



Universidad Nacional Autónoma de México



Y

Universidad Michoacana de San Nicolás Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

Teorema de Reider y Algunas Aplicaciones

TESINA

Que para obtener el Grado de
Maestro en Ciencias Matemáticas

PRESENTA:

Margarita Castañeda Salazar

ASESOR:

Dr. Alexis García Zamora

MORELIA, MICHOACÁN

FEBRERO 2011

Teorema de Reider y Algunas Aplicaciones

Margarita Castañeda Salazar
Asesor: Dr. Alexis García Zamora

Tesina para Maestría
Morelia Mich. Enero 2011

Índice general

Introducción	II
1. Definiciones Básicas	1
1.1. Divisores	1
1.2. Grupo de Picard	2
1.3. Sistemas Lineales	5
1.4. Clasificación de Superficies	5
1.5. Invariantes Numéricos	12
2. Teorema de Bogomolov	14
2.1. Los haces H_n	14
2.2. Casi-secciones en $\mathbb{P}_S(E^*)$	19
2.3. Demostración del Teorema de Bogomolov	23
3. Teorema de Reider	25
3.1. Teorema de Reider	25
3.2. Aplicaciones	30
Bibliografía	39

Introducción

Este trabajo tiene por objetivo estudiar demostración del Teorema de Reider y entender algunas de sus aplicaciones. El Teorema de Reider es un instrumento indispensable para el estudio de las superficies algebraicas complejas. Este artículo fue publicado originalmente por I. Reider en 1988, incluye varias ideas de matemáticos como A. Beauville, F. Catanese, F. Bogomolov. En pocas palabras el Teorema de Reider da condiciones necesarias para que el sistema lineal adjunto $|K_S + L|$ de un haz lineal nef y big sobre la superficie proyectiva compleja suave S tenga puntos base o no separe puntos. Utiliza de manera importante en su demostración un resultado de Bogomolov sobre inestabilidad de haces vectoriales de rango 2 sobre la superficie S .

El orden de los capítulos es como sigue:

Capítulo 1. Incluirá los resultados básicos y definiciones necesarios para entender los capitulos siguientes.

Capítulo 2. Teorema de Bogomolov, enunciado y demostración a detalle como aparece en [10].

Capítulo 3. Teorema de Reider enunciado y demostración a detalle, seguido de algunas de sus aplicaciones, las que aparecen en [11].

Para facilitar la lectura de esta tesina se han enumerado los teoremas, lemas y corolarios según el capítulo al que pertenezcan y de manera consecutiva, por ejemplo si encontramos Teorema 1.4 quiere decir que es el Teorema 4 del capítulo 1.

Capítulo 1

Definiciones Básicas

En éste capítulo se dará un breve repaso al lenguaje básico de superficies. También de la clasificación de superficies. Para mayor profundidad sobre estos temas, el lector puede consultar cualquier libro de superficies algebraicas complejas como por ejemplo [3] y [1]. Desde este momento cuando hablemos de una superficie S , nos estaremos refiriendo a una superficie algebraica proyectiva compleja suave.

1.1. Divisores

Sea S una superficie. Una *curva* en S es una subvariedad 1-dimensional irreducible. Un *divisor* es una suma formal localmente finita

$$D = \sum_i n_i C_i$$

donde los C_i son curvas en S . Se dice que un divisor es *efectivo* si todos los $n_i \geq 0$. El conjunto de todos los divisores forma un grupo bajo la suma: $\sum n_i C_i + \sum m_i C_i = \sum (n_i + m_i) C_i$, dicho conjunto se denota por $\text{Div}(S)$.

Cada función racional no cero $f \in k(S)$, define dos divisores efectivos, $(f)_0$ divisor de ceros y $(f)_\infty$ divisor de polos. El divisor $(f)_0 - (f)_\infty$ se denota por (f) y es llamado *divisor de la función f* . Los divisores de la forma (f) , para $f \in k(S)^*$ reciben el nombre de divisor *principal*.

Se dice que dos divisores D_1, D_2 son linealmente equivalentes si $D_1 - D_2$ es principal; usualmente se denota como $D_1 \sim D_2$. No es difícil ver que dicha relación es una relación de equivalencia. Para C, C' dos curvas irreducibles distintas en S , $x \in C \cap C'$, $\mathcal{O}_x$ el anillo local de S en x . Si f (resp. g) es una ecuación de C (resp. C') en $\mathcal{O}_x$, la *multiplicidad de intersección* de C y C' en

x se define como sigue

$$m_x(C \cap C') = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_x/(f, g).$$

Luego el *número de intersección* $(C.C')$ es definido por:

$$(C.C') = \sum_{x \in C \cap C'} m_x(C \cap C').$$

Usualmente denotaremos $C.C'$ en lugar de $(C.C')$. Dado D un divisor efectivo, podemos considerar la gavilla $\mathcal{O}_S(D)$, cuyas secciones sobre un conjunto abierto $U \subseteq S$ son las funciones f tales que $(f) + D \geq 0$ en U . $\mathcal{O}_S(D)$ es una gavilla invertible. Se define $\mathcal{O}_S(D)$ para un divisor arbitrario por linealidad y dicha correspondencia existe hasta equivalencia lineal, es decir, las gavillas $\mathcal{O}_S(D_1)$ y $\mathcal{O}_S(D_2)$ son isomorfas si y sólo si $D_1 \sim D_2$.

Para finalizar recordaremos sin demostrar el *Teorema del Índice de Hodge* y una consecuencia de este mismo que será útil en la demostración del Teorema de Reider. Ver para su demostración [1], pág. 18.

Teorema 1.1. *Si E es un divisor en S tal que $E^2 > 0$, entonces para cada divisor D sobre S con $E.D = 0$, tenemos $D^2 \leq 0$; además $D^2 = 0$ si y sólo si $D \equiv 0$.*

Donde $D \equiv 0$, significa que $D.C = 0$ para toda curva irreducible y, se dice, D es *numericamente equivalente* a 0.

Corolario 1.2. *Sean D_1, D_2 dos divisores en S con $D_1^2 > 0$, entonces*

$$(D_1^2)(D_2^2) \leq (D_1.D_2)^2.$$

Demostración. Existen $m = -D_1.D_2$ y $n = D_1^2$ enteros, tales que $D_1.(mD_1 + nD_2) = 0$, entonces $(mD_1 + nD_2)^2 \leq 0$ por el Teorema 1.1, luego sustituyendo m y n en dicha desigualdad y dividiendo por D_1^2 , se tiene lo deseado. $\square$

1.2. Grupo de Picard

Siempre consideraremos haces vectoriales complejos. El grupo de Picard de S es el grupo de clases de isomorfismos de haces lineales; usualmente se denota como $\text{Pic}(S)$. Existe una biyección canónica entre $\text{Div}(S)/\sim$ y $\text{Pic}(S)$, y es como sigue.

Cada divisor D en una superficie suave es localmente principal, es decir, para cada punto $p \in S$, existe una vecindad suficientemente pequeña que contiene

a p , donde éste tiene la forma (f_U) . La función f_U es llamada *ecuación local* del divisor en U .

Sea $S = \cup U_\alpha$ una cubierta abierta tal que D es principal en cada U_α . Si f_α son las ecuaciones locales correspondientes, entonces D esta unicamente determinado por esas ecuaciones. Las funciones $g_{\alpha\beta} = f_\alpha f_\beta^{-1}$ son regulares, y $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_S(U_\alpha \cap U_\beta)^*$. Luego $\{g_{\alpha\beta}\}$ son las funciones de transición que definen un haz lineal con base S ; usualmente se denota $[D]$. Inversamente dado L un haz lineal sobre S , las funciones de transición de L definen un divisor D en S .

Hasta el momento se puede concluir que existe una correspondencia biyectiva entre el grupo de clases de equivalencia lineal de divisores sobre S , el grupo de clases de isomorfismo de gavillas invertibles y de haces lineales, por esta razón en el resto de material pasaremos de un conjunto en otro sin ningún problema.

Los grupos de cohomología $H^i(S, L)$, para toda gavilla $L \in \text{Pic}(S)$ son de dimensión compleja finita, pues S es una superficie algebraica compleja suave proyectiva y, $\dim_{\mathbb{C}} H^i(S, L)$ se denota por $h^i(S, L)$; cuando no existe confusión simplemente por $h^i(L)$.

Para cada gavilla L en S , $\chi(L) = \sum_i (-1)^i h^i(L)$ es la *característica de Euler-Poincaré* de L . El siguiente teorema define una *forma bilineal simétrica* sobre $\text{Pic}(S)$, y demuestra que dicha forma bilineal coincide con el número de intersección de los divisores correspondientes, de hecho demuestra que el número de intersección es invariante hasta equivalencia lineal.

Teorema 1.3. Sean L, L' en $\text{Pic}(S)$, se define

$$(L.L') = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L^{-1}) - \chi(L'^{-1}) + \chi(L^{-1} \otimes L'^{-1}).$$

Entonces $(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal simétrica sobre $\text{Pic}(S)$, tal que si C y C' son dos curvas irreducibles distintas en S , entonces

$$(\mathcal{O}_S(C), \mathcal{O}_S(C')) = (C.C').$$

Ver para su demostración [3], págs. 2-4. Ahora recordemos el *Teorema dualidad de Serre* y, para su demostración se recomienda al lector [6].

Teorema 1.4. Sea S una superficie, y L un haz lineal sobre S . Sea ω_S el haz lineal de las 2-formas diferenciales sobre S . Entonces $H^2(S, \omega_S)$ es un espacio vectorial 1-dimensional; para $0 \leq i \leq 2$, la forma bilineal inducida por el producto cup

$$H^i(S, L) \otimes H^{2-i}(S, \omega_S \otimes L^{-1}) \rightarrow H^2(S, \omega_S)$$

define una dualidad. En particular, $\chi(L) = \chi(\omega_S \otimes L^{-1})$.

Ahora podemos demostrar el *Teorema de Riemann–Roch* para superficies.

Teorema 1.5. *Para todo $L \in \text{Pic } S$,*

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(L^2 - L.\omega_S).$$

Demostración. Por definición $(L^{-1}.L \otimes \omega_S^{-1}) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L) - \chi(\omega_S \otimes L^{-1}) + \chi(\omega_S)$. Por dualidad de Serre $\chi(L) = \chi(\omega_S \otimes L^{-1})$ y $\chi(\omega_S) = \chi(\mathcal{O}_S)$. Entonces

$$\begin{aligned} (L^{-1}.L \otimes \omega_S^{-1}) &= 2(\chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L)) \\ &= (L^{-1}.L) + (L^{-1}.\omega_S^{-1}) \\ &= -L^2 + L.\omega_S = -(L^2 - L.\omega_S). \end{aligned}$$

Luego la igualdad deseada se sigue claramente. □

Usualmente se escriben esos dos teoremas en terminos de divisores, $h^i(D) = h^i(S, \mathcal{O}_S(D))$; K_S suele denotar cualquier divisor tal que $\mathcal{O}_S(K_S) = \omega_S$, y llamamos a K_S *divisor canónico*. Dualidad de Serre implica $h^i(D) = h^i(K_S - D)$ para $0 \leq i \leq 2$; y el Teorema de Riemann–Roch toma la forma

$$h^0(D) - h^1(D) + h^0(K - D) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(D^2 - D.K_S).$$

Muchas veces no tenemos información acerca de $h^1(D)$ así que usamos Riemann–Roch como la desigualdad

$$h^0(D) + h^0(K - D) \geq \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(D^2 - D.K_S).$$

Finalmente una consecuencia importante del Teorema de Riemann–Roch es la *fórmula del género*: sea C una curva irreducible sobre S , el *género* de C que se define como $g(C) = h^1(C, \mathcal{O}_C)$, está dado por $g(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C.K_S)$. En efecto, al considerar la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-C) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0,$$

tenemos que $\chi(\mathcal{O}_C) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C))$ por la aditividad de la característica de Euler, luego por definición $\chi(\mathcal{O}_C) = 1 - g(C)$ y el Teorema 1.5 obtenemos la fórmula del género.

1.3. Sistemas Lineales

Para un divisor D en S , denotaremos por $|D|$ el conjunto de todos los divisores efectivos linealmente equivalentes a D . Se observa que cada sección no cero de $\mathcal{O}_S(D)$ define un elemento de $|D|$ llamado divisor de ceros, e inversamente cada elemento de $|D|$ es el divisor de ceros de una sección no cero de $\mathcal{O}_S(D)$, definida salvo multiplicación por escalar. Por lo tanto $|D|$ puede ser naturalmente identificado con el espacio proyectivo asociado al espacio vectorial $H^0(\mathcal{O}_S(D))$.

Un subespacio lineal P de $|D|$ es llamado *sistema lineal sobre S* ; equivalentemente P puede ser definido por un subespacio vectorial de $H^0(\mathcal{O}_S(D))$. Se dice que P es *completo* si $P = |D|$. La dimensión de P es por definición su dimensión como espacio proyectivo. Un sistema lineal 1-dimensional es un *píncel*.

Decimos que una curva C es una *componente fija de P* , si cada divisor de P contiene a C . La *parte fija de P* es el mayor divisor F que está contenido en cada elemento de P . Un punto $p \in S$ se dice *punto base* o *punto fijo* de P si cada divisor de P lo contiene. Un sistema lineal sin puntos base se dice *libre de puntos base*.

Sean P un sistema lineal sin parte fija de dimensión n , P^* el espacio proyectivo del dual de P , P define una aplicación racional $\phi_D : S \dashrightarrow P^*$, que envía a cada punto $p \in S$ al hiperplano en P que consiste de todos los divisores que pasan por x ; ϕ_D ésta definida en x si y sólo si x no es un punto base de P .

Cuando ϕ_D define un encaje, decimos que D es un divisor *muy amplio*. Si existe $n \geq 1$ tal que nD es muy amplio, decimos que D es *amplio*. Para cada $n \geq 1$, φ_{nK_S} recibe el nombre de *aplicación canónica de orden n* .

Dado D un divisor sobre S , se define el *sistema lineal adjunto a D* como el sistema lineal $|K_S + D|$. He aquí la importancia del Teorema de Reider, pues dicho teorema da condiciones necesarias para que el sistema lineal adjunto $|K_S + L|$ de un haz lineal *nef* (es decir, $L.C \geq 0$ para toda curva irreducible C) y *big* (es decir, $L^2 > 0$) tenga puntos base o no separe puntos.

1.4. Clasificación de Superficies

Definición 1.6. Una aplicación racional $f : S_1 \dashrightarrow S_2$ entre superficies, es una clase de equivalencia de parejas $\langle U, \varphi_U \rangle$ donde U es un abierto no vacío de S_1 , φ_U es un morfismo desde U a S_2 , y dos parejas $\langle U, \varphi_U \rangle$ y $\langle V, \varphi_V \rangle$ son equivalentes si φ_U y φ_V coinciden en $U \cap V$.

Este concepto permite en geometría algebraica clasificar todas las superficies salvo equivalencia birracional. Una razón más para utilizar aplicaciones birracionales (aplicación racional con inversa racional), se sigue del teorema de estructura:

Teorema 1.7. *Sea $f : S \rightarrow S_0$ un morfismo birracional de superficies. Entonces existe una sucesión de blow-ups $\epsilon_k : S_k \rightarrow S_{k-1}$ ($k = 1, \dots, n$) y un isomorfismo $u : S \rightarrow S_n$ tal que $f = \epsilon_1 \circ \dots \circ \epsilon_n \circ u$.*

Ver para su demostración [3], págs. 16–17. El punto de vista birracional fue introducido en la geometría de superficies por Noether y luego por Enriques, sin embargo el teorema de estructura para aplicaciones birracionales se debe a Zariski.

Un ejemplo de equivalencia birracional es el *blow-up* (explosión) de una superficie en un punto. Dada S una superficie y $p \in S$ entendemos por explosión en p , otra superficie S' y una aplicación $\epsilon : S' \rightarrow S$ tal que la restricción de ϵ a $S' - \epsilon^{-1}(p)$ es un isomorfismo sobre $S - p$ y $\epsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$; $\epsilon^{-1}(p)$ recibe el nombre de *curva excepcional de primer tipo*.

La siguiente proposición establece propiedades útiles para el blow-up de S en un punto p .

Proposición 1.8. *Sea S una superficie, $\epsilon : S' \rightarrow S$ el blow-up de un punto $p \in S$ y E su curva excepcional.*

1. *Existe un isomorfismo $\text{Pic}(S) \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(S')$ definido como, $(D, n) \mapsto \epsilon^*D + nE$.*
2. *Sean D, D' divisores sobre S . Entonces $(\epsilon^*D).(\epsilon^*D') = D.D', E.(\epsilon^*D) = 0, E^2 = -1$.*
3. *$NS(S') \cong NS(S) \oplus \mathbb{Z}[E]$.*
4. *$K_{S'} = \epsilon^*K_S + E$.*

Donde $NS(S) \subset H^2(S, \mathbb{Z})$ es un grupo finitamente generado, llamado *grupo de Néron Severi de S* ; ver [3], págs. 12–13 para su demostración. Cabe mencionar que en la mayoría de las ocasiones utilizaremos el *Criterio de Contractibilidad de Castelnuovo*, que da una útil caracterización para curvas excepcionales de primer tipo.

Teorema 1.9. *Sea S una superficie y $E \subset S$ una curva isomorfa a $\mathbb{P}^1$ con $E^2 = -1$. Entonces E es una curva excepcional de primer tipo sobre S .*

Este resultado fue demostrado en 1901 por Castelnuovo y Enríque, una demostración muy parecida a la que ellos dieron es la que aparece en [3], págs. 20–22. La curva E es llamada *curva* (-1) .

Definición 1.10. *Una superficie S se dice minimal, si cada morfismo birracional de superficies $S \rightarrow S'$ es un isomorfismo; en otras palabras, S es minimal si no contiene curvas excepcionales.*

Un hecho importante que se sigue del Teorema 1.7 y Proposición 1.8 (4) es que, toda superficie S domina una superficie minimal, es decir, existe una superficie minimal S' y un morfismo birracional $S \rightarrow S'$; S' recibe el nombre de *modelo minimal* de S .

De esta forma el problema de clasificar superficies hasta equivalencia birracional se reduce a determinar un modelo minimal; objetivo que analizaremos en el resto de esta sección.

Definición 1.11. *Una superficie reglada, es una superficie birracionalmente equivalente a $C \times \mathbb{P}^1$, donde C es una curva suave. Si $C \cong \mathbb{P}^1$, decimos que es una superficie racional.*

Severi demostró, que los modelos minimales para *superficies regladas no racionales*, son *superficies geoméricamente regladas sobre C* , esto es, una superficie S' junto con un morfismo $p : S' \rightarrow C$ cuyas fibras son curvas racionales o equivalentemente un haz proyectivo $\mathbb{P}_C(E)$ asociado a E , donde E es un haz vectorial de rango 2 sobre C .

Un haz vectorial $\mathbb{P}_C(E)$ asociado a E , es una superficie fibrada sobre C (es decir, es la parametrización sobre C de curvas suaves), tal que, la fibra sobre un punto $x \in C$ es el haz proyectivo asociado al espacio vectorial E_x . Como E localmente es trivial, $\mathbb{P}_C(E)$ es isomorfo (localmente sobre C) a $C \times \mathbb{P}^1$, por lo tanto es una superficie reglada, de hecho es uno de los primeros ejemplos de superficies regladas que por lo regular se consideran, después del ejemplo trivial $C \times \mathbb{P}^1$.

Es claro que los ejemplos antes mencionados son superficies geoméricamente regladas. No es obvio a priori que una superficie geoméricamente reglada es reglada, esto es consecuencia inmediata del

Teorema 1.12. (de Noether–Enríque) *Sea S una superficie, p un morfismo desde S a una curva suave C . Si existe $x \in C$ tal que p es suave sobre x y la fibra $p^{-1}(x)$ es isomorfa a $\mathbb{P}^1$, entonces existe un subconjunto abierto de Zariski*

U de C que contiene a x y un isomorfismo desde $p^{-1}(U)$ a $U \times \mathbb{P}^1$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\sim} & U \times \mathbb{P}^1 \\ p \downarrow & \nearrow p_1 & \\ U & & \end{array}$$

conmuta, donde p_1 es la proyección en el primer factor. En particular S es reglada.

Ver para su demostración [3], págs. 25–27. Cabe mencionar que dicho teorema fue demostrado por Noether para superficies racionales en 1870 y el caso general por Enrique en 1898.

Para determinar los modelos minimales en el caso de superficies racionales es necesario conocer algunos resultados básicos de la teoría de haces vectoriales sobre curvas, por ésta razón a continuación hacemos algunas observaciones. Sea C una curva suave, E un haz vectorial de rango 2 sobre C . Identificamos a E con su gavilla de secciones locales, que es una gavilla localmente libre de rango 2. Se escribe $\deg(E) = \deg(\wedge^2 E)$, $h^i(E) = \dim H^i(C, E)$, $\chi(E) = h^0(E) - h^1(E)$.

No es difícil ver que $\deg(E \otimes L) = \deg(E) + 2 \deg(L)$ para L en $\text{Pic } C$; por álgebra lineal sabemos que $\det(\alpha M) = \alpha^n \det M$ donde M una matriz cuadrada de orden n y α es un escalar no cero, en particular para $n=2$, éste hecho implica que $\wedge^2(E \otimes L) = (\wedge^2 E) \otimes L^2$, por lo tanto podemos alterar $\deg(E)$ para cualquier valor de la misma paridad.

Proposición 1.13. *Sea E un haz vectorial de rango 2 sobre C una curva suave.*

- i) *Existe una sucesión exacta $0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ con $L, M \in \text{Pic } C$.*
- ii) *Si $h^0(E) \geq 1$, podemos tomar $L = \mathcal{O}_C(D)$, con $D \geq 0$.*
- iii) *Si $h^0(E) \geq 2$ y $\deg(E) > 0$, podemos suponer $D > 0$.*

Demostración. i) Es suficiente demostrar que para algún haz lineal N sobre C , $E \otimes N$ admite una extensión, pues bastaría tensorizar por N^* para obtener una extensión de E . Note que existe $N \in \text{Pic } C$ tal que $E \otimes N$ admite secciones no cero (por el Teorema B en [5], págs. 700-702), es decir, $h^0(E \otimes N) \geq 1$. Sea $s \in H^0(E \otimes N)$ una sección no cero, entonces existe un morfismo

$$s^* : (E \otimes N)^* \rightarrow \mathcal{O}_C,$$

donde $(E \otimes N)^*$ denota el haz dual de $E \otimes N$ y $s^*(f) = f \circ s$. Su imagen es un ideal de $\mathcal{O}_C$, que es una gavilla $\mathcal{O}_C(-D)$, donde D es un divisor efectivo de C . Restrigiendo sobre su imagen, dualizando y completando la sucesión, obtenemos una extensión para $E \otimes N$, $0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E \otimes N \rightarrow E \otimes N / \mathcal{O}_C(D) \rightarrow 0$, como se quería.

ii) Con un razonamiento análogo al anterior sólo que en esta ocasión s es una sección de E y $s^* : E^* \rightarrow \mathcal{O}_C$.

Por construcción es claro que D es el divisor de ceros de una sección s . Para demostrar iii) es suficiente demostrar que existe una sección no cero de E que se anula en algún punto. Por hipótesis podemos elegir $s, t \in H^0(E)$ dos secciones linealmente independientes. La sección $s \wedge t \in \wedge^2 E$ debe anularse en algún punto de C pues $\deg E > 0$, sea $p \in C$ uno de esos puntos, entonces existen μ, λ (no ambos cero) tales que

$$\mu s(p) + \lambda t(p) = 0.$$

Así la sección $\mu s + \lambda t = s_1$ se anula en un punto y al considerar la aplicación $s_1^* : E^* \rightarrow \mathcal{O}_C$ definida como $s_1^*(f) = s_1 \circ f$, resulta ser una aplicación no sobreyectiva de gavillas, pues la aplicación en la fibra de p es el homomorfismo cero, por lo tanto . □

De esta forma estamos preparados para demostrar:

Teorema 1.14. (Riemann–Roch para haces vectoriales de rango 2) Sea E un haz vectorial de rango 2 sobre C , entonces

$$\chi(E) = \deg(E) + 2 - g(C).$$

Demostración. Existe una sucesión exacta para E como en la Proposición 1.13, luego por la aditividad de la característica de Euler y el Teorema 1.5

$$\begin{aligned} \chi(E) &= \chi(L) + \chi(M) = \deg(L) + \deg(M) + 2(1 - g(C)) \\ &= \deg(E) + 2 - g(C) = \deg(E) + 2 - g(C). \end{aligned}$$

□

Dada una extensión de M por L como antes, es natural preguntarse si es trivial, en otras palabras si $E \cong L \oplus M$. La pregunta anterior es equivalente a preguntar ¿cuándo la sucesión exacta

$$0 \rightarrow L \otimes M^{-1} \rightarrow E \otimes M^{-1} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

se descompone (o escinde)?, este es el caso si y sólo si existe una sección no cero de $H^0(C, E \otimes M^{-1})$ que es enviada sobre $1 \in H^0(C, \mathcal{O}_C)$. Al usar la sucesión exacta en cohomología

$$H^0(C, E \otimes M^{-1}) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C) \xrightarrow{\partial} H^1(C, L \otimes M^{-1})$$

lo anterior significa que $\partial(1) = 0$. La clase $\partial(1) \in H^1(C, L \otimes M^{-1})$ es llamada *clase de la extensión* $0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ y, su anulamiento es necesario y suficiente para que la extensión sea trivial.

El siguiente resultado determina la forma de haces vectoriales de rango 2 sobre curvas racionales y elípticas.

Proposición 1.15.

- i) Cada haz vectorial E de rango 2 sobre $\mathbb{P}^1$ es descomponible, es decir, es la suma de dos gavillas invertibles. En particular, toda superficie métricamente reglada sobre $\mathbb{P}^1$ es isomorfa a una de las superficies

$$\mathbb{F}_n = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) \quad \text{para } n \geq 0.$$

- ii) Cada haz vectorial de rango 2 sobre una curva elíptica C es alguno de los siguientes: se descompone o es isomorfa a $E \otimes L$, donde $L \in \text{Pic } C$ y E es uno de los siguientes haces:

- a) la extensión no trivial de $\mathcal{O}_C$ por $\mathcal{O}_C$,
- b) la extensión no trivial de $\mathcal{O}_C(p)$ por $\mathcal{O}_C$, para $p \in C$.

Demostración. i) Sea E un haz vectorial de rango 2 en $\mathbb{P}^1$, note que es suficiente demostrar la proposición para $E \otimes L$, donde $L \in \text{Pic } C$, pues bastaría tensorizar por L^* para obtener lo deseado. Al remplazar E por $E \otimes L$ para un conveniente $L \in \text{Pic}(C)$ podemos suponer que

$$d = \deg(E \otimes L) = 0 \quad \text{ó} \quad -1,$$

pues dado que $\deg(E \otimes L) = \deg(E) + 2 \deg(L)$, si $\deg(E)$ es par digamos $2k$, elegimos L tal que $\deg L = -k$, entonces $\deg(E \otimes L) = 0$ y si $\deg E$ es impar digamos $2k+1$, elegimos L tal que $\deg L = -(k+1)$, de modo que $\deg(E \otimes L) = -1$.

Convención: en el resto de la demostración trabajaremos con $E \otimes L$ y denotaremos E en lugar de $E \otimes L$.

Sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-k),$$

con $k \geq 0$, pues por los posibles valores para $\deg(E)$ y por el Teorema 1.14 aplicado a E tenemos que $h^0(E) = \deg(E) + 2 \geq 1$, y como la clase de extensión esta en $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2k-d))$ que siempre es cero, podemos concluir que E se descompone.

Por otro lado, sea S una superficie geoméricamente reglada sobre $\mathbb{P}^1$, es decir, S es $\mathbb{P}^1$ -isomorfa a un haz proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(E)$ para algún haz vectorial E de rango 2. Por la primera parte $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-k)$, luego $E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k-d) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2k-d) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$, de donde se sigue claramente $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(E) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k-d))$ así $S \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2k-d))$, finalmente como $d = 0$ o -1 , tenemos que $n = 2k - d \geq 0$, por lo tanto $S \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) = \mathbb{F}_n$ como se quería.

ii) Sea E un haz vectorial de rango 2. Con un razonamiento similar a i) podemos suponer que $d = \deg E = 1$ o 2 . Existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow L_k \rightarrow E \rightarrow M_{d-k} \rightarrow 0,$$

donde L_k , M_{d-k} son gavillas invertibles sobre C de grados k y $d-k$ respectivamente por la Proposición 1.13. i) y $k \geq 0$ por la Proposición 1.13. ii), pues por los posibles valores de $\deg E$ y por el Teorema de Riemann–Roch tenemos que $h^0(E) = \deg E + h^1(E) \geq 1$.

Como la clase de extensión vive en $H^1(C, L_k \otimes M_{d-k}^{-1})$ y por teoría de curvas si $\deg(\mathcal{O}_C(D)) > \deg(K)$, entonces $H^1(D) = 0$, y dado que $\deg(K) = 0$ por ser C elíptica tenemos

$$H^1(L_k \otimes M_{d-k}^{-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2k - d \neq 0, \\ 1 & \text{si } 2k - d = 0. \end{cases}$$

en otras palabras la clase de la extensión es cero (y por lo tanto se descompone) excepto cuando $d = 1$ y $k = 0$, en tal caso E es la extensión de un haz lineal de grado 1 por $\mathcal{O}_C$, es decir

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow E \rightarrow M_1 \rightarrow 0;$$

y $d = 2$, $k = 1$, en tal caso $L_1 \otimes M_1^{-1} \cong \mathcal{O}_C$, entonces $E \otimes L_1^{-1}$ es la extensión de $\mathcal{O}_C$ por $\mathcal{O}_C$. Si denotamos por E_p (resp. E_0) la extensión de $\mathcal{O}_C(p)$ (resp. $\mathcal{O}_C$) por $\mathcal{O}_C$, son indescomponibles puesto que contienen a $\mathcal{O}_C$ como un sub-haz y $h^0(E_p) = h^0(E_0) = 1$. $\square$

Las siguientes proposiciones nos permiten conocer algunas propiedades de superficies geoméricamente regladas que posteriormente utilizaremos.

Proposición 1.16. *Sea $S = \mathbb{P}_C(E)$ una superficie geoméricamente reglada sobre C , $p : S \rightarrow C$ su aplicación estructural. Denotemos por h la clase de la gavilla $\mathcal{O}_S(1)$ en $\text{Pic } C$ (o en $H^2(S, \mathbb{Z})$). Entonces*

i) $\text{Pic } S = p^* \text{Pic } C \oplus \mathbb{Z}h$.

ii) $H^2(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}f$, donde f es la clase de la fibra.

iii) $h^2 = \deg E$.

iv) $[K_S] = -2h + (\deg E + 2g(C) - 2)f$ en $H^2(S, \mathbb{Z})$.

Ver su demostración en [3], págs. 34–35.

Proposición 1.17. *Sea $S = \mathbb{F}_n$ con $n \geq 0$ y la misma notación que la proposición anterior. Entonces*

- i) $\text{Pic } \mathbb{F}_n = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}f$, con $f^2 = 0$, $f.h = 1$, $h^2 = n$.
- ii) Si $n > 0$, entonces existe una única curva irreducible B sobre $\mathbb{F}_n$ con auto-intersección negativa. Si b es su clase en $\text{Pic } \mathbb{F}_n$, entonces $b = h - nf$, $b^2 = -n$.
- iii) $\mathbb{F}_n$ y $\mathbb{F}_m$ son isomorfas si y sólo si $n = m$. $\mathbb{F}_n$ es minimal excepto si $n = 1$; $\mathbb{F}_1$ es isomorfo a $\mathbb{P}^2$ con un punto explotado.

Ver su demostración en [3], págs.40–41.

Un resultado importante demuestra que toda superficie racional minimal es isomorfa a $\mathbb{P}^2$ o a una de las superficies $\mathbb{F}_n$ para $n \neq 1$. Hasta el momento tenemos los modelos minimales para superficies regladas y superficies racionales; finalmente cada superficie no reglada admite un único modelo minimal (salvo isomorfismo). Se recomienda para los resultados antes mencionados [3], Capítulo V.

1.5. Invariantes Numéricos

Finalizaremos este capítulo definiendo algunos invariantes numéricos.

Definición 1.18. *Sea S una superficie:*

1. P_n es el número de 2-formas regulares linealmente independientes de grado n ; localmente $\omega = f(dx \wedge dy)^n$, donde x, y son coordenadas locales y f es una función regular, es decir, $P_n = h^0(nK_S)$ y recibe el nombre n -ésimo género de S ; P_n para $n = 1$, recibe el nombre de género geométrico y se denota por $p_g(S)$.
2. La irregularidad de S , se define como $h^1(\mathcal{O}_S)$ y se denota por $q(S)$ o q cuando no existe confusión.
3. El género aritmético, se define como $1 - \chi(\mathcal{O}_S)$ y se denota por $p_a(S)$ o simplemente por p_a .
4. $\kappa = \kappa(S)$ dimensión de Kodaira, se define como sigue

$$\kappa(S) = \begin{cases} \max_n \dim \varphi_{nK_S}(S), & \text{si } H^0(nK_S) \neq 0 \text{ para algún } n \geq 1, \\ -\infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se sigue de la definición que $\kappa(S)$ podría tomar los valores $-\infty$, 0, 1 y 2. De hecho, $\kappa(S) = -\infty$ si y sólo si $P_n = 0$ para todo $n \geq 1$, $\kappa(S) = 0$ si y sólo si $P_n \leq 1$ para todo $n \geq 1$ y existe n_0 tal que $P_{n_0} = 1$, mientras que los casos $\kappa = 1$ o 2 los números P_n crecen como polinomios en n de grado 1 o 2 respectivamente.

La dimensión de Kodaira divide las superficies en dos clases: *tipo general* aquellas que corresponden a $\kappa = 2$ y el resto son superficies *especiales*. Cabe mencionar que dicha división es un análogo a la división de curvas: las curvas de género $g > 1$ son las curvas de *tipo general* y las curvas de género 1 y 0 son *especiales*.

Note que la división de superficies antes mencionada puede formularse de la siguiente forma: las superficies minimales con clase canónica nef (superficies de tipo general minimales) y, las superficies que no tienen clase canónica nef (superficies especiales). Por esta razón más adelante veremos una aplicación inmediata del Teorema de Reider sobre superficies minimales de tipo general.

Para superficies S regladas sobre C algunos de los invariantes birracionales antes mencionados cumplen:

Proposición 1.19. *Sea S una superficie reglada sobre C , entonces*

$$q(S) = g(C); \quad p_g(S) = 0; \quad P_n(S) = 0 \quad \text{para todo } n \geq 2.$$

Si S es geométricamente reglada, entonces $K_S^2 = 8(1 - g(C))$, $b_2(S) = 2$.

Ver su demostración en [3], págs. 36–37.

Capítulo 2

Teorema de Bogomolov

Definición 2.1. *Un haz vectorial E de rango 2 sobre S se dice inestable si satisface $c_1^2(E) > 4c_2(E)$.*

El Teorema de Bogomolov es un resultado importante porque establece una caracterización para la inestabilidad de haces vectoriales de rango 2 sobre S . Además la demostración original del Teorema de Reider utiliza de manera indispensable del Teorema de Bogomolov, por ésta razón, el presente capítulo contiene los resultados necesarios para su demostración.

Teorema 2.2. *de Bogomolov. Sea E un haz vectorial de rango 2 sobre una superficie proyectiva no singular definida sobre los números complejos. Entonces $c_1^2(E) > 4c_2(E)$ si y sólo si existe una sucesión exacta*

$$0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow I_Z \cdot M \rightarrow 0, \quad (1)$$

con L y M haces lineales, Z un 0-ciclo con gavilla de ideales I_Z , tal que si $\Delta = L \otimes M^{-1}$ entonces

$$\begin{aligned} c_1^2(\Delta) &> 4 \deg Z \\ c_1(\Delta) \cdot H &> 0, \end{aligned} \quad (2)$$

para cada divisor amplio H en S .

2.1. Los haces H_n

Antes de dar la demostración del Teorema de Bogomolov es necesario definir ciertos haces vectoriales auxiliares y ver algunas propiedades de estos mismos. El primer haz vectorial auxiliar es

$$H_n = S^{2n}E \otimes (\det E)^{-n}$$

donde $S^{2n}(E)$ es el $2n$ -producto simétrico de E ; sea $\{e_1, e_2\}$ una base de la fibra E_x , $S^{2n}(E)_x$ es el espacio de polinomios homogéneos de grado $2n$ en las

variables e_1, e_2 , por ello $S^{2n}(E)_x$ tiene dimensión $2k+1$ y en consecuencia H_n es de rango $2k+1$. A continuación enunciamos más propiedades de H_n .

Proposición 2.3.

$$i) \ H_n^* \cong H_n, \quad \det H_n = \mathcal{O}_S.$$

$$ii) \ c_1(H_n) = 0 \text{ y } c_2(H_n) = (c_1^2(H_n) - 4c_2(E))(\sum_{i=0}^n i^2).$$

$$iii) \ \chi(H_n) = (2n+1)\chi(S) + (c_1^2(E) - 4c_2(E))\left(\sum_{i=1}^n i^2\right).$$

Claramente de i) se sigue que $c_1(S^{2n} E) = c_1(\det S^{2n} E) = c_1((\det E)^{n(2n+1)}) = n(2n+1)c_1(E)$.

Demostración. i) Ambos se siguen de isomorfismos canónicos de álgebra lineal.
ii) Por definición y la parte i), $c_1(H_n) = c_1(\det H_n) = c_1(\mathcal{O}_S) = 0$; luego

$$\begin{aligned} c_2(H_n) &= c_2(S^{2n} E \otimes (\det E)^*) \\ &= \sum_{i=0}^2 \binom{2n+1-i}{2-i} c_i(S^{2n} E) \cdot c_1((\det E)^{-n})^{2-i} \\ &= n^3(2n+1)c_1^2(E) - 2n^2c_1(S^{2n} E) \cdot c_1(E) + c_2(S^{2n} E) \\ &= n^3(2n+1)c_1^2(E) - 2n^3(2n+1)c_1^2(E) + c_2(S^{2n} E) \\ &= -n^3(2n+1)c_1^2(E) + c_2(S^{2n} E). \end{aligned}$$

Es posible demostrar que

$$c_2(S^{2n} E) = \frac{n(12n^3 + 4n^2 - 3n - 1)}{6} c_1^2(E) + \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} c_2(E),$$

la prueba es por inducción sobre n , en esta ocasión sólo veremos el caso $n = 1$. Sean $\alpha_1 = c_1(L_1)$, $\alpha_2 = c_1(L_2)$ las raíces de Chern de E , donde L_1, L_2 son haces lineales, es decir, $c_1(E) = \alpha_1 + \alpha_2$ y $c_2(E) = \alpha_1\alpha_2$, si

$$\begin{aligned} c(S^2) &= \prod_{\substack{m_1, m_2 \geq 0 \\ m_1 + m_2 = 2}} (1 + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2) \\ &= (1 + 2\alpha_1)(1 + \alpha_1 + \alpha_2)(1 + 2\alpha_2) \\ &= c_0(E) + 3c_1(E) + 2c_1^2(E) + 4c_2(E) + 4c_3(E), \end{aligned}$$

entonces $c_2(S^2) = 2c_1^2(E) + 4c_2(E)$, como se quería.

Finalmente sustituyendo $c_2(S^{2n} E)$ tenemos la igualdad para $c_2(H_n)$.

iii) Por la fórmula de *Hirzebruch-Riemann-Roch* seguido de la parte ii)

$$\begin{aligned}
 \chi(H_n) &= \deg [ch(H_n) \cdot todd(S)]_2 \\
 &= \deg \left[(rk H_n + c_1(H_n) + \frac{1}{2}(c_1^2(H_n) - 2c_2(H_n)) + \dots) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \left(1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) \dots \right) \right]_2 \\
 &= (2n+1) \frac{c_1^2 + c_2}{12} - c_2(H_n) \\
 &= (2n+1)\chi(\mathcal{O}_S) - (c_1^2(E) - 4c_2(E)) \left(\sum_{i=1}^n i^2 \right).
 \end{aligned}$$

□

Proposición 2.4. Si $c_1^2(E) > 4c_2(E)$, entonces existe una constante $k > 0$ tal que para todo $n \gg 0$, $h^0(H_n) > kn^3$.

Demostración. Por la Proposicion 2.3(ii) e hipótesis tenemos

$$\begin{aligned}
 h^0(H_n) + h^2(H_n) &\geq (2n+1)\chi(\mathcal{O}_S) + (c_1^2(E) - 4c_2(E)) \left[\sum_{i=1}^n i^2 \right] \\
 &\geq (2n+1)\chi(\mathcal{O}_S) + \sum_{i=1}^n i^2 \\
 &= (2n+1)\chi(\mathcal{O}_S) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= n^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + \left(\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) \chi(\mathcal{O}_S) \right),
 \end{aligned}$$

de donde claramente se sigue que para $n \gg 0$ existe una constante $c > 0$ tal que

$$h^0(H_n) + h^2(H_n) > n^3 c.$$

Por dualidad de Serre y Proposicion 2.3(i),

$$h^2(H_n) = h^0(K_S \otimes H_n^*) = h^0(K_S \otimes H_n),$$

en consecuencia $h^0(H_n) + h^0(K_S \otimes H_n) > n^3 c$. Finalmente si logramos demostrar que $h^0(K_S \otimes H_n) - h^0(H_n) < n^2 r$ para algún $r > 0$, entonces

$$n^3 c < h^0(H_n) + h^0(K_S \otimes H_n) < 2h^0(H_n) + rn^2,$$

tomando los extremos de la expresión anterior, $h^0(H_n) > kn^3$ para algún $k > 0$, lo que finalizaria la prueba. Así nos resta demostrar el siguiente lema:

Lema 2.5. Sea L cualquier haz lineal en S , entonces existe una constante $k > 0$ tal que para todo n , $h^0(H_n \otimes L) - h^0(H_n) < kn^2$.

Demostración. Suponga que la clase divisor de L es expresado como la diferencia

$$[L] = C - D$$

donde C y D son curvas suaves en S .

Como C es un divisor efectivo podemos considerar la sucesión exacta $0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-C) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$, notamos que después tensorizarla por $H_n \otimes L$ y considerar la sucesión exacta larga inducida en los grupos de cohomología tenemos que

$$h^0(H_n \otimes L) \leq h^0(C, (H_n \otimes L)|_C) + h^0(H_n \otimes \mathcal{O}_S(-D)). \quad (3)$$

Con un razonamiento análogo, pero en esta ocasión dado que D es efectivo se tiene que

$$h^0(H_n \otimes \mathcal{O}_S(-D)) \leq h^0(H_n). \quad (4)$$

Así de (3) y (4) se sigue que $h^0(H_n \otimes L) - h^0(H_n) \leq h^0(C, (H_n \otimes L)|_C)$, de donde se observa que es suficiente demostrar que $h^0(C, (H_n \otimes L)|_C) < kn^2$, para algún $k > 0$.

El objetivo ahora será construir una filtración

$$(H_n \otimes L)|_C = G^0 \supseteq G^1 \supseteq \dots \supseteq G^{2n+1} = 0,$$

de esta forma para cada $p \in \{0, \dots, 2n\}$, al considerar las sucesiones exactas largas en los grupos de cohomología inducidas por las sucesiones $0 \rightarrow G^{p+1} \rightarrow G^p \rightarrow G^p/G^{p+1} \rightarrow 0$, tendremos

$$h^0((H_n \otimes L)|_C) = h^0(G^0) \leq \sum_{p=0}^{2n} h^0(G^p/G^{p+1}),$$

pues $h^0(G^p) \leq h^0(G^{p+1}) + h^0(G^p/G^{p+1})$.

Para construir dicha filtración, notemos que cada haz vectorial E' de rango 2 sobre una curva C suave es la extensión de dos haces lineales, es decir, existen $L_1, L_2 \in \text{Pic } C$ tales que

$$0 \rightarrow L_1 \rightarrow E' \rightarrow L_2 \rightarrow 0,$$

por la Proposición 1.13.i). Ahora notemos que existe una filtración

$$S^{2n} E' = F^0 \supseteq F^1 \supseteq \dots \supseteq F^{2n+1} = 0$$

tal que para cada $p \in \{0, \dots, 2n\}$, $F^p/F^{p+1} \cong S^p L_1 \otimes S^{2n-p} L_2 \cong L_1^p \otimes L_2^{2n-p}$; dicha filtración se sigue de considerar la descomposición $S^{2n} E' \cong \bigoplus_{k=0}^{2n} (S^k L_1 \otimes S^{2n-k} L_2) \cong \bigoplus_{k=0}^{2n} (L_1^k \otimes L_2^{2n-k})$, de donde no es difícil ver que $F^p \cong \bigoplus_{k=p}^{2n} (L_1^k \otimes L_2^{2n-k})$, son los subgrupos buscados.

Hasta el momento podemos concluir que existe una filtración

$$S^{2n} E|_C = F^0 \supseteq F^1 \supseteq \dots \supseteq F^{2n+1} = 0$$

construida como arriba, con $F^p/F^{p+1} \cong L_1^p \otimes L_2^{2n-p}$. Luego, después de tensorizar por $(\det E)^{-n} \otimes L$ y notar que $(\det E)^{-n} = L_1^{-n} \otimes L_2^{-n}$, logramos construir una filtración

$$(H_n \otimes L)|_C = G^0 \supseteq G^1 \supseteq \dots \supseteq G^{2n+1} = 0$$

como queríamos, y para cada $p \in \{0, \dots, 2n\}$, $G^p/G^{p+1} \cong L_1^{p-n} \otimes L_2^{n-p} \otimes L$.

Finalmente demostraremos que $\sum_{p=0}^{2n} h^0(L_1^{p-n} \otimes L_2^{n-p} \otimes L) < kn^2$ para algún $k > 0$. Si $h^0(H_n \otimes L)|_C = 0$ no hay nada que demostrar, en caso contrario $h^1(H_n \otimes L)|_C = 0$ pues $n \gg 0$, y por la fórmula de Riemann-Roch para curvas

$$\begin{aligned} h^0(L_1^{p-n} \otimes L_2^{n-p} \otimes L) &= \deg(L_1^{p-n} \otimes L_2^{n-p} \otimes L) + 1 - g(C) \\ &= \deg L_1^{p-n} + \deg L_2^{n-p} + \deg L + 1 - g(C), \end{aligned}$$

la segunda igualdad es consecuencia de que la fórmula de Riemann-Roch para haces lineales en una curva es lineal en el grado, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{2n} h^0(L_1^{p-n} \otimes L_2^{n-p} \otimes L) &= (\deg L_1 + \deg L_2) \left(\sum_{i=1}^{2n} i - n(2n+1) \right) \\ &\quad + (1 - g(C) + \deg L)(2n+1), \end{aligned}$$

como $\deg L_i \geq 0$ para $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=0}^{2n} h^0(L_1^{p-n} \otimes L_2^{n-p} \otimes L) &= (\deg L_1 + \deg L_2) \left(\sum_{i=1}^{2n} i - n(2n+1) \right) \\
 &+ (1 - g(C) + \deg L)(2n+1) \\
 &\leq (\deg L_1 + \deg L_2) \sum_{i=1}^{2n} i \\
 &+ (1 + \deg L)(2n+1) \\
 &= (\deg L_1 + \deg L_2)(n(2n+1)) \\
 &+ (1 + \deg L)(2n+1) \\
 &= n^2 \left[\left(2 + \frac{1}{n} \right) (\deg(L_1 + L_2)) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) (1 + \deg L) \right],
 \end{aligned}$$

de donde claramente se tiene que para $n \gg 0$ y todo $k \geq 3$

$$h^0(L_1^{p-n} \otimes L_2^{n-p} \otimes L) < n^2 k,$$

como se quería. □

Demostrando así la proposición también. □

2.2. Casi-secciones en $\mathbb{P}_S(E^*)$

Fijemos algo de notación. Sea E un haz vectorial de rango 2 sobre S , denotemos por $Y = \mathbb{P}_S(E^*)$ y $\mathcal{O}_Y(1)$ el dual del subhaz lineal tautológico, es decir, $\pi_* \mathcal{O}_Y(1) = E$, donde $\pi : Y \rightarrow S$ es la proyección natural. En Y consideramos el haz lineal $M_n = \mathcal{O}_Y(2n) \otimes (\pi^* \det E)^{-n}$. Por la fórmula de proyección $\pi_* M_n = H_n$. En particular $H^0(Y, M_n) = H^0(X, H_n)$.

Definición 2.6. Una casi-sección de la fibración $\pi : Y \rightarrow S$ es una subvariedad irreducible $T \subset Y$ tal que $\pi|_T : T \rightarrow S$ es un morfismo birracional.

Si T es una casi-sección, claramente el número de intersección $T \cdot \pi^{-1}(x) = 1$ para $x \in S$. Como $\pi : T \rightarrow S$ es un isomorfismo fuera del subconjunto $A = \{x \in S : \pi^{-1}(x) \subset T\} \subset S$, por la irreducibilidad de T , A tiene codimensión al menos 2, es decir, A es un conjunto finito de puntos.

Lema 2.7. Existe una biyección entre las casi-secciones de Y y las sucesiones exactas de la forma

$$0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow I_Z \cdot M \rightarrow 0$$

donde $L, M \in \text{Pic}(S)$ y $Z \subset S$ es 0-dimensional.

Demostración. Sea $T \subset Y$ una casi-sección. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(1) \otimes \mathcal{O}_Y(-T) \rightarrow \mathcal{O}_Y(1) \rightarrow N \rightarrow 0, \quad (5)$$

donde $N = \mathcal{O}_Y(1)|_T$, que se obtiene de tensorizar la sucesión, $0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(-T) \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_T \rightarrow 0$, por $\mathcal{O}_Y(1)$.

Note que el haz lineal $\mathcal{O}_Y(1) \otimes \mathcal{O}_Y(-T)$ es trivial en todas las fibras de Y , pues todo haz lineal sobre una curva racional queda determinado por su grado y, en este caso, cada fibra de π es isomorfa a $\mathbb{P}^1$. Por lo tanto $\mathcal{O}_Y(1) \otimes \mathcal{O}_Y(-T)$ es de la forma π^*L para algún haz lineal L sobre S (ver [7], pág. 89). Así la sucesión (5), es de la forma $0 \rightarrow \pi^*L \rightarrow \mathcal{O}_Y(1) \rightarrow N \rightarrow 0$, luego aplicando el funtor imagen directa tenemos

$$0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow \pi_*N \rightarrow 0, \quad (6)$$

donde las gavillas anteriores son sobre S .

Falta ver que π_*N es de la forma $I_Z \cdot M$ como en el enunciado. Sea U un subconjunto abierto de S , donde tanto L como E son trivializables, entonces existen $f, g \in \mathcal{O}_S(U)$ funciones que definen localmente el homomorfismo $L \rightarrow E$. Como T contiene sólo un número finito de fibras de Y , las funciones f y g no se anulan en un divisor en común. Por lo tanto, la sucesión (6) sobre U queda

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_U \xrightarrow{(f,g)} \mathcal{O}_U \oplus \mathcal{O}_U \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ f \end{pmatrix}} I_{Z \cap U} \cdot \mathcal{O}_U \longrightarrow 0,$$

donde $Z \cap U = \{f = g = 0\}$. Esto muestra que $\pi_*N = I_Z \cdot M$, para algún haz lineal M sobre S y, Z una subvariedad 2-dimensional de S .

Inversamente sea

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E \xrightarrow{\nu} I_Z \cdot M \longrightarrow 0,$$

una sucesión como en el enunciado del lema. Como $I_Z \cdot M \subset M$ y ν es sobreyectiva, podemos definir una aplicación $g : S \rightarrow Y$, que envía a cada punto $x \in S$ en la clase del $\ker \nu_x$. Finalmente $\text{Im } g$ es la casi-sección de Y buscada, pues el conjunto de puntos en S tal que $g(x) = \mathbb{P}(E_x^*)$, coincide con Z que tiene codimensión 2. $\square$

Lema 2.8. *Supongamos que tenemos una sucesión como en la proposición anterior. Entonces:*

- a) $\det E = L \otimes M$, así que $c_1(E) = c_1(L) + c_1(M)$ y,
- b) $c_2(E) = c_1(L) \cdot c_1(M) + \deg Z$.

Demostración. a) Se sigue del hecho que ambos extremos son haces lineales, isomorfos fuera de un conjunto de codimensión 2. b) Como la aplicación $L \rightarrow E$ está dada por una sección $s \in H^0(E \otimes L^{-1})$ que por hipótesis tiene a Z como su lugar de ceros, entonces $c_2(E \otimes L^{-1}) = \deg Z$.

Por otro lado de la parte (b) tenemos que

$$\begin{aligned} c_2(E \otimes L^{-1}) &= \sum_{i=0}^2 c_{2-i}(E) \cdot (c_1(L^{-1}))^i \\ &= c_2(E) - c_1(E) \cdot c_1(L) + c_1^2(L) \\ &= c_2(E) - c_1(L) \cdot c_1(M), \end{aligned}$$

de donde claramente por igualdad podemos despejar $c_2(E)$ como se quería. $\square$

Antes de continuar mencionaremos algunos hechos elementales de teoría de la invariantes geométricos que más adelante necesitaremos. Para una mejor comprensión se recomienda al lector [8] y [9].

Primero construiremos una representación para $PGL(2, \mathbb{C})$ (grupo reductivo, ver [9] Capítulo 2). Sea $W = \mathbb{C}^2$ la representación estándar de $GL(2, \mathbb{C})$, es decir, $\mathbb{C}^2$ tiene estructura de $GL(2, \mathbb{C})$ -módulo con el homomorfismo $(M, z) \mapsto Mz$. Luego siendo $W_n = S^{2n} W \otimes (det W)^{-n}$ la representación estándar induce una representación

$$\rho : GL(2, \mathbb{C}) \times W_n \rightarrow W_n,$$

definida como $\rho(M, e_1^{r_1} e_2^{r_2} \otimes (e_1 \wedge e_2)^{-n}) = ((Me_1)^{r_1} (Me_2)^{r_2} \otimes (Me_1 \wedge Me_2)^{-n})$, donde $B = \{e_1^{r_1} e_2^{r_2} \otimes (e_1 \wedge e_2)^{-n} \mid r_1 + r_2 = 2n\}$ es una base de W_n ; después observamos que el centro de $GL(2, \mathbb{C})$ (las traslaciones) actúa trivialmente, pues dado $M \in Z(GL(2, \mathbb{C}))$ (es decir, $M = aI$ con $a \in \mathbb{C}^*$) para todo elemento en B ocurre

$$\begin{aligned} \rho(M, e_1^{r_1} e_2^{r_2} \otimes (e_1 \wedge e_2)^{-n}) &= ((ae_1)^{r_1} (ae_2)^{r_2} \otimes (ae_1 \wedge ae_2)^{-n}) \\ &= (a^{2n} e_1^{r_1} e_2^{r_2} \otimes a^{-2n} (e_1 \wedge e_2)^{-n}) \\ &= (e_1^{r_1} e_2^{r_2} \otimes (e_1 \wedge e_2)^{-n}), \end{aligned}$$

de esta forma ρ induce una representación de $PGL(2, \mathbb{C})$, a saber W_n .

Un elemento $f \in W_n$ se dice *inestable* con respecto al grupo $PGL(2, \mathbb{C})$, si una de las siguientes condiciones se satisface:

1. La clausura de la $PGL(2, \mathbb{C})$ -órbita de f contiene a 0, es decir, $0 \in \overline{PGL(2, \mathbb{C}) \cdot f}$
2. Todo polinomio $PGL(2, \mathbb{C})$ -invariante en W_n de grado $m \geq 1$, se anula en f .

3. f tiene una raíz de orden al menos $n+1$, es decir, existe una base e_1, e_2 de W tal que $f = \frac{e_1^{n+1} f'}{(e_1 \wedge e_2)^n}$.

Ver [8], pág. 36 para la definición de elemento inestable y págs. 77–78 para la tercera condición de equivalencia.

Para $m \geq 1$ denotemos por $I_{n,m}$ el espacio de polinomios homogéneos $PGL(2, \mathbb{C})$ -invariantes de grado m en W_n . Sea $I_{n,m} \oplus S'$ la descomposición canónica de $S^m W_n^*$, donde S' es la suma sobre todos los sumandos no triviales de $S^m W_n^*$.

El haz vectorial $H_n = S^{2n} E \otimes (\det E)^{-n}$ es el haz vectorial inducido desde E vía la representación W_n . La descomposición anterior induce una descomposición $S^m H_n^* = \mathcal{I}_{n,m} \oplus \mathcal{S}'$, donde $\mathcal{I}_{n,m}$ es el haz trivial de rango igual a la dimensión de $I_{n,m}$. Luego la forma bilineal de evaluación define

$$(S^m H_n^*) \otimes H_n \rightarrow \mathcal{O}_S. \quad (7)$$

Ahora estamos preparados para demostrar el último lema necesario para la demostración del Teorema de Bogomolov:

Lema 2.9. *Si $c_1^2(E) - 4c_2(E) > 0$. Entonces para $n \gg 0$, existe una sección no cero $s \in H^0(Y, M_n)$, cuyo divisor se anula de orden al menos $n+1$ en una casi-sección T de Y .*

Demostración. Para $x \in S$, sea $U(n, x) = \{s \in H^0(S, H_n) | s(x) = 0\}$. Por la Proposición 2.4 para $n \gg 0$, $U(n, x) \neq 0$. Elijamos $s \in U(n, x)$ una sección no cero. Demostraremos que el divisor de s contiene alguna casi-sección T con multiplicidad $\geq n+1$.

Note que cada polinomio $PGL(2, \mathbb{C})$ -invariante $P \in I_{n,m}$, induce una sección de $\mathcal{I}_{n,m}$ y por lo tanto de $S^m H_n^*$, que por convención denotaremos otra vez por P . Como $s(x) = 0$ podemos concluir que bajo (7), $P(s) = 0$, la demostración es como sigue.

Notamos que s asocia a cada punto $x' \in S$, un elemento $s_{x'} \in S^{2n} E_{x'} \otimes (\det E)_{x'}^{-n}$, de tal forma que si (x_1, x_2) es una base de $E_{x'}$, $s_{x'} = f(x_1, x_2) = \Pi(x_1 - \alpha_i x_2)$ salvo un factor, con α_i raíces. Las raíces de esta forma, varían conforme la elección de la base de $E_{x'}$, sin embargo el discriminante

$$\text{disc}(f) = \Pi_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j),$$

que es un polinomio en las variables α_i de f , que varía por un factor escalar bajo un cambio de base, de esta forma podemos asociar a s la sección $\text{disc}(s)$ del haz lineal $(\det H_n)^N$, de tal manera que $\text{disc}(s)$ se anula en un punto $x' \in S$

si y sólo si, la forma asociada a $s_{x'}$ tiene una raíz repetida. Pero $\det H_n = \mathcal{O}_S$, así que toda sección es una constante, por consiguiente si s se anula en algún punto de S , $\text{disc}(s)$ es idénticamente cero, demostrando que $P(s) = 0$.

Bajo el isomorfismo $H^0(S, H_n) \cong H^0(Y, M_n)$, podemos considerar a s como sección de M_n . Observamos que para cada fibra $F_{x'} \cong \mathbb{P}_{x'}$ de π , podemos ver a $s|_{F_{x'}}$ como un elemento de W_n y, dado que $P(s) = 0$ entonces $s|_{F_{x'}}$ es un elemento inestable de W_n , en particular por las equivalencias 2 y 3, $s|_{F_{x'}}$ es idénticamente cero o tiene un cero de multiplicidad al menos $n+1$.

Así al considerar el divisor $D = \{s = 0\} \subset Y$, como $M_n \cdot D \neq 0$ entonces las componentes de D no son todas fibras, por lo tanto existe una casi-sección T de Y tal que D contiene a T con multiplicidad $n+1$, como se quería. $\square$

2.3. Demostración del Teorema de Bogomolov

El inverso de la demostración es obvio, pues si existe una sucesión exacta como en el teorema que satisface (2), entonces

$$\begin{aligned} c_1^2(E) - 4 c_2(E) &= (c_1(L) + c_2(M))^2 - 4(c_1(L) \cdot c_1(M) + \deg(Z)) \\ &= (L \otimes M^{-1})^2 - 4 \deg Z > 0. \end{aligned}$$

Ahora si $c_1^2(E) - 4c_2(E) > 0$, por el Lema 2.9, existe T casi-sección de Y tal que $(s) > (n_0 + 1)T$, para alguna sección no cero $s \in H^0(Y, M_{n_0})$ y algún $n_0 > 0$. Luego por el Lema 2.7, existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow I_Z \cdot M \rightarrow 0. \quad (8)$$

Deseamos demostrar que (8) satisface (2). Sea $\Delta = L \otimes M^{-1}$

$$\begin{aligned} c_1^2(\Delta) - 4 \deg Z &= c_1^2(\Delta) - 4 \deg Z + (2c_1(L) \cdot c_1(M) - 2c_1(L) \cdot c_1(M)) \\ &= (c_1(L) + c_1(M))^2 - 4(c_1(L) \cdot c_1(M) + \deg Z) \\ &= c_1^2(E) - 4c_2(E) > 0, \end{aligned}$$

para demostrar la otra condición de (2), note que es suficiente verificar que existe i tal que $h^0(\Delta^i) > 0$, pues sin pérdida de generalidad podemos considerar una sección no cero en $H^0((L \otimes M)^i)$ que se anule en una curva efectiva C . Luego $C \cdot H > 0$ para cada H amplio, pues C es una curva irreducible efectiva, demostrando así (2).

En lo que sigue demostraremos que $h^0(\Delta^i) > 0$, para algún $i > 0$. Para cada $r \in \mathbb{Z}$, denotamos $M_{n_0}(-rT)$ en lugar de $M_{n_0} \otimes \mathcal{O}_Y(-rT)$. Una vez hecha

la convención anterior, observamos que $h^0(M_{n_0}(-(2n_0 + 1)T)) = 0$, en caso contrario sea $s' \in H^0(M_{n_0}(-(2n_0 + 1)T))$ una sección no cero, $s'|_{F_x} = 0$ para cada fibra F_x de Y , como el haz lineal M_{n_0} tiene grado $2n$ en cada fibra de Y , $T.F_x = 1$ y todo haz lineal sobre una curva racional está determinado por su grado tenemos una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow M_{n_0}(-(-2n_0 + 1)F_x) \rightarrow M_{n_0}(-(2n_0 + 1)) \rightarrow \mathcal{O}_{F_x}(-1) \rightarrow 0,$$

la afirmación se sigue de considerar la sucesión exacta inducida en los grupos de cohomología, y de tomar en cuenta que $H^0(F_x, \mathcal{O}_{F_x}(-1)) = 0$; así $s = 0$ lo cual contradice su elección.

Ahora para cada $n_0 + 1 \leq k \leq 2n_0$, considere la sucesión exacta

$$0 \rightarrow M_{n_0}(-(k + 1)T) \rightarrow M_{n_0}(-kT) \rightarrow M_{n_0}|_T \rightarrow 0.$$

Luego, de la sucesión larga inducida en los grupos de cohomología se tiene

$$h^0(M_{n_0}(-kT)|_S) \geq h^0(M_{n_0}(-kT)) - h^0(M_{n_0}(-(k + 1)T)),$$

sumando sobre $k : \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} h^0(M_{n_0}(-kT)|_T) \geq h^0(M_{n_0}(-(n_0 + 1)T)) > 0$, donde la desigualdad de la derecha es por la observación anterior; en particular existe $i > 0$ tal que, $h^0(M_{n_0}(-(n_0 + i)T)|_T) > 0$.

Recordar que $\pi^*L = \mathcal{O}_Y(1) \otimes \mathcal{O}_Y(-T)$ y $N = \mathcal{O}_Y(1)|_T$, por la construcción del Lema 2.7, entonces

$$\begin{aligned} M_{n_0}(-(n_0 + i)T)|_T &= \mathcal{O}_Y(2n_0) \otimes (\pi^* \det E)^{-n} \otimes \mathcal{O}_Y(-(n_0 + i)T)|_T \\ &= \mathcal{O}_Y(1) \otimes \mathcal{O}_Y(1) \otimes (\pi^* \det E)^{-n} \\ &\quad \otimes \mathcal{O}_Y(-n_0T) \otimes \mathcal{O}_Y(iT)|_T \\ &= (\mathcal{O}_Y(1) \otimes \mathcal{O}_Y(1) \otimes \mathcal{O}_Y(-T) \otimes \pi^* \det E)^{n_0} \\ &\quad \otimes (\mathcal{O}_Y(i) \otimes \mathcal{O}_Y(-iT) \otimes \mathcal{O}_Y(-i)) \\ &= (N \otimes \pi^*L \otimes (\pi^*(\det E))^{-1})^{n_0} \otimes (\pi^*L \otimes N^{-1})^i \\ &= (N \otimes \pi^*(L \otimes (\det E)^{-1}))^{n_0} \otimes (\pi^*L \otimes N^{-1})^i \\ &= (N \otimes \pi^*M^{-1})^{n_0} \otimes (\pi^*L \otimes N^{-1})^i \\ &= (\pi^*M)^{-n_0} \otimes N^{n_0-i} \otimes (\pi^*L)^i. \end{aligned}$$

Como $\pi_*N = I_Z \cdot M \subset M$, tenemos que $N|_{T \setminus \pi^{-1}(Z)} \subset \pi^*M|_{T \setminus \pi^{-1}(Z)}$. Junto con lo anterior podemos ver que $M_{n_0}(-(n_0 + i)T)|_{T \setminus \pi^{-1}(Z)} \subset \pi^*(L \otimes M^{-1})^i|_{T \setminus \pi^{-1}(Z)}$. Dado que $H^0(T \setminus \pi^{-1}(Z), \pi^*(L \otimes M^{-1})^i|_{T \setminus \pi^{-1}(Z)}) \neq 0$, luego aplicando π^* encontramos que $H^0(T \setminus Z, (L \otimes M^{-1})^i) \neq 0$. Finalmente como Z es 2-codimensional podemos extender secciones sobre Z (por el *Teorema de Hartog*, ver su demostración en [5], pág.7) y, encontrar que $H^0(T, (L \otimes M^{-1})^i) \neq 0$, lo que finaliza la prueba.

Capítulo 3

Teorema de Reider

En este capítulo el Teorema de Reider, su demostración y finalizaremos con algunas de sus aplicaciones. El Teorema de Reider da condiciones necesarias para que el sistema adjunto $|K_S + L|$ de un haz lineal nef y big tenga puntos base o no separe puntos. Entre las aplicaciones, está el análisis de la aplicación pluricanónica ϕ_{mK_S} para S una superficie de tipo general y $m \in \mathbb{N}$. Veremos el ejemplo de Bombieri de una superficie de tipo general con, $K_S^2 = 9$, sin pincel de curvas de género 2, tal que la aplicación bicanónica no es birracional.

3.1. Teorema de Reider

Entendemos por un θ -ciclo Z sobre S una suma formal de puntos de S , dicho de otra manera un subespacio analítico de S cuyo soporte es un conjunto finito de puntos.

Definición 3.1. Sea S una superficie y $\mathcal{O}_S(D)$ un haz lineal sobre S . Un θ -ciclo Z sobre S se dice que está en posición especial con respecto $|D|$ si la aplicación restricción $H^0(\mathcal{O}_S(D)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_Z)$ no es sobreyectiva y para cada $Z' \subset Z$ con $\deg(Z - Z') = 1$, $H^0(I_{Z'}(D)) = H^0(I_Z(D))$.

El siguiente teorema da una caracterización para θ -ciclos en posición especial, se recomienda para su demostración [2], págs 175–176.

Teorema 3.2. Sea S una superficie algebraica compleja suave, L un divisor sobre S y Z un θ -ciclo efectivo sobre S . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) Z está en posición especial con respecto a $|K_S + L|$.
- (ii) Existe una pareja (ξ, e) , donde ξ es un haz vectorial de rango 2 sobre S y e es una sección tal que $\det \xi = \wedge^2 \xi = L$ y $(e = 0) = Z$.

Observación 3.3. Si ocurre (ii), entonces existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \xrightarrow{e} \xi \longrightarrow {}^\wedge \mathcal{I}_Z \otimes \mathcal{O}_S(L) \longrightarrow 0.$$

Teorema 3.4. (Teorema de Reider.) Sea S una superficie y L un divisor nef.

i) Si $L^2 \geq 5$ y p es un punto base de $|K_S + L|$, entonces existe E divisor efectivo que pasa por p tal que:

$$\begin{aligned} L.E &= 0, & E^2 &= -1, \\ L.E &= 1, & E^2 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

ii) Si $L^2 \geq 10$, p y q no son separados por $|K_S + L|$, entonces existe E divisor efectivo que pasa por p y q tal que:

$$\begin{aligned} L.E &= 0, & E^2 &= -1 \quad \text{ó} \quad -2, \\ L.E &= 1, & E^2 &= 0 \quad \text{ó} \quad 0, \\ L.E &= 2, & E^2 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

iii) Si $L^2 = 9$, entonces $L \equiv 3E$ y $E^2 = 1$.

Observación 3.5. En ii) se considera el caso $p = q$, pues decimos que ϕ_{K_S+L} no separa a p y q , si ocurre uno de los siguientes casos, o bien, $p \neq q$ y $\phi_{K_S+L}(p) = \phi_{K_S+L}(q)$ o la diferencial de p no es inyectiva, de este último se sigue caso $p = q$.

Demostración. i) Sea $Z = p$, note que Z ésta en posición especial respecto a $|K_S + L|$, pues p es punto base. Entonces por el Teorema 3.2, existe una pareja (ξ, e) , donde ξ es un haz vectorial de rango 2 en S y $e \in H^0(\xi)$ es una sección tal que $\det \xi = \wedge^2 \xi = L$ y $Z = (e = 0) = p$

De lo anterior, la relación entre los numeros de Chern es

$$c_1^2(\xi) = c_1^2(\det \xi) = L^2 \geq 5, \quad c_2(\xi) = \deg(Z) = 1,$$

de donde claramente $c_1^2(\xi) > 4c_2(\xi)$, implicando que ξ es inestable, así por el Teorema 2.2 existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(M) \rightarrow \xi \rightarrow I_A \otimes \mathcal{O}_S(E) \rightarrow 0$$

Agrupando la sucesión anterior y la que existe para (ξ, e) por la observación 3.3, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 0 & & & \\
& & & \uparrow & & & \\
& & & I_A \otimes \mathcal{O}_S(E) & & & \\
& & \nearrow t & \uparrow \beta & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_S & \xrightarrow{e} & \xi & \xrightarrow{\wedge e} & I_Z \otimes \mathcal{O}_S(L) \longrightarrow 0 \\
& & & & \uparrow \alpha & \nearrow t' & \\
& & & \mathcal{O}_S(M) & & & \\
& & & \uparrow & & & \\
& & & 0 & & &
\end{array}$$

donde $t = \beta \circ e$, $t' = (\wedge e) \circ \alpha$.

Por el Lema 2.8 tenemos:

- (a) $M + E = L$,
- (b) $M.E + \deg A = c_2(\xi) = \deg Z = 1$,
- (c) $0 < (M - E)^2$ y $0 < (M - E).H$ para todo H amplio.

Ahora veremos que $t, t' \neq 0$. Supongamos lo contrario, es decir, $t \equiv 0$, del diagrama se sigue que $\text{Im } e = \ker \beta = \text{Im } \alpha$, implicando que existe una aplicacion $\mathcal{O}_S(M) \rightarrow \mathcal{O}_S$, esto último ocurre si y sólo si $-M \geq 0$.

De (c) se sigue que

$$\begin{aligned}
(M + M).H &> M.H + E.H = M - H + E.H + M.H - M.H \\
&= (M + M).H + (E - M).H = L.H \geq 0,
\end{aligned}$$

implicando que $M.H > 0$, que contradice la condición $-M \geq 0$, por lo tanto $t \neq 0$. De manera análoga se demuestra que $t' \neq 0$.

Note que después de tensorizar $t' : \mathcal{O}_S(M) \rightarrow I_Z \otimes \mathcal{O}_S(L)$ por $\mathcal{O}_S(-M)$, obtenemos una sección $s : \mathcal{O}_S \rightarrow I_Z \cdot \mathcal{O}_S(E)$, demostrando que $H^0(I_Z \otimes \mathcal{O}_S(E)) \neq 0$, mas aún $(s)_0 = D$ es un divisor efectivo que pasa por p y, sin pérdida de generalidad podemos considerar $D = E$. En lo que resta de la demostración veremos que E es el divisor que satisface las igualdades del teorema.

De (b) se sigue que $M.E \leq \deg(Z) \leq 1$. Ahora veamos que $E^2 \leq 0$, supongamos lo contrario, es decir, que $E^2 > 0$, entonces $M^2.E^2 \leq (M.E)^2 \leq 1$ donde la desigualdad de la izquierda por el Corolario 1.2 y la desigualdad de

la derecha por lo anterior.

De (c) se tiene $L.(M - E) > 0$, y como $L = M + E$ entonces $M^2 - E^2 > 0$, así $M^2 > E^2 > 0$ y $0 < M^2.E^2 \leq (M.E)^2 \leq 1$ de donde se sigue que $M^2 = E^2 = 1$ lo cual contradice $L^2 \geq 5$, por tanto $E^2 \leq 0$.

Ahora $0 \leq L.E = M.E + E^2$ por ser E efectivo, por lo tanto $E^2 \geq -M.E \geq -1$, juntando lo anterior $-1 \leq E^2 \leq 0$. Finalmente veamos los casos:

- 1) si $E^2 = -1$, entonces $M.E = 1$ y $L.E = 0$, implicando que E es el divisor buscado.
- 2) si $E^2 = 0$, entonces $0 \leq M.E \leq 1$; donde el caso $M.E = 0$ queda descartado, pues en caso contrario tendríamos que $L.E = 0$ y, dado que $L^2 > 0$, entonces por el Teorema 1.1 $E \equiv 0$, contradiciendo que E es efectivo, mientras que para el caso $M.E = 1$ tenemos que $L.E = 1$ implicando que E es el divisor buscado.

De esta forma queda demostrada la parte i) del teorema.

ii). Sean p y q puntos no separados por $|K_S + L|$, entonces $Z = p + q$ está en posición especial respecto a $|K_S + L|$. Sea E el divisor efectivo como antes, sólo que ésta vez $M.E \leq \deg(Z) = 2$. Veamos que ocurre con E^2 .

Si $E^2 > 0$, por el Corolario 1.2 y $M.E \leq 2$ tenemos que $M^2.E^2 \leq (M.E)^2 \leq 4$. Como $L.(M - E) > 0$ y $L = M + E$, entonces $M^2 - E^2 > 0$, así $0 < M^2.E^2 \leq (M.E)^2 \leq 4$, de donde se desprenden los siguientes casos:

- 1) $M^2.E^2 = (M.E)^2 = 1$ que queda descartado por la parte i) del teorema.
- 2) para $M^2.E^2 = 1$ y $(M.E)^2 = 4$, tenemos que $L^2 \leq 6$, que contradice la hipótesis $L \geq 9$.
- 3) $M^2.E^2 = (M.E)^2 = 4$ se divide en tres casos más, dos de ellos quedan descartados de manera similar al anterior, sin embargo para el tercero se tiene $M^2 = 4$, $E^2 = 1$, $M.E = 2$ y $L^2 = 9$, entonces excepto este último caso (que se retomara al final) se llega a una contradicción, así $E^2 \geq 0$.

Por otro lado $0 \leq L.E = M.E + E^2$, pues E es efectivo, así $E^2 \geq -M.E \geq -2$ y juntando las desigualdades se tiene $-2 \leq E^2 \leq 0$. Finalmente veamos los casos:

- 1) si $E^2 = -2$, entonces $M.E \geq 2$, de hecho $M.E = 2$ y $L.E = 0$.

- 2) si $E^2 = -1$, entonces $0 \leq M.E \leq 2$.
- 3) si $E^2 = 0$, entonces $0 \leq M.E \leq 2$ y el único caso que se descarta es $M.E = 0$ con el mismo razonamiento que en i).

No es difícil ver que todos los casos antes mencionados implican que E es el divisor buscado.

Hasta el momento se han cubierto todos los casos excepto $L^2 = 9$, para el cual tenemos que $E^2 = 1$, $M^2 = 4$ y $E.M = 2$, así por el Teorema 1.1 aplicado a E y $-3E + L$, entonces $L \equiv 3E$ pues $E.(-3E + L) = 0$, como se quería. $\square$

Observación 3.6. Si $E_1 + E_2$ es una descomposición de E , entonces $E_i^2 \leq 0$. Veamos la demostración para el caso i), pues la prueba para ii) es análoga. Supongamos lo contrario, es decir, que existe $i \in \{1, 2\}$ tal que $E_i^2 > 0$, entonces por el Corolario 1.2 tenemos que

$$5 \leq E_i^2.L^2 \leq (L.E_i)^2 \leq 1,$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto toda componente de E tiene auto-intersección ≤ 0 .

Corolario 3.7. Si $L^2 \geq 5$ y $|K_S + L| = 0$, entonces S contiene un pincel libre de puntos base E' con $L.E' = 1$.

Demostración. Note que la condición $|K_S + L| = 0$, es equivalente a decir que todo punto de S es un punto base de dicho sistema. Así para todo punto $x \in S$ por el Teorema 3.4(i), existe un divisor efectivo E que pasa por x y satisface uno de los casos que aparecen en (1). Luego, $\mathcal{A}$ denotará la familia formada por dichos divisores.

Sea E' la parte móvil de E (como elemento de la familia algebraica), es decir, $E = E' + F$ donde F es la parte fija, demostraremos que E' es el divisor buscado. Por la observación 3.6 $(E')^2 \leq 0$, de hecho $(E')^2 = 0$ por ser la parte móvil.

En efecto $|E'|$ es un pincel, como E' es efectivo, podemos considerar la sucesión exacta $0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-E') \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_{E'} \rightarrow 0$, después de tensorizar por $\mathcal{O}_S(E')$ y dado que los haces lineales sobre curvas racionales están determinados por su grado, obtenemos una sucesión exacta larga en los grupos de cohomología

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_S) \longrightarrow H^0(E') \xrightarrow{f} H^0(E', \mathcal{O}_{E'}) \longrightarrow \cdots,$$

de donde claramente $h^0(\mathcal{O}_S(E')) \leq 2$. Por otro lado, sabemos que $h^0(\mathcal{O}_S(E')) \neq 0$, luego si $h^0(\mathcal{O}_S(E')) = 1$, f sería la aplicación cero por la exactitud de la

sucesión, implicando que $H^0(\mathcal{O}_S) \cong H^0(\mathcal{O}_S(E'))$ lo cual es una contradicción, así $1 < h^0(\mathcal{O}_S(E'))$ y, por consiguiente $|E|$ es un pincel.

No es difícil ver que E' se mueve en una familia libre de puntos base, en caso contrario todos los elementos de la parte móvil se intersectarían en al menos un punto y, su número de intersección sería distinto de cero, en particular $(E')^2 = 0$, que es imposible.

Por un lado nL es efectivo para $n \gg 0$, ahora observamos que $nL.E' = 0$ si y sólo si $nL \leq E'$, por lo tanto $0 < L.E'$. Y como $L.E' \leq L.E$ concluimos que E' es el divisor buscado. $\square$

Corolario 3.8. *Sea $L^2 \geq 10$ y ϕ la aplicación definida por $|K_S + L|$. Si ϕ no es birracional, entonces S contiene un pincel libre de puntos base E' con $L.E' = 1$ o $L.E' = 2$.*

Demostración. Sean $p \in S$ y, $U \subseteq S$ un subconjunto abierto que contiene a p donde ϕ esta definida, existe $q \in U$ distinto de p tal que $\phi(p) = \phi(q)$ pues ϕ no es birracional, entonces por el Teorema 3.4(ii) existe un divisor efectivo E que pasa por p y q , tal que ocurre uno de los tres casos que aparecen en (2).

Lo anterior ocurre para todo punto donde ϕ esta definida, luego $\mathcal{A}$ denotará la familia formada por dichos divisores. Sea E' la parte móvil de E (como elemento de la familia algebraica), es decir, $E = E' + F$ donde F es la parte fija. El resto es completamente análogo al corolario anterior. $\square$

3.2. Aplicaciones

Cuando S es una superficie minimal de tipo general, es posible demostrar que S tiene un número finito de curvas (-2) y, que dichas curvas son contraídas a un punto bajo las aplicaciones canónicas. También es posible demostrar que toda aplicación canónica ϕ_{nK_S} se factoriza a través del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathbb{P}(H^0(nK_S)^*) \\ \phi \downarrow & \nearrow \psi_n & \\ S' & & \end{array}$$

donde S' es su modelo canónico (no necesariamente suave) y ϕ contrae las curvas (-2), por esta razón analizar la aplicación ψ_n es equivalente analizar la aplicación canónica de orden n .

Proposición 3.9. *Sea S una superficie minimal de tipo general. Entonces*

- (i) ψ_n es un encaje para $m \geq 5$.
- (ii) ψ_4 es un encaje si $K_S^2 \neq 1$.
- (iii) ψ_3 es un morfismo para $K_S^2 \geq 2$, y un encaje para $K_S^2 \geq 3$.
- (iv) ψ_2 es un morfismo para $K_S^2 \geq 5$ y un morfismo birracional para $K_S^2 \geq 10$, excepto cuando S tiene un fibración de género 2.

Demostración. i) Como L es nef tiene sentido considerar $L = (m - 1)K_S$ para $m \geq 5$, luego $L^2 = ((m - 1)K_S)^2 \geq 16$ y la aplicación definida por $|K_S + L| = mK_S$ no es otra cosa que ϕ_{mK_S} .

Tenemos que demostrar dos cosas, la primera que ψ_m es un morfismo y la segunda que separa puntos, para este último será suficiente verificar que los puntos que no separa ϕ_{mK_S} , son puntos que se encuentran sobre las curvas (-2) , las cuales son contraídas a un punto por ϕ , en consecuencia ψ_m define un encaje. Hasta el momento podemos concluir que se tienen todas las hipótesis para aplicar el Teorema 3.4.

Sea p un punto donde ψ_m no está definido, entonces existe un divisor efectivo E que pasa por p como en el Teorema 3.4(i) (pues $L^2 \geq 16$, en particular ≥ 5) tal que

$$\begin{array}{lll} L.E = 0 & y & E^2 = -1, \quad \text{o} \\ L.E = 1 & y & E^2 = 0, \end{array} \quad (3)$$

si ocurre el primer caso $K_S.E = 0$, como el número de intersección es par esto contradice la condición $E^2 = -1$; para el segundo caso se tiene una contradicción al hecho $K_S.E \neq 0$, ambos casos contradicen la existencia de E , por lo tanto no existe p con las condiciones supuestas, lo que demuestra que ψ_m es un morfismo.

Para cada par de puntos de S que no son separados por ϕ_{mK_S} existe E divisor efectivo como en el Teorema 3.4(ii). Dado que $K_S.E \geq 0$ y $K_S.E + E^2 \equiv 0 \pmod{2}$, quedan los casos

$$\begin{array}{lll} L.E = 0 & y & E^2 = -2, \\ L.E = 1 & y & E^2 = -1, \\ L.E = 2, & y & E^2 = 0. \end{array} \quad (4)$$

donde los dos últimos quedan descartados pues ambos implican que $K_S.E \geq 1$, luego $L.E = (m - 1)K_S.E \geq 4$ lo cual es un absurdo, así de (4) la única posibilidad es $L.E = 0$ y, $E^2 = -2$, implicando que E está compuesto de curvas (-2) como se quería.

- ii) La prueba es análoga al caso anterior sólo que está vez $m = 4$.
 iii) Para demostrar que es morfismo note que $L^2 = 4K_S^2$ y, $L^2 \geq 5$ si $K^2 \geq 2$, de esta forma se tienen las hipótesis para aplicar el Teorema 3.4(i) y el resto es análogo a (i). Finalmente para ver que ψ_3 separa puntos, observamos que $L^2 \geq 10$ si $K_S^2 \geq 3$, llegado este punto el resto es análogo a i).
 iv) Si $K_S^2 \geq 5$, sea $L = K_S$, de manera inmediata por el Teorema 3.4(i) y dado que el número de intersección es par se sigue que ψ_2 esta definida en todo punto, por lo tanto es un morfismo.

Si $K_S^2 \geq 10$ y ψ_2 no es birracional, S contiene un pincel libre de puntos base $|E|$ (por el Corolario 3.8) para E algún divisor efectivo tal que

$$E^2 = 0 \quad y \quad K_S.E = 1 \text{ ó } 2.$$

Como el número de intersección es par, $K_S.E = 2$ y por consiguiente $g(E) = 2$. Finalmente la aplicación racional f definida por $|E|$ es la fibración buscada, pues las fibras son elementos de $|E|$ que por lo anterior tienen género 2.

Supongamos que S tiene una fibración, con fibra general F y $g(F) = 2$, observamos que $\psi_2|_F$ coincide con la aplicación bicanónica φ_2 de F que es curva suave de género 2, pues $K_S^{\otimes 2}|_F = K_F^{\otimes 2}$ por la fórmula de adjunción y $\mathcal{O}_S(F_x)|_{F_x}$ es trivial para toda fibra F_x , por lo tanto $\psi_2|_F$ no es 1-1, pues por la teoría de curvas φ_2 es 2-1. $\square$

Observación. Existe una superficie minimal S de tipo general con $K_S^2 = 9$ tal que su aplicación bicanónica no es birracional y no tiene un pincel de curvas de género 2, mostrando que la parte iv) de la proposición anterior no siempre ocurre para el caso $K_S^2 = 9$; además contiene un pincel de curvas hiperelípticas de género 3. Este ejemplo fue dado por Bombieri, ver los detalles en [4], págs. 193–196. Su construcción es como sigue.

Consideremos la superficie $\mathbb{F}_2 = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$, por la Proposición 1.17.ii) existe una única curva B tal que $B^2 = -2$, por la parte i) de la misma proposición si L es una fibra de $\mathbb{F}_2$, entonces B y L forman una base para $\text{Pic}(S)$ con

$$L^2 = 0, \quad y \quad L.B = 1.$$

Por la Proposición 1.16.iv) el haz canónico de $\mathbb{F}_2$ es $K_{\mathbb{F}_2} = -4L - 2B$, de donde se sigue claramente que $B.K_S = 0$ y por lo tanto B es una curva racional.

Para cada $m \geq 1$ el sistema lineal $|m(2L + B)|$ no tiene puntos base (para más detalles ver [6], pág. 379), fijemos $m = 7$ y elijamos una curva $\Delta_0 \in |7(2L + B)|$ irreducible y no singular, entonces Δ_0 es disjunta de B y $\Delta = \Delta_0 + B$ es un

divisor efectivo no singular, con clase $14L+8B$ que es divisible por 2, por lo tanto existe un cubriente doble $\pi : S' \rightarrow \mathbb{F}_2$ ramificado en Δ (ver [2], págs. 54–55).

Por propiedades del cubriente ramificado el haz canónico es $K_{S'} = \pi^* K_{\mathbb{F}_2} + \frac{1}{2}\pi^*(\Delta)$. Si $E = \pi^{-1}(B)$, entonces $\pi^*(B) = 2E$ y $E^2 = -1$, pues π es un cubriente doble y $B^2 = -2$, de hecho E y B son isomorfos, de lo anterior se sigue que las curvas excepcionales de S' están en correspondencia biyectiva con las curvas racionales con auto-intersección -2 de $\mathbb{F}_2$, de esta forma por la unicidad de B concluimos que, S' tiene una única curva excepcional E . Si $C = \pi^{-1}(L)$, entonces el haz canónico $K_{S'} = 3C + 4E$, por lo tanto $K_{S'}^2 = 8$ y $\chi(\mathcal{O}_{S'}) = 7$.

Veremos que el modelo minimal S de S' correspondiente a E es la superficie buscada. Sea $\epsilon : S' \rightarrow S$ la contracción de E , por la Proposición 1.8, $K_S^2 = 9$. Como K_S^2 es impar, entonces $\chi(\mathcal{O}_S) = 7$ (ver [4], pág. 208) implicando que $p_g(S) = p_g(S') = 6$ y S es una superficie regular. Si $\epsilon(C) = \Gamma$, como $C.E = 1$ y $(C + E).E = 0$, entonces $\epsilon^*(\Gamma) = C + E$ y $K_S = 3\Gamma$.

Por la regularidad de S , al considerar la sucesión exacta en los grupos de cohomología inducida por la sucesión $0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S(\Gamma) \rightarrow \mathcal{O}_\Gamma \rightarrow 0$, tenemos que $|\Gamma|$ es un pincel, con un único punto base pues $\Gamma^2 = 1$. Como $2g(\Gamma) - 2 = \Gamma^2 + \Gamma.K_S = 4\Gamma^2 = 4$, entonces las curvas de $|\Gamma|$ son hiperelípticas de género 3. Por teoría de curvas, la aplicación bicanónica de curvas hiperelípticas no es birracional, por lo tanto φ_{2K_S} no es birracional.

Proposición 3.10. *Sea S una superficie minimal con $\kappa(S) = 0$, L un divisor nef en S , ϕ_{L+K_S} la aplicación definida por $|K_S + L|$.*

- (i) *Si $L^2 \geq 5$, entonces $|K_S + L|$ es libre de puntos base si y sólo si S no contiene ciclos elípticos con $L.E = 1$.*
- (ii) *Si $L^2 \geq 10$, entonces ϕ_{K_S+L} es un encaje (fuera de las (-2)-curvas con $C.L = 2$) si y sólo si S no contiene ciclos elípticos con $L.E = 1$ o $L.E = 2$.*

Un ciclo elíptico E sobre S es un divisor efectivo 1-conexo con $p_a(E) = 1$.

Demostración. (i) Supongamos que $|K_S + L|$ tiene un punto base digamos p , entonces por el Teorema 3.4(i) existe un divisor efectivo E que pasa por p , tal que $L.E = 0$ y $E^2 = 0$ (la otra opción se descarta porque $E^2 + E.K_S \equiv 0 \pmod{2}$). Demostraremos que E es un ciclo elíptico.

Sea $E = D_1 + D_2$ cualquier descomposición de E , por la observación 3.6 $D_1^2, D_2^2 \leq 0$ y no ambos cero pues $E^2 = 0$, así $2D_1.D_2 = -(D_1^2 + D_2^2) > 0$

implicando que E es 1-conexo, por consiguiente $h^0(\mathcal{O}_E) = 1$. Por Riemann-Roch

$$\begin{aligned} p_a(E) &= 1 - \chi(\mathcal{O}_E) = 1 - (h^0(\mathcal{O}_E) - g) \\ &= g = 1 + \frac{1}{2}(E^2 + E.K_S) = 1, \end{aligned}$$

por tanto E es un ciclo elíptico.

Inversamente si E es un ciclo elíptico con $L.E = 1$, se sigue claramente que $\mathcal{O}_E(K_S + L)$ tiene grado ≥ 0 en cada componente irreducible de E y grado 1 en E pues

$$E.(K_S + L) = E.L = 1, \quad E_i.(K_S + L) = E_i.L \geq 0$$

entonces $\mathcal{O}_E(K_S + L) = \mathcal{O}_E(p)$ para algún punto no-singular $p \in E$. De esto se sigue que p es un punto fijo de $|K_S + L|$, lo que concluye la demostración de (i).

(ii) Si ϕ_{K_S+L} no es un encaje fuera de las curvas (-2) con $C.L = 0$, el objetivo será construir un ciclo elíptico. Para cada par de puntos que no separa ϕ_{K_S+L} , existe un divisor efectivo E que pasa por ellos, tal que ocurre uno de los siguientes casos

$$\begin{aligned} L.E &= 0 & y & & E^2 &= -1 \text{ ó } -2, \\ L.E &= 1 & y & & E^2 &= -1, \\ L.E &= 2 & y & & E^2 &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

donde los casos $E^2 = -1$ y $L.E = 0$ ó 1 quedan descartados porque $E^2 + E.K_S \equiv 0 \pmod{2}$, mientras que $L.E = 0$ con $E^2 = -2$ quedan descartados porque estamos fuera de las curvas (-2). Entonces los posibles casos de (5) son E^2 con $L.E = 1$ ó 2 . En cualquiera de los dos casos existe una componente 1-conexa E' de E , con $E'^2 = 0$ (se demuestra usando el mismo razonamiento que la parte (i)). Por lo tanto $p_a(E') = 1$ y E' es el ciclo elíptico buscado.

Inversamente si E es un ciclo elíptico sobre S con $L.E = 1$ ó 2 . Entonces de la parte (i) de la proposición podemos suponer que $L.E = 2$. por lo tanto la aplicación $\phi_{K_S+L} : E \rightarrow \mathbb{P}^1$ tiene grado 2 sobre el punto general de $\mathbb{P}^1$. $\square$

Proposición 3.11. *Sea S una superficie (no necesariamente minimal), L un divisor nef con $L^2 \geq 9$, ϕ_{K_S+L} la aplicación definida por $|K_S + L|$. Entonces $|L + K_S|$ no es muy amplio si y sólo si una de las siguientes situaciones es cierta:*

- i) S es una superficie geoméricamente reglada y, $L.F_x = 1$ o 2 , donde F_x denota una fibra.

- ii) S contiene una curva excepcional de primer tipo E con $L.E = 1$.
- iii) $S = \mathbb{P}^2$, $\mathcal{O}_S(L) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$.
- iv) S es una superficie Del Pezzo de grado 1 con L^2 .
- v) $S = \mathbb{P}_B(\xi)$ el $\mathbb{P}^1$ -haz sobre una curva elíptica B , donde ξ es un haz vectorial de rango 2 indecomponible de grado 1 y $\mathcal{O}_S(L) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\xi)}(3)$.

El regreso para los casos (iii)-(v) solo es válido con la hipótesis $L^2 = 9$.

Demostración. L es nef, pues es muy amplio. Si $K_S + L$ no es muy amplio, por el Teorema 3.4(ii) para cada par de puntos que no son separados por ϕ_{K_S+L} , existe un divisor efectivo E que pasa por dicho par de puntos, satisfaciendo uno de los siguientes casos:

- (1) $L.E = 0$ y $E^2 = -1$ o -2 .
- (2) $L.E = 1$ y $E^2 = 0$.
- (3) $L.E = 1$ y $E^2 = -1$.
- (4) $L.E = 2$ y $E^2 = 0$.
- (5) $L^2 = 9$, $L \equiv 3E$ y $E^2 = 1$.

Inmediatamente (1) queda descartado como E es efectivo ocurre que $L.E > 0$. Enseguida demostraremos que tanto (2) como (4) implican (i), así mismo (3) y (4) implica (ii), mientras que (iii)-(v) se siguen de (5).

Si ocurre (2), demostraremos que E es una curva irreducible racional y $|E|$ un pincel, de donde claramente se sigue que la aplicación definida por $|E|$ tendría una fibra racional (la correspondiente a E), así por el Teorema 1.12, S es una superficie reglada, en consecuencia geoméricamente reglada, lo que concluiría la demostración.

Veamos que E es irreducible, en caso contrario L intersecta positivamente a cada componente de E , por consiguiente $L.E > 1$ contradiciendo la existencia de E , así E es irreducible. Como $L|_E$ es un haz muy amplio de grado 1, entonces E es racional.

Como E es efectivo podemos considerar la sucesión exacta $0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-E) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_E \rightarrow 0$, después la tensorizamos por $\mathcal{O}_S(E)$ y, dado que $E^2 = 0$ concluimos de la sucesión exacta larga inducida en los grupos de cohomología que $h^0(E) = 2$, por lo tanto $|E|$ es un pincel. De esta forma queda demostrada una parte de (i).

Si ocurre (4) tenemos dos posibles casos: que $E = C_1 + C_2$ con C_1 y C_2 curvas irreducibles distintas o que $E = C$ una curva irreducible. Si $E = C$ observamos que C tiene un haz muy amplio $L|_C$ con $\deg(L|_C) = 2$, en consecuencia $h^0(L|_C) = 2$, así el encaje que define $L|_C$ es de la forma $\varphi_{L|_C} : C \rightarrow \mathbb{P}^1$, por lo tanto C es racional y el resto es análogo al anterior. Mientras que en el caso $E = C_1 + C_2$, observamos que existe $i \in \{1, 2\}$ tal que $C_i^2 < 0$, entonces C_i es la curva excepcional para (ii). Inversamente, si S es una superficie geométricamente reglada, con $L.F_x = 1$ ó 2 para toda fibra F_x , es suficiente verificar que $K_S + L$ no es un divisor amplio, lo cual es cierto porque para toda fibra F_x , $(K_S + L).F_x \leq 0$.

Si ocurre (3) demostraremos que E es la curva excepcional deseada, será suficiente demostrar que es racional. Note que E es irreducible por ser E efectivo. Luego E tiene un divisor muy amplio $L|_E$ de grado 1, por tanto E es racional como se quería.

El inverso utiliza un razonamiento análogo al caso (i), sólo que en esta ocasión consideramos $(K_S + L).E = 0$, donde E es la curva excepcional.

Hasta el momento tenemos demostrado (i) y (ii). Antes de continuar con el resto de los casos, hagamos unas observaciones. Si ocurre (5), veamos que E es irreducible, supongamos lo contrario y sea E_0 una componente propia de E , $E_0.L < E.L = 3$. Por otro lado como E es efectivo $0 < E_0.L = 3E_0.E$ implicando que $E_0.E \geq 1$ que es una contradicción por lo tanto E es irreducible.

Observamos que E tiene un haz lineal muy amplio $L|_E$ de grado 3, por tanto $\deg(L|_E) \geq 2g(E) + 1$, de donde se sigue $0 \geq 2g(E) - 2 = E^2 + K_S.E = 1 + K_S.E$, así $K_S.E < 0$. Como E es efectivo lo anterior implica que K_S no es efectivo en consecuencia $\kappa(S) = -\infty$. Observe que ahora tenemos dos casos $E^2 + K_S.E = -2$ ó 0 , y de esta forma estamos listos para regresar a la demostración.

Si $E^2 + K_S.E = -2$, entonces E es racional con $E^2 = 1$. En particular $q(S) = 0$, $h^0(E) = 3$. La regularidad de S se tiene de la sucesión inducida por la sucesión exacta $0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-E) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_E \rightarrow 0$, y de tomar en cuenta que $h^1(\mathcal{O}_S(-E)) = 0$ por ser E amplio y $h^1(E, \mathcal{O}_E) = 0$ por ser E racional.

De esta manera $h^0(E) = h^0(\mathcal{O}_S) + h^0(E, \mathcal{O}_S(1)) = 1 + 2 = 3$, pues existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_S) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_S(E)) \rightarrow H^0(E, \mathcal{O}_E(1)) \rightarrow 0,$$

que es la sucesión inducida por la sucesión $0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S(E) \rightarrow \mathcal{O}_E(1) \rightarrow 0$.

Así S es igual a $\mathbb{P}^2$, $\mathcal{O}_S(E) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ y $\mathcal{O}_S(L) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$. El inverso es obvio.

Si $E^2 + K_S.E = 0$, entonces E es una curva elíptica y $q(S) \leq h^1(\mathcal{O}_E) = 1$, pues existe la sucesión exacta $0 \rightarrow H^1(\mathcal{O}_S) \rightarrow H^1(E, \mathcal{O}_E) \rightarrow H^2(-E) \cdots$, donde la exactitud de la izquierda se tiene por ser E amplio. Ahora tenemos dos casos, según los valores de $q(S)$.

(iv) Si $q(S) = 0$, inmediatamente S es racional por el Criterio de Racionalidad de Castelnuovo, y sólo resta demostrar que $-K_S$ es efectivo. Por Riemann-Roch aplicado a $-E$,

$$\chi(-E) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(E^2 - (-E.K_S)) = 1 - q(S) + p_g(S) = 1.$$

Por dualidad de Serre $\chi(-E) = h^2(-E) = h^0(K_S + E)$, como $h^0(-E) = h^1(-E) = 0$ por ser E efectivo y amplio, así $h^0(K_S + E) = 1$. Finalmente note que $K_S + E$ es efectivo pues E es amplio y, aplicando el Teorema 1.1 a E y $E + K_S$ tenemos que $E + K_S \equiv 0$, pues $E.(E + K_S) = 0$, de donde se sigue que $-K_S = E$ es un divisor efectivo, por lo tanto S es una superficie *Del Pezzo* de grado 1.

El inverso es obvio pues $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) - \sum_{i=1}^8 E_i$, $K_S = \epsilon^* K_{\mathbb{P}^2} + \sum_{i=1}^8 E_i$, donde E_i son las curvas excepcionales distintas y por lo tanto $K_S + L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$ no define un haz muy amplio.

(v) Si $q(S) = 1$, entonces $K_S^2 < 1$ (ver [3], pág. 68), sin pérdida de generalidad podemos suponer que $K_S^2 = 0$. Por Riemann-Roch aplicado a $-2E$ y, dado que $h^0(-2E) = 0$ por ser E es amplio tenemos

$$\begin{aligned} h^0(K_S + 2E) &= \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(4E^2 - (-2E.K_S)) + h^1(-2E) \\ &= E^2 + h^1(-2E) = 1 + h^1(-2E). \end{aligned}$$

Por otro lado $h^1(-2E) = 0$, pues tenemos una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow H^0(E, \mathcal{O}_E(-1)) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(-2E)) \rightarrow 0,$$

donde la exactitud de la izquierda y derecha se deben a que E es efectivo y amplio respectivamente, de donde claramente $h^1(S, -2E) = 0$ pues $h^0(E, \mathcal{O}_E(-1)) = 0$, por lo tanto $h^0(K_S + 2E) = 1$. La sucesión antes mencionada es la sucesión inducida por la sucesión $0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-2E) \rightarrow \mathcal{O}_S(-E) \rightarrow \mathcal{O}_E(-1) \rightarrow 0$.

Sea $C \in |K_S + 2E|$, hagamos algunas observaciones de C . $C.E = (K_S + 2E).E = E^2 = 1$, $C^2 = K^2 + 4(K_S.E + E^2) = 0$ y $C.K_S = K_S^2 + 2E.K_S =$

$2(-E^2) = -2$, de donde se sigue que $g(C) = 0$ implicando que C es racional. Hasta el momento se tiene que C es una curva racional con auto-intersección cero. El objetivo será demostrar $|2C|$ es un pincel sin puntos base, de esta forma la aplicación racional definida por dicho sistema digamos φ_{2C} es un morfismo, luego dado que $2C.K_S = -4$ las fibras no son irreducibles, así por el *Teorema de Factorización de Stein* (ver [6], pág.280) φ_{2C} admite una única factorización de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{|2C|} & \mathbb{P}^1 \\ f \downarrow & \nearrow 2:1 & \\ X & & \end{array}$$

donde X es una curva. Como φ_{2C} tiene una fibra racional (la correspondiente a C) S es una superficie geoméricamente reglada sobre X , digamos $S = \mathbb{P}_X(E)$ donde E es un haz vectorial de rango 2 sobre X , así X es una curva elíptica pues $K_S^2 = 8(1 - g(X))$ por la Proposición 1.19.

Note que tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow H^0(C) \rightarrow H^0(2C) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C) \rightarrow 0,$$

donde la exactitud de la derecha es por dualidad de Serre, pues $h^1(C) = h^1(K_S - C) = h^1(-2E) = 0$, de donde se sigue que $h^0(2C) = 2$. Finalmente el hecho de que $|2C|$ no tiene puntos base se debe a que $C^2 = 0$. $\square$

Bibliografía

- [1] LUCIAN BĂDESCU, *Algebraic Surface*, Editorial Board.
- [2] WOLF P. BARTH, KLAUS HULEK, CHIS A. M. PETERS, ANTONIUS VAN DE VEN, *Compact Complex Surface*, Springer, 2003.
- [3] A. BEAUVILLE, *Complex Algebraic Surface*, Cambridge University Press, 1996.
- [4] E. BOMBIERI, Canonical models of surface of general type, *Publ. Math IHES* (42) (1973), 171-219.
- [5] GRIFFITHS Y HARRIS, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, 1994.
- [6] ROBIN HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Editorial Board, 1997.
- [7] D. MUMFORD, *Abelian Varieties*,
- [8] DAVID MUMFORD, *Geometric Invariant Theory*, Springer 1965.
- [9] P.E. NEWSTEAD, *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*, Springer, 1978.
- [10] MILES REID, Bogomolov's theorem $c_1^2 \leq 4 c_2$, *Intl. Symp on Algebraic Geometry, Kyoto* (1977), 633-642.
- [11] IGOR REIDER, Vector bundles of rank 2 and linear system on algebraic surface, *Annals of Mathematics* **127** (1988), 309-316.