



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Y
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

Anillos de Burnside y sus aplicaciones.

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

ALEJANDRA FABIOLA HUITRADO MORA

Director: Dr. Gerardo Raggi Cárdenas

MORELIA, MICHOACÁN - JUNIO DE 2011.

Índice general

Agradecimientos	iii
INTRODUCCIÓN	v
Capítulo 1. Propiedades básicas de G -conjuntos	1
1. Notación	1
2. Operaciones en G -conjuntos	2
3. Caracterización de G -conjuntos	7
Capítulo 2. Anillo de Burnside	11
1. Definición	11
2. Puntos fijos como homomorfismos de anillos	14
3. Aplicaciones	17
4. Idempotentes	24
5. Espectro primo	32
Capítulo 3. Invariantes	35
1. Homología de copos	35
2. Invariantes ligados a G -copos	41
3. Invariantes de Steinberg	48
Bibliografía	55

Agradecimientos

A mi mamá, Raquel Mora, por todo lo que me ha dado para salir adelante.

A mis hermanas Ada y Raquel, por los consejos y fortaleza que me dieron.

A todos los miembros de mi familia, porque siempre han confiado en mí y me han dado cariño y apoyo sin importar la distancia, procurando siempre mi bienestar.

A mi director de tesis, Dr. Gerardo Raggi, por los conocimientos que me brindó no sólo para este trabajo sino para toda la maestría. Y por la paciencia y confianza que tuvo hacia mí siempre.

A los miembros del jurado por los comentarios y observaciones que me ayudaron a mejorar.

A los profesores, de los cuales tuve oportunidad de aprender además de sus cursos, a valorar el trabajo.

A mis amigos y compañeros, sin los cuales hubiera sido muy difícil mi estancia.

INTRODUCCIÓN

Sea G un grupo finito, el anillo de Burnside $B(G)$ es uno de los anillos de representación fundamentales de G .

Este trabajo se divide en tres capítulos. Comenzamos con la notación necesaria para el desarrollo del trabajo. Continúa con operaciones en G -conjuntos que luego son extendidas a nuestro anillo, lo cual lo hace un objeto universal cuando estudiamos la categoría de G -conjuntos. Algunas caracterizaciones de los G -conjuntos nos permiten más adelante entonces darle la estructura de anillo.

Definimos $B(G)$ y establecemos operaciones con lo cual es un anillo conmutativo y podemos estudiar el espectro primo y los idempotentes primitivos. Algunas de las aplicaciones de esta sección son resultados conocidos aunque generalizados y se usan en su demostración propiedades de $B(G)$ que además son útiles más adelante. Al estudiar los idempotentes y espectro primo obtenemos fórmulas y resultados muy útiles sobre como calcular elementos específicos y ver entonces como se ven los elementos idempotentes de $\mathbb{Z}_{(\pi)}B(G)$.

El último capítulo hace uso de la topología algebraica para analizar invariantes ligados para estructurar G -conjuntos, tales como G -copos o G -conjuntos simpliciales. Se comienza con una pequeña introducción definiendo términos como *complejo de cadenas*, *grupo de homología*. Se define también la *característica de Euler-Poincaré* pues se establecen propiedades entre ésta y un primer invariante, el de *Lefschetz*. Otros invariantes del capítulos son el de *Möbius* y el de *Steinberg*, ambos definidos por el invariante de Lefschetz pero cada uno para G -copos específicos y los cuales podemos ver como generalizaciones para la categoría de G -conjuntos de nociones clásicas, digamos la función de Möbius para un copo o el módulo de Steinberg de un grupo de Chevalley. Para todos estos invariantes se tienen diversas propiedades.

Capítulo 1

Propiedades básicas de G -conjuntos

1. Notación

Sea G un grupo finito. La categoría de los G -conjuntos finitos será denotada por G -set. Sus objetos serán los G -conjuntos finitos con una acción izquierda, los morfismos aplicaciones G -equivariantes y la composición la usual.

Si H es un subgrupo de G y g es un elemento de G , la notación gH simboliza gHg^{-1} y similarmente H^g es para $g^{-1}Hg$. El normalizador de H en G es denotado por $N_G(H)$. El conjunto de clases gH con $g \in G$ es denotado por G/H . Éste es un G -conjunto con la multiplicación por la izquierda. Un conjunto de representantes en G de G/H es denotado por $[G/H]$.

Si X es un G -conjunto, dado $x \in X$ denotaremos al estabilizador en G de x por G_x . El conjunto de órbitas de un subgrupo H de G en X es denotado por $H \backslash X$, y $[H \backslash X]$ denota un conjunto de representantes en X de $H \backslash X$.

El conjunto de clases de conjugación de subgrupos de G es denotado por s_G , y un conjunto de representantes de s_G es denotado por $[s_G]$. Si H y K son subgrupos de G , entonces $H \backslash G / K$ es el conjunto de clases dobles HxK para $x \in G$ y $[H \backslash G / K]$ denota un conjunto de representantes en G de estas clases dobles. La notación $H =_G K$ (respectivamente $H \subseteq_G K$) significa que existe un elemento $x \in G$ tal que $H^x = K$ (respectivamente $H^x \subseteq G$).

La cardinalidad de un conjunto S es denotada por $|S|$.

Si p es un número primo, el subgrupo normal más pequeño N de G tal que G/N es un p -grupo es denotado por $O^p(G)$. Éste es el subgrupo de G generado por los p' -elementos, i.e. los elementos de orden primo relativo a p .

Más generalmente, si π es un conjunto de primos, la notación $O^\pi(G)$ es para el subgrupo normal más pequeño N de G tal que G/N es un π -grupo soluble. El grupo G es llamado π -perfecto si $O^\pi(G) = G$. Si G en si mismo es un π -grupo, entonces es claro ver que el grupo $O^\pi(G)$ es el límite de la serie derivada de G . En particular, si π es el conjunto de todos los primos, entonces un grupo es π -perfecto si y sólo si éste es perfecto, i.e. igual a su subgrupo derivado. Los $O^\pi(G)$ tienen muchas propiedades y algunas de éstas son usadas en las demostraciones, como por ejemplo que

$O^\pi(O^\pi(H)) = O^\pi(H)$. Esto pues $O^\pi(O^\pi(H)) \trianglelefteq O^\pi(H)$. Ahora bien sabemos que $|H/O^\pi(O^\pi(H))| = [H : N_H(O^\pi(O^\pi(H)))] = [H : O^\pi(H)]$, por lo anterior. Consideremos ahora la siguiente sucesión exacta

$$1 \rightarrow \frac{O^\pi(H)}{O^\pi(O^\pi(H))} \rightarrow \frac{H}{O^\pi(O^\pi(H))} \rightarrow \frac{H/O^\pi(O^\pi(H))}{O^\pi(H)/O^\pi(O^\pi(H))} \rightarrow 1.$$

Entonces $H/O^\pi(O^\pi(H))$ es soluble si y sólo si $\frac{H/O^\pi(O^\pi(H))}{O^\pi(H)/O^\pi(O^\pi(H))}$ y $\frac{O^\pi(H)}{O^\pi(O^\pi(H))}$ son solubles, pero

$$\frac{H/O^\pi(O^\pi(H))}{O^\pi(H)/O^\pi(O^\pi(H))} \simeq H/O^\pi(H)$$

por lo tanto $H/O^\pi(O^\pi(H))$ es soluble y además es un π -grupo, con lo cual $O^\pi(H) \leq O^\pi(O^\pi(H)) \leq O^\pi(H)$; y por lo tanto $O^\pi(O^\pi(H)) = O^\pi(H)$. Otra propiedad útil es que dado M un grupo finito y $N \trianglelefteq M$, entonces $O^\pi\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{O^\pi(M)N}{N}$. Esto pues por una parte $O^\pi\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{H}{N}$ para algún $N \leq H \trianglelefteq M$. Entonces $\frac{M/N}{H/N} \simeq M/H$ es un π -grupo soluble, entonces $O^\pi(M) \subseteq H$. Por lo tanto $O^\pi(M)N \subseteq HN$, pero $N \leq H$, y así $O^\pi(M)N \subseteq H$ con lo cual finalmente $O^\pi(M)N/N \subseteq H/N = O^\pi(M/N)$. Por otra parte sabemos que ya que $O^\pi(M)$ y N son normales en M , entonces su producto también lo es y por lo tanto

$$\frac{O^\pi(M)N}{O^\pi(M)} \trianglelefteq \frac{M}{O^\pi(M)}$$

y dado que $M/O^\pi(M)$ es soluble entonces $\frac{M}{O^\pi(M)} \Big/ \frac{O^\pi(M)N}{O^\pi(M)} \simeq M/O^\pi(M)N$ es soluble. Pero además $O^\pi(M)N/N \trianglelefteq M/N$ y su cociente acabamos de ver es soluble y π -grupo, por lo tanto $O^\pi\left(\frac{M}{N}\right) \leq \frac{O^\pi(M)N}{N} \leq O^\pi\left(\frac{M}{N}\right)$. Un poco más de notación en este capítulo será, si consideramos π un conjunto de primos denotaremos por $|G|_\pi$ la parte π -ésima del orden de G , esto es, que sólo aparecen primos de π . Y análogamente la parte π' -ésima, se denotará $|G|_{\pi'}$ y será la parte del orden de G en la cual sólo aparecen primos que no pertenecen a π . De forma similar si $a_\pi \in G$ será un π -elemento, es decir, que su orden tiene sólo elementos de π y análogamente $a_{\pi'}$ no tiene primos de π en su orden.

El grupo trivial será denotado por \mathbb{I} .

2. Operaciones en G -conjuntos

Cuando X es un G -conjunto y H es un subgrupo de G , se puede ver a X como un H -conjunto a través de la restricción de la acción. Este H -conjunto es denotado por $\text{Res}_H^G X$. Si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo de G -conjuntos, $\text{Res}_H^G f$ denotará la aplicación f vista como un morfismo de H -conjuntos. Esto define un *functor restricción* $\text{Res}_H^G : G\text{-set} \rightarrow H\text{-set}$.

Ahora si Z es un H -conjunto el G -conjunto inducido $\text{Ind}_H^G Z$ es definido como $G \times_H Z$, i.e. el cociente del producto cartesiano $G \times Z$ por la acción derecha de H dada por $(g, x).h = (gh, h^{-1}x)$ para $g \in G, h \in H, x \in Z$. La acción izquierda de G en $G \times_H Z$ es inducida por su acción izquierda en $G \times Z$ dada por $g'.(g, x) = (g'g, x)$, para $g', g \in G$ y $x \in Z$. Si $f : Z \rightarrow T$ es un morfismo

de H -conjuntos, entonces $\text{Ind}_H^G f$ es el morfismo de G -conjuntos de $\text{Ind}_H^G Z$ a $\text{Ind}_H^G T$ definida por $(\text{Ind}_H^G f)([g, x]) = [g, f(x)]$. Esto define un *functor inducción* $\text{Ind}_H^G : H\text{-set} \rightarrow G\text{-set}$.

LEMA 1.1. *Si Z es isomorfo a H/K para algún subgrupo K de H , entonces $\text{Ind}_H^G Z$ es isomorfo a G/K .*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $\varphi : Z \rightarrow H/K$ isomorfismo de H -conjuntos, con $\varphi(x) = hK$, $h \in H$ y sea entonces $\tilde{\varphi} : \text{Ind}_H^G Z \rightarrow G/K$ dada por $\tilde{\varphi}([g, x]) = g\varphi(x) = ghK$.

Veamos que está bien definida. Sea $[g', x']$ otro representante de la clase $[g, x]$, entonces $\exists h' \in H$ tal que $(g, x).h' = (gh', h'^{-1}x) = (g', x')$ i.e. $g' = gh'$ y $x' = h'^{-1}x$, así pues por un lado $\tilde{\varphi}([g, x]) = g\varphi(x)$ y por el otro $\tilde{\varphi}([g', x']) = g'\varphi(x')$. Sustituyendo g' y x' tenemos

$$\tilde{\varphi}([g', x']) = gh'\varphi(h'^{-1}x) = gh'h'^{-1}\varphi(x) = g\varphi(x) = \tilde{\varphi}([g, x])$$

Por lo tanto está bien definida.

Veamos ahora que es de G -conjuntos. Sea $g' \in G$, entonces

$$\tilde{\varphi}(g'.[g, x]) = \tilde{\varphi}([g'g, x]) = g'g\varphi(x) = g'.\tilde{\varphi}([g, x])$$

Consideremos ahora $\tilde{\varphi}^{-1} : G/K \rightarrow \text{Ind}_H^G Z$ que toma gK y lo lleva a $[g, \varphi^{-1}(K)]$. Veamos que está bien definida. Sea $g'K$ otro representante de la clase entonces $g' = gk$ para algún $k \in K$, entonces $\tilde{\varphi}^{-1}(gK) = [g, \varphi^{-1}(K)]$ y $\tilde{\varphi}^{-1}(g'K) = [g', \varphi^{-1}(K)] = [gk, \varphi^{-1}(K)] = [g, k\varphi^{-1}(K)] = [g, \varphi^{-1}(kK)] = [g, \varphi^{-1}(K)]$. Por lo tanto, la aplicación está bien definida.

Así pues dado $[g, z] \in \text{Ind}_H^G Z$ tenemos que

$$\tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\varphi}([g, z]) = \tilde{\varphi}^{-1}(g\varphi(z)) = \tilde{\varphi}^{-1}(ghK) = [gh, \varphi^{-1}(K)] = [g, h\varphi^{-1}(K)] = [g, \varphi^{-1}(hK)] = [g, z]$$

por lo tanto $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\varphi} = \text{Id}_{\text{Ind}_H^G Z}$. Finalmente dado $gK \in G/K$

$$\tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(gK) = \tilde{\varphi}([g, \varphi^{-1}(K)]) = g\varphi\varphi^{-1}(K) = gK$$

por lo tanto $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \text{Id}_{G/K}$. Y así $\text{Ind}_H^G Z \simeq G/K$ \square

El conjunto de puntos fijos de H en X es denotado por X^H . Éste es visto como un $N_G(H)/H$ -conjunto. Si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo de G -conjuntos, entonces la restricción de f a X^H es denotado por f^H . Este es un morfismo de $N_G(H)/H$ -conjuntos de X^H a Y^H , pues dado $x \in X^H$ y $g \in N_G(H)$ tenemos que $f(gx) = gf(x)$ pues f es de G -conjuntos. Veamos que $f(x) \in Y^H$. Sea $h \in H$ entonces $hf(x) = f(hx) = f(x)$ por lo tanto $f(x) \in Y^H$ y por lo tanto f es de $N_G(H)/H$ -conjuntos. Y por último éste define un *functor de puntos fijos* $f^H : G\text{-set} \rightarrow N_G(H)/H\text{-set}$

Cuando H es un subgrupo normal de G , cualquier G/H -conjunto puede ser visto como un G -conjunto por inflación, y cualquier morfismo de G/H -conjuntos puede ser visto como un morfismo de G -conjuntos. Esta operación define un *functor inflación* $\text{Inf}_{G/H}^G : G/H\text{-set} \rightarrow G\text{-set}$.

Bajo las mismas condiciones, si X es un G -conjunto, entonces el conjunto de órbitas $H \backslash X$ de H en X puede ser visto como un G/H -conjunto y cualquier morfismo de G -conjuntos induce un morfismo de G/H -conjuntos entre los conjuntos correspondientes de órbitas. Esto define un *functor deflación* $\text{Def}_{G/H}^G : G\text{-set} \rightarrow G/H\text{-set}$.

Finalmente, sea H un subgrupo de G , y x un elemento de G . Si Z es un H -conjunto, entonces el grupo xH actúa en Z por ${}^xh.z = hz$, donde ${}^xh \in {}^xH$ y $z \in Z$, y hz es calculado en el H -conjunto Z . Esto da un xH -conjunto denotado por xZ o $c_{x,H}(Z)$. Si $f : Z \rightarrow T$ es un morfismo de H -conjuntos, entonces $c_{x,H}(f)$ es la aplicación f , vista como un morfismo de xH -conjuntos de xZ a xT . Esto define un *functor conjugación* $c_{x,H} : H\text{-set} \rightarrow {}^xH\text{-set}$.

Estos funtores tienen propiedades obvias de transitividad. Más aun, ellos están relacionados por varias identidades. Entre ellas:

PROPOSICIÓN 1.2. *Sea G un grupo finito, y H y K subgrupos de G .*

1. (Fórmula de Mackey) *Si Z es un H -conjunto, entonces existe un isomorfismo de K -conjuntos*

$$\text{Res}_K^G \text{Ind}_H^G Z \cong \bigsqcup_{x \in [K \backslash G/H]} \text{Ind}_{K \cap {}^xH}^K {}^x \text{Res}_{K^x \cap H}^H Z.$$

2. (Identidad de Frobenius) *Si X es un G -conjunto y Z es un H -conjunto, entonces existe un isomorfismo de G -conjuntos*

$$X \times \text{Ind}_H^G Z \cong \text{Ind}_H^G ((\text{Res}_H^G X) \times Z).$$

y en particular para cualquier G -conjunto X , existe un isomorfismo de G -conjuntos

$$X \times (G/H) \cong \text{Ind}_H^G \text{Res}_H^G X$$

3. *Si Z es un H -conjunto, entonces existe un isomorfismo de $N_G(K)/K$ -conjuntos*

$$(\text{Ind}_H^G Z)^K \cong \bigsqcup_{\substack{x \in [N_G(K) \backslash G/H] \\ K^x \subseteq H}} \text{Ind}_{N_{xH}(K)/K}^{N_G(K)/K} ({}^x Z)^K$$

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea $S = [K \backslash G/H]$ que denote un conjunto elegido de representantes de clases dobles $K \backslash G/H$ y consideremos la aplicación

$$\varphi : \text{Res}_K^G \text{Ind}_H^G Z \rightarrow \bigsqcup_{x \in S} \text{Ind}_{K \cap {}^xH}^K {}^x \text{Res}_{K^x \cap H}^H Z$$

que manda el elemento $[g, z]$ del lado izquierdo, con $g \in G$ y $z \in Z$, al elemento $[k, hz]_x$ de la componente $x \in S$ del lado derecho, si g puede ser escrito como $g = kxh$, para algún $k \in K$ y $h \in H$. Veamos que efectivamente este es el isomorfismo requerido.

Primero veamos que está bien definido, sea $[g, z] \in \text{Res}_K^G \text{Ind}_H^G Z$, entonces $\varphi([g, z]) = [k, hz]_x$, y sea $[g', z'] = [g, z]$ entonces existe $h' \in H$ tal que $(g, z).h' = (gh', h'^{-1}z) = (g', z')$. Entonces $g' = gh' = kxhh'$ y $z' = h'^{-1}z$. Así pues por un lado $\varphi([g, z]) = [k, hz]_x$ y por otro $\varphi([g', z']) = \varphi([gh', h'^{-1}z]) = [k, (hh')h'^{-1}z]_x = [k, hz]_x$. Por lo tanto si está bien definida.

Ahora veamos que es morfismo de K -conjuntos. Sea $k' \in K$, entonces

$$\varphi(k'.[g, z]) = \varphi([k'g, z]) = [k'k, hz]_x = k'.[k, hz]_x = k'\varphi([g, z])$$

Por lo tanto sí es de K -conjuntos.

Consideremos ahora

$$\psi : \bigsqcup_{x \in S} \text{Ind}_{K \cap^x H}^K {}^x \text{Res}_{K^x \cap H}^H Z \rightarrow \text{Res}_K^G \text{Ind}_H^G Z$$

dada por $\psi([k, {}^x z]_x) = [kx, z]$.

Veamos que está bien definida. Sea $[k', {}^x z']_x$ otro representante de la clase $[k, {}^x z]_x$, entonces existe ${}^x h \in K \cap^x H$ tal que $(k', {}^x z') = (k, {}^x z).{}^x h = (k({}^x h), ({}^x h^{-1}){}^x z) = (k^x h, {}^x (h^{-1}z))$. Así que por un lado

$$\psi([k, {}^x z]_x) = [kx, z]$$

y por otro lado

$$\psi([k', {}^x z']_x) = [k'x, z'] = [k({}^x h)x, h^{-1}z] = [kxh, h^{-1}z] = [kx, z] = \psi([k, {}^x z]_x)$$

Por lo tanto está bien definida.

Tomemos ahora $[g, z] \in \text{Res}_K^G \text{Ind}_H^G Z$, entonces si $g = kxh$ para algún $k \in K$ y algún $h \in H$

$$\psi \circ \varphi([g, z]) = \psi([k, hz]_x) = [kx, hz] = [kxhh^{-1}, hz] = [kxh, z] = [g, z]$$

Por lo tanto $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{\text{Res}_K^G \text{Ind}_H^G Z}$. Si ahora tenemos $[k, z]_x \in \bigsqcup_{x \in S} \text{Ind}_{K \cap^x H}^K {}^x \text{Res}_{K^x \cap H}^H Z$, entonces

$$\varphi \circ \psi([k, z]_x) = \varphi([kx, z]) = [k, z]_x$$

por lo tanto $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\bigsqcup_{x \in S} \text{Ind}_{K \cap^x H}^K {}^x \text{Res}_{K^x \cap H}^H Z}$. Con lo cual φ y ψ son inversas una de la otra y entonces φ es el isomorfismo deseado.

2. Consideremos la aplicación

$$\varphi : X \times \text{Ind}_H^G Z \rightarrow \text{Ind}_H^G ((\text{Res}_H^G X) \times Z)$$

que manda el elemento $(x, [g, z]) \in X \times \text{Ind}_H^G Z$ al elemento $[g, (g^{-1}x, z)]$. Veamos que es el isomorfismo requerido.

Primero veamos que está bien definida. Sea $[g', z']$ otro representante de la clase $[g, z]$ entonces existe $h \in H$ tal que $(g', z') = (g, z).h = (gh, h^{-1}z)$. Entonces veamos que $(x, [g, z])$ y $(x, [g', z'])$ van a parar al mismo elemento. Por un lado $\varphi((x, [g, z])) = [g, (g^{-1}x, z)]$ y por otra parte $\varphi((x, [g', z'])) = [g', (g'^{-1}x, z')] = [gh, (h^{-1}g^{-1}x, h^{-1}z)] = [gh, h^{-1} \cdot (g^{-1}x, z)] = [g, (g^{-1}x, z)]$. Por lo tanto sí está bien definida.

Veamos ahora que es de G -conjuntos. Sea $a \in G$, entonces $\varphi(a.(x, [g, z])) = \varphi(a.x, a.[g, z]) = \varphi(ax, [ag, z]) = [ag, (g^{-1}a^{-1}ax, z)] = [ag, (g^{-1}x, z)] = a.[g, (g^{-1}x, z)] = a.\varphi((x, [g, z]))$.

Consideremos ahora la aplicación

$$\psi : \text{Ind}_H^G((\text{Res}_H^G X) \times Z) \rightarrow X \times \text{Ind}_H^G Z$$

que toma el elemento $[g, (x, z)] \in \text{Ind}_H^G((\text{Res}_H^G X) \times Z)$ y lo manda a $(gx, [g, z])$.

Sea $[g', (x', z')]$ otro representante de la clase, entonces existe $h \in H$ tal que $(g', (x', z')) = (g, (x, z)).h = (gh, h^{-1} \cdot (x, z)) = (gh, (h^{-1}x, h^{-1}z))$. Así pues $\psi([g', (x', z')]) = (g'x', [g', z']) = (ghh^{-1}x, [gh, h^{-1}z]) = (gx, [g, z]) = \psi([g, (x, z)])$. Por lo tanto está bien definida.

Ahora sólo resta ver que φ y ψ son inversa una de la otra. Para esto sea $(x, [g, z]) \in X \times \text{Ind}_H^G Z$ entonces

$$\psi \circ \varphi((x, [g, z])) = \psi([g, (g^{-1}x, z)]) = (gg^{-1}x, [g, z]) = (x, [g, z])$$

Por lo tanto, $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{X \times \text{Ind}_H^G Z}$. Ahora bien, dado $[g, (x, z)] \in \text{Ind}_H^G((\text{Res}_H^G X) \times Z)$, se tiene que

$$\varphi \circ \psi([g, (x, z)]) = \varphi((gx, [g, z])) = [g, (g^{-1}gx, z)] = [g, (x, z)]$$

Por lo tanto $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\text{Ind}_H^G((\text{Res}_H^G X) \times Z)}$. Con lo cual son inversas y por lo tanto φ es el isomorfismo buscado.

En particular si $Z = H/H$, $\text{Ind}_H^G Z \simeq G/H$ y entonces

$$X \times G/H \simeq \text{Ind}_H^G((\text{Res}_H^G X) \times H/H) \simeq \text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G X)$$

3. Notemos que $(\text{Ind}_H^G Z)^K = (\text{Res}_{N_G(K)}^G \text{Ind}_H^G Z)^K$, pues como conjuntos son el mismo. Además del lado izquierdo es un $N_G(K)/K$ -conjunto y del lado derecho es un $N_{N_G(K)}(K)/K$ -conjunto, es decir $N_G(K)/K$ -conjunto. Usamos entonces la fórmula de Mackey (1.) y basta considerar el caso $K \trianglelefteq G$. En tal caso, el elemento $[g, z]$ de $\text{Ind}_H^G Z$ es invariante por K si y sólo si para todo $k \in K$, $k.[g, z] = [kg, z] = [g, z]$, es decir, existe $h \in H$ tal que $(kg, z) = (g, z).h = (gh, h^{-1}z)$. Entonces $kg = gh$ y $z = h^{-1}z$. De esto y de que estamos suponiendo $K \trianglelefteq G$

entonces $K^g = K \subseteq H$ y $z \in Z^H$. Por lo tanto $(\text{Ind}_H^G Z)^K$ es vacío si $K^g \not\subseteq H$ y es igual a $\text{Ind}_{H/K}^{G/K} Z^K$ de otra forma. Así aplicando la fórmula de Mackey se tiene

$$\begin{aligned} (\text{Ind}_H^G Z)^K &= (\text{Res}_{N_G(K)}^G \text{Ind}_H^G Z)^K \simeq \left(\bigsqcup_{x \in [N_G(K) \backslash G/H]} \text{Ind}_{N_G(K) \cap {}^x H}^{N_G(K)} {}^x \text{Res}_{N_G(K) \cap {}^x H}^H Z \right)^K \\ &\simeq \bigsqcup_{\substack{x \in [N_G(K) \backslash G/H] \\ K^x \subseteq H}} \left(\text{Ind}_{N_{xH}(K)}^{N_G(K)} {}^x \text{Res}_{N_G(K) \cap {}^x H}^H Z \right)^K \simeq \bigsqcup_{\substack{x \in [N_G(K) \backslash G/H] \\ K^x \subseteq H}} \text{Ind}_{N_{xH}(K)/K}^{N_G(K)/K} ({}^x \text{Res}_{N_G(K) \cap {}^x H}^H Z)^K \\ &\simeq \bigsqcup_{\substack{x \in [N_G(K) \backslash G/H] \\ K^x \subseteq H}} \text{Ind}_{N_{xH}(K)/K}^{N_G(K)/K} ({}^x Z)^K \end{aligned}$$

Como queríamos probar.



3. Caracterización de G -conjuntos

LEMA 1.3. *Sea G un grupo finito,*

1. *Cualquier G -conjunto es una unión disjunta de G -conjuntos transitivos. Si X es un G -conjunto transitivo, y si $x \in X$, entonces la aplicación*

$$gG_x \in G/G_x \mapsto g.x \in X$$

es un isomorfismo de G -conjuntos

2. *Si H y K son subgrupos de G , entonces la aplicación $f \mapsto f(H)$ es una correspondencia uno a uno entre el conjunto de homomorfismos de G -conjuntos de G/H a G/K y el conjunto de clases $xK \in G/K$ tal que $H \subseteq {}^x K$. En particular, los G -conjuntos G/H y G/K son isomorfos si y sólo si H y K son conjugados en G .*

DEMOSTRACIÓN.

1. Sabemos que si X es un G -conjunto entonces X es la unión disjunta de órbitas, las cuales son G -conjuntos transitivos.

Sea ahora $\varphi : G/G_x \rightarrow X$ definida como sigue, $\varphi(gG_x) = g.x$. Primero veamos que está bien definida. Para esto, sea $g'G_x = gG_x$ entonces existe $h \in G_x$ tal que $g' = gh$ y así $\varphi(g'G_x) = g'.x = (gh).x = g.(h.x) = g.x = \varphi(gG_x)$ pues $h \in G_x$.

Ahora que es de G -conjuntos; sea $g' \in G$ entonces $\varphi(g'gG_x) = (g'g).x = g'.(g.x) = g'.\varphi(gG_x)$.

Resta ver que es biyectiva. Así pues consideremos $\psi : X \rightarrow G/G_x$ definida como sigue, dado $y \in X$ y considerando que X es transitivo, entonces existe $g \in G$ tal que $y = g.x$ con lo cual $\psi(y) = gG_x$. Ahora bien, dado $y \in X$ tenemos que $\varphi \circ \psi(y) = \varphi(\psi(y)) = \varphi(gG_x) = g.x = y$. Por lo tanto $\varphi \circ \psi = id_X$. Y finalmente dado $gG_x \in G/G_x$, $\psi \circ \varphi(gG_x) = \psi(\varphi(gG_x)) = \psi(g.x) = gG_x$ pues ya existe $g \in G$ tal que $g.x = g.x$. Por lo tanto $\psi \circ \varphi = id_{G/G_x}$. Y de esto y lo anterior concluimos que φ es biyectiva y por lo tanto isomorfismo de G -conjuntos.

2. Consideremos $\phi : \text{Hom}(G/H, G/K) \rightarrow G/K$. Es claro que si f y g son elementos de $\text{Hom}(G/H, G/K)$ con $H \subseteq^x K$, tales que $\phi(f) = \phi(g)$ entonces $f(H) = g(H)$ y por lo tanto $f = g$. Por lo tanto ϕ es una correspondencia uno a uno.

Ahora bien si G/H y G/K son isomorfos entonces por lo anterior $H \subseteq^x K$ y $K \subseteq^x H$ equivalentemente ${}^xK \subseteq H$, por lo tanto ${}^xK = H$ es decir, $H =_G K$



Se puede caracterizar un G -conjunto salvo isomorfismo usando el siguiente teorema fundamental de Burnside.

TEOREMA 1.4. (Burnside). Sean G un grupo finito, y X y Y G -conjuntos finitos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Los G -conjuntos X y Y son isomorfos.
2. Para cualquier subgrupo H de G , los conjuntos X^H y Y^H tienen la misma cardinalidad.

DEMOSTRACIÓN. Dado que cualquier isomorfismo de G -conjuntos $f : X \rightarrow Y$ induce una biyección $f^H : X^H \rightarrow Y^H$ en los conjuntos de puntos fijos para cualquier subgrupo H de G , se tiene que 1. implica 2.

Para mostrar que 2. implica 1., notemos que se sigue del lema 1.3 que cualquier G -conjunto X puede ser escrito salvo isomorfismo como

$$(3.1) \quad X = \bigsqcup_{K \in [s_G]} a_K(X)G/K$$

para algún $a_K(X) \in \mathbb{N}$, donde $a_K(X)G/K$ denota la unión disjunta de $a_K(X)$ copias de G/K .

Si suponemos 2., entonces para cualquier $H \in [s_G]$,

$$|X^H| = \left| \bigsqcup_{K \in [s_G]} a_K(X)(G/K)^H \right| = \sum_{K \in [s_G]} a_K(X) |(G/K)^H| =$$

$$= \sum_{K \in [s_G]} a_K(Y) |(G/K)^H| = \left| \bigsqcup_{K \in [s_G]} a_K(Y)(G/K)^H \right| = |Y^H|$$

Entonces

$$\sum_{K \in [s_G]} (a_K(X) - a_K(Y)) |(G/K)^H| = 0$$

La matriz m de este sistema de ecuaciones está dada por

$$m(H, K) = |(G/K)^H| = |\{xK \in G/K \mid H^x \subseteq K\}|$$

para $H, K \in [s_G]$. En particular la entrada $m(H, K)$ es no cero si y sólo si algún conjugado de H está contenido en K .

Si el conjunto $[s_G]$ tiene un orden total \leq tal que $H \leq K$ implica $|H| \leq |K|$, entonces la matriz m es triangular superior, con coeficientes en la diagonal no ceros $m(H, H) = [N_G(H) : H]$. En particular m es no singular, y al poder invertirla se sigue de la última suma que $a_K(X) = a_K(Y)$, para cualquier $K \in [s_G]$, y los G -conjuntos X y Y son isomorfos. Se sigue también que los enteros $a_K(X)$ en la descomposición 3.1 están determinados de manera única por X . \square

DEFINICIÓN 1.5. La matriz anterior m (o algunas veces su transpuesta) es llamada la *tabla de marcas* del grupo G .

Capítulo 2

Anillo de Burnside

1. Definición

La siguiente definición del anillo de Burnside del grupo G es una generalización axiomática de las ideas y técnicas de Burnside. Ésta aparece en un artículo de Solomon ([10]).

DEFINICIÓN 2.1. (Solomon). El *anillo de Burnside* $B(G)$ de G es el grupo de Grothendieck de la categoría de G -conjuntos, por las relaciones dadas por la descomposición en unión disjunta de G -conjuntos. La multiplicación en $B(G)$ es inducida por el producto directo de G -conjuntos.

Esto significa que $B(G)$ es el \mathbb{Z} -módulo libre con base el conjunto de clases de equivalencia de G -conjuntos finitos cociente por las relaciones identificando la clase de la unión disjunta $X \sqcup Y$ de dos G -conjuntos X y Y a la suma de la clase de X y la clase de Y .

El producto directo de G -conjuntos es conmutativo y distributivo con respecto a la unión disjunta, salvo isomorfismos. Por lo tanto este induce por bilinealidad una estructura de anillo conmutativo en $B(G)$. La clase del conjunto \bullet de cardinalidad 1 es una unidad para esta estructura de anillo.

Así pues dado que $B(G) = K_0(G)$ entonces $B(G)$ es ya un grupo abeliano con la suma. Claramente dados $A, B, C \in \text{Ob}G\text{-set}$, se tiene que $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ y $A \times B \simeq B \times A$.

Ahora bien verifiquemos que $(A \sqcup B) \times C = A \times C \sqcup B \times C$. Sea $(x, y) \in (A \sqcup B) \times C$ entonces o bien $x \in A$ o $x \in B$, sin pérdida de generalidad supongamos $x \in A$ entonces $(x, y) \in A \times C$ pero $(x, y) \notin B \times C$ con lo cual $(x, y) \in (A \times C) \sqcup (B \times C)$ Similarmente sea $(z, w) \in (A \times C) \sqcup (B \times C)$ entonces o bien $(z, w) \in A \times C$ o $(z, w) \in B \times C$, sin pérdida de generalidad supongamos lo primero, entonces $(z, w) \notin B \times C$, con lo cual $z \notin B$ o $w \notin C$, pero ya que $(z, w) \in A \times C$ entonces $w \in C$ por lo tanto $z \notin B$ y así $(z, w) \in (A \sqcup B) \times C$. Ya que el producto es conmutativo la otra distributividad es análoga a ésta.

Finalmente ya que $A \simeq A \times \bullet$, entonces \bullet es neutro multiplicativo. Con lo cual $B(G)$ es un anillo conmutativo con unidad

Dos G -conjuntos finitos A y B tienen la misma imagen en $B(G)$ si y sólo si existen sucesiones de G -conjuntos finitos X_i, Y_i , para $1 \leq i \leq m$, y Z_j, T_j , para $1 \leq j \leq n$ y un isomorfismo de G -conjuntos.

$$A \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^m X_i \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^m Y_i \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^n (Z_j \sqcup T_j) \right) \simeq B \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^m (X_i \sqcup Y_i) \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^n Z_j \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^n T_j \right)$$

Sabemos que $B(G) = K_0(G) = \mathcal{F}(G)/R$ donde $R = \langle |A \sqcup B| - |A| - |B| \rangle$. Sean A y B tales que $[A] = [B] \in B(G)$ entonces $|A| - |B| \in R$ y así

$$|A| - |B| = \sum_{i=1}^m (|X_i \sqcup Y_i| - |X_i| - |Y_i|) - \sum_{j=1}^n (|Z_j \sqcup T_j| - |Z_j| - |T_j|)$$

Entonces

$$|A| + \sum_{i=1}^m |X_i| + \sum_{i=1}^m |Y_i| + \sum_{j=1}^n |Z_j \sqcup T_j| = |B| + \sum_{i=1}^m |X_i \sqcup Y_i| + \sum_{j=1}^n |Z_j| + \sum_{j=1}^n |T_j|$$

con lo cual existe $C \in \text{Ob}G - \text{set}$ tal que $A \sqcup C \simeq B \sqcup C$

Tomando puntos fijos en ambos lados se tiene que para cualquier subgrupo H de G , ocurre que $|A^H| = |B^H|$ y el teorema de Burnside 1.4 implica que A y B son isomorfos como G -conjuntos. En lo siguiente, un G -conjunto A y su imagen en $B(G)$ serán identificados.

Del teorema de Burnside 1.4 se sigue que cualquier G -conjunto X puede ser escrito de manera única salvo isomorfismo como

$$X \simeq \bigsqcup_{H \in [s_G]} a_H(X)G/H$$

Por lo tanto $B(G)$ es un \mathbb{Z} -módulo libre con base indexada por los elementos G/H , para $H \in [s_G]$. En esta base, la ley de multiplicación puede ser descrita por

$$(1.1) \quad (G/H).(G/K) = \sum_{x \in [H \backslash G/K]} G/(H \cap^x K).$$

Ésta se sigue de la proposición 1.2, aplicando la identidad de Frobenius al considerar $X = G/K$

$$(G/H) \times (G/K) \simeq \text{Ind}_H^G \text{Res}_H^G G/K$$

pero $G/K = \text{Ind}_K^G K/K$, entonces

$$(G/H) \times (G/K) \simeq \text{Ind}_H^G \text{Res}_H^G \text{Ind}_K^G K/K$$

Y a partir de la fórmula de Mackey

$$\text{Res}_H^G \text{Ind}_K^G K/K \simeq \bigsqcup_{x \in [H \backslash G/K]} \text{Ind}_{H \cap^x K}^H {}^x \text{Res}_{H^x \cap K}^K K/K$$

considerando que ${}^x \text{Res}_{H^x \cap K}^K K/K \simeq K/K$ se tiene

$$\text{Res}_H^G \text{Ind}_K^G K/K \simeq \bigsqcup_{x \in [H \backslash G/K]} \text{Ind}_{H \cap^x K}^H K/K \simeq \bigsqcup_{x \in [H \backslash G/K]} H/(H \cap^x K)$$

Por lo tanto

$$(G/H) \times (G/K) \simeq \text{Ind}_H^G \left(\bigsqcup_{x \in [H \backslash G/K]} H/(H \cap^x K) \right) = \bigsqcup_{x \in [H \backslash G/K]} \text{Ind}_H^G H/(H \cap^x K) \simeq \bigsqcup_{x \in [H \backslash G/K]} G/(H \cap^x K)$$

Finalmente, las operaciones en G -conjuntos definidas en la sección 2 del capítulo 1 todas conmutan con uniones disjuntas. Por lo tanto pueden ser extendidas al anillo de Burnside: los elementos de $B(G)$ pueden ser vistos como una diferencia formal $X - Y$ de dos G -conjuntos finitos. Si $F : G\text{-set} \rightarrow H\text{-set}$ denota uno de los funtores de restricción, inducción, puntos fijos, inflación, deflación o conjugación, entonces F induce un homomorfismo de grupos, todavía denotado por F , de $B(G)$ a $B(H)$, definido por

$$F(X - Y) = F(X) - F(Y)$$

para cualquiera dos G -conjuntos finitos X y Y .

Así por ejemplo, si H es un subgrupo de G , existe un homomorfismo de restricción

$$\text{Res}_H^G : B(G) \rightarrow B(H).$$

Este homomorfismo es de hecho un morfismo de anillos (con unidad). Pues $\text{Res}_H^G(X \times Y) = \text{Res}_H^G X \times \text{Res}_H^G Y$ para X y Y G -conjuntos. Y $\text{Res}_H^G \bullet = \bullet$.

En el caso especial $H = \mathbb{I}$, dado que $B(G) \simeq \mathbb{Z}$, esto da una extensión de la cardinalidad a la aplicación $X \mapsto |X| = \text{Res}_{\mathbb{I}}^G X$ de $B(G)$ a \mathbb{Z} .

Similarmente, existe un homomorfismo inducción

$$\text{Ind}_H^G : B(H) \rightarrow B(G)$$

Este no es un morfismo de anillos en general, pues $\text{Ind}_H^G(X \times Y)$ no necesariamente es lo mismo que $\text{Ind}_H^G X \times \text{Ind}_H^G Y$.

Si H es un subgrupo de G , existe un homomorfismo de puntos fijos $X \mapsto X^H$

$$f^H : B(G) \rightarrow B(N_G(H)/H)$$

que es de hecho un homomorfismo de anillos, dado que $f^H(X \times Y) = (X \times Y)^H$ y con una doble contención tenemos que dado $(x, y) \in (X \times Y)^H$, se tiene que para $h \in H$, $h.(x, y) = (h.x, h.y) = (x, y)$ entonces $h.x = x$ y $h.y = y$, es decir, $x \in X^H$ y $y \in Y^H$. Por lo tanto, $(X \times Y)^H \subseteq X^H \times Y^H$. Por otra parte, dado $(x, y) \in X^H \times Y^H$ entonces para cualquier $h \in H$ se tiene $h.(x, y) = (h.x, h.y) = (x, y)$ y así $X^H \times Y^H \subseteq (X \times Y)^H$. Por lo tanto ambos conjuntos son iguales.

Cuando H es un subgrupo normal de G , existe un homomorfismo inflación

$$\text{Inf}_{G/H}^G : B(G/H) \rightarrow B(G)$$

que es un homomorfismo de anillos. Pues como en casos anteriores $\text{Inf}_H^G(X \times Y) \simeq \text{Inf}_H^G X \times \text{Inf}_H^G Y$.

Finalmente, si x es un elemento de G , existe un homomorfismo conjugación $Z \mapsto {}^x Z$ de $B(H)$ a $B({}^x H)$, que es un homomorfismo de anillos, esto ya que $c_{x,H}(X \times Y) = {}^x(X \times Y) = {}^x X \times {}^x Y = c_{x,H}(X) \times c_{x,H}(Y)$.

La siguiente es una extensión obvia de la proposición 1.2:

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea G un grupo finito, y H y K subgrupos de G .*

1. (Fórmula de Mackey) Si $Z \in B(G)$, entonces en $B(K)$

$$\text{Res}_K^G \text{Ind}_H^G Z = \sum_{x \in [K \backslash G/H]} \text{Ind}_{K \cap {}^x H}^K {}^x \text{Res}_{K^x \cap H}^H Z.$$

2. (Identidad de Frobenius) Si $X \in B(G)$ y $Z \in B(H)$, entonces en $B(G)$

$$X \cdot \text{Ind}_H^G Z = \text{Ind}_H^G ((\text{Res}_H^G X) \cdot Z)$$

y en particular para cualquier $X \in B(G)$

$$X.(G/H) = \text{Ind}_H^G \text{Res}_H^G X.$$

3. Si $Z \in B(H)$, entonces en $B(N_G(K)/K)$

$$(\text{Ind}_H^G Z)^K = \sum_{\substack{x \in [N_G(K) \backslash G/H] \\ K^x \subseteq H}} \text{Ind}_{N_{xH}(K)/K}^{N_G(K)/K} ({}^x Z)^K$$

2. Puntos fijos como homomorfismos de anillos

El anillo $B(G)$ es finitamente generado como \mathbb{Z} -módulo, por lo tanto es un anillo noetheriano. El teorema de Burnside 1.4 puede ser interpretado como sigue: cada subgrupo H de G define un homomorfismo de anillos $\phi_H^G : B(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ por $\phi_H^G(X) = |X^H|$. El kernel de ϕ_H^G es un ideal primo, dado que \mathbb{Z} es un dominio entero, y la intersección de todos estos kernels para subgrupos H de G es cero. En particular, el anillo $B(G)$ es reducido, esto es, que su único elemento nilpotente es el 0.

Consideremos $g \in G$ y $f : X^H \rightarrow X^{H^g}$ aplicación de conjuntos dada por $x \mapsto g^{-1}xg$. Veamos que $f(x) \in X^{H^g}$. Entonces para $h^g \in H^g$, $h^g f(x) = g^{-1}hgg^{-1}xg = g^{-1}hxg = g^{-1}xg = f(x)$ pues $x \in X^H$. Por lo tanto $f(x) \in X^{H^g}$. Ahora, claramente es inyectiva pues dados $x, x' \in X^H$ tal que $f(x) = f(x')$, entonces $g^{-1}xg = g^{-1}x'g$ y así $x = x'$. Ahora bien dado $y \in X^{H^g}$ existe $gyg^{-1} \in X^H$ tal que $f(gyg^{-1}) = y$, por lo tanto f es sobreyectiva y entonces una biyección, con lo cual $|X^H| = |X^{H^g}|$ para cualquier g en G . Ahora bien, sean H y K conjugados en G , entonces existe $g \in G$ tal que $H = K^g$ y entonces $\phi_H^G(X) = |X^H| = |X^{K^g}| = |X^K| = \phi_K^G(X)$. Por lo tanto $\phi_H^G = \phi_K^G$ y entonces la aplicación producto

$$\Phi = \prod_{H \in [s_G]} \phi_H^G : B(G) \rightarrow \prod_{H \in [s_G]} \mathbb{Z}$$

es inyectiva. Más aún, esta aplicación Φ es una aplicación entre \mathbb{Z} -módulos libres que tienen el mismo rango. Por lo tanto el cokernel de Φ es finito.

La matriz m de Φ con respecto a la base $\{G/H\}_{H \in [s_G]}$ y a la base canónica $\{e_H\}_{H \in [s_G]}$ de $\prod_{H \in [s_G]} \mathbb{Z}$ es la tabla de marcas del grupo G . Recordando de la definición 1.5 que para $H, K \in [s_G]$

$$m(H, K) = |(G/K)^H| = |\{xK \in G/K \mid H^x \subseteq K\}|.$$

La cardinalidad del cokernel de Φ es el determinante de m , por lo tanto es igual a

$$|\text{Coker}(\Phi)| = \prod_{H \in [s_G]} [N_G(H) : H].$$

Este cokernel fue descrito por Dress ([5]):

TEOREMA 2.3. (Dress) Sea G un grupo finito. Para H y K en $[s_G]$, sea

$$n(K, H) = |\{xK \in N_G(K)/K \mid \langle x, K \rangle =_G H\}|.$$

Entonces el elemento $y = \sum_{H \in [s_G]} y_H e_H$ de $\prod_{H \in [s_G]} \mathbb{Z}$ está en la imagen de Φ si y sólo si para cualquier $K \in [s_G]$

$$\sum_{H \in [s_G]} n(K, H) y_H \equiv 0 \pmod{|N_G(K)/K|}$$

DEMOSTRACIÓN. Primero sea X un G -conjunto finito, y sea $y = \Phi(X)$. Entonces con la notación del teorema $y = \sum_{H \in [s_G]} y_H e_H = \sum_{H \in [s_G]} |X^H| e_H$ y así $y_H = |X^H|$ para todo $H \in [s_G]$, por lo tanto para cualquier $K \in [s_G]$

$$\sum_{H \in [s_G]} n(K, H) y_H = \sum_{H \in [s_G]} |X^H| |\{xK \in N_G(K)/K \mid \langle x, K \rangle =_G H\}| =$$

$$= \sum_{H \in [s_G]} |X^{\langle x, K \rangle}| |\{xK \in N_G(K)/K \mid \langle x, K \rangle =_G H\}| = \sum_{xK \in N_G(K)/K} |X^{\langle x, K \rangle}| = \sum_{xK \in N_G(K)/K} |(X^K)^x|$$

pues notemos que $X^{\langle x, K \rangle} = (X^K)^x$ conjuntivísticamente, pues un elemento de $\langle x, K \rangle$ es de la forma $x^m k$ con $k \in K$ y algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces dado $y \in (X^K)^x$, $x^m k y = x^m y = y$ por lo tanto $y \in X^{\langle x, K \rangle}$, inversamente dado $y \in X^{\langle x, K \rangle}$ para $k \in K$ y x , se tiene $xky = x(ky) = xy = y$. Por lo tanto $y \in (X^K)^x$ y en consecuencia $(X^K)^x = X^{\langle x, K \rangle}$.

Ahora para cualquier grupo finito L actuando en un conjunto finito Z se tiene

$$|L \times L \setminus Z| = |L||L \setminus Z| = |L| \left| \bigsqcup_{z \in Z} L_z/L \right| = |L| \sum_{z \in Z} \frac{|L_z|}{|L|} = \sum_{z \in Z} |L_z| = |\{(l, z) \in L \times Z \mid l.z = z\}| = \sum_{l \in L} |Z^l|.$$

Aplicando esto a $L = N_G(K)/K$ y $Z = X^K$ da

$$\sum_{H \in [s_G]} n(K, H) y_H = |N_G(K)/K| |N_G(K) \setminus X^K| \equiv 0 \pmod{|N_G(K)/K|}$$

Por linealidad, esto probará la parte de suficiencia del teorema.

Aplicando esto a $X = G/M$, para algún $M \in [s_G]$, muestra que existe una matriz t indexada por $[s_G] \times [s_G]$, con entradas en \mathbb{Z} , tal que para $K \in [s_G]$

$$\sum_{H \in [s_G]} n(K, H) m(H, K) = |N_G(K)/K| t(K, M).$$

Ahora por el orden en $[s_G]$ tenemos que la matriz n es triangular superior y los coeficientes de su diagonal son $n(K, K) = |\{xK \in N_G(K)/K \mid \langle x, K \rangle =_G K\}| = 1$, y ya que m también es triangular superior, entonces t lo es, y despejando de la suma

$$t(K, K) = m(K, K)/|N_G(K)/K| = 1.$$

En particular t por ser triangular superior con unos en la diagonal es invertible (sobre \mathbb{Z}).

Ahora supongamos que el elemento $y = \sum_{H \in [s_G]} y_H e_H \in \prod_{H \in [s_G]} \mathbb{Z}$ satisface las congruencias del teorema. Dado que el Coker(Φ) es finito, existe un número racional r_M , para $M \in [s_G]$, tal que

$$y = \sum_{M \in [s_G]} r_M \Phi(G/M) = \sum_{M \in [s_G]} r_M |(G/M)^H| e_H.$$

En otras palabras para cada $H \in [s_G]$

$$y_H = \sum_{M \in [s_G]} |(G/M)^H| r_M.$$

Por lo tanto para cada $K \in [s_G]$

$$\sum_{H \in [s_G]} n(K, H) y_H = \sum_{H \in [s_G]} n(K, H) \sum_{M \in [s_G]} |(G/M)^H| r_M = \sum_{H \in [s_G]} \sum_{M \in [s_G]} n(K, H) m(H, M) r_M$$

pero $|N_G(K)/K| t(K, M) = \sum_{H \in [s_G]} n(K, H) m(H, M)$, sustituimos y entonces

$$\sum_{H \in [s_G]} n(K, H) y_H = |N_G(K)/K| \sum_{M \in [s_G]} t(K, M) r_M$$

Por hipótesis la suma del lado izquierdo es un múltiplo de $|N_G(K)/K|$, por lo tanto existen enteros z_K tal que para todo $K \in [s_G]$

$$\sum_{M \in [s_G]} t(K, M) r_M = z_K$$

Dado que t es invertible sobre \mathbb{Z} , tenemos que $r_K \in \mathbb{Z}$ para toda M y así $y \in \text{Im}(\Phi)$. \square

3. Aplicaciones

Tenemos ahora algunas aplicaciones. Sea X un G -conjunto y $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos

$$\binom{X}{n} = \{Y \subseteq X : |Y| = n\}$$

Éste es un G -conjunto con la siguiente acción, dado $g \in G$ $g.Y = gY$. Tenemos entonces el siguiente lema:

LEMA 2.4. Sea $U \leq G$, $q \in \mathbb{N}$, entonces

$$\left| \binom{G}{q}^U \right| = \begin{cases} 0 & \text{si } |U| \nmid q \\ \binom{[G:U]}{q/|U|} & \text{si } |U| \mid q \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$\left| \binom{G}{q}^U \right| = |\{Y \subseteq G \mid |Y| = q, uY = Y \ \forall u \in U\}| = |\{Y \subseteq G \mid |Y| = q, Y = \bigsqcup_{i=1}^r U y_i\}|$$

Notemos que

$$q = |Y| = \left| \bigsqcup_{i=1}^r U y_i \right| = \sum_{i=1}^r |U y_i| = \sum_{i=1}^r |U| = r|U|$$

pues claramente $U \simeq Uy_i$ para todo $i = 1 \dots r$, por lo tanto $r = q/|U|$. Considerando ahora la biyección entre

$$\begin{aligned} \binom{G}{q}^U &\rightarrow \binom{G/U}{r} \\ Y &\rightarrow \{Uy_1, \dots, Uy_r\} \end{aligned}$$

entonces

$$\left| \binom{G}{q}^U \right| = \left| \left\{ \bar{Y} \subseteq G/U : |\bar{Y}| = \frac{q}{|U|} \right\} \right|$$

Observemos que el conjunto de la derecha es vacío si $|U| \nmid q$ y por lo tanto su cardinalidad nula. Si por el contrario no es vacío, su cardinalidad será el número de subconjuntos de G/U posibles de cardinalidad r , es decir las combinaciones de $[G : U]$ tomadas $r = q/|U|$ a la vez. Por lo tanto

$$\left| \binom{G}{q}^U \right| = \begin{cases} 0 & \text{si } |U| \nmid q \\ \binom{[G : U]}{\frac{q}{|U|}} & \text{si } |U| \mid q \end{cases}$$

□

LEMA 2.5. Sea $X \in B(G)$, $H \leq G$, $X = \sum_{K \in [s_G]} a_K G/K$ con $a_K \in \mathbb{Z}$. $H \in [s_G]$ es maximal con $|X^H| \neq 0$ si y sólo si $a_H \neq 0$ y H es maximal con esta propiedad. En este caso $|X^H| = a_H \left| \frac{N_G(H)}{H} \right|$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $H \in [s_G]$ maximal tal que $|X^H| \neq 0$, entonces

$$0 \neq |X^H| = \left| \left(\sum_{K \in [s_G]} a_K G/K \right)^H \right| = \sum_{K \in [s_G]} a_K |(G/K)^H|$$

pero sabemos que para $K \not\geq H$, $|(G/K)^H| = 0$, por lo tanto la suma anterior la podemos reescribir como

$$|X^H| = \sum_{\substack{K \in [s_G] \\ H \leq K}} a_K |(G/K)^H| \neq 0$$

Por lo tanto, existe $K \geq_G H$ tal que $a_K \neq 0$. Sea $H \leq_G K_0$ maximal con $a_{K_0} \neq 0$, entonces

$$|X^{K_0}| = \left| \sum_{K \in [s_G]} a_K (G/K)^{K_0} \right| = a_{K_0} |(G/K_0)^{K_0}| = a_{K_0} \left| \frac{N_G(K_0)}{K_0} \right| \neq 0$$

pero ya que H es maximal con la propiedad de que $|X^H| \neq 0$, entonces $K_0 \leq H$ y por lo tanto $H = K_0$ con lo cual $|X^H| = a_H \left| \frac{N_G(H)}{H} \right|$.

Sea ahora H tal que $a_H \neq 0$ y que sea maximal con esta propiedad. Entonces

$$|X^H| = \sum_{\substack{K \in [s_G] \\ H \leq K}} a_K |(G/K)^H| = a_H |(G/H)^H| = a_H \left| \frac{N_G(H)}{H} \right|.$$

Además H es maximal pues si suponemos que existe H_0 maximal tal que $|X^{H_0}| \neq 0$ y que contiene propiamente a H , entonces

$$0 \neq |X^{H_0}| = a_{H_0} \left| \frac{N_G(H_0)}{H_0} \right|$$

es decir, $a_{H_0} \neq 0$, contradiciendo la maximalidad de H con esta propiedad. \square

LEMA 2.6. Denotemos C_n como el grupo cíclico de orden n . Sea $C = C_n$ entonces el conjunto

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} C \\ d \end{array} \right) : d|n \right\}$$

es base de $B(C)$.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que una base para $B(C)$ es $\{C/C_t : t|n\}$, entonces

$$\left(\begin{array}{c} C \\ d \end{array} \right) = \sum_{t|n} a_{C_t} C/C_t$$

Sea $e \in \mathbb{Z}$ tal que $a_{C_e} \neq 0$ maximal. Por los lemas anteriores

$$0 \neq \left| \left(\begin{array}{c} C \\ d \end{array} \right)^{C_e} \right| = \left(\begin{array}{c} [C : C_e] \\ d/|C_e| \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} [C : C_e] \\ d/e \end{array} \right)$$

entonces $e \mid d$ y por lo tanto $C_e \subseteq C_d$.

Pero por otra parte tenemos que

$$\left| \left(\begin{array}{c} C \\ d \end{array} \right)^{C_d} \right| = \left(\begin{array}{c} [C : C_d] \\ d/d \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n/d \\ 1 \end{array} \right) = \frac{n}{d} \neq 0$$

Por lo tanto $e = d$ por maximalidad de e y entonces

$$a_{C_d} \left| \frac{N_C(C_d)}{C_d} \right| = a_{C_d} \left| \frac{C}{C_d} \right| = \left| \left(\begin{array}{c} C \\ d \end{array} \right)^{C_d} \right| = \frac{n}{d}$$

entonces $a_{C_d} = 1$ y por lo tanto

$$\left(\begin{array}{c} C \\ d \end{array} \right) = C/C_d + \sum_{\substack{t|n \\ t \neq d}} a_{C_t} C/C_t$$

Lo que implica que al considerar la matriz $(a_{C_i})_{i|n}$, tenemos que es triangular superior con unos en la diagonal, por lo tanto $\left\{ \begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix} : d|n \right\}$ es base. \square

Tenemos ahora el siguiente teorema de Dress:

TEOREMA 2.7. (Dress) Sea G un grupo finito. Dado $H \leq G$, denotemos $C_H = C_{|H|}$ y $C = C_G$, entonces existe

$$\alpha : B(C) \rightarrow B(G)$$

homomorfismo de anillos tal que $\forall H \leq G$ ocurre $|(\alpha(X))^H| = |X^{C_H}|$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\alpha : B(C) \rightarrow B(G)$ dado en la base por $\alpha \left(\begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} G \\ d \end{pmatrix}$ y extendida linealmente. Veamos que es de anillos con unidad. Para esto basta ver que $|(\alpha(X))^H| = |X^{C_H}|$ para todo $X \in B(C)$ y todo $H \leq G$. Pues si esto vale tendríamos que.

$$\begin{aligned} |(\alpha(XY))^H| &= |(XY)^{C_H}| = |X^{C_H} Y^{C_H}| = |X^{C_H}| |Y^{C_H}| = \\ &= |\alpha(X)^H| |\alpha(Y)^H| = |(\alpha(X)\alpha(Y))^H| \quad \forall H \leq G \end{aligned}$$

Entonces $\alpha(XY) = \alpha(X)\alpha(Y)$. Y tendríamos también

$$|\alpha(1_{B(C)})| = |1_{B(C)}^{C_H}| = 1 = |1_{B(G)}| \quad \forall H \leq G$$

por lo tanto $\alpha(1_{B(C)}) = 1_{B(G)}$. Ya que $|*|$ es lineal basta ver que lo satisface para la base, es decir,

$$\left| \left(\alpha \begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix} \right)^H \right| = \left| \begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix}^{C_H} \right| \quad \forall H \leq G \quad \forall d | n$$

Pero

$$\left| \left(\alpha \begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix} \right)^H \right| = \left| \begin{pmatrix} G \\ d \end{pmatrix}^H \right| = \begin{cases} \begin{pmatrix} [G : H] \\ d/|H| \end{pmatrix} & \text{si } |H| | d \\ 0 & \text{si } |H| \nmid d \end{cases}$$

y

$$\left| \begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix}^{C_H} \right| = \begin{cases} \begin{pmatrix} [C : C_H] \\ d/C_H \end{pmatrix} & \text{si } |C_H| | d \\ 0 & \text{si } |C_H| \nmid d \end{cases}$$

Pero notemos que $|C_H| = |H|$ y $|C| = |G|$, por lo tanto

$$\left| \begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix}^{C_H} \right| = \left| \left(\alpha \begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix} \right)^H \right|$$



COROLARIO 2.8. Para todo $d \mid |G|$ existe $X_d \in B(G)$ con

$$|X_d^U| = \begin{cases} d & \text{si } d \mid [G : U] \\ 0 & \text{si } d \nmid [G : U] \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $\alpha : B(C) \rightarrow B(G)$ del teorema anterior con $C = C_{|G|}$.

Sea $C/C_{\frac{|G|}{d}} \in B(C)$, entonces consideremos $X_d = \alpha(C/C_{\frac{|G|}{d}})$. Entonces por el teorema 2.7

$$|X_d^U| = \left| (C/C_{\frac{|G|}{d}})^{C_U} \right| = \frac{|N_C(C_{\frac{|G|}{d}})|}{|C_{\frac{|G|}{d}}|} m(C_U, C_{\frac{|G|}{d}})$$

pero $m(C_U, C_{\frac{|G|}{d}}) = 1$ si $C_U \leq C_{\frac{|G|}{d}}$, y ya que C es cíclico esto ocurre si $|C_U| = |U|$ divide a $|C_{\frac{|G|}{d}}| = \frac{|G|}{d}$. Entonces

$$|X_d^U| = \begin{cases} \frac{|G|}{|G|d} & \text{si } |U| \mid \frac{|G|}{d} \\ 0 & \text{si } |U| \nmid \frac{|G|}{d} \end{cases} = \begin{cases} d & \text{si } d \mid \frac{|G|}{|U|} \\ 0 & \text{si } d \nmid \frac{|G|}{|U|} \end{cases}$$



COROLARIO 2.9. (Sylow) Si $d \mid |G|$ entonces

$$\text{mcd}(\{[G : H] : d \mid [G : H], H \leq G\}) = d$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$X_d = \sum_{H \in [s_G]} a_H G/H$$

Si $a_H \neq 0$, sea $H \leq H_0$ con $a_{H_0} \neq 0$ maximal. Entonces por el lema 2.5, por un lado $0 \neq |X_d^{H_0}| = \left| \frac{N_G(H_0)}{H_0} \right|$ y por el corolario 2.8, $0 \neq |X_d^{H_0}| = d$ y $d \mid [G : H_0]$ pero ya que $H \leq H_0$ entonces $[G : H_0] \mid [G : H]$ y por lo tanto $d \mid [G : H]$. Con lo cual, $X_d = \sum_{d \mid [G : H]} a_H G/H$. Y así,

$$d = |X_d^1| = \left| \sum_{d \mid [G : H]} a_H G/H \right| = \sum_{d \mid [G : H]} a_H |G/H| = \sum_{d \mid [G : H]} a_H [G : H]$$



COROLARIO 2.10. Sea G un grupo finito. Si $p^a \mid |G|$ entonces existe $P \leq G$ tal que $|P| = p^a$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que el orden de G se puede escribir como $|G| = p^a d$ con

$$d = \text{mcd}(\{[G : H] : d|[G : H], H \leq G\}),$$

pues

$$d \mid [G : H] \Leftrightarrow |H| \left| \frac{|G|}{d} = p^a \right.$$

entonces

$$\frac{|G|}{p^a} = \text{mcd}\{|G|/|H| : |H| \mid p^a\} = \frac{|G|}{\text{mcd}\{|H| : |H| \mid p^a\}}$$

y por lo tanto

$$p^a = \text{mcd}\{|H| : |H| \mid p^a\}$$

con lo cual existe $H \leq G$ tal que $|H| = p^a$ \square

COROLARIO 2.11. (Sylow) Sea G un grupo finito y $p^a \mid |G|$, entonces

$$|\{H \leq G \mid |H| = p^a\}| \equiv 1 \pmod{p}$$

.

DEMOSTRACIÓN. Sea $d = \frac{|G|}{p^a}$, entonces

$$X_d = \sum_{d|[G:H]} a_H G/H$$

y por el corolario 2.8

$$d = \sum_{d|[G:H]} a_H [G : H]$$

dividimos ambos lados por d , y ya que cada sumando es divisible por d tiene sentido hacerlo del lado derecho, con lo cual tenemos

$$1 = \sum_{\substack{H \in [s_G] \\ d|[G:H]}} a_H \frac{[G : H]}{d}$$

pero $\frac{|G|}{p^a} \left| \frac{|G|}{|H|} \Leftrightarrow |H| \mid p^a \right.$ entonces $\frac{[G]/|H|}{[G]/p^a} = \frac{p^a}{|H|}$, con lo cual se tiene que

$$1 = \sum_{\substack{H \in [s_G] \\ d|[G:H]}} a_H \frac{p^a}{|H|} \equiv \sum_{\substack{H \in [s_G] \\ |H|=p^a \\ a_H \neq 0}} a_H \pmod{p}$$

pero ya que $a_H \neq 0$, entonces $|H| = p^a$ es maximal y por lo tanto

$$a_H = \frac{|X_d^H|}{[N_G(H) : H]} = \frac{d}{[N_G(H) : H]} = \frac{[G : H]}{[N_G(H) : H]} = [G : N_G(H)]$$

por lo tanto

$$1 \equiv \sum_{\substack{H \in [s_G] \\ |H|=p^a}} [G : N_G(H)] = |\{H \leq G \mid |H|=p^a\}| \pmod{p}$$

□

COROLARIO 2.12. *Sea G un p -grupo, entonces $|X^1| \equiv |X^G| \pmod{p}$, para todo G -conjunto X .*

DEMOSTRACIÓN. Escribimos a X como combinación lineal de la base

$$X = \sum_{H \in [s_G]} a_H G/H$$

entonces

$$|X^1| = \sum_{H \in [s_G]} a_H [G : H] \equiv a_G = |X^G| \pmod{p}$$

pues dado que G es p -grupo todos los índices de subgrupos propios es una potencia de p y sólo queda a_G . □

COROLARIO 2.13. *Sean G un grupo finito, $V \leq G$ p -grupo y $U \leq G$ subgrupo con $p \nmid [G : U]$ entonces $V \leq_G U$. En particular los grupos de Sylow son conjugados.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos G/U como V -conjunto. Entonces por el lema anterior inmediato

$$|(G/U)^V| \equiv |(G/U)^1| = [G : U] \not\equiv 0 \pmod{p}$$

Por lo tanto $V \leq_G U$.

En particular si tomamos $V \leq G$ y $V' \leq G$ p -subgrupos de Sylow. Aplicado a $U = V'$, tenemos que $V \leq_G V'$. Y por otro lado aplicado a $U = V$, $V' \leq_G V$. Por lo tanto, $V =_G V'$. □

LEMA 2.14. (Frobenius) *Sea X un G -conjunto. Entonces*

$$\sum_{g \in G} |X^g| = |G||G \setminus X|$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |X^g| &= \sum_{\substack{g \in G \\ x \in X}} |\{(g, x) \mid gx = x\}| = \sum_{x \in X} |\{g \in G \mid gx = x\}| = \sum_{x \in X} |G_x| \\ &= \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|\text{Orb}_G(x)|} = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|\text{Orb}_G(x)|} = |G| \sum_{x \in [G \setminus X]} 1 = |G||G \setminus X| \end{aligned}$$



COROLARIO 2.15. Sea G finito y $g \in G$. Entonces $\sum_{g \in G} |X^{(g)}| \equiv 0 \pmod{|G|}$ para todo $X \in B(G)$.

DEMOSTRACIÓN. Es inmediata del lema anterior.

COROLARIO 2.16. (Frobenius) Para todo $m \mid |G|$ se tiene que $|\{g \in G \mid g^m = 1\}| \equiv 0 \pmod{m}$

DEMOSTRACIÓN. Sea $X = X_{|G|/m} \in B(G)$, por el corolario anterior

$$\sum_{g \in G} |X^{(g)}| \equiv 0 \pmod{|G|}$$

Pero recordemos que

$$|X^{(g)}| = \begin{cases} \frac{|G|}{m} & \text{si } \frac{|G|}{m} \mid \frac{|G|}{|\langle g \rangle} \\ 0 & \text{si } \frac{|G|}{m} \nmid \frac{|G|}{|\langle g \rangle} \end{cases}$$

pero $\frac{|G|}{m} \mid \frac{|G|}{|\langle g \rangle}$ si y sólo si $|\langle g \rangle| \mid m$, con lo cual

$$\sum_{g \in G} |X^{(g)}| = \sum_{\substack{g \in G \\ g^m = 1}} \frac{|G|}{m} = \frac{|G|}{m} |\{g \in G \mid g^m = 1\}|$$

por lo tanto $|\{g \in G \mid g^m = 1\}| \equiv 0 \pmod{m}$

4. Idempotentes

La aplicación Φ de la sección previa es una aplicación inyectiva entre \mathbb{Z} -módulos libres que tienen el mismo rango. Por lo tanto cuando tensorizamos con \mathbb{Q} resulta un isomorfismo de \mathbb{Q} -álgebras.

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Phi : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G) \xrightarrow{\simeq} \prod_{H \in [s_G]} \mathbb{Q}$$

y en particular el álgebra $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$ es semi-simple. Ésta se denotará por $\mathbb{Q}B(G)$. La componente $\mathbb{Q}\phi_H^G$ de $\mathbb{Q}\Phi$ continuará siendo escrita $X \mapsto |X^H|$, así que en general $|X^H|$ será un número racional para $X \in \mathbb{Q}B(G)$. Más generalmente, todas las notaciones definidas para $B(G)$ serán extendidas sin cambio a $\mathbb{Q}B(G)$.

La imagen inversa por $\mathbb{Q}\Phi$ de los elementos indexados por H de la \mathbb{Q} -base canónica de $\prod_{H \in [s_G]} \mathbb{Q}$ es denotada por e_H^G . Si H' es conjugado de H en G , también se establece que $e_{H'}^G = e_H^G$ pues al ser

conjugados $|X^H| = |X^{H'}$. Con esta notación para cualquier par de subgrupos H y K de G , se tiene

$$|(e_H^G)^K| = \begin{cases} 1 & \text{si } H =_G K. \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

El conjunto de elementos e_H^G , para $H \in [s_G]$, es el conjunto de idempotentes primitivos de $\mathbb{Q}B(G)$. Estos idempotentes han sido calculados explícitamente por Gluck ([7]), y más tarde independientemente por Yoshida ([14]). Esto se puede hacer usando el siguiente lema:

LEMA 2.17. *Sea G un grupo finito*

1. *Sea H un subgrupo de G . Entonces para cualquier $X \in \mathbb{Q}B(G)$*

$$X.e_H^G = |X^H|e_H^G.$$

Inversamente, si $Y \in \mathbb{Q}B(G)$ es tal que $X.Y = |X^H|Y$ para cualquier $X \in \mathbb{Q}B(G)$, entonces $Y \in \mathbb{Q}e_H^G$.

2. *Sea H un subgrupo propio de G . Entonces $\text{Res}_H^G e_H^G = 0$. Inversamente, si $Y \in \mathbb{Q}B(G)$ es tal que $\text{Res}_H^G Y = 0$ para cualquier subgrupo propio H de G , entonces $Y \in \mathbb{Q}e_G^G$.*
3. *Sea H un subgrupo de G , y sea $y \in G$. Entonces*

$$\text{Res}_H^G e_H^G = e_H^H, \quad e_H^G = \frac{1}{[N_G(H) : H]} \text{Ind}_H^G e_H^H, \quad y e_H^H = e_{yH}^H.$$

DEMOSTRACIÓN.

1. Dado que e_H^G es la preimagen de una base bajo un isomorfismo de \mathbb{Q} -álgebras, entonces el conjunto de estos elementos, para $H \in [s_G]$, es una \mathbb{Q} -base de $\mathbb{Q}B(G)$, por lo tanto para cualquier $X \in \mathbb{Q}B(G)$, existen racionales r_H , para $H \in [s_G]$, tal que

$$X = \sum_{H \in [s_G]} r_H e_H^G.$$

Tomamos puntos fijos y cardinalidad en ambos lados para un subgrupo $K \in [s_G]$ tenemos que

$$|X^K| = \left| \left(\sum_{H \in [s_G]} r_H e_H^G \right)^K \right| = \sum_{H \in [s_G]} r_H |(e_H^G)^K|$$

pero recordamos que si $H \neq_G K$, entonces $(e_H^G)^K = 0$ y considerando que $e_H^G = e_K^G$ si $H =_G K$ se tiene que $|X^K| = r_H |(e_H^G)^K| = r_K$. Tendremos entonces que para todo $K \in [s_G]$

$$X.e_K^G = \left(\sum_{H \in [s_G]} |X^H| e_H^G \right) . e_K^G = \sum_{H \in [s_G]} |X^H| e_H^G . e_K^G = |X^K| e_K^G$$

pues estos elementos son idempotentes.

Sea ahora Y un elemento de $\mathbb{Q}B(G)$ que verifica que $X.Y = |X^H|Y$ para cualquier $X \in \mathbb{Q}B(G)$. Entonces en particular, $e_K^G.Y = |(e_K^G)^H|Y = 0$ si $K \neq_G H$, por lo tanto

$$Y.Y = \left(\sum_{H \in [s_G]} |Y^H|e_H^G \right).Y = \sum_{H \in [s_G]} |Y^H|e_H^G.Y = |Y^K|e_K^G.Y$$

es decir, $Y = |Y^H|e_H^G$, con lo cual es un múltiplo racional de e_H^G .

2. Sea H un subgrupo propio de G . Entonces para cualquier subgrupo K de H ,

$$|(\text{Res}_H^G e_G^G)^K| = |(e_G^G)^K| = 0$$

dado que $|(\text{Res}_H^G X)^K| = |X^K|$ para cualquier G -conjunto X , y por lo tanto para cualquier $X \in \mathbb{Q}B(G)$. Lo cual nos dice que la restricción de e_G^G a cualquier subgrupo propio de G es cero.

Inversamente, si la restricción de un elemento Y a cualquier subgrupo H de G es cero, entonces también $(\text{Res}_H^G Y)^H = 0$ y así $0 = |(\text{Res}_H^G Y)^H| = |Y^H|$ para tales subgrupos propios, entonces $|Y^G| \neq 0$ y por 1. $Y = |Y^G|e_G^G$, lo cual queríamos probar.

3. Si K es un subgrupo de H , entonces

$$|(\text{Res}_H^G e_H^G)^K| = |(e_H^G)^K| = \begin{cases} 1 & \text{si } K = H. \\ 0 & \text{si } K \neq H. \end{cases}$$

Pero notemos que

$$|(e_H^H)^K| = \begin{cases} 1 & \text{si } K = H. \\ 0 & \text{si } K \neq H. \end{cases}$$

Con lo cual $|(\text{Res}_H^G e_H^G)^K| = |(e_H^H)^K|$ para cualquier subgrupo K de H , y por el teorema 1.4 $\text{Res}_H^G e_H^G = e_H^H$.

Considerando ahora el siguiente elemento $\text{Ind}_H^G e_H^H$. Si X es un elemento de $\mathbb{Q}B(G)$, entonces por la identidad de Frobenius de la proposición 1.2

$$X.\text{Ind}_H^G e_H^H = \text{Ind}_H^G ((\text{Res}_H^G X).e_H^H) =$$

que por 1. se sigue

$$= \text{Ind}_H^G (|(\text{Res}_H^G X)^H| e_H^H) = \text{Ind}_H^G (|X^H| e_H^H) = |X^H| \text{Ind}_H^G e_H^H.$$

Entonces por 1. se sigue que existe un número racional r_H^G tal que

$$\text{Ind}_H^G e_H^H = r_H^G e_H^G.$$

Por la fórmula de Mackey de la proposición 1.2, la restricción del lado izquierdo a H es igual a

$$\text{Res}_H^G \text{Ind}_H^G e_H^H = \sum_{x \in [H \backslash G / H]} \text{Ind}_{H \cap^x H}^H {}^x \text{Res}_{H^x \cap H}^H e_H^H = \sum_{x \in [N_G(H) / H]} ({}^x e_H^H)$$

esto porque la restricción e inducción de e_H^H a $H^x \cap H$ y ${}^x e_H^H$ a $H \cap^x H$, respectivamente es cero si $H^x \neq H$. Más aun si $y \in G$, entonces para cualquier subgrupo K de ${}^y H$ tenemos que dado un X en $B(G)$, tenemos el siguiente isomorfismo dado por

$$\begin{aligned} ({}^y X)^K &\rightarrow X^{K^y} \\ {}^y z &\rightarrow z \end{aligned}$$

con lo cual

$$\left| ({}^y e_H^H)^K \right| = \left| (e_H^H)^{K^y} \right| = \begin{cases} 1 & \text{si } K^y = H, \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } K = {}^y H, \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases} = \left| (e_{{}^y H}^{{}^y H})^K \right|$$

y por el teorema 1.4 entonces ${}^y e_H^H = e_{{}^y H}^{{}^y H}$.

Finalmente de la igualdad al aplicar la fórmula de Mackey tenemos que

$$\text{Res}_H^G \text{Ind}_H^G e_H^H = |N_G(H) / H| e_H^H$$

y además

$$\text{Res}_H^G \text{Ind}_H^G e_H^H = \text{Res}_H^G r_H^G e_H^G = r_H^G \text{Res}_H^G e_H^G = r_H^G e_H^H$$

de estas dos igualdades concluimos entonces que $r_H^G = |N_G(H) / H|$ y por lo tanto

$$e_H^G = \frac{1}{|N_G(H) / H|} \text{Ind}_H^G e_H^H$$

como se quería mostrar.

□

TEOREMA 2.18. (Gluck). *Sea G un grupo finito. Si H es un subgrupo de G , entonces*

$$e_H^G = \frac{1}{[N_G(H) : H]} \sum_{K \subseteq H} |K| \mu(K, H) G / K,$$

donde μ es la función de Möbius de los copos de subgrupos de G , y G / K es el elemento $1 \otimes G / K \in \mathbb{Q}B(G)$.

DEMOSTRACIÓN. Escribimos en términos de la base a e_H^H , entonces

$$e_H^H = \sum_{K \subseteq H} r(K, H) H / K,$$

con $r(K, H)$ un número racional. Ya que por el lema anterior ${}^y e_H^H = e_{yH}^H$ para $y \in G$, entonces

$${}^y e_H^H = \sum_{K \subseteq H} r(K, H) {}^y(H/K) = \sum_{{}^y K \subseteq {}^y H} r({}^y K, {}^y H) {}^y H / {}^y K = e_{yH}^H$$

y podemos suponer $r({}^y K, {}^y H) = r(K, H)$ para $y \in G$. Tomando inducción de H a G , por el lema anterior nos dice que

$$(4.1) \quad \begin{aligned} e_H^G &= \frac{1}{[N_G(H) : H]} \text{Ind}_H^G e_H^H = \frac{1}{[N_G(H) : H]} \text{Ind}_H^G \left(\sum_{K \subseteq H} r(K, H) H/K \right) = \\ &= \frac{1}{[N_G(H) : H]} \sum_{K \subseteq H} r(K, H) \text{Ind}_H^G H/K = \frac{1}{[N_G(H) : H]} \sum_{K \subseteq H} r(K, H) G/K \end{aligned}$$

Si ahora sumamos los elementos e_H^G , para $H \in [s_G]$, tenemos que es igual a $\bullet = G/G$. Sin embargo si sumamos sobre todos los subgrupos H de G en vez de tomar uno por clase, nos da que

$$G/G = \sum_{H \in [s_G]} e_H^G = \sum_{H \subseteq G} \frac{|N_G(H)|}{|G|} \frac{1}{[N_G(H) : H]} \sum_{K \subseteq H} r(K, H) G/K = \sum_{H \subseteq G} \frac{|H|}{|G|} \sum_{K \subseteq H} r(K, H) G/K$$

El coeficiente de G/K del lado derecho es igual al coeficiente de G/K' , para cualquier conjugado K' de K en G , y es igual a

$$\sum_{K \subseteq H \subseteq G} \frac{|H|}{|G|} r(K, H).$$

Pero por el lado izquierdo tenemos que dicho coeficiente debe ser 0 si $K \neq G$ y 1 si $K = G$. Considerando $r'(K, H) = \frac{|H|}{|K|} r(K, H)$ para $K \subseteq H$, se tiene que

$$\sum_{K \subseteq H \subseteq G} \frac{|H|}{|G|} r(K, H) = \sum_{K \subseteq H \subseteq G} \frac{|K| |H|}{|G| |K|} r(K, H) = \frac{|K|}{|G|} \sum_{K \subseteq H \subseteq G} \frac{|H|}{|K|} r(K, H) = \begin{cases} 1 & \text{si } K = G \\ 0 & \text{si } K \neq G \end{cases}$$

entonces

$$\sum_{K \subseteq H \subseteq G} r'(K, H) = \begin{cases} [G : K] = 1 & \text{si } K = G, \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Con lo cual $r'(K, H)$ es igual a $\mu(K, H)$, donde μ es la función de Möbius de los copos de los subgrupos de G . Por lo tanto $\frac{|H|}{|K|} r(K, H) = \mu(K, H)$ y entonces $r(K, H) = \frac{|K|}{|H|} \mu(K, H)$ y de la ecuación para e_H^G que obtuvimos arriba obtenemos

$$e_H^G = \frac{1}{[N_G(H) : H]} \sum_{K \subseteq H} \frac{|K|}{|H|} \mu(K, H) G/K = \frac{1}{[N_G(H) : H]} \sum_{K \subseteq H} |K| \mu(K, H) G/K$$

como queríamos probar. \square

La fórmula para idempotentes primitivos en $\mathbb{Q}B(G)$ permite una pregunta natural: ¿cuándo estos idempotentes están de hecho en $B(G)$? Más general, si π es un conjunto de números primos, denotemos $\mathbb{Z}_{(\pi)}$ al subanillo de \mathbb{Q} de fracciones irreducibles con denominador primo relativo a todos los elementos de π . En otras palabras $\mathbb{Z}_{(\pi)}$ es la localización de \mathbb{Z} con respecto al conjunto $\mathbb{Z} - \cup_{p \in \pi} p\mathbb{Z}$. Se puede preguntar cuando los idempotentes de $\mathbb{Q}B(G)$ están de hecho en $\mathbb{Z}_{(\pi)}$. La respuesta es como sigue:

TEOREMA 2.19. (*Dress*) *Sea G un grupo finito, y π un conjunto de primos. Sea \mathcal{F} una familia de subgrupos de G , cerrada bajo conjugación en G . denotemos $[\mathcal{F}]$ el conjunto $\mathcal{F} \cap [s_G]$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El elemento idempotente $\sum_{H \in [\mathcal{F}]} e_H^G$ está en $\mathbb{Z}_{(\pi)}B(G)$.*
2. *Sean H y K cualquier par de subgrupos de G tal que H es un subgrupo normal de K y el cociente K/H es cíclico de orden primo $p \in \pi$. Entonces $H \in \mathcal{F}$ si y sólo si $K \in \mathcal{F}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que 1. implica 2., es decir que el idempotente $e = \sum_{H \in [\mathcal{F}]} e_H^G$ está en $\mathbb{Z}_{(\pi)}B(G)$. Esto es equivalente a la existencia de un entero m que sea primo relativo a todos los elementos de π , tal que $me \in B(G)$. Si ahora H y K son subgrupos de G tal que $H \trianglelefteq K$ y K/H es cíclico de orden primo p , entonces para cualquier elemento X de $B(G)$ se tiene que $|X^K| = |(X^H)^{K/H}| \equiv |X^H| \pmod{p}$ y así

$$|me^H| = m|e^H| \equiv |me^K| = m|e^K| \pmod{p}$$

pero

$$m|e^H| = m \left| \left(\sum_{H' \in [\mathcal{F}]} e_{H'}^G \right)^H \right| = m \sum_{H' \in [\mathcal{F}]} |(e_{H'}^G)^H| = \begin{cases} m & \text{si } H \in \mathcal{F} \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Por lo tanto, si $p \in \pi$ y ya que $m \not\equiv 0$ tenemos que $H \in \mathcal{F}$ si y sólo si $K \in \mathcal{F}$.

Inversamente, supongamos cierto 2. Consideremos π un conjunto de primos y sea $H \leq G$ π -perfecto, es decir, $O^\pi(H) = H$. Considerando que

$$\begin{array}{ccc} B(G) & \hookrightarrow & \prod \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_{(\pi)}B(G) & \hookrightarrow & \prod \mathbb{Z}_{(\pi)} \end{array}$$

sea $e = \sum_{\substack{O^\pi(L)=_G H \\ L \in [s_G]}} e_L^G$ y $m = |G|_{\pi'}$, veamos entonces que $me \in B(G)$ y ya que m es unidad en $\mathbb{Z}_{(\pi)}B(G)$ entonces $e \in \mathbb{Z}_{(\pi)}B(G)$. Tenemos entonces

$$\sum_{aT \in N_G(T)/T} |me^{\langle a, T \rangle}| = m \sum_{aT \in N_G(T)/T} |e^{\langle a, T \rangle}| = m |\{aT \in N_G(T)/T \mid O^\pi(\langle a, T \rangle) =_G H\}|$$

Sea $A = \{aT \in N_G(T)/T \mid O^\pi(\langle a, T \rangle) =_G H\}$. Si $A = \emptyset$ se tiene el resultado. Supongamos entonces que existe a_0 tal que $O^\pi(\langle a_0, T \rangle) =_G H$.

Notemos que si $a_0 = a_{\pi'} a_\pi$ entonces $O^\pi(\langle a_0, T \rangle) = O^\pi(\langle a_{\pi'}, T \rangle)$, ya que se tiene que por ser $\frac{\langle a_0, T \rangle}{T}$ cíclico entonces cualquier subgrupo es normal y entonces

$$\frac{\langle a_{\pi'}, T \rangle}{T} \trianglelefteq \frac{\langle a_0, T \rangle}{T}$$

y así $\langle a_{\pi'}, T \rangle \trianglelefteq \langle a_0, T \rangle$ y además $\left| \frac{\langle a_0, T \rangle}{\langle a_{\pi'}, T \rangle} \right|$ es un π -elemento, por lo tanto $O^\pi(\langle a_0, T \rangle) \subseteq \langle a_{\pi'}, T \rangle$. Pero

$$O^\pi(\langle a_0, T \rangle) \subseteq O^\pi(\langle a_{\pi'}, T \rangle) \subseteq O^\pi(\langle a_0, T \rangle).$$

Es decir $O^\pi(\langle a_0, T \rangle) = O^\pi(\langle a_{\pi'}, T \rangle)$. Así que sin pérdida de generalidad podemos suponer a_0 un π' -elemento. Ahora bien, también tenemos que si $O^\pi(\langle a, T \rangle) = O^\pi(\langle a_0, T \rangle)$ con aT un π' -elemento entonces $\langle a, T \rangle = \langle a_0, T \rangle$. Esto pues ya que aT es un π' -elemento, entonces

$$O^\pi\left(\frac{\langle a, T \rangle}{T}\right) = \frac{\langle a, T \rangle}{T}$$

pero

$$O^\pi\left(\frac{\langle a, T \rangle}{T}\right) = \frac{O^\pi(\langle a, T \rangle)T}{T} = \frac{O^\pi(\langle a_0, T \rangle)T}{T} = O^\pi\left(\frac{\langle a_0, T \rangle}{T}\right) = \frac{\langle a_0, T \rangle}{T}$$

por ser también a_0 un π' -elemento. Por lo tanto

$$\langle a, T \rangle = O^\pi(\langle a, T \rangle)T = O^\pi(\langle a_0, T \rangle)T = \langle a_0, T \rangle.$$

Consideremos entonces $B = \{aT \in N_G(T)/T \mid O^\pi(\langle a, T \rangle) =_G H\}$. Por los argumentos anteriores tenemos que $|A| = |B|$. Pero de igual forma tenemos que

$$|B| = \left| \bigsqcup_{\substack{a_0 T \in \left(\frac{N_G(T)}{T}\right)_{\pi'} \\ O^\pi(\langle a_0, T \rangle) =_G H}} \{a_0 bT \in N_G(T)/T \mid bT \text{ es un } \pi\text{-elemento}\} \right|$$

pero a su vez

$$\begin{aligned} &= \left| \bigsqcup_{\substack{a_0 T \in \left(\frac{N_G(T)}{T}\right)_{\pi'} \\ O^\pi(\langle a_0, T \rangle) =_G H}} \{bT \in N_G(T)/T \mid bT \text{ es un } \pi\text{-elemento}\} \right| \\ &= \left| \frac{N_G(T)}{T} \right|_{\pi} \left| \left\{ a_0 \in \left(\frac{N_G(T)}{T}\right)_{\pi'} \mid O^\pi(\langle a_0, T \rangle) =_G H \right\} \right| \end{aligned}$$

y entonces si $r = \left| \{a_0 \in \left(\frac{N_G(T)}{T}\right)_{\pi'} \mid O^\pi(\langle a_0, T \rangle) =_G H\} \right|$ se tiene

$$m|A| = |G|_{\pi'} \left| \frac{N_G(T)}{T} \right|_{\pi} r$$

pero $\left| \frac{N_G(T)}{T} \right|_{\pi'}$ divide a $|G|_{\pi'}$ y por lo tanto

$$m|A| = t \left| \frac{N_G(T)}{T} \right|_{\pi'} \left| \frac{N_G(T)}{T} \right|_{\pi} r = t \left| \frac{N_G(T)}{T} \right| r \equiv 0 \pmod{\left| \frac{N_G(T)}{T} \right|}$$

□

COROLARIO 2.20. *Sea G un grupo finito y π un conjunto de primos. Si J es un subgrupo π -perfecto de G , consideremos*

$$f_J^G = \sum_{\substack{H \in [s_G] \\ O^\pi(H) =_G J}} e_H^G.$$

Entonces el conjunto de elementos f_J^G , para elementos J π -perfectos de $[s_G]$, es el conjunto de idempotentes primitivos de $\mathbb{Z}_{(\pi)}B(G)$.

En particular, el conjunto de idempotentes primitivos de $B(G)$ está en correspondencia uno a uno con el conjunto de clases de conjugación de subgrupos perfectos de G .

El grupo G es soluble si y sólo si G/G es un idempotente primitivo de $B(G)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea J un subgrupo de G π -perfecto y sea

$$\mathcal{F} = \{H \subseteq G \mid O^\pi(H) =_G J\}.$$

Sea $x \in G$, entonces $O^\pi(H^x) = O^\pi(H)^x$, sea $y \in G$ tal que $O^\pi(H)^y = J$, entonces sea $z = x^{-1}y$, tendremos que $O^\pi(H^x)^z = (O^\pi(H)^x)^z = (O^\pi(H)^x)^{x^{-1}y} = O^\pi(H)^y = J$, por lo tanto $O^\pi(H^x) =_G J$ y entonces \mathcal{F} es cerrada bajo conjugación y satisface la condición 2. del teorema 2.19. Esto pues dados H y K subgrupos de G tal que H sea subgrupo normal de K y el cociente sea un p -grupo con $p \in \pi$, consideremos que $H \in \mathcal{F}$, entonces $O^\pi(H) =_G J$. Veamos que $O^\pi(H) = O^\pi(K)$. Dado que $H \leq K$, entonces $O^\pi(H) \leq O^\pi(K)$. Pero ya que $|K/H| = p \in \pi$ entonces $O^\pi(K) \subseteq H$, por lo tanto $O^\pi(K) \subseteq O^\pi(H) \subseteq O^\pi(K)$. Y por lo tanto $K \in \mathcal{F}$. Por lo tanto f_J^G está en $\mathbb{Z}_{(\pi)}B(G)$.

Para probar que es primitivo, es suficiente probar que \mathcal{F} no tiene subfamilias no vacías propias que satisfagan la condición 2. del teorema 2.19. Supongamos que \mathcal{F}' es una tal subfamilia no vacía de \mathcal{F} . Notemos que si $H \in \mathcal{F}$ entonces $O^\pi(H) \in \mathcal{F}$ pues al considerar los factores de composición de $H/O^\pi(H)$, estos son cíclicos de orden $p \in \pi$ y de la forma $L/O^\pi(H)$ con $L \triangleleft H$ y por el teorema de correspondencia se preservan los índices de los cociente por lo tanto aplicando la condición 2. inductivamente tenemos que $O^\pi(H) \in \mathcal{F}$. Así pues esto aplica también para \mathcal{F}' , entonces sea $H' \in$

\mathcal{F}' entonces $O^\pi(H') \in \mathcal{F}'$ y ya que \mathcal{F}' es cerrada bajo conjugación entonces $J \in \mathcal{F}'$. Consideremos ahora $H \in \mathcal{F}$ entonces por el mismo argumento $O^\pi(H) =_G J \in \mathcal{F}$. Pero entonces $O^\pi(H) \in \mathcal{F}'$ y aplicando 2. tenemos que $H \in \mathcal{F}'$. Por lo tanto $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ y el idempotente f_J^G es primitivo.

La última afirmación del corolario es el caso de considerar π el conjunto de todos los números primos. \square

5. Espectro primo

El espectro primo de $B(G)$ ha sido determinado por Dress ([6]):

TEOREMA 2.21. (Dress). *Sea G un grupo finito, y denote p un número primo o cero, y H un subgrupo de G . Sea*

$$I_{H,p}(G) = \{X \in B(G) \mid |X^H| \equiv 0 \pmod{p}\}.$$

Entonces:

1. El conjunto $I_{H,p}(G)$ es un ideal primo de $B(G)$.
2. Si I es un ideal primo de $B(G)$, entonces existe un subgrupo de G y un entero p igual a cero o a un número primo, tal que $I = I_{H,p}(G)$.
3. Si H y K son subgrupos de G , y si p y q son números primos o cero, entonces $I_{H,p}(G) \subseteq I_{K,q}(G)$ si y sólo si se da una de las siguientes afirmaciones:
 - a) Se tiene que $p = q = 0$, y entonces los subgrupos H y K son conjugados en G . En este caso más aún $I_{H,p}(G) = I_{K,q}(G)$.
 - b) Se tiene que $p = 0$ y $q > 0$, entonces los grupos $O^q(H)$ y $O^q(K)$ son conjugados en G . En este caso más aún $I_H(G) \neq I_{K,q}(G)$.
 - c) Se tiene $p = q > 0$, y entonces los subgrupos $O^p(H)$ y $O^p(K)$ son conjugados en G . Más aún $I_{H,p}(G) = I_{K,q}(G)$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Consideremos el homomorfismo de anillos φ de $B(G)$ a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ que toma a X y lo lleva a la clase $|X^H|$. Notemos que $I_{H,p}(G)$ es el kernel de φ por lo tanto es un ideal de $B(G)$. Ahora, dado que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es un dominio entero entonces $I_{H,p}(G)$ es primo.
2. Inversamente, si I es un ideal primo de $B(G)$, entonces el anillo $R = B(G)/I$ es un dominio entero. Sea $\pi : B(G) \rightarrow R$ la proyección canónica. Dado que $R \neq \{0\}$, existe un subgrupo H de G minimal tal que $\pi(G/H) \neq 0$. Tomemos entonces la imagen bajo π de la ecuación 1.1

y usando la minimalidad de H nos da

$$\pi(G/H)\pi(G/K) = \pi\left(\sum_{x \in [H \setminus G/K]} G/(H \cap^x K)\right) = \sum_{x \in [H \setminus G/K]} \pi(G/(H \cap^x K)) = \sum_{\substack{x \in [G/K] \\ H^x \subseteq K}} \pi(G/H)$$

pues $HxK = xK$ si $x^{-1}HxK = K$ es decir, $H^x \subseteq K$. Dado que R es un dominio entero y $\pi(G/H) \neq 0$ tenemos que despejando $\pi(G/K)$

$$\begin{aligned} \pi(G/K) &= \pi(G/H)^{-1} \sum_{\substack{x \in [G/K] \\ H^x \subseteq K}} \pi(G/H) = \sum_{\substack{x \in [G/K] \\ H^x \subseteq K}} \pi(G/H)^{-1} \pi(G/H) = \\ &= \sum_{\substack{x \in [G/K] \\ H^x \subseteq K}} 1_R = |\{x \in [G/K] \mid H^x \subseteq K\}| 1_R = |(G/K)^H| 1_R \end{aligned}$$

Y así por linealidad

$$\pi(X) = \pi\left(\sum_{K \in [s_G]} G/K\right) = \sum_{K \in [s_G]} |(G/K)^H| 1_R = |X^H| 1_R$$

para cualquier $X \in B(G)$. Denote p la característica de R . Entonces p es igual a cero o un número primo. Por definición, el kernel de π es I pero también es igual a $I_{H,p}(G)$.

3. Supongamos primero que H y K son conjugados en G . Entonces para cualquier $X \in B(G)$, tenemos que $|X^H| = |X^K|$. Si $p = 0$ denotemos $I_{H,p} = I_H$. Así en particular, $I_H(G) = \{X \in B(G) \mid |X^H| = 0\} = \{X \in B(G) \mid |X^K| = 0\} = I_K(G)$.

Si ahora p es un número primo, y si X es un G -conjunto finito, tenemos que

$$X^H = \left(X^{O^p(H)}\right)^{H/O^p(H)}$$

y ya que $H/O^p(H)$ es un p -grupo, entonces

$$|X^H| = \left|\left(X^{O^p(H)}\right)^{H/O^p(H)}\right| \equiv |X^{O^p(H)}| \pmod{p}$$

para cualquier $X \in B(G)$. En particular $I_H(G) \subseteq I_{O^p(H),p}(G)$ pues dado $X \in I_H(G)$, entonces $|X^H| = 0$ y dado que $O^p(H) \subseteq H$, entonces $|X^{O^p(H)}| = 0$ y así $|X^{O^p(H)}| \equiv 0 \pmod{p}$, por lo tanto, $I_H(G) \subseteq I_{O^p(H),p}(G)$. Además $I_{H,p}(G) = I_{K,p}(G)$ si $O^p(H)$ y $O^p(K)$ son conjugados en G , pues por lo anterior

$$I_{H,p}(G) = I_{O^p(H),p}(G) = I_{O^p(K),p}(G) = I_{K,p}(G).$$

Por lo tanto $I_{H,p}(G) = I_{O^p(H),p}(G)$ para cualquier $H \subseteq G$.

Inversamente, supongamos que $I_{H,p}(G) \subseteq I_{K,q}(G)$. Entonces existe un homomorfismo de anillos sobreyectivo de $B(G)/I_{H,p}(G)$ a $B(G)/I_{K,q}(G)$. Ya que p es la característica del anillo $B(G)/I_{H,p}(G)$, existen tres posibles casos:

- a) Primero si $p = q = 0$. Entonces la inclusión $I_H(G) \subset I_K(G)$ significa que si $X \in B(G)$ es tal que $|X^H| = 0$, entonces $|X^K| = 0$. Por el teorema 2.18, $X = |N_G(K)|e_K^G$ está en $B(G)$ pues es una combinación lineal la base G/H y entonces

$$|X^K| = \left| (|N_G(K)|e_K^G)^K \right| = |N_G(K)| \left| (e_K^G)^K \right| = |N_G(K)| \neq 0$$

Por lo tanto $|X^H| \neq 0$ y así $|X^H| = |N_G(K)| \left| (e_K^G)^H \right| \neq 0$, es decir, H es conjugado a K en G . Finalmente en este caso por ser conjugados

$$I_H(G) = \{X \in B(G) \mid |X^H| = 0\} = \{X \in B(G) \mid |X^K| = 0\} = I_K(G).$$

- b) El siguiente caso posible es $p = 0$ y $q > 0$. En este caso si $X \in B(G)$ es tal que $|X^H| = 0$, entonces dado que el homomorfismo es de anillos se tiene que $|X^K| \equiv 0 \pmod q$. Consideremos ahora el idempotente

$$f_{O^q(K)}^G = \sum_{\substack{L \in [s_G] \\ O^q(L) =_G O^q(K)}} e_L^G.$$

Por el corolario 2.20, existe un entero m primo relativo a q tal que $X = m f_{O^q(K)}^G$ está en $B(G)$. Ahora bien

$$|X^K| = \left| (m f_{O^q(K)}^G)^K \right| = m \left| \left(\sum_{\substack{L \in [s_G] \\ O^q(L) =_G O^q(K)}} e_L^G \right)^K \right| = m \not\equiv 0 \pmod q$$

Por lo tanto $|X^H| \neq 0$ lo que nos dice que $O^q(H) =_G O^q(K)$. La inclusión $I_H(G) \subseteq I_{K,q}(G)$ es propia ya que los cocientes que usamos en el homomorfismo tienen característica 0 y q respectivamente.

- c) El último caso es $p = q > 0$. Dado que ya vimos que $I_H(G) \subseteq I_{H,p}(G)$ y suponemos que $I_{H,p}(G) \subseteq I_{K,p}(G)$ entonces $I_H(G) \subseteq I_{K,p}(G)$. Y por un argumento como en el caso anterior tenemos que $O^p(H) =_G O^p(K)$. Y por lo tanto en este caso $I_{H,p}(G) = I_{K,p}(G)$.



Capítulo 3

Invariantes

El anillo de Burnside es un análogo para G -conjuntos finitos del anillo \mathbb{Z} para conjuntos finitos (y \mathbb{Z} es de hecho isomorfo al anillo de Burnside del grupo trivial). A cada conjunto finito es asociada su cardinalidad. Similarmente, se pueden ligar varios elementos en el anillo de Burnside, llamados *invariantes*, a G -conjuntos estructurados, tales como G -copos o G -complejos simpliciales.

Esta sección es una exposición algebraica auto-contenida de las propiedades de estos invariantes. Las definiciones y métodos originales de Quillen ([8] [9]) son usadas lo largo de la sección, evitando sin embargo la parte topológica de este material. Así por ejemplo no se hará uso de la realización geométrica de un copo y se enfatizará en copos acíclicos en vez de los contraíbles.

En otras palabras, para definir y establecer propiedades de los invariantes ligados a G -copos finitos en el anillo de Burnside, se puede olvidar el grupo fundamental de estos copos y considerar sólo grupos de homología.

1. Homología de copos

Sea (X, \leq) un conjunto parcialmente ordenado (abreviado copo). Como es usual, si x, x' están en X , la notación $x < x'$ significa $x \leq x'$ y $x \neq x'$. La notación $[x, x']_X$ (respectivamente $[x, x']_X,]x, x']_X,]x, x'[_X$) significa el conjunto de elementos $z \in X$ con $x \leq z \leq x'$ (respectivamente $x \leq z < x', x < z \leq x', x < z < x'$). La notación $[x, \cdot]_X$ (respectivamente $]x, \cdot]_X, \cdot, x]_X, \cdot, x[_X$) significa el conjunto de elementos $z \in X$ con $x \leq z$ (respectivamente $x < z, z \leq x, z < x$).

Si $n \in \mathbb{N}$, denotemos $Sd_n(X)$ como el conjunto de cadenas $x_0 < \dots < x_n$ de elementos de X de cardinalidad $n+1$. El complejo de cadenas $C_*(X, \mathbb{Z})$ es el complejo de \mathbb{Z} -módulos definido como sigue: para $n \in \mathbb{N}$, el módulo $C_n(X, \mathbb{Z})$ es el \mathbb{Z} -módulo libre con base $Sd_n(X)$. El diferencial $d_n : C_n(X, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{n-1}(X, \mathbb{Z})$ está dado por

$$d_n(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n).$$

donde $x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n$ denota la cadena $(x_0, \dots, x_n) - \{x_i\}$. Verifiquemos que $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Sea $(x_0, \dots, x_{n+1}) \in C_{n+1}(X, \mathbb{Z})$ entonces

$$d_n \circ d_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}) = d_n \left(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \right) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_n(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{0=j<i}^n (-1)^i (-1)^j (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) + \sum_{i=0}^n \sum_{i \leq j}^n (-1)^i (-1)^j (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_{j+1}, \dots, x_{n+1}).$$

El objetivo de separar la suma en éstas dos es ver que para cada término de la primer suma hay uno en la segunda, de signo contrario y por lo tanto se eliminan. Así que sea

$$(-1)^i (-1)^j (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$$

un sumando de la primera, supongamos que se elimina con un elemento

$$(-1)^k (-1)^l (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_{l+1}, \dots, x_{n+1})$$

entonces $j = k$ y $i = l + 1$, con lo cual $0 \leq k \leq n$ y $0 \leq l \leq n$, por lo tanto este último término pertenece a la segunda parte de la suma y el signo es cada uno respectivamente es $(-1)^{j+i}$ y $(-1)^{j+i-1}$, es decir, efectivamente difieren en un signo y se eliminan. Por lo tanto $d_n \circ d_{n+1} = 0$.

El complejo de cadena *reducido* $\tilde{C}_*(X, \mathbb{Z})$ es el complejo aumentado obtenido de poner $C_{-1}(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, la aplicación aumentación $d_0 : C_0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{-1}(X, \mathbb{Z})$ manda cada $x_0 \in X$ a $1 \in \mathbb{Z}$.

El n -ésimo grupo de homología del complejo $C_*(X, \mathbb{Z})$ (respectivamente $\tilde{C}_*(X, \mathbb{Z})$) es denotado por $H_n(X, \mathbb{Z})$, y llamado el n -ésimo *grupo de homología* (respectivamente *grupo de homología reducido*) de X . Un copo X es *acíclico* si todos sus grupos de homología reducidos son iguales a cero.

Más generalmente, si K es un anillo, el n -ésimo grupo de homología de X con coeficientes en K es el n -ésimo grupo de homología del complejo $K \otimes_{\mathbb{Z}} C_*(X, \mathbb{Z})$. Cuando K es un campo, se tiene $H_n(X, K) = K \otimes H_n(X, \mathbb{Z})$.

La *característica de Euler-Poincaré* $\chi(X)$ de un copo finito X está definido por

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \text{rank}_{\mathbb{Z}} C_n(X, \mathbb{Z}) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n |S d_n(X)|.$$

Similarmente, la *característica de Euler-Poincaré reducida* $\tilde{\chi}(X)$ es definida por

$$\tilde{\chi}(X) = \sum_{n \geq -1} (-1)^n \text{rank}_{\mathbb{Z}} \tilde{C}_n(X, \mathbb{Z}) = \chi(X) - 1.$$

Si K es un campo, entonces consideramos $k_n = \dim_K \text{Ker}(K \otimes_{\mathbb{Z}} d_n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \dim_K H_n(X, K) &= \dim_K K \otimes_{\mathbb{Z}} H_n(X, \mathbb{Z}) = k_n - \dim_K \text{Im}(K \otimes d_{n+1}) \\ &= k_n + k_{n+1} - \dim_K K \otimes_{\mathbb{Z}} C_{n+1}(X, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \dim_K H_n(X, K)$$

pues $\text{rank}_{\mathbb{Z}} C_n(X, \mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{Z}} C_n(X, \mathbb{Z}) - \dim_{\mathbb{Z}} \text{Ker} d_n$ y así sustituyendo en $\chi(X)$ y sumando $k_n - k_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos lo que queremos.

Y de forma similar obtenemos que

$$\tilde{\chi}(X) = \sum_{n \geq -1} (-1)^n \dim_K \tilde{H}_n(X, K)$$

REMARK 3.1. En particular, si X es finito y acíclico, entonces $\tilde{\chi}(X) = 0$, pues es una suma finita que por ser acíclico todos los $\tilde{H}_n(X, K)$ son cero y por lo tanto su dimensión también es nula. Similarmente, si X y Y son copos finitos, y si existe una equivalencia homotópica f_* del complejo $C_*(X, \mathbb{Z})$ al complejo $C_*(Y, \mathbb{Z})$, entonces $\chi(X) = \chi(Y)$, dado que f induce un isomorfismo de grupos de $H_n(X, \mathbb{Z})$ a $H_n(Y, \mathbb{Z})$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Si X y Y son copos, una *aplicación de copos* $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación de X a Y tal que $f(x) \leq f(x')$ si cuando x y x' son elementos de X tales que $x \leq x'$. Si f es una tal aplicación, existe una aplicación inducida $C_*(f, \mathbb{Z}) : C_*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow C_*(Y, \mathbb{Z})$ definida para $n \in \mathbb{N}$ por

$$C_n(f, \mathbb{Z})(x_0, \dots, x_n) = \begin{cases} (f(x_0), \dots, f(x_n)) & \text{si } f(x_0) < \dots < f(x_n), \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Dicha aplicación es de complejo de cadenas, pues veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & C_n(f, \mathbb{Z}) & \\ C_n(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & C_n(Y, \mathbb{Z}) \\ d_n \downarrow & & \downarrow d_n \\ C_{n-1}(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & C_{n-1}(Y, \mathbb{Z}) \\ & C_{n-1}(f, \mathbb{Z}) & \end{array}$$

Sea pues $(x_0, \dots, x_n) \in C_n(X, \mathbb{Z})$, entonces por un lado

$$d_n \circ C_n(f, \mathbb{Z})(x_0, \dots, x_n) = d_n((f(x_0), \dots, f(x_n))) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (f(x_0), \dots, \widehat{f(x_i)}, \dots, f(x_n))$$

si $f(x_0) < \dots < f(x_n)$; y por el otro

$$\begin{aligned} C_{n-1}(f, \mathbb{Z}) \circ d_n(x_0, \dots, x_n) &= C_{n-1}(f, \mathbb{Z}) \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \right) = \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (f(x_0), \dots, \hat{f(x_i)}, \dots, f(x_n)) \end{aligned}$$

si para cada sumando tenemos desigualdades propias, pero esto es cierto si $f(x_0) < \cdots < f(x_n)$. Por lo tanto el diagrama si conmuta.

Tambi3n se define una aplicaci3n reducida $\tilde{C}_*(f, \mathbb{Z}) : \tilde{C}_*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{C}_*(Y, \mathbb{Z})$ por $\tilde{C}_n(f, \mathbb{Z}) = C_n(f, \mathbb{Z})$ si $n \geq 0$, y $\tilde{C}_{-1}(f, \mathbb{Z}) = \text{Id}_{\mathbb{Z}}$.

Si f y g son aplicaciones de copos de X a Y , la notaci3n $f \leq g$ significa que $f(x) \leq g(x)$ para cualquier $x \in X$. Las aplicaciones f y g se dicen *comparables* si $f \leq g$ o $g \leq f$.

LEMA 3.2. *Sean f y g aplicaciones de copos de X a Y . Si f y g son comparables, entonces las aplicaciones de complejos $C_*(f, \mathbb{Z})$ y $C_*(g, \mathbb{Z})$ son homot3picas asi como $\tilde{C}_*(f, \mathbb{Z})$ y $\tilde{C}_*(g, \mathbb{Z})$.*

DEMOSTRACI3N. Dado que f y g son comparables, sin p3rdida de generalidad supongamos $f \leq g$. Consideremos ahora la aplicaci3n $h_n : C_n(X, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{n+1}(Y, \mathbb{Z})$ definida para $n \in \mathbb{N}$ por

$$h_n(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (f(x_0), \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, g(x_n)).$$

donde la sucesi3n $(f(x_0), \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, g(x_n))$ es remplazada por 0 si no es estrictamente creciente. Verifiquemos ahora que

$$d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = C_n(g, \mathbb{Z}) - C_n(f, \mathbb{Z})$$

para esto aplicamos el lado izquierdo a un elemento b3sico (x_0, \dots, x_n) .

$$\begin{aligned} (d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n)(x_0, \dots, x_n) &= (d_{n+1} \circ h_n)(x_0, \dots, x_n) + (h_{n-1} \circ d_n)(x_0, \dots, x_n) = \\ &= d_{n+1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i (f(x_0), \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, g(x_n)) \right) + h_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^{-1} (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \right) = \\ &= d_{n+1} \left((-1)^0 (f(x_0), g(x_0), \dots, g(x_n)) + \sum_{i=1}^n (-1)^i (f(x_0), \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, g(x_n)) \right) \\ &\quad + h_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^{-1} (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \right). \end{aligned}$$

Trataremos de desarrollar cada suma en partes de forma que sea claro como se eliminan los t3rminos.

$$(1.1) \quad = (-1)^0 (-1)^0 (\widehat{f}(x_0), g(x_0), \dots, g(x_n)) + (-1)^0 \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} (f(x_0), g(x_0), \dots, \widehat{g}(x_j), \dots, g(x_n))$$

$$(1.2) \quad + \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{0 \leq j \leq i} (-1)^j (f(x_0), \dots, \widehat{f}(x_j), \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, g(x_n))$$

$$(1.3) \quad + \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{i < j}^{n+1} (-1)^j (f(x_0), \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, \widehat{g}(x_{j-1}), \dots, g(x_n))$$

$$(1.4) \quad + \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{i \leq j} (-1)^j (f(x_0), \dots, \widehat{x}_{i-1}, \dots, f(x_j), g(x_j), \dots, g(x_n))$$

$$(1.5) \quad + \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{j < i} (-1)^j (f(x_0), \dots, f(x_j), g(x_j), \dots, \widehat{x}_i, \dots, g(x_n))$$

Notemos que los primeros tres renglones son los del desarrollo de $d_{n+1} \circ h_n$ y los últimos dos son del desarrollo de $h_{n-1} \circ d_n$, así tendremos entonces que en los tres primeros hay cadenas cuyos subíndices son todos distintos, por ejemplo,

$$f(x_0), \dots, f(x_{i-1}), \widehat{f}(x_i), g(x_i).$$

Mientras que en los dos últimos todos los sumandos son cadenas con subíndices repetidos, por ejemplo,

$$(f(x_0), \dots, f(x_j), g(x_j), \dots, \widehat{x}_i, \dots, g(x_n))$$

La forma en que se eliminan es como sigue: en la suma 1.1 el término que es extremo inferior, es decir, para $j = 0$ y el término para $i = j = 1$ de la suma 1.2 coinciden, pero con signos $(-1)^{0+1} = -1$ y $(-1)^1(-1)^1 = 1$ respectivamente, por lo tanto se eliminan. Los otros términos de la suma 1.1 son aquellos que tienen al comienzo $f(x_0)$ y $g(x_0)$ y se van eliminando los $g(x_j)$ para $j \geq 1$, consideremos ahora en la suma 1.5 la siguiente parte, $j = 0$, entonces $(-1)^0 \sum_{i=1}^n (f(x_0), g(x_0), \dots, \widehat{x}_i, \dots, g(x_n))$ tiene exactamente los mismos términos pero con signos con respecto a su subíndice en la primera $(-1)^{j+1}$ y en la otra $(-1)^j$, es decir se anulan. Tomemos ahora en la suma 1.2 para $2 \leq j = i$ pues $j = 0, 1$ ya los contemplamos en la suma 1.1, se tiene

$$\sum_{i=2}^n (-1)^i (-1)^i (f(x_0), \dots, \widehat{f}(x_i), g(x_i), \dots, g(x_n)) = \sum_{i=2}^n (f(x_0), \dots, \widehat{f}(x_i), g(x_i), \dots, g(x_n))$$

y en la suma 1.3, tomamos $j = i + 1 < n$ con lo cual

$$\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (-1)^{i+1} (f(x_0), \dots, f(x_i), \widehat{g}(x_{i+1-1}), \dots, g(x_n)) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1) (f(x_0), \dots, f(x_i), \widehat{g}(x_i), \dots, g(x_n))$$

y claramente ya que difieren en un signo se eliminan. Veamos ahora que pasa con el resto de los sumandos de 1.2, es decir,

$$\sum_{\substack{i=1 \\ 0 \leq j < i}} (-1)^i (-1)^j (f(x_0), \dots, \widehat{f}(x_j), \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, g(x_n))$$

Podemos ver que ésta y la suma 1.4 tendrán los mismos sumandos si $\widehat{f}(x_j)$ y x_{i-1} ocupan la misma posición, es decir, $j = i - 1$, por lo tanto al sustituir este valor en ambas sumas, los signos quedan de la siguiente manera $(-1)^{i+i-1} = -1$ para la primera y $(-1)^{i-1+i-1} = 1$ para la segunda, lo que hace que difieran en un signo y se eliminen. Análogamente para lo que resta de la suma 1.3 y la suma 1.5, se tiene que $i = j - 1$ y se anulan las sumas. Observemos que el caso extremo en la suma 1.3, $i = n$ y $j = n + 1$, no estaba dentro de las sumas que se eliminaron. Finalmente tenemos entonces que sólo sobreviven los términos $(g(x_0), \dots, g(x_n)) - (f(x_0), \dots, f(x_n))$ que efectivamente es $(C_n(g, \mathbb{Z}) - C_n(f, \mathbb{Z}))(x_0, \dots, x_n)$ y por lo tanto $C_n(g, \mathbb{Z})$ y $C_n(f, \mathbb{Z})$ son homotópicas. Para los complejos reducidos sólo faltaría considerar h_{-1} la aplicación cero. Con lo cual tendremos

$$\begin{aligned} (d_1 \circ h_0 + h_{-1} \circ d_0)(x_0) &= (d_1 \circ h_0)(x_0) + (h_{-1} \circ d_0)(x_0) = d_1(f(x_0), g(x_0)) + h_{-1}(1) \\ &= g(x_0) - f(x_0) + 0 = C_0(g, \mathbb{Z})(x_0) - C_0(f, \mathbb{Z})(x_0) \end{aligned}$$

Y tendremos que las aplicaciones reducidas son también homotópicas. \square

COROLARIO 3.3. (*Quillen*).

1. Sean X y Y copos, y $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ aplicaciones de copos. Si $g \circ f$ es comparable a Id_X y $f \circ g$ es comparable a Id_Y , entonces las aplicaciones de complejos $\tilde{C}_*(f, \mathbb{Z})$ y $\tilde{C}_*(g, \mathbb{Z})$ son equivalencias homotópicas inversas mutuamente entre $\tilde{C}_*(X, \mathbb{Z})$ y $\tilde{C}_*(Y, \mathbb{Z})$.
2. Si el copo X tiene un elemento máximo, o mínimo, la cadena de complejos $\tilde{C}_*(X, \mathbb{Z})$ es contraíble.

DEMOSTRACIÓN.

1. Por el lema anterior tenemos que $\tilde{C}_*(g \circ f, \mathbb{Z})$ y $\tilde{C}_*(\text{Id}_X, \mathbb{Z})$ son homotópicas, lo mismo que $\tilde{C}_*(f \circ g, \mathbb{Z})$ y $\tilde{C}_*(\text{Id}_Y, \mathbb{Z})$ pero notemos que

$$\tilde{C}_n(\text{Id}_X, \mathbb{Z})(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_n) = \text{Id}_{\tilde{C}_n(X, \mathbb{Z})}(x_0, \dots, x_n)$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{C}_n(g \circ f, \mathbb{Z})(x_0, \dots, x_n) &= ((g \circ f)(x_0), \dots, (g \circ f)(x_n)) = \tilde{C}_n(g, \mathbb{Z})(f(x_0), \dots, f(x_n)) \\ &= \tilde{C}_n(g, \mathbb{Z}) \circ \tilde{C}_n(f, \mathbb{Z})(x_0, \dots, x_n) \end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, siempre que $((g \circ f)(x_0), \dots, (g \circ f)(x_n))$ sea estrictamente creciente y 0 en caso contrario. De forma análoga $\tilde{C}_n(\text{Id}_Y, \mathbb{Z}) = \text{Id}_{\tilde{C}_n(Y, \mathbb{Z})}$ y $\tilde{C}_n(f \circ g, \mathbb{Z}) = \tilde{C}_n(f, \mathbb{Z}) \circ \tilde{C}_n(g, \mathbb{Z})$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Y por lo tanto, $\tilde{C}_n(f, \mathbb{Z})$ y $\tilde{C}_n(g, \mathbb{Z})$ son equivalentes homotópicamente e inversa una de la otra.

2. Llamemos m al elemento máximo (o mínimo) de X , y denote \bullet un copo de cardinalidad uno. Considerando la aplicación única $f : X \rightarrow \bullet$ y la aplicación $g : \bullet \rightarrow X$ que manda el elemento único \bullet a m . Claramente son de copos ya que para $x \leq x'$ elementos de X , $f(x) = m \leq m = f(x')$ y ya que \bullet consta de un solo elemento g también lo es. Ahora bien, $(f \circ g)(\bullet) = f(g(\bullet)) = f(m) = \bullet = \text{Id}_\bullet(\bullet)$ por lo tanto $f \circ g$ es comparable a Id_\bullet ; ahora dado $x \in X$ se tiene que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\bullet) = m$, por lo tanto $\text{Id}_X \leq (g \circ f)$, es decir, son comparables. Aplicando 1. a éstas, tenemos que hay una equivalencia homotópica entre $C_*(X, \mathbb{Z})$ y $C_*(\bullet, \mathbb{Z})$ y dado que este último es contraíble se sigue el resultado.



2. Invariantes ligados a G -copos

La siguiente definición de los invariantes de Lefschetz se debe a Thénevaz ([12]):

DEFINICIÓN 3.4. Sea G un grupo finito. Un G -copo X es un G -conjunto equipado con una relación de orden \leq compatible con la G -acción, esto es: si $x \leq x'$ son elementos de X y si $g \in G$, entonces $gx \leq gx'$.

Si X y Y son G -copos, una *aplicación de G -copos* $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación tal que $f(gx) = gf(x)$ si $g \in G$ y $x \in X$ y tal que $f(x) \leq f(x')$ en Y , siempre que $x \leq x'$ en X . Si $y \in Y$, entonces

$$f^y = \{x \in X | f(x) \leq y\}, \quad f_y = \{x \in X | f(x) \geq y\}.$$

Estos conjuntos son sub- G_y -copos de la restricción de X al estabilizador G_y de y en G

Si $x \leq y$ son elementos de X , el conjunto $]x, y[_X$ es un $G_{x,y}$ -copo, donde $G_{x,y}$ es el estabilizador del par (x, y) . Similarmente, los conjuntos $]x, \cdot[_X$ y $\cdot, x[_X$ son G_x -copos.

Si X es un G -copo, entonces para $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $Sd_n(X)$ es un G -conjunto. Cuando X es finito, el *invariante de Lefschetz* Λ_X de X es el elemento de $B(G)$ definido por

$$\Lambda_X = \sum_{n \geq 0} (-1)^n Sd_n(X).$$

El *invariante de Lefschetz reducido* $\tilde{\Lambda}_X$ es el elemento de $B(G)$ definido por

$$\tilde{\Lambda}_X = \Lambda_X - G/G.$$

Si $x < y$ son elementos de X , el *invariante de Möbius* $\mu_X(x, y)$ está definida como el invariante de Lefschetz reducido del copo $]x, y[_X$. Este es un elemento del anillo de Burnside $B(G_{x,y})$. Por convención, el invariante de Möbius $\mu_X(x, x)$ es igual a G_x/G_x

Se sigue de estas definiciones que $|\Lambda_X|$ es igual a la característica de Euler- Poincaré de X . Se puede decir más:

LEMA 3.5. *Sea G un grupo finito*

1. *Si X es un G -copo finito, entonces para cualquier subgrupo H de G*

$$(\Lambda_X)^H = \Lambda_{X^H}$$

en $B(N_G(H)/(H))$. En particular $|(\Lambda_X)^H| = \chi(X^H)$.

2. *Si X y Y son G -copos finitos, entonces $\Lambda_X = \Lambda_Y$ en $B(G)$ si y sólo si $\chi(X^H) = \chi(Y^H)$ para cualquier subgrupo H de G .*

DEMOSTRACIÓN.

1. Tenemos que $Sd_n(X)^H = Sd_n(X^H)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ pues dado una cadena $(x_0, \dots, x_n) \in Sd_n(X)^H$ tenemos que para todo $h \in H$, $h(x_0, \dots, x_n) = (hx_0, \dots, hx_n) = (x_0, \dots, x_n)$ es decir, $hx_i = x_i \forall i = 0, \dots, n$, por lo tanto $x_i \in X^H$ y así $Sd_n(X)^H = Sd_n(X^H)$. Con lo cual

$$(\Lambda_X)^H = \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n Sd_n(X) \right)^H = \sum_{n \geq 0} (-1)^n Sd_n(X)^H = \sum_{n \geq 0} (-1)^n Sd_n(X^H) = \Lambda_{X^H}$$

En particular cuando tomamos cardinalidad, por la anotación anterior al lema tenemos que $|(\Lambda_X)^H| = |(\Lambda_{X^H})| = \chi(X^H)$

2. Recordando el teorema 1.4 de Burnside y aplicado a elementos de $B(G)$ tenemos que $X = Y$ en $B(G)$ si y sólo si $|X^H| = |Y^H|$ para cualquier $H \leq G$. Así pues tendremos que dado que Λ_X y Λ_Y están en $B(G)$ entonces $\Lambda_X = \Lambda_Y$ si y sólo si $|(\Lambda_X)^H| = |(\Lambda_Y)^H|$ para cualquier H subgrupo de G , pero por 1. tenemos que $\chi(X^H) = |(\Lambda_X)^H| = |(\Lambda_Y)^H| = \chi(Y^H)$

□

DEFINICIÓN 3.6. Un G -copo X es llamado G -acíclico si el conjunto X^H es acíclico para cualquier H subgrupo de G

Lo siguiente es una consecuencia directa de esta definición:

LEMA 3.7. *Sea G un grupo finito, y X un G -copo finito. Si X es G -acíclico entonces $\tilde{\Lambda}_X = 0$ en $B(G)$.*

DEMOSTRACIÓN. Si X es G -acíclico por definición X^H es acíclico y así $\tilde{H}_n(X^H, K) = 0$ y entonces $\dim_K \tilde{H}_n(X^H, K) = 0$ y así $\tilde{\chi}(X^H) = \sum_{n \geq -1} \dim_K \tilde{H}_n(X^H, K) = 0$ pero por 1. del lema anterior y la

nota anterior a éste tenemos que $\chi(X^H) = |\Lambda_{X^H}| = |(\Lambda_X)^H|$ pero además

$$0 = \tilde{\chi}(X^H) = \chi(X^H) - 1 = |(\Lambda_X)^H| - 1 = |(\Lambda_X)^H - (G/G)^H| = |(\Lambda_X - G/G)^H| = |(\tilde{\Lambda}_X)^H|$$

para cualquier H subgrupo de G , entonces $\tilde{\Lambda}_X = 0$. \square

PROPOSICIÓN 3.8. *Sea G un grupo finito*

1. *Sean X y Y G -copos finitos, y $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ aplicaciones de G -copos. Si $g \circ f$ es comparable a Id_X y si $f \circ g$ es comparable a Id_Y , entonces $\tilde{\Lambda}_X = \tilde{\Lambda}_Y$ en $B(G)$.*
2. *Si un G -copo X tiene un elemento máximo, o elemento mínimo, entonces es G -acíclico.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Considerando cualquier subgrupo H de G y las restricciones de f y g a los copos X^H y Y^H se satisfacen las hipótesis del corolario 3.3 y así $\tilde{C}_*(f^H, \mathbb{Z})$ y $\tilde{C}_*(g^H, \mathbb{Z})$ son una equivalencia homotópica inversa una de la otra lo mismo que $C_*(f^H, \mathbb{Z})$ y $C_*(g^H, \mathbb{Z})$ y así por la nota 3.1 tenemos que $\chi(X^H) = \chi(Y^H)$ y por el lema 3.5 esto ocurre si y sólo si $\Lambda_X = \Lambda_Y$. Restando a ambos lados de la igualdad G/G se sigue el resultado.
2. Sea m el elemento máximo, o mínimo de X , veamos que también lo es para X^H . Dado $h \in H$ y $x \in X^H$ tenemos que $x \leq m$ y entonces $h^{-1}x = x \leq h^{-1}m \leq m$ pero entonces $m \leq hm \leq m$ por lo tanto $hm = m$ es decir, $m \in X^H$ y es máximo. Entonces aplicando el corolario 3.3 parte 2. tenemos que $\tilde{C}_*(X^H, \mathbb{Z})$ es contraíble y entonces X^H es acíclico para cualquier subgrupo H de G por lo tanto X es G -acíclico

\square

EJEMPLO 3.9. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación de G -copos finitos. Denotemos por $X *_f Y$ el G -copo definido como sigue: el G -conjunto señalado es la unión disjunta $X \sqcup Y$ de X y Y . El orden está definida para z y z' en $X *_f Y$ por

$$z \leq z' \Leftrightarrow \begin{cases} z, z' \in X & \text{y } z \leq z' \text{ en } X, \\ z, z' \in Y & \text{y } z \leq z' \text{ en } Y, \\ z \in X, z' \in Y & \text{y } f(z) \leq z' \text{ en } Y \end{cases}$$

Denote \tilde{f} la inyección de Y a $X *_f Y$ y g la aplicación de $X *_f Y$ a Y definida por

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in X, \\ z & \text{si } z \in Y. \end{cases}$$

\tilde{f} y g son de G -copos pues, ya que \tilde{f} es la inyección de Y a $X *_f Y$, si $z \leq z'$ en Y entonces $z \leq z'$ en $X *_f Y$. Ahora bien, dados $z \leq z'$ en $X *_f Y$, tenemos que $g(z) \leq g(z')$ pues si $z, z' \in X$ $g(z) = f(z) \leq f(z') = g(z')$ por ser f de G -copos; si $z, z' \in Y$ $g(z) = z \leq z' = g(z')$; finalmente si $x \in X$ y $z' \in Y$ $g(z) = f(z) \leq z' = g(z')$, por lo tanto g es de copos. Resta ver que es de G -conjuntos. Sea $g \in G$, si $z \leq z' \in X$ o $z \leq z' \in Y$ entonces $gz \leq gz'$ por ser X y Y G -copos; si $z \leq z'$ con $z \in X$ y $z' \in Y$ entonces se tiene $gz \leq gz'$ si y sólo si $f(gz) = gf(z) \leq gz'$ en Y , lo cual es cierto. Notemos que dado $y \in Y$, $(g \circ \tilde{f})(y) = g(y) = y$ entonces $g \circ \tilde{f} = \text{Id}_Y$. Ahora considerando $z \in X *_f Y$, $(\tilde{f} \circ g)(z) = \tilde{f}(f(z)) = f(z)$ si $z \in X$ y $(\tilde{f} \circ g)(z) = z$ si $z \in Y$ y considerando que $f(z) \leq f(z)$ entonces $z \leq f(z)$ y por lo tanto, $\text{Id}_{X *_f Y} \leq f \circ g$, es decir son comparables y por la proposición 3.8, $\tilde{\Lambda}_{X *_f Y} = \tilde{\Lambda}_Y$ lo cual implica que $\Lambda_{X *_f Y} = \Lambda_Y$

Una consecuencia es la siguiente relación entre $\tilde{\Lambda}_X$ y $\tilde{\Lambda}_Y$:

PROPOSICIÓN 3.10. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación de G -copos. Entonces en $B(G)$*

$$\tilde{\Lambda}_Y = \tilde{\Lambda}_X + \sum_{y \in [G \setminus Y]} \text{Ind}_{G_y}^G(\tilde{\Lambda}_{f^y} \tilde{\Lambda}_{[y, \cdot]_Y}),$$

$$\tilde{\Lambda}_Y = \tilde{\Lambda}_X + \sum_{y \in [G \setminus Y]} \text{Ind}_{G_y}^G(\tilde{\Lambda}_{f_y} \tilde{\Lambda}_{[y, \cdot]_Y}),$$

En particular, si $\tilde{\Lambda}_{f^y} = 0$ para todo $y \in Y$ (por ejemplo si f^y es G_y -acíclico), entonces $\tilde{\Lambda}_X = \tilde{\Lambda}_Y$ en $B(G)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $n \in \mathbb{N}$. El conjunto $Sd_n(X *_f Y)$ es la unión disjunta de $Sd_n(X)$ y el conjunto de sucesiones $z_0 < \dots < z_n$ para los cuales $z_n \in Y$. Una tal sucesión tiene un elemento mínimo $y = z_i$ en Y , entonces se puede escribir como

$$x_0 < \dots < x_{i-1} < y < \dots < y_{n-i-1},$$

donde $x_0 < \dots < x_{i-1}$ está en $Sd_{i-1}(f^y)$ (para $i = 0$, la convención es que $Sd_{-1}(f^Y)$ es un conjunto de cardinalidad uno), y $y_0 < \dots < y_{n-i-1}$ está en $Sd_{n-i-1}([y, \cdot]_Y)$ (para $i = n$, la convención es que $Sd_{-1}([y, \cdot]_Y)$ tiene cardinalidad uno).

Sin perder de vista la acción de G , ésta nos lleva al siguiente isomorfismo de G -conjuntos

$$Sd_n(X *_f Y) = Sd_n(X) \sqcup \bigsqcup_{y \in [G \setminus Y]} \text{Ind}_{G_y}^G \left(\bigsqcup_{i=0}^n (Sd_{i-1}(f^y) \times Sd_{n-i-1}([y, \cdot]_Y)) \right)$$

Dado por $(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_n)$ si $(x_0, \dots, x_n) \in Sd_n(X)$ y $(x_0, \dots, x_{i-1}, y, y_0, \dots, y_{n-i-1}) \mapsto [(x_0, \dots, x_{i-1}), (y_0, \dots, y_{n-i-1})]$ para $y \in [G \setminus Y]$.

Tomando sumas alternadas en ambos lados y del ejemplo anterior tenemos

$$\begin{aligned}
\Lambda_Y &= \Lambda_{X *_f Y} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n S d_n(X *_f Y) = \\
&= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(S d_n(X) \sqcup \bigsqcup_{y \in [G \setminus Y]} \text{Ind}_{G_y}^G \left(\bigsqcup_{i=0}^n (S d_{i-1}(f^y) \times S d_{n-i-1}(\cdot|_y, \cdot|_Y)) \right) \right) \\
&= \sum_{n \geq 0} (-1)^n S d_n(X) + \sum_{y \in [G \setminus Y]} \text{Ind}_{G_y}^G \left(\sum_{i=0}^n \sum_{n \geq 0} (-1)^n (S d_{i-1}(f^y) S d_{n-i-1}(\cdot|_y, \cdot|_Y)) \right) \\
&= \Lambda_X + \sum_{y \in [G \setminus Y]} \text{Ind}_{G_y}^G \left((-G_y/G_y + \Lambda_{f^y}) (-G_y/G_y + \Lambda_{\cdot|_y, \cdot|_Y}) \right) = \Lambda_X + \sum_{y \in [G \setminus Y]} \text{Ind}_{G_y}^G \left(\tilde{\Lambda}_{f^y} \tilde{\Lambda}_{\cdot|_y, \cdot|_Y} \right)
\end{aligned}$$

Sumando a ambos lados $-G/G$ se tiene

$$\tilde{\Lambda}_Y = \tilde{\Lambda}_X + \sum_{y \in [G \setminus Y]} \text{Ind}_{G_y}^G \left(\tilde{\Lambda}_{f^y} \tilde{\Lambda}_{\cdot|_y, \cdot|_Y} \right)$$

Para la segunda igualdad, consideremos la aplicación $f : X^{\text{op}} \rightarrow Y^{\text{op}}$ entre los copos opuestos de X y Y , pues sabemos que $x \leq x'$ en X si y sólo si $x' \leq x$ en X^{op} y entonces existe una biyección entre $S d_n(X)$ y $S d_n(X^{\text{op}})$; una cadena $(x_0, \dots, x_n) \in S d_n(X)$ se corresponde con $(x_n, \dots, x_0) \in S d_n(X^{\text{op}})$, es decir, en $B(G) S d_n(X) = S d_n(X^{\text{op}})$ y así

$$\Lambda_X = \sum_{n \geq 0} (-1)^n S d_n(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n S d_n(X^{\text{op}}) = \Lambda_{X^{\text{op}}}$$

Y por lo tanto, $\tilde{\Lambda}_X = \tilde{\Lambda}_{X^{\text{op}}}$

Finalmente

$$\tilde{\Lambda}_Y = \tilde{\Lambda}_{Y^{\text{op}}} = \tilde{\Lambda}_{X^{\text{op}}} + \sum_{y \in [G \setminus Y]} \text{Ind}_{G_y}^G \left(\tilde{\Lambda}_{f^y} \tilde{\Lambda}_{\cdot|_y, \cdot|_Y} \right) = \tilde{\Lambda}_X + \sum_{y \in [G \setminus Y]} \text{Ind}_{G_y}^G \left(\tilde{\Lambda}_{f^y} \tilde{\Lambda}_{\cdot|_y, \cdot|_Y} \right)$$

□

COROLARIO 3.11. *Sea X un G -copo finito*

1. *El invariante reducido de Lefschetz de X es igual a*

$$\tilde{\Lambda}_X = -G/G - \sum_{x \in [G \setminus X]} \text{Ind}_{G_x}^G \tilde{\Lambda}_{\cdot|_x, \cdot|_X}$$

2. *Si $x \leq y$ en X , entonces*

$$\sum_{z \in [G_{x,y} \setminus \{x,y\}]} \text{Ind}_{G_{x,y,z}}^{G_{x,y}} \text{Res}_{G_{x,y,z}}^{G_{y,z}} \mu_X(z, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < y, \\ G_x/G_x & \text{si } x = y, \end{cases}$$

3. Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación de G -copos finitos, entonces

$$\Lambda_X = - \sum_{y \in [G \setminus Y]} \text{Ind}_{G_y}^G \Lambda_{f^y} \tilde{\Lambda}_{[y, \cdot]_Y} = - \sum_{y \in [G \setminus Y]} \text{Ind}_{G_y}^G \Lambda_{f^y} \tilde{\Lambda}_{[y, y]_Y}.$$

El inciso 2. es la razón para el nombre del invariante de Möbius

DEMOSTRACIÓN.

1. Consideremos la inclusión $i : \emptyset \rightarrow X$. Tenemos así que $\Lambda_\emptyset = \sum_{n \geq 0} (-1)^n S d_n(\emptyset) = 0$ y por lo tanto $\tilde{\Lambda}_\emptyset = -G/G$. Notemos que entonces $i^x = \{x' \in \emptyset \mid x' < x\} = \emptyset$. Aplicando ahora la proposición 3.10 tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_X &= \tilde{\Lambda}_X + \sum_{x \in [G \setminus X]} \text{Ind}_{G_x}^G (\tilde{\Lambda}_{i^x} \tilde{\Lambda}_{[x, \cdot]_X}) = -G/G + \sum_{x \in [G \setminus X]} \text{Ind}_{G_x}^G (-G/G \tilde{\Lambda}_{[x, \cdot]_X}) = \\ &= -G/G - \sum_{x \in [G \setminus X]} \text{Ind}_{G_x}^G \tilde{\Lambda}_{[x, \cdot]_X} \end{aligned}$$

2. Consideremos $Y = [x, y]_X$ y aplicando 1. tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{[x, y]_X} &= -G_{x, y}/G_{x, y} - \sum_{z \in [G \setminus [x, y]_X]} \text{Ind}_{G_{x, y, z}}^{G_{x, y}} \text{Res}_{G_{x, y, z}}^{G_{y, z}} \tilde{\Lambda}_{[z, \cdot]_Y} = \\ &= -G_{x, y}/G_{x, y} - \sum_{z \in [G \setminus [x, y]_X]} \text{Ind}_{G_{x, y, z}}^{G_{x, y}} \text{Res}_{G_{x, y, z}}^{G_{y, z}} \tilde{\Lambda}_{[z, y]_Y} = \\ &= -G_{x, y}/G_{x, y} - \sum_{z \in [G_{x, y} \setminus [x, y]_X]} \text{Ind}_{G_{x, y, z}}^{G_{x, y}} \text{Res}_{G_{x, y, z}}^{G_{y, z}} \mu_X(z, y) \end{aligned}$$

Por otro lado considerando la igualdad que queremos ver, si $x = y$ tenemos que $z = x = y$ y nuestra suma es en realidad sólo un término y además $G_{x, y} = G_{x, y, z} = G_{y, z} = G_x$, entonces

$$\text{Ind}_{G_x}^{G_x} \text{Res}_{G_x}^{G_x} \mu_X(x, x) = \text{Ind}_{G_x}^{G_x} \text{Res}_{G_x}^{G_x} G_x/G_x = G_x/G_x$$

Si consideramos ahora $x < y$ entonces

$$\begin{aligned} &\sum_{z \in [G_{x, y} \setminus [x, y]_X]} \text{Ind}_{G_{x, y, z}}^{G_{x, y}} \text{Res}_{G_{x, y, z}}^{G_{y, z}} \mu_X(z, y) = \\ &= \sum_{z \in [G_{x, y} \setminus [x, y]_X]} \text{Ind}_{G_{x, y, z}}^{G_{x, y}} \text{Res}_{G_{x, y, z}}^{G_{y, z}} \mu_X(z, y) + \text{Ind}_{G_x}^{G_x} \text{Res}_{G_x}^{G_x} \mu_X(x, x) = \tilde{\Lambda}_{[x, y]_X} \end{aligned}$$

pero Y tiene a x como elemento mínimo entonces $\tilde{\Lambda}_{[x, y]_X} = 0$ y se sigue nuestro resultado.

3. De la proposición 3.10 y de saber que $\tilde{\Lambda}_X = \Lambda_X - G/G$ tenemos que a

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_Y &= \tilde{\Lambda}_X + \sum_{y \in [G \setminus Y]} \text{Ind}_{G_y}^G \left((\Lambda_{f^y} - G_y/G_y) \tilde{\Lambda}_{[y, \cdot]_Y} \right) \\ &= \Lambda_X - G/G + \sum_{y \in [G \setminus Y]} \text{Ind}_{G_y}^G (\Lambda_{f^y} \tilde{\Lambda}_{[y, \cdot]_Y}) - \sum_{y \in [G \setminus Y]} \text{Ind}_{G_y}^G (\tilde{\Lambda}_{[y, \cdot]_Y})\end{aligned}$$

pero de 1. tenemos que $\tilde{\Lambda}_Y = -G/G - \sum_{y \in [G \setminus Y]} \text{Ind}_{G_y}^G \tilde{\Lambda}_{[y, \cdot]_Y}$, sustituyendo esto en el desarrollo anterior

$$\tilde{\Lambda}_Y = \Lambda_X + \sum_{y \in [G \setminus Y]} \text{Ind}_{G_y}^G \Lambda_{f^y} \tilde{\Lambda}_{[y, \cdot]_Y} + \tilde{\Lambda}_Y$$

y entonces se tiene $\Lambda_X + \sum_{y \in [G \setminus Y]} \text{Ind}_{G_y}^G \Lambda_{f^y} \tilde{\Lambda}_{[y, \cdot]_Y} = 0$. Pasando para el otro lado la suma se tiene el resultado. La segunda igualdad de se obtiene al considerar la segunda igualdad de la proposición 3.10 y hacer el mismo proceso.



COROLARIO 3.12. *Sea G un grupo finito y X un copo finito. Denotemos por $X_{\#}$ (respectivamente $X^{\#}$) el conjunto de elementos $x \in X$ tal que $\tilde{\Lambda}_{[1, x]_X} \neq 0$ (respectivamente $\tilde{\Lambda}_{[1, x]_X \neq 0}$) en $B(G)$. Si Y es un sub- G -copo de X tal que $X_{\#} \subseteq Y \subseteq X$ (respectivamente $X^{\#} \subseteq Y \subseteq X$), entonces $\tilde{\Lambda}_Y = \tilde{\Lambda}_X$ en $B(G)$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que podemos considerar el copo opuesto, es suficiente probar la afirmación para $X_{\#}$, y esto lo haremos por inducción en la cardinalidad de X ; si $X = \emptyset$, entonces $X = X_{\#} = Y$ y no hay nada que probar. Para el paso inductivo consideremos la aplicación inclusión $i : X_{\#} \rightarrow Y$. Claramente ésta es una aplicación de G -copos. Más aún, si $y \in X_{\#}$, entonces $i^y = \{x \in X_{\#} \mid x \leq y\}$ tiene un elemento máximo y , por lo tanto es G_y -acíclico y $\tilde{\Lambda}_{i^y} = 0$ en $B(G)$. Si ahora $y \notin X_{\#}$, entonces $\tilde{\Lambda}_{[1, y]_Y} = 0$ en $B(G_y)$ por definición de $X_{\#}$. Más aún en este caso

$$\begin{aligned}i^y &= [1, y]_X \cap X_{\#} = \{z \in X \mid z < y, \tilde{\Lambda}_{[1, z]_X} \neq 0 \text{ en } B(G)\} \\ &\supseteq \{z \in X \mid z < y, \tilde{\Lambda}_{[1, z]_X} \neq 0 \text{ en } B(G_x \cap G_y)\} \\ &= \{z \in X \mid z < y, \text{Res}_{G_{y,z}}^{G_z} \tilde{\Lambda}_{[1, z]_X} \neq 0 \text{ en } B(G_z \cap G_y)\} = ([1, y]_X)_{\#}.\end{aligned}$$

La última contención se da pues si $z \in X$ es tal que $\text{Res}_{G_{y,z}}^{G_z} \tilde{\Lambda}_{[1, z]_X} \neq 0$ en $B(G_{y,z})$ entonces $\tilde{\Lambda}_{[1, z]_X} \neq 0$ en $B(G_z)$. Tendremos así que existe una inclusión de G_y -copos

$$([1, y]_X)_{\#} \subseteq i^y \subseteq [1, y]_X$$

pero ya que $y \in X$ y $y \notin [1, y]_X$, entonces $[1, y]_X < |X|$ y podemos aplicar nuestra hipótesis de inducción y se sigue que $\tilde{\Lambda}_{i^y} = \tilde{\Lambda}_{[1, y]_X} = 0$. De esto y lo anterior tenemos que $\tilde{\Lambda}_{i^y} = 0$ para todo $y \in Y$ y por la proposición 3.10 tenemos que $\tilde{\Lambda}_X = \tilde{\Lambda}_Y$

3. Invariantes de Steinberg

DEFINICIÓN 3.13. Sea G un grupo finito y p un número primo. El *invariante de Steinberg* $St_p(G)$ de G en p es el invariante de Lefschetz reducido del copo $s_p(G)$ de p -subgrupos no triviales de G , en el cual G actúa por conjugación.

La razón para esta terminología es que si G es un grupo de Chevalley simple finito en característica p , entonces el carácter de permutación (virtual) asociado a $St_p(G)$ es igual salvo un signo al carácter de Steinberg de G

PROPOSICIÓN 3.14. Sea G un grupo finito y p un número primo. Entonces $St_p(G) = 0$ en $B(G)$ si y sólo si G tiene un p -subgrupo normal no trivial.

DEMOSTRACIÓN. Si $St_p(G) = 0$ dado que $St_p(G) = \tilde{\Lambda}_{s_p(G)}$ entonces $|\tilde{\Lambda}_{s_p(G)}^G| = 0 = \tilde{\chi}(s_p(G)^G) = 0$. Y ya que $\tilde{\Lambda}_\emptyset = -G/G$, entonces $s_p(G)^G$ es no vacío y por lo tanto G tiene un p -subgrupo normal no trivial.

Inversamente, supongamos que $R \neq \mathbb{I}$ es un p -subgrupo normal de G no trivial. Sea f la aplicación de $s_p(G)$ a $[R, \cdot]_{s_p(G)}$ definida por $f(Q) = Q.R$, y sea g la inclusión de $[R, \cdot]_{s_p(G)}$ a $s_p(G)$. Tenemos que dados $P \leq Q \in s_p(G)$, $f(P) = P.R \leq Q.R = f(Q)$; y dado $h \in G$ ya que la acción es la conjugación y ésta preserva contensiones, entonces ${}^h P \leq {}^h Q$. Por lo tanto f es de G -copos y claramente g también lo es. Además dado $Q \in s_p(G)$, $(g \circ f)(Q) = g(Q.R) = Q.R \geq Q$, por lo tanto $Id_{s_p(G)} \leq g \circ f$. Ahora bien dado $Q \in [R, \cdot]_{s_p(G)}$, $(f \circ g)(Q) = f(Q) = Q.R = Q$, por lo tanto $Id_{[R, \cdot]_{s_p(G)}} = f \circ g$, es decir, son comparables. Dado que $[R, \cdot]_{s_p(G)}$ tiene un elemento mínimo, de la proposición 3.8 se tiene que $St_p(G) = \tilde{\Lambda}_{s_p(G)} = \tilde{\Lambda}_{[R, \cdot]_{s_p(G)}} = 0$ en $B(G)$. \square

REMARK 3.15. Quillen ha conjeturado que $s_p(G)$ es contraible si y sólo si $O_p(G) \neq \mathbb{I}$. La prueba anterior de hecho prueba que $s_p(G)$ es G -contraible si y sólo si $O_p(G) \neq \mathbb{I}$ (ver Thénevaz y Webb [13]).

PROPOSICIÓN 3.16. Sea G un grupo finito, y p un número primo. Sea $a_p(G)$ el sub- G -copo de $s_p(G)$ que consiste en los p -subgrupos elementales Abelianos no triviales de G y $b_p(G)$ denota el sub- G -copo de $s_p(G)$ que consiste de los p -subgrupos P de G no triviales tal que $P = O_p(N_G(P))$. Entonces

$$St_p(G) = \tilde{\Lambda}_{a_p(G)} = \tilde{\Lambda}_{b_p(G)} \text{ en } B(G)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea P un p -subgrupo no trivial de G . Supongamos que P no es elemental Abeliano, y denotemos por $\Phi(P)$ el subgrupo de Frattini de P . Sea $f : \cdot, P]_{s_p(G)} \rightarrow [\Phi(P), P]_{s_p(G)}$ la aplicación

definida por $f(Q) = Q \cdot \Phi(P)$ y sea g la inclusión de $[\Phi(P), P]_{s_p(G)}$ a $], P]_{s_p(G)}$. Ahora dados $Q \leq Q' \in], P]_{s_p(G)}$ dado que $\Phi(P)$ es normal en P , entonces $Q \cdot \Phi(P) \leq Q' \cdot \Phi(P)$ y así f es de copos; ahora bien dado $h \in N_G(P)$ tenemos que ${}^h Q \leq {}^h Q'$ pues la conjugación mantiene contensiones. Así que f es de $N_G(P)$ -copos; claramente g también lo es. Si ahora tomamos $Q \in], P]_{s_p(G)}$, entonces $(g \circ f)(Q) = g(Q \cdot \Phi(P)) = Q \cdot \Phi(P) \geq Q$, por lo tanto $\text{Id}_{], P]} \leq g \circ f$. Ahora si $Q \in [\Phi(P), P]_{s_p(G)}$, entonces $(f \circ g)(Q) = f(Q) = Q \cdot \Phi(P) = Q$ y por lo tanto $\text{Id}_{[\Phi(P), P]} = f \circ g$. Es decir, son comparables, y entonces $\tilde{\Lambda}_{], P]} = \tilde{\Lambda}_{[\Phi(P), P]}$. Ya que $[\Phi(P), P]$ tiene mínimo, entonces $\tilde{\Lambda}_{[\Phi(P), P]} = 0$ en $B(N_G(P))$ por la proposición 3.8. Lo que nos dice que tenemos las siguientes contensiones

$$(s_p(G))^\sharp \subseteq a_p(G) \subseteq s_p(G)$$

y aplicando el corolario 3.12 se tiene que $\tilde{\Lambda}_{s_p(G)} = \tilde{\Lambda}_{a_p(G)}$.

La otra igualdad es similar: sea P un p -subgrupo no trivial de G . Sea $R = O_p(N_G(P))$, y supongamos $R \neq P$. Sea $f :]P,]_{s_p(G)} \rightarrow s_p(N_G(P)/P)$ definida por $f(Q) = N_Q(P)/P$, y sea $g : s_p(N_G(P)/P) \rightarrow]P,]_{s_p(G)}$ definida por $g(Q/P) = Q$. Considerando $Q \leq Q' \in]P,]_{s_p(G)}$, tenemos que $f(Q) = N_Q(P)/P \leq N_{Q'}(P)/P = f(Q')$, y dado $h \in G$ $f({}^h Q) = N_{{}^h Q}(P)/P = {}^h N_Q(P)/P = {}^h (N_G(P)/P) = {}^h f(Q)$. Por lo tanto f es de G -copos. Si ahora tenemos $Q/P \leq Q'/P \in s_p(N_G(P)/P)$, por el teorema de correspondencia tenemos que $g(Q/P) = Q \leq Q' = g(Q')$ y finalmente dado $h \in G$, $g({}^h(Q/P)) = g({}^h Q / {}^h P) = {}^h Q = {}^h g(Q/P)$, por lo tanto g es de G -copos. Ahora bien, si consideramos $Q \in]P,]$, entonces $(g \circ f)(Q) = g(N_Q(P)/P) = N_Q(P) \leq Q$, por lo tanto $g \circ f \leq \text{Id}_{], P]}$. Sea ahora $Q/P \in s_p(N_G(P)/P)$, entonces $(f \circ g)(Q/P) = f(Q) = N_Q(P)/P \leq Q/P$ por el teorema de correspondencia, por lo tanto, $f \circ g \leq \text{Id}_{s_p(N_G(P)/P)}$. Es decir, son comparables y así por la proposición 3.8

$$\tilde{\Lambda}_{], P]} = \tilde{\Lambda}_{s_p(N_G(P)/P)} = \text{Inf}_{N_G(P)/P}^{N_G(P)} St_p(N_G(P)/P)$$

visto como $N_G(P)$ -conjunto pues $\tilde{\Lambda}_{], P]}$ lo es. Dado que $O_p(N_G(P)/P) = O_p(N_G(P))/P = R/P \neq \mathbb{I}$ entonces $s_p(N_G(P)/P)$ es G -contraíble y $0 = \tilde{\Lambda}_{s_p(N_G(P)/P)} = \tilde{\Lambda}_{], P]}$ en $B(N_G(P)/P)$. Es decir,

$$(s_p(G))^\sharp \subseteq b_p(G) \subseteq s_p(G)$$

y por el corolario 3.12

$$\tilde{\Lambda}_{s_p(G)} = \tilde{\Lambda}_{b_p(G)}$$

Uniendo lo anterior y considerando que $\tilde{\Lambda}_{s_p(G)} = St_p(G)$ se tiene el resultado deseado. \square

NOTACIÓN 3.17. Para el resto de la sección, el grupo G será un grupo finito y $\underline{\mathcal{F}}$ denotará una familia de subgrupos de G tal que:

1. $\mathbb{I} \in \underline{\mathcal{F}}$.
2. $\underline{\mathcal{F}}$ es cerrada bajo conjugación.

3. $\underline{\mathcal{F}}$ es cerrada bajo productos, i.e., si P y Q son elementos de $\underline{\mathcal{F}}$ tal que P normaliza a Q , entonces $P.Q \in \underline{\mathcal{F}}$.

Si H es un subgrupo de G , entonces $\underline{\mathcal{F}}(H)$ es el conjunto de subgrupos de H que están en $\underline{\mathcal{F}}$. Esta es una familia de subgrupos de H que tienen las tres propiedades anteriores.

Denotamos por \mathcal{F} la familia $\underline{\mathcal{F}}$ quitando el grupo trivial. Entonces $\underline{\mathcal{F}}$ y \mathcal{F} están ordenadas por la inclusión de subgrupos, y son G -copos. Cuando H es un subgrupo de G , denotamos similarmente por $\mathcal{F}(H)$ el conjunto de subgrupos no triviales de H que están en \mathcal{F} .

DEFINICIÓN 3.18. El *invariante de Steinberg* $St_{\mathcal{F}}(G)$ de G con respecto a \mathcal{F} es el invariante reducido de Lefschetz del G -copo \mathcal{F} .

Por lo tanto si $\mathcal{F} = s_p(G)$, entonces $St_{\mathcal{F}}(G) = St_p(G)$.

LEMA 3.19. Sean G y \mathcal{F} como en 3.17. Si $P \in \mathcal{F}$, entonces $St_{\mathcal{F}}(G)^P = 0$ en $B(N_G(P)/P)$.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por a la aplicación inclusión de $[P, \cdot]_{\mathcal{F}^P}$ a \mathcal{F} , y por b la aplicación de \mathcal{F}^P a $[P, \cdot]_{\mathcal{F}^P}$ definida por $b(F) = P.F$. Claramente a es de G -copos, ahora bien si $F \leq F' \in \mathcal{F}^P$, $P.F \leq P.F'$ y dado $g \in G$ $b({}^g F) = P.{}^g F = {}^g P.F = g.b(F)$, por lo tanto b es de G -copos. Consideremos ahora $Q \in [P, \cdot]_{\mathcal{F}^P}$, entonces $(b \circ a)(Q) = b(Q) = P.Q = Q$ por lo tanto $Id_{[P, \cdot]_{\mathcal{F}^P}}$. Si ahora $Q \in \mathcal{F}^P$, $(a \circ b)(Q) = a(P.Q) = P.Q \geq Q$, entonces $Id_{\mathcal{F}^P} \leq a \circ b$. Es decir, son comparables, por lo tanto $St_{\mathcal{F}}(G)^P = \tilde{\Lambda}_{\mathcal{F}}^P = \tilde{\Lambda}_{\mathcal{F}^P} = \tilde{\Lambda}_{[P, \cdot]_{\mathcal{F}^P}} = 0$ pues $[P, \cdot]_{\mathcal{F}^P}$ tiene elemento mínimo P . \square

TEOREMA 3.20. (Bouc). Sea G y \mathcal{F} como en 3.17. Si $X \in B(G)$, sea

$$St_{\mathcal{F}}(G, X) = \sum_{P \in [G \setminus \underline{\mathcal{F}}]} \text{Ind}_{N_G(P)}^G(\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P) \text{Inf}_{N_G(P)/P}^{N_G(P)} X^P).$$

Entonces la aplicación $X \mapsto St_{\mathcal{F}}(G, X)$ es un endomorfismo de grupos idempotente de $B(G)$, y su imagen es el conjunto de elementos X de $B(G)$ tal que $X^P = 0$ en $B(N_G(P)/P)$ para todo $P \in \mathcal{F}$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que si $X^P = 0$ para $P \in \mathcal{F}$, entonces

$$\begin{aligned} St_{\mathcal{F}}(G, X) &= \text{Ind}_{N_G(\mathbb{I})}^G(\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, \mathbb{I}) \text{Inf}_{N_G(\mathbb{I})/P}^{N_G(\mathbb{I})} X^{\mathbb{I}}) + \sum_{P \in [G \setminus \underline{\mathcal{F}}]} \text{Ind}_{N_G(P)}^G(\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P) \text{Inf}_{N_G(P)/P}^{N_G(P)} X^P) \\ &= \text{Ind}_G^G(G/G. \text{Inf}_{G/\mathbb{I}}^G X) = X \end{aligned}$$

Por lo tanto lo único que resta por verificar es que si $P \in \mathcal{F}$, entonces $St_{\mathcal{F}}(G, X)^P = 0$.

Por linealidad, podemos suponer que X es un G -copo finito, visto como un G -copo para el orden discreto. Denotemos por Z al subcopo de $X \times \mathcal{F}$ que consiste de los pares (x, P) tal que $P \subseteq G_x$.

$X \times \mathcal{F}$ es G -copo con el orden de la contención en la segunda entrada, es decir, $(x, P) \leq (y, Q)$ si $P \subseteq Q$, pues dado que X es discreto $x = y$. La acción de G , es entrada a entrada, en la primera la acción sobre X y en la segunda la conjugación. Sea $a : Z \rightarrow X$, definida por $a((x, P)) = x$. Claramente a es de G -copos, y $a^x = \{(y, P) \in Z \mid y \leq x\} = \{(x, P) \mid P \subseteq G_x\}$ es isomorfo a $\mathcal{F}(G_x)$, considerando $(x, P) \mapsto P$ tal isomorfismo.

Para cualquier G -copo discreto X , tenemos que $\Lambda_X = \sum_{n \geq 0} (-1)^n S d_n(X) = S d_0(X) = X$. Más aun, todos los elementos de S son máximos en X , por lo tanto $\tilde{\Lambda}_{]x,.[X} = \tilde{\Lambda}_\emptyset = -G_x/G_x$ para todo $x \in X$. De la proposición 3.10 tenemos que

$$\Lambda_X = X = \Lambda_Z + \sum_{x \in [G \setminus X]} \text{Ind}_{G_x}^G (\tilde{\Lambda}_{a^x} \tilde{\Lambda}_{]x,.[X}) = \Lambda_Z - \sum_{x \in [G \setminus X]} \text{Ind}_{G_x}^G (\tilde{\Lambda}_{\mathcal{F}(G_x)} G/G) =$$

$$(3.1) \quad X = \Lambda_Z - \sum_{x \in [G \setminus X]} \text{Ind}_{G_x}^G S t_{\mathcal{F}(G_x)(G_x)}$$

Consideremos ahora $b : Z \rightarrow \mathcal{F}$ la aplicación definida por $b((x, P)) = P$. Entonces si $(x, P) \subseteq (x, P')$, es porque $b((x, P)) = P \subseteq P' = b((x, P'))$ y dado $h \in G$ tenemos que $b(h.(x, P)) = b((h.x, {}^g P)) = {}^h P = h.b((x, P))$. Por lo tanto, b es de G -copos, y para $Q \in \mathcal{F}$

$$g_Q = \{(x, P) \in X \times \mathcal{F} \mid Q \subseteq P \subseteq G_x\}.$$

Veamos que g_Q es un $N_G(Q)$ -copo. Es copo con el orden de la inclusion en la segunda entrada. Ahora bien, sea e el neutro de G entonces $e \in N_G(Q)$ y así $e.(x, P) = (e.x, {}^e P) = (x, P)$. Ahora consideremos $h, h' \in N_G(Q)$, entonces $(hh').(x, P) = ((hh').x, {}^{hh'} P) = (h.(h.x), {}^h ({}^{h'} P)) = h.(h'.(x, P))$. Así, g_Q es un $N_G(Q)$ -copo. Ahora consideremos las aplicaciones $c : g_Q \rightarrow X^Q$ y $d : X^Q \rightarrow g_Q$ definidas por $c((x, P)) = x$ y $d(x) = (x, Q)$. Si $(x, P) \leq (y, P')$, entonces $x = y$ y $P \subseteq P'$, y entonces $c((x, P)) = x = y = c((y, P'))$. Y dado $h \in N_G(Q)$ $c(h.(x, P)) = c((h.x, h.P)) = h.x = h.c((x, P))$, por lo tanto c es de G -copos. Ahora bien, dado que X lo estamos viendo como G -copo discreto, entonces X^Q también lo es y así d es de copos y dado $h \in N_G(Q)$, $d(h.x) = (h.x, Q) = (h.x, {}^h ({}^{h^{-1}} Q)) = h.(x, {}^{h^{-1}} Q) = h.(x, Q) = h.d(x)$ pues $h^{-1} \in N_G(Q)$. Por lo tanto d también es de $N_G(Q)$ -copos. Ahora dado $(x, P) \in g_Q$, $(d \circ c)((x, P)) = d(x) = (x, Q) \leq (x, P)$, es decir, $d \circ c \leq \text{Id}_{g_Q}$. Y dado $x \in X^Q$, $(c \circ d)(x) = c((x, Q)) = x$, por lo tanto $c \circ d = \text{Id}_{X^Q}$; con lo cual son comparables y $\Lambda_{g_Q} = \Lambda_{X^Q} = X^Q$ por ser X^Q $N_G(Q)$ -copo discreto. Ahora por el corolario 3.11 parte 3. aplicado a b

$$\Lambda_Z = - \sum_{Q \in [G \setminus \mathcal{F}]} \text{Ind}_{N_G(Q)}^G \Lambda_{b_Q} \tilde{\Lambda}_{]1,.[\mathcal{F}}$$

Pero $b_Q = \{(x, P) \in Z \mid Q \subseteq P\} = \{(x, P) \in X \times \mathcal{F} \mid Q \subseteq P \subseteq G_x\} = g_Q$ y entonces $\Lambda_{b_Q} = \Lambda_{g_Q}$. Además $\tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}, Q[\mathcal{F}]} = \tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}, Q[\mathcal{F}]} = \mu_{\mathcal{F}}(\mathbb{I}, Q)$. Sustituyendo todo esto en la suma anterior

$$\Lambda_Z = - \sum_{Q \in [G \setminus \mathcal{F}]} \text{Ind}_{N_G(Q)}^G X^Q \mu_{\mathcal{F}}(\mathbb{I}, Q).$$

Así al sustituir en 3.1 nos dice que

$$X = - \sum_{Q \in [G \setminus \mathcal{F}]} \text{Ind}_{N_G(Q)}^G (\mu_{\mathcal{F}}(\mathbb{I}, Q) X^Q) - \sum_{x \in [G \setminus X]} \text{Ind}_{G_x}^G S t_{\mathcal{F}(G_x)}(G_x)$$

pero al pasar el primer sumando del lado derecho al izquierdo y por como se define $S t_{\mathcal{F}}(G, X)$ tenemos que

$$S t_{\mathcal{F}}(G, X) = - \sum_{x \in [G \setminus X]} \text{Ind}_{G_x}^G S t_{\mathcal{F}(G_x)}(G_x).$$

Ahora para cualquier $x \in X$ y cualquier $P \in \mathcal{F}$, si $P \subseteq G_x$, entonces $S t_{\mathcal{F}(G_x)}(G_x)^P = 0$ por el lema 3.19. Finalmente de la proposición 1.2 inciso 3.

$$\begin{aligned} S t_{\mathcal{F}}(G, X)^P &= \left(- \sum_{x \in [G \setminus X]} \text{Ind}_{G_x}^G S t_{\mathcal{F}(G_x)}(G_x) \right)^P = - \sum_{x \in [G \setminus X]} \left(\text{Ind}_{G_x}^G S t_{\mathcal{F}(G_x)}(G_x) \right)^P = \\ &= - \sum_{x \in [G \setminus X]} \sum_{y \in [N_G(P) \setminus G/G_x], P^y \subseteq G_x} \text{Ind}_{N_{G_x}(P)}^{N_G(P)/P} ({}^y S t_{\mathcal{F}(G_x)}(G_x))^P = \\ &= - \sum_{x \in [G \setminus X]} \sum_{y \in [N_G(P) \setminus G/G_x], P^y \subseteq G_x} \text{Ind}_{N_{G_x}(P)}^{N_G(P)/P} (S t_{\mathcal{F}(G_x)}(G_x)^{y^{-1}})^P = \\ &= - \sum_{x \in [G \setminus X]} \sum_{y \in [N_G(P) \setminus G/G_x], P^y \subseteq G_x} \text{Ind}_{N_{G_x}(P)}^{N_G(P)/P} (0)^{y^{-1}} = 0 \end{aligned}$$

como queríamos. \square

REMARK 3.21. Otra prueba del teorema 3.20 puede ser encontrada en [1], donde las descomposiciones de $B(G)$ asociadas a \mathcal{F} son construídas.

COROLARIO 3.22. Sean G y $\underline{\mathcal{F}}$ como en 3.17, y supongamos más aun que $\underline{\mathcal{F}}$ es cerrada bajo tomar subgrupos.

1. Si $P \in \underline{\mathcal{F}}$ y $X \in B(G)$, existe un entero $m_{P,X}$ tal que

$$\text{Res}_P^G S t_{\mathcal{F}}(G, X) = m_{P,X} P / \mathbb{I}.$$

2. Denotemos por $|G|_{\mathcal{F}}$ al m.c.m de los órdenes de elementos de \mathcal{F} . Entonces para cualquier G -copo finito X

$$\tilde{\chi}(X) + \sum_{P \in \mathcal{F}} |\mu_{\mathcal{F}}(\mathbb{I}, P)| \tilde{\chi}(X^P) \equiv 0 \pmod{|G|_{\mathcal{F}}}$$

y en particular

$$\tilde{\chi}(\mathcal{F}) \equiv 0 \pmod{|G|_{\mathcal{F}}}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea Y un elemento de $B(G)$ tal que $Y^P = 0$ para todo $P \in \mathcal{F}$. Consideremos la restricción de Y a un elemento Q de \mathcal{F} . Entonces

$$\text{Res}_Q^G Y = \sum_{R \in [s_Q]} |Y^R| e_R^Q.$$

Dado que $\underline{\mathcal{F}}$ es cerrado al tomar subgrupos, el único término no cero en esta suma se obtiene cuando para $R = \mathbb{I}$. Así

$$\text{Res}_Q^G Y = |Y| e_{\mathbb{I}}^Q = \frac{|Y|}{|Q|} Q/\mathbb{I}$$

la última igualdad nos la da el lema 2.17 inciso 3., pero ya que $\frac{|Y|}{|Q|} \in \mathbb{Z}$, entonces se tiene que $|Y| \equiv 0 \pmod{|Q|}$ y por lo tanto $\text{Res}_Q^G Y$ es un múltiplo entero de Q/\mathbb{I} .

1. Basta considerar $Y = S t_{\mathcal{F}}(G, X)$, $Q = P$ y entonces el entero $m_{P,X}$ buscado será $|S t_{\mathcal{F}}|/|P|$.
2. Considerando ahora X un G -copo, entonces $\tilde{\Lambda}_X \in B(G)$ y aplicamos 1. entonces

$$\text{Res}_P^G S t_{\mathcal{F}}(G, \tilde{\Lambda}_X) = m_{P, \tilde{\Lambda}_X} P/\mathbb{I}$$

Tomamos la cardinalidad en ambos lados y tendremos que

$$|\text{Res}_P^G S t_{\mathcal{F}}(G, \tilde{\Lambda}_X)| = |m_{P, \tilde{\Lambda}_X} P/\mathbb{I}| = m_{P, \tilde{\Lambda}_X} |P|$$

pero además para cualquier $Y \in B(G)$ se tiene que $|\text{Res}_H^G Y| = |Y|$, con lo cual y por el teorema 3.20

$$\begin{aligned} |\text{Res}_P^G S t_{\mathcal{F}}(G, \tilde{\Lambda}_X)| &= |S t_{\mathcal{F}}(G, \tilde{\Lambda}_X)| = \left| \sum_{P \in [G \setminus \mathcal{F}]} \text{Ind}_{N_G(P)}^G (\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P) \text{Inf}_{N_G(P)/P}^{N_G(P)} \tilde{\Lambda}_X^P) \right| = \\ &= \left| \text{Ind}_G^G (\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, \mathbb{I}) \text{Inf}_{N_G(\mathbb{I})/\mathbb{I}}^{N_G(\mathbb{I})} \tilde{\Lambda}_X^{\mathbb{I}}) \right| + \sum_{P \in [G \setminus \mathcal{F}]} \left| \text{Ind}_{N_G(P)}^G ((\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P) \text{Inf}_{N_G(P)/P}^{N_G(P)} \tilde{\Lambda}_X^P)) \right| = \\ &= |\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, \mathbb{I})| \left| \text{Inf}_{N_G(\mathbb{I})/\mathbb{I}}^{N_G(\mathbb{I})} \tilde{\Lambda}_X^{\mathbb{I}} \right| + \sum_{P \in [G \setminus \mathcal{F}]} \frac{|G|}{|N_G(P)|} |\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P)| \left| \text{Inf}_{N_G(P)/P}^{N_G(P)} \tilde{\Lambda}_X^P \right| = \\ &= |G/G| |\tilde{\Lambda}_X| + \sum_{P \in [G \setminus \mathcal{F}]} \frac{|G|}{|N_G(P)|} |\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P)| |\tilde{\Lambda}_X^P| = |\tilde{\Lambda}_X| + \sum_{P \in \mathcal{F}} |\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P)| |\tilde{\Lambda}_X^P| = \\ &= \tilde{\chi}(X) + \sum_{P \in \mathcal{F}} |\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P)| \tilde{\chi}(X^P) \end{aligned}$$

Pero para cada $P \in \mathcal{F}$, su orden divide a esta suma, entonces el mínimo común múltiplo de todos estos órdenes, $|G|_{\mathcal{F}}$, también lo divide, es decir

$$\tilde{\chi}(X) + \sum_{P \in \mathcal{F}} |\mu_{\mathcal{F}}(\mathbb{I}, P)| \tilde{\chi}(X^P) \equiv 0 \pmod{|G|_{\mathcal{F}}}.$$

La segunda congruencia se obtiene al considerar en particular $X = \mathcal{F}$. Tendremos entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(\mathcal{F}) + \sum_{P \in \mathcal{F}} |\mu_{\mathcal{F}}(\mathbb{I}, P)| \tilde{\chi}(\mathcal{F}^P) &= \tilde{\chi}(\mathcal{F}) + \sum_{P \in \mathcal{F}} |\mu_{\mathcal{F}}(\mathbb{I}, P)| |\tilde{\Lambda}_{\mathcal{F}}^P| = \\ &= \tilde{\chi}(\mathcal{F}) + \sum_{P \in \mathcal{F}} |\mu_{\mathcal{F}}(\mathbb{I}, P)| |St_{\mathcal{F}}(G)^P| \equiv 0 \pmod{|G|_{\mathcal{F}}} \end{aligned}$$

pero por el lema 3.19, $St_{\mathcal{F}}(G)^P = 0$ si $P \in \mathcal{F}$. Por lo tanto el segundo sumando se anula y se sigue la congruencia.



REMARK 3.23. Cuando \mathcal{F} es el copo $S_p(G)$ de los p -subgrupos no triviales de G , la segunda congruencia es entonces $\tilde{\chi}(s_p(G)) \equiv 0 \pmod{|G|_p}$, ésta se debe a Brown ([3]). Una prueba de esta congruencia usando los idempotentes del anillo de Burnside fue dada por Gluck ([7]) y Yoshida ([14]). Congruencias similares han sido establecidas por Thénevaz ([11]) y Brown y Thénevaz ([4]).

El cálculo de los invariantes de Steinberg de los grupos simétricos, o más generalmente productos "wreath" de un grupo finito con grupos simétricos, puede encontrarse en ([2]). Este requiere el uso de un anillo de series de potencias formales con coeficientes en anillos de Burnside.

Bibliografía

- [1] S. Bouc *Projecteurs dans l'anneau de Burnside, projecteurs dans l'anneau de Green, et modules de Steinberg généralisés*. J. Algebra **139**(2): 395-445, 1991.
- [2] S. Bouc *Exponentielle et modules de Steinberg*. J. Algebra **150**(1): 118-157, 1992.
- [3] K. Brown *Euler characteristics of groups: the p -fractional part*. Invent. Math. **29**: 1-5, 1975.
- [4] K. Brown; J. Thénevez *A generalization of Sylow's third theorem*. J. Algebra **115**: 414-430, 1988.
- [5] A. Dress *A characterization of solvable groups*. Math. Z. **110**: 213-217, 1969.
- [6] A. Dress *Notes on the theory of representations of finite groups*. Bielefeld Notes. 1971.
- [7] D. Gluck *Idempotent formula for the Burnside ring with applications to the p -subgroup simplicial complex*. Illinois J. Math. **25**: 63-67, 1981.
- [8] D. Quillen *Higher algebraic K-theory*. Lecture Notes in Math., Vol. 341, Springer, Berlin: 85-147, 1973.
- [9] D. Quillen *Homotopy properties of the poset of non-trivial p -subgroups*. Adv. in Math. **28**(2): 101-128, 1978.
- [10] L. Solomon *The Burnside algebra of a finite group*. J. Combin. Theory **2**: 603-615, 1967.
- [11] J. Thénevez *Idempotents de l'anneau de Burnside et caractéristique d'Euler*. Séminaire Claude Chevalley sur les groupes finis, Vol. 25, Tome 3, Publications mathématiques de l'Université Paris 7: 207-217, 1985.
- [12] J. Thénevez *Permutation representation arising from simplicial complexes*. J. Combin. Theory Ser. A **46**: 122-155, 1987.
- [13] J. Thénevez; P. Webb *Homotopy equivalences of posets with a group action*. J. Combin, Theory **56**(2): 173-181, 1991.
- [14] T. Yoshida *Idempotents in Burnside rings and Dress induction theorem*. J. Algebra **80**: 90-105, 1983.