UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Y

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

UNAM-UMSNH

Cardinales Medibles

T E S I S

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Edgar Carballo Domínguez

Director: Dr. C. Fernando Hernández Hernández

Morelia, Michoacán febrero de 2011

Índice general

Agradecimientos

A mis padres por la motivación.

A mi hermano por la inspiración.

Capítulo 1

Introducción

Los cardinales medibles son objetos en matemáticas cuya existencia es indecidible, lo cual los hacen más interesante, ya que hay teoría bajo cada suposición: existen o no existen. En este trabajo mezclaremos estos cardinales con herramientas de teoría de modelos, como los ultraproductos y forcing, y se presentan algunos resultados interesantes.

En el primer capítulo, se desarrollará un poco de teoría de ultraproductos; se probará que bajo $V = L$ no existen cardinales medibles, lo que hace consistente su no existencia. También se establecen algunas relaciones entre cardinales grandes.

En el segundo capítulo se construirá usando forcing, y por supuesto, con la existencia de un cardinal medible α, una extensión genérica, aunque no agrega (o destruye) cardinales y no agrega conjuntos en V_α, aún así destruye la regularidad de α.

Suponemos que el lector está familiarizado con los conceptos de filtro, ultrafiltro, cofinalidad, cardinales regulares así que no nos detendremos en eso. Es conveniente que el lector conozca un poco de teoría de modelos.

Un lenguaje $\mathcal{L}$ es una terna $(\mathcal{R}, \mathcal{F}, C)$ de conjuntos de símbolos ajenos por pares de símbolos. A los elementos de $\mathcal{R}$, $\mathcal{F}$ y C se les llamarán símbolos de relación, símbolos de función y símbolos de constante, respectivamente. A los símbolos del lenguaje le agregaremos algunos símbolos extras que necesitamos para construir las fórmulas: Paréntesis), (; variables $v_0, v_1, ..., v_n, ...$; conectivos $\wedge$, $\neg$; cuantificadores $\exists$; identidad =. Un término es una sucesión de símbolos del lenguaje que se puede obtener aplicando un número finito de veces los siguientes esquemas:

1. Cada variable es un término.
2. Cada símbolo de constante es un término.
3. Si F es un símbolo de función y $t_0, ..., t_{n-1}$ son términos, entonces $F(t_0, ..., t_{n-1})$ es un término.

Los términos harán el papel de un sustantivo en una fórmula, mientras que las relaciones la del verbo como se puede apreciar en la siguiente definición.

Una fórmula atómica es una sucesión de símbolos de la siguiente forma:

1. Si t_0 y t_1 son términos entonces $t_0 = t_1$ es una fórmula atómica.
2. Si R es un símbolo de relación y $t_0, ..., t_{n-1}$ son términos, entonces $R(t_0, ..., t_{n-1})$ es una fórmula átomica.

Y una fórmula es de nuevo una suceción de símbolos que se puede obtener aplicando un número finito las siguientes tres reglas:

1. Cada fórmula atómica es una fórmula.
2. Si φ y ψ son fórmulas entonces tambien lo son $(\varphi \wedge \psi)$ y $(\neg\varphi)$.
3. Si v es una variable y φ una fórmula, entonces $(\exists v)\,\varphi$ es una fórmula.

Una oración es una fórmula en la que todas sus variables aparecen cuantificadas.

Por un modelo para un lenguaje $\mathcal{L}$ nos referimos a una n-ada

$$\mathbf{M} = (M, R_0, ...R_k, F_0, ..., F_l, c_0, ..., c_m)\,,$$

donde los R_i, F_i, c_i corresponden a los símbolos de relación, símbolos de función y símbolos de constante de $\mathcal{L}$ y M es una clase que le llamaremos universo de $\mathbf{M}$. Básicamente un modelo es un conjunto donde podemos verificar una fórmula y darle un valor de verdad: Verdadero o falso, por lo que la función principal de un modelo es ser el puente entre las fórmulas del lenguaje y sus interpretaciones.

Capítulo 2

Ultraproductos

Los ultraproductos son una herramienta que nos permite generar nuevos modelos a partir de otros conocidos. En este capítulo se desarrolla parte la teoría de ultraproductos, por supuesto su definición y el teorema fundamental de los ultraproductos que es el que nos facilitará el trabajo posterior. También veremos en este capítulo algunos resultados sobre cardinales medibles, la consistencia de su no existencia y su relación con otros cardinales grandes como inaccesibles y compactos.

1. El teorema fundamental

Dados un conjunto I y un filtro D sobre I y una familia $\{U_i : i \in I\}$ podemos definir una relación sobre $C = \prod_{i \in I} U_i$ de la siguiente forma: dados $f, g \in C$ decimos que f y g son D-equivalentes si

$$\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in D,$$

y lo denotamos por $f =_D g$. Es fácil ver que $=_D$ es una relación de equivalencia, la reflexividad se sigue de que $I \in D$, la simetría se hereda de la simetría de la relación de igualdad y la transitividad se satisface ya que

$$\{i \in I : f(i) = g(i)\} \cap \{i \in I : g(i) = h(i)\} \subset \{i \in I : f(i) = h(i)\}.$$

Denotaremos a f_D como la clase de f y al conjunto de clases de equivalenca por $\prod_D A_i$, *el producto reducido* de los A_i módulo D. Si D es un ultrafiltro le llamaremos *ultraproducto* a $\prod_D A_i$. Si los conjuntos A_i son iguales, digamos $A_i = A$ para cada $i \in I$ podemos llamarle *potencia reducida* o *ultrapotencia* en el caso de que D sea ultrafiltro. Ahora vamos a dar una definición de producto reducido para modelos.

Sea I un conjunto no vacío y D un filtro sobre I y para cada $i \in I$ sea $\mathbf{U}_i$ un modelo. Convendremos que en $\mathbf{U}_i$ los símbolos de relación R son intepretados por R_i, los símbolos de función F por G_i y constantes c por a_i.

El producto reducido $\prod_D \mathbf{U}_i$ de los modelos $\mathbf{U}_i$ tiene como universo $\prod_D U_i$ y las siguientes interpretaciones:

1. Si P es un símbolo de relación, la interpretación de P en $\prod_D \mathbf{U}_i$ es la relación S tal que
$$S\left(f_D^1, ..., f_D^n\right) \text{ si y sólo si } \left\{i \in I : R_i\left(f^1(i), ..., f^n(i)\right)\right\} \in D,$$
2. Si F es un símbolo de función, la interpretación de F en $\prod_D \mathbf{U}_i$ es la función H definida por
$$H\left(f_D^1, ..., f_D^n\right) = \left\langle G_i\left(f_D^1, ..., f_D^n\right) : i \in I\right\rangle_D,$$
3. Si c es una constante, se interpreta por el elemento $b \in \prod_D U_i$ definido por
$$b = \langle a_i : i \in I\rangle_D.$$

Para ver que tenemos una buena definición de S y H se tendrá que probar que no importa qué representante tomemos, eso lo garantiza el siguiente resultado.

Proposición 2.1. *Sean I un conjunto, D un filtro sobre I, para cada $i \in I$ sea $\mathbf{U}_i$ un modelo para $\mathcal{L}$ y tome $f_D^1, g_D^1, ..., f_D^n, g_D^n \in \prod_D U_i$; si $f_D^1 = g_D^1, ..., f_D^n = g_D^n$ entonces*
$$\left\{i \in I : R_i\left(f^1(i), ..., f^n(i)\right)\right\} \in D \text{ si y sólo si } \left\{i \in I : R_i\left(g^1(i), ..., g^n(i)\right)\right\} \in D,$$
$$\left\langle G_i\left(f^1(i), ..., f^n(i)\right) : i \in I\right\rangle =_D \left\langle G_i\left(g^1(i), ..., g^n(i)\right) : i \in I\right\rangle.$$

Demostración. Probemos la primer equivalencia, supongamos que
$$\left\{i \in I : R_i\left(f^1(i), ..., f^n(i)\right)\right\} \in D,$$
es claro que
$$\left\{i \in I : R_i\left(g^1(i), ..., g^n(i)\right)\right\} \supset \bigcap_{j \leq n} \left\{i \in I : f^j(i) = g^j(i)\right\} \in D,$$
lo que prueba que $\left\{i \in I : R_i\left(g^1(i), ..., g^n(i)\right)\right\} \in D$. La otra implicación es completamente análoga.

Para la segunda parte note que
$$\left\{i \in I : G_i\left(f^1(i), ..., f^n(i)\right) = G_i\left(g^1(i), ..., g^n(i)\right)\right\} \supset \bigcap_{j \leq n} \left\{i \in I : f^j(i) = g^j(i)\right\} \in D,$$
lo que prueba la segunda parte de la proposición. ❑

Directamente de la definición anterior podemos saber cuándo una oración φ se satisface en un ultraproducto $\prod_D \mathbf{U}_i$ siempre y cuando φ sea lo bastante simple para poder hacer los cálculos; sin embargo, si φ es muy compleja, poder decidir si se satisface en $\prod_D \mathbf{U}_i$ sólo bajo la definición puede ser bastante tedioso y laborioso. El siguiente teorema nos dice que podemos evitarnos esto, nos da una forma bastante fácil de decidir a φ.

Teorema 2.2 (Teorema fundamental de los ultraproductos). *Sea I un conjunto, D un ultrafiltro sobre I y $\mathbf{U}_i$ un modelo para cada $i \in I$, entonces:*

(i) *Para cualquier término $t(x_1, ...x_n)$ y para cualesquiera $f_D^1, ..., f_D^n \in \prod_D U_i$ tenemos,*
$$t_B\left(f_D^1, ..., f_D^n\right) = \left\langle t_{U_i}\left(f^1(i), ..., f^n(i)\right) : i \in I\right\rangle_D.$$

(ii) *Dada una fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ y $f_D^1, ..., f_D^n \in \prod_D U_i$ tenemos,*
$$\prod_D \mathbf{U}_i \models \varphi\left(f_D^1, ..., f_D^n\right) \text{ si y sólo si } \left\{i \in I : U_i \models \varphi\left(f^1(i), ..., f^n(i)\right)\right\} \in D.$$

(iii) *Para cada oración φ tenemos,*
$$\prod_D \mathbf{U}_i \models \varphi \text{ si y sólo si } \{i \in I : U_i \models \varphi\} \in D.$$

Demostración. (i) y (ii) se harán por recursión sobre la complejidad de los términos o fórmulas respectivamente.

Para (i), de la misma definición de producto reducido tenemos el teorema válido si t es o bien una constante o un símbolo de función F. Sólo nos falta el caso inductivo, si
$$t(x_1, ..., x_n) = F(t_1(x_1, ..., x_n), ..., t_m(x_1, ..., x_n)),$$
donde cada t_k satisface (i). Luego
$$t_B\left(f_D^1, ..., f_D^n\right) = H\left(t_{1B}\left(f_D^1, ..., f_D^n\right), ..., t_{mB}\left(f_D^1, ..., f_D^n\right)\right), \tag{1.1}$$
donde H es la interpretación de F en $\prod_D U_i$. De nuevo, como los t_k satisfacen (i) tenemos que
$$t_{kB}\left(f_D^1, ..., f_D^n\right) = g_D^k$$
$$g^k = \left\langle t_{kU_i}\left(f^1(i), ..., f^n(i)\right) : i \in I\right\rangle,$$
y de la definición de la interpretación de función en el producto reducido
$$H\left(g_D^1, ..., g_D^m\right) = \left\langle G_i\left(g^1(i), ..., g^m(i)\right) : i \in I\right\rangle_D$$
y así que
$$t_{u_i}\left(f^1(i), ..., f^n(i)\right) = G_i\left(g^1(i), ..., g^m(i)\right),$$
combinando las 2 igualdades anteriores y la igualdad (1.1) obtenemos
$$t_B\left(f_D^1, ..., f_D^n\right) = H\left(g_D^1, ..., g_D^m\right) = \left\langle t_{u_i}\left(f^1(i), ..., f^n(i)\right) : i \in I\right\rangle_D.$$

Para (ii), es claro que se satisface para fórmulas atómicas por definición de la interpretación de relación en el ultraproducto.

Ahora si $\varphi(x_1,...,x_n) = \neg\psi(x_1,...,x_n)$, como D es un ultrafiltro, las siguientes son equivalentes

$$\prod_D \mathbf{U}_i \models \varphi\left(f_D^1,...,f_D^n\right),$$

$$\neg\prod_D \mathbf{U}_i \models \psi\left(f_D^1,...,f_D^n\right),$$

$$\left\{i \in I : U_i \models \psi\left(f^1(i),...,f^n(i)\right)\right\} \notin D,$$

$$\left\{i \in I : U_i \models \varphi\left(f^1(i),...,f^n(i)\right)\right\} \in D.$$

Ahora, si $\varphi(x_1,...,x_n) = \psi(x_1,...,x_n) \wedge \theta(x_1,...,x_n)$, con ψ y θ satisfaciendo (ii) entonces las siguientes son equivalentes

$$\prod_D \mathbf{U}_i \models \varphi\left(f_D^1,...,f_D^n\right),$$

$$\prod_D \mathbf{U}_i \models \psi\left(f_D^1,...,f_D^n\right) \text{ y } \prod_D \mathbf{U}_i \models \theta\left(f_D^1,...,f_D^n\right),$$

$$\left\{i \in I : U_i \models \psi\left(f^1(i),...,f^n(i)\right)\right\} \in D \text{ y } \left\{i \in I : U_i \models \theta\left(f^1(i),...,f^n(i)\right)\right\} \in D,$$

$$\left\{i \in I : U_i \models \psi\left(f^1(i),...,f^n(i)\right) \wedge \theta\left(f^1(i),...,f^n(i)\right)\right\} \in D.$$

Por último, si $\varphi(x_1,...,x_n) = (\exists x_0)\,\psi(x_0,x_1,...,x_n)$ y $\psi(x_0,x_1,...,x_n)$ satisface (ii), entonces los siguientes son equivalentes

$$\prod_D \mathbf{U}_i \models \varphi\left(f_D^1,...,f_D^n\right),$$

$$\text{existe } f_D^0 \in \prod_D U_i \text{ tal que } \prod_D \mathbf{U}_i \models \psi\left(f_D^0,...,f_D^n\right),$$

$$\text{existe } f_D^0 \in \prod_D A_i \text{ tal que } \left\{i \in I : U_i \models \psi\left(f^0(i),...,f^n(i)\right)\right\} \in D,$$

$$\left\{i \in I : U_i \models \varphi\left(f^1(i),...,f^n(i)\right)\right\} \in D.$$

(iii) es consecuencia de (i) y (ii). ❑

Un resultado interesante que se desprende directamente del teorema fundamental de los ultraproductos es una prueba bastante sencilla del teorema de compacidad.

Corolario 2.3. *Si Σ es un conjunto de oraciones, $I = [\Sigma]^{<\omega}$ es el conjunto de subconjuntos finitos de Σ, y, para cada $i \in I$, $\mathbf{U}_i$ es un modelo para i, entonces existe un ultrafiltro D sobre I tal que el ultraproducto $\prod_D \mathbf{U}_i$ es un modelo para Σ.*

Demostración. Para cada $\sigma \in \Sigma$, sea $\widehat{\sigma} = \{i \in I : \sigma \in i\}$ y sea $E = \{\widehat{\sigma} : \sigma \in \Sigma\}$. Note que el conjunto $\{\sigma_1, ..., \sigma_n\} \in \bigcap_{j \leq n} \widehat{\sigma}_j$; así que E tiene la propiedad de intersección finita. Usando el axioma de elección se puede extender a un ultrafiltro D.

Si $i \in \widehat{\sigma}$ entonces $\sigma \in i$ y entonces como $U_i \models i$ se tiene que $U_i \models \sigma$ y luego para cada $\sigma \in \Sigma$, $\widehat{\sigma} \subset \{i \in I : U_i \models \sigma\}$ y así como $\widehat{\sigma} \in E \subset D$ se tiene que $\{i \in I : U_i \models \sigma\} \in D$ y por el teorema fundamental $\prod_D \mathbf{U}_i \models \sigma$ y sigue que $\prod_D \mathbf{U}_i \models \Sigma$. ❑

2. Cardinales medibles

Definición 2.4. *Si D es un filtro sobre un conjunto I y α es un cardinal infinito, decimos que D es α-completo si $(\forall E \in [D]^{<\alpha})\,(\bigcap E \in D)$.*

Proposición 2.5. *Si D es un filtro sobre un conjunto I con $|I| = \alpha$ y si D es α^+-completo, entonces D es principal.*

Demostración. Sea

$$E = \{I \setminus \{i\} : I \setminus \{i\} \in D\},$$

entonces $|E| \leq \alpha < \alpha^+$ así que como $E \subset D$, $\bigcap E \in D$. Afirmamos que D es el filtro generado por $\bigcap E$, ya que $(\forall X \in D)\,(\bigcap E \subset X)$ pues si $i \notin X$ entonces $X \subset I \setminus \{i\}$ así que $I \setminus \{i\} \in D$ luego $I \setminus \{i\} \in E$ así que $i \notin \cap E$. ❑

Es claro que cualquier filtro principal es α-completo para cualquier α, es por eso que nos concentraremos en filtros libres.

El siguiente resultado nos muestra una equivalencia bastante útil de completez en términos de particiones.

Lema 2.6. *Sea D un ultrafiltro sobre I. Entonces D es α-completo si y sólo si para cada partición $\left\{X_\gamma\right\}_{\gamma<\beta}$ de I con $\beta < \alpha$ existe $\gamma < \beta$ tal que $X_\gamma \in D$.*

Demostración. Supongamos que $\left\{X_\gamma\right\}_{\gamma<\beta}$ es una partición de I en $\beta < \alpha$ partes, entonces

$$\bigcap_{\gamma<\beta} I \setminus X_\gamma = \emptyset$$

como D es α-completo, existe $\gamma < \beta$ tal que $I \setminus X_\gamma \notin D$. Dado que D es ultrafiltro $X_\gamma \in D$.

Recíprocamente, sea $E \in [D]^{<\alpha}$, digamos

$$E = \left\{e_\gamma\right\}_{\gamma<\beta}$$

para alguna $\beta < \alpha$. Definamos una función $f : I \to \beta + 1$ dada por

$$f(i) = \begin{cases} \beta, & \text{si } i \in \bigcap E \\ \text{mín}\left\{\gamma < \beta : i \notin e_\gamma\right\}, & \text{si } i \notin \bigcap E \end{cases}$$

Entonces $\left\{f^{-1}(\gamma)\right\}_{\gamma\leq\beta}$ es una partición de I, y por hipótesis existe $\gamma \leq \beta$ tal que $f^{-1}(\gamma) \in D$.

Si $\gamma < \beta$ entonces $i \in f^{-1}(\gamma)$ entonces $i \notin e_\gamma$ así que $f^{-1}(\gamma) \cap e_\gamma = \emptyset$. Además $e_\gamma \in E \subset D$, como D es un filtro, debe suceder que $f^{-1}(\gamma) \notin D$, así que debe ser que $\gamma = \beta$, en este caso $\bigcap E = f^{-1}(\beta) \in D$. ❑

Proposición 2.7. *Sea* **U** *un modelo tal que* $|\mathbf{U}| = \alpha$ *y* D *un ultrafiltro sobre un conjunto* I, *entonces el encaje natural* $d : U \to \prod_D U$ *dado por* $d(a) = \langle a : i \in I\rangle_D$ *es sobreyectivo si y sólo si* D *es* α^+*-completo.*

Demostración. Supongamos que D es α^+-completo, tome $f_D \in \prod_D U$, entonces $\left\{f^{-1}(a) : a \in U\right\}$ es una partición de I de a lo más $|U| = \alpha < \alpha^+$ miembros, así que por el lema 2.6 tenemos que para alguna $a \in U$, $f^{-1}(a) \in D$ y así que $f =_D \langle a\rangle_{i\in I}$, y se concluye que $f_D = d(a)$. Consecuentemente d es sobreyectivo.

Recíprocamente, de nuevo utilizamos la caracterización del lema 2.6. Tomemos una partición P de I en α pedazos, como $|U| = \alpha$ podemos indizarlo sobre los elementos de U, es decir, $P = \{X_a\}_{a\in U}$ definamos $f : I \to A$ tal que $f(i) = a$ si $i \in X_a$. La función f está bien definida ya que P es partición. Como d es sobreyectivo, existe $a \in U$ tal que $d(a) = f_D$, entonces $f =_D \langle a\rangle_{i\in I}$. Se sigue que $f^{-1}(a) \in D$, pero $f^{-1}(a) = X_a$ por lo tanto $X_a \in D$. ❑

De ahora en adelante denotaremos d al encaje definido en el teorema anterior sin siquiera mencionarlo, al menos que se especifique lo contrario.

Recuerde que para un cardinal regular infinito α, el lenguaje infinito $\mathcal{L}_\alpha$ es exactamente el conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$ agregando la siguientes tres reglas:

(1) $\mathcal{L}_\alpha$ tiene α símbolos de variable.
(2) Si Φ es un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_\alpha$ tal que $|\Phi| < \alpha$ entonces $\bigwedge \Phi$ es una fórmula de $\mathcal{L}_\alpha$.
(3) Si V es un conjunto de variables de $\mathcal{L}_\alpha$ tal que $|V| < \alpha$ y φ una fórmula en $\mathcal{L}_\alpha$ entonces $(\exists V)\,\varphi$ es una fórmula en $\mathcal{L}_\alpha$.

Observe que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\omega$ ya que los puntos (2) y (3) son equivalentes a

(2') Si φ y ψ son fórmulas en $\mathcal{L}_\omega$ entonces $\varphi \wedge \psi$ también lo es.
(3') Si φ es una fórmula en $\mathcal{L}_\omega$ entonces y x un símbolo de variable entonces $(\exists x)\,\varphi$ también lo es.

El siguiente resultado muestra que el teorema fundamental puede generalizarse para lenguajes de longitud α si además pedimos que el ultrafiltro sea completo. Tiene sentido hablar del lenguaje $\mathcal{L}_\alpha$, ya que probaremos que todo cardinal medible es regular, y más aún, es fuertemente inaccesible. La prueba es bastante similar al teorema fundamental original, sólo tenemos que cuidar un poco más las conjunciones y existenciales de longitudes infinitas, que no será problema por la completez del ultrafiltro.

Teorema 2.8. *Sea* $\mathbf{B}$ *el ultraproducto* $\prod_D \mathbf{U}_i$ *con* D *un ultrafiltro libre* α*-completo en* I*, entonces:*

(i) *Dada cualquier fórmula* $\varphi(x_1, ...)$ *de* $\mathcal{L}_\alpha$ *y* $f_D^1, ... \in \prod_D U_i$*,*
$$\prod_D \mathbf{U}_i \models \varphi\left(f_D^1, ...\right) \text{ si y sólo si } \left\{i \in I : U_i \models \varphi\left(f^1(i), ...\right)\right\} \in D.$$
(ii) *Para cualquier oración* φ *de* $\mathcal{L}_\alpha$*,*
$$\prod_D \mathbf{U}_i \models \varphi \text{ si y sólo si } \{i \in I : U_i \models \varphi\} \in D.$$

Demostración. Para (i), si φ es una fórmula atómica, entonces φ ya estaba en el lenguaje $\mathcal{L}$ y por el teorema fundamental el resultado el válido.

Si $\varphi = \neg\psi$ entonces, como D es un ultrafiltro, para cada $f_D^1, ... \in \prod_D U_i$ las siguientes afirmaciones son equivalentes
$$\prod_D \mathbf{U}_i \models \varphi\left(f_D^1, ...\right),$$
$$\neg \prod_D \mathbf{U}_i \models \psi\left(f_D^1, ...\right),$$
$$\left\{i \in I : \mathbf{U}_i \models \psi\left(f_D^1, ...\right)\right\} \notin D,$$
$$\left\{i \in I : \mathbf{U}_i \models \varphi\left(f_D^1, ...\right)\right\} \in D.$$
Ahora si $\varphi = \bigwedge_{\gamma \in \beta} \psi_\gamma$ con $\beta \in \alpha$ y los ψ_γ satisfaciendo (i), tome $f_D^1, ... \in \prod_D U_i$. Por la completez de D las siguientes afirmaciones son equivalentes
$$\prod_D \mathbf{U}_i \models \bigwedge_{\gamma \in \beta} \psi_\gamma\left(f_D^1, ...\right),$$

$$\text{para cada } \gamma < \beta \prod_D \mathbf{U}_i \models \psi_\gamma \left(f_D^1, ... \right),$$

$$\text{para cada } \gamma < \beta \left\{ i \in I : \mathbf{U}_i \models \psi_\gamma \left(f_D^1, ... \right) \right\} \in D,$$

$$\left\{ i \in I : (\forall \gamma < \beta) \left(\mathbf{U}_i \models \psi_\gamma \left(f_D^1, ... \right) \right) \right\} \in D,$$

$$\left\{ i \in I : \mathbf{U}_i \models \bigwedge\nolimits_{\gamma \in \beta} \psi_\gamma \left(f_D^1, ... \right) \right\} \in D.$$

Por último si $\varphi = (\exists y_1, ...) \psi$ y fijemos $f_D^1, ... \in \prod_D U_i$, entonces en $\prod_D \mathbf{U}_i \ \varphi \left(f_D^1, ... \right)$ si y sólo si $(\exists y_1, ..) \psi \left(f_D^1, ... \right)$ si y sólo si existen $g_D^1, ...$ tales que $\psi \left(f_D^1, ..., g_D^1, ... \right)$.

Por hipótesis de inducción

$$\prod_D \mathbf{U}_i \models \psi \left(f_D^1, ..., g_D^1, ... \right) \text{ si y sólo si } \left\{ i \in I : \mathbf{U}_i \models \psi \left(f_D^1, ..., g_D^1, ... \right) \right\} \in D.$$

De nuevo, en $\mathbf{U}_i$ si existen $g_D^1, ...$ tales que $\psi \left(f_D^1, ..., g_D^1, ... \right)$ sí y sólo si φ.

Juntando la cadena de equivalencias tenemos la buscada

$$\prod_D \mathbf{U}_i \models \varphi \left(f_D^1, ... \right) \text{ si y sólo si } \left\{ i \in I : \mathbf{U}_i \models \varphi \left(f_D^1, ... \right) \right\} \in D.$$

❏

Definición 2.9. *Un cardinal no numerable α se llama medible si existe un ultrafiltro α-completo sobre α.*

Si α es un cardinal medible y D un ultrafiltro libre α-completo sobre α podemos construir una función $\mu : P(\alpha) \to 2$ tal que $\mu(X) = 1$ si y sólo si $X \in D$. Tal función tiene las siguientes propiedades

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.
(2) $\mu(\{\gamma\}) = 0$ para cualquier $\gamma \in \alpha$.
(3) $\mu \left(\bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta \right) = \sum_{\beta < \alpha} \mu \left(X_\beta \right)$ si los X_n son una familia disjunta de subconjuntos de α.

Note que la suma en (3) está bien definida, ya que como D es un filtro a lo más uno de los X_β pertenece a D y así que a lo más uno de ellos tiene medida 1. Recíprocamente, si se tiene una medida sobre un cardinal α que cumple (1), (2) y (3) podemos construir un ultrafiltro libre α-completo $D = \mu^{-1}(\{1\})$; por esta razón se le da este nombre a estos cardinales.

Teorema 2.10. *Sea α un cardinal medible. Si Φ es un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_\alpha$ con $|\Phi| = \alpha$ y si cada $\Phi_0 \in [\Phi]^{<\alpha}$ tiene un modelo, entonces Φ tiene un modelo.*

Demostración. Sea D un ultrafiltro libre α-completo sobre α. Sea $\left\{\varphi_\beta : \beta < \alpha\right\}$ una enumeración de Φ. Tómese para cada $\beta \in \alpha$ un modelo $\mathbf{U}_\beta$ tal que para $\gamma < \beta$ $\mathbf{U}_\beta \models \varphi_\gamma$ y luego considere el ultraproducto $\prod_D \mathbf{U}_\beta$.

Afirmamos que $\prod_D \mathbf{U}_\beta \models \Phi$ ya que para cada $\varphi_\beta \in \Phi$

$$(\beta, \alpha) \subset \left\{\gamma \in \alpha : U_\gamma \models \varphi_\beta\right\}$$

y $(\beta, \alpha) \in D$ pues $(\beta, \alpha) = \bigcap_{\gamma<\beta} (\alpha \setminus \{\gamma\}) \in D$, así que $\left\{\gamma \in \alpha : U_\gamma \models \varphi_\beta\right\} \in D$ y por el teorema 2.8 $\prod_D \mathbf{U}_\beta \models \Phi$. ❑

Los cardinales no numerables que cumplen la consecuencia del teorema anterior se les llama *débilmente compactos*, así el teorema anterior puede traducirse como *todo cardinal medible es débilmente compacto*.

Nos hemos interesado sobre ultrafiltros libres α-completos sobre α. ¿Podemos debilitar la condición sobre el ultrafiltro de tal forma que en ZFC podemos encontrar uno de estos ultrafiltros? Podemos preguntarnos si existen ultrafiltros libres β-completos sobre α para $\omega < \beta < \alpha$; el siguiente resultado afirma que no es posible decidir en ZFC esta condición más débil, ya que de existir un ultrafiltro así, algún $\gamma \in [\beta, \alpha]$ es medible.

Proposición 2.11. *Si D es un ultrafiltro libre sobre I, entonces hay un máximo cardinal α tal que D es α-completo, y además $\alpha = \omega$ o bien α es medible.*

Demostración. Como D es libre, D no es β-completo, para alguna β mínima, si fuera límite quiere decir que existe $\gamma < \beta$ tal que D no es γ-completo, lo que contradice la elección de β, así que $\beta = \alpha^+$ y entonces α es el máximo cardinal tal que D es α-completo.

Como D no es α^+-completo, existe una partición $\left\{X_\eta\right\}_{\eta\in\alpha}$ tal que $X_\eta \notin D$ para cada $\eta \in \alpha$. Definimos $f : I \to \alpha$ por $f(i) = \eta$ si $i \in X_\eta$, entonces el conjunto

$$E = \left\{Y \subset \alpha : f^{-1}(Y) \in D\right\}$$

es un ultrafiltro libre α-completo, pues si $Y_1, Y_2 \in E$, $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) = f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$, así que $Y_1 \cap Y_2 \in E$; luego si $Y \subset B$ y $Y \in E$ entonces $f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(B)$ así que $f^{-1}(B) \in D$ y $B \in E$; si $Y \subset \alpha$ entonces como D es ultrafiltro, $f^{-1}(Y)$ o $f^{-1}(\alpha \setminus Y) = I \setminus f^{-1}(Y) \in D$ así que Y o $\alpha \setminus Y \in E$. Para ver que E es libre, tome $\eta \in \alpha$ entonces

$$f^{-1}(\eta) = X_\eta \notin D,$$

luego $\{\eta\} \notin E$ y por lo tanto E es libre. Por lo tanto α es medible. ❑

Algo interesante sobre los ultraproductos es que agregan ordinales en el sentido de que si consideramos el modelo $\langle \alpha, < \rangle$ entonces en $\prod_D \langle \alpha, < \rangle$ hay más ordinales que en el original $\langle \alpha, < \rangle$, a saber $\langle \gamma : \gamma < \alpha \rangle_D \in \prod_D \langle \alpha, < \rangle$ es de tipo de orden al menos α, objeto que no existe en $\langle \alpha, < \rangle$, para ser más precisos tenemos el siguente resultado.

Lema 2.12. *Sea α un cardinal medible y D un ultrafiltro libre α-completo sobre α. Si* $\mathbf{B} = \prod_D \langle \alpha, < \rangle$ *entonces*

(i) $\mathbf{B}$ *es una estructura bien ordenada de tipo de orden mayor que α.*
(ii) *Para cada $\gamma < \alpha$, $d(\gamma)$ es el γ-ésimo elemento de* $\mathbf{B}$.

Demostración. $\mathbf{B}$ ya es bien ordenado por el teorema fundamental, ya que $\langle \alpha, < \rangle$ lo es. Como d preserva orden, se tiene que el tipo de orden de $\mathbf{B}$ es mayor o igual que α. Denotemos por $\bar{\gamma}$ al γ-ésimo elemento de $\mathbf{B}$.

Probemos (ii) por inducción sobre γ, sea $\gamma < \alpha$ y suponga que para toda $\delta < \gamma$ se satisface (ii). Para cada $\delta < \alpha$ agregue una constante c_δ que en $\langle \alpha, <, \delta \rangle_{\delta<\gamma}$ se interprete como δ.

En $\langle \alpha, <, \delta \rangle_{\delta<\gamma}$ se satisface $(\forall x)\left(x < c_\gamma \leftrightarrow \bigvee \{x = c_\delta : \delta < \gamma\}\right)$ y por el teorema 2.8 también en $\langle \mathbf{B}, d(\delta) \rangle_{\delta<\gamma}$ asi que los elementos menores que $d(\gamma)$ son los $\bar{\delta}$ con $\delta < \gamma$ así que $d(\gamma) = \bar{\gamma}$.

Para probar (i), note que como D es libre no puede ser α^+-completo así que por la proposición 2.7 d no puede ser sobre y por la parte (ii) la imagen de α es in segmento inicial propio de $\mathbf{B}$. ❑

Recuerde que un cardinal α es fuertemente inaccesible si es límite y siempre que $\gamma < \alpha$ implica que $2^\gamma < \alpha$.

Teorema 2.13. *Sea α un cardinal medible. Entonces*

(i) *α es fuertemente inaccesible.*
(ii) *α es el α-ésimo cardinal fuertemente inaccesible.*

Demostración. Sea D un ultrafiltro libre α-completo sobre α, y $\mathbf{U} = \langle \alpha, <, b \rangle_{b<\alpha}$ y $\mathbf{B} = \prod_D \mathbf{U}$, y sea β el tipo de orden de $\mathbf{B}$. Denotamos por $\overline{\gamma}$ al γ-ésimo elemento de $\mathbf{B}$. Por el lema 2.12 $\alpha < \beta$, y $d(\gamma) = \overline{\gamma}$ si $\gamma < \alpha$, y cada constante c_γ es interpretada por γ en $\mathbf{U}$ y por $d(\gamma)$ en el ultraproducto $\mathbf{B}$.

Primero mostramos que α es regular, suponga que no, entonces existe $\gamma < \alpha$ y una función $F : \gamma \to \alpha$ cofinal, defina $F(\delta) = 0$ si $\delta \geq \gamma$. Considere el ultraproducto

$$\langle \mathbf{B}, G \rangle = \prod_D \langle U, F \rangle,$$

así que para cada $\delta < \alpha$, se tiene que

$$G\left(\overline{\delta}\right) = G(d(\delta)) = d(F(\delta)) = \overline{F(\delta)} < \overline{\alpha},$$

la primera y la tercera igualdad son claras, la segunda se sigue del teorema fundamental, ya que $G(d(\delta)) = d(F(\delta))$ si y sólo si $\{\delta \in \alpha : F(\delta) = F(\delta)\} \in D$ lo cual se satisface.

Note que

$$\langle \mathbf{B}, G\rangle \models (\exists x)(\forall y)\left(y < c_\gamma \Rightarrow F(y) < x\right),$$

pues tome $x = \overline{\alpha}$ y la desigualdad anterior hace el trabajo. Ahora como F es cofinal en α se tiene que

$$\langle \mathbf{U}, F\rangle \models (\forall x)(\exists y)\left(y < c_\gamma \wedge x < F(y)\right),$$

y por lo tanto también lo satisface $\langle \mathbf{B}, G\rangle$ lo que es una contradicción, así que α es regular.

Veamos ahora que $\gamma < \alpha \Rightarrow 2^\gamma < \alpha$. Supongamos lo contrario, es decir, que existe $\gamma < \alpha$ tal que $\alpha < 2^\gamma$. Entonces existe una función $F : \alpha \to P(\gamma)$ uno a uno. Sea

$$R = \{(\eta, \delta) \in \alpha \times \gamma : \delta \in F(\eta)\},$$

y

$$\langle \mathbf{B}, S\rangle = \prod_D \langle \mathbf{U}, R\rangle.$$

Defina $\overline{F} : \beta \to P(\gamma)$ por

$$\overline{F}(\eta) = \left\{\delta < \beta : S\left(\overline{\eta}, \overline{\delta}\right)\right\},$$

$\overline{F}(\eta) \in P(\gamma)$ ya que

$$\langle \mathbf{U}, R\rangle \models (\forall x, y)\left(R(x, y) \Rightarrow y < c_\gamma\right),$$

y por lo tanto también en el ultraproducto $\langle \mathbf{B}, S\rangle$.

$\overline{F}$ es inyectiva ya que, como F lo es, se tiene

$$\langle \mathbf{U}, R\rangle \models (\forall x, y)(x \neq y \Rightarrow (\exists z) \neg (R(x, z) \leftrightarrow R(y, z))),$$

y por lo tanto también se satisface en $\langle \mathbf{B}, S\rangle$.

Note que si $\eta < \alpha$ entonces

$$F(\eta) = \{\delta : R(\eta, \delta)\} = \left\{\delta : S\left(\overline{\eta}, \overline{\delta}\right)\right\} = \overline{F}(\eta),$$

así que el conjunto $X = \overline{F}(\alpha)$ no pertenece al rango de F ya que $\overline{F}$ es inyectiva y coincide con F en α. Además $X \in P(\gamma)$.

Sea

$$\varphi \equiv (\exists x)(\forall y)\left(R(x, y) \leftrightarrow \bigvee \{y = c_\delta : \delta \in X\}\right),$$

entonces $\langle \mathbf{B}, S \rangle \models \varphi$ tomando $x = \overline{\alpha}$ pero φ es falso en $\langle \mathbf{U}, R\rangle$ y tenemos una contradicción de suponer que existe tal γ, así que hemos probado que $\gamma < \alpha \to 2^{\gamma} < \alpha$ y por lo tanto α es inaccesible. ❑

Para los siguientes resultados necesitaremos algunas definiciones.

Definamos por recursión los números *beth*:

- $\beth_0 = \omega$.
- $\beth_{\alpha+1} = |P(\beth_\alpha)|$.
- $\beth_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} \beth_\gamma$ si α es límite.

Para cada α ordinal defina V_α de la manera siguiente:

- $V_0 = \emptyset$.
- $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$.
- $V_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} V_\gamma$ si α es límite.

Proposición 2.14. *Sean α y β ordinales entonces*

(i) *V_α es un conjunto transitivo.*
(ii) *Si $\alpha < \beta$ entonces $V_\alpha \subset V_\beta$.*
(iii) $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$.
(iv) *$\alpha \subset V_\alpha$ pero $\alpha \notin V_\alpha$.*

Demostración. La prueba para (i) y (ii) se puede hacer por inducción simultáneamente, si $x \in V_\alpha$, por la transitividad de V_α se tiene $x \subset V_\alpha$ y luego $x \in V_{\alpha+1}$. Ahora si $y \in x \in V_{\alpha+1}$ entonces $y \in V_\alpha \subset V_{\alpha+1}$. El caso límite en ambos incisos es trivial. (iii) se sigue directamente de la definición y (iv) directo por inducción. ❑

Una prueba más completa se puede encontrar en [**2**].

Para cada cardinal θ defina el siguiente conjunto

$$H(\theta) = \{x : (\exists y)(y \text{ es transitivo}, x \subset y, |y| < \theta)\}.$$

Un conjunto x pertenece a $H(\theta)$ si x es herediariamente pequeño, es decir, si x, como sus elementos, los elementos de sus elementos, etcétera, tienen cardinalidad menor que θ.

Algunas propiedades básicas de los $H(\theta)$ nos la da la siguiente proposición.

Proposición 2.15. *Sean θ y κ cardinales entonces*

(i) $H(\theta) \subset V_\theta$.
(ii) *Si* $\theta < \kappa$ *entonces* $H(\theta) \subset H(\kappa)$.
(iii) $\theta \subset H(\theta)$.
(iv) *Si* θ *es un cardinal regular no numerable entonces* $\langle H(\theta), \in\rangle \models ZF \setminus P$.

La prueba de esta proposición se puede encontrar en [**4**] pág. 130.

Si $\langle B, E\rangle$ es un modelo bien fundado, diremos que el tipo de $\langle B, E\rangle$ es el tipo de orden de los ordinales de $\langle B, E\rangle$.

Teorema 2.16. *El axioma de constructibilidad es equivalente a que para cada cardinal regular $\alpha > \omega$, cada modelo bien fundado $\langle B, E\rangle$ de $ZF \setminus P$ de tipo de orden α es isomorfo a $\langle H(\alpha), \in\rangle$.*

Teorema 2.17. *(Teorema de Scott)*

El axioma de constructibilidad implica que no existen cardinales medibles.

Demostración. Supongamos que existe un cardinal medible, sea α el primero de ellos, y definimos $\beta = \left|2^{2^{2^\alpha}}\right|^+$.

$V_{\alpha+3}$ es un conjunto transitivo de cardinalidad menor que β, además como $V_{\alpha+3}$ es transtitivo se tiene que $V_{\alpha+3} \in H(\beta)$. Por otro lado, de la regularidad de β tenemos que $\langle H(\beta), \in\rangle$ es un modelo de $ZF \setminus P$.

Ahora sea D un ultrafiltro libre α-completo sobre α. Formamos la ultrapotencia

$$\langle B, E\rangle = \prod_D \langle H(\beta), \in\rangle .$$

Por el lema 2.12, es un modelo bien fundado de $ZF \setminus P$. Afirmamos que el tipo de orden de $\langle B, E\rangle$ es β.

Para la primer desigualdad, si O es el conjunto de ordinales en $\langle B, E\rangle$ entonces d encaja isomórficamente β en O, así que el tipo de orden de $\langle B, E\rangle$ es al menos β.

Para la otra desigualdad, tomemos x un ordinal de $\langle B, E\rangle$, entonces existe $f : \alpha \to \beta$ tal que $x = f_D$. Como $cof(\beta) = \beta > \alpha$ entonces f no puede ser cofinal así que existe $\gamma < \beta$ tal que $f : \alpha \to \gamma$. Para cada y tal que yEx podemos tomar $g : \alpha \to \gamma$ tal que $y = g_D$ ya que si $y = g'_D$, como yEx y por el teorema fundamental $\{\delta : g'(\delta) < f(\delta)\} \in D$, y tomamos $g(\delta) = g'(\delta)$ si $g'(\delta) < f(\delta)$ o $g(\delta) = 0$ en caso contrario, así que $g_D = g'_D$ y g está acotada por γ. Por esta observación $|\{y : yEx\}| \leq \gamma^\alpha$, como $\gamma \leq 2^{2^{2^\alpha}}$ también $\gamma^\alpha \leq 2^{2^{2^\alpha}} < \beta$, entonces cada ordinal x tiene menos que β predecesores y concluimos que el tipo de orden de la ultrapotencia $\langle B, E\rangle$ es β .

Sea $\varphi(x) \equiv$“x es el primer cardinal medible”. $\varphi(x)$ puede tener sus cuantificadores acotados por $P(P(P(x))$ ya que φ sólo necesita verificar cada familia de subconjuntos de x para decidirse; entonces por la forma en que tomamos β tenemos

$$\langle H(\beta), \in\rangle \models \varphi(x) \longleftrightarrow x = \alpha,$$

y por el teorema fundamental

$$\langle B, E\rangle \models \varphi(x) \longleftrightarrow x = d(\alpha).$$

Sea f_D el α-ésimo ordinal de $\langle B, E\rangle$, entonces $f_D E d(\alpha)$, en particular $f_D \neq d(\alpha)$.

Veamos ahora que $\langle B, E\rangle$ no puede ser isomorfo a $\langle H(\beta), \in\rangle$. Si $\Psi : \langle H(\beta), \in\rangle \to \langle B, E\rangle$ es isomorfismo entonces $\Psi(\alpha) = f_D$, y además $\varphi(\alpha)$ se satisface pero no $\varphi(f_D)$, pues el único elemento de B que satisface φ es $d(\alpha)$, así que no puede haber tal isomorfismo. Esto contradice el axioma de constructibilidad. ❏

El lema 2.12 nos dice cómo son los primeros $< \alpha$ ordinales en $\prod_D \langle \alpha, <\rangle$, son exactamente los $d(\gamma)$ para $\gamma < \alpha$. Podemos mejorar este resultado si escogemos con más ciudado al ultrafiltro D.

Definición 2.18. *Dada una sucesión $\left\langle x_\gamma \right\rangle_{\gamma<\alpha}$ tal que $x_\gamma \subset \alpha$ se define su intersección diagonal*

$$\triangle_{\gamma\in\alpha} X_\gamma = \left\{\delta \in \gamma : \delta \in \bigcap_{\gamma\in\delta} X_\gamma\right\}.$$

Definición 2.19. *Un ultrafiltro libre D sobre $\alpha > \omega$ se llama normal si para cualquier sucesión $\left\langle X_\gamma \right\rangle_{\gamma\in\alpha}$ en F, su intersección diagonal $\triangle_{\gamma\in\alpha} X_\gamma \in F$.*

Proposición 2.20. *Si D es un ultrafiltro α-completo sobre α, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1). *D es normal.*
(2). *Para cada función $f : \alpha \to \alpha$ tal que $\{\beta : f(\beta) < \beta\} \in D$ existe $\gamma \in \alpha$ tal que el conjunto $\{\delta \in \alpha : f(\delta) = \gamma\} \in D$.*
(3). *El α-ésimo elemento en la ultrapotencia $\prod_D (\alpha, <)$ es Id_D.*

Demostración. (1)$\Longrightarrow$(2): Suponga que para cada $\gamma \in \alpha$ $f^{-1}(\gamma) \notin D$, entonces $\alpha \setminus g^{-1}(\gamma) \in D$ y sea

$$B = \triangle_{\gamma\in\alpha}\left(\alpha \setminus g^{-1}(\gamma)\right) \in D.$$

Si $\beta \in B$ entonces $\beta \in \alpha \setminus g^{-1}(\gamma)$ para cada $\gamma < \beta$, así $g(\beta) \geq \beta$; por lo tanto se tiene que $\emptyset = B \cap \{\beta : g(\beta) < \beta\} \in D$.

(2)$\Longrightarrow$(1): Sea $\left\langle X_\gamma \right\rangle_{\gamma\in\alpha}$ una suceción en D. Sea $X = \triangle_{\gamma\in\alpha} X_\gamma$; supongamos que $\alpha \setminus X \in D$, defina

$$f(\gamma) = \text{mín}\{\delta \in \alpha : \gamma \notin X_\delta\}.$$

Sea $\beta \in \alpha \setminus X$ entonces existe $\gamma \in \beta$ tal que $\beta \notin X_\gamma$, así que $f(\beta) < \beta$ y como $\alpha \setminus X \in D$ f es regresiva en D. Por hipótesis existe γ tal que $f^{-1}(\gamma) \in D$ entonces $X_\gamma \cap f^{-1}(\gamma) \in D$, pero $\beta \in f^{-1}(\gamma) \Rightarrow f(\beta) = \gamma \Rightarrow \beta \notin X_\alpha$. Así que esta intersección es vacía y no puede pertenecer a D.

(2)$\Longrightarrow$(3): Sea $f : \alpha \to \alpha$ tal que en $\prod_D (\alpha, <)$ se tenga $f_D < Id_D$, entonces

$$\{\gamma : f(\gamma) < \gamma\} \in D,$$

por hipótesis existe $\delta < \alpha$ tal que

$$\{\gamma : f(\gamma) = \delta\} \in D,$$

y por el lema 2.12 $f_D = d(\delta)$ tiene tipo de orden δ, esto prueba que el tipo de orden de Id_D es a lo más α, pero de nuevo por el lema 2.12 no puede ser menor que α.

(3)$\Longrightarrow$(2): Sea $f : \alpha \to \alpha$ como en la hipótesis de (2) entonces opr el teorema fundamental $f_D < Id_D$, pero por hipótesis Id_D tiene tipo de orden α así que f_D tiene tipo de orden $\gamma < \alpha$, por el lema 2.12 $f_D = d(\gamma)$ o bien $\{\delta : f(\delta) = \gamma\} \in D$. ❏

El resultado anterior nos da mucha información sobre un ultrafiltro normal, pero a la vez que es bastante restrictivo; aún así podemos asegurar su existencia.

Proposición 2.21. *Si α es un cardinal medible entonces existe un ultrafiltro normal sobre α.*

Demostración. Sea E un ultrafiltro libre α-completo sobre α, considere la ultrapotencia $\prod_E \langle \alpha, < \rangle$, y sea f_E su α-ésimo elemento. Defina

$$D = \left\{X \subset \alpha : f^{-1}(X) \in E\right\},$$

es claro que D es un ultrafiltro α-completo. D es libre ya que para cada $\gamma < \alpha$

$$d(\gamma) = \overline{\gamma} < \overline{\alpha} = f_E,$$

así que $f^{-1}(\{\gamma\}) = \{\beta < \alpha : f(\beta) = \gamma\} \notin E$, y así $\{\gamma\} \notin D$.

Sólo falta la normalidad de D. Sea $g : \alpha \to \alpha$ tal que $X = \{\beta : g(\beta) < \beta\} \in D$ probaremos que $g_D = \gamma$ para alguna $\gamma < \alpha$. Sea $h = g \circ f$ asi que para cualquier $\beta \in f^{-1}(X)$

$$h(\beta) = g(f(\beta)) < f(\beta),$$

como $f^{-1}(X) \in E$ (pues $X \in D$) tenemos que $h_E < f_E = \overline{\alpha}$. Entonces existe $\gamma \in \alpha$ tal que $h_E = \overline{\gamma} = d(\gamma)$ y

$$f^{-1}(\{\beta : g(\beta) = \gamma\}) = \{\beta : h(\beta) = \gamma\} \in E,$$

entonces $\{\beta : g(\beta) = \gamma\} \in D$. ❑

El siguiente resultado además de ser un ejemplo de por qué los ultrafiltros normales son bastante importantes, nos dice que toda relación de pertenencia en $V_{\alpha+1}$ está determinado por los niveles anteriores.

Proposición 2.22. *Si α es un cardinal medible y D un ultrafiltro normal sobre α. Si para cada $x \in V_{\alpha+1}$, $\pi(x) = \left\langle x \cap V_\beta, \in \right\rangle_{\beta\in\alpha}$, entonces*

$$\pi : \langle V_{\alpha+1}, \in\rangle \cong \prod_D \left\langle V_{\beta+1}, \in \right\rangle.$$

Demostración. Para notación, sea $\langle B, E\rangle = \prod_D \left\langle V_{\beta+1}, \in \right\rangle$. Veamos primero que π es inyectiva. Sean $x, y \in V_{\alpha+1}$ distintos: Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existe alguna $z \in x \setminus y$. Como $z \in x \in V_{\alpha+1}$ entonces $z \in V_\alpha$ y como α es límite, existe $\gamma < \alpha$ tal que $z \in V_\gamma$. Para cualquier $\beta \in [\gamma, \alpha)$

$$z \in \left(x \cap V_\beta\right) \setminus \left(y \cap V_\beta\right),$$

ya que $z = z \cap V_\beta$; como D es α-completo y libre, $[\gamma, \alpha) \in D$ y por la definición de π,

$$\pi(z)\, E \pi(x) \wedge \neg\pi(z)\, E\pi(y).$$

Ahora probamos que

$$x \in y \Rightarrow \pi(x)\, E\pi(y).$$

Supongamos que $x \in y$. Por el mismo argumento que arriba, $x \in V_\gamma$ para alguna $\gamma \in \alpha$ y para cualquier $\beta \in [\gamma, \alpha)$,

$$x = x \cap V_\beta,$$

y como $x \in V_\beta$,

$$x \cap V_\beta = x \in y \cap V_\beta,$$

y por la definición de π llegamos a que $\pi(x)\, E\pi(y)$.

Afirmamos que si $f_D E g_D$ para alguna $g_D \in B$, entonces existe $u \in V_\alpha$ tal que $\pi(u) = h_D$ pues si se satisface esta hipótesis,

$$\{\beta < \alpha : f(\beta) \in g(\beta)\} \in D,$$

pero como $\langle B, E\rangle = \prod_D \left\langle V_{\beta+1}, \in \right\rangle$ para cada $\beta < \alpha$ $g(\beta) \in V_{\beta+1}$; así $h(\beta) \in V_\beta$ y por lo tanto,

$$\left\{\beta < \alpha : f(\beta) \in V_\beta\right\} \in D.$$

Para cada $\beta < \alpha$, sea $h(\beta) = \text{mín}\left\{\gamma : f(\beta) \in V_{\gamma+1}\right\}$. Afirmamos que h es regresiva en X. Sea $\beta \in X$, si β es límite, como $f(\beta) \in V_\beta$, se satisface que $f(\beta) \in V_\gamma \subset V_{\gamma+1}$ para alguna $\gamma < \beta$ y como $h(\beta)$

es la menor de estas γ, entonces $h(\beta) < \beta$. Si β es sucesor, digamos $\beta = \gamma + 1$, $f(\beta) \in V_\beta = V_{\gamma+1}$ así que $g(\beta) \leq \gamma < \beta$. Ahora por la proposición 2.20 existe $\gamma < \alpha$ tal que $Y = \{\beta : g(\beta) = \gamma\} \in D$.

Como α es inaccesible por el teorema 2.13 se tiene

$$\left|V_{\gamma+1}\right| = \beth_{\gamma+1} < \beth_\alpha = \alpha.$$

Consideremos la siguiente partición $\{\alpha \setminus Y\} \cup \left\{f^{-1}(u) : u \in V_{\gamma+1}\right\}$. Por la α-completez de U alguno de ellos pertenece a D, note que $\alpha \setminus Y \notin D$ pues $Y \in D$. Así que existe $u \in V_{\gamma+1|}$ tal que $f^{-1}(u) \in D$. Veamos que esta u es la que funciona. Si $\beta > \gamma$ tenemos $u \cap V_\beta = u$ y así

$$\left\{\beta : f(\beta) = u \cap V_\beta\right\} \supset [\gamma, \alpha) \cap f^{-1}(u) \in D,$$

y por lo tanto $f_D = \pi u$, lo que prueba la afirmación.

Probemos ahora que

$$\pi x E \pi y \Rightarrow x \in y;$$

supongamos que $\pi x E \pi y$ entonces por la afirmación $x \in V_\alpha$, así que existe $\gamma < \alpha$ tal que si $\beta \in [\gamma, \alpha)$ entonces $x = x \cap V_\beta$; además,

$$Z = \left\{\beta : x \cap V_\beta \in y \cap V_\beta\right\} \in D,$$

entonces $[\gamma, \alpha) \cap Z \in D$, en particular no vacío, tome $\beta \in [\gamma, \alpha) \cap Z$ y tenemos

$$x = x \cap V_\beta \in y \cap V_\beta \subset y,$$

así que $x \in y$.

Sólo falta probar que π es sobreyectiva. Tome $f_D \in B$. Sea

$$x = \{y \in V_\alpha : \pi y E f_D\},$$

así $x \subset V_\alpha$ y $x \in V_{\alpha+1}$. Afirmamos que $\pi x = f_D$. Como los $\left\langle V_\beta, \in\right\rangle$ modelan extensionalidad, B también, así que basta probar que para cada $h_D \in B$

$$h_D E f_D \Longleftrightarrow h_D E \pi x.$$

Si $h_D E f_D$ entonces $h_D = \pi u$ para alguna $u \in V_\alpha$ y por definición de x, $u \in x$, como ya probamos que π preserva relación

$$h_D E \pi x.$$

Recíprocamente, si $h_D E \pi x$ de nuevo existe $u \in V_\alpha$ tal que $h_D = \pi u$ entonces $\pi u E \pi x$ y por lo que probamos anteriormente $u \in x$, luego por la definición de x tenemos que $\pi u E f_D$ por lo tanto $h_D E f_D$.

❑

Existen más aplicaciones de ultrafiltros normales, por ejemplo, el teorema 2.13 afirma que cualquier cardinal medible α es el α-ésimo cardinal fuertemente inaccesible, se puede demostrar que si D es un ultrafiltro normal sobre α, entonces no sólo tenemos la conclusión del teorema 2.13, además podemos afirmar que el conjunto de cardinales fuertemente inaccesibles menores que α pertenece a D.

Capítulo 3

Forcing de Prikry

En el capítulo anterior se trabajó con cardinales medibles a través de los ultraproductos. En este capítulo trabajaremos con los cardinales medibles utilizando métodos de forcing.

Definición 3.1. *Dado un cardinal κ y un filtro F sobre κ, el forcing de Prikry es $P_F = [\kappa]^{<\omega} \times F$ con el orden $\langle s, A\rangle \leq \langle t, B\rangle$ si t es segmento inicial de s y $A \cup (s \setminus t) \subset B$.*

En la definición anterior pedimos que F sólo sea un filtro para mantener cierta generalidad, aunque los resultados más importantes presentados aquí, F será un ultrafiltro normal.

El sentido de este forcing es agregar un nuevo subconjunto de κ, cuyos elementos estén controlados por el filtro F.

El siguiente lema resume las propiedades básicas de este forcing.

Lema 3.2. *Sea κ un cardinal y F un filtro libre κ-completo sobre κ entonces:*

(1). *si $\langle s, A\rangle, \langle t, B\rangle \in P_F$ son compatibles, entonces s es un segmento inicial de t o viceverza.*
(2). *P_F tiene la κ^+-cc.*
(3). *Si G es P_F-genérico y $x = \bigcup \{s : \exists A (\langle s, A\rangle \in G)\}$, entonces $x \subset \kappa$ no es acotada y de tipo de orden ω. Además $V[x] = V[G]$.*

Demostración. Para demostrar (1), sea $\langle u, C\rangle \in P_F$ que extiende a ambos $\langle s, A\rangle, \langle t, B\rangle$. Entonces s y t son segmentos iniciales de u, así que $s = u \cap \alpha$ y $t = u \cap \beta$. Suponemos que $\alpha < \beta$, entonces $s = u \cap \alpha = u \cap \beta \cap \alpha = t \cap \alpha$; así que s es sección inicial de t.

Para demostrar (2), note que si $s \in [\kappa]^{<\omega}$ y $A, B \in F$ entonces $\langle s, A\rangle$ y $\langle s, B\rangle$ son compatibles y $\langle s, A \cap B\rangle$ extiende a ambos. Así que el cardinal de una anticadena en P_F no puede exceder $\left|[\kappa]^{<\omega}\right| = \kappa$.

Para demostrar (3), Para cada $\alpha < \kappa$ defina

$$D_\alpha = \{\langle s, A\rangle \in P_F : \exists \beta \in s (\alpha \leq \beta)\}.$$

Afirmamos que D_α es denso, tome $\langle s, A\rangle \in P_F$, supongamos que $\langle s, A\rangle \notin D_\alpha$, como F es κ-completo y libre entonces,

$$\{\gamma \in \kappa : \alpha \leq \beta\} \in F,$$

y así

$$A \cap \{\gamma \in \kappa : \alpha \leq \beta\} \in F.$$

Entonces $A \cap \{\gamma \in \kappa : \alpha \leq \beta\}$ no es vacío. Tome $\xi \in A \cap \{\gamma \in \kappa : \alpha \leq \beta\}$. Se sigue que $\langle s \cup \{\xi\}, A\rangle \in D_\alpha$ y $\langle s \cup \{\xi\}, A\rangle \leq \langle s, A\rangle$.

Ahora tome $\alpha \in \kappa$, por la genericidad de G tome $\langle s, A\rangle \in G \cap D_\alpha$ entonces existe $\beta \in s$ tal que $\alpha \leq \beta$. Por otra parte, como $\langle s, A\rangle \in G$, $s \subset x$, así que $\beta \in x$ y por lo tanto x es no acotado y además tiene tipo de orden infinito. Para la última parte, como $x \in V[G]$ tenemos $V[x] \subset V[G]$. Para la otra contención defina

$$G_x = \{\langle s, A\rangle \in P_F : s \text{ es segmento inicial de } x \text{ y } x \setminus s \subset A\} \in V[x].$$

Afirmamos que $G_x = G$. $G \subset G_x$ se satisface pues si tomamos $\langle s, A\rangle \in G$, por definición de x, s es un segmento inicial de x. falta probar que $x \setminus s \subset A$. Tome $y \in x \setminus s$, de la definición de x existe $\langle s_0, A_0\rangle \in G$ tal que $y \in s_0$, y tome extensión común $\langle t, B\rangle \in G$ de $\langle s_0, A_0\rangle$ y $\langle s, A\rangle$. Como $\langle t, B\rangle \leq \langle s, A\rangle$ se tiene que $t \setminus s \subset A$; por otro lado, como $\langle t, B\rangle \leq \langle s_0, A_0\rangle$ obtenemos que $s_0 \subset t$ y por lo tanto $y \in t$ y concluimos que $y \in t \setminus s \subset A$. Para la otra contención sea $\langle s, A\rangle \in G_x$ y defina

$$D = \{\langle t, B\rangle \in P_F : \langle t, B\rangle \leq \langle s, A\rangle \vee \langle t, B\rangle \perp \langle s, A\rangle\}.$$

Afirmamos que D es denso en P_F. Tome $\langle s', A'\rangle \in P_F$, si $\langle s', A'\rangle \perp \langle s, A\rangle$ ya terminamos, en caso contrario tome $\langle t, B\rangle \in P_F$ tal que $\langle t, B\rangle \leq \langle s', A'\rangle$ y $\langle t, B\rangle \leq \langle s, A\rangle$, por esta segunda $\langle t, B\rangle \in D$, así que D sí es denso. Como G es P_F-genérico existe $\langle t, B\rangle \in G \cap D$. Note que $\langle t, B\rangle$ y $\langle s, A\rangle$ no pueden ser incompatibles ya que como $G \subset G_x$ tenemos que $\langle t, B\rangle, \langle s, A\rangle \in G_x$, por definición de D entonces, $\langle s, A\rangle \geq \langle t, B\rangle \in G$ y tenemos $G = G_x$; esto prueba que $G \in V[x]$ y por lo tanto $V[G] \subset V[x]$. ❑

Teorema 3.3. *Suponga que α es un cardinal medible y D un ultrafiltro normal sobre α, si $f : [\alpha]^{<\omega} \to \gamma$, $\gamma < \alpha$ entonces existe $A \in D$ homogéneo para f.*

Se puede encontrar la prueba en [**3**] pág. 86.

Si $\langle s, A\rangle \in P_D$ y φ una fórmula del lenguaje del forcing, diremos que $\langle s, A\rangle$ decide φ o $\langle s, A\rangle \| \varphi$ si $\langle s, A\rangle \Vdash \varphi$ o bien $\langle s, A\rangle \Vdash \neg\varphi$.

Lema 3.4. *Si α es un cardinal medible y D un ultrafiltro normal sobre α, entonces para cada $\langle s, A\rangle \in P_D$ y cada fórmula φ del lenguaje del forcing existe $B \in U$ tal que $B \subset A$ y $\langle s, B\rangle \| \varphi$.*

Demostración. Definimos $f : [A \smallsetminus (\text{máx}\,(s) + 1)]^{<\omega} \to 2$, donde $f(t) = 0$ si y sólo si $\exists X\,(\langle s \cup t, X\rangle \Vdash \varphi)$. Por el teorema 3.3 existe $B \subset A \smallsetminus (\text{máx}\,(s) + 1)$ con $B \in D$ homogéneo para f.

Afirmamos que $\langle s, B\rangle \| \varphi$ pues de no ser así, existen t_0, t_1, B_0, B_1 tal que $\langle s \cup t_i, B_i\rangle \leq \langle s, B\rangle$ para $i \in 2$ y además $\langle s \cup t_0, B_0\rangle \Vdash \varphi, \langle s \cup t_1, B_1\rangle \Vdash \neg\varphi$ además podemos suponer que $|t_0| = |t_1|$. Note que $\varphi(t_0) = 0$; así que por homogeneidad $\varphi(t_1) = 0$ y consecuentemente $\langle s \cup t_1, X\rangle \Vdash \varphi$ para alguna $X \in D$, pero $\langle s \cup t_1, X \cap B_1\rangle$ es extensión común de $\langle s \cup t_1, X\rangle$ y de $\langle s \cup t_1, B_1\rangle$ lo cual es imposible.

❑

El siguiente lema afirma que el forcing de Prikry no agrega subconjuntos de conjuntos pequeños.

Lema 3.5. *Si α es un cardinal medible y D un ultrafiltro normal sobre α entonces para cada P_D-nombre $\dot{\tau}$ y cada conjunto y con $|y| < \alpha$ existe un $z \subset y$ tal que $\Vdash \dot{\tau} \subset \check{y} \Rightarrow \dot{\tau} = \check{z}$.*

Demostración. Veamos que el conjunto de $\langle b, B\rangle \in P_D$ que forzan la conclusión es densa. Sea $\langle a, A\rangle \in P_D$, por el lema 3.4 para cada $x \in y$ existe $A_x \in U$ tal que $\langle a, A_x\rangle \| x \in \dot{\tau}$. Sea

$$z = \{x \in y : (a, A_x) \Vdash x \in \dot{\tau}\},$$

y tomemos $B = A \cap \bigcap_{x \in y} A_x$, $B \in U$ ya que $|y| < \alpha$. Afirmamos que $\langle a, B\rangle \Vdash \dot{\tau} = \check{z}$, pues si $x \in z$, $\langle a, B\rangle \leq \langle a, A_x\rangle \Vdash x \in \dot{\tau}$, y análogamente, si $x \notin z$, $\langle a, B\rangle \Vdash x \notin \dot{\tau}$. ❑

Teorema 3.6. *Sea α un cardinal medible y D un ultrafiltro normal sobre α, si G es un filtro P_D-genérico, entonces:*

(i) $(V_\alpha)^V = (V_\alpha)^{V[G]}$.
(ii) *Los cardinales de V y de $V[G]$ coinciden.*
(iii) $cof^{V[G]}(\alpha) = \omega$.

Demostración. Para (i): Es claro que $(V_\alpha)^V \subset (V_\alpha)^{V[G]}$, probemos la otra contención por inducción sobre el rango. Trivialmente $(V_0)^V = (V_0)^{V[G]}$. Supongamos que $\gamma < \alpha$ es límite y $\left(V_\beta\right)^V = \left(V_\beta\right)^{V[G]}$ para cada $\beta < \gamma$, entonces,

$$\left(V_\gamma\right)^V = \bigcup_{\beta \in \gamma} \left(V_\gamma\right)^V = \bigcup_{\beta \in \gamma} \left(V_\gamma\right)^{V[G]} = \left(V_\beta\right)^{V[G]},$$

lo que termina el paso límite. Ahora supongamos que $\left(V_\gamma\right)^V = \left(V_\gamma\right)^{V[G]}$ para algún $\gamma < \alpha$, queremos probar que $\left(V_{\gamma+1}\right)^{V[G]} \subset \left(V_{\gamma+1}\right)^V$; tomemos $x \in \left(V_{\gamma+1}\right)^{V[G]}$ entonces $x \subset \left(V_\gamma\right)^{V[G]}$, escojamos un nombre τ para x. En V, como α es fuertemente inaccesible, $\left|\left(V_\gamma\right)^V\right| < \alpha$, así que por el lema 3.5 existe $z \subset (V_\alpha)^V$ tal que $\Vdash \dot{\tau} \subset \check{y} \Rightarrow \dot{\tau} = \check{z}$, note que

$$V[G] \models x \subset y, \text{ así que,}$$

$$V[G] \models x = z,$$

por lo que $x \in (V_{\alpha+1})^V$.

Para (ii): Como P_D tiene la α^+-c.c., los cardinales mayor que α de V y $V[G]$ coinciden, ahora si $\kappa < \alpha$ es cardinal en V, tambien lo es en $V[G]$, supongamos que no lo es, entonces existen $\gamma < \kappa$ y $f : \kappa \to \gamma$ inyectiva, pero $f \in (V_{\kappa+3})^{V[G]} \subset (V_\alpha)^{V[G]} = (V_\alpha)^V$, lo que contradice que κ es cardinal en V. Además κ sigue siendo cardinal, ya que supremo de cardinales es cardinal.

Para (iii): La enumeración creciente de x definida en 3.2 es numerable y cofinal en κ. ❑

Bibliografía

[1] C. C. Chang; H. Jerome Keisler *Model Theory*. North Holland, tercera edición 1990.

[2] T. Jech *Set Theory*. Springer, tercera edición 2006.

[3] A. Kanamori *The Higher Infinite*. Springer, segunda edición.

[4] K. Kunen *Set Theory An Introduction To Independence Proofs*. North Holland, 1983.