UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Y
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM-UMSNH

Espacios dualmente discretos.

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

MIGUEL ANGEL GASPAR ARREOLA

Director: Dr. Fernando Hernández Hernández

MORELIA, MICHOACÁN - JUNIO DE 2011.

A mis padres Yolanda y Román

Índice general

Introducción

En la topología en general, siempre se busca estudiar qué espacios tienen ciertas propiedades, cuáles se preservan mediante funciones continuas, productos finitos, productos en general, etc. Muchas de estas propiedades son propiedades de cubiertas, tales como el ser compacto, paracompacto, Lindelöf o D espacio por mencionar algunas. Esta última propiedad fué introducida por E.K. van Douwen y W. Pfeffer en 1979 en [**15**], como nota histórica, en [**5**] se menciona que la noción de D espacio tiene sus origenes en 1975 en un intercambio de cartas entre E. K. van Douwen y E. Michael. La propiedad de ser D espacio quiere decir que: Para cada asignación de vecindades, es decir, si a cada elemento del espacio le asignamos una vecindad que lo contenga; entonces existe un subespacio cerrado y discreto tal que las vecindades asignadas a los elementos de ese subespacio son una cubierta para el espacio con el que empezamos. La propiedad de ser D espacio ha sido muy estudiada, una de las cosas que ha fascinado a los que la han estudiado es que no se sabe si propiedades tan fuertes como *ser (hereditariamente) Lindelöf implica ser un D espacio*, de hecho, a esto se le conoce como el problema de los D espacios y aparece en [**6**] como uno de los 20 pricipales problemas en el área de topología de conjuntos. Otra de las cosas que se desconoce es si la unión de dos D espacios es de nuevo un D espacio. Por otro lado, aparece otra noción del mismo tipo. Dada una propiedad $\mathcal{P}$ (o una clase más precisamente dicho), se define que un espacio es dualmente $\mathcal{P}$, si para cada asignación de vecindades, existe un subespacio tal que las vecindades asignadas a sus elementos sea cubierta y que dicho subespacio tenga la propiedad $\mathcal{P}$; resulta entonces que de acuerdo a esta definición, el ser D espacio corresponde a la propiedad de ser cerrado y discreto. Tales nociones de clases duales fueron introducidas por J. van Mill, V.V. Tkachuk y R.G. Wilson aparecieron primero en [**16**], también han trabajado en estas nociones R.Z. Buzyakova en [**3**]; O.T. Alas y L.R. Junqueira en [**1**]; y L.X. Peng en [**10, 11, 12, 13**]. Las personas antes mencionadas han trabajado más en específico en la propiedad de ser discreto, de esta forma, se dice que un espacio es dualmente discreto si para cualquier asignación de vecindades existe un subespacio discreto tal que las vecindades asignadas a este subespacio sean una cubierta del espacio original. Obviamente todo D espacio es dualmente discreto, es natural preguntarse si (hereditariamente) Lindelöf implica ser dualmente discreto; la respuesta se desconoce. Este trabajo surge del interés de trabajar en tales espacios, el problema original que se quiso atacar fue: *¿Es todo espacio ordenado (subordenable) dualmente discreto?* Dicho problema aparece en [**3**], en tal problema se estubo trabajando por un tiempo; después nos enteramos que ya había sido resuelto de forma afirmativa en el 2008 por L.X. Peng en [**10**]. Otra pregunta que nos interesó fué: *¿Es el producto* *de ordinales hereditariamente dualmente discreto?* Tal problema aparece en [**1**]. Este problema también ha sido trabajado por L.X. Peng desde el 2008, él probó el resultado para subespacios normales y de extensión numerable. Una vez leído el trabajo de L.X. Peng, encontramos la pregunta: *¿Es el producto de dos estacionarios ajenos en* ω_1 *dualmente discreto?* Tal pregunta es resuelta en el presente trabajo y, más aún, nos abrió las puertas para responder afirmativamente a la pregunta de O.T. Alas, L.R. Junqueira y R.G. Wilson, probando así que el prducto de dos ordinales es hereditariamente dualmente discreto y mejorar así los resultados parciales de L.X. Peng.

El trabajo se divide en 4 capítulos que se distribuyen de la siguiente forma:

Preliminares. En este capítulo presentamos todo el material introductorio, resultados básicos y otros no tanto, los cuales, se usarán a lo largo de todo el trabajo. Se asume que el lector tiene conocimientos básicos de topología y por ello se recordarán en este capítulo algunos de los resultados centrales que serán citados posteriormente en el trabajo. Asimismo se recuerdan algunas de las definiciones y resultados centrales de teoría de conjuntos. También se asume que el lector tiene familiaridad con conceptos estándar sobre conjuntos. Si algún concepto no es definido o si el lector necesita más detalles puede consultar textos como el de R. Engelking [**4**] para topología y el de T. Jech [**7**] para teoría de conjuntos.

Un poco sobre D espacios. En este capítulo se presenta un poco del trabajo que hizo E.K. van Douwen, así como el trabajo que han hecho otras personas, el cual nos servirá para conocer las técnicas utilizadas en los problemas sobre D espacios para tratar de atacar nuestro problema, para esto se presentan algunos resultados bastante ilustrativos.

Espacios dualmente discretos. En este capítulo se presentan unos pocos resultados para espacios en general, se hace especial énfasis en los espacios ordenados y en sus productos finitos, más concretamente, en ordinales. Se presentan los resultados parciales que se conocían hasta el momento en cuanto al problema sobre el cual trata el presente trabajo.

Resultados principales. Se presentan los resultados principales de este trabajo que resuelven el problema que aparece en [**11**] y se presenta también su generalización, con la cual, se responde a la pregunta que aparece en [**1**].

Miguel Gaspar.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se espera dar gran parte del material introductorio que será utilizado durante las subsecuentes secciones. Se darán las definiciones más generales, aunque algunas otras se darán hasta el momento que se requieran. Algunos resultados generales serán presentados para irse familiarizando con la notación y la técnicas que se utilizarán reiteradamente durante todo el trabajo; también se incluirán algunos teoremas conocidos de topología general y teoría de conjuntos.

En casi todos los resultados en este trabajo, cualquier espacio topológico que se considere, se asume que es regular y T_1 (a menos que se indique lo contrario).

Las enumeraciones que se dan para subconjuntos de ordinales se asume que son de forma creciente, a menos que se especifique otra cosa.

Dado un conjunto X y un cardinal $\kappa \leq |X|$ se definen los siguientes conjuntos.

$$[X]^{\kappa} = \{Y \subset X : |Y| = \kappa\};$$
$$[X]^{<\kappa} = \{Y \subset X : |Y| < \kappa\};$$
$$[X]^{\leq\kappa} = \{Y \subset X : |Y| \leq \kappa\}.$$

Cuando se use generalmente consideraremos $\kappa = \omega$.

Dado un conjunto totalmente ordenado X, decímos que X tiene la *propiedad del supremo* si todo conjunto no vacío acotado superiormente en X tiene mínima cota superior, es decir, que el conjunto de elementos de X que son cota superior tiene elemento mínimo. A los conjuntos totalmente ordenados los consideraremos como espacios topológicos con la siguiente topología.

Definición 1.1. Si $(X, \leq)$ es un orden total, se define la *topología del orden* como la topología que tiene por subbase al siguiente conjunto.

$$\{(a, \rightarrow) : a \in X\} \cup \{(\leftarrow, b) : b \in X\};$$

donde

$$(a, \rightarrow) = \{x \in X : a < x\}$$

y

$$(\leftarrow, b) = \{x \in X : b > x\}.$$

Recordando un poco cómo son las cosas en $\mathbb{R}$ y la prueba de que los intervalos cerrados son compactos, en la prueba de tal teorema se usa fuertemente la propiedad del supremo, de hecho tal propiedad es necesaria y suficiente y tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 1.2. Un espacio ordenado X es compacto si y solamente si tiene máximo, mínimo y la propiedad del supremo.

También existe caracterización para los espacios ordenados conexos en donde también aparece la propiedad del supremo y es la siguiente.

TEOREMA 1.3. Dado X espacio ordenado. Entonces X es conexo si y solo si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x < y$ se tiene que hay un $z \in X$ con $x < z < y$ y X tiene la propiedad del supremo.

Debemos decir también que muchas veces abusaremos de notación, por ejemplo; algunas veces dirémos que cierto conjunto es igual a la suma directa de otros conjuntos, cuando realmente, es que tal conjunto es homeomorfo a otro que se puede expresar de esa forma.

No podemos hablar de espacios ordenados y no hablar de los ordinales y de sus subconjuntos especiales. Para esto las siguientes definiciones y un poco de notación.

Dado un cardinal κ denotamos por κ^+ al *cardinal sucesor* de κ, es decir, el mínimo cardinal más grande que κ. Dado un ordinal α denotamos por $cof(\alpha)$ a la *cofinalidad de* α, es decir, al mínimo ordinal β tal que exista una función $f : \beta \to \alpha$ tal que la imagen de f es un conjunto no acotado en α. Note que dado α se tiene que $cof(\alpha)$ siempre es un cardinal. Un cardinal se llama *cardinal regular* si es igual a su cofinalidad.

DEFINICIÓN 1.4. Dado un cardinal regular κ, decimos que un conjunto C es *cerrado no acotado*, si no es acotado en κ y es cerrado con la topología del orden. También decimos que un conjunto S es *estacionario* en κ, si para cualquier C cerrado no acotado se tiene $C \cap S \neq \emptyset$.

Se conoce que la intersección de menos que κ cerrados no acotados en κ, es un cerrado no acotado y, análogamente, ocurre que unión de menos que κ subconjutos no estacionarios, es de nuevo, no estaconario.

DEFINICIÓN 1.5. Si $\{C_\alpha : \alpha < \kappa\}$ son cerrados no acotados en κ, se define la *intersección diagonal* al siguiente conjunto.

$$\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \left\{\beta : \beta \in \bigcap\nolimits_{\alpha<\beta} C_\alpha\right\}.$$

LEMA 1.6. Si $\{C_\alpha : \alpha < \kappa\}$ son cerrados no acotados en κ; entonces $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ es un cerrado no acotado.

DEMOSTRACIÓN. Sea $C = \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$. Note que por la definición de C podemos suponer que si $\beta < \alpha$ entonces $C_\beta \supset C_\alpha$. Veamos que C es cerrado. Sea α un punto límite de C. Sea $\xi < \alpha$; entonces como α es punto límite de C y por la definición de C, se tiene que α es también punto límite de C_ξ, como C_ξ es cerrado, se tiene que $\alpha \in C_\xi$, por lo tanto $\alpha \in C$.

Para ver que C es no acotado, sea $\beta < \kappa$ definamos una sucesión $\{\xi_n : n < \omega\}$ como sigue: Sea $\xi_0 > \beta$ con $\xi_0 \in C_0$, y para cada n defínase $\xi_{n+1} > \xi_n$ y tal que $\xi_{n+1} \in C_{\xi_n}$. Es claro de la definición de la sucesión que $\sup\{\xi_n : n < \omega\} \in C$ y tal supremo es mayor a β. ∎

El siguiente teorema que demostraremos es conocido como *Lema de Fodor* y juega un papel crucial a lo largo del trabajo, antes de enunciarlo hay que decir que: dado $S \subset \kappa$ y una función $f : \kappa \to \kappa$. Decímos que f es *regresiva* en S si para cada $s \in S$ se tiene que $f(s) < s$.

TEOREMA 1.7. (Fodor) Sean κ un cardinal regular y $f : \kappa \to \kappa$ una función. Si f es regresiva en un conjunto estacionario $S \subset \kappa$; entonces existe un $T \subset S$ estacionario tal que $f \restriction T$ es constante.

DEMOSTRACIÓN. Procedamos por contradicción, es decir, supóngase que para cada $\alpha < \kappa$ se tiene que $f^{-1}(\{\alpha\})$ es no estacionario. Sea C_α cerrado no acotado ajeno con $f^{-1}(\{\alpha\})$. Sea $C = \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$, como S es estacionario, podemos tomar $\beta \in C \cap S$; por lo tanto, por la definición de C, se tiene que $\beta \notin f^{-1}(\{\alpha\})$ para todo $\alpha < \beta$, así $f(\beta) \geq \beta$, lo cual contradice que f es regresiva. ❏

Las siguientes son algunas funciones cardinales que se mencionarán o usarán a lo largo del trabajo.

DEFINICIÓN 1.8. Dado un espacio topológico se definen las siguientes funciones cardinales, donde al tomar el mínimo cardinal, realmente tomamos el mínimo cardinal infinito.

El *grado de Lindelöf* de X, $L(X)$, es el mínimo cardinal tal que toda cubierta abierta de X tiene subcubierta de tamaño menor o igual que $L(X)$.

El *grado de dispersión* de X, $s(X)$, es el mínimo cardinal tal que cualquier subespacio discreto de X tiene tamaño menor o igual que $s(X)$.

El *grado de extensión* de X, $e(X)$, es el mínimo cardinal tal que cualquier subespacio cerrado y discreto de X tiene tamaño menor o igual a $e(X)$.

También se define el *grado hereditario de Lindelöf*, $hL(X)$, como el mínimo cardinal tal que para cualquier subespacio Y de X y toda cubierta abierta de Y tiene subcubierta de tamaño menor o igual que $hL(X)$. Análogamente de definen $hs(X)$ y $he(X)$.

Las siguientes definiciones vienen motivadas por el problema de los D espacios, que aunque no es el eje de este trabajo, sí se hablará un poco en el siguiente capítulo y tales definiciones sí se usarán en todo lo que sigue.

DEFINICIÓN 1.9. Dado (X, τ) un espacio topológico, una *asignación de vecindades* es una función $\phi : X \to \tau$ tal que para cada $x \in X$ se tiene que $x \in \phi(x)$.

Dada una propiedad $\mathcal{P}$, decimos que un espacio X es *dualmente* $\mathcal{P}$ (o que X pertenece a la clase dual de $\mathcal{P}$), si para toda ϕ asignación de vecindades, existe un $N \subset X$, que tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y tal que $X \subset \bigcup\{\phi(x) : x \in N\}$. Si se cumple la última propiedad de que las vecindades asignadas a los elementos de N es cubierta, decimos que N es un *núcleo de* X.

También decimos que un espacio es *hereditariamente dualmente* $\mathcal{P}$ si cualquiera de sus subespacios es dualmente $\mathcal{P}$. Dada una propiedad $\mathcal{P}$, algunas veces escribimos $X \in \mathcal{P}$ para querer decir que X tiene la propiedad $\mathcal{P}$, esto es coherente debido a que una propiedad se puede ver como una subclase de la clase de los conjuntos, más precisamente, como a la subclase que consta de los conjuntos que tienen la propiedad $\mathcal{P}$.

Las anteriores nociones fueron introducidas por J. van Mill, V.V. Tkachuk y R.G. Wilson en [**16**], en donde prueban cosas como: hay clases de espacios que son auto duales, es decir, que para algunas propiedades $\mathcal{P}$, los espacios que para cualquier asignación de vecindades tienen núcleo con la propiedad $\mathcal{P}$ son justamente los que tienen la propiedad $\mathcal{P}$, algunas de estas clases de espacios son: compactos, pseudocompactos, numerablemente compactos y Lindelöf. Daremos la demostración para el caso de los compactos.

Teorema 1.10. (van Mill, Tkachuk, Wilson) Sea X espacio topológico que es dualmente compacto; entonces X es compacto.
Demostración. Supóngase que X es dualmente compacto y que X no es compacto. Entonces existe un cardinal κ y una cubierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ sin subcubierta finita, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que si $\beta < \gamma < \kappa$ entonces $U_\beta \subset U_\gamma$ y tal que para todo $\alpha < \kappa$ se tiene que $U_\alpha \neq X$. Defínase para cada $x \in X$ la asignación $\phi(x) = U_{\alpha_x}$, donde α_x es el mínimo ordinal α tal que $x \in U_\alpha$. Como X es dualmente compacto, existe $K \subset X$ núcleo compacto de X. Así por la compacidad de K y por la definición de ϕ se tiene que existe un $\alpha < \kappa$ tal que $K \subset U_\alpha$, de nuevo, por definición de ϕ, ocurre que para cada $x \in K$ pasa que $\phi(x) \subset U_\alpha$, pero K es núcleo lo cual contradice que $U_\alpha \neq X$. ❑

Decimos que un espacio es *disperso* si cualquier subconjunto tiene un punto aislado. Se tiene el siguiente teorema.

Proposición 1.11. Sea X espacio topológico; entonces X es dualmente disperso.
Demostración. Sean ϕ asignación de vecindades y $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ enumeración de X. Defínase recursivamente un $Y \subset X$. Sea $y_0 = x_0$ y para cada ξ si $A_\xi = X \setminus \bigcup\{\phi(y_\gamma) : \gamma < \xi\} \neq \emptyset$ sea $y_\xi = x_\delta$, donde $\delta = min\{\alpha : x_\alpha \in A_\xi\}$. De esta forma terminamos en menos de κ^+ pasos. Entonces $Y = \{y_\xi : \xi < \beta\}$, donde β es el mínimo donde $A_\beta = \emptyset$. Veamos que Y es disperso; si $Z \subset Y$ es no vacío y $y \in Z$ es el de indíce mínimo en la enumeración de Y. Se tiene entonces por construcción que $\phi(y) \cap Z = \{y\}$. ❑

Tenemos el siguiente resultado, el cual nos dice que las clases duales se comportan tan bien como las clases mismas, al menos con respecto a cierto tipo de operaciones. Decimos que una propiedad $\mathcal{P}$ es invariante bajo algún tipo de operación, si para cada espacio que tiene la propiedad $\mathcal{P}$, al aplicarle tal operación, el conjunto resultante también tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Proposición 1.12. Sea $\mathcal{P}$ una propiedad. Entonces se tiene lo siguiente:

(1) Si la clase $\mathcal{P}$ es invariante bajo imagenes de funciones continuas; entonces también lo es su clase dual.

(2) Si la clase $\mathcal{P}$ es invariante bajo imágenes inversas de funciones perfectas; entonces su clase dual también lo es.
(3) Si κ es un cardinal y la clase $\mathcal{P}$ es invariante bajo uniones de a lo más κ espacios; entonces también la clase dual lo es.
(4) Si $\mathcal{P}$ es invariante bajo subespacios cerrados; entonces su clase dual también lo es.

Demostración. Lo demostraremos sólo para (1), pues la demostración para los demás es análoga. Sea $f : X \to Y$ continua, suprayectiva y tal que X es dualmente $\mathcal{P}$. Sea ϕ asignación de vecindades para Y. Para cada $x \in X$ sea $\psi(x) = f^{-1}[\phi(f(x))]$, por la continuidad de f se tiene que ψ es asignación de vecindades para X. Sea K núcleo de X que tiene la propiedad $\mathcal{P}$; entonces $f[K]$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y es núcleo de X. ❑

Supóngase ahora que que $\mathcal{P}$ es una propiedad que satisface lo siguiente:
(1) Si X es discreto, entonces $X \in \mathcal{P}$;
(2) Si X es dualmente $\mathcal{P}$, entonces todo subespacio cerrado es dualmente $\mathcal{P}$;
(3) Si $X = \oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ y para cada α se tiene que $X_\alpha \in \mathcal{P}$, entonces $X \in \mathcal{P}$.

Proposición 1.13. Si $\mathcal{P}$ es como antes y $X = \bigcup\{X_i : i < \omega\}$ donde cada X_i es cerrado en X y dualmente $\mathcal{P}$; entonces X es dualmente $\mathcal{P}$.

Demostración. Sea ϕ asignación de vecindades para X. Sea $D_0 \subset X_0$ núcleo de X_0 y tal que $D_0 \in \mathcal{P}$. Para cada $i > 0$ sea $D_i \in \mathcal{P}$ tal que $D_i \subset X_i \setminus \bigcup\{\phi(x) : x \in \bigcup\{D_j : j < i\}\}$ es núcleo de $X_i \setminus \bigcup\{\phi(x) : x \in \bigcup\{D_j : j < i\}\}$. Si $D = \bigcup\{D_i : i < \omega\}$; entonces $X = \bigcup\{\phi(x) : x \in D\}$, y, como $D = \oplus_{i<\omega} D_i$, se tiene que $D \in \mathcal{P}$. Así X es dualmente $\mathcal{P}$. ❑

Proposición 1.14. De nuevo sea $\mathcal{P}$ como antes. Si $X = X_1 \cup X_2$ donde X_1 es un subespacio cerrado y dualmente $\mathcal{P}$ de X. Si todo cerrado contenido en X_2 es dualmente $\mathcal{P}$. Entonces X es dualmete $\mathcal{P}$.

Demostración. Sea ϕ asignación de vecindades para X. Sea $D_1 \subset X_1$ núcleo de X_1 y tal que $D_1 \in \mathcal{P}$. Sea $F = X \setminus \bigcup\{\phi(x) : x \in D_1\}$ es un cerrado contenido en X_2; de esta forma sea $D_2 \in \mathcal{P}$ subconjunto de F y tal que $F \subset \bigcup\{\phi(x) : x \in D_2\}$. Así $D = D_1 \cup D_2$ es tal que $X = \bigcup\{\phi(x) : x \in D\}$, y como $\overline{D_1} \cap \overline{D_2} = \emptyset$; entonces $D \in \mathcal{P}$. ❑

Corolario 1.15. Si $X = U \cup V$ donde U y V son subespacios cerrados de X y para cualquier $Z \subset X$ cerrado tal que $Z \subset U$ o $Z \subset V$ pasa que Z es dualmente $\mathcal{P}$. Entonces X es dualmente $\mathcal{P}$.

También se tiene el siguiente resultado que aunque es obvio no está por demás enunciarlo ya que se usará bastante.

Proposición 1.16. Sean $\mathcal{P}$ como antes y $X = \bigoplus_{\alpha<\Lambda} X_\alpha$; si para cada α se tiene que X_α es (hereditariamente) $\mathcal{P}$, entonces X es (hereditariamente) $\mathcal{P}$.

Definiremos ahora un principio combinatorio que usaremos después, tal principio es debido a R.B. Jensen, se denota por $\diamondsuit$ y es la afirmación:

"Existe una sucesión $\langle A_\alpha : \alpha \in lim(\omega_1)\rangle$ tal que para cada α se tiene que $A_\alpha \subset \alpha$ y para cada $X \subset \omega_1$ ocurre que el conjunto $\{\alpha \in lim(\omega_1) : X \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario en ω_1."

Tal principio es independiente de ZFC y se puede probar su consistencia, de hecho la afirmación $\diamondsuit$ vale en el modelo de Gödel $V = L$.

Hablaremos un poco del Teorema de Baire y de una aplicación muy elemental de la técnica de *forcing*, que en este caso en particular están muy relacionados. Si el lector quiere profundizar en tal técnica puede consultar el libro de K. Kunen [**8**].

Definamos primero algunas cosas que utilizaremos antes de enunciar el Teorema de Baire.

Definición 1.17. Un *conjunto parcialmente ordenado* o *poset* es una pareja $(\mathbb{P}, \leq)$ donde $\mathbb{P}$ es un conjunto no vacío y $\leq$ es un *orden parcial* sobre $\mathbb{P}$, es decir, que $\leq$ es transitivo, reflexivo y antisimétrico, y tal que $\mathbb{P}$ tiene elemento mayor en este orden.

Generalmente cuando trabajamos con un poset sólo escribimos $\mathbb{P}$ en lugar de $(\mathbb{P}, \leq)$.

Definición 1.18. Dados $\mathbb{P}$ un poset y $p, q \in \mathbb{P}$, decimos que p y q son *compatibles* y escribimos $p||p$ si existe un $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$; decimos que son *incompatibles* y escribimos $p \perp q$ si no son compatibles.

Definición 1.19. Dado un poset $\mathbb{P}$ un filtro F en $\mathbb{P}$ es un subconjuto no vacío de $\mathbb{P}$ que cumple:

(1) $(\forall p, q \in F)(\exists r \in F)(r \leq p \wedge r \leq q)$.
(2) $(\forall q \in F)(\forall p \in \mathbb{P})(q \leq p \rightarrow p \in F)$.

Definición 1.20. Si $\mathbb{P}$ es un poset; decimos que $D \subset \mathbb{P}$ es un conjunto *denso* si para cada $p \in \mathbb{P}$ existe un $d \in D$ tal que $d \leq p$. Decimos que D es *denso y abierto*, si es denso y para cada $d \in D$ y cada $p \in \mathbb{P}$ si $p \leq d$, entonces $p \in D$.

Además vamos a querer que nuestros posets sean *separativos*, es decir, que para cada p elemento del poset, existan q y r en el poset tales que $q \leq p$, $r \leq p$ y $q \perp r$.

Definición 1.21. Sean $\mathbb{P}$ un poset, F un filtro en $\mathbb{P}$ y $\mathcal{D}$ una familia de densos en $\mathbb{P}$, decimos que F es $\mathcal{D}$-genérico si para todo $D \in \mathcal{D}$ se tiene que $D \cap F \neq \emptyset$.

Ahora enunciamos el conocido Teorema de Baire.

Teorema 1.22. (Baire) Si X es un espacio métrico completo y $\{U_n : n \in \omega\}$ es una familia de densos abiertos de X; entonces $\bigcap\{U_n : n \in \omega\} \neq \emptyset$.

En el anterior teorema de hecho es equivalente que la intersección sea no vacía a que sea densa. Ahora para aplicar el teorema lo aplicaremos a un espacio conocido, el conjunto de los numeros reales 2^ω, al cual, lo veremos como funciones de ω en 2. Definiremos otra cosa importante que se usará en el futuro.

Decimos que un conjunto $M \subset 2^\omega$ es *nunca denso* si $2^\omega \setminus \overline{M}$ es denso y decimos que es *magro* si es union numerable de conjuntos nunca densos.

Se define el *σ-ideal de los conjutos magros* como $\mathcal{M} = \{M \subset 2^\omega : M \text{ es magro}\}$. También se define el *número de cubierta* para un ideal $\mathcal{I}$ sobre 2^ω como el siguente cardinal:

$$\mathsf{cov}(\mathcal{I}) = min\,\{|C| : C \subset \mathcal{I} \wedge \bigcup C = 2^\omega\}.$$

Decimos que dos posets son *isomorfos* si existe una función inyectiva entre ellos que preserva el orden, incompatibilidad y la imagen de tal encaje es denso en el codominio. El siguiente teorema nos dará una traducción del Teorema de Baire a posets numerables.

TEOREMA 1.23. Si $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son posets numerables; entonces son isomorfos.

Observemos que el anterior teorema nos dice que si tenemos dos posets isomorfos, entonces podemos traducir densos en densos, filtros en filtros y que en escencia, son lo mismo.

Como es usual en lugar de trabajar con 2^ω, trabajaremos con $2^{<\omega}$ y a este último lo veremos como poset, con el orden dado por: $p \leq q$ si y sólo si $p \supset q$. De esta forma cada denso abierto en 2^ω queda codificado por un denso en $2^{<\omega}$ y visceversa. De esta forma el Teorema de Baire nos dice que si tenemos una familia numerable de densos $\mathcal{D}$ en $2^{<\omega}$ entonces existe un filtro que intersecta a todos esos densos, esto pues si consideramos f un elemento en la intersección y consideramos $G_f = \{f \restriction n : n \in \omega\}$, se tiene que G_f es un filtro $\mathcal{D}$-genérico. Pero, más aún, de hecho tenemos algo un poco más general que el Teorema de Baire; si $\mathcal{D}$ es una familia de densos abiertos tal que $|\mathcal{D}| < \mathsf{cov}(\mathcal{M})$, entonces $\bigcap \mathcal{D} \neq \emptyset$, esto por la definición de $\mathsf{cov}(\mathcal{M})$. De esta forma tenemos filtros $\mathcal{D}$-genéricos en cualquier poset numerable, siempre y cuando $|\mathcal{D}| < \mathsf{cov}(\mathcal{M})$

Capítulo 2

Un poco sobre D espacios

Hablaremos un poco sobre el trabajo donde surge el problema de los D espacios [**15**].

Definición 2.1. Decimos que un espacio es un D *espacio*, si para cada asignación de vecindades se puede encontrar un núcleo cerrado y discreto.

Llamamos *recta de Sorgenfrey* al conjunto de los numeros reales con la topología que tiene por base a $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ y lo denotamos por $\mathbb{R}_\ell$.

Hasta ahora no se conocen ejemplos satisfactorios de espacios que no sean D espacios, donde por ejemplos satisfactorios se quiere decir que tengan propiedades de cubierta un tanto fuertes, tales como ser metacompacto o subparacompacto. Siendo el *plano de Sorgenfrey* ($\mathbb{R}^2_\ell$) subparacompacto, era un candidato natural (en 1979) para que no fuera D espacio, sin embargo, en [**15**] se prueba que sí lo es.

Primero daremos una definición de una clase de espacios a la cual pertenece $\mathbb{R}_\ell$.

Definición 2.2. Decimos que un espacio X es un *espacio separado izquierdo generalizado* o GLS *espacio*, si exise una relación $\preceq$ en X que satisface:

(1) Todo cerrado no vacío de X tiene elemento $\preceq$-minimal.
(2) Para cada $x \in X$ se tiene que $\{y \in X : x \preceq y\}$ es abierto.

Note que el espacio $\mathbb{R}_\ell$ es homeomorfo a $\mathbb{R}_\ell \cap [0, \infty)$, esto pues ambos se pueden ver como una unión numerable de cerrado abiertos disjuntos de la forma $[a, b)$, y es claro que $\mathbb{R}_\ell \cap [0, \infty)$ con el orden usual es un GLS espacio. En [**15**] se prueba que cualquier potencia finita de $\mathbb{R}_\ell$ es un GLS espacio.

Teorema 2.3. (van Douwen, Pfeffer) Todo GLS espacio es un D espacio.

Demostración. Sea ϕ asignación de vecindades para X un GLS espacio con orden $\preceq$; para cada $x \in X$ sea $\psi(x) = \phi(x) \cap \{y \in X : x \preceq y\}$, ψ define una nueva asignación de vecindades. Defina recursivamente un subconjunto de X como sigue: sea x_0 elemento $\preceq$-minimal de X, y para cada α, si

$$X_\alpha = X \setminus \bigcup \{\psi(x_\beta : \beta < \alpha\} \neq \emptyset;$$

entonces x_α es $\preceq$-minimal de X_α.

De esta forma terminamos en menos de $|X|^+$ pasos. Sea $D = \{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$ el conjunto antes definido. Veamos que D es un núcleo cerrado discreto de X. Es núcleo trivialmente debido a la construcción. Para ver que es cerrado y discreto, basta con notar que para cada $d \in D$ se tiene que $\psi(d) \cap D = \{d\}$, esto pues $\bigcup\{\psi(x) : x \in D\} = X$. Sea $x_\xi \in \psi(x_\eta)$, por la construcción $\xi \leq \eta$, además por la definición de ψ tenemos $x_\eta \preceq x_\xi$. Como $\xi \leq \eta$, se tiene que $x_\xi, x_\eta \in X_\xi$, como x_ξ es $\preceq$-minimal de X_ξ, pasa que $x_\xi \preceq x_\eta$. Así $x_\eta = x_\xi$. ❏

La demostración del teorema anterior es de hecho el modelo de prueba para encontrar núcleos cerrados y discretos o simplemente discretos. El anterior teorema también nos dice que para todo n natural se tiene que $\mathbb{R}_\ell^n$ es un D espacio, pero se matiene abierta la siguiente pregunta.

Pregunta 2.4. (van Douwen, Pfeffer) ¿Es $\mathbb{R}_\ell^\omega$ un D espacio?

También se desconoce si $\mathbb{R}_\ell^\omega$ es dualmente discreto, que es la propiedad que trabajaremos más adelante.

Un espacio con el cual trabajaremos más adelante, en el siguiente capítulo, que no es un D espacio es ω_1 visto como espacio ordenado, pues si definimos ϕ la asignación que a cada α lo envía en la vecindad $[0, \alpha]$, se tiene entonces que todo núcleo discreto tiene que ser no numerable, y de esta forma, tal núcleo no puede ser cerrado (pues en ω_1 todo conjunto infinito tiene punto de acumulación). De hecho para espacios ordenados se sabe que los únicos espacios que son D espacios son los paracompactos, lo cual no se probará ni se usará, pues realmente el motivo del trabajo no son lo D espacios, sin embargo, veremos algunos resultados que nos ayuden a entender un poco más el cómo se comportan las asignaciones de vecindades, ya que el verdadero objetivo es encontrar núcleos discretos.

Un resultado que se sigue de las definiciones es que si X es un D espacio, entonces para cualquier Y subespacio cerrado de X, se tiene que $e(Y) = L(Y)$.

El siguiente es un resultado en el cual se emplea de forma muy superficial la técnica de forcing, no se usa más de lo que se vió en el primer capítulo. Antes de enunciarlo probaremos un lema.

Lema 2.5. Si X es Lindelöf y ϕ es asignación de vecindades; entonces existe $Y \subset X$ numerable tal que para cada $a \in [Y]^{<\omega}$ se cumple

$$(\forall x \in X \setminus \bigcup\{\phi(y) : y \in a\})(\exists y \in Y \setminus \bigcup\{\phi(y) : y \in a\})(x \in \phi(y)).$$

Demostración. Definamos conjuntos Y_n y a_i con $i, n < \omega$, tales que para cada m se tenga que $a_m \subset \bigcup\{Y_n : n \leq m\}$. Esto lo haremos por recursión. Sea $f : \omega \to \omega \times \omega$ biyectiva y tal que para todo n la primera coordenada de $f(n)$ sea a lo más n. Sea Y_0 numerable tal que $\{\phi(y) : y \in Y_0\}$ es subcubierta de ϕ para X, esto es posible por ser X Lindelöf. Consideremos $\{a_{0,k} : k < \omega\} = [Y_0]^{<\omega}$ y sea $a_0 = a_{f(0)}$.

Supongamos definidos Y_k y a_k para $k < n$. Consideremos Y_n tal que $\{\phi(y) : y \in Y_n\}$ es subcubierta de $\{\phi(x) : x \in X \setminus \bigcup\{\phi(y) : y \in a_{n-1}\}\}$ para $X \setminus \bigcup\{\phi(y) : y \in a_{n-1}\}$, de nuevo es posible porque este conjunto es cerrado en X. Consideremos también que $\{a_{n,k} : k < \omega\} = [\bigcup\{Y_k : k \leq n\}]^{<\omega}$; y sea $a_n = a_{f(n)}$.

Basta con ver que Y es como se quería; es numerable por definición. Sea $a \in [Y]^{<\omega}$, entonces $a = a_i$ para algún i; pero por la definición de los Y_n se tiene que $Y_i \subset X \setminus \bigcup\{\phi(x) : x \in a_i\}$ y aparte es núcleo de ese conjunto, así se cumle lo que queríamos. ❏

TEOREMA 2.6. (Aurichi, Junqueira, Larson) Si X es un espacio Lindelöf y $|X| < \mathsf{cov}(\mathcal{M})$; entonces X es un D espacio.
DEMOSTRACIÓN. Sean ϕ asignación de vecindades y $Y \subset X$ como en 2.5 y definamos el siguiente poset

$$\mathbb{P} = \{q : q \in [Y]^{<\omega}\};$$

donde

$$p \leq q \Leftrightarrow p \supset q \wedge (\forall x \in p \setminus q)(x \notin \bigcup\{\phi(y) : y \in q\}).$$

El anterior poset es numerable y así c.c.c., para cada $x \in X$ defínase

$$D_x = \{p \in \mathbb{P} : x \in \bigcup\{\phi(y) : y \in p\}\}.$$

Cada D_x es denso por la definición de Y. Si $\mathcal{D} = \{D_x : x \in X\}$ y como $|X| < \mathsf{cov}(\mathcal{M})$, entonces existe G filtro $\mathcal{D}$-genérico. Sea $D = \bigcup G$. Veamos que D es núcleo cerrado y discreto de X. Es núcleo por genericidad. Para ver que es discreto consideremos $d \in D$; entonces existe $p \in G$ con $d \in p$, de esta forma $|\phi(d) \cap D| < \omega$ esto por que G es filtro en $\mathcal{P}$, así D es discreto. Es cerrado; sea $x \in X$, por genericidad podemos tomar $p \in G \cap D_x$, así $x \in \phi(d)$ para algún $d \in p$, con lo cual $|\phi(d) \cap D| < \omega$ y así x no es punto de acumulación de D. ❏

Una vez vistos los anteriores resultados, se hará una pequeña reseña sin detalles de cosas que se saben sobre los D espacios, para ver con más detalle y consultar la bibliografía donde aparecen tales cosas el lector puede consultar [**5**].

Antes veamos: ¿Por qué no es fácil probar que los espacios Lindelöf son D espacios? Teniendo la propiedad de Lindelöf en un espacio X y dada ϕ asignación de vecindades, es natural considerarse una cubierta numerable $\{\phi(x_n) : n < \omega\}$; si se pudiera arreglar que para cada n pasara que $x_n \notin \bigcup_{i<n} \phi(x_i)$, se tendría entonces que $D = \{x_n : n < \omega\}$ es un cerrado discreto y $\{\phi(x_n) : n < \omega\}$ sería cubierta, pero arreglar ese detalle, es el problema.

Otras propiedades, aparte de Lindelöf, que que no se sabe si implican D, incluso suponiendo que el espacio hereda tal propiedad a todos sus subespacios son: paracompacto, ultraparacompacto, fuertemente paracompacto, metacompacto, metalindelöf, subparacompacto, submetacompacto, submetalindelöf, paralindelöf y σ-metacompacto.

Hay sin embargo una propiedad de cubierta que es implicada por la propiedad de ser D espacio: irreducibilidad. Decimos que un espacio X es *irreducible* si toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X tiene un refinamineto minimal $\mathcal{V}$, es decir, cada $V \in \mathcal{V}$ tiene un elemento que no está en ningún otro elemento de $\mathcal{V}$. Se sabe que un espacio X es irreducible si y sólo si para cada cubierta $\mathcal{U}$ existe D cerrado discreto y una función $f : D \to \mathcal{U}$ tal que para cada $d \in D$ se tiene que $d \in f(d)$ y $\{f(d) : d \in D\}$ es una cubierta de X; es entonces claro que los D espacios son irreducibles. Sin embargo, aunque ser D espacio es hereditario a subespacios cerrados, se tiene que el ser irreducible no lo es. Resulta natural preguntarse si ser D espacio es equivalente a que todo suespacio cerrado de X sea irreducible; la respuesta se desconoce, tampoco se sabe si los compactos hereditariamente D son secuenciales.

Con respecto a los $C_p(X)$ se tienen varios teoremas conocidos.

Si X es compacto, entonces para todo $Y \subset C_p(X)$ se tiene que $e(Y) = L(Y)$. Si X es compacto, entonces para cada $Y \subset C_p(X)$ numerablemente compacto se tiene que Y es compacto. Una generalización a ambos teoremas que dice que si X es compacto, entonces $C_p(X)$ es hereditariamente D espacio. También se sabe que si X es un Σ-espacio Lindelöf, entonces $C_p(X)$ es hereditariamente D espacio.

Se conoce que cualquier compacto de Corson es hereditariamente D espacio.

Hay otras nociones más débiles a ser D espacio en las que se ha trabajado, estas son algunas.

Dado un espacio X y una asignación de vecindades ϕ en X. Dirémos que ϕ es *monótona*, si el rango de ϕ está totalmente ordenado por la contención. También dirémos que ϕ es *transitiva*, si para todos $x, y \in X$, si pasa que $y \in \phi(x)$, entonces se tendrá que $\phi(y) \subset \phi(x)$.

Decimos que un espacio es *transitivamente D* si para cada asignación de vecindades que es transitiva, se tiene que el espacio tiene un núcleo cerrado y discreto, análogamente tenemos la definición de *linealmente D* y *linealmente Lindelöf*.

Se sabe que X es linealmente Lindelöf si y solamente si X es linealmente D y $e(X) = \omega$, los metalindelöf son linealmente D, uniones finitas de espacios linealmente D son de nuevo linealmente D y que los espacios que son numerablemente compactos y que se pueden ver como una unión numerable de espacios linealmente D; son compactos.

Por otro lado se sabe también que transitivamente D implica linealmente D, espacios metalindelöf son transitivamente D y que uniones finitas de espacios transitivamente D, es otra vez transitivamente D.

En general para uniones no se sabe cuándo uniones de D espacios son de nuevo un D espacio, sin embargo sí se sabe para uniones finitas siempre y cuando todos los uniendos pertenezcan a alguna de las siguientes clases: metrizables, Σ fuertes, Moore, regulares paracompactos C-dispersos[1] o que tienen base punto numerable.

También se sabe que dado un cardinal λ y si tenemos $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ un conjunto de D espacios, tales que para cada $\beta < \lambda$ se tiene que $\bigcup_{\alpha<\beta} X_\alpha$ es un cerrado de $\bigcup\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$; entonces $\bigcup\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es un D espacio.

Se tienen algunos resultados donde se emplea la técnica de forcing, por ejemplo: se sabe que los D espacios son indestructibles cuando forzamos con árboles de altura ω y también se sabe que si X es un espacio Lindelöf y T es un árbol tal que todo subconjunto numerable S de

[1]Se dice que un espacio X es *C-disperso* si para cada $C \subset X$ cerrado no vacío existe un $c \in C$ que tiene una vecindad compacta en C.

T puede ser refinado por anticadenas, es decir, que para cada $s \in S$ existe un $a_s \leq s$ tal que $\{a_s : s \in S\}$ es una anticadena en T; entonces X es D espacio cuando frozamos con T.

En general en casi todas las preguntas abiertas (en cuanto a D espacios claro está), no se sabe si alguna de las dos posibles respuestas es siquiera consistente, por ejemplo: no se sabe si es consistente que los espacios paracompactos de tamaño ω_1 sean D espacios.

Capítulo 3

Espacios dualmente discretos

En este capítulo centraremos nuestra atención en la propiedad de ser discreto, así entonces, de acuerdo a la Definición 1.9, un espacio es *dualmente discreto*, si a toda asignación de vecindades podemos encontrarle un núcleo discreto.

Note que la propiedad de ser dualmente discreto es, como la mayoría de propiedades de cubiertas, hereditaria a subespacios cerrados.

Este capítulo lo dividiremos en tres secciones: primero hablaremos de resultados un tanto generales pero muy básicos, los mismos que usaremos después es resultados más específicos que aparecerán en las siguientes secciones; después centraremos nuestra atención en los espacios ordenados, los cuales se portan muy bien con respecto a la propiedad de ser dualmente discreto y por último trataremos únicamente con ordinales y productos finitos de estos. Probaremos algunos teoremas que son buenas aproximaciones a la pregunta que se tratará en el último capítulo.

1. Aspectos generales

Tenemos el siguiente resultado que aunque es muy sencillo se usará como base de un resultado importante y además ejemplifica bien el cómo construir núcleos discretos para los espacios que se pueda.

Proposición 3.1. Si X es numerable; entonces X es dualmente discreto.

Demostración. Sean ϕ asignación de vecindades de X y $\{x_n : n \in \omega\}$ enumeración de X. Por recusrsión construiremos Y núcleo discreto de X. Sea $y_0 = x_0$, una vez que tenemos definidos y_k para $k < n$.

Si pasa que $\bigcup_{k<n} \phi(y_k) = X$, ya terminamos pues $\{y_k : k < n\}$ es núcleo discreto por ser finito.

Si no pasa el caso anterior, definimos $y_n = x_m$, donde $m = min\left\{n : x_n \in (X \setminus \bigcup_{k<n} \phi(y_k))\right\}$. Así, por la construcción, Y es núcleo. Para ver que Y es discreto, note que para cada n ocurre que $|\phi(y_n) \cap Y| \leq n + 1$, en consecuencia Y es como se quería. ❑

Como casi siempre que se tienen propiedades de cubierta; entonces, se tiene que un espacio que tiene la propiedad, producto con un compacto, tiene de nuevo la propiedad; así entonces tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.2. Si X es dualmente discreto y K es compacto; entonces $X \times K$ es dualmente discreto.

Demostración. Sea ϕ asignación de vecindades de $X \times Y$, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que para cada $\langle x, y \rangle \in X \times Y$ se tiene que $\phi(\langle x, y \rangle) = U_{\langle x,y \rangle} \times V_{\langle x,y \rangle}$, donde $U_{\langle x,y \rangle}$ y $V_{\langle x,y \rangle}$ son abiertos de X y Y que contiene a x y y respectivamente. Para cada $x \in X$ sean $F_x \in [K]^{<\omega}$ y W_x abierto que contiene a x que cumplan: $\bigcup \{V_{\langle x,y \rangle} : y \in F_x\} = K$ y $W_x = \bigcap \{U_{\langle x,y \rangle} : y \in F_x\}$. Tales F_x y W_x existen por la compacidad de K. Como X es dualmente discreto; la asignación que a cada x lo asocia con W_x tiene núcleo discreto D'. Sea $D = \{\langle x, y \rangle : x \in D' \wedge y \in F_x\}$ es núcleo discreto por construcción. ❏

El siguente es un resultado que ayudará a que ciertos productos sean dualmente discretos.

Teorema 3.3. (Alas, Junqueira, Wilson) Si $f : X \to Y$ es continua, cerrada y suprayectiva; y Y es dualmente discreto. Entonces X es dualmente discreto si y sólamente si cada fibra de f lo es.

Demostración. Supóngase que X es dualmente discreto; entonces por continuidad se tiene que cada fibra de X es un cerrado de X, y así, cada fibra es dualmente discreto.

Ahora asumamos que cada fibra es dualmente discreto. Sea ϕ asignación de vecindades para X. Para cada $y \in Y$ sean $D_y \subset f^{-1}(\{y\})$ núcleo discreto de $f^{-1}(\{y\})$ para ϕ y defínase $\psi(y) = Y \setminus (f[X \setminus \bigcup \{\phi(x) : x \in D_y\}])$; $\psi(y)$ es abierto pues f es cerrada, contiene a y por ser D_y núcleo de $f^{-1}(\{y\})$. Como Y es dualmente discreto, sea $K \subset Y$ núcleo discreto de Y para ψ. Sea $D = \bigcup \{D_y : y \in K\}$. D es discreto, si no, hay un $d \in D_y$ que es punto de acumulación de D; entonces como D_y es discreto se tiene que $d \in \overline{D \setminus D_y}$, ahora, como f es continua $f[\overline{D \setminus D_y}] \subset \overline{f[D \setminus D_y]}$ y así $f(d) \in \overline{K \setminus \{f(d)\}}$ lo cual contradice que K es discreto. Veamos que D es núcleo. Sea $x \in X$, sea $y \in K$ tal que $f(x) \in \psi(y)$. Se afirma que $x \in \bigcup \{\phi(w) : w \in D_y\}$, note que $f^{-1}[\psi(y)] \subset \bigcup \{\phi(w) : w \in D_y\}$, si no, sea $z \in \bigcup \{\phi(w) : w \in D_y\} \setminus f^{-1}[\psi(y)]$ y por la definición de ψ, se tiene que $f(z) \notin \psi(y)$, por otro lado, como f es suprayectiva se tiene que $f[f^{-1}[\psi(y)]] = \psi(y)$, lo cual es una contradicción. ❏

Analizando el teorema anterior, es natural preguntarse cuándo la propiedad de ser dualmente discreto se preserva a través de funciones cerradas, pero de hecho, no se sabe siquiera para funciones perfectas. A continuación presentamos un ejemplo de una función continua, abierta y suprayectiva que no preserva el ser dualmente discreto. Antes construyamos un espacio que nos servirá para tal ejemplo.

Sean $X \subset \mathbb{R}$ de tamaño ω_1 y $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ enumeración de X, consideremos en X la topología generada por la topología de subespacio de $\mathbb{R}$ unión los conjuntos de la forma $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$, donde $\alpha < \omega_1$. Entonces X no es Lindelöf pues la cubierta $\{\{x_\beta : \beta < \alpha\} : \alpha < \omega_1\}$ no tiene subcubierta numerable; X es hereditariamente separable, pues para $Y \subset X$, si Y es numerable, es claro, si Y es no numerable, existe $D \subset Y$ que es denso con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$, como D es numerable, existe un $\alpha_Y < \omega_1$ tal que para cada $x_\beta \in Y$ (con la numeración de X), pasa que $\beta < \alpha_Y$. Sea $D' = D \cup \{x_\beta : \beta < \alpha_Y\}$. Es claro que D' es denso y así X es hereditariamente separable. Observe que el anterior espacio es Hausdorff pero no es regular, espacios regulares con tales cracterísticas se les llama S *espacios* y existen sólo consistentemente.

Ejemplo 3.4. (Alas, Junqueira, Wilson) Existe una función suprayectiva, continua y abierta $f : X \to Y$ tales que X es dualmente discreto y Y no lo es.
Demostración. Sea $Y = \{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ un espacio como el construido antes. Para cada $\beta < \omega_1$ sea $X_\beta = \{y_\alpha : \alpha < \beta\}$, es claro que Y no es dualmente discreto, esto se sigue de que no es Lindelöf y que es hereditariamente separable, pues de esta forma hay asignación ϕ tal que todo núcleo es no numerable y entonces no puede ser discreto. Definámos $X = \bigoplus_{\beta<\omega_1} X_\beta$, gracias a la Proposición 3.1, se tiene que cada X_β es dualmente discreto y entonces también X lo es. De esta forma, si $f : X \to Y$ es la proyección natural, claramente es abierta y entonces tenemos nuestro ejemplo. ❏

Teorema 3.5. (Alas, Junqueira, Wilson) Si X es secuencialmente compacto y dualmente discreto, Y es secuencial y dualmente discreto. Entonces $X \times Y$ es dualmente discreto.
Demostración. Sea $\pi : X \times Y \to Y$ la proyección, gracias al Teorema 3.3 basta ver que π es carrada. Sean $A \subset X \times Y$ y $\{y_n : n \in \omega\} \subset \pi[A]$ que converge a $y \in Y$, veamos que $y \in \pi[A]$, esto bastará por Y ser secuencial. Para cada $n \in \omega$ sea $x_n \in X$ tal que $(x_n, y_n) \in A$. Como X es secuencialente compacto; entonces $(x_n)_n$ tiene subsucesión convergente $(x_{n_k})_k$ a x, así $(x_{n_k}, y_{n_k})_k$ converge a (x, y), como A es cerrado $(x, y) \in A$, luego $y \in \pi[A]$. ❏

Corolario 3.6. Para cada ordinal α se tiene que $\alpha \times \omega_1$ es dualmente discreto.
Demostración. Si $cof(\alpha) = \omega$, entonces $\alpha \times \omega$ es la unión disjunta de cerrado abiertos de la forma $\beta + 1 \times \omega_1$, donde β es un ordinal, así como $\beta + 1$ es compacto podemos aplicar el conocido lema del tubo a $\beta + 1 \times \omega_1$, y como ω_1 es dualmente discreto (ver 3.16), y de esta forma $\alpha \times \omega_1$ es dualmente discreto.

Si $cof(\alpha) > \omega$ aplicamos el teorema anterior. ❏

En general el producto de dos espacios dualmente discretos no necesariamente es dualmente discreto, al menos consistentemente, por otro lado, no se conocen muchos ejemplos de espacios que no sean dualmente discretos. El siguiente es un ejemplo de un producto, un poco más grande que finito, el cual consistentemente no es dualmente discreto.

Primero note que si Y es un S espacio; entonces también lo es $\mathbb{R} \times Y$. No es Lindelöf por tener una copia cerrada de Y; y es hereditariamente separable debido a que $\mathbb{R}$ es métrico separable.

TEOREMA 3.7. (Buzyakova, Tkachuk, Wilson) Bajo el axioma $\diamondsuit$ el espacio $\mathbb{R}^\kappa$ no es dualmente discreto para cualquier cardinal κ no numerable.

DEMOSTRACIÓN. Basta considerarse Y un S espacio de tamaño ω_1, tal espacio se puede construir bajo $\diamondsuit$, en [**9**] se puede ver esto. Se tiene entonces que $\mathbb{R} \times Y$ es un S espacio. Como $\diamondsuit$ implica CH podemos tomar $g : \mathbb{R} \to Y$ biyección. Defínase $X = \{\langle y, g(y)\rangle : y \in \mathbb{R}\}$, X es de nuevo un S espacio que no es dualmente discreto, pues si tomamos una cubierta sin subcubierta numerable de X; entonces cualquier núcleo debe ser no numerable y tal núcleo debe ser separable, en consecuencia no puede ser discreto. Como X es separable se tiene que $|C(X)| = \omega_1$. Consideremos a $\mu : X \to \mathbb{R}^{C(X)}$ la función que a cada $x \in X$ lo envía en $\mu(x) = (f(x))_{f \in C(X)}$, como X es completamente regular entonces $C(X)$ es una familia de funciones que separa puntos de cerrados, así μ es encaje. También se tiene que la imagen de μ es un cerrado de $\mathbb{R}^{C(X)}$ que claramente no es dualmente discreto, por lo tanto, $\mathbb{R}^{C(X)} = \mathbb{R}^{\omega_1}$ no es dualmente discreto, de la misma forma, si κ es cardinal no numerable, $\mathbb{R}^{\omega_1}$ se encaja en $\mathbb{R}^\kappa$ de forma cerrada, luego entonces $\mathbb{R}^\kappa$ no es dualmente discreto. ❑

El anterior ejemplo deja una pregunta abierta interesante, tal pregunta aparece en [**3**], no se sabe si existe algún modelo de la teoría de conjuntos en donde $\mathbb{R}^{\omega_1}$ sea dualmente discreto, es decir, se pregunta si el que $\mathbb{R}^{\omega_1}$ sea dualmente discreto es independiente de ZFC.

2. Espacios Ordenados

Ahora anlizaremos que pasa con los espacios ordenados y con sus subespacios. Primero daremos algunas definiciones y notación que es estándar para espacios ordenados.

DEFINICIÓN 3.8. Sea X un espacio, decimos que X es *subordenable* si X es subespacio de un espacio ordenado.

A los espacios subordenables en la literatura también se les conoce como espacios GO. Claramente todo espacio subordenable cuenta con un orden natural, y no es otro que el heredado por el espacio ordenado del cual se puede ver como subespacio.

Dado X un espacio subordenable existe un espacio ordenado compacto minimal que lo contiene densamente. Una *grieta* (respectivamente *semi grieta*) es una pareja (A, B) de abiertos tales que $X = A \cup B$ tales que para cada $a \in A$ y $b \in B$; se tiene que $a < b$, A no tiene elemento maximal y B no tiene elemento minimal (respectivamente, A no tiene elemento maximal o B no tiene elemento minimal, pero no pasan ambas). Si $(\emptyset, X)$ y $(X, \emptyset)$ son grietas, estas son llamadas las *grietas finales de X*. El mínimo espacio ordenado compacto que contiene a X se construye agregando elementos por cada grieta y cada semi grieta, con el orden definido por la grieta (semi grieta), es decir, si x fué agregado por la grieta (semi grieta) (A, B), entonces el orden será "$A < x < B$", es claro que el espacio así construido es compacto, ordenado, contiene a X y es el más pequeño con esta propiedad. Al anterior espacio se le conoce como la *compactación de Dedekind de X*.

Antes de que se supiera que todo espacio subordenable es dualmente discreto; O.T. Alas, L.R. Junqueira y R.G. Wilson probaron que todo espacio subordenable que es de *extención local numerable* (es decir, que para cada elemento del espacio existe una vecindad, de este elemento, que tiene extensión numerable) es dualmente discreto.

El próximo teorema, es el problema que intentábamos resolver, el cual ya se había resuelto y viene a generalizar el anterior mencionado, tal teorema dice que todos lo espacios ordenados son dualmente discretos, se presenta la demostración, pero antes algunos lemas.

Lema 3.9. Sea X espacio subordenable; entonces existe un Y ordenado tal que $X \subset Y$ como subespacio y además X es cerrado en Y. Sea τ la topología de X, y sea λ la topología del orden en X.

Demostración. Definamos a Y como subconjunto de $X \times \mathbb{Z}$ con el orden lexicográfico como sigue:

$$Y = X \times \{0\} \cup \{\langle x, n\rangle : (x \in X) \wedge ([x, \rightarrow) \in \tau \setminus \lambda) \wedge (n < 0)\}$$
$$\cup \{\langle x, m\rangle : (x \in X) \wedge ((\leftarrow, x] \in \tau \setminus \lambda) \wedge (m > 0)\}.$$

Es claro que que la topología de X es la misma que la heredada por Y y X es cerrado en Y pues cada elemento en $Y \setminus X$ tiene predecesor y sucesor inmediatos. ❑

Corolario 3.10. Si todo espacio ordenado es dualmente discreto; entonces también lo es todo espacio subordenable.

Lema 3.11. Sean X espacio ordenado, $F \subset X$ cerrado y $x_0 \in F$. Si ϕ es asignación de vecindades tal que $\phi(x)$ es convexo para cada $x \in X$; entonces existe un $D \subset X$ discreto tal que $x_0 \in D$ y para cada $y \in F \setminus \bigcup\{\phi(x) : x \in D\}$ se tiene que $\phi(y) \cap D = \emptyset$.

Demostración. Definamos $D_0 = \{x_0\}$ y asuma que se tienen definidos conjuntos discretos D_i para $i < n$ que satisfacen:

(1) $\bigcup\{D_j : j \leq i\}$ es discreto;
(2) $D_i \subset F \setminus \bigcup\{\phi(d) : d \in \bigcup\{D_j : j < i\}\}$;
(3) $\bigcup\{\phi(d) : d \in \bigcup\{D_j : j \leq i\}\}$ es convexo;
(4) Si $y \in F \setminus \bigcup\{\phi(d) : d \in \bigcup\{D_j : j \leq i-1\}\}$, entonces $y \in \bigcup\{\phi(d) : d \in D_i\}$;
(5) Si D_{n-1} no tiene elemento maximal (minimal), entonces $\sup D_{n-1}$ ($\inf D_{n-1}$) no existe.

Sea $U_{n-1} = \bigcup\{\phi(d) : d \in \bigcup\{D_i : i < n\}\}$ si para todo $x \in F \setminus U_{n-1}$ se tiene que $\phi(x) \cap D_{n-1} = \emptyset$, entonces $D = \bigcup\{D_i : i < n\}$ es como queremos. Supongamos que lo anterior no pasa y defínanse $F_n = F \setminus U_{n-1}$ y

$$F_n^+ = \{x : (x \in F) \wedge (\forall y \in U_{n-1})(y < x)\}.$$
$$F_n^- = \{x : (x \in F) \wedge (\forall y \in U_{n-1})(y > x)\}.$$

Sean

$$C_n^+ = \{x \in F_n^+ : \phi(x) \cap D_{n-1} \neq \emptyset\}.$$

$$C_n^- = \{x \in F_n^- : \phi(x) \cap D_{n-1} \neq \emptyset\}.$$

Una vez teniendo lo anterior, sólo trabajaremos con C_n^+ ya que es análogo para C_n^-. Analizemos los caso que se pueden presentar.

Si C_n^+ tiene elemento máximo, digamos c_n, entonces definamos $D_n^+ = \{c_n\}$.

Si C_n^+ no tiene elemento máximo, pero sí tiene supremo, digamos s_n, sea $c_n \in \phi(s_n) \cap C_n^+$, así definimos $D_n^+ = \{c_n, s_n\}$.

Si C_n^+ no tiene ni máximo ni supremo; si existe un $c_n \in C_n^+$ tal que $C_n^+ \subset \phi(c_n)$, definimos $D_n^+ = \{c_n\}$.

Si no pasa el caso anterior, sea $S_n \subset C_n^+$ discreto cofinal con elemento mínimo y sea $D_n^+ = S_n$.

Sea D_n^- construido análogamente.Veamos que $D_n = D_n^+ \cup D_n^-$ es como se quería. Note que la unión con los anteriores es discreto; pues la unión de los anteriores o tiene máximo (mínimo) o simplemente no existe, pero D_n^+ (D_n^-) tiene mínimo (máximo) y así se cumple (1). Ver que cumple (2)-(5), es claro de la construcción. Una vez definidos los D_n, sea $D = \bigcup\{D_n : n \in \omega\}$. D es discreto debido a las condiciones (1) y (2) sobre los D_n. Basta ver que para todo $y \in F \setminus \bigcup\{\phi(d) : d \in D\}$ se tiene que $\phi(y) \cap D = \emptyset$, supongamos que hay algún y que no lo cumple, así existe un n tal que $\phi(y) \cap D_n \neq \emptyset$, por la condición (4) $y \in \bigcup\{\phi(x) : x \in D_{n+1}\}$. En consecuencia D es como se quería. ❑

Teorema 3.12. (Peng) Sea X espacio ordenado; entonces X es dualmente discreto.

Demostración. Sean ϕ asignación de vecindades de X y $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ enumeración de X. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que ϕ es convexa pues la base de la topología es convexa. Por recursión definamos discretos. Sea D_0 el dado por el lema enterior considerando a X como el cerrado y tal que $x_0 \in D_0$. Suponga construido D_β para $\beta < \alpha$ y defínase $D_\alpha = \emptyset$ si x_α es elemento de $\bigcup\{\phi(d) : d \in \bigcup\{D_\beta : \beta < \alpha\}\}$; si no, defínase D_α como el del lema anterior si consideramos al cerrado $X \setminus \bigcup\{\phi(d) : d \in \bigcup\{D_\beta : \beta < \alpha\}\}$ y tal que $x_\alpha \in D_\alpha$.

Tómese $D = \bigcup\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$, veamos que es núcleo discreto de X. Es núcleo pues para cada $\alpha < \kappa$ se tiene que $x_\alpha \in \bigcup\{\phi(x) : x \in \bigcup\{D_\beta : \beta \leq \alpha\}\}$. Es discreto pues si $d \in D_\alpha$ se tiene que $\phi(d) \cap \bigcup\{D_\beta : (\beta < \kappa) \wedge (\beta \neq \alpha)\} = \emptyset$ esto por como definimos los D_α. Como D_α es discreto y por lo anterior D también lo es. Así el resultado queda probado. ❑

Corolario 3.13. Todo espacio subordenable es hereditarimente dualmente discreto.

Demostración. Claramente subespacio de subordenable es subordenable, por lo tanto, basta con probar que los subordenables son dualmente discretos.

Sean X subordenable y Y ordenado tal que X es cerrado en Y (esto se puede hacer por el Lema 3.9), de esta forma por el teorema anterior y debido a que la propiedad de ser dualmente discreto es hereditaria a subespacios cerrados se tiene que X es dualmente discreto. ❑

Probaremos que el producto de dos espacios subordenables localmente compactos es dualmente discreto, para eso necesitaremos unas definiciones y unas observaciones.

Definición 3.14. Dados L un espacio ordenado compacto y $x \in L$, decimos que un subconjunto A de $(\leftarrow, x)$ es 0-*no acotado para* x, si para cada $y \in L$ con $y < x$ existe un $a \in A$ tal que $y \leq a$. Decimos que un subconjunto B de $(x, \rightarrow)$ será 1-*no acotado para* x, si es 0-no acotado para x cuando invertimos el orden de L. De acuerdo a lo anterior definimos lo siguiente:

$$0\text{-}cof(x) = min\,\{|A| : A \text{ es 0-no acotado para } x\};$$
$$1\text{-}cof(x) = min\,\{|B| : B \text{ es 1-no acotado para } x\}.$$

Algunas observaciones inmediatas de la definición anterior; se tiene que si x es el primer elemento de L, entonces $0\text{-}cof(x) = 0$, $0\text{-}cof(x) = 1$ si x tiene predecesor inmediato en L y $0\text{-}cof(x)$ es un cardinal regular en otro caso. Note también que para cada x podemos encontrar subconjuntos 0-no acotados homeomorfos a $0\text{-}cof(x)$. Análogamente se tiene para $1\text{-}cof(x)$ y conjuntos 1-no acotados.

Teorema 3.15. (Peng) Si X y Y son espacios subordenables localmente compactos; entonces $X \times Y$ es dualmente discreto.

Demostración. Sea ϕ asignación de vecindades para $X \times Y$, supóngase además que para cada $\langle x, y\rangle \in X \times Y$ pasa que $\phi(\langle x, y\rangle) = J_x \times J_y$, donde J_x y J_y son intervalos abiertos de X y Y que contienen a x y y respectivamente. Sean LX y LY las compactaciones de Dedekind de X y Y respectivamente, como X y Y son localmente compactos se tiene que X es abierto en LX y Y es abierto en LY. Para cada $\langle x, y\rangle \in X \times Y$ sean I_x y I_y intervalos maximales contenidos en X y Y que contienen a x y y respectivamente. Supóngase que ya tenemos tales intervalos, note que

$$I_x \times I_y = (I_x \cap [x, \rightarrow) \times I_y \cap [y, \rightarrow)) \cup (I_x \cap [x, \rightarrow) \times I_y \cap (\leftarrow, y])\cup$$
$$(I_x \cap (\leftarrow, x] \times I_y \cap (\leftarrow, y]) \cup (I_x \cap (\leftarrow, x] \times I_y \cap [y, \rightarrow)).$$

De la anterior descompocisión, el teorema anterior y gracias a que

$$X \times Y = \bigoplus \{I_x \times I_y : \langle x, y\rangle \in X \times Y\}.$$

Es claro que basta con probar que $I_x \cap [x, \rightarrow) \times I_y \cap [y, \rightarrow)$ es dualmente discreto.

Construyamos tales intervalos. Para cada $x \in X$ (análogamente para cada $y \in Y$), considérese

$$b_x = \text{ínf}\,\{z \in LX \setminus X : z > x\} \text{ y}$$
$$a_x = \sup\,\{z \in LX \setminus X : z < x\}.$$

Tales a_x y b_x existen por la compacidad de LX (podemos suponer que $(LX \setminus X) \cap (x, \rightarrow) \neq \emptyset$, de otra forma, $[x, \rightarrow)$ es un compacto; y entonces 3.2 implica lo que queremos), además $a_x < x < b_x$, esto por la compacidad local de X.

Probemos que $[x, b_x) \times [y, b_y)$ es dualmente discreto. Si $0\text{-}cof(b_x) = \omega$. Sea $(x_n)_n$ sucesión creciente cofinal; entonces por 3.2 cada $[x, x_n] \times [y, b_y)$ es dualmente discreto, y de esta forma $[x, b_x) \times [y, b_y)$ es una unión numerable de cerrados dualmente discretos y así, también se tiene que $[x, b_x) \times [y, b_y)$ es dualmente discreto. Análogamente se procede si $0\text{-}cof(b_y) = \omega$.

Supóngase entonces que 0-$cof(b_x) = \lambda > \omega$ y 0-$cof(b_y) = \mu > \omega$. Sean $A = \{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$ y $B = \{y_\beta : \beta < \mu\}$ sucesiones continuas cofinales donde corresponde. Note que $A \times B$ es homeomorfo a $\lambda \times \mu$ y así por 3.18 tiene núcleo discreto D_1 para ϕ.

Veamos que existen $\langle p, q\rangle \in [x, b_x)\times[y, b_y)$ tales que $Z = ([x, b_x)\times[y, b_y)\setminus\bigcup\{\phi(d) : d \in D_1\}) \subset (([x, p] \times [y, b_y)) \cup ([x, b_x) \times [y, q]))$. Si no pasara, definamos para cada $n \in \omega$ elementos $\langle z_n, w_n\rangle \in Z$ y $\langle p_n, q_n\rangle \in A \times B$ que $z_n < p_n < z_{n+1}$ y $w_n < q_n < w_{n+1}$. Por definición de las sucesiones y como 0-$cof(b_x)$, 0-$cof(b_y) > \omega$; se tiene $\sup\{z_n : n \in \omega\} = z = \sup\{p_n : n \in \omega\}$ y $\sup\{w_n : n \in \omega\} = w = \sup\{q_n : n \in \omega\}$; como Z es cerrado pasa que $\langle z, w\rangle \in Z$, pero $A \times B$ también es cerrado; así $\langle z, w\rangle \in A \times B$, lo cual es una contradicción con la definición de Z.

Por lo anterior existen p y q tales que $Z \subset ([x, p] \times [y, b_y)) \cup ([x, b_x) \times [y, q])$ pero note que por 3.2 y como F es la unión de dos cerrados que son dualmente discretos y de esta manera F también es dualmente discreto. Sea D_2 núcleo discreto de F. Definimos $D = D_1 \cup D_2$. Claramente D es núcleo discreto de $[x, b_x) \times [y, b_y)$ que es lo que se quería. ❏

3. Ordinales y sus productos finitos

En esta sección estudiaremos como se comporta el ser dualmente discreto en los ordinales y sus productos finitos. El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de 3.10 y 3.12, pero haremos la prueba debido a que es una técnica que usaremos varias veces en esta sección.

Teorema 3.16. (Alas, Junqueira, Wilson) *Todo ordinal es hereditariamente dualmente discreto.*

Demostración. Lo haremos por inducción. Claramente el resultado es cierto para ω. Sean $X \subset \alpha$ y ϕ asignación de vecindades para X.

Si $\alpha = \beta + 1$. Sea $X \subset \alpha$, si $\beta \in X$, consideremos $Y = X \setminus \phi(\beta)$, por hipótesis de inducción sea D núcleo discreto para Y, así $D' = D \cup \{\beta\}$ en núcleo discreto para X.

Si α es límite y $cof(\alpha) = \omega$. Sea $\{\beta_n : n < \omega\}$ sucesión creciente cofinal en α (podemos suponer que $0 \notin X$ y que $\beta_0 = 0$); entonces $\{X \cap (\beta_n, \beta_{n+1}] : n < \omega\}$ es una partición en cerrado abiertos de X. Por hipótesis de inducción cada elemento de la partición es dualmente discreto. Sea D_n núcleo discreto de $X \cap (\beta_n, \beta_{n+1}]$; así, como la partición fué en conjuntos cerrado abiertos se tiene que $D = \bigcup\{D_n : n \in \omega\}$ es núcleo discreto de X.

Si α es límite y $cof(\alpha) > \omega$; primero supongamos que X es estacionario. Para cada β ordinal límite que pertenece a X sea $x_\beta < \beta$ tal que $(x_\beta, \beta] \subset \phi(\beta)$, esto define una función regresiva en un conjunto estacionario (pues el conjunto de puntos límite de un conjunto estacionario, es de nuevo estacionario). Por el lema de Fodor existe un $\gamma < \alpha$ y un conjunto estacionario $S \subset X$ tal que para todo $\beta \in S$ pasa que $x_\beta = \gamma$. Sea $D_1 \subset S$ discreto cofinal en α y por hipótesis de inducción existe $D_2 \subset X \cap [0, \gamma]$, entonces $D = D_1 \cup D_2$ es núcleo discreto de X.

Si α es límite, $cof(\alpha) > \omega$ y X es no estacionario. Sea $C = \{c_\beta : \beta < \kappa\}$ cerrado no acotado ajeno con X y enumerado de forma continua. Podemos asumir que $0 = c_0$ y $0 \notin X$, de esta forma $X = \bigoplus_{\beta<\kappa}(X \cap (c_\beta, c_{\beta+1}])$ y por hipótesis de inducción cada elemento de esta partición en cerrado abiertos que define C es dualmente discreto. En conclusión X es dualmente discreto y hemos terminado. ❑

Hasta ahora se tenía algo un poco similar para los productos de ordinales. Enseguida tales resultados.

Teorema 3.17. (Alas, Junqueira, Wilson) Si λ y μ son cardinales y pasa una de las siguientes: $\mu \leq cof(\lambda)$ ó $cof(\lambda) = \omega$. Entonces $\lambda \times \mu$ es dualmente discreto.
Demostración. Si $cof(\lambda) = \omega$. Sea $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ sucesión cofinal en λ, así $\lambda \times \mu$ es la unión disjunta de cerrado abiertos de la forma $(\alpha_n, \alpha_{n+1}] \times \mu$ y una copia cerrado abierta de μ que por 3.2 y 3.16 son dualmente discretos, así, también $\lambda \times \mu$ es dualmente discreto. Entonces asuma que $\mu \leq cof(\lambda)$ y $cof(\lambda) > \omega$. Sea $\pi : \lambda \times \mu \to \mu$ la proyección, de nuevo por 3.16 y 3.3 basta ver que π es cerrada. Sea $A \subset \lambda \times \mu$ cerrado; gracias a como es la topología en los ordinales nos bastará con ver que las sucesiones transfinitas crecientes en $\pi[A]$ tienen su supremo en $\phi[A]$. Sea $\{y_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset \pi[A]$ que converge a $y \in \mu$, obviamente $\kappa < \mu$. Para $\alpha < \kappa$ sea $x_\alpha \in \lambda$ tal que $(x_\alpha, y_\alpha) \in A$, como $\kappa < \mu \leq cof(\lambda)$, entonces $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ se queda contenida en un subconjunto compacto de λ, entonces hay un $S \subset \kappa$ cofinal que converge a $x \in \lambda$; como A es cerrado, entonces $(x, y) \in A$, así $y \in \pi[A]$ que es lo que se quería. ❑

Corolario 3.18. Si λ y μ son cardinales regulares; entonces $\lambda \times \mu$ es dualmente discreto.

Corolario 3.19. Cualquier producto finito de cardinales regulares es dualmente discreto.
Demostración. Es análoga a la anterior tomando la proyección de el producto de los cardinales hacia el cardinal más pequeño y de la misma manera se verifica que es cerrada. ❑

El siguiente resultado tiene su propia prueba, muy similar a la de 3.15 y también es consecuencia inmediata del mismo resultado.

Teorema 3.20. (Peng) Si α y β son ordinales; entonces $\alpha \times \beta$ es dualmente discreto.

Corolario 3.21. Cualquier producto finito de ordinales es dualmente discreto.
Demostración. Es análoga a la demostración de 3.15. ❑

También resultados de Peng son los siguientes, que además, son las mejores aproximaciones a el resultado principal de este trabajo que había hasta el momento.

Lema 3.22. Si α es un ordinal regular no numerable y $X \subset \alpha \times \alpha$ un subespacio normal. Si $X \cap \{\langle\beta, \beta\rangle : \beta \in \alpha\} = \emptyset$; entonces el conjunto $\{x \in \alpha : \{y \in \alpha : \langle x, y\rangle \in X\}$ es estacionario$\}$ es no estacionario.

Demostración. Supóngase que $A = \{x \in \alpha : \{y \in \alpha : \langle x, y\rangle \in X\}$ es estacionario$\}$ es estacionario. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que A consta sólo de ordinales límite. Para cada $\beta \in A$ sea $B_\beta = \{y : \langle \beta, y\rangle \in X\}$, como B_β es estacionario; entonces

$$B_\beta \cap (\bigcap \{\overline{B_\gamma} : \gamma < \beta \wedge \gamma \in A\}) \neq \emptyset.$$

De esta forma defínase $g(\beta) \in B_\beta \cap (\bigcap \{\overline{B_\gamma} : \gamma < \beta \wedge \gamma \in A\})$ de tal suerte que $g(\beta) > \beta$. Sea $A^* = \{\beta \in A : (\exists y)(y < \beta < g(y))\}$, por el Lema de Fodor y como g es función se tiene que A^* es no estacionario. Sea C cerrado no acotado en α tal que $C \cap A^* = \emptyset$, de esta forma para cualesquiera $\beta_1, \beta_2 \in C \cap A$ se tiene que si $\beta_1 < \beta_2$ pasa que $g(\beta_1) < \beta_2$.

Defínase $G = \{\langle \beta, g(\beta)\rangle : \beta \in C \cap A\}$ note que G es un cerrado discreto de X, pues basta con hacer evidente que para que $\langle x, y\rangle \in \overline{G}$ se necesita que $x < y$ y $x \in \overline{C \cap A}$, de esta forma, para x y y existen $a_x < x$ y $x \leq b_y < y$, así por la definición de G se tiene que $|(a_x, x] \times (b_y, y] \cap G| \leq 1$. En consecuencia G es cerrado discreto.

Sean A_1 y A_2 estacionarios ajenos tales que $A_1 \cup A_2 = C \cap A$. Por lo tanto si definimos $G_1 = \{\langle \beta, g(\beta)\rangle : \beta \in A_1\}$ y $G_2 = \{\langle \beta, g(\beta)\rangle : \beta \in A_2\}$ se tiene que G_1 y G_2 son cerrados ajenos en X. Por normalidad existen U_1 y U_2 abiertos que los separan, es decir, $G_1 \subset U_1$, $G_2 \subset U_2$ y tales que $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$. Para cada $i = 1, 2$ y cada $\beta \in A_1$ existen $x_\beta < \beta$ y $y_{g(\beta)} < g(\beta)$ tales que $(x_\beta, \beta] \times (y_{g(\beta}, g(\beta)] \cap X \subset U_i$, por el Lema de Fodor existen un $p_i \in \alpha$ y un estacionario A'_i tal que para cualquier $\beta \in A'_i$ se tiene que $x_\beta = p_i$.

Sea $\beta_1 \in \overline{A'_1} \cap A'_2$ y $\beta_1 > p_1, p_2$. Gracias a que B_{β_1} es estacionario, sea

$$\beta_2 \in B_{\beta_1} \cap \overline{A'_1 \cap Acum(A'_1)} \cap \overline{A'_2 \cap Acum(A'_2)}$$

y tal que $\beta_2 > \beta_1$, donde $Acum(A'_i)$ es el conjunto de puntos de acumulación de A'_i $(i = 1, 2)$; así se tiene que $\langle \beta_1, \beta_2\rangle \in X$ y $\beta_1, \beta_2 \in \overline{A'_1} \cap \overline{A'_2}$.

Veamos que $\langle \beta_1, \beta_2\rangle \in \overline{U_1}$. Sea V abierto que contiene a $\langle \beta_1, \beta_2\rangle$ en X; entonces hay un $y_{\beta_2} \in \alpha$ tal que $\beta_1 \leq y_{\beta_2} < \beta_2$ y tal que $(\{\beta_1\} \times (y_{\beta_2}, \beta_2]) \cap X \subset V$. Por la eleción de β_2 existe un $\beta_3 \in A'_1$ tal que $\beta_3 < \beta_2$. De esta forma $\beta_3 < g(\beta_3) < \beta_2$. Ahora como $\beta_3 \in \overline{B_{\beta_1}}$ entonces existe un $\beta_4 \in (\beta_3, g(\beta_3)] \cap (y_{g(\beta_3)}, \beta_3] \cap B_{\beta_1}$; luego entonces $\langle \beta_1, \beta_4\rangle \in X \cap V$. De esta forma se tiene que $((p_1, \beta_3] \times (y_{g(\beta_3)}, g(\beta_3)]) \cap X \subset U_1$. Luego $\langle \beta_1, \beta_4\rangle \in (p_1, \beta_3] \times (y_{g(\beta_3)}, g(\beta_3)]$, por lo tanto, $\langle \beta_1, \beta_4\rangle \in U_1$. En consecuencia $\langle \beta_1, \beta_2\rangle \in \overline{U_1}$. De forma análoga se tiene que $\langle \beta_1, \beta_2\rangle \in \overline{U_2}$, lo cuál es una contradicción y entonces A es no estacionario. □

Teorema 3.23. (Peng) Sean α y β ordinales. Si $X \subset \alpha \times \beta$ es normal; entonces X es dualmente discreto.

Demostración. Sean γ y δ ordinales minimales tales que: γ es el mínimo ordinal tal que existen un η y un $X \subset \gamma \times \eta$ normal que no es dualmente discreto y δ es el mínimo de tales η. Demostraremos por pasos que si tales γ y δ existieran tiene que pasar que $\gamma = \delta$ y son cardinales regulares.

- Paso (1). Se tiene que $cof(\gamma) \neq 1$ y $cof(\delta) \neq 1$.

Supóngase que $cof(\gamma) = 1$ entonces $\gamma = \gamma' + 1$. Sea $X \subset \gamma \times \delta$ subespacio normal y ϕ asignación de vecindades para X. Consideremos $X \cap \{\gamma'\} \times \delta$, gracias a 3.16 se tiene que existe D_1 núcleo discreto de $X \cap \{\gamma'\} \times \delta$. Sea $Y = X \setminus \bigcup\{\phi(d) : d \in D_1\}$. Y es un subespacio cerrado de X, por lo tanto, Y es normal y $Y \subset \gamma' \times \delta$ pero como γ era el mínimo con esa propiedad, se tiene que Y tiene núcleo discreto D_2; así $D = D_1 \cup D_2$ es núcleo discreto de X. En consecuencia $cof(\gamma) \neq 1$. Análogamente $cof(\delta) \neq 1$.

• Paso (2). Pasa que $cof(\gamma) \neq \omega$ y $cof(\delta) \neq \omega$.

Supóngase que $cof(\gamma) = \omega$. Sean $X \subset \gamma \times \delta$ subespacio normal y $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ sucesión cofinal en γ tal que $a_0 = 0$. Supóngamos además que $\{0\} \times \delta \cap X = \emptyset$, pues tal subconjunto es un cerrado abierto en X y dualmente discreto gracias a 3.16. Entonces como γ es el mínimo con la propiedad de tener subespacios normales no dualmente discretos, pasa que, para cada $n \in \omega$ el subespacio $(a_n, a_{n+1}] \times \delta \cap X$ es cerrado abierto en X; entonces normal y dualmente discreto. Así X es dualmente discreto lo cual es una contradicción, de esta forma obtenemos que $cof(\gamma) \neq \omega$. Análogameete se tiene que $cof(\delta) \neq \omega$.

• Paso (3). Debe suceder que $cof(\gamma) = \gamma$ y $cof(\delta) = \delta$.

Supongamos que $cof(\gamma) = \alpha < \gamma$. Sean $C = \{c_\xi : \xi < \alpha\}$ sucesión cofinal y continua en γ, $X \subset \gamma \times \delta$ subespacio normal y ϕ asignación de vecindades para X; de nuevo podemos asumir que $c_0 = 0$. Debido a que γ es mínimo con respecto a la propiedad de tener subespacios normales no dualmente discretos tenemos que $X \cap (C \times \delta)$ es dualmente discreto, esto por ser un subespacio cerrado de X. Sea D_1 núcleo discreto de $X \cap (C \times \delta)$. Sea $Y = X \setminus \bigcup\{\phi(d) : d \in D_1\}$, Y es un subespacio cerrado de X, y $Y = \bigoplus\{((c_\xi, c_{\xi+1}] \times \delta) \cap Y : \xi < \alpha\}$ y así, por la minimalidad de γ, se tiene que cada elemento de la partición dada por C es dualmente discreto y en consecuencia Y también lo es. Sea D_2 núcleo discreto para Y; entonces $D = D_1 \cup D_2$ es núcleo discreto para X, tal contradición nos dice que $cof(\gamma) = \gamma$. Análogamente $cof(\delta) = \delta$.

• Paso (4). Ocurre que γ y δ son cardinales regulares no numerables y que $\gamma = \delta$.

Ya se tiene que γ y δ son cardinales regulares no numerables, resta ver que son iguales. Suponga que $\gamma < \delta$. Sean $X \subset \gamma \times \delta$ y ϕ asignación de vecindades para X.

Sea $A = \{x : \{y : \langle x, y\rangle \in X\}$ es estacionario en $\delta\}$.

Si $A = \emptyset$; entonces para cada $\beta \in \gamma$ el conjunto $B_\beta = \{y : \langle \beta, y\rangle \in X\}$ es no estacionario, así, como $\gamma < \delta$ se tiene que $B = \bigcup\{B_\beta : \beta < \gamma\}$ es no estacionario. Sea $C = \{c_\xi : \xi < \delta\}$ cerrado no acotado en δ enumerado de forma continua y tal que $C \cap B = \emptyset$, podemos suponer que $0 \in C$. De esta forma $X = \bigoplus\{X \cap (\gamma \times (c_\xi, c_{\xi+1}])\}$, por la minimalidad de γ y como cada elemento de la partición definida por C es un cerrado en X, y entonces normal y dualmente discreto; en consecuencia X es dualmente discreto, lo cual es una contradicción y así $A \neq \emptyset$.

Tenemos entonces que $A \neq \emptyset$. Para cada $a \in A$, se tiene que B_a es estacionario en δ. Podemos asumir que para cada $\langle x, y\rangle \in X$ la vecindad que ϕ le asigna es de la forma $(a_{\langle x,y\rangle}, x] \times (b_{\langle x,y\rangle}, y]$, donde $a_{\langle x,y\rangle} < x$ y $b_{\langle x,y\rangle} < y$. Para cada $x \in A$ se tiene que $|a_{\langle x,y\rangle} : y \in B_x| < \gamma < \delta$, de esta forma se tiene que existen $B'_x \subset B_x$ y un $a_x < x$ tales que para cada $y \in B'_x$ se tiene que

$a_{\langle x,y\rangle} = a_x$, esto pasa pues la unión de menos que δ conjuntos no estacionarios es de nuevo no estacionario. Tenemos definida entonces una asignación de vecindades ψ en A, la que a cada $x \in A$ le asigna $\psi(x) = (a_x, x]$. Sea D_1 núcleo discreto de A. Para cada $x \in A$ sea $H_x \subset B'_x \cap C'$ discreto cofinal en δ, donde C' es cerrado no acotado que evita a las segundas coordenadas de $Y = X \setminus \bigcup\{\phi(z) : z \in \bigcup\{\{x\} \times B'_x : x \in A\}\}$ tal C' existe pues Y es como en el caso que supusimos $A = \emptyset$, además por la misma razón Y es dualmente discreto. Sea D_2 núcleo para Y. Entonces se tiene que $D = \bigcup\{\{x\} \times H_x : x \in D_1\} \cup D_2$ es núcleo discreto de X, lo cual es una contradicción y así $\delta \leq \gamma$. Análogamente $\gamma \leq \delta$. En conclusión $\gamma = \delta$.

Tenemos entonces $X \subset \gamma \times \gamma$ subespacio normal y ϕ asignación de vecindades para X. Sea $\Delta = \{\langle \alpha, \alpha\rangle : \alpha \in \gamma\}$, debido a 3.16 $\Delta \cap X$ es dualmente discreto. Sea D_1 núcleo discreto de $\Delta \cap X$. Sea $F = X \setminus \bigcup\{\phi(d) : d \in D_1\}$; entonces F es cerrado en X y así un subespacio normal tal que $F \cap \Delta = \emptyset$; de acuerdo al lema anterior se tiene que

$$F_A = \{x \in \gamma : \{y \in \gamma : \langle x, y\rangle \in F\} \text{ es estacionario en } \gamma\};$$

y

$$F_B = \{y \in \gamma : \{x \in \gamma : \langle x, y\rangle \in F\} \text{ es estacionario en } \gamma\};$$

son no estacionarios, como $F \cap \Delta = \emptyset$ lo probaremos para $F_1 = \{\langle x, y\rangle \in F : y < x\}$. Note que F_1 es un cerrado abierto de F; sea F_2 el complemento de F_1 en F. Demostraremos que F_1 es dualmente discreto y será análogo para F_2.

Sea $C = \{c_\alpha : \alpha < \gamma\}$ cerrado no acotado en α enumerado de forma continua tal que $0 \in C$ y $C \cap F_B = \emptyset$. Para cada α considérese C_α cerrado no acotado tal que $C_\alpha \cap A_{c_\alpha} = \emptyset$, donde $A_{c_\alpha} = \{x \in \gamma : \langle x, c_\alpha\rangle \in F_1\}$. Sea $E = \Delta_{\alpha<\gamma} C_\alpha$, podemos suponer que $0 \in E$ y sea $\{e_\alpha : \alpha < \gamma\}$ enumeración continua de E. Obsérvese que gracias a que estamos trabajando con F_1 se tiene que si consideramos $Y = F_1 \cap (\gamma \times C)$ se tiene que Y es cerrado en F_1 y $Y = \bigoplus\{Y \cap ((e_\alpha, e_{\alpha+1}] \times \gamma) : \alpha < \gamma\}$ y, por la minimalidad de γ cada elemento de la partición dada por E es un cerrado, de esta forma es normal y dualmenete discreto; se tiene entonces que Y también es dualmente discreto. Sea D_2 núcleo discreto de Y. Si $Z = F_1 \setminus \bigcup\{\phi(d) : d \in D_2\}$. Entonces Z es un cerrado de F_1 y $Z = \bigoplus\{Z \cap (\gamma \times (c_\alpha, c_{\alpha+1}])\}$ y así, por la minimalidad de γ se tiene que cada elemento de la partición es dualmenete discreto y así lo es también Z. Si D_3 es núcleo discreto para Z; se obtiene que $D_4 = D_2 \cup D_3$ es núcleo para F_1, de lo anterior se deduce que X es dualmente discreto, lo cual contradice que γ era minimal con respecto a la propiedad de tener subespacios normales no dualmente discretos. Así el teorema queda demostrado. ❏

Teorema 3.24. (Peng) Sean α y β ordinales tales que existe un $X \subset \alpha \times \beta$ de extensión numerable que no es dualmente discreto tales que para cualquier $\xi < \alpha$ ($\eta < \beta$) y cualquier subespacio de extensión numerable de $\alpha \times \eta$ ($\xi \times \beta$) es dualmente discreto. Entonces $\alpha = \beta$ y son cardinales regulares.

Demostración. Es análoga a la primera parte del Teorema 3.23. ❏

LEMA 3.25. Si α es un ordinal regular no numerable y $X \subset \alpha\times\alpha$ un subespacio de extensión numerable. Si $X \cap \{\langle\beta,\beta\rangle : \beta \in \alpha\} = \emptyset$; entonces el conjunto

$$\{x \in \alpha : \{y \in \alpha : \langle x, y\rangle \in X\} \text{ es estacionario}\}$$

es no estacionario.

DEMOSTRACIÓN. Es análoga a la primera parte del Lema 3.22. ❏

LEMA 3.26. Supóngase que $\mathcal{P}$ es una propiedad que satisface lo siguiente:

(1) Si X es discreto, entonces $X \in \mathcal{P}$;
(2) Si X es dualmente $\mathcal{P}$, entonces todo subespacio cerrado es dualmente $\mathcal{P}$;
(3) Si $X = \oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ y para cada α se tiene que $X_\alpha \in \mathcal{P}$, entonces $X \in \mathcal{P}$.

Si κ es un cardinal regular no numerable y tal que para cada $\beta < \kappa$ se tiene que $\beta \times \kappa$ es dualmente $\mathcal{P}$. Si $X \subset \kappa \times \kappa$ y los siguientes conjuntos

$$A = \{x \in \kappa : \{y \in \kappa : \langle x, y\rangle \in X\} \text{ es estacionario en } \kappa\};$$

y

$$B = \{y \in \kappa : \{x \in \kappa : \langle x, y\rangle \in X\} \text{ es estacionario en } \kappa\}$$

son no estacionarios; entonces X es dualmente discreto.

DEMOSTRACIÓN. Es análoga a la última parte del Teorema 3.23. ❏

TEOREMA 3.27. (Peng) Sea α y β son ordinales y $X \subset \alpha\times\beta$ es un subespacio de extensión numerable; entonces X es dualmente discreto.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que no. Sea κ el mínimo con la propiedad de que $\kappa \times \kappa$ tenga subespacio de extensión numerable que no es dualmente discreto, esto por el Teorema 3.24. Como la diagonal de $\kappa\times\kappa$ es hereditariamente dualmente discreto (Teorema 3.16), se tiene que podemos suponer que X no toca la diagonal, ahora por el Lema 3.25 y por el Lema 3.26 se tiene que X es dualmente discreto. Entonces el teorema queda demostardo. ❏

Capítulo 4

Resultados pricipales

Después de las aproximaciones de L.X. Peng a la pregunta: ¿Es el producto de dos ordinales hereditariamente dualmente discreto? Peng deja abierta la pregunta: ¿Es el producto de dos estacionarios ajenos en ω_1 dualmente discreto? Tal pregunta aparece en [**11**]. El siguiente teorema responde afirmativamente a esa pregunta. Primero probaremos algunos resultados que necesitaremos.

Lema 4.1. Sean $\beta < \omega_1$ y α un ordinal. Entonces, si $A \subset \alpha$ y $B \subset \beta$; se tiene que $A \times B$ es dualmente discreto.
Demostración. Sea ϕ asignación de vecindades de $A \times B$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que para cada $\langle x, y \rangle \in A \times B$ la vecindad que ϕ le asigna es de la forma $(a_{\langle x,y \rangle}, x] \times (b_{\langle x,y \rangle}, y]$, donde $a_{\langle x,y \rangle} < x$ y $b_{\langle x,y \rangle} < y$. Procedamos por inducción en α. Si α es numerable el resultado se tiene porque $A \times B$ es numerable, ver Proposición 3.1.

Si $\alpha = \gamma + 1$ y $\gamma \notin A$; entonces $A \times B \subset \gamma \times \beta$ y, por hipótessis de inducción, $A \times B$ es dualmente discreto. Si, por el contrario, $\gamma \in A$; entonces $\{\gamma\} \times B$ es dualmente discreto por 3.16. Sea D_1 núcleo discreto para $\{\gamma\} \times B$. Ahora considérese D_2 núcleo discreto para $F = A \times B \setminus \bigcup \{\phi(x) : x \in D_1\}$, esto podemos hacerlo porque por hipótesis de inducción $A \times B \cap \gamma \times \beta$ es dualmente discreto y F es un subconjunto cerrado de $A \times B \cap \gamma \times \beta$. Es claro que $D = D_1 \cup D_2$ es núcleo discreto para $A \times B$. Así el caso sucesor queda probado.

Si α es límite, tenemos tres casos:

Si α es regular y A es no estacionario. Sea $C = \{c_\gamma : \gamma < \alpha\}$ cerrado no acotado ajeno con A, podemos suponer que $0 \in C$, $0 \notin A$ y que la enumeración de C es continua. Entonces $A \times B = \bigoplus_{\gamma<\alpha} [(A \times B) \cap (c_\gamma, c_{\gamma+1}]$; por hipótesis de inducción cada sumando es dualmente discreto, luego entonces $A \times B$ es dualmente discreto.

Si α es regular y A es estacionario. Para cada $y \in B$ se tiene que $\left| \left\{ b_{\langle x,y \rangle} : x \in A \right\} \right| = \omega$. De esta forma existen $A^y \subset A$ estacionario y $b_y < y$ tal que para cada $x \in A^y$ se tiene que $b_{\langle x,y \rangle} = b_y$; esto sucede debido a que si tomamos una partición numerable de un estacionario, se tiene que un elemento de la partición es estacionario. Note que tenemos definida una función regresiva que a cada $z \in A^y$ le asigna $a_{\langle z,y \rangle}$, por lo tanto gracias al lema de Fodor existen un $A_y \subset A^y$ estacionario y un $a_y < \alpha$ tal que para cada $z \in A_y$ pasa que $a_{\langle z,y \rangle} = a_y$.

Sea $D_1 \subset B$ núcleo discreto de B para la signación que a cada $y \in B$ le asigna $(b_y, y]$, tal D_1 existe por 3.16. Considere el $\delta = \sup \{a_y : y \in D_1\}$ tal supremo existe en α porque α es regular y no numerable. Para cada $y \in D_1$ sea $D_y \subset A_y$ discreto cofinal en α y tal que para cada $x \in D_y$ pase que $x > \delta$. Sea $D_2 = \bigcup \{D_y \times \{y\} : y \in D_1\}$. Ahora como $\delta < \alpha$;

entonces por hipótesis de inducción $(\delta + 1 \cap A) \times B$ es dualmente discreto, y también lo es $C = [(\delta + 1 \cap A) \times B] \setminus \bigcup\{\phi(z) : z \in D_2\}$, pues es un subespacio cerrado de un dualmente discreto. Sea $D_3 \subset C$ núcleo discreto de C; entonces $D = D_2 \cup D_3$ es núcleo discreto de $A \times B$.

Si α es singular. Sean $\kappa = cof(\alpha) < \alpha$ y $C = \{c_\gamma : \gamma < \kappa\}$ cerrado no acotado en α enumerado de forma continua. Es claro que κ es homeomorfo a C, consideremos $X = A \cap C$; por hipótesis de inducción se tiene que $X \times B$ es dualmente discreto. Sean $D_1 \subset X \times B$ núcleo discreto de $X \times B$ y $Y = A \times B \setminus \bigcup\{\phi(z) : z \in D_1\}$, se tiene entonces que $Y = \bigoplus_{\gamma<\kappa}[Y \cap ((c_\gamma, c_{\gamma+1}] \times \beta)]$, note que para cada γ se tiene que $Y \cap [(c_\gamma, c_{\gamma+1}] \times \beta]$ es un subconjunto cerrado de $[A \times B] \cap [(c_\gamma, c_{\gamma+1}] \times \beta]$, y, como $[A \times B] \cap [(c_\gamma, c_{\gamma+1}] \times \beta]$ es dualmente discreto; así obtenemos que $Y \cap [(c_\gamma, c_{\gamma+1}] \times \beta]$ también es dualmente discreto. Sea $D_2 \subset Y$ núcleo discreto de Y; entonces $D = D_1 \cup D_2$ es núcleo discreto de $A \times B$, esto se tiene debido a que Y y $(C \cap A) \times B$ son cerrados ajenos en $A \times B$. ❑

El siguente es un resultado obvio, pero que jugará un papel importante en la demostración del resultado principal.

Lema 4.2. Sean κ un cardinal regular y $X \subset \kappa$. Si X es no estacionario; entonces existe un $U \subset \kappa$ abierto tal que $X \subset U$ y U es no estacionario.

Si κ y X son como antes y $S \subset \kappa$ es estacionario; entonces $S \setminus X$ es estacionario.

Antes de probar el teorema daremos algo de notación. Dado X un espacio ordenado, se definen

$$\Delta(X) = \{\langle x, y\rangle \in X \times X : x = y\};$$
$$\Delta_\downarrow(X) = \{\langle x, y\rangle \in X \times X : y < x\};$$
$$\Delta_\uparrow(X) = \{\langle x, y\rangle \in X \times X : y > x\}.$$

En el siguiente teorema $\Delta_\downarrow$ denotará $\Delta_\downarrow(\omega_1)$ y π será la proyección en la primera coordenada.

Teorema 4.3. Sean S_1, S_2 dos estacionarios ajenos en ω_1. Entonces $S_1 \times S_2$ es dualmente discreto.

Demostración. Nótese primero que como $S_1 \times S_2$ no toca la diagonal; entonces basta probarlo para $\Delta_\downarrow \cap (S_1 \times S_2)$ el cual denotaremos por $(S_1 \times S_2)_{\Delta_\downarrow}$, pues este es un cerrado abierto en $S_1 \times S_2$ y el complemento será dualmenete discreto de forma análoga.

Sea ϕ asignación de vecindades de $(S_1 \times S_2)_{\Delta_\downarrow}$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que para cada $x \in (S_1 \times S_2)_{\Delta_\downarrow}$ pasa que $\phi(x) \subset \Delta_\downarrow$ y para cualquier $\langle x, y\rangle \in (S_1 \times S_2)_{\Delta_\downarrow}$ la vecindad que le asigna ϕ es de la forma $(a_{\langle x,y\rangle}, x] \times (b_{\langle x,y\rangle}, y]$, donde $a_{\langle x,y\rangle} < x$ y $b_{\langle x,y\rangle} < y$.

Para cada $y \in S_2$ se tiene que $|\left\{b_{\langle x,y\rangle} : \langle x, y\rangle \in (S_1 \times S_2)_{\Delta_\downarrow}\right\}| = \omega$. De esta forma existen $A^y \subset \pi[S_1 \times \{y\} \cap (S_1 \times S_2)_{\Delta_\downarrow}]$ estacionario y $b_y < y$ tal que para cada $x \in A^y$ se tiene que $b_{\langle x,y\rangle} = b_y$. Note que tenemos definida una función regresiva que a cada $z \in A^y$ le asigna $a_{\langle z,y\rangle}$, por lo tanto gracias al lema de Fodor existen un $A_y \subset A^y$ estacionario y un $a_y < \omega_1$ tal que para cada $z \in A_y$ pasa que $a_{\langle z,y\rangle} = a_y$. Por otro lado, tenemos definida una función regresiva en S_2 que a cada y le asigna b_y, de nuevo por el lema de Fodor existe $T \subset S_2$ estacionario tal que para cada $y \in T$ ocurre que $b_y = \beta < \omega_1$. Sea $D \subset T$ discreto cofinal en ω_1.

Una vez teniendo lo anterior note que por el Lema 3.1 se tiene que $S_1 \times (S_2 \cap [0, \beta])$ es dualmente discreto y si $F_1 = (S_1 \times S_2)_{\Delta_\downarrow} \cap [S_1 \times (S_2 \cap [0, \beta])]$; entonces F_1 es cerrado en $S_1 \times (S_2 \cap [0, \beta])$ y así dualmente discreto.

Sea K_1 núcleo discreto de F_1 y considérese

$$F_2 = (S_1 \times S_2)_{\Delta_\downarrow} \setminus (\bigcup \{\phi(z) : z \in K_1\} \cup \bigcup \{\phi(z) : z \in \{\langle x, y\rangle : y \in D \wedge x \in A_y\}\}).$$

Veamos que $\pi[F_2]$ es no estacionario. Procedamos por contradicción. Supóngase que $\pi[F_2]$ es estacionario; entonces para cada $x \in \pi[F_2]$ sea $y_x < x$ tal que $\langle x, y_x\rangle \in F_2$, esto es posible pues $F_2 \subset (S_1 \times S_2)_{\Delta_\downarrow}$, así, la función que a cada x le asigna y_x es regresiva, por el lema de Fodor existen un estacionario $R \subset \pi[F_2]$ y $\gamma < \omega_1$ tales que para cada $r \in R$ pasa que $y_r = \gamma$. Sea $d \in D$ tal que $d > \gamma$, esto por ser D no acotado, además, como R es estacionario, existe $r \in R$ tal que $r > a_d$. Dado lo anterior y por las definiciones de F_2 y a_d se tendría que $\langle r, y_r\rangle \in \bigcup \{\phi(\langle z, d\rangle) : z \in A_d\}$, lo cual es una contradicción y luego $\pi[F_2]$ es no estacionario.

Probaremos ahora que F_2 es dualmente discreto. Sea $C = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ cerrado no acotado ajeno a $\pi[F_2]$ enumerado de forma continua y suponga que $c_0 = 0$. Entonces $F_2 = \bigoplus_{\alpha<\omega_1} [F_2 \cap (c_\alpha, c_{\alpha+1}] \times \omega_1]$, note que cada sumando es numerable y así dualmente discreto, en consecuencia F_2 es dualmente discreto. Sea $K_2 \subset F_2$ núcleo discreto de F_2, note también que F_2 es cerrado en $(S_1 \times S_2)_{\Delta_\downarrow}$ y así $\overline{K_2} \cap (S_1 \times S_2)_{\Delta_\downarrow} \subset F_2$.

Regresemos a D y a los A_y que definimos al principio. Antes vimos que $\pi[F_2]$ es no estacionario. Gracias al Lema 4.2 podemos tomar un U abierto no estacionario que contiene a $\pi[F_2]$; entonces para cada $d \in D$ tenemos que $A_d \backslash U$ es estacionario. Para cada $d \in D$ sea $K_d \subset (A_d \backslash U)$ discreto cofinal en ω_1. Sea $K_3 = \bigcup \{K_d \times \{d\} : d \in D\}$. K_3 es discreto por construcción. Note que para cada $d \in D$ tenemos que $K_d \times \{d\}$ cubre lo mismo que cubría $A_d \times \{d\}$, también note que $K_3 \subset (\omega_1 \setminus U) \times \omega_1$, por lo tanto $\overline{K_3} \cap K_2 = \emptyset$. Definiendo $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ se tiene, gracias a como se definieron los K_i $(i = 1, 2, 3)$, que K es un núcleo discreto de $(S_1 \times S_2)_{\Delta_\downarrow}$ y así el teorema queda demostrado. ❑

Una vez teniendo el teorema anterior, este nos da un método para probar el teorema general que responde afirmativamente a la pregunta original hecha por O.T. Alas, L.R. Junqueira y R.G. Wilson en [**1**] con respecto a si el pruducto de dos ordinales es hereditariamente dualmente discreto. Antes unas observaciones y un poco de notación que ayudará en la demostración.

De la misma forma que el teorema anterior, y para no ensuciar mucho la notación para el siguiente teorema $\Delta_\downarrow$ denotará $\Delta_\downarrow(\alpha)$, también $\Delta_\uparrow$ y Δ denotarán lo respectivo; donde α es el ordinal para el cual se quiere probar el teorema y π será la proyección en la primera coordenada.

Teorema 4.4. Si α es un ordinal; entonces $\alpha \times \alpha$ es hereditariamente dualmente discreto.
Demostración. Sea $X \subset \alpha \times \alpha$. Nótese primero que basta probarlo para $\Delta_\downarrow \cap X$, pues si suponemos esto cierto; entonces si $X \cap \Delta \neq \emptyset$, hay un núcleo discreto D para $X \cap \Delta$, esto

pasa porque la diagonal es homeomorfa a α. Así se tendría que $F = X \setminus \bigcup\{\phi(d) : d \in D\}$ es la unión de dos cerrados ajenos de X a saber $F \cap \Delta_\uparrow$ y $F \cap \Delta_\downarrow$, que son dualmente discretos por ser subespacios cerrados de $X \cap \Delta_\uparrow$ y $X \cap \Delta_\downarrow$, de esta forma F también es dualmente discreto. A continuación lo probaremos para $X \cap \Delta_\downarrow$, pues la demostración para $X \cap \Delta_\uparrow$ es análoga. Denotamos por $X_{\Delta_\downarrow}$ a $X \cap \Delta_\downarrow$.

Sea ϕ asignación de vecindades de $X_{\Delta_\downarrow}$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que para cada $x \in X_{\Delta_\downarrow}$ pasa que $\phi(x) \subset \Delta_\downarrow$ y para cualquier $\langle x, y\rangle \in X_{\Delta_\downarrow}$ la vecindad que ϕ le asigna es de la forma $(z_{\langle x,y\rangle}, x] \times (w_{\langle x,y\rangle}, y]$, donde $z_{\langle x,y\rangle} < x$ y $w_{\langle x,y\rangle} < y$.

Sea $X \subset \alpha \times \alpha$. Procederemos por inducción.

- Caso (1). Si $\alpha = \omega$ se sigue de 3.1.
- Caso (2). Si $\alpha = \beta+1$, considérese $X_{\Delta_\downarrow} \cap [(\{\beta\} \times \beta+1) \cup (\beta+1 \times \{\beta\})]$, el cual, por 3.16 se tiene que es dualmente discreto. Sean D_1 núcleo discreto para $X \cap [(\{\beta\} \times \beta+1) \cup (\beta+1 \times \{\beta\})]$ y $F = X_{\Delta_\downarrow} \setminus \bigcup\{\phi(d) : d \in D_1\}$. Note que $F \subset \beta \times \beta$ es dualmente discreto por hipótesis de inducción. Sea D_2 núcleo discreto. Se sigue de la definición de D_1 y D_2 que $D = D_1 \cup D_2$ es núcleo discreto para $X_{\Delta_\downarrow}$.
- Caso (3). Si α es límite y regular, tenemos algunos casos:
- Caso (3.1). Para cada $\beta < \alpha$ se tiene que $A_\beta = \left\{x \in \alpha : \langle x, \beta\rangle \in X_{\Delta_\downarrow}\right\}$ es no estacionario. Para cada $\beta \in \alpha$ sea C_β cerrado no acotado en α tal que $C_\beta \cap A_\beta = \emptyset$ y considérese $C = \Delta_{\beta<\alpha} C_\beta$, sea $C = \{c_\beta : \beta < \alpha\}$ enumerado de forma continua y podemos asumir que $0 = c_0$. Note primero que como estamos trabajando con $X_{\Delta_\downarrow}$ y por la definición de C se tiene que $X_{\Delta_\downarrow} = \bigoplus \left\{X_{\Delta_\downarrow} \cap ((c_\beta, c_{\beta+1}] \times \alpha) : \beta \in \alpha\right\}$ y así, por hipótesis de inducción, cada elemento de la partición es dualmente discreto y, de esta forma, $X_{\Delta_\downarrow}$ también lo es.
- Caso (3.2). El conjunto $G = \{y \in \alpha : (\exists x \in \alpha)(\langle x, y\rangle \in X)\}$ es acotado en α. Sean β cota para G y, $B = \{y \in \alpha : \{x \in \alpha : \langle x, y\rangle \in X\}$ es estacionario$\}$, obviamente β es cota para B. Para cada $y \in \alpha$ sea $A_y = \left\{x \in \alpha : \langle x, y\rangle \in X_{\Delta_\downarrow}\right\}$. Sea $G' = G \setminus B$; para cada $g \in G'$ el conjunto A_g es no estacionario y como β es cota de G' se tiene que $\bigcup\{A_g : g \in G'\}$ es no estacionario, así, por el Lema 4.2, existe $U \subset \alpha$ abierto no estacionario que contiene a $\bigcup\{A_g : g \in G'\}$.

Por otro lado, gracias a como asumimos a ϕ, se tiene que para cada $y \in B$ existe un $A'_y \subset A_y$ estacionario y un $w_y < y$ tal que para cada $x \in A'_y$ se tiene que $w_{\langle x,y\rangle} = w_y$ (esto ocurre debido a que $y < \alpha$ y si a un estacionario en α lo partimos en menos de α subconjuntos, entonces alguno de ellos es estacionario); de esta forma hemos definido una asignación de vecindades ψ para B (que a cada y le asigna $(w_y, y]$), el cual, es dualmente discreto por 3.16. Sea D_1 núcleo discreto de B para ψ; para cada $y \in D_1$ tenemos definida una función regresiva en A'_y (la que a cada x le asigna $z_{\langle x,y\rangle}$); entonces por el lema de Fodor existe A''_y estacionario y $z_y < \alpha$ tal que para todo $x \in A''_y$ pasa que $z_{\langle x,y\rangle} = z_y$. Por el Lema 4.2 tenemos que para cada $y \in D_1$ ocurre que $A''_y \setminus U$ es estacionario; sea $H_y \subset A''_y \setminus U$ discreto cofinal en α. Sea $D_2 = \bigcup\{H_y \times \{y\} : y \in D_1\}$, es discreto por definición. Ahora considerando $F = X_{\Delta_\downarrow} \setminus \bigcup\{\phi(d) : d \in D_2\}$ es como en el caso (3.1) y así, dualmente discreto. Sea $D_3 \subset F$ núcleo discreto de F. Sea $D = D_2 \cup D_3$, es claro que es núcleo de $X_{\Delta_\downarrow}$. Para ver que es discreto, basta con notar que $\overline{D_2} \cap \overline{D_3} \cap X_{\Delta_\downarrow} = \emptyset$, esto ocurre debido a que F es cerrado en $X_{\Delta_\downarrow}$ y a que la definición de D_2, cuando usamos el U, evita que D_2 se acumule en F.

- Caso (3.3). El conjunto $B = \{y \in \alpha : \{x \in \alpha : \langle x, y\rangle \in X\} \text{ es estacionario}\}$ es no estacionario. Sea C_1 cerrado no acotado ajeno con B, de nuevo, podemos suponer que $0 \in C_1$. Considérese $Y = X_{\Delta_\downarrow} \cap \alpha \times C_1$, tal Y es cerrado en $X_{\Delta_\downarrow}$ y es como en el caso (3.1); sea $D_1 \subset Y$ núcleo discreto de Y. Sea $F = X_{\Delta_\downarrow} \setminus \bigcup\{\phi(d) : d \in D_1\}$, F es cerrado en X y $F = \bigoplus\left\{X_{\Delta_\downarrow} \cap (\alpha \times (c_\beta, c_{\beta+1}]) : \beta < \alpha\right\}$, de esta manera cada elemento de la partcición es como en el caso (3.2); y entonces, dualmente discreto. Para cada $\beta < \alpha$ sea $H_\beta \subset X_{\Delta_\downarrow} \cap (\alpha \times (c_\beta, c_{\beta+1}])$ núcleo discreto de $X_{\Delta_\downarrow} \cap (\alpha \times (c_\beta, c_{\beta+1}])$. Así $D = D_1 \cup \bigcup\{H_\beta : \beta < \alpha\}$ es núcleo discreto de $X_{\Delta_\downarrow}$.
- Caso (3.4). El conjunto $B = \{y \in \alpha : \{x \in \alpha : \langle x, y\rangle \in X\} \text{ es estacionario}\}$ es estacionario. Para cada $y \in B$ sea $A_y = \left\{x \in \alpha : \langle x, y\rangle \in X_{\Delta_\downarrow}\right\}$. Note que para cada $y \in B$ se tiene que $\left|\left\{w_{\langle x,y\rangle} : x \in A_y\right\}\right| < \alpha$, por lo tanto, existen $A'_y \subset A_y$ estacionario y $w_y < y$ tal que para cada $x \in A'_y$ pasa que $w_{\langle x,y\rangle} = w_y$. Note que la función que a cada $x \in A'_y$ lo envía a $z_{\langle x,y\rangle}$ es regresiva; en consecuencia, por el lema de Fodor existen $A''_y \subset A'_y$ estacionario y $z_y < \alpha$ que cumplen que para todo $x \in A''_y$ se tiene $z_{\langle x,y\rangle} = z_y$. También tenemos definida una función regresiva en B (la que a cada y lo envía en w_y), así, por el lema de Fodor existen $S \subset B$ estacionario y un $\gamma < \alpha$ tales que para cualquier $y \in S$ ocurre que $w_y = \gamma$. Sea $D_1 \subset S$ discreto cofinal en α.

Sea $F_1 = X_{\Delta_\downarrow} \cap (\alpha \times [0, \gamma])$, F_1 es cerrado abierto en $X_{\Delta_\downarrow}$ y es como en el caso (3.2) y, así, dualmente discreto; sea K_1 núcleo discreto de F_1.

Sea

$$F_2 = X_{\Delta_\downarrow} \setminus [\bigcup\{\phi(k) : k \in K_1\} \cup \bigcup\left\{\phi(d) : d \in \bigcup\left\{A''_y \times \{y\} : y \in D_1\right\}\right\}].$$

Obsérvese que F_2 es cerrado en $X_{\Delta_\downarrow}$ y que $T = \pi[F_2]$ es no estacionario, pues si lo fuese; entonces para cada $x \in T$ existe $y_x < x$ tal que $\langle x, y_x\rangle \in F_2$ (esto pues $X_{\Delta_\downarrow} \subset \Delta_\downarrow$), de esta forma tenemos definida una función regresiva en T; luego entonces existen $T' \subset T$ estacionario y $\delta < \alpha$ tal que para todo $x \in T'$ se tiene que $\langle x, \delta\rangle \in F_2$. Sea $d_0 \in D_1$ tal que $d_0 > \delta$ (se puede porque D_1 es cofinal en α), como T' es no acotado, podemos tomar un $x_0 \in T'$ tal que $x_0 > z_{d_0}$; así $\langle x_0, \delta\rangle \in \bigcup\left\{\phi(\langle x, d_0, \rangle\rangle : x \in A''_{d_0}\right\}$, lo cual contradice la definición de F_2 y entonces T es no estacionario.

Como T es no estacionario y por el Lema 4.2, existe $U \subset \alpha$ abierto no estacionario que contiene a T, por la misma razón se tiene que F_2 es como en el caso (3.1), en consecuencia F_2 es dualmente discreto. Sea K_2 núcleo discreto de F_2.

Regresando a lo primero, para cada $d \in D_1$ sea $H_d \subset (A''_d \setminus U)$ discreto cofinal en α (esto se puede hacer por el Lema 4.2), Sea $K_3 = \bigcup\{H_d \times \{d\} : d \in D_1\}$, es discreto por definición y por construcción las vecindades de K_3 cubren lo mismo que cubrían las de $\bigcup\{A''_d \times \{d\} : d \in D_1\}$. Entonces $D = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ es núcleo de $X_{\Delta_\downarrow}$, para ver que es discreto, basta con ver que K_3

no se acumula en K_2, lo cual es claro de la definición de K_3, pues $K_3 \subset [(\alpha \times \alpha) \setminus (\alpha \times U)]$, que es un cerrado ajeno a K_3. En conclusión $X_{\Delta_\downarrow}$ es dualmente discreto.

- Caso (4). Si α es límite no regular. Antes de probar este caso definiremos dos subconjuntos a los que llamaremos *colapso*. Dado $Z \subset \alpha$ y $Y \subset \alpha \times \alpha$ se definen

$$Col_Z^1(Y) = Y \cap (\alpha \times Z);$$

y

$$Col_Z^2(Y) = Y \cap (Z \times \alpha).$$

Sean $\kappa = cof(\alpha)$ y $C \subset \alpha$ imagen continua de una función cofinal y creciente de κ en α, además sea $C = \{c_\beta : \beta < \kappa\}$ enumeración creciente y continua; también suponemos que $c_0 = 0$. Por hipótesis de inducción $X_{\Delta_\downarrow} \cap (C \times C)$ es dualmente discreto, esto porque $C \times C$ es homeomorfo a $\kappa \times \kappa$, además $X_{\Delta_\downarrow} \cap (C \times C)$ es cerrado en $X_{\Delta_\downarrow}$. Sea D_1 núcleo discreto de $X_{\Delta_\downarrow} \cap (C \times C)$. Consideremos ahora $Y = X_{\Delta_\downarrow} \setminus \bigcup\{\phi(d) : d \in D_1\}$. Sea $Y_1 = Col_C^1(Y)$; entonces $Y_1 = \bigoplus\{Y_1 \cap ((c_\beta, c_{\beta+1}] \times C) : \beta < \kappa\}$, pero note que, por hipótesis de inducción, cada elemento de esta partición es dualmente discreto y, así, también lo es Y_1. Sea D_2 núcleo discreto para Y_1. Sean $Y_2 = X_{\Delta_\downarrow} \setminus \bigcup\{\phi(d) : d \in D_1 \cup D_2\}$ y $Y_3 = Col_C^2(Y_2)$, de la misma forma que antes $Y_3 = \bigoplus\{Y_3 \cap (C \times (c_\beta, c_{\beta+1}]) : \beta < \kappa\}$ y, de nuevo, por hipótesis de inducción, Y_3 es dualmente discreto. Sea D_3 núcleo discreto de Y_3. Defínase por último $Y_4 = X_{\Delta_\downarrow} \setminus \bigcup\{\phi(d) : d \in D_1 \cup D_2 \cup D_3\}$, Y_4 es cerrado en $X_{\Delta_\downarrow}$ y Y_4 se puede ver como la suma directa de elementos de la forma $Y_4 \cap ((c_\beta, c_{\beta+1}] \times (c_\gamma, c_{\gamma+1}])$ donde $\beta, \gamma \in \kappa$ que, por hipótesis de inducción se tiene que cada uno de estos elementos es dualmente discreto; entonces Y_4 es también dualmente discreto. Sea D_4 núcleo discreto de Y_4; por lo tanto $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ es núcleo de $X_{\Delta_\downarrow}$, para ver que es discreto basta notar que $X_{\Delta_\downarrow} \cap (C \times C)$ y cada Y_i son cerrados en $X_{\Delta_\downarrow}$. En conclusión $X_{\Delta_\downarrow}$ es dualmente discreto. ❑

Con el anterior resultado se concluye este trabajo. Logramos responder uno de tantos cuestionamientos que hay con respecto la propiedad de ser dualmente discreto. Un posible siguiente paso sería ver qué tanta relación existe entre la propiedad de ser D espacio y ser dualmente discreto, al menos para espacios Lindelöf, también sería bueno saber qué necesitamos pedir para poder lograr un resultado de que alguna propiedad un poco más fuerte que Lindelöf nos implique la propiedad de ser dualmente discreto, pues de hecho no se sabe si Lindelöf la implica.

Bibliografía

[1] O.T. Alas, L.R. Junquiera, R.G. Wilson, *Dually discrete spaces*, Topology Appl. 155 (2008) 1420-1425.

[2] L.F. Aurichi, L.R. Junqueira, P.B. Larson, *D-spaces, irreducibility and trees*, Topology Proc. 35 (2010) 73-82.

[3] R.Z. Buzyakova, V.V. Tkachuk, R.G. Wilson, *A quest for nice kernels of neighbourhood assignments*, Comment. Math. Univ. Carolin. 48 (4) (2007) 689-697.

[4] R. Engelking, *General topology*, Heldermann Verlag, 1989.

[5] G. Gruenhage, *A survey of D-spaces*, Contemporary Math. 553 (2011) 13-28.

[6] M. Hrušák, J.T. Moore. *Twenty problems in set-theoretic topology*, Open Problems in Topology II, (E. Pearl ed.), Elsevier B.V. (2007) 111-113.

[7] T. Jech, *Set theory*, Springer-Verlag, 2002.

[8] K. Kunen, *Set theory an introduction to independence proofs*, North-Holland, 1980.

[9] A. Ostaszewski, *On countably compact, perfectly normal spaces*, J. London Math. Soc. 14 (2) (1976) 505-516.

[10] L.X. Peng, *On linear neighborhood assignments and dually discrete spaces*, Topology Apll. 155 (2008) 1867-1874.

[11] L.X. Peng, *Products of certain dually discrete spaces*, Topology Appl. 156 (2009) 2832-2837.

[12] L.X. Peng, *Dual properties of subspaces in product of ordinals*, Topology Appl. 157 (2010) 2297-2303.

[13] L.X. Peng, *Finite unions of weak $\bar{\theta}$-refinable spaces and product of ordinals*, Topology Appl. 156 (2009) 1679-1683.

[14] E.K. van Douwen, D.J. Lutzer, *A note on paracompactness in generalized ordered spaces*, Procc. Amer. Math. Soc. 125 (4) (1997) 1237-1245.

[15] E.K. van Douwen, W. F. Pfeffer, *Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces*, Pacific J. Math. 81 (2) (1979) 371-377.

[16] J. van Mill, V.V. Tkachuk, R.G. Wilson, *Classes defined by stars and neighborhood assignments*, Topology Appl. 154 (2007) 2127-2134.