\beta \otimes (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\mu})] \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} dx^\beta, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\rangle + \left\langle dx^\beta, \Gamma^\rho{}_{\alpha\mu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \right\rangle, \end{aligned} \tag{3.40}$$

por tanto:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} dx^\beta = -\Gamma^\beta{}_{\alpha\mu} dx^\mu. \tag{3.41}$$

La derivada direccional $\nabla_X T$ de un campo $T \in M(1,1)$, tiene la forma:

$$\begin{aligned}\nabla_{X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}} T &= X^\alpha \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \left(T^\gamma{}_\beta \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \otimes dx^\beta \right) = X^\alpha \frac{\partial T^\gamma{}_\beta}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x^\gamma} \otimes dx^\beta \right) \\ &+ X^\alpha T^\gamma{}_\beta \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \right) \otimes dx^\beta + X^\alpha T^\gamma{}_\beta \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \otimes \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} dx^\beta \right) \\ &= X^\alpha \left[\frac{\partial T^\gamma{}_\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \otimes dx^\beta + T^\rho{}_\beta \Gamma^\gamma{}_{\alpha\rho} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \otimes dx^\beta - T^\gamma{}_\rho \Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \otimes dx^\beta \right] \\ &= X^\alpha \left[\frac{\partial T^\gamma{}_\beta}{\partial x^\alpha} + T^\rho{}_\beta \Gamma^\gamma{}_{\alpha\rho} - T^\gamma{}_\rho \Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} \right] \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \otimes dx^\beta \\ &\equiv X^\alpha \left[\nabla_\alpha T^\gamma{}_\beta \right] \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \otimes dx^\beta. \end{aligned} \tag{3.42}$$

notamos que $\left[\nabla_\alpha T^\gamma{}_\beta \right]$ cambia tensorialmente respecto a un cambio de base para ver esto tomamos otra base coordenada y en términos de esta nueva base.

Para una conexión ∇, asociamos la torsión T y la curvatura R de ∇ de la siguiente manera[3]:

$$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M),$$

[3] Alternativamente

$$T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M) : (X, Y) \to T(X, Y),$$

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \tag{3.44}$$

$$R(X,Y)Z := \left(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\right) Z, \tag{3.45}$$

Del lado derecho de estas relaciones, se sigue que la torsión y curvatura satisfacen $\forall\ f \in C^{\infty}$:

$$\alpha)\ T(fX,Y) = T(X,fY) = fT(X,Y), \tag{3.46}$$

$$\beta)\ R(fX,Y)Z = R(X,fY)Z = R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z. \tag{3.47}$$

Para mostrar α) partimos de la definición de $T(X,Y)$ y las propiedades de ∇ (aplicadas a una función $h \in C^{\infty}$), como sigue:

$$\begin{aligned}
&T(fX,Y)h = \nabla_{fX}Y(h) - \nabla_Y fX(h) - [fX,Y](h)\\
&= f\nabla_X Y(h) - Y(f)X(h) - f\nabla_Y X(h) - fXY(h) + Y(f)X(h) + fYX(h)\\
&= fT(X,Y)h,
\end{aligned} \tag{3.48}$$

de manera análoga se verifica que $T(X,fY) = fT(X,Y)$.

Para mostrar (β) partimos de la definición de $R(fX,Y)Z$ y lo aplicamos a $h \in C^{\infty}(M)$ como sigue :

$$\begin{aligned}
&[R(fX,Y)Z]h = \nabla_{fX}(\nabla_Y Z)h - \nabla_Y(\nabla_{fX}Z)h - (\nabla_{[fX,Y]}Z)h\\
&= \nabla_{fX}(\nabla_Y Z)h - Y(f)(\nabla_X Z)h - f\nabla_Y(\nabla_X Z)h\\
&-(\nabla_{fXY}Z)h + (\nabla_{Y(f)X+fYX}Z)h\\
&= f\nabla_X(\nabla_Y Z)h - Y(f)(\nabla_X Z)h - f\nabla_Y(\nabla_X Z)h - f(\nabla_{XY}Z)h\\
&+Y(f)(\nabla_X Z)h + f(\nabla_{YX}Z)h = [fR(X,Y)Z]h,
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M) : (X,Y,Z) \to R(X,Y)Z. \tag{3.43}$$

de manera análoga al cálculo anterior se muestra que:

$$R(X, fY)Z = fR(X,Y)Z \text{ y } R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z. \tag{3.50}$$

3.3 Las formas de conexión.

Consideramos una conexión ∇ arbitraria y sea una carta (U, φ) con la base coordenada correspondiente $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ y su dual $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$. Como hemos visto ∇ induce los símbolos de Christoffel ${\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}$ en U.
Con la ayuda de los ${\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}$ sean ${\omega^\mu}_\alpha$ campos de 1-formas en U definidos a través de:

$${\omega^\mu}_\alpha = {\Gamma^\mu}_{\beta\alpha} dx^\beta, \;\; \mu, \alpha = 1, \ldots, n. \tag{3.51}$$

De esta definición tenemos:

$${\omega^\mu}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\right) = {\Gamma^\mu}_{\beta\alpha} dx^\beta \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\right) = {\Gamma^\mu}_{\beta\alpha} {\delta^\beta}_\rho = {\Gamma^\mu}_{\rho\alpha}$$

entonces :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} = {\omega^\rho}_\beta \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial x^\rho}.$$

Como consecuencia de esta relación vemos que:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y = \nabla_{X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}} \left(Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) &= X^\mu \left[\frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + Y^\nu {\omega^\rho}_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \frac{\partial}{\partial x^\rho}\right] \\ = X^\mu \left[\frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} + Y^\lambda {\omega^\nu}_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\right] \frac{\partial}{\partial x^\nu} \end{aligned} \tag{3.52}$$

y el lado derecho es equivalente a (3.38) pero ahora contiene los n^2 campos de 1-formas ${\omega^\rho}_\nu$ en lugar de las funciones ${\Gamma^\rho}_{\mu\nu}$.

Hasta el momento hemos empleado cartas locales, para dar una representación local de $\nabla_X Y$, pero tal derivada puede representarse a través de la noción de una paralelización.

Definición 3.3.1 : Una paralelización definida en un conjunto $O \subseteq M$ es una colección de n-campos vectoriales $\{X_1, \ldots, X_n\}$ tal que para cada $p \in O$, $\{X_1(p), \ldots, X_n(p)\}$ es una base de $T_p(M)$. Una paralelización define naturalmente n campos de 1-formas $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}$ en $O \subseteq M$ tales que para cada $p \in O$, $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}|_p$ es una base de $T_p^*(M)$, dual de $\{X_1, \ldots, X_n\}|_p$, es decir: $\langle \theta^i, X_j \rangle|_p = \delta^i_j$.

Sea ∇ una conexión y $\{X_1, \ldots, X_n\}$ una paralelización en $O \subseteq M$. Introducimos n^2 1-formas $\omega^\alpha{}_\beta$ a través de:

$$\nabla_{X_\beta} X_\alpha = \omega^\gamma{}_\alpha(X_\beta) X_\gamma \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n \tag{3.53}$$

o más general

$$\nabla_X X_\alpha = \omega^\gamma_\alpha(X) X_\gamma, \; \alpha, \gamma = 1, \ldots, n \tag{3.54}$$

y las llamamos 1-formas de conexión $\omega^\alpha{}_\beta$. A través de las propiedades de ∇ tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X (Y^\beta X_\beta) = X(Y^\beta) X_\beta + Y^\beta \nabla_X X_\beta \\ &= X(Y^\beta) X_\beta + Y^\beta \omega^\alpha{}_\beta(X) X_\alpha = \left[X(Y^\beta) + Y^\kappa \omega^\beta{}_\kappa(X) \right] X_\beta, \end{aligned} \tag{3.55}$$

como $Y^\beta = \theta^\beta(Y) = \left\langle \theta^\beta, Y^\alpha X_\alpha \right\rangle$ tenemos:

$$\nabla_X Y = \left[X(\theta^\beta(Y)) + \theta^\kappa(Y) \omega^\beta{}_\kappa(X) \right] X_\beta. \tag{3.56}$$

Si pensamos que $\{X_1, \dots, X_n\} = \left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ para algún (U, φ), entonces:

$$X(\theta^\beta(Y)) = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(dx^\beta(Y)\right) = X^\alpha \frac{\partial Y^\beta}{\partial x^\alpha}$$

y por tanto (3.56) se reduce a:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \left[X(dx^\beta(Y)) + dx^\kappa(Y)\omega^\beta{}_\kappa(X)\right] \frac{\partial}{\partial x^\beta} \\ &= \left[X(Y^\beta) + Y^\kappa \omega^\beta{}_\kappa(X)\right] \frac{\partial}{\partial x^\beta} \end{aligned} \tag{3.57}$$

la cual es equivalente a (3.38) y (3.52).

Como consecuencia de las propiedades (3.46), (3.47) la torsión T y la curvatura R de una conexión definen el tensor $\hat{T}$ y $\hat{R}$ a través de:

$$\begin{aligned} &\hat{T} : T_p^*(M) \times T_p(M) \times T_p(M) \times \to R \\ &(X, Y, \omega) \to \hat{T}(X, Y, \omega) = \langle \omega, T(X, Y) \rangle \end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned} &\hat{R} : T_p^*(M) \times T_p(M) \times T_p(M) \times T_p(M) \times \times \to R \\ &(X, Y, Z, \omega) \to \hat{R}(X, Y, Z, \omega) = \langle \omega, R(X, Y)Z \rangle \,, \end{aligned} \tag{3.59}$$

De la primera definición:

$$T : T_p(M) \times T_p(M) \to T_p(M) : (X, Y) \to T(p)(X, Y) \in T_p(M). \tag{3.60}$$

y respecto a $\{X_1(x), \dots, X_n(x)\}$, tenemos:

$$T(p)(X, Y) = T^\alpha(X, Y) X_\alpha \; {}^4$$

donde $T^\alpha(X, Y)$ $\alpha = 1, \dots, n$ formas de torsión, obedecen:

$$T^\alpha(X, Y) := \langle \theta^\alpha, T(X, Y) \rangle \equiv \langle \theta^\alpha, \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \rangle \,. \tag{3.61}$$

[4] de aquí en adelante por simplicidad removemos la dependencia explicita de $p \in O \subseteq M$.

Usando (3.56) en el lado derecho, tenemos:

$$T(X,Y) = \left[X\theta^{\alpha}(Y) - Y\theta^{\alpha}(X) + \theta^{k}(Y)\omega^{\alpha}_{\ k}(X) - \theta^{k}(X)\omega^{\alpha}_{\ k}(Y)\right] X_{\alpha} - [X,Y]\,, \tag{3.62}$$

sustituyendo (3.62) en (3.61) obtenemos:

$$\begin{aligned} &T^{\alpha}(X,Y) = \langle \theta^{\alpha}, T(X,Y)\rangle = X\langle \theta^{\alpha}, Y\rangle - Y\langle \theta^{\alpha}, X\rangle - \langle \theta^{\alpha}, [X,Y]\rangle \\ &+\omega^{\alpha}_{\ k}(X)\theta^{k}(Y) - \omega^{\alpha}_{\ k}(Y)\theta^{k}(X), \end{aligned} \tag{3.63}$$

usando la identidad (ver 2):

$$d\omega(X,Y) = [X\langle\omega, Y\rangle - Y\langle\omega, X\rangle - \langle\omega, [X,Y]\rangle]\,, \tag{3.64}$$

se sigue:

$$T^{\alpha}(X,Y) = \left[d\theta^{\alpha} + \omega^{\alpha}_{\ k}\wedge\theta^{k}\right](X,Y)$$

y debido que (X,Y) son arbitrarios:

$$T^{\alpha} = \left[d\theta^{\alpha} + \omega^{\alpha}_{\ k}\wedge\theta^{k}\right] \quad \alpha = 1,\ldots,n,$$

por tanto

$$T = T^{\alpha}X_{\alpha} = \left[d\theta^{\alpha} + \omega^{\alpha}_{\ k}\wedge\theta^{k}\right] X_{\alpha}, \tag{3.65}$$

la relación:

$$T^{\alpha} = \left[d\theta^{\alpha} + \omega^{\alpha}_{\ k}\wedge\theta^{k}\right] \tag{3.66}$$

es la primera ecuación de estructra de Cartán.

Si ∇ es libre de torsión, es decir $T = 0$ entonces la primera ecuación de estructura se escribe:

$$d\theta^{\alpha} + \omega^{\alpha}_{\ k} \wedge \theta^{k} = 0, \tag{3.67}$$

la relación (3.65) define la torsión T en términos de las 2-formas de torsión T^{α}, $\alpha = 1, \ldots, n$ y a su vez T^{α} estan dadas en términos de $\omega^{\alpha}_{\ k}$ y la paralelización local.

Tenemos un análisis similar para la curvatura, primero definimos las formas de curvatura a través de:

$$\begin{aligned} \Omega^{i}_{\ j}(X,Y) &= \left\langle \theta^{i}, R(X,Y)X_j \right\rangle \\ &\equiv \left\langle \theta^{i}, \nabla_X \nabla_Y X_j - \nabla_Y \nabla_X X_j - \nabla_{[X,Y]} X_j \right\rangle \end{aligned} \tag{3.68}$$

Para evaluar el lado derecho, calculamos $\nabla_X \nabla_Y Z$, $\nabla_Y \nabla_X Z$ y $\nabla_{[X,Y]} Z$ respecto a $\{X_1, \ldots, X_n\}$:

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X \left[\left(Y(\theta^{i}(Z)) + \theta^{\kappa}(Z)\omega^{i}_{\ \kappa}(Y) \right) X_i \right] \\ &= X\left(Y(\theta^{i}(Z)) \right) X_i + X\left(\theta^{\kappa}(Z)\omega^{i}_{\ \kappa}(Y) \right) X_i \\ &+ \left[Y(\theta^{i}(Z)) + \theta^{\kappa}(Z)\omega^{i}_{\ \kappa}(Y) \right] \nabla_X X_i, \end{aligned} \tag{3.69}$$

donde hemos hecho uso de las propiedades de ∇ y de (3.56). Usando la relación $\nabla_X X_i = \omega^{\mu}_{\ i}(X) X_{\mu}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= X\left(Y(\theta^{i}(Z)) \right) X_i + X\left(\theta^{\kappa}(Z)\omega^{i}_{\ \kappa}(Y) \right) X_i \\ &+ \left[Y(\theta^{i}(Z)) + \theta^{\kappa}(Z)\omega^{i}_{\ \kappa}(Y) \right] \omega^{\mu}_{\ i}(X) X_{\mu} \end{aligned}$$

$$= XY[(\theta^i(Z))]X_i + X\left(\omega^i{}_\kappa(Y)\right)\theta^\kappa(Z)X_i + \omega^i{}_\kappa(Y)X\left(\theta^\kappa(Z)\right)X_i$$
$$+Y[(\theta^i(Z))]\omega^\mu{}_i(X)X_\mu + \theta^\kappa(Z)\omega^i{}_\kappa(Y)\omega^\mu{}_i(X)X_\mu. \tag{3.70}$$

De manera análoga a la igualdad anterior hacemos el cálculo $\nabla_Y\nabla_X Z$ y formamos la diferencia $\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z$ y notamos que usando la base coordenada el término:

$$\begin{aligned}
&XY\theta^i(Z)X_i - YX\theta^i(Z)X_i = \left(XY\theta^i(Z) - YX\theta^i(Z)\right)X_i\\
&= \left(XY^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\theta^i(Z) - YX^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\theta^i(Z)\right)X_i\\
&= \left(X^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(Y^\mu\frac{\partial\theta^i(Z)}{\partial x^\mu}\right) - Y^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(X^\mu\frac{\partial\theta^i(Z)}{\partial x^\mu}\right)\right)X_i\\
&= \left[X^\alpha\frac{\partial Y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\theta^i(Z)}{\partial x^\mu} + Y^\mu X^\alpha\frac{\partial^2\theta^i(Z)}{\partial x^\alpha\partial x^\mu} - Y^\alpha\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\theta^i(Z)}{\partial x^\mu} - Y^\alpha X^\mu\frac{\partial^2\theta^i(Z)}{\partial x^\alpha\partial x^\mu}\right]X_i\\
&= \left[\left(X^\alpha\frac{\partial Y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + Y^\mu X^\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial x^\mu} - Y^\alpha\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\mu} - Y^\alpha X^\mu\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial x^\mu}\right)\theta^i(Z)\right]X_i.
\end{aligned}$$

Por otro lado el término:

$$\begin{aligned}
&\omega^i{}_\kappa(Y)X\theta^\kappa(Z)X_i - \omega^i{}_\kappa(X)Y\theta^\kappa(Z)X_i\\
&= \omega^i{}_\kappa(Y)\left(X^\mu\frac{\partial\theta^\kappa(Z)}{\partial x^\mu}\right)X_i - \omega^i{}_\kappa(X)\left(Y^\mu\frac{\partial\theta^\kappa(Z)}{\partial x^\mu}\right)X_i
\end{aligned} \tag{3.71}$$

y además

$$\nabla_{[X,Y]}Z = [X,Y]\theta^j(Z)X_j + \omega^j{}_i([X,Y])\theta^i(Z)X_j,$$

usando nuevamente la base coordenada

$$\nabla_{[X,Y]}Z = X^\alpha\frac{\partial Y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\theta^j(Z)}{\partial x^\mu}X_j + Y^\mu X^\alpha\frac{\partial^2\theta^j(Z)}{\partial X^\alpha\partial x^\mu}X_j$$

$$-Y^\mu \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \theta^j(Z)}{\partial x^\alpha}X_j - Y^\mu X^\alpha \frac{\partial^2 \theta^j(Z)}{\partial x^\alpha \partial x^\mu}X_j$$

$$= \left[X^\alpha \frac{\partial Y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \theta^j(Z)}{\partial x^\mu} - Y^\mu \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \theta^j(Z)}{\partial x^\alpha}\right] X_j. \tag{3.72}$$

Entonces:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{3.73}$$
$$= \left\{X\left\langle \omega^j{}_l, Y\right\rangle - Y\left\langle \omega^j{}_l, X\right\rangle - \omega^j{}_l([X,Y]) + \omega^j{}_k(X)\omega^k{}_l(Y) - \omega^j{}_k(Y)\omega^k{}_l(X)\right\}\theta^l(Z)X_j$$

Usando la identidad (3.64) en (3.73) tenemos:

$$R(X,Y)Z = \left(d\omega^j{}_l + \omega^j{}_k \wedge \omega^k{}_l\right)(X,Y)\theta^l(Z)X_j, \tag{3.74}$$

entonces:

$$\left\langle \theta^j, R(X,Y)Z\right\rangle = \left(d\omega^j{}_l + \omega^j{}_k \wedge \omega^k{}_l\right)(X,Y)\theta^l(Z). \tag{3.75}$$

Tomando Z como un elemento de la paralelización y recordando la definición de las formas de curvatura:

$$R(X,Y)X_j = \Omega^i{}_j(X,Y)X_i, \tag{3.76}$$

tenemos de (3.75) para $Z = X_i$:

$$\left\langle \theta^j, \Omega^\alpha{}_i(X,Y)X_\alpha\right\rangle = (d\omega^\alpha{}_i + \omega^\alpha{}_k \wedge \omega^k{}_i)(X,Y)\delta^j{}_\alpha, \tag{3.77}$$

de la cual se obtiene:

$$\Omega^i{}_j = d\omega^i{}_j + \omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j \tag{3.78}$$

esta es la segunda ecuación de estructura de Cartán.

3.4 Soluciones de las ecuaciones de estructura de Cartán

Teorema 3.4.2 Sea (M, g, ∇) una variedad con ∇ conexión de Levi-Civita. Dada la paralelización, los coeficientes de conexión ${\omega^i}_j$ y las formas de curvatura ${\Omega^i}_j$ en términos de las componentes de g y $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}$, son únicamente definidos.

Demostración: Cuando $T = 0$, las ecuaciones de estructura de Cartán, tienen la forma:

$$d\theta^i + {\omega^i}_k \wedge \theta^k = 0, \tag{3.79}$$

$$d{\omega^i}_j + {\omega^i}_k \wedge {\omega^k}_j = {\Omega^i}_j. \tag{3.80}$$

Expandiendo $d\theta^i$ en términos de los elementos $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}$, tenemos:

$$d\theta^i = -\frac{1}{2}{C^i}_{kl}\theta^k \wedge \theta^l, \;\; {C^i}_{kl} = -{C^i}_{lk}. \tag{3.81}$$

Por otro lado, de la compatibilidad de g con ∇, tenemos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} Xg(X_i, X_k) &= g(\nabla_X X_i, X_k) + g(X_i, \nabla_X X_k) \\ &= g({\omega^l}_i(X)X_l, X_k) + g(X_i, {\omega^l}_k(X)X_l) \\ &= {\omega^l}_i(X)g(X_l, X_k) + {\omega^l}_k(X)g(X_i, X_l) \\ &= {\omega^l}_i(X)g_{lk} + {\omega^l}_k(X)g_{il} = \omega_{ki}(X) + \omega_{ik}(X) \end{aligned}$$

en donde hemos definido:

$$g_{ik} = g(X_i, X_k) \tag{3.82}$$

las componentes de g al respecto de la paralelización $\{X_1, \ldots, X_n\}$ y bajamos índices en ω^α_β, usando (3.82).

Tomando $X = X_j$, tal relación se puede escribir como:

$$g_{ik,j} = \omega_{ki} + \omega_{ik}, \;\; g_{ik,j} \equiv X_j g_{ik} = X_j g(X_i.X_k). \tag{3.83}$$

Dadas las 1-formas de conexión ${\omega^i}_k$, introducimos ${\hat{\Gamma}^i}_{kl}$ a través de:

$$ {\omega^i}_k = {\hat{\Gamma}^i}_{lk} \theta^l, \tag{3.84}$$

entonces:

$$g_{il} {\omega^i}_k = \omega_{lk} = g_{il} {\hat{\Gamma}^i}_{mk} \theta^m. \tag{3.85}$$

La ecuación (3.83), se puede escribir como:

$$g_{ik,j} = \left(g_{lk} {\hat{\Gamma}^l}_{mi} + g_{li} {\hat{\Gamma}^l}_{mk} \right) \theta^m \tag{3.86}$$

tomando permutaciones cíclicas se tiene:

$$g_{kj,i} = \left(g_{lk} {\hat{\Gamma}^l}_{mj} + g_{lj} {\hat{\Gamma}^l}_{mk} \right) \theta^m, \quad g_{ji,k} = \left(g_{li} {\hat{\Gamma}^l}_{mj} + g_{lj} {\hat{\Gamma}^l}_{mi} \right) \theta^m \tag{3.87}$$

entonces:

$$\begin{aligned} & g_{kj,i} + g_{ji,k} - g_{ik,j} = g_{lk} {\hat{\Gamma}^l}_{mj} + g_{lj} {\hat{\Gamma}^l}_{mk} \\ & + g_{li} {\hat{\Gamma}^l}_{mj} + g_{lj} {\hat{\Gamma}^l}_{mi} - g_{lk} {\hat{\Gamma}^l}_{mi} - g_{li} {\hat{\Gamma}^l}_{mk} \\ & = g_{lk} ({\hat{\Gamma}^l}_{mj} - {\hat{\Gamma}^l}_{mi}) + g_{lj} ({\hat{\Gamma}^l}_{mk} + {\hat{\Gamma}^l}_{mi}) \\ & + g_{li} ({\hat{\Gamma}^l}_{mj} - {\hat{\Gamma}^l}_{mk}). \end{aligned} \tag{3.88}$$

Regresamos a (3.79) y sustituimos (3.81) y la representación de $\omega^i{}_k$ dada por (3.84), obtenemos:

$$\begin{aligned} d\theta^i + \omega^i{}_k \wedge \theta^k &= -\frac{1}{2}C^i{}_{kl}\theta^k \wedge \theta^l + \hat{\Gamma}^i{}_{\lambda\nu}\theta^\lambda \wedge \theta^\nu \\ &= -\frac{1}{2}C^i{}_{kl}\theta^k \wedge \theta^l + \frac{1}{2}\left(\hat{\Gamma}^i{}_{\lambda\nu} + \hat{\Gamma}^i{}_{\nu\lambda}\right)\theta^\lambda \wedge \theta^\nu + \frac{1}{2}\left(\hat{\Gamma}^i{}_{\lambda\nu} - \hat{\Gamma}^i{}_{\lambda\nu}\right)\theta^\lambda \wedge \theta^\nu \\ &= -\frac{1}{2}C^i{}_{kl}\theta^k \wedge \theta^l + \hat{\Gamma}^i{}_{[\nu\lambda]}\theta^\lambda \wedge \theta^\nu = 0 \end{aligned} \tag{3.89}$$

entonces:

$$\hat{\Gamma}^l_{\lambda\nu} - \hat{\Gamma}^l_{\nu\lambda} = C^l{}_{\lambda\nu} \tag{3.90}$$

y esta relación nos especifica la parte antisimétrica de los $\hat{\Gamma}^i{}_{\lambda\nu}$. Por otro lado de (3.88), tenemos:

$$\begin{aligned} & g_{kj,i} + g_{ji,k} - g_{ik,j} = g_{lk}(C^l_{ji}) + g_{lj}(\hat{\Gamma}^l{}_{mk} + \hat{\Gamma}^l{}_{mi}) \\ & + g_{li}(C^l_{jk}), \end{aligned} \tag{3.91}$$

contrayendo esta ecuación con g^{lp} se tiene:

$$\hat{\Gamma}^l{}_{km} + \hat{\Gamma}^l{}_{im} = g^{lp}(g_{kj,i} + g_{ji,k} - g_{ik,j}) - g^{lp}g_{lk}(C^l_{ji}) - g^{lp}g_{li}(C^l_{jk}) \tag{3.92}$$

y esta relación define la parte simétrica de $\hat{\Gamma}^i{}_{\lambda\nu}$.

De las relaciones (3.90) y (3.92), tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^i{}_{kl} &= \frac{1}{2}(\hat{\Gamma}^i{}_{kl} + \hat{\Gamma}^i{}_{lk}) + \frac{1}{2}(\hat{\Gamma}^i{}_{kl} - \hat{\Gamma}^i{}_{lk}) \\ &= \frac{1}{2}C^i{}_{kl} + \end{aligned} \tag{3.93}$$

Esta relación define a través de:

$$\omega^i_j = \hat{\Gamma}^i{}_{kj}\theta^k \tag{3.94}$$

las 1-formas de conexión como funciones de las componentes $g_{ij} = g(X_i, X_j)$ de g y los coeficientes de expansión $C^i{}_{jk} = -C^i{}_{kj}$ definidos únicamente a través de (3.81).

Consideremos las formas de curvatura $\Omega^i{}_j$ definidas por la segunda ecuación de estructura de Cartán (3.80). Debido a $\omega^i{}_j = \hat{\Gamma}^i{}_{kj}\theta^k$, tenemos:

$$d\omega^i{}_j = d(\hat{\Gamma}^i{}_{kj}) \wedge \theta^k + \hat{\Gamma}^i{}_{kj} d\theta^k. \tag{3.95}$$

Para dar una representación conveniente de $d\hat{\Gamma}^i{}_{kj}$ empezamos con:

$$\begin{aligned} d\hat{\Gamma}^i{}_{kj} &= \frac{\partial \hat{\Gamma}^i{}_{kj}}{\partial x^\mu} dx^\mu = \frac{\partial \hat{\Gamma}^i{}_{kj}}{\partial x^\mu} \delta^\mu{}_\nu dx^\nu = \frac{\partial \hat{\Gamma}^i{}_{kj}}{\partial x^\mu} (a)^\mu{}_\rho (a^{-1})^\rho{}_\nu dx^\nu \\ &= (a)^\mu{}_\rho \frac{\partial \hat{\Gamma}^i{}_{kj}}{\partial x^\mu} (a^{-1})^\rho{}_\nu dx^\nu = X_\rho(\hat{\Gamma}^i{}_{kj})\theta^\rho, \end{aligned} \tag{3.96}$$

en donde $a(= a^\rho{}_\nu)$ es la matriz no singular que relaciona la paralelización $\{X_1, \ldots, X_n\}$ con $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$.

Entonces:

$$\begin{aligned} d\omega^i{}_j &= X_\rho(\hat{\Gamma}^i{}_{kj})\theta^\rho \wedge \theta^k + \hat{\Gamma}^i{}_{kj} d\theta^k \\ &= X_\rho(\hat{\Gamma}^i{}_{kj})\theta^\rho \wedge \theta^k - \frac{1}{2}\hat{\Gamma}^i{}_{kj} C^k{}_{\rho\mu} \theta^\rho \wedge \theta^\mu \\ &= \frac{1}{2}\left[X_\rho \hat{\Gamma}^i{}_{kj} - X_j \hat{\Gamma}^i{}_{k\rho} - \hat{\Gamma}^i{}_{\alpha j} C^\alpha{}_{\rho k}\right] \theta^\rho \wedge \theta^k \end{aligned} \tag{3.97}$$

Esta fórmula con $\omega^i{}_j = \hat{\Gamma}^i{}_{kj}\theta^k$ y notando:

$$\begin{aligned} \omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j &= (\hat{\Gamma}^i{}_{\rho k}\theta^\rho) \wedge (\hat{\Gamma}^k{}_{\mu j}\theta^\mu) \\ &= \hat{\Gamma}^i{}_{\rho k}\hat{\Gamma}^k{}_{\mu j}\theta^\rho \wedge \theta^\mu = \frac{1}{2}\left(\hat{\Gamma}^i{}_{\rho k}\hat{\Gamma}^k{}_{\mu j} - \hat{\Gamma}^i{}_{\mu k}\hat{\Gamma}^k{}_{\rho j}\right)\theta^\rho \wedge \theta^\mu, \end{aligned} \tag{3.98}$$

tenemos la siguiente forma para las formas de curvatura $\Omega^i{}_j$:

$$\Omega^i{}_j = d\omega^i{}_j + \omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j$$

$$= \frac{1}{2}\left[\hat{\Gamma}^i{}_{bj,\alpha} - \hat{\Gamma}^i{}_{\alpha j,b} - \hat{\Gamma}^i{}_{kj}C^k{}_{\alpha b} + \hat{\Gamma}^i{}_{\alpha l}\hat{\Gamma}^l{}_{bj} - \hat{\Gamma}^i{}_{bl}\hat{\Gamma}^l{}_{\alpha j}\right]\theta^\alpha \wedge \theta^b$$

$$= \frac{1}{2}A^i{}_{j\alpha b}\theta^\alpha \wedge \theta^b = A^i{}_{j\alpha b}\theta^\alpha \wedge \theta^b,\ \alpha < b. \tag{3.99}$$

Por otro lado, de la definición:

$$\Omega^i{}_j(X,Y) = \left\langle \theta^i, R(X,Y)X_j \right\rangle \tag{3.100}$$

eligiendo $X = X_k$ y $Y = X_k$, tenemos:

$$\Omega^i{}_j(X_k, X_l) = \left\langle \theta^i, R(X_k, X_l)X_j \right\rangle = R^i{}_{jkl} \tag{3.101}$$

en donde $R^i{}_{jkl}$ son las componentes del tensor de Riemann respecto a $\{X_1, \ldots, X_n\}$, de (3.99) y (3.101) se tiene:

$$\Omega^i{}_j = \frac{1}{2}R^i{}_{jkl}\theta^k \wedge \theta^l = R^i{}_{jkl}\theta^k \wedge \theta^l,\ k < l. \tag{3.102}$$

Se sigue:

$$\begin{aligned} R^i{}_{j\alpha b} &= \hat{\Gamma}^i{}_{\alpha j,b} - \hat{\Gamma}^i{}_{\alpha j,b} - \hat{\Gamma}^i{}_{lj}C^l_{\alpha b} \\ &+ \hat{\Gamma}^i{}_{\alpha l}\hat{\Gamma}^l{}_{bj} - \hat{\Gamma}^i{}_{bl}\hat{\Gamma}^l{}_{\alpha j} \end{aligned} \tag{3.103}$$

En suma las ecuaciones de estructura de Cartán con $\nabla g = 0$ y $T = 0$ definen las uno formas de conexión $\omega^i{}_j$ y $\Omega^i{}_j$, en términos de $g_{ij} = g(X_i, X_j)$ y $C^i{}_{kl} = -C^i{}_{lk}$.

3.5 Evaluación de la curvatura de métricas estáticas y esféricamente simétricas.

Considerámos un espacio tiempo (M, g, ∇) con dim$M = 4$, g una métrica de Lorentz y la conexión de Levi-Civita. Nuestro interés es evaluar la curvatura de una familia de métricas estáticas y esféricamente simétricas usando las ecuaciones de estructura de Cartán. Estaticidad y simétria esférica implican que existe una carta (U, φ) con funciones coordenadas $\{t, r, \theta, \varphi\}$ tal que las componentes coordenadas de g toman la forma:

$$g = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{3.104}$$

en donde asumimos que $r > 0$, $f(r) > 0$, $h(r) > 0$ y las coordenadas (θ, φ) toman los valores usuales. Asociado a tal carta elegimos la siguiente paralelización y su dual:

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial}{\partial t}, X_1 = \frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial r}, X_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, X_3 = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \tag{3.105}$$

$$\theta^0 = \sqrt{f}dt,\ \theta^1 = \sqrt{h}dr,\ \theta^2 = rd\theta,\ \theta^3 = r\sin\theta d\varphi, \tag{3.106}$$

Con esta elección la métrica g toma la forma:

$$\begin{aligned} g &= -\theta^0 \otimes \theta^0 + \theta^1 \otimes \theta^1 + \theta^2 \otimes \theta^2 + \theta^3 \otimes \theta^3 \\ &= \eta_{\alpha\beta}\theta^\alpha \otimes \theta^\beta. \end{aligned} \tag{3.107}$$

Para evaluar la curvatura de g usando el método de Cartán necesitamos pimero conocer las 1-formas de conección $\omega^i{}_j$ y las 2-formas de curvatura $\Omega^i{}_j$, $i, j = 0, 1, 2, 3$. Aún podemos usar las fórmulas de la sección previa, es más fácil resolver las ecuaciones de estructura directamente respecto a una paralelización $\{X_1, \ldots, X_n\}$, especificada por (3.105). Primero debido a que en nuestra hipótesis ∇ y g son compatibles, tenemos:

$$\begin{aligned} &\nabla_{X_k}[g(X_i, X_j)] = (\nabla_{X_k} g)(X_i, X_j) + g(\nabla_{X_k} X_i, X_j) + g(X_i, \nabla_{X_k} X_j) \\ &= g(\omega^\alpha{}_i(X_k)X_\alpha, X_j) + g(X_i, \omega^\alpha{}_j(X_k)X_\alpha) \\ &= \omega^\alpha{}_i(X_k)\eta_{\alpha j} + \omega^\alpha{}_j(X_k)\eta_{i\alpha} = \omega^\alpha{}_i\eta_{\alpha j} + \omega^\alpha{}_j\eta_{i\alpha} \end{aligned} \tag{3.108}$$

$$\eta_{\alpha j}\omega^{\alpha}{}_{i} + \eta_{i\alpha}\omega^{\alpha}{}_{j} = 0, \tag{3.109}$$

donde:

$$\eta_{\alpha j} = g(X_\alpha, X_j) = \left\{\begin{array}{lr} -1 & \alpha = j = 0, \\ 1 & \alpha = j = 1,2,3, \\ 0 & \alpha \neq j. \end{array}\right\} \tag{3.110}$$

Estas condiciones tambien se pueden escribir como:

$$\eta_{\alpha j}\omega^{\alpha}{}_{i} + \eta_{i\alpha}\omega^{\alpha}{}_{j} \equiv \omega_{ji} + \omega_{ij} = 0 \Rightarrow \omega_{ij} = -\omega_{ji} \tag{3.111}$$

que expresan una simetría de los ω_{ij}.

Como $T = 0$ podemos tomar $\Theta^i = 0$ entonces la primera ecuación de estructura de Cartán toma la forma:

$$d\theta^i = -\omega^{i}{}_{j} \wedge \theta^j, \; i,j = 0,1,2,3. \tag{3.112}$$

La utilidad del método de Cartán para nuestro problema recae en esta primera ecuación de estructura ya que podemos determinar $\omega^{i}{}_{j}$ apartir de (3.106). Por la elección de esta paralelización y $\{\theta^0, \ldots, \theta^3\}$, evaluamos directamente $\{d\theta^0, \ldots, d\theta^3\}$ y tenemos las siguientes 4 ecuaciones:

1) $\dfrac{f'}{2f\sqrt{h}}\theta^1 \wedge \theta^0 = -(\omega^{0}{}_{0} \wedge \theta^0 + \omega^{0}{}_{1} \wedge \theta^1 + \omega^{0}{}_{2} \wedge \theta^2 + \omega^{0}{}_{3} \wedge \theta^3),$

2) $0 = -(\omega^{1}{}_{0} \wedge \theta^0 + \omega^{1}{}_{1} \wedge \theta^1 + \omega^{1}{}_{2} \wedge \theta^2 + \omega^{1}{}_{3} \wedge \theta^3),$

3) $\dfrac{1}{r\sqrt{h}}\theta^1 \wedge \theta^2 = -(\omega^{2}{}_{0} \wedge \theta^0 + \omega^{2}{}_{1} \wedge \theta^1 + \omega^{2}{}_{2} \wedge \theta^2 + \omega^{2}{}_{3} \wedge \theta^3),$

4) $\dfrac{1}{r\sqrt{h}}\theta^1 \wedge \theta^3 + \dfrac{\cos\theta}{r\sin\theta}\theta^2 \wedge \theta^3 = -(\omega^{3}{}_{0} \wedge \theta^0 + \omega^{3}{}_{1} \wedge \theta^1 + \omega^{3}{}_{2} \wedge \theta^2 + \omega^{3}{}_{3} \wedge \theta^3).$

Del análisis anterior, sabemos que estas ecuaciones definen únicamente los $\omega^{i}{}_{j}$. Para resolver estas 4 ecuaciones usamos la simetría de las 1-formas de conexión ${\omega^i}_j$ y el hecho de que estas ecuaciones son acopladas. Por ejemplo de la ecuación 1) tenemos lo siguiente:

$$ {\omega^0}_2 = A_0\theta^2,\ {\omega^0}_3 = A_0'\theta^3, \tag{3.113} $$

con A_0 y A_0' funciones. De la ecuación 2) se sigue que:

$$ {\omega^1}_0 = B_1\theta^0,\ {\omega^1}_1 = B_1'\theta^1,\ {\omega^1}_2 = B_1''\theta^2,\ {\omega^1}_3 = B_1'''\theta^3,\ \text{con } B_1'\text{s funciones.} $$

De la ecuación 3) se tiene:

$$ {\omega^2}_0 = C_2\theta^0,\ {\omega^2}_3 = C_2'\theta^3,\ \text{con } C_2'\text{s funciones.} \tag{3.114} $$

De igual forma de 4), se tiene:

$$ {\omega^3}_0 = D_3\theta^0,\ \text{con } B_3 \text{ función.} \tag{3.115} $$

También de (3.111) se tiene:

$$ \begin{aligned} &{\omega^0}_0 = {\omega^1}_1 = {\omega^2}_2 = {\omega^3}_3 = 0, \\ &{\omega^1}_0 = {\omega^0}_1,\ {\omega^2}_0 = {\omega^0}_2,\ {\omega^3}_0 = {\omega^0}_3, \\ &{\omega^1}_2 = -{\omega^2}_1,\ {\omega^1}_3 = -{\omega^3}_1,\ {\omega^2}_3 = -{\omega^3}_2. \end{aligned} $$

Con estas simetrías podemos obtener las funciones A, B, C y D:

$$ A_0 = A_0' = B_1' = C_2 = D_3 = 0, \tag{3.116} $$

tomando en cuenta estos resultados, la ecuacuación 1) se reduce a:

$$ \frac{f'}{2f\sqrt{h}}\theta^1 \wedge \theta^0 = -{\omega^0}_1 \wedge \theta^1, $$

por comparación obtenemos: ${\omega^0}_1 = \frac{f'}{2f\sqrt{h}}\theta^0$. Continuando este proceso se obtienen las siguientes 16 uno-formas de conexión ${\omega^i}_j$:

$$\omega_0^3 = \omega_3^0 = 0 \qquad \omega_0^0 = \omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0 \tag{3.117}$$

$$\omega_0^2 = \omega_2^0 = 0 \qquad \omega_0^1 = \omega_1^0 = \frac{f'}{2f\sqrt{h}}\theta^0 \tag{3.118}$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{r\sqrt{h}}\theta^2 \qquad \omega_2^1 = -\frac{1}{r\sqrt{h}}\theta^2 \tag{3.119}$$

$$\omega_3^1 = -\frac{1}{r\sqrt{h}}\theta^3 \qquad \omega_1^3 = \frac{1}{r\sqrt{h}}\theta^3 \tag{3.120}$$

$$\omega_2^3 = \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}\theta^3 \qquad \omega_3^2 = -\frac{\cos\theta}{r\sin\theta}\theta^3 \tag{3.121}$$

Con estas 1-formas de conexión y la segunda ecuación de estructura de Cartán:

$$d{\omega^i}_j = -({\omega^i}_k \wedge \omega_j^k) + {\Omega^i}_j$$

obtenemos las 16 2-formas de conexión ${\Omega^i}_j$ siguientes:

$$\begin{aligned}
{\Omega^0}_0 &= {\Omega^1}_1 = 0 & {\Omega^2}_2 &= {\Omega^3}_3 = 0\\
{\Omega^1}_0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{fh} - \frac{f'^2}{2f^2h} - \frac{f'h'}{2fh^2}\right)\theta^1\wedge\theta^0 & {\Omega^0}_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{fh} - \frac{f'^2}{2f^2h} - \frac{f'h'}{2fh^2}\right)\theta^1\wedge\theta^0\\
{\Omega^2}_0 &= -\frac{f'}{2rfh}\theta^0\wedge\theta^2 & {\Omega^0}_2 &= -\frac{f'}{2rfh}\theta^0\wedge\theta^2\\
{\Omega^3}_0 &= -\frac{f'}{2rfh}\theta^0\wedge\theta^3 & {\Omega^0}_3 &= -\frac{f'}{2rfh}\theta^0\wedge\theta^3\\
{\Omega^2}_1 &= -\frac{h'}{2rh^2}\theta^1\wedge\theta^2 & {\Omega^1}_2 &= \frac{h'}{2rh^2}\theta^1\wedge\theta^2\\
{\Omega^3}_1 &= -\frac{h'}{2rh^2}\theta^1\wedge\theta^3 & {\Omega^1}_3 &= \frac{h'}{2rh^2}\theta^1\wedge\theta^3\\
{\Omega^3}_2 &= -\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{h}\right)\theta^2\wedge\theta^3 & {\Omega^2}_3 &= \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{h}\right)\theta^2\wedge\theta^3
\end{aligned}$$

y notamos la siguiente relación de simetría:

$$\Omega^i{}_j = d\omega^i{}_j + (\omega^i{}_k \wedge \omega^k_j) = -d\omega^j{}_i - (\omega^j{}_k \wedge \omega^k{}_i) \tag{3.122}$$

$$\Omega^i{}_j = -\Omega^j{}_i. \tag{3.123}$$

Por otra parte sabemos que las componentes del tensor de curvatura respecto de la paralelización local (3.105) y (3.106) estan dadas como sigue:

$$R^i{}_{jkl} = \left\langle \theta^i, R(X_j, X_k)X_l \right\rangle \tag{3.124}$$

en donde $R^i{}_{jkl}$ son las componentes de R al respecto de la base definida por la paralelización $\{X_0, \ldots, X_n\}$ y de la sección anterior sabemos que:

$$\Omega^i{}_j = \frac{1}{2} R^i{}_{jkl} \theta^k \wedge \theta^l = R^i{}_{jkl} \theta^k \wedge \theta^l, \; k < l \tag{3.125}$$

comparando en (3.125) obtenemos $R^i{}_{jkl}$ que son las componentes del tensor de curvatura al respecto de la base ortonormal. Para evaluar sus componentes al respecto de la base coordenada, usamos las relaciones $R^i{}_{jkl} = \langle \theta^i, R(X_k, X_j) \rangle$ y hacemos uso de (3.105) y (3.106).

Por ejemplo

$$\begin{aligned} R^0{}_{110} &= \left\langle \theta^0, R(X_1, X_0)X_1 \right\rangle \\ &= \left\langle \sqrt{f} dt, R(\frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial}{\partial t}) \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = \frac{1}{h} R^t{}_{rrt} \end{aligned} \tag{3.126}$$

en donde $R^t{}_{rrt}$ son las componentes coordenadas de Riemann.

$$R^\theta{}_{t\theta t} = \frac{f'}{4rh} \qquad R^\theta{}_{\varphi\theta\varphi} = \frac{\sin^2\theta}{2}\left(1 - \frac{1}{h}\right)$$

$$R^\theta{}_{rr\theta} = -\frac{h'}{4rh} \qquad R^\varphi{}_{\theta\theta\varphi} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{h}\right)$$

$$\begin{aligned} R^{\varphi}{}_{t\varphi t} &= \frac{f'}{4rh} & R^{\varphi}{}_{rr\varphi} &= -\frac{h'}{4rh} \\ R^{t}{}_{rrt} &= \frac{1}{4}\left(\frac{f''}{f} - \frac{f'^2}{2f^2} - \frac{f'h'}{2fh}\right) & R^{t}{}_{\theta t\theta} &= -\frac{rf'}{4fh} \\ R^{r}{}_{trt} &= -\frac{1}{4}\left(\frac{f''}{h} - \frac{f'^2}{2fh} - \frac{f'h'}{2h^2}\right) & R^{t}{}_{\varphi t\varphi} &= -\frac{rf'\sin^2\theta}{4fh} \\ R^{r}{}_{\theta r\theta} &= \frac{rh'}{4h^2} & R^{r}{}_{\varphi r\varphi} &= -\frac{rh'\sin^2\theta}{4h^2} \end{aligned} \tag{3.127}$$

Con estas componentes del tensor de curvatura calculamos las componentes la curvatura de Ricci $R_{\alpha\alpha}$ que no son cero:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= R^{t}{}_{ttt} + R^{\theta}{}_{t\theta t} + R^{\varphi}{}_{t\varphi t} + R^{r}{}_{trt} = \frac{f}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{fh}}\frac{d}{dr}\left(\frac{f'}{\sqrt{fh}}\right) + f'\frac{1}{rfh}\right), \\ R_{rr} &= R^{t}{}_{rtr} + R^{\theta}{}_{r\theta r} + R^{\varphi}{}_{r\varphi r} + R^{r}{}_{rrr} = \frac{h}{2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{fh}}\frac{d}{dr}\left(\frac{f'}{\sqrt{fh}}\right) + \frac{h'}{rh^2}\right), \\ R_{\theta\theta} &= R^{t}{}_{\theta t\theta} + R^{\theta}{}_{\theta\theta\theta} + R^{\varphi}{}_{\theta\varphi\theta} + R^{r}{}_{\theta r\theta} = \frac{r^2}{2}\left(-\frac{f'}{2rfh} + \frac{h'}{2rh^2} + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h}\right)\right), \\ R_{\varphi\varphi} &= R^{t}{}_{\varphi t\varphi} + R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi} + R^{\varphi}{}_{\varphi\varphi\varphi} + R^{r}{}_{\varphi r\varphi} = \frac{r^2\sin^2\theta}{2}\left(-\frac{f'}{2rfh} + \frac{h'}{2rh^2} + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.128}$$

De estas expresiones el escalar de Ricci $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ esta dado por:

$$\begin{aligned} R &= g^{tt}R_{tt} + g^{rr}R_{rr} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\varphi\varphi}R_{\varphi\varphi} = \\ &\frac{-1}{2\sqrt{fh}}\frac{d}{dr}\left(\frac{f'}{\sqrt{fh}}\right) + \frac{1}{2rh}\left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right) + \frac{h'}{2h^2r} - \frac{f'}{2fhr} + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h}\right). \end{aligned} \tag{3.129}$$

En suma, para una métrica g estática y esféricamente simétrica relativa a la carta (3.104), las componentes coordenadas de Riemann, Ricci y la curvatura escalar R estan descritas por (3.127) y (3.128).

Como una aplicación de estas fórmulas encontramos las métricas estáticas y esféricamente simétricas que satisfacen las ecuaciones de Einstein en el vacío:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 0, \tag{3.130}$$

Tomando la traza de esta ecuación tenemos:

$$g^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}4R = 0 \Rightarrow R = 0,$$

entonces en el vacío las ecuaciones de Einstein se reducean a:

$$R_{tt} = 0,\ R_{rr} = 0,\ R_{\theta\theta} = 0,\ R_{\varphi\varphi} = 0. \tag{3.131}$$

Enseguida resolvemos tales ecuaciones, primero formamos la combinación $\frac{2}{f}(R_{tt}) + \frac{2}{h}(R_{rr})$. De la relación (3.128) obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{f}(R_{tt}) + \frac{2}{h}(R_{rr}) = \\
&= \frac{f'}{rfh} + \frac{h'}{rh^2} = \frac{1}{rh}\left(\frac{f'}{f} + \frac{h'}{h}\right) = 0 \\
&\Rightarrow f = \frac{\mu}{h}.
\end{aligned} \tag{3.132}$$

En donde μ es una constante de integración.

Sustituyendo esta relación en $R_{\theta\theta} = 0$ se tiene que:

$$h(r) = \frac{1}{1 + \frac{C}{r}}, \Rightarrow f(r) = \mu\left(1 + \frac{C}{r}\right), \tag{3.133}$$

en donde C es otra constante de integración. De (3.133) se ve que la métrica g que satisface las ecuaciones de Einstein en el vacío esta dada por:

$$g = -\left(1 + \frac{C}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{\left(1 + \frac{C}{r}\right)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{3.134}$$

en donde hemos absorbido la constante μ en un reescalamiento de la coordenada t.

Tomando $C = 0$ se ve que g es la métrica de Minkowski que trivialmente satisface las ecuaciones de Einstein. Tomando $C = -2M,\ M > 0$ en (3.134) se recupera la métrica de Schwarzschild de masa positiva:

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$
$$r > 2M. \tag{3.135}$$

El caso $C = 2M,\ M < 0$ corresponde a la solución de Schwarzschild de masa negativa:

$$g = --\left(1 + \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 + \frac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{3.136}$$

3.6 Ecuaciones de Einstein con campo electromagnético

Como una segunda aplicación de las formulas (3.128), (3.127) y (3.129) en esta sección consideramos el sistema: $G_{\alpha\beta} = kT_{\alpha\beta}$, en donde $T_{\alpha\beta}$ corresponde a un campo electromagnético. Como hemos visto las ecuaciones de Maxwell en el espacio tiempo de Minkowski en ausencia de corriente toman la forma:

$$dF = d * F = 0, \tag{3.137}$$

mientras que el tensor energía momento $T_{\mu\nu}$ para un campo electromagnético tiene la forma:

$$T_{\alpha\beta} = F_{\alpha\mu}F_{\beta}{}^{\mu} - \frac{1}{4}\eta_{\alpha\beta}F^{\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}, \tag{3.138}$$

donde: $g = \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha \otimes dx^\beta$ son las componentes coordenadas de la métrica de Minkowski g_L.

Para describir las ecuaciones de Maxwell en un espacio tiempo arbitrario (M, g) que representa un campo gravitacional relativista, usamos el principio de equivalencia.

Tomamos las ecuaciones de Maxwell en la forma:

$$dF = d * F = 0, \tag{3.139}$$

$$T_{\alpha\beta} = F_{\alpha\mu}F_{\beta}{}^{\mu} - \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F^{\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}, \tag{3.140}$$

$$F = F_{\kappa\lambda}dx^{\kappa} \wedge dx^{\lambda},\ \kappa < \lambda \tag{3.141}$$

y el sistema Einstein-Maxwell en electro-vacío:

$$G_{\alpha\beta} = kT_{\alpha\beta},\ dF = d * F = 0. \tag{3.142}$$

Estamos interesados en una solución estática esféricamente simétrica de (3.142). Usando otra vez la carta (3.104) primero proponemos el tensor de Maxwell en la forma:

$$F = E(r)\theta^0 \wedge \theta^1 + B(r)\theta^2 \wedge \theta^3 = F_{01}\theta^0 \wedge \theta^1 + F_{23}\theta^2 \wedge \theta^3, \tag{3.143}$$

con la base de 1-formas:

$$\theta^0 = \sqrt{f(r)}dt,\ \theta^1 = \sqrt{h(r)}dr,\ \theta^2 = rd\theta,\ \theta^3 = r\sin\theta d\varphi, \tag{3.144}$$

entonces F es equivalente a:

$$F = E(r)\sqrt{f}\sqrt{h}dt \wedge d\theta + B(r)r^2 \sin\theta d\theta \wedge d\varphi = F_{tr}dt \wedge dr + F_{\theta\varphi}d\theta \wedge d\varphi.$$

De la restricción $dF = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} &dF = d[F_{tr}dt \wedge dr] + d[F_{\theta\varphi}d\theta \wedge d\varphi] = \\ &\frac{\partial}{\partial r}(B(r)r^2)\sin^2\theta d\theta \wedge d\varphi = 0 \Rightarrow B(r) = \frac{\kappa}{r^2}, \end{aligned} \tag{3.145}$$

en donde κ es una constante de integración. Por otra parte:

$$\begin{aligned}
d*F &= d[E*\theta^0\wedge\theta^1] + d[B*\theta^2\wedge\theta^3] = \\
d*F &= d[E\theta^2\wedge\theta^3] - d[B\theta^0\wedge\theta^1] = \\
d*F &= \frac{\partial}{\partial r}\Big(E(r)r^2\sin\theta\Big)(d\theta\wedge d\varphi) = 0 \Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{r^2},
\end{aligned} \tag{3.146}$$

por tanto una solución estática y esféricamente simétrica de $dF = d*F = 0$ tiene la forma:

$$F = \frac{\lambda}{r^2}\theta^0\wedge\theta^1 + \frac{\kappa}{r^2}\theta^2\wedge\theta^3. \tag{3.147}$$

Calculamos enseguida las componentes del tensor energía momento T. De la forma:

$$T_{\alpha\beta} = F_{\alpha\mu}F_{\beta}{}^{\mu} - \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{3.148}$$

se sigue que las componentes coordenadas no cero son:

$$\begin{aligned}
&T_{tt} = F_{t\mu}F_t{}^{\mu} - \frac{2}{4}(-f(r))[F^{tr}F_{tr} + F^{\theta\varphi}F_{\theta\varphi}] = f(r)(E^2) - \frac{2}{4}f(r)[-E^2+B^2] \\
&\Rightarrow T_{tt} = \frac{f(r)}{2}\Big(E^2+B^2\Big), \\
&T_{rr} = F_{r\mu}F_r{}^{\mu} - \frac{2}{4}(h(r))[F^{tr}F_{tr} + F^{\theta\varphi}F_{\theta\varphi}] = -h(r)(E^2) - \frac{2}{4}h(r)[-E^2+B^2] \\
&\Rightarrow T_{rr} = -\frac{h(r)}{2}\Big(E^2+B^2\Big), \\
&T_{\theta\theta} = F_{\theta\mu}F_\theta{}^{\mu} - \frac{2}{4}(r^2)[F^{tr}F_{tr} + F^{\theta\varphi}F_{\theta\varphi}] = r^2(B^2) - \frac{2}{4}r^2[-E^2+B^2] \\
&\Rightarrow T_{\theta\theta} = \frac{r^2}{2}\Big(E^2+B^2\Big), \\
&T_{\varphi\varphi} = F_{\varphi\mu}F_\varphi{}^{\mu} - \frac{2}{4}(r^2\sin\theta)[F^{tr}F_{tr} + F^{\theta\varphi}F_{\theta\varphi}] = r^2\sin^2\theta(B^2) - \frac{2}{4}r^2\sin^2\theta[-E^2+B^2] \\
&\Rightarrow T_{\varphi\varphi} = \frac{r^2\sin^2\theta}{2}\Big(E^2+B^2\Big).
\end{aligned}$$

El sistema de Einstein Maxwell tiene la forma:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = k(F_{\alpha\mu} F_{\beta}{}^{\mu} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \tag{3.149}$$

y tomando la traza de estas ecuaciones, tenemos:

$$\begin{aligned} R - 2R &= k g^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} F_{\beta}{}^{\mu} - \frac{1}{4} k g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \\ -R &= k F_{\alpha\mu} F^{\ \mu\alpha} - k F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow R = 0, \end{aligned} \tag{3.150}$$

entonces el sistema (3.149) se reduce a:

$$R_{\alpha\beta} = k T_{\alpha\beta},$$

donde las componentes $R_{\alpha\beta}$ las hemos calculado en la sección anterior. Para resolver este sistema empezamos con:

$$R_{tt} = k T_{tt} \Rightarrow R_{tt} = k \frac{f(r)}{2} \left(E^2 + B^2 \right), \tag{3.151}$$

$$R_{rr} = k T_{rr} \Rightarrow R_{rr} = -k \frac{h(r)}{2} \left(E^2 + B^2 \right), \tag{3.152}$$

y restando ambas relaciones llegamos a:

$$\frac{2}{f} R_{tt} + \frac{2}{h} R_{rr} = \left(\frac{f'}{f} + \frac{h'}{h} \right) \frac{1}{rh} = 0 \Rightarrow f = \frac{\hat{k}}{h}, \tag{3.153}$$

en donde $\hat{k}$ es una constante de integración. Sustituyendo $fh = \hat{k}$ en la ecuación $kT_{\theta\theta} = R_{\theta\theta}$, se tiene:

$$k \frac{r^2}{2} \left(E^2 + B^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{rh'}{2h^2} - \frac{rf'}{2fh} + \left(1 - \frac{1}{h} \right) \right) \tag{3.154}$$

y sustituyendo $f = \frac{C}{h}$ en esta ecuación se tiene:

$$k \frac{r^2}{2} \left(E^2 + B^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{rh'}{h^2} + \left(1 - \frac{1}{h} \right) \right) \tag{3.155}$$

la solución para este sistema esta dada por:

$$h = \left(1 + \frac{C}{r} + \frac{\kappa^2 + \lambda^2}{r^2}\right)^{-1} \tag{3.156}$$

por tanto las soluciones de Einstein-Maxwell estáticas y esféricamente simétricas están descritas por:

$$\begin{aligned} g = & -\hat{k}\left[1 + \frac{C}{r} + k\frac{\kappa^2 + \lambda^2}{r^2}\right] dt^2 + \left[1 + \frac{C}{r} + k\frac{\kappa^2 + \lambda^2}{r^2}\right]^{-1} dr^2 \\ & + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \end{aligned}$$

Capítulo 4

Apéndices

Este apéndice tiene como finalidad demostrar algunos teoremas y dar definiciones mencionadas en las seccións de esta tesis.

4.1 Apéndice A1

Empezamos demostrando el teorema (1.1) del capítulo 1.

Teorema 1.1 : Sean $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{e^1, \ldots, e^n\}$ un par de bases duales para $T_x(M)$ y $T_x^*(M)$ respectivamente, entonces:

α) El conjunto:

$$\mathbf{B}(r,p) = \{e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_p} | \;\; i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_p \in \{1, \ldots, n\}\}$$

es una base de $M_x(r,p)$.

β) $\dim M_x(r,p) = n^{r+p}$.

Demostración: Como hemos visto cada elemento:

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_p}, i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_p \in \{1, \ldots, n\}$$

define un elemento en $M(r,p)_x$ y además tenemos:

$$\begin{aligned}
&e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_p}(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_p) = \\
&e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_p}(\omega^1{}_{\alpha_1} e^{\alpha_1}, \ldots, \omega^r{}_{\alpha_r} e^{\alpha_r}, X^{\beta_1}{}_1\, e_{\beta_1}, \ldots, X^{\beta_p}{}_p\, e_{\beta_p}) \\
&= \omega^1{}_{\alpha_1} e^{\alpha_1}(e_{i_1}) \omega^2{}_{\alpha_2} e^{\alpha_2}(e_{i_2}) \ldots \omega^r{}_{\alpha_r} e^{\alpha_r}(e_{i_r}) X^{\beta_1}{}_1\, e^{j_1}(e_{\beta_1}) \ldots X^{\beta_p}{}_p\, e^{j_p}(e_{\beta_p}) \\
&= \omega^1{}_{\alpha_1} \omega^2{}_{\alpha_2} \ldots \omega^r{}_{\alpha_r} X^{\beta_1}{}_1 \ldots X^{\beta_p}{}_p e^{\alpha_1}(e_{i_1}) e^{\alpha_2}(e_{i_2}) \ldots e^{\alpha_r}(e_{i_r}) e^{j_1}(e_{\beta_1}) \ldots e^{j_p}(e_{\beta_p}) \\
&= \omega^1{}_{\alpha_1} \omega^2{}_{\alpha_2} \ldots \omega^r{}_{\alpha_r} X^{\beta_1}{}_1 \ldots X^{\beta_p}{}_p \delta^{\alpha_1}{}_{i_1}\ \delta^{\alpha_2}{}_{i_2} \ldots \delta^{\alpha_r}{}_{i_r}\ \delta^{j_1}{}_{\beta_1} \ldots \delta^{j_p}{}_{\beta_p} \\
&= \omega^1{}_{i_1} \omega^2{}_{i_2} \ldots \omega^r{}_{i_r} X^{j_1}{}_1 \ldots X^{j_p}{}_p. \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Mostramos primero que los elementos en $\mathbf{B}(r,p)$ son linealmente independientes. Considerando la combinación lineal:

$$t^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_p} e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_r} \otimes e^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes e^{\beta_p} = 0 \in M_x(r,p), \qquad (4.2)$$

con los coeficientes $t^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_p}$ reales y se entiende en (4.2) sumatorias sobre índices repetidos.

Actuando (4.2) sobre el conjunto particular: $e^{\mu_1}, \ldots, e^{\mu_r}, e_{\nu_1}, \ldots, e_{\nu_p}$ obtenemos:

$$t^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_p} e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_r} \otimes e^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes e^{\beta_p}(e^{\mu_1}, \ldots, e^{\mu_r}, e_{\nu_1}, \ldots, e_{\nu_p}) = 0 \in R$$

Pero del lado derecho tenemos:

$$\begin{aligned}
&t^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_p} \langle e^{\mu_1}, e_{\alpha_1} \rangle \langle e^{\mu_2}, e_{\alpha_2} \rangle \ldots \langle e^{\mu_r}, e_{\alpha_r} \rangle \left\langle e^{\beta_1}, e_{\nu_1} \right\rangle \ldots \left\langle e^{\beta_p}, e_{\nu_p} \right\rangle \\
&= t^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_p} \delta^{\mu_1}{}_{\alpha_1}\ \delta^{\mu_2}{}_{\alpha_2} \ldots \delta^{\mu_r}{}_{\alpha_r}\ \delta^{\beta_1}{}_{\nu_1} \ldots \delta^{\beta_p}{}_{\nu_p} = t^{\mu_1 \ldots \mu_r}{}_{\nu_1 \ldots \nu_p}, \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

cambiando el conjunto: $e^{\mu_1}, \ldots, e^{\mu_r}, e_{\nu_1}, \ldots, e_{\nu_p}$, concluímos que todos los coeficientes $t^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_p}$ son idénticamente cero.

Lo cual muestra que los elementos de $\mathbf{B}(r,p)$ son linealmente independientes.

En seguida demostrarémos que $\mathbf{B}(r,p)$ genera el espacio $M_x(r,p)$. Para esto sea $T \in M_x(r,p)$:

$$T : T_x^*(M) \times T_x^*(M) \times \ldots \times T_x^*(M) \times T_x(M) \times T_x(M) \times \ldots \times T_x(M) \to R$$
$$(\omega^1, \omega^2 \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_p) \to T(\omega^1, \omega^2 \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_p).$$

Desarrollando $\omega^1, \omega^2 \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_p$ en términos de las bases $\{e^1, \ldots, e^n\}$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y usando multilinealidad de T, tenemos:

$$\begin{aligned}
&T(\omega^1, \omega^2 \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_p) \\
&= T(\omega^1{}_{\alpha_1}\ e^{\alpha_1}, \omega^2{}_{\alpha_2}\ e^{\alpha_2}, \ldots, \omega^r{}_{\alpha_r}\ e^{\alpha_r}, X^{\beta_1}{}_1\ e_{\beta_1} \ldots, X^{\beta_p}{}_p\ e_{\beta_p}) \\
&= \omega^1{}_{\alpha_1} \omega^2{}_{\alpha_2}\ \omega^r{}_{\alpha_r} X^{\beta_1}{}_1\ X^{\beta_p}{}_p\ T(e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \ldots, e^{\alpha_r}, e_{\beta_1} \ldots, e_{\beta_p}). \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Usando la relación (4.1) representamos:

$$\omega^1{}_{\alpha_1} \omega^2{}_{\alpha_2}\ \omega^r{}_{\alpha_r} X^{\beta_1}{}_1\ X^{\beta_p}{}_p = e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_r} \otimes e^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes e^{\beta_p}(\omega^1, \omega^2 \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_p)$$

entonces de (4.4) se sigue que:

$$\begin{aligned}
&T(\omega^1, \omega^2 \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_p) \\
&= T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_p} e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_r} \otimes e^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes e^{\beta_p}(\omega^1, \omega^2 \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_p)
\end{aligned}$$

y por tanto cada $T \in M_x(r,p)$ y relativamente a las bases duales $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{e^1, \ldots, e^n\}$ admite la representación:

$$T = T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_p} e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_r} \otimes e^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes e^{\beta_p}, \qquad (4.5)$$

donde

$$T^{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\beta_p} = T(e_{\alpha_1},\ldots,e_{\alpha_r},e^{\beta_1},\ldots,e^{\beta_p}) \quad \alpha_1\ldots\alpha_r,\ \beta_1\ldots\beta_p \in \{1,\ldots,n\} \tag{4.6}$$

son las componentes de T al respecto de las bases $\{e_1,\ldots,e_n\}$ y $\{e^1,\ldots,e^n\}$. De estas dos últimas relaciones (4.5) y (4.6) se sigue que se necesitan n^{s+p} elementos de $\mathbf{B}(r,p)$ para representar un tensor $T \in M_x(r,p)$, por tanto $\dim M_x(r,p) = n^{r+p}$.

Notemos que las componentes $T^{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\beta_p}$ de T dependen de la elección de la base, para ver esto sean $\{e'_1,\ldots,e'_n\}$ y $\{e'^1,\ldots,e'^n\}$ otro par de bases duales de $T_x(M)$ y $T^*(M)$, entonces:

$$e'_i = a^j{}_i e_j, \tag{4.7}$$

donde $a^j{}_i$ son los elementos de una matriz no singular. Usando esta relación y partiendo de que $\{e'_1,\ldots,e'_n\}$ y $\{e'^1,\ldots,e'^n\}$ son bases duales:

$$\delta^i{}_j = \left\langle e'^i, e'_j \right\rangle = \left\langle b^i{}_k e^k, a^l{}_j e_l \right\rangle = b^i{}_k a^l{}_j \delta^k{}_l = b^i{}_k a^k{}_j, \tag{4.8}$$

entonces: $b^i{}_k = (a^{-1})^k{}_j$ y se sigue:

$$e'^i = (a^{-1})^i{}_k e^k. \tag{4.9}$$

Por tanto bajo cambio de base las componentes del tensor T:

$$T^{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\beta_p} = T(e^{\alpha_1},\ldots,e^{\alpha_r},e_{\beta_1},\ldots,e_{\beta_p}), \tag{4.10}$$

se transforman de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T(e^{\alpha_1},\ldots,e^{\alpha_r},e_{\beta_1},\ldots,e_{\beta_p}) &= T(a^{\alpha_1}{}_{\sigma_1}e'^{\sigma_1},\ldots,a^{\alpha_r}{}_{\sigma_r}e'^{\sigma_r},(a^{-1})^{\nu_1}{}_{\beta_1}e'_{\nu_1},\ldots,(a^{-1})^{\nu_p}{}_{\beta_p}e'_{\nu_p}) \\ &= a^{\alpha_1}{}_{\sigma_1}\ldots a^{\alpha_r}{}_{\sigma_r}(a^{-1})^{\nu_1}{}_{\beta_1}\ldots(a^{-1})^{\nu_p}{}_{\beta_p}T(e'^{\sigma_1},\ldots,e'^{\sigma_r},e'_{\nu_1},\ldots,e'_{\nu_p}) \\ &= a^{\alpha_1}{}_{\sigma_1}\ldots a^{\alpha_r}{}_{\sigma_r}(a^{-1})^{\nu_1}{}_{\beta_1}\ldots(a^{-1})^{\nu_p}{}_{\beta_p}T'^{\sigma_1\ldots\sigma_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_p} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Sin embargo T es invariante bajo cambio de base y esto lo podemos ver apartir de las relaciones (4.7), (4.9) y (4.11) como sigue:

$$
\begin{aligned}
&T^{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}_{\beta_1\ldots\beta_p} e_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes e_{\alpha_r}\otimes e^{\beta_1}\otimes\ldots\otimes e^{\beta_p} = a^{\alpha_1}{}_{\sigma_1}\ldots a^{\alpha_r}{}_{\sigma_r}(a^{-1})^{\nu_1}{}_{\beta_1}\ldots(a^{-1})^{\nu_p}{}_{\beta_p}\\
&T'^{\sigma_1\ldots\sigma_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_p}(a^{-1})^{\nu_1}{}_{\alpha_1}e'_{\nu_1}\otimes\ldots\otimes(a^{-1})^{\nu_r}{}_{\alpha_r}e'_{\nu_r}\otimes a^{\beta_1}{}_{\sigma_1}e'^{\sigma_1}\otimes\ldots\otimes a^{\beta_p}{}_{\sigma_p}e'^{\sigma_p} =\\
&a^{\alpha_1}{}_{\sigma_1}\ldots a^{\alpha_r}{}_{\sigma_r}(a^{-1})^{\nu_1}{}_{\beta_1}\ldots(a^{-1})^{\nu_p}{}_{\beta_p}(a^{-1})^{\nu_1}{}_{\alpha_1}\ldots(a^{-1})^{\nu_r}{}_{\alpha_r}a^{\beta_1}{}_{\sigma_1}\ldots a^{\beta_p}{}_{\sigma_p}\\
&T'^{\sigma_1\ldots\sigma_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_p}e'_{\nu_1}\otimes\ldots\otimes e'_{\nu_r}\otimes e'^{\sigma_1}\otimes\ldots\otimes e'^{\sigma_p} = \delta^{\nu_1}_{\sigma_1}\ldots\delta^{\nu_r}_{\sigma_r}\delta^{\nu_1}_{\sigma_1}\ldots\delta^{\nu_p}_{\sigma_p}\\
&T'^{\sigma_1\ldots\sigma_r}{}_{\nu_1\ldots\nu_p}e'_{\nu_1}\otimes\ldots\otimes e'_{\nu_r}\otimes e'^{\sigma_1}\otimes\ldots\otimes e'^{\sigma_p} =\\
&T'^{\nu_1\ldots\nu_r}{}_{\sigma_1\ldots\sigma_p}e'_{\nu_1}\otimes\ldots\otimes e'_{\nu_r}\otimes e'^{\sigma_1}\otimes\ldots\otimes e'^{\sigma_p}.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Terminamos esta sección introductoria discutiendo el mapa de contracción sobre tensores, el cual usarémos en el desarrollo de esta tesis. Sea el mapa:

$$C : M_x(r,p)\rightarrow M_x(r-1,p-1) : T\rightarrow CT, r>1,\ p>1 \tag{4.13}$$

en donde CT esta definido por:

$$CT=\sum_{\sigma=1}^{n}T(\ldots,e^{\sigma},\ldots;\ldots,e_{\sigma}\ldots) \tag{4.14}$$

y $\{e_1,\ldots,e_n\}$, $\{e^1,\ldots,e^n\}$ son bases duales de $T_x(M)$ y $T_x^*(M)$, los elementos e^{σ} y e_{σ} son insertados en la i-ésima y j-ésima urna de T. El tensor obtenido CT es un tensor tipo $(r-1,p-1)$ independiente de la elección de $\{e_1,\ldots,e_n\}$ y $\{e^1,\ldots,e^n\}$. Para ver esto sean $\{e'_1,\ldots,e'_n\}$ y $\{e'^1,\ldots,e'^n\}$ bases duales arbitrarias y aplicamos la definición de el mapa de contración:

$$
\begin{aligned}
CT&=\sum_{\sigma=1}^{n}T(\ldots,e^{\sigma},\ldots;\ldots,e_{\sigma}\ldots)=\sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}T(\ldots,a^{\sigma}{}_{\beta}e'^{\beta},\ldots;\ldots,(a^{-1})^{\beta}{}_{\sigma}e'_{\beta}\ldots)\\
&=\sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}a^{\sigma}{}_{\beta}(a^{-1})^{\beta}{}_{\sigma}T(\ldots,e'^{\beta},\ldots;\ldots,e'_{\beta}\ldots)=\sum_{\beta=1}^{n}T(\ldots,e'^{\beta},\ldots;\ldots,e'_{\beta}\ldots).
\end{aligned}
$$

donde hemos usado las relaciones (4.7) y (4.9).

Terminamos esta sección introduciendo el concepto de simetría de un tensor respecto a la posición i , j:

Definición 1.1: Decimos que un tensor $T \in M_x(r,p)$ es simétrico respecto a dos de sus entradas covariantes i y j con $1 \leq i, j \leq p$ si satisface la siguiente propiedad:

$$T(\underbrace{\underbrace{\ldots, X}_{i}, \ldots, Y}_{j}, \ldots) = T(\underbrace{\underbrace{\ldots, Y}_{i}, \ldots, X}_{j}, \ldots) \tag{4.15}$$

y de manera análoga definimos un tensor $T \in M_x(r,p)$ simétrico respecto a dos de sus entradas contravariantes si para las entradas i, j con $1 \leq i, j \leq r$, el tensor T satisface la siguiente propiedad:

$$T(\underbrace{\underbrace{\ldots, \omega}_{i}, \ldots, \omega'}_{j}, \ldots) = T(\underbrace{\underbrace{\ldots, \omega'}_{i}, \ldots, \omega}_{j}, \ldots). \tag{4.16}$$

En términos de bases, la simetría respecto a dos de las entradas covariantes de un tensor T de tipo $(0,p)$ se puede ver de la siguiente expresión:

$$T_{\beta_1 \ldots \beta_p} e^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes e^{\beta_p}(e_{\sigma_1}, \ldots, e_{\sigma_i}, \ldots, e_{\sigma_j}, \ldots e_{\sigma_p}) =$$
$$= T_{\beta_1 \ldots \beta_p} e^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes e^{\beta_p}(e_{\sigma_1}, \ldots, e_{\sigma_j}, \ldots, e_{\sigma_i}, \ldots e_{\sigma_p})$$

esto es equivalente a la siguiente relación:

$$T_{\sigma_1 \ldots \sigma_i \ldots \sigma_j \ldots \sigma_p} = T_{\sigma_1 \ldots \sigma_j \ldots \sigma_i \ldots \sigma_p} \tag{4.17}$$

donde hemos evaluado el tensor T con dos elementos de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $T_x(M)$ en las urnas i y j, $1 \leq i, j \leq p$. Este resultado fácilmente se puede generalizar y los tensores T simétricos respecto a las 2 posiciones covariantes i, j en términos de una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $T_x(M)$ y su dual $\{e^1, \ldots, e^n\}$ satisfacen:

$$T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \sigma_i \ldots \sigma_j \ldots \beta_p} = T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \sigma_j \ldots \sigma_i \ldots \beta_p}, \tag{4.18}$$

usando el mismo razonamiento que nos llevó a la realción (4.18), los tensores simétricos respecto a dos posiciones contravariantes i, j satisfacen la siguiente propiedad:

$$T^{\alpha_1 \ldots \sigma_i \ldots \sigma_j \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_p} = T^{\alpha_1 \ldots \sigma_j \ldots \sigma_i \ldots \alpha_r}{}_{\beta_1 \ldots \beta_p}. \tag{4.19}$$

Como algunas propiedades elementales de la fórmula (1.55), sean (X_1, X_2) vectores arbitrarios, entonces:

$$\begin{aligned}
&\omega^1 \wedge \omega^2(X_1, X_2) = \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \sigma(\omega^1 \otimes \omega^2)(X_1, X_2) = \\
&\sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}\sigma(\omega^1 \otimes \omega^2)(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}) = \omega^1 \otimes \omega^2(X_1, X_2) - \omega^1 \otimes \omega^2(X_2, X_1) = \\
&\omega^1(X_1)\, \omega^2(X_2) - \omega^1(X_2)\, \omega^2(X_1) = \omega^1(X_1)\, \omega^2(X_2) - \omega^2(X_1)\, \omega^1(X_2) = \\
&\left(\omega^1 \otimes \omega^2 - \omega^2 \otimes \omega^1\right)(X_1, X_2) = \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}\sigma \omega^{\sigma(1)} \otimes \omega^{\sigma(2)}(X_1, X_2).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Aplicando la propiedad (1.40), obtenemos :

$$\begin{aligned}
&\left(\omega^1 \wedge \omega^2\right) \wedge \omega^3 = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = \frac{3!}{1!\ 1!\ 1!}\ \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\ \left(\omega^1 \otimes \omega^2 \otimes \omega^3\right) \\
&= \sum_{\sigma\ \in\ S_3} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega^{\sigma(1)} \otimes \omega^{\sigma(2)} \otimes \omega^{\sigma(3)}.
\end{aligned}$$

4.2 Apéndice A2

Teorema 1.10.1: El producto interior i_X, satisface:

$$\alpha)\ \ i_X i_Y \omega = -i_Y i_X \omega \Rightarrow i_X^2 = i_X i_X = 0$$
$$\beta)\ \ i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge i_X \eta, \tag{4.21}$$

Demostración: La demostración del inciso α) es una consecuencia de la definición de i_X. Para demostrar el inciso β) primero mostramos el siguiente lema:

Lema 1.10.1: Sean $\omega^1, \ldots, \omega^p$ p uno formas y $X \in E$, entonces:

$$i_X(\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \omega^i(X) \omega^1 \wedge \ldots \hat{\omega}^p \wedge \ldots \wedge \omega^p, \tag{4.22}$$

en donde el símbolo $\hat{\omega}^i$ implica que ω^i será omitido del producto cuña.

Demostración: Sean $X_2, \ldots, X_{p-1}$ vectores, entonces:

$$i_X(\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^p)(X_2, \ldots, X_p) = (\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^p)(X, X_2, \ldots, X_p).$$

Pero por la propiedad (1.49), tenemos:

$$(\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^p)(X, X_2, \ldots, X_p) = \det(\omega^i \hat{X}_j),\ i, j \in \{1, \ldots, p\}$$
$$(\hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_p) = (X, X_2, \ldots, X_p). \tag{4.23}$$

Desarrollando el determinante a lo largo de la primera columna tenemos:

$$i_X(\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^p)(X_2, \ldots, X_p) = \sum_{i=1}^{l} (-1)^{i+1} \omega^i(X) \det[\langle \hat{\omega}, \hat{X} \rangle]$$
$$= \sum_{i=1}^{l} (-1)^{i+1} \omega^i(X) \omega^1 \wedge \ldots \hat{\omega}^p (X_2, \ldots, X_P). \tag{4.24}$$
$$\tag{4.25}$$

Teorema 1.10.2: Para cada $\alpha \in \Lambda^p(E)$, el dual de Hodge $*\alpha$ de α esta dado por:

$$*\alpha \equiv \frac{1}{p!} C(F_*\alpha \otimes \eta(g)) \tag{4.26}$$

donde $C(F_*\alpha \otimes \eta(g))$ es la contracción de p índices contravariantes del $(p, 0)$ tensor $F_*\alpha$ con p índices covariantes del tensor $\eta(g)$.

Demostración: Queremos mostrar que para cualquier $\alpha \in \Lambda^p(E)$, entonces $*\alpha$ descrito por (4.26), satisface (1.136). Primero notamos que $*\alpha$ esta bien definido y por construcción $*\alpha \in \Lambda^{n-p}(E)$. El isomorfismo F_* preserva simetrías. Para verificar la afirmación del teorema. Sean $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{e^1, \ldots, e^n\}$ un par de bases duales positivamente orientadas de E y E^* respectivamente y sean

$$\begin{aligned} \eta(g) &= \frac{1}{n!}\sqrt{|g|}\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_n} e^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge e^{\mu_n} \\ (F_*\alpha)^{\alpha_1\ldots\alpha_p} &= g^{\alpha_1\beta_1} \ldots g^{\alpha_p\beta_p}\alpha_{\beta_1\ldots\beta_p} \end{aligned} \tag{4.27}$$

Por tanto $C(F_*\alpha \otimes \eta(g)) = \sqrt{|g|}\alpha^{\beta_1\ldots\beta_p}\epsilon_{\beta_1\ldots\beta_p\mu_{p+1}\ldots\mu_n}$ y entonces

$$*\alpha = \sqrt{|g|}\alpha^{\beta_1\ldots\beta_p}\epsilon_{\beta_1\ldots\beta_p\mu_{p+1}\ldots\mu_n} e^{p+1} \wedge \ldots \wedge e^{n-p}.$$

Si $a := \frac{1}{p!} a_{i_1 \ldots i_p} u^{i_1} \wedge \ldots \wedge u^{i_p} = a_{j_1\ldots j_p} u^{j_1} \wedge \ldots \wedge u^{j_p}$ entonces la relación $a \wedge \beta = (-1)^s g(*a, \beta)\eta$ implica que las componentes $(*a)_{i_{p+1}i_{p+2}\ldots i_n}$ de $*a$ estan dadas por:

$$(*a)_{i_{p+1}i_{p+2}\ldots i_n} = \frac{1}{p!}\eta_{i_1\ldots i_n} a^{i_1\ldots i_p} = \frac{1}{p!}\eta_{i_1\ldots i_n} g^{i_1\nu_1} g^{i_2\nu_2} \ldots g^{i_p\nu_p} a_{\nu_1\ldots\nu_p}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{|g|}}{p!}\varepsilon_{i_1,\ldots,i_n} g^{i_1\nu_1} g^{i_2\nu_2}\ldots g^{i_p\nu_p} a_{\nu_1\ldots\nu_p} \\
&= \frac{\sqrt{|g|}}{p!}\varepsilon^{\eta_1,\ldots,\eta_p}{}_{\nu_{p+1}\ldots\nu_n} a_{\nu_1\ldots\nu_p}
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

Para el siguiente análisis será conveniente trabajar con ambas representaciones de p formas, es decir si: para cada $\beta \in \Lambda^{n-p}(E)$, tenemos:

$$
a \wedge \beta = (-1)^s g(*a, \beta)\eta \tag{4.29}
$$

donde $\eta(g)$ es el elemento de volumen de g con respecto a una base positivamente orientada de E. $\omega \in \Lambda^p(E)$:

$$
\begin{aligned}
&\omega = a_{\mu_1\ \mu_2\ \ldots\ \mu_p} u^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge u^{\mu_p}\ , \quad 1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_p \leq n. \\
&\omega = \frac{1}{p!}\ a_{\nu_1\ \nu_2\ \ldots\ \nu_p} u^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge u^{\nu_p},
\end{aligned}
$$

4.3 Apéndice A3

Teorema 2.1.1: El producto interior i_X, satisface:

$$
\begin{aligned}
&\alpha)\ \ i_X i_Y \omega = -i_Y i_X \omega \Rightarrow i_X^2 = i_X i_X = 0 \\
&\beta)\ \ i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge i_X \eta, \\
&\gamma)\ \ \ L_X\omega = d(i_X\omega) + i_X d\omega,
\end{aligned}
$$

donde L_x es el operador derivada de lie, y esta última identidad (γ) es referida como identidad de Cartán.

Demostración: α) Sea $\omega \in \Lambda^p(M)$ y sean $Y_1, \dots, Y_{p-2} \in \mathcal{X}(M)$. Consideremos:

$$(i_X i_Y \omega)(Y_1, \dots, Y_{p-2}) = \omega(Y, X, Y_1, \dots, Y_{p-2}) = -\omega(X, Y, Y_1, \dots, Y_{p-2})$$
$$= -(i_Y i_X \omega)(Y_1, \dots, Y_{p-2}) \tag{4.30}$$

entonces $i_X i_Y = -i_Y i_X$.

Si $X = Y$ entonces $i_X i_X = i_X^2 = 0$ es decir, para cada $\omega \in \Lambda^p(M) \quad i_X^2 \omega = 0$.

β) Por definición $\omega \wedge \eta$ es una $(p+q)$-forma, entonces $i_X(\omega \wedge \eta)$ es una $(p+q-1)$-forma.

Sean $Y_1, \dots, Y_{p+q-1}$ elementos de $\mathcal{X}(M)$, entonces:

$$i_X(\omega \wedge \eta)(Y_1, \dots, Y_{p+q-1}) = \omega \wedge \eta(X, Y_1, \dots, Y_{p+q-1})$$
$$= \frac{1}{p!}\frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}\sigma \sigma(\omega \otimes \eta)(X, Y_1, \dots, Y_{p+q-1}). \tag{4.31}$$

Renombrando $X_1 = X,\ X_2 = Y_1, \dots, X_{p+q} = Y_{p+q-1}$, entonces:

$$(\omega \wedge \eta)(X, Y_1, \dots, Y_{p+q-1}) = \frac{1}{p!}\frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}\sigma(\omega \otimes \eta)(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(p+q)})$$
$$= \frac{1}{p!}\frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}\sigma \omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(p)}) \eta(X_{\sigma(p+1)}, X_{\sigma(p+2)}, \dots, X_{\sigma(p+q)}).$$

Primero observamos $(p+q)! = (p+q-1)!(p+q) = (p+q-1)!p + (p+q-1)!q$ y de esta fórmula dividimos las $(p+q)!$ permutaciones de $\{1, 2, \dots, p+q\}$, en dos grupos de permutuaciones: S^1_{p+q-1} y S^2_{p+q-1} donde el primer grupo contiene todas las permutaciones de $\{1, \dots, p+q\}$ tal que alguno de $\sigma(1), \dots, \sigma(p)$ es restringido al valor 1, mientras el segundo grupo contiene permutaciones donde uno de los valores $\sigma(p+1), \sigma(p+2), \dots, \sigma(p+q)$ es restringido a tener el valor 1. Una permutación típica del primer grupo es:

$$\sigma : (1, 2, \ldots, p+q) = (1, \sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(p), \sigma(p+1), \ldots)$$

$$\sigma : (1, 2, \ldots, p+q) = (\sigma(1), 1, \sigma(2), \ldots, \sigma(p), \sigma(p+1), \sigma(p+2), \ldots)$$

$$\vdots$$

$$\sigma : (1, 2, \ldots, p+q) = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(p), 1, \sigma(p+1), \ldots)$$

mientras que una permutación típica de el grupo S^2_{p+q-1} tiene la estructura:

$$\sigma : (1, 2, \ldots, p+q) = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(p), 1, \sigma(p+1), \ldots)$$

$$\sigma : (1, 2, \ldots, p+q) = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(p), \sigma(p+1), 1, \sigma(p+2), \ldots)$$

$$\vdots$$

$$\sigma : (1, 2, \ldots, p+q) = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(p), \sigma(p+1), \ldots, 1)$$

hay $p(p+q-1)!$ permutaciones en S^1_{p+q-1} y $q(p+q-1)!$ permutaciones en S^2_{p+q-1}.

Notamos que para cualquier permutación σ en el primer grupo tenemos:

$$\mathrm{sgn}\sigma\omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, 1, X_{\sigma(4)}, \ldots, X_{\sigma(p)})\eta(X_{\sigma(p+1)}, \ldots, X_{\sigma(p+q)})$$

$$\mathrm{sgn}\sigma\omega(1, X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(4)}, \ldots, X_{\sigma(p)})\eta(X_{\sigma(p+1)}, \ldots, X_{\sigma(p+q)})$$

y entonces:

$$(\omega \wedge \eta)(X, Y_1, \ldots, Y_{p+q-1}) = \frac{p}{p!}\frac{1}{q!}\sum_{\sigma \in S^1} \mathrm{sgn}\sigma\omega(1, X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(p)})\eta(X_{\sigma(p+1)}, \ldots)$$

$$+\frac{1}{p!}\frac{q}{q!}\sum_{\sigma \in S^2} \mathrm{sgn}\sigma\omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(p)})\eta(1, X_{\sigma(p+1)}, \ldots)$$

$$= \frac{1}{(p-1)!}\frac{1}{q!}\sum_{\sigma \in S^1_{p+q-1}} \mathrm{sgn}\sigma\omega(X_1, Y_{\sigma(1)}, \ldots, Y_{\sigma(p-1)})\eta(Y_{\sigma(p)}, \ldots, Y_{\sigma(p+q-1)})$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{p!}\frac{q}{q!}\sum_{\sigma\in S^2_{p+q-1}} \mathrm{sgn}\sigma\omega(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(p)})\eta(1,X_{\sigma(p+1)},\ldots)\\
&=(i_X\omega\wedge\eta)(Y_1,\ldots,Y_{p+q-1})+(-1)^p(\omega\wedge i_X\eta)(Y_1,\ldots,Y_{p+q-1}),
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

es decir:

$$
\begin{aligned}
&i_X(\omega\wedge\eta)(Y_1,\ldots,Y_{p+q-1})\\
&=(i_X\omega\wedge\eta)(Y_1,\ldots,Y_{p+q-1})+(-1)^p(\omega\wedge i_X\eta)(Y_1,\ldots,Y_{p+q-1}).
\end{aligned}
$$

Mostrarémos primero que el operador d definido por (2.35) satisface las propiedades $\alpha)-\gamma)$.

Sea $f\in\Lambda^0(M)=C^\infty(M)$ y $X\in\mathcal{X}(M)$, entonces $\forall x\ \in U$:

$$
X(f)|_x = X^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}_x, \tag{4.33}
$$

por otro lado:

$$
df(X)=X(f)=\langle df,X\rangle=\left\langle f_\mu dx^\mu, X^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right\rangle = f_\alpha X^\alpha, \tag{4.34}
$$

de (4.33) concluimos $\forall\ f\in\Lambda^0(M)\Rightarrow df=\frac{\partial f}{\partial x^\mu}dx^\mu$.

4.4 A4

En la sección previa partimos de una conexión ∇ y una paralelización $\{X_1,\ldots,X_n\}$ y hemos derivado las ecuaciones de estructura de Cartán.

Históricamente la teoría de conexiones lineales comenzó después de la contribución de Cartán en los años (1920-1940). Cartán empezando con paralelizaciones desarrolló una teoría que nos lleva a una conexión ∇ y en esta sección discutimos la teoría de Cartán. Vemos como paralelizaciones y la asignación de n^2 1-formas nos permite introducir una conexión ∇ y calcular T y R. En lo que sigue siempre asumiremos que las paralelizaciones y los campos de 1-formas son C^∞ y mencionamos que el término paralelización en el trabajo original de Cartán es referido como "marco movible".

Definición 3.4.1 : Una conexión de Cartán sobre una variedad M, es una asignación de una matriz $\omega = (\omega^i{}_j),\ i,j \in \{1,\ldots,n\}$, de n^2 campos de 1-formas a una paralelización $\overrightarrow{X} = \{X_1,\ldots,X_n\}$ definida en $O \subseteq M$, tal que si $\overrightarrow{X}' = \{X_1',\ldots,X_n'\}$ es otra paralelización definida en $O \subseteq M$ con:

$$\vec{X}' = \vec{X} \cdot a \rightarrow X_i' = a^i{}_j X_i \tag{4.35}$$

donde $a = a^i{}_j$ es una matriz no singular y $\omega' = (\omega'^i_j)$ es la matriz de campos de 1-formas asociados a $\vec{X}'$ entonces ω y ω' cumplen:

$$\omega' = a^{-1} d\ a + a^{-1}\omega\ a \quad \omega'^i_j = (a^{-1})^i{}_k d\ a^k{}_j + (a^{-1})^i{}_\rho (\omega)^\rho{}_\mu\ a^\mu{}_j, \tag{4.36}$$

en donde $d\ a^k{}_j$ se obtiene tomando la derivada exterior de cada elemento $a^i{}_j$. Cartán para $(\vec{X},\omega)$ se asocia la base dual $\{\theta^1,\ldots,\theta^n\}$ y el campo de 2-formas: Θ^i y $\Omega^i{}_j$ a través de:

$$d\theta = -\omega \wedge \theta + \Theta \Leftrightarrow d\theta^i = -\omega^i{}_k \wedge \theta^k + \Theta^i, \tag{4.37}$$

$$d\omega = -\omega \wedge \omega + \Omega \Leftrightarrow d\omega^i{}_j = -\omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j + \Omega^i{}_j. \tag{4.38}$$

Las Θ^i las formas de torsión y las $\Omega^i{}_j$ como formas de curvatura asociadas a $\{\vec{X},\omega\}$.

Teorema 3.4.1: Sean Θ'^i y Ω'^i_j las formas de torsión y curvatura asociadas con una conexión de Cartán $(\vec{X}', \omega')$ y sea $\vec{X}' = \vec{X} \cdot a$ con a una matriz no singular, entonces las siguientes leyes de transformación son válidas:

$$\Theta' = a^{-1} \cdot \Theta \;\text{ y }\; \Omega' = a^{-1}\Omega a, \tag{4.39}$$

en donde (Θ, Ω) son los campos de formas asociados a (X, ω).

Demostración: Por definición si $\omega(= \omega^i{}_j)$ son el campo de 1-formas asociadas a $\vec{X}$ y $\omega'(= \omega^{i'}_j)$ son el campo de 1-formas asociadas a $\vec{X}'$, entonces por (4.36):

$$\omega' = a^{-1}d\, a + a^{-1}\omega\, a \quad \omega'^i_j = (a^{-1})^i{}_k d\, a^k{}_j + (a^{-1})^i{}_\rho(\omega)^\rho{}_\mu\, a^\mu{}_j \tag{4.40}$$

$$\vec{X}' = \vec{X} \cdot a \rightarrow X'_i = a^j{}_i X_j \tag{4.41}$$

donde $a^i{}_j$ son las componentes de una $n \times n$ matriz no singular cuyos elementos son funciones suaves real valuadas.

Por hipotesis $\Omega^i{}_j$ y Θ^i satisfacen:

$$d\theta^i = -\omega^i{}_k \wedge \theta^k + \Theta^i \quad \text{y} \;\; d\omega^i{}_j = -\omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j + \Omega^i{}_j \tag{4.42}$$

$$d\theta'^i = -\omega'^i_k \wedge \theta'^k + \Theta'^i \;\; \text{y} \;\; d\omega'^i_j = -\omega'^i_k \wedge \omega'^k_j + \Omega'^i_j. \tag{4.43}$$

Por otro lado de (4.41) y $\left\langle \theta'^i, X'_j \right\rangle = \delta^i{}_j$ se obtiene:

$$\left\langle B^i_\alpha \theta^\alpha, a^\beta{}_j X_\beta \right\rangle = B^i_\alpha a^\beta{}_j \left\langle \theta^\alpha, X_\beta \right\rangle = B^i_\alpha a^\beta{}_j \delta^\alpha{}_\beta = B^i_\alpha a^\alpha{}_j = \delta^i{}_j. \tag{4.44}$$

Como $\theta'^i = B^i{}_\alpha \theta^\alpha = (a^{-1})^i{}_\alpha \theta^\alpha$ entonces: $\vec{\theta} = a^{-1} \cdot \vec{\theta}$, partiendo de esta relación con (4.36) y (4.37) obtenemos

$$d\theta' = d(a^{-1}\theta) = (da^{-1}) \wedge \theta + a^{-1}d\theta \tag{4.45}$$

como $a \cdot a^{-1} = I$ entonces $da^{-1} = -a^{-1} \cdot da \cdot a^{-1}$, sustituyendo en (4.45) se tiene:

$$d\theta' = -a^{-1} \cdot da \wedge a^{-1}\theta + a^{-1}d\theta \tag{4.46}$$

por otra parte

$$\omega' \wedge \theta' = \left(a^{-1}da + a^{-1}\omega a\right) \wedge a^{-1}\theta \tag{4.47}$$

sustiyendo en $d\theta' = -\omega \wedge \theta' + \Theta'$:

$$a^{-1}d\theta = -a^{-1}\omega \wedge \theta + \Theta' \tag{4.48}$$

sustituyendo $d\theta = -\omega \wedge \theta + \Theta$ se tiene:

$$\Theta' = a^{-1}\Theta. \tag{4.49}$$

Las leyes de transformación:

$$\omega' = a^{-1}da + a^{-1}\omega a, \tag{4.50}$$

$$\Theta' = a^{-1}\Theta, \tag{4.51}$$

$$\Omega' = a^{-1}\Omega a, \tag{4.52}$$

determinan el operador de conexión ∇, dado (X, ω) se define una "conexión" ∇ a través de:

$$\nabla X_i \equiv \omega^j{}_i \otimes X_j \Leftrightarrow \nabla_{X_k} X_i = \omega^j{}_i(X_k)X_j \tag{4.53}$$

y se extiende su acción sobre campos vectoriales arbitrarios a través de:

$$\nabla X = \nabla(b^\alpha X_\alpha) = db^\alpha \otimes X_\alpha + b^\mu \omega^\alpha{}_\mu \otimes X_\alpha, \tag{4.54}$$

$$(\nabla X)Y = [db^\alpha \otimes X_\alpha + b^\mu \omega^\alpha{}_\mu \otimes X_\alpha]Y. \tag{4.55}$$

Haciendo uso de las formas de torsión Θ y curvatura Ω definimos la torsión y la curvatura de la conexión ∇ a través de:

$$T(X_j, X_k) = \Theta^i(X_j, X_k)X_i, \tag{4.56}$$

$$R(X_k, X_i)X_j = \Omega^l{}_j(X_k, X_i)X_l \tag{4.57}$$

y extendemos su acción sobre vectores tangentes por linealidad. Bajo cambio de paralelización generado por una matriz $a = a^i{}_j$, es decir: $X_i \to X'_i = a^k{}_i X_k$, se ve fácilmente que $T(X_j, X_i)$ y $R(X_k, X_l)X_j$ se transforma tensorialmente:

$$T(X'_\mu, X'_\nu) = a^j{}_\mu a^k{}_\nu T(X_j, X_k). \tag{4.58}$$

Para llevar la conexión a una forma reconocible definimos:

$$\nabla_X X = \hat{\Gamma}^i{}_{kj} X_i, \tag{4.59}$$

$$T(X_j, X_k) = \hat{T}^i{}_{jk} X_i, \tag{4.60}$$

$$R(X_k, X_l)X_j = \hat{R}^i{}_{\ jkl} X_i. \tag{4.61}$$

Por comparasión de se tiene:

$$\hat{\Gamma}^i{}_{\ jk} = \omega^i{}_j(X_k) \Leftrightarrow \omega^i{}_j = \hat{\Gamma}^i{}_{\ kj}\theta^k, \tag{4.62}$$

$$\hat{T}^i{}_{jk} = \theta^i(X_j, X_k) \Leftrightarrow \theta^i = \frac{1}{2}\hat{T}^i{}_{jk}\theta^j \wedge \theta^k, \tag{4.63}$$

$$R^i{}_{\ jkl} = \Omega^i{}_j(X_k, X_l) \Leftrightarrow \Omega^i{}_j = \frac{1}{2}\hat{R}^i{}_{\ jkl}\theta^k \wedge \theta^l. \tag{4.64}$$

Bibliografía

[1] R. M. Wald, General Relativity, Chicago. Univ. Press (1984).

[2] S.W. Hawking and G. F. R. Ellis, The large scale structure of space-time, Cambridge University Press (1973).

[3] M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1, 3rd Edition.

[4] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, Third edition John Wiley and Sons.

[5] James R. Munkres, Topology, Prentice Hall

[6] Norbert Straumann, General Relativity and Relativistic Astrophisics, Springer Verlag (1984).

[7] R. Abraham, J.E. Marsden, Manifolds, Tensor Analysis and Applications, Springer Verlag (1983).