

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
Instituto de Física y Matemáticas.



COTAS FENOMENOLÓGICAS PARA EL PARÁMETRO LIBRE DE LA TEORÍA BORN-INFELD.

T E S I S

para obtener el grado de
Maestra en Ciencias en el Área de Física.

Autora:

María Anabel Trejo Espinosa.

Asesor:

Dr. Christian Schubert.

Morelia, Michoacán

agosto de 2011.

Índice general

1. Introducción.	1
2. Teoría Born-Infeld sobre la electrodinámica.	7
2.1. El marco de la electrodinámica no lineal.	8
2.2. La teoría Born-Infeld.	12
2.3. Ejemplos de las consecuencias del uso de la Teoría Born-Infeld.	14
2.3.1. La auto-energía de una carga puntual es finita.	14
2.3.2. El capacitor de placas paralelas.	16
2.4. La teoría Born-Infeld en la teoría de cuerdas.	17
3. Dispersión fotón-fotón en la QED.	18
4. La dispersión fotón-fotón en la teoría Born-Infeld.	22
5. Propagación de la luz dentro de un campo electromagnético.	24
5.1. Propagación de la luz dentro de un campo electromagnético en la QED. . .	24
5.2. Propagación de la luz dentro de un campo electromagnético en la teoría Born-Infeld.	27
6. Photon splitting en QED.	30
7. Photon splitting en la teoría Born-Infeld.	39
8. Conclusiones.	42
A. Cálculo en MATHEMATICA de la matriz de dispersión del proceso dispersión fotón-fotón.	44

B. Cálculo en MATHEMATICA de la matriz de dispersión del proceso
Photon splitting. 55

BIBLIOGRAFÍA

Capítulo 1

Introducción.

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío son lineales en los campos \vec{E} y \vec{B} . En la naturaleza existen fenómenos electromagnéticos en los que las ecuaciones de Maxwell no son suficientes para poder darles una explicación. Algunos de estos fenómenos requieren de correcciones no lineales a estas ecuaciones.

Una de las primeras generalizaciones no lineales de las ecuaciones de Maxwell fue desarrollada por Mie [1] (1912). Su trabajo fue motivado por las dificultades que Abraham y Lorentz tuvieron en su intento por estudiar la interacción de un electrón con su propio campo de radiación. Las ecuaciones de Mie tienen la característica de que sus soluciones dependen del valor absoluto de los potenciales, y esta versión de la electrodinámica no es invariante de norma.

En particular, una de las peculiaridades que vienen como consecuencia de las ecuaciones de Maxwell es que la auto-energía de una carga puntual es infinita (y este es un problema ya que todas las energías electromagnéticas son finitas). En 1934, con el objetivo de anular esta peculiaridad, Born e Infeld desarrollaron una teoría clásica¹ no lineal e invariante de norma, y con la cual el 4-momento del electrón, derivado del tensor de energía-momento, es un vector de Lorentz.

No obstante, la teoría clásica no lineal de Born e Infeld [2] (que de ahora en adelante llamaremos, por simplicidad, *Teoría Born-Infeld*) tiene sus desventajas. Primero, en la

¹Hay dos desarrollos de esta teoría, en uno se calculó un valor al parámetro libre, y en el otro se obtuvo que este parámetro es un parámetro libre y su valor se obtiene de acuerdo a los resultados experimentales considerados.

forma en como la no-linealidad ocurre, presenta graves problemas con una transición a la teoría cuántica; el principio de superposición no es totalmente válido para el campo eléctrico (complicando el tratamiento de sistemas más complicados), y aún no existe evidencia experimental de este tipo de no-linealidad clásica. Además, esta teoría tiene un parámetro libre b , este parámetro fija un límite superior a la intensidad del campo eléctrico, y como consecuencia la auto-energía del electrón es finita. El parámetro b también determina la importancia de los efectos no lineales de la teoría, Fulcher et. al. (ver [1]) observaron que para disminuir la importancia de los efectos no-lineales se debe aumentar el valor del parámetro b , este valor es determinado por algún experimento. Born e Infeld obtuvieron un valor para b suponiendo que la masa del electrón es de origen puramente electromagnético, su valor numérico es

$$b_{BI} = 1,2 \times 10^{20} V/m \simeq 7,86 \times 10^{13} eV^2. \quad (1.1)$$

Algo que debemos señalar es que con la teoría Born-Infeld uno puede tener efectos similares como los que generalmente son descritos por el fenómeno de polarización del vacío en la Electrodinámica Cuántica (QED, por sus siglas en inglés), pero en comparación con la QED, la teoría Born-Infeld también puede parecer primitiva, ya que la renormalización de la auto-energía del electrón es finita; esto no ha ocasionado que los científicos se olviden de ella. Actualmente, la teoría Born-Infeld juega un rol muy importante en la teoría de cuerdas y branas, y eso nos hace pensar que pronto será posible observar sus efectos en los experimentos.

Hasta ahora se han realizado distintos estudios de las consecuencias de usar la teoría Born-Infeld en lugar de la QED ó la teoría de Maxwell, y se han comparado los resultados con los resultados experimentales. En 1971, Fulcher et. al. [3] mostraron que el espectro de electrones atómicos ligados a elementos superpesados con carga nuclear $Z \geq 150$ proporciona una rigurosa prueba de lo valioso de la teoría Born-Infeld. En 1973, [1] ellos mismos mostraron que un valor de $b \propto b_{BI}$ conduce a grandes efectos en el espectro de electrones atómicos ligados a un núcleo superpesado. En el mismo año, Soff et. al. [4], en un intento por excluir la teoría Born-Infeld, utilizando cálculos precisos que se habían medido de las energías atómicas electrónica y muónica encontraron que una suficiente concordancia con el experimento se alcanza cuando $b \geq 1,7 \times 10^{22} V/m = 1,11 \times 10^{16} eV^2$. En 1983, Zavattini y Iacopini [5], estando a favor de la teoría Born-Infeld, mostrarón que esta teoría

predice las diferencias en la $n = 2$ estructura fina del sistema $(\mu^{-4}He)^+$, encontrando una favorable concordancia con los resultados experimentales cuando² $b = b_{BI}$.

Es conveniente señalar que Soff et. al. [4] llegaron a sus conclusiones considerando que los más grandes efectos no-lineales son esperados cuando la partícula de prueba, es decir, el electrón o el muón, se mueve en el intenso campo eléctrico del núcleo (esto ocurre cuando la densidad de probabilidad radial tiene su máximo en el borde del núcleo). Aquí la energía de interacción no lineal, a primer orden, difiere del potencial de Coulomb por un término proporcional a r^{-5} , y donde la constante de proporcionalidad es independiente de la forma que adquiera la distribución de la carga nuclear. El potencial es

$$V(r) \approx -\frac{Ze^2}{r} + \frac{Z^3 e^4 (1-n)}{5E_0^2(n)} \frac{1}{r^5}, \quad r > c, \quad (1.2)$$

donde $c \simeq 7fm$, es el radio de la densidad media, y $E_0 = b_{BI}$. Esto nos permite enfatizar que nuestro enfoque es realmente muy diferente, tanto teórica (nosotros emplearemos la teoría de campos, QED, en lugar de la mecánica cuántica) como experimentalmente (nosotros nos centraremos en la física de láseres y estrellas de neutrones en lugar de la física involucrada en átomos pesados.)

Lo que se ha concluido con las investigaciones anteriores es que es difícil excluir por completo a la teoría Born-Infeld, lo que se puede hacer es establecer cotas inferiores para el parámetro b , sucesivamente más estrictas.

El propósito de esta tesis es encontrar cotas, de forma fenomenológica, para el parámetro libre b de la teoría Born-Infeld a través de resultados experimentales y haciendo analogías con la QED. Comenzamos introduciendo el Lagrangiano que dio lugar a esta teoría [7]:

$$\mathcal{L}^{BI} = -b^2 \sqrt{1 - \frac{(E^2 - B^2)}{b^2} - \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{b^4}} + b^2 = -b^2 \sqrt{1 - \frac{2s}{b^2} - \frac{p^2}{b^4}} + b^2, \quad (1.3)$$

con s y p definidos como

$$s \equiv -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2), \quad (1.4)$$

$$p \equiv -\frac{1}{4} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (1.5)$$

²Es relevante mencionar que este resultado no ha sido refutado por artículos que le hacen referencia, por ejemplo [6].

Como s y p^2 son invariantes de Lorentz, entonces la densidad \mathcal{L}^{BI} también lo es. Para campos pequeños donde s y p son mucho más pequeños que b^2 , la aproximación a campos débiles no cambia: $\mathcal{L}^{BI} \sim s = \frac{1}{2}(E^2 - B^2)$ (la densidad Lagrangiana se reduce a la obtenida con la teoría de Maxwell).

En este trabajo vamos a restringirnos al estudio de campos electromagnéticos pequeños donde s y p son mucho más pequeños que b^2 , entonces la expansión de \mathcal{L}^{BI} hasta sexto orden en los campos es

$$\mathcal{L}^{BI} = s + \frac{1}{2b^2} (s^2 + p^2) + \frac{1}{6b^4} (3s^3 + 2sp^2). \quad (1.6)$$

En función del campo de esfuerzos $F^{\mu\nu}$ este se ve como

$$\mathcal{L}^{BI} = -\frac{1}{4}F^2 + \frac{1}{32b^2} \left[(F^2)^2 + (\tilde{F} \cdot F)^2 \right] - \frac{1}{384b^4} \left[3(F^2)^3 + 2(F^2)(\tilde{F} \cdot F)^2 \right], \quad (1.7)$$

donde el segundo término puede ser considerado como una corrección a cuarto orden en los campos electromagnéticos de la densidad Lagrangiana de Maxwell (2.17), y el tercer término como una corrección a sexto orden. Estas correcciones señalan, entre otros, la presencia de dispersión entre dos fotones, y la interacción de tres fotones con un campo electromagnético constante, aún a nivel clásico.

Este Lagrangiano puede tener tanto un sentido fundamental como un sentido efectivo. En la teoría de cuerdas y branas puede tomar cualquiera de los dos (ver [8] y [7]). Nosotros trataremos a este Lagrangiano como fundamental.

La expansión a sexto orden en los campos del Lagrangiano de la teoría Born-Infeld es muy análoga a la expansión a sexto orden en los campos del Lagrangiano de Euler-Heisenberg, que en la expansión hasta sexto orden se ve como

$$\mathcal{L}^{EH} = -\frac{1}{4}F^2 + \frac{2\alpha^2}{45m^4} \left[\left(\frac{F^2}{2} \right)^2 + 7 \left(\frac{\tilde{F} \cdot F}{4} \right)^2 \right] - \frac{1}{5040\pi^2 m^8} \left[\frac{241}{13} (F^2)^3 + \frac{13}{8} (F^2)(\tilde{F} \cdot F)^2 \right]. \quad (1.8)$$

Pero tiene un sentido muy diferente al que tiene el Lagrangiano de la teoría Born-Infeld. El Lagrangiano de Euler-Heisenberg es totalmente efectivo, donde ahora la dispersión entre fotones y la interacción de fotones con un campo electromagnético externo son correcciones cuánticas al Lagrangiano de Maxwell que vienen como resultado de fluctuaciones cuánticas

entre partículas virtuales y, estos procesos no pueden ser representados por contrapartes clásicas (si la teoría de la electrodinámica es regida por el Lagrangiano de Maxwell).

Concretamente, lo que haremos en esta tesis será estudiar dos procesos que se pueden explicar con estos Lagrangianos:

1. Dispersión fotón-fotón.
2. *Photon splitting*.

Y para cada uno de estos procesos obtendremos una cota para b . Para lograr esto tomaremos ventaja de la gran similitud que los Lagrangianos de Born-Infeld y Euler-Heisenberg tienen.

Para los procesos de dispersión la amplitud básica de dispersión (ver figura 3) es del orden α^2 y entonces la *sección eficaz* (ver [9] y [10]) toma la forma:

$$\sigma \sim \int \frac{d^3q_3}{\omega_3} \frac{d^3q_4}{\omega_4} \frac{\alpha^4 |M|^2}{q_1 \cdot q_2} \delta^4(q_1 + q_2 + q_3 + q_4), \quad (1.9)$$

donde las ω 's y q 's representan la energía y momento para cada fotón involucrados en la dispersión, y M es la amplitud de dispersión y será calculada explícitamente para cada proceso aquí estudiado en el límite de bajas energías.

Para determinar la matriz \mathcal{M} involucrada en cada proceso es de gran utilidad escribir al tensor de campo total F como la suma de cuatro tensores de campo, es decir, $F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)} + F^{(4)}$; donde, para la corrección a cuarto orden en los campos, $F^{(i)}$ representa el tensor de campo del i -ésimo fotón. Mientras que en la corrección a sexto orden, en uno de los procesos que aquí se manifiestan, tres de los $F^{(i)}$ representan al tensor de campo del i -ésimo fotón y el otro tensor corresponde a las interacciones con un campo externo. En general, bajo estas sustituciones podemos encontrar unas relaciones particulares que nos facilitan los cálculos:

$$\left(F \cdot \tilde{F}\right)^2 = 4tr(F^4) - 2(tr(F^2))^2, \quad (1.10)$$

$$(F^2)^3 = -4tr(F^6) + 3tr(F^4)tr(F^2) - \frac{3}{2}(tr(F^2))^3, \quad (1.11)$$

donde tr representa la traza. Con estos cambios podemos escribir a (1.7) y (1.8) de una

forma muy particular y conveniente

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{BI} &= \frac{1}{4}\text{tr}(F^2) + \frac{1}{32b^2} [4\text{tr}(F^4) - (\text{tr}(F^2))^2] \\ &+ \frac{1}{768b^4} [24\text{tr}(F^6) - 2\text{tr}(F^4)\text{tr}(F^2) + (\text{tr}(F^2))^3],\end{aligned}\tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{EH} &= \frac{1}{4}\text{tr}(F^2) + \frac{2\alpha^2}{45m^4} \left[\frac{7}{4}\text{tr}(F^4) - \frac{5}{8}(\text{tr}(F^2))^2 \right] \\ &+ \frac{1}{8\pi^2m^8} \left[\frac{62}{945}\text{tr}(F^6) - \frac{7}{180}\text{tr}(F^4)\text{tr}(F^2) + \frac{1}{108}(\text{tr}(F^2))^3 \right].\end{aligned}\tag{1.13}$$

En el capítulo 2 estudiaremos la teoría Born-Infeld, ejemplificando los cambios que produce en algunos sistemas. En el capítulo 3 estudiaremos la dispersión fotón-fotón en la QED. En el capítulo 4 estudiaremos la dispersión fotón-fotón en la teoría Born-Infeld y daremos una cota para b , basandonos en los resultados experimentales de D. Bernard et. al. [11], donde se obtuvo una cota para el valor de la sección eficaz de dispersión. El capítulo 5 tiene como propósito estudiar la propagación de la luz dentro de un campo electromagnético tanto en la QED como en la teoría Born-Infeld. En los capítulos 6 y 7 estudiaremos el proceso *photon splitting* en la QED y en la teoría Born-Infeld, respectivamente, en el capítulo 7 damos una cota para b suponiendo que el proceso *photon splitting* pronto será observado en la Astrofísica.

Capítulo 2

Teoría Born-Infeld sobre la electrodinámica.

En los intentos por describir el comportamiento de los campos electromagnéticos dentro de materiales se han presentado diversas dificultades. Por ejemplo, con la teoría de Maxwell es sencillo describir los campos electromagnéticos sólo en materiales lineales, isotrópicos y homogéneos, pero es difícil querer ir más allá ya que todo depende de las relaciones constitutivas entre los campos que pueden llegar a ser muy complicadas.

Actualmente, se están desarrollando diversas teorías cuyo objetivo es ir más allá que la teoría de Maxwell³. Entre ellas destaca la teoría Born-Infeld, esta difiere de la teoría de Maxwell por lo menos en dos aspectos importantes. Primero, en la teoría Born-Infeld las relaciones constitutivas entre los campos dejan de ser triviales en el vacío; y segundo, la teoría Born-Infeld incorpora campos eléctricos maximales logrando que la autoenergía de una partícula puntual sea finita.

La descripción de esta teoría (y en general, de cualquier teoría que intente describir el comportamiento del campo electromagnético) es dada a través de las ecuaciones universales de Maxwell⁴, las cuales serán dadas en la siguiente sección.

³En este capítulo seguimos el libro de la referencia [7].

⁴Las ecuaciones universales de Maxwell son aquellas que involucran los cuatro campos, \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} y \vec{H} .

2.1. El marco de la electrodinámica no lineal.

Las ecuaciones universales de Maxwell (del electromagnetismo) son

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{c}. \quad (2.4)$$

Aquí, ρ es la carga eléctrica, \vec{j} es la densidad de corriente, y son llamados fuentes libres⁵; \vec{E} es el campo eléctrico, \vec{D} el desplazamiento eléctrico, \vec{B} la inducción magnética y \vec{H} el campo magnético. Este formalismo fue desarrollado, originalmente, para incorporar materiales en el electromagnetismo ordinario, pero igualmente se puede utilizar a nivel fundamental para definir nuevas teorías.

Las fuentes son cargas y corrientes que no están contenidas en materiales. Las contribuciones de la polarización y la magnetización son incorporadas a través de los campos \vec{D} y \vec{H} . En un material dado, existen relaciones fenomenológicas que expresan a \vec{D} y \vec{H} en función de \vec{E} y \vec{B} :

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B}) \quad \vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B}). \quad (2.5)$$

Estas son llamadas *relaciones constitutivas*, sin estas las ecuaciones (2.1) y (2.2) no podrían ser relacionadas con (2.3) y (2.4). Por ejemplo, los materiales dieléctricos lineales obedecen $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y $\vec{B} = \mu \vec{H}$, donde ϵ es la permitividad eléctrica y μ es la permeabilidad magnética. Para materiales más complicados estas relaciones no necesariamente son lineales. En tal caso, las ecuaciones (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) y (2.5) definen una teoría no lineal de la electrodinámica. Las no linealidades pueden provenir de tres raíces: (i) por la presencia de materiales y efectos de polarización dentro de la teoría clásica de Maxwell, (ii) por las no-linealidades a nivel cuántico incluidas dentro de la teoría de Maxwell, y (iii) por las no-linealidades al nivel del Lagrangiano clásico que llevan a generalizaciones verdaderas de la teoría de Maxwell. Es en el tercer punto donde la teoría Born-Infeld hace presencia.

Las ecuaciones de arriba parecen tener una validez limitada al tratarse de materiales, ya que la mayoría de ellos no se prestan para hacer un análisis exacto. En cambio, la teorías

⁵Esto significa que ρ y \vec{j} no toman en cuenta la carga polarizada ni las corrientes de magnetización.

Born-Infeld y, en general, las teorías de la electrodinámica no lineales sugieren que las relaciones constitutivas son tan fundamentales como las ecuaciones originales de Maxwell. Estas teorías no pretende describir al electromagnetismo en presencia de materiales, ya que aquí el mismo vacío se comporta como un tipo de material.

En la electrodinámica los campos electromagnéticos \vec{E} y \vec{B} están dentro del campo de esfuerzo (*field strength*)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \{\mu, \nu\} \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (2.6)$$

Específicamente, usando a i y j como índices espaciales, escribimos

$$F_{i0} = E_i, \quad F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k, \quad (2.7)$$

es decir,

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_z & -E_y \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

De (2.6) las ecuaciones (2.1) y (2.2) se satisfacen automáticamente ya que \vec{E} y \vec{B} provienen directamente de los potenciales A_μ . ¿Cómo obtenemos las ecuaciones (2.3) y (2.4)? Análogamente como en la teoría de Maxwell⁶ esas ecuaciones las escribimos como

$$\frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{c} j^\mu, \quad (2.9)$$

donde $G^{\mu\nu} = -G^{\nu\mu}$, es un tensor antisimétrico, y se obtiene de $F^{\mu\nu}$ reemplazando \vec{E} por \vec{D} y \vec{B} por \vec{H} :

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & H_z & -H_y \\ -D_y & -H_z & 0 & H_x \\ -D_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

$G^{\mu\nu}$ puede ser escrito en función de $F^{\mu\nu}$, ya que (2.9) representa a las ecuaciones de movimiento de la acción S (para un espacio tiempo de dimensión D arbitraria):

$$S = \int d^D x \mathcal{L}(F_{\mu\nu}) + \frac{1}{c} \int d^D x A_\mu j^\mu, \quad (2.11)$$

⁶En la teoría de Maxwell, (2.3) y (2.4) son escritas como $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu$.

donde, por simplicidad, la densidad Lagrangiana es función sólo de $F_{\mu\nu}$ y no de sus derivadas ni nada más. Además, $F^{\mu\nu}$ es invariante de norma por lo tanto \mathcal{L} también lo es, pero \mathcal{L} es arbitraria.

La variación de la acción es escrita como

$$\delta S = \int d^D x \delta A_\mu \left[\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{c} j^\mu \right], \quad (2.12)$$

y, por lo tanto, las ecuaciones de movimiento⁷ son

$$G^{\mu\nu} \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}. \quad (2.13)$$

Por construcción el tensor $G^{\mu\nu}$ es antisimétrico. Si el Lagrangiano no lineal es conocido entonces (2.13) expresa a $G^{\mu\nu}$ como función de $F^{\mu\nu}$. Por ejemplo, de (2.10) sabemos que $G^{0i} = D_i$ y puede ser considerado como una definición para \vec{D} . Para ver que (2.10) y (2.13) son iguales calculemos primero

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{0i}} \frac{\partial F_{0i}}{\partial E_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{i0}} \frac{\partial F_{i0}}{\partial E_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{0i}} = G^{0i} = D_i. \quad (2.14)$$

Por lo tanto, hemos mostrado que

$$\vec{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{E}}. \quad (2.15)$$

Análogamente, podemos mostrar que

$$\vec{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{B}}. \quad (2.16)$$

Si $\mathcal{L}(\vec{E}, \vec{B})$ es conocida, las ecuaciones (2.15) y (2.16) nos dan \vec{D} y \vec{H} . Por ejemplo, para la electrodinámica de Maxwell la densidad Lagrangiana es

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2). \quad (2.17)$$

⁷Para desarrollar la variación de la acción eficientemente, necesitamos definir las derivadas parciales respecto a $F_{\mu\nu}$. $\delta F_{\mu\nu}$ son restringidas por la antisimetría de $F_{\mu\nu}$, $\delta F_{\mu\nu} = -\delta F_{\nu\mu}$. Para cualquier función M que dependa de $F_{\mu\nu}$ escribimos

$$\delta M = \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial F_{\mu\nu}} \delta F_{\mu\nu}.$$

Como $\delta F_{\mu\nu}$ es antisimétrico entonces

$$\frac{\partial M}{\partial F_{\mu\nu}} = -\frac{\partial M}{\partial F_{\nu\mu}}.$$

Estas dos ecuaciones definen la $\frac{\partial M}{\partial F_{\mu\nu}}$.

Aquí $E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$ y $E = |\vec{E}|$, similarmente para \vec{D} , \vec{B} y \vec{H} . De (2.17) se tiene que $\vec{D} = \vec{E}$ y $\vec{H} = \vec{B}$.

El conjunto de ecuaciones (2.6) y (2.9) forman las ecuaciones de la electrodinámica no lineal para un número arbitrario de dimensiones.

De las ecuaciones (2.1) y (2.2) se puede ver que \vec{E} está relacionado con la derivada temporal de \vec{A} . Haciendo analogía con la mecánica clásica podemos ver a \vec{E} como una velocidad. La ecuación (2.15) implica que \vec{D} puede ser visto como el momento canónico asociado con la velocidad \vec{E} . Esto sugiere que la densidad Hamiltoniana, o el funcional de densidad de energía, sea igual a

$$\mathcal{H} = \vec{D} \cdot \vec{E} - \mathcal{L}. \quad (2.18)$$

Para la teoría de Maxwell $\mathcal{H}^M = \frac{1}{2}(E^2 + B^2)$. Se puede demostrar que la energía \mathcal{H} se conserva para \mathcal{L} arbitraria.

Concluamos esta sección considerando algunos candidatos para determinar \mathcal{L} en (2.11). \mathcal{L} debe ser invariante de norma e invariante de Lorentz. Como mencionamos anteriormente $F_{\mu\nu}$ es invariante de norma, entonces \mathcal{L} también lo es. Para ser invariante de Lorentz $F_{\mu\nu}$ debe construir objetos sin índices libres. Sólo hay dos cantidades invariantes que pueden ser construidas a partir de $F_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} s &\equiv -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2), \\ p &\equiv -\frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \vec{E} \cdot \vec{B}. \end{aligned}$$

p hace uso del campo de esfuerzo dual (*dual field strength*) $\tilde{F}^{\mu\nu}$ definido como

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

donde $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es un tensor de Lorentz totalmente antisimétrico (es un pseudo-tensor). Para cualquier sistema de referencia, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ se define como $\epsilon^{0123} = 1$ para las permutaciones pares de estos índices, como 0 para índices repetidos y como -1 para las permutaciones impares de los índices. Esto implica que $\tilde{F}^{\mu\nu}$ también es un tensor antisimétrico.

Verdaderamente, p no es una invariante de Lorentz por completo, p no es invariante bajo cambio de paridad. Pero p^2 es tanto invariante de norma como invariante de Lorentz, y es precisamente p^2 quien aparece en la definición de \mathcal{L} .

En la siguiente sección nos restringiremos a estudiar la teoría Born-Infeld, es decir, determinaremos la densidad Lagrangiana para esta teoría y veremos cómo modifica algunas conclusiones dadas por la Teoría de Maxwell.

2.2. La teoría Born-Infeld.

El postulado fundamental que Born e Infeld hicieron para garantizar la consistencia entre las ecuaciones (2.1)-(2.5) y la covariancia relativista fue postular la existencia de un principio de acción invariante a través del cual estas ecuaciones pueden ser derivadas. Es decir,

$$\delta \int \mathcal{L} d^4x = 0. \quad (2.20)$$

Para determinar la densidad Lagrangiana \mathcal{L} que da lugar a la invariancia de la acción debemos imponer a \mathcal{L} dos restricciones. Primero, esta debe ser reducida a la densidad Lagrangiana de Maxwell⁸, \mathcal{L}^M , para \vec{E} y \vec{B} pequeños. Segundo, debe existir un campo eléctrico máximo, \vec{E}_{crit} , cuando $\vec{B} = \vec{0}$. Para los primeros investigadores de esta teoría, un campo eléctrico máximo fue necesario para obtener una autoenergía finita para cargas puntuales.

¿Cómo podemos entender la existencia de un campo eléctrico máximo dentro de nuestra Lagrangiana? Born hizo analogía con la mecánica relativista, donde se tiene definida una velocidad máxima: la velocidad de la luz c . La idea física es respetar un postulado más general, que el mismo Born estableció [2]. El *principio de finitud* que postula que “cualquier teoría satisfactoria debe evitar que cualquier cantidad física llegue hasta infinito”. Este fue utilizado en la teoría de la mecánica relativista para dar un valor máximo a la velocidad de la luz.

El primer modelo de la electrodinámica no lineal propuesto por Born [7] fue basado en la siguiente elección de la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L}^B = -b^2 \sqrt{1 - \frac{(E^2 - B^2)}{b^2}} + b^2 = -b^2 \sqrt{1 - \frac{2s}{b^2}} + b^2, \quad (2.21)$$

para obtener la última igualdad usamos la definición de s dada en (1.4). El argumento dentro de la raíz cuadrada debe ser positivo, entonces para $B = 0$ se requiere que $E \leq b$.

⁸En la teoría de Maxwell la densidad lagrangiana es $\mathcal{L}^M = \frac{1}{2} (E^2 - B^2)$.

Más aún, para campos pequeños $s \ll b^2$

$$\mathcal{L}^B = -b^2 \left(1 - \frac{2s}{b^2}\right) + b^2 + \vartheta(s^2) = s + \vartheta(s^2) \simeq \mathcal{L}^M, \quad (2.22)$$

es decir, recuperamos la Lagrangiana de Maxwell.

Born descubrió esta densidad Lagrangiana mientras buscaba una teoría donde la autoenergía de una carga puntual fuera finita. Él notó que el mismo mecanismo que restringe a la velocidad de una partícula en la mecánica relativista restringe el valor del campo eléctrico inmerso en la teoría basada en (2.21). Este campo máximo es b , la misma b que aparece en (2.21), y es un valor crítico para la magnitud del campo eléctrico, $b \equiv E_{crit}$. Para cada valor de b se describe una teoría muy particular, entre más pequeño es b más nos alejamos de la teoría de Maxwell.

Born e Infeld [7] obtuvieron una teoría única y, en ciertos aspectos, con mejores características a través de la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L}^{BI} = -b^2 \sqrt{1 - \frac{(E^2 - B^2)}{b^2} - \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{b^4}} + b^2 = -b^2 \sqrt{1 - \frac{2s}{b^2} - \frac{p^2}{b^4}} + b^2, \quad (2.23)$$

con s y p definidos en (1.4) y (1.5), respectivamente. Como s y p^2 son invariantes de Lorentz, entonces esta densidad \mathcal{L} también lo es. Para campos pequeños donde s y p son mucho más pequeños que b^2 , la aproximación a campos débiles no cambia: $\mathcal{L}^{BI} \sim s = \mathcal{L}^M$.

Para comprender un poco más el porque el estudio de la teoría Born-Infeld, es importante notar que hay tres categorías de la teoría electrodinámica. Se tiene a la teoría de la electrodinámica no-lineal general, en la cual la velocidad de propagación de las ondas, v , depende de la frecuencia y polarización de éstas (es decir, es una teoría *birrefringente*). La teoría Born-Infeld de la electrodinámica (como mencionamos antes, también es una teoría no-lineal), donde v depende de la frecuencia pero no de la polarización de la onda (es decir, es una teoría *no-birrefringente*). Por último, la teoría de Maxwell, donde v no depende de la frecuencia ni de la polarización (es decir, también es una teoría *no-birrefringente*). Además, se puede mostrar que las únicas dos teorías de la electrodinámica que no presentan birrefringencia son la teoría de Maxwell y la teoría Born-Infeld.

La densidad Lagrangiana de Born-Infeld es especial por otra razón. Esta puede ser

escrita elegantemente en términos de la raíz cuadrada de un determinante:

$$\mathcal{L}^{BI} = -b^2 \sqrt{-\det\left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{b} F_{\mu\nu}\right)} + b^2 \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu})}, \quad (2.24)$$

donde $-\det\left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{b} F_{\mu\nu}\right)$ es una invariante de Lorentz y F es el tensor de esfuerzos (el tensor de la fuerza del campo), y la forma dada es conveniente para ir a más dimensiones.

De las relaciones constitutivas y de (2.23) podemos determinar \vec{D} y \vec{H} , esto da como resultado

$$\vec{D} = \frac{\partial \mathcal{L}^{BI}}{\partial \vec{E}} = \frac{\vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{B}/b^2}{\sqrt{1 - (E^2 - B^2)/b^2 - (\vec{E} \cdot \vec{B})^2/b^4}}, \quad (2.25)$$

$$\vec{H} = -\frac{\partial \mathcal{L}^{BI}}{\partial \vec{B}} = \frac{\vec{B} - (\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{E}/b^2}{\sqrt{1 - (E^2 - B^2)/b^2 - (\vec{E} \cdot \vec{B})^2/b^4}}. \quad (2.26)$$

Podemos invertir estas relaciones y obtener

$$\vec{E} = \frac{\partial \mathcal{H}^{BI}}{\partial \vec{D}} = \frac{\vec{D} + \vec{B} \times (\vec{D} \times \vec{B})/b^2}{\sqrt{1 + (D^2 + B^2)/b^2 + (\vec{D} \times \vec{B})^2/b^4}}, \quad (2.27)$$

$$\vec{H} = -\frac{\partial \mathcal{H}^{BI}}{\partial \vec{B}} = \frac{\vec{B} - \vec{D} \times (\vec{D} \times \vec{B})/b^2}{\sqrt{1 + (D^2 + B^2)/b^2 + (\vec{D} \times \vec{B})^2/b^4}}, \quad (2.28)$$

donde \mathcal{H} es la densidad Hamiltoniana y mostraremos su forma a continuación. Para la teoría de Born-Infeld, sustituyamos (2.27) en (2.23) y, después en (2.18) (análogamente como se obtiene el Hamiltoniano en la mecánica clásica) para obtener

$$\mathcal{H}^{BI}(\vec{D}, \vec{B}) = \vec{E}(\vec{D}, \vec{B}) \cdot \vec{D} - \mathcal{L}^{BI}(\vec{D}, \vec{B}) = b^2 \left[\sqrt{1 + \frac{(D^2 + B^2)}{b^2} + \frac{(\vec{D} \times \vec{B})^2}{b^4}} - 1 \right]. \quad (2.29)$$

2.3. Ejemplos de las consecuencias del uso de la Teoría Born-Infeld.

2.3.1. La auto-energía de una carga puntual es finita.

Lo siguiente que haremos es considerar la autoenergía de una carga puntual en la teoría Born-Infeld. Para este problema podemos tomar $\vec{B} = \vec{H} = \vec{0}$ en cada una de las relaciones

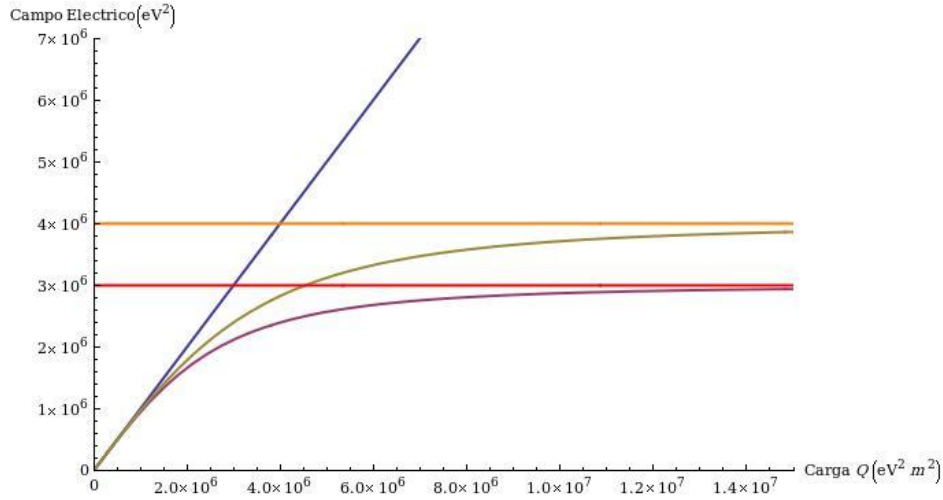


Figura 2.1: Comparación entre las amplitudes de los campos eléctricos, entre la teoría de Born-Infeld (la línea verde con $b = 4 \times 10^6 eV^2$ y la línea morada con $b = 3 \times 10^6 eV^2$, con sus respectivas líneas asintóticas) y la teoría de Maxwell (la línea azul que crece linealmente con la carga).

anteriores, entonces tenemos las ecuaciones

$$\mathcal{L}^{BI} = -b^2 \sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}} + b^2, \quad (2.30)$$

$$\vec{D} = \frac{\vec{E}}{\sqrt{1 - E^2/b^2}}, \quad (2.31)$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\sqrt{1 + D^2/b^2}}, \quad (2.32)$$

$$\mathcal{H}^{BI} = b^2 \sqrt{1 + \frac{D^2}{b^2}} - b^2. \quad (2.33)$$

En la teoría de Maxwell⁹ (para $\vec{B} = 0$) $\mathcal{H} \sim E^2$, y $E \sim r^{-2}$, donde r es la distancia a la carga. Así, la energía es $d^3x E^2 \sim dr/r^2$, cuya integral diverge para r pequeño. En la teoría Born-Infeld también podemos usar la simetría esférica del problema (junto con el teorema de Gauss) para determinar D , encontrando que $D \sim r^{-2}$. De (2.33) podemos ver que para D grande la densidad de energía es

$$\mathcal{H} \simeq bD = E_{crit}D, \quad D \rightarrow \infty. \quad (2.34)$$

⁹Usando el teorema de Gauss es sencillo determinar el campo eléctrico para una carga puntual, ya que este presenta simetría esférica.

Entonces, para campos grandes la densidad de energía de Maxwell $u = \frac{1}{2}ED$ es remplazada en la teoría Born-Infeld por $u = E_{crit}D$. Es decir, la energía Born-Infeld crece linealmente con D . Como consecuencia $d^3x E_{crit}D \sim d^3xr^{-2} \sim dr$, cuya integral converge. Para mayores detalles ver [12].

2.3.2. El capacitor de placas paralelas.

Un ejemplo en el que se ve claramente la diferencia entre la teoría de Maxwell y la teoría de Born-Infeld es en la *capacitancia* C de una configuración de dos conductores. La capacitancia se define como en la teoría de Maxwell, $Q = CV$, donde los conductores tiene cargas Q y $-Q$, respectivamente, y V es la diferencia de potencial entre ellos.

Por ejemplo, consideramos una configuración de dos conductores planos con cargas Q y $-Q$, respectivamente, separados una distancia d y de área A . A partir de (2.3) y con la ayuda del teorema de Gauss podemos determinar \vec{D} en ambas teorías. Coloquemos los planos perpendiculares al eje z , entonces $\vec{D} = \sigma\hat{z}$, donde σ es la densidad superficial de carga y \hat{z} indica la dirección sobre el eje z . En ambas teorías obtenemos el mismo resultado¹⁰.

Entonces, \vec{D} en Born-Infeld y \vec{D}^M en Maxwell son iguales, por lo tanto $\vec{D} = \vec{E}^M$ (recordemos que estamos tomando la permitividad eléctrica en el vacío igual a 1).

Por otro lado, sabemos que la diferencia de potencial está relacionada con el campo eléctrico a través de $V = Ed$, con d la separación entre las placas y es válida en ambas teorías. Así, al multiplicar (2.31) por d y sustituyendo $\vec{D} = \vec{E}_M$ la capacitancia es

$$C(V) = \frac{C^M}{\sqrt{1 - (V/V_c)^2}}, \quad (2.35)$$

donde $V_c = bd$ y se interpreta como una diferencia de potencial máxima presente entre los conductores, es decir, en la teoría Born-Infeld la diferencia de potencial se satura. Además notemos que la capacitancia en la teoría Born-Infeld $C(V)$ es más grande (en realidad, siempre es más grande) que la capacitancia en la teoría de Maxwell C^M .

La figura (2.3.1) compara las amplitudes de los campos eléctricos E como función de la carga Q obtenidos en la teoría de Maxwell y la teoría Born-Infeld.

¹⁰Esto por la gran simetría que presenta la configuración.

2.4. La teoría Born-Infeld en la teoría de cuerdas.

La teoría de cuerdas es una teoría cuyo objetivo es unificar de manera consistente todas las interacciones fundamentales ya conocidas, por lo que es importante conseguir un entendimiento profundo de sus propiedades, en particular de sus propiedades no perturbativas.

Con la teoría de Maxwell el campo eléctrico tiene mucha libertad, llega a ser infinito. Si bajo la teoría de Maxwell se estudian cuerdas con tensión finita, entonces existirá un campo eléctrico, \vec{E} , que romperá las cuerdas; esto no necesariamente sucederá bajo la teoría Born-Infeld fundamental. En este contexto, la teoría Born-Infeld es postulada con el fin de que no se rompan las cuerdas.

En un artículo escrito por Fradkin y Tseytlin [8], donde se propone una nueva formulación de una teoría de cuerdas abiertas que se basa en una acción efectiva *off-shell* covariante Γ para un número infinito de campos correspondientes a los modos de excitación para una primera cuantización de las cuerdas, se encontró que en la aproximación a "nivel árbol" Γ tiene el término

$$\sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu})}, \quad (2.36)$$

que es idéntico al que aparece en la acción de la teoría Born-Infeld; donde el campo eléctrico crítico es $b = 1/(2\pi\alpha')$, para $E > b$ las cuerdas se rompen, $\sqrt{\alpha'} = l_s$ y l_s la longitud de la cuerda.

El término (2.36) también aparece en la descripción de los campos electromagnéticos contenidos en las D-branas, es decir, esta dinámica es totalmente descrita por la teoría Born-Infeld. Este desarrollo puede ser visto con más detalle en [7].

Capítulo 3

Dispersión fotón-fotón en la QED.

A nivel de la teoría de Maxwell, la interacción entre cuatro fotones no tiene contraparte clásica, viene como resultado de fluctuaciones cuánticas de pares de partículas virtuales [9]. Una de la manifestaciones de esta interacción es la *dispersión fotón-fotón* y será estudiada en este capítulo.

Para este proceso de dispersión la amplitud básica (ver figura 3, donde se presenta uno de los procesos y para obtener el resultado final se deben sumar las seis permutaciones independientes de las piernas) es del orden α^2 y entonces la *sección eficaz* es dada, ver [9], por

$$\sigma = \frac{1}{64(2\pi)^2} \sum_{\varepsilon^i} \int \frac{d^3q_3}{\omega_3} \frac{d^3q_4}{\omega_4} \frac{\alpha^4 |M|^2}{q_1 \cdot q_2} \delta^4(q_1 + q_2 + q_3 + q_4), \quad (3.1)$$

donde (idénticamente que en la introducción) las ω 's y q 's representan la energía y momento para cada fotón involucrado en la dispersión, y M es la amplitud de dispersión y puede ser determinada a partir del Lagrangiano de Euler-Heisenberg a cuarto orden en los campos de (1.13):

$$i\delta\mathcal{L}_4^{EH} = i \frac{2\alpha^2}{45m^4} \left[(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)^2 + 7 (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \right] = i \frac{2\alpha^2}{45m^4} \left[\frac{7}{4} \text{tr}(F^4) - \frac{5}{8} (\text{tr}(F^2))^2 \right], \quad (3.2)$$

reemplazando F por la suma $F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)} + F^{(4)}$. Con la sustitución $F_{\rho\sigma}^{(j)} = i(q_\rho \varepsilon_\sigma - q_\sigma \varepsilon_\rho)$ el valor requerido será obtenido en el límite $\omega/m \rightarrow 0$ (en el límite de bajas energías), donde $\varepsilon_\rho = \varepsilon_\rho(q)$ es el vector de polarización en un proceso *on-shell*.

Nótese que, de acuerdo con lo que vimos en el capítulo anterior, (3.2) es invariante de norma y de Lorentz.

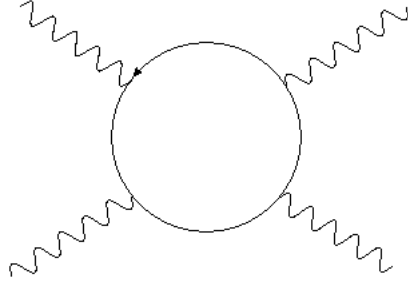


Figura 3.1: Representa uno de los seis diagramas del proceso de dispersión de fotones en un diagrama de cuatro piernas, en el que se considera que dos fotones interactúan y el resultado de tal interacción son dos fotones con diferentes momentos respecto de los primeros.

Como una notación corta identificaremos a F_ρ^σ con una matriz, y el símbolo de la traza corre sobre los cuatro índices de Lorentz. Entonces, análogamente como lo establecimos en la introducción, podemos encontrar la siguiente relación

$$\left(F \cdot \tilde{F}\right)^2 = 4\text{tr}(F^4) - 2(\text{tr}(F^2))^2. \quad (3.3)$$

De la relación de arriba y después de remplazar F por la suma $F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)} + F^{(4)}$ se encuentra que la amplitud¹¹ M es

$$\begin{aligned} M = & -\frac{i2\alpha^2}{45m^4} \left[5 \left(\text{tr}(F^{(1)}F^{(2)})\text{tr}(F^{(3)}F^{(4)}) + \text{tr}(F^{(1)}F^{(3)})\text{tr}(F^{(2)}F^{(4)}) + \text{tr}(F^{(1)}F^{(4)})\text{tr}(F^{(2)}F^{(3)}) \right) \right] + \\ & + \frac{i2\alpha^2}{45m^4} \left[7\text{tr} \left(F^{(1)}F^{(2)}F^{(3)}F^{(4)} + F^{(2)}F^{(1)}F^{(3)}F^{(4)} + F^{(3)}F^{(1)}F^{(2)}F^{(4)} \right) \right] + \\ & + \frac{i2\alpha^2}{45m^4} \left[7\text{tr} \left(F^{(2)}F^{(3)}F^{(1)}F^{(4)} + F^{(3)}F^{(2)}F^{(1)}F^{(4)} + F^{(1)}F^{(3)}F^{(2)}F^{(4)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

La sección eficaz no polarizada involucra el promedio del cuadrado absoluto de M , es decir,

$$\overline{|M|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^{(i)}} |M|^2. \quad (3.5)$$

¹¹En [9] aparece un 4! en el denominador pero eso no es correcto, no debe haber tal factor, estuvimos en contacto con J.B Zuber, uno de los autores de libro, y confirmo nuestra observación. Esto lo podemos ver en una cita de uno de los autores del libro http://www.lpthe.jussieu.fr/~zuber/index_en.html

En el sistema de referencias del centro de masa (y tomando en cuenta que en el proceso de interacción los fotones etiquetados con 1 y 2 entran: $q_1 = k_1 > 0$ y $q_2 = k_2 > 0$, mientras que los fotones etiquetados con 3 y 4 salen: $q_3 = -k_3 > 0$ y $q_4 = -k_4 > 0$) la diferencial de la sección eficaz luce como

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{4(k_1 \cdot k_2)} \int \frac{d^3k_3}{2\omega_3(2\pi)^3} \frac{d^3k_4}{2\omega_4(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(k_3 + k_4 - k_1 - k_2) \overline{|M|^2} \\ &= \frac{1}{64\omega^2(2\pi)^2} \overline{|M|^2} d\Omega, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $d\Omega$ es la longitud del ángulo sólido de la esfera unitaria.

Para desarrollar la suma sobre las polarizaciones involucradas en (3.5) notemos que

$$\sum_{\varepsilon} F_{\rho}^{*\sigma} F_{\mu}^{\nu} = - (g_{\rho\mu} k^{\sigma} k^{\nu} + k_{\rho} k_{\mu} g^{\sigma\nu} - g_{\rho}^{\nu} k^{\sigma} k_{\mu} - g_{\mu}^{\sigma} k_{\rho} k^{\nu}). \quad (3.7)$$

Un largo cálculo elaborado en MATHEMATICA¹² (y que se incluye en el apéndice A) resulta en

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\omega^2} \frac{\alpha^4}{(90)^2 m^8} 139 \times \\ &\times [(k_1 \cdot k_2)^2 (k_3 \cdot k_4)^2 + (k_1 \cdot k_3)^2 (k_2 \cdot k_4)^2 + (k_1 \cdot k_4)^2 (k_2 \cdot k_3)^2]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

La segunda combinación invariante que esta dentro de la expresión anterior

$$\sum_{\text{distintas permutaciones}} (k_1 \cdot k_2)(k_2 \cdot k_3)(k_3 \cdot k_4)(k_4 \cdot k_1),$$

es igual a un medio de la cantidad entre paréntesis cuadrados de (3.8). Si θ es el ángulo de dispersión del centro de masa tenemos

$$k_1 \cdot k_2 = k_3 \cdot k_4 = 2\omega^2, \quad (3.9)$$

$$k_1 \cdot k_3 = k_2 \cdot k_4 = \omega^2(1 - \cos(\theta)), \quad (3.10)$$

$$k_1 \cdot k_4 = k_2 \cdot k_3 = \omega^2(1 + \cos(\theta)). \quad (3.11)$$

Así, la sección eficaz diferencial no polarizada es igual a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{139}{90^2} \alpha^4 \left(\frac{\omega}{m}\right)^6 \frac{1}{m^2} (3 + \cos^2(\theta))^2, \quad \omega/m \ll 1. \quad (3.12)$$

¹²Este cálculo fue realizado con la ayuda de José Manuel Dávila Dávila.

De la estadística de Bose ésta expresión es simétrica bajo el cambio $\theta \rightarrow \pi - \theta$. Entonces, integrando sobre la mitad de la esfera unitaria obtenemos la sección eficaz elástica total¹³:

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \frac{139}{90^2} \left(\frac{56}{5}\right) \alpha^4 \left(\frac{\omega}{m}\right)^6 \frac{1}{m^2}, \quad \omega/m \ll 1. \quad (3.13)$$

Aunque sólo desarrollamos el procedimiento para encontrar la sección eficaz de dispersión a bajas frecuencias, también es posible determinar el valor de la sección eficaz de dispersión a altas frecuencias. A continuación presentamos una gráfica tomada de [10], graficando la σ contra¹⁴ la razón $\hbar\omega/mc^2$, ver figura 3.

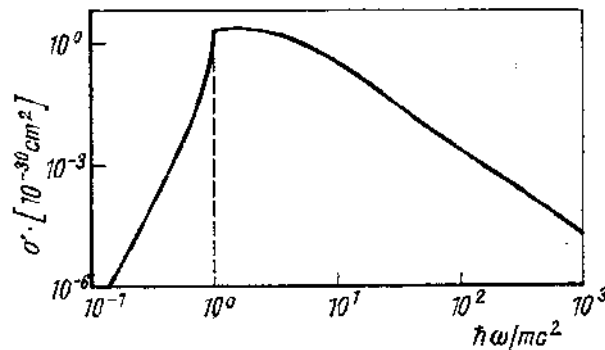


Figura 3.2: Sección eficaz de la dispersión fotón-fotón. Esta imagen fue obtenida de [10] página 526.

¹³En [9] aparece 11 en lugar de 5, este fue un error en la escritura del libro, uno de los autores del libro, J. B. Zuber, confirmó nuestra observación, ver http://www.lpthe.jussieu.fr/~zuber/index_en.html

¹⁴Recuerde que estamos trabajando en las unidades $\hbar = c = 1$.

Capítulo 4

La dispersión fotón-fotón en la teoría Born-Infeld.

Retomemos (2.23)

$$\mathcal{L}^{BI} = -b^2 \sqrt{1 - \frac{(E^2 - B^2)}{b^2} - \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{b^4}} + b^2 = -b^2 \sqrt{1 - \frac{2s}{b^2} - \frac{p^2}{b^4}} + b^2.$$

Vamos a limitarnos al estudio de campos electromagnéticos pequeños donde s y p son mucho más pequeños que b^2 , entonces el término de \mathcal{L} a cuarto orden en los campos es

$$\delta \mathcal{L}_4^{BI} = \frac{1}{2b^2} \left[\frac{1}{4}(E^2 - B^2)^2 + (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \right] = \frac{1}{32b^2} [4tr(F^4)) - (tr(F^2))^2]. \quad (4.1)$$

Esta puede ser considerada como una corrección a cuarto orden en los campos electromagnéticos a la Lagrangiana de Maxwell (2.17). Esta corrección señala la presencia de interacciones entre cuatro fotones aún dentro del contexto clásico.

Análogamente, que en el capítulo anterior, podemos calcular la amplitud de dispersión reemplazando F por $F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)} + F^{(4)}$, donde $F^{(i)}$ es el campo de esfuerzos relacionado con el i -ésimo fotón, y así calcular la sección eficaz de dispersión de la interacción entre cuatro fotones. Entonces, con (4.1) M y $|M|^2$ quedan como

$$\begin{aligned} M = & \frac{1}{32b^2} [-8 (tr(F^{(1)}F^{(2)})tr(F^{(3)}F^{(4)}) + tr(F^{(1)}F^{(3)})tr(F^{(2)}F^{(4)}) + tr(F^{(1)}F^{(4)})tr(F^{(2)}F^{(3)}))] + \\ & + \frac{1}{32b^2} [16tr(F^{(1)}F^{(2)}F^{(3)}F^{(4)} + F^{(2)}F^{(1)}F^{(3)}F^{(4)} + F^{(3)}F^{(1)}F^{(2)}F^{(4)})] + \\ & + \frac{1}{32b^2} [16tr(F^{(2)}F^{(3)}F^{(1)}F^{(4)} + F^{(3)}F^{(2)}F^{(1)}F^{(4)} + F^{(1)}F^{(3)}F^{(2)}F^{(4)})], \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$|M|^2 = \frac{8}{b^4} [(k_1 \cdot k_2)^2 (k_3 \cdot k_4)^2 + (k_1 \cdot k_3)^2 (k_2 \cdot k_4)^2 + (k_1 \cdot k_4)^2 (k_2 \cdot k_3)^2]. \quad (4.3)$$

Entonces, de (3.6) y desde el sistema de referencia del centro de masa la diferencial de la sección eficaz $d\sigma$ respecto al ángulo sólido $d\Omega$ es¹⁵

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{32(2\pi)^2} \frac{1}{\omega^2 b^4} [(k_1 \cdot k_2)^2 (k_3 \cdot k_4)^2 + (k_1 \cdot k_3)^2 (k_2 \cdot k_4)^2 + (k_1 \cdot k_4)^2 (k_2 \cdot k_3)^2], \quad (4.4)$$

donde k_i es el momento del i -ésimo fotón y ω es la frecuencia de oscilación desde el centro de masa.

Para obtener los resultados anteriores usamos el mismo programa del capítulo anterior elaborado en MATHEMATICA, sólo cambiamos los coeficientes en los términos a cuarto orden en los campos del Lagrangiano (3.2).

Si θ es el ángulo de dispersión desde el centro de masa, entonces podemos usar las relaciones (3.9), (3.10) y (3.11); y, de forma análoga que en el capítulo anterior, obtener una ecuación diferencial para la sección de dispersión σ en función de θ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16(2\pi)^2} \left(\frac{\omega}{b}\right)^4 \omega^2 [3 + \cos^2(\theta)]^2. \quad (4.5)$$

Integrando:

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)} \frac{7}{10} \frac{\omega^6}{b^4}. \quad (4.6)$$

Recordemos que estos cálculos son correctos sólo para $\omega/m \ll 1$.

A partir de aquí y tomando en cuenta datos experimentales podemos dar una cota superior para el campo eléctrico, es decir, podemos dar un valor para b . Aquí tomaremos los datos experimentales obtenidos de un artículo publicado titulado *Search for Stimulated Photon-Photon Scattering in Vacuum* realizado por *D. Bernard*, et al. [11]. En este se utilizaron láseres, no se encontró evidencia de la existencia de nueva física distinta a la QED en la dispersión fotón-fotón a bajas energías (es decir, se obtuvo un “resultado nulo” en el experimento). A una energía $\omega = 0,8eV$ se obtuvo una cota superior para la sección eficaz de este proceso $\sigma_{lim} = 1,5 \times 10^{-48} cm^2 = 3,8 \times 10^{-39} eV^2$. Sustituyendo estos datos en (4.6), obtuvimos

$$1,6 \times 10^9 eV^2 \lesssim b, \quad (4.7)$$

como una cota a b , donde (para $\omega = 0,8eV$) $\omega/m \simeq 1,6 \times 10^{-6} \ll 1$.

¹⁵Con las mismas convenciones usadas en el capítulo anterior para el Lagrangiano de Euler-Heisenberg.

Capítulo 5

Propagación de la luz dentro de un campo electromagnético.

5.1. Propagación de la luz dentro de un campo electromagnético en la QED.

Como veremos la propagación de la luz es un punto muy importante para nuestro objetivo. En particular, *el índice de refracción, n* , es fundamental para determinar las reglas de selección del proceso *photon splitting*, por ejemplo.

Este capítulo tiene como propósito ilustrar, en el más simple de los casos donde los efectos no lineales de la electrodinámica comienzan a jugar un papel significativo, cómo el índice de refracción cambia en la presencia de un campo electromagnético externo.

Para esto, consideraremos el Lagrangiano de Maxwell más su primera corrección no lineal en la *QED*, es decir,

$$\mathcal{L} = s + c_1 s^2 + c_2 p^2, \quad c_1 = \frac{8}{45} \frac{\alpha^2}{m^4}, \quad c_2 = \frac{14}{45} \frac{\alpha^2}{m^4}, \quad (5.1)$$

donde s y p son dados en (1.4) y (1.5), respectivamente,

$$\begin{aligned} s &\equiv -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2), \\ p &\equiv -\frac{1}{4} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \vec{E} \cdot \vec{B}. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento derivadas de las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -2\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}, \quad (5.2)$$

donde la diferenciación respecto a $F_{\mu\nu}$ debe ser desarrollada bajo la restricción de la antrsimetría de los índices. De las identidades

$$\frac{\partial s}{\partial F_{\alpha\beta}} = -\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}, \quad \frac{\partial p}{\partial F_{\alpha\beta}} = -\frac{1}{2}\tilde{F}^{\alpha\beta}, \quad (5.3)$$

las ecuaciones de movimiento se reescriben como

$$0 = \partial_\mu \left(F^{\mu\nu} - 2c_1 s F^{\mu\nu} - 2c_2 p \tilde{F}^{\mu\nu} \right), \quad (5.4)$$

que representa la ecuación de campo en el vacío para el menor orden de la electrodinámica no lineal. Esta ecuación es acompañada por la usual *identidad de Bianchi* $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$.

Aplicando estas ecuaciones para el caso de la propagación de la luz en un campo electromagnético de fondo, descomponemos el tensor del campo de esfuerzos en el campo de fondo $F^{\mu\nu}$ y el campo de la onda plana (que representa al fotón) $f^{\mu\nu}$, $F^{\mu\nu} \rightarrow F^{\mu\nu} + f^{\mu\nu}$. Supondremos que el campo de fondo es constante ó, por lo menos, varía lentamente, tal que los términos con derivadas de $F^{\mu\nu}$ en el Lagrangiano se pueden despreciar. Además linealizamos las ecuaciones de campo respecto al campo de la onda plana, es decir, despreciamos la auto-interacción de la luz propagándose. Es importante notar que la linealización no necesariamente implica que el campo de fondo es mucho más fuerte que el campo de la onda plana, ya que el límite a campo externo cero esta bien definido.

Con estas suposiciones y la identidad de Bianchi, las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$0 = \partial_\mu f^{\mu\nu} - c_1 F_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \partial_\mu f^{\alpha\beta} - c_2 \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\mu\nu} \partial_\mu f^{\alpha\beta}. \quad (5.5)$$

Como $f^{\mu\nu}$ es el campo de una onda plana, aplicamos la Transformada de Fourier al espacio de momentos, donde $f^{\mu\nu}$ puede ser escrita como $f^{\mu\nu} = k^\mu \varepsilon^\nu - k^\nu \varepsilon^\mu$. Aquí, $k^\mu = (\omega, \vec{k})$ es el vector de onda de la luz propagándose. Entonces, el vector de onda reemplaza la derivada en (5.5), $\partial^\mu \rightarrow ik^\mu$. Finalmente, imponemos la norma de Lorentz, $k_\mu \varepsilon^\mu = 0$, y llegamos a la condición del cono de luz

$$0 = k^2 \varepsilon^\nu - 2c_1 F_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} k_\nu k^\alpha \varepsilon^\beta - 2c_2 \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\mu\nu} k_\mu k^\alpha \varepsilon^\beta. \quad (5.6)$$

Obviamente, recuperamos la condición para el cono de luz trivial $k^2 = 0$ en el límite clásico, donde $c_1 = c_2 = 0$. Para los dos diferentes estados de polarización, ε_1^μ y ε_2^μ , que

resuelven esta ecuación de campo, proponemos¹⁶

$$\varepsilon_1^\mu \sim \tilde{F} k^\mu \equiv \tilde{F}^{\mu\lambda} k_\lambda, \quad \varepsilon_2^\mu \sim F k^\mu \equiv F^{\mu\lambda} k_\lambda. \quad (5.7)$$

Usando las siguientes identidades algebraicas fundamentales

$$F^{\mu\alpha} \tilde{F}_\alpha^\nu = \tilde{F}^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu = p\eta^{\mu\nu}, \quad (5.8)$$

obtenemos

$$\varepsilon_1^\mu : \quad 0 = (k^2 - 2c_2 z_k - 2c_2 s k^2) \tilde{F} k^\nu + (2c_1 p k^2) F k^\nu, \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_2^\mu : \quad 0 = (k^2 - 2c_1 z_k) F k^\nu + (2c_2 p k^2) \tilde{F} k^\nu, \quad (5.10)$$

donde

$$z_k = (F^{\mu\nu} k_\nu)^2 \quad (5.11)$$

y es una cantidad invariante de Lorentz y de norma.

Recordemos que estamos en el dominio de campo débil, esperamos que k^2 se desvíe sólo un poco de la condición trivial del cono de luz: $k^2 = 0 + O(c_{1,2})$. Los términos proporcionales a $c_1 p k^2$, $c_2 p k^2$ o $c_2 s k^2$ son de orden más alto en $c_{1,2}$ y deben ser omitidos. Por lo tanto, encontramos

$$\varepsilon_1^\mu : \quad k^2 = 2c_2 z_k, \quad (5.12)$$

$$\varepsilon_2^\mu : \quad k^2 = 2c_1 z_k. \quad (5.13)$$

Introduciendo la *velocidad de fase* a través de $k^\mu = (k^0, \vec{k}) = k(v, \hat{k})$, donde $k \equiv |\vec{k}|$, obtenemos

$$\varepsilon_1^\mu : \quad v_1 = 1 - c_2 \frac{z_k}{k^2} = 1 - \frac{14}{45} \frac{\alpha^2}{m^4} \frac{z_k}{k^2}, \quad (5.14)$$

$$\varepsilon_2^\mu : \quad v_2 = 1 - c_1 \frac{z_k}{k^2} = 1 - \frac{8}{45} \frac{\alpha^2}{m^4} \frac{z_k}{k^2}. \quad (5.15)$$

Una apropiada representación (en el límite cuando $v \sim 1$) de la invariante z_k en términos de los campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} es dada por

$$z_k = k^2 \left[B^2 \sin^2 \theta_B + E^2 \sin^2 \theta_E + 2\hat{k} \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) \right], \quad (5.16)$$

donde los ángulos θ_B y θ_E están definidos entre los campos magnético y eléctrico y el vector de onda \vec{k} a través de $B^2 \sin^2 \theta_B = B^2 - (\vec{B} \cdot \hat{k})^2$ y similarmente para θ_E .¹⁷

¹⁶Aquí, seguimos la presentación de [13], para más detalles consultar esta referencia.

¹⁷Para mayores detalles ver la referencia [13]

Notemos lo siguiente:

1. La condición del cono de luz derivada de las ecuaciones de campo es por construcción de segundo orden en k^μ , ya que el Lagrangiano efectivo (5.1) no depende de las derivadas del tensor del campo de esfuerzos. Es decir, despreciamos la no localidad de la acción efectiva. Como consecuencia, la velocidad de grupo y de fase de la onda plana propagandose coinciden, por que la velocidad de fase no depende de la frecuencia.
2. La velocidad de fase no excede la velocidad de la luz en el vacío $c (= 1)$, a diferencia de la luz que se propaga dentro de un campo gravitacional en el que la luz si puede revazar la velocidad c (ver [13] y [14]).

Como una consecuencia inmediata de (5.14) y (5.15) el *índice de refracción* $n = 1/v$ (recuerda que la velocidad de la luz en el vacío $c = 1$) depende de la polarización y en el límite $z_k \ll k^2$ se ve como

$$\varepsilon_1^\mu : \quad n_1 = 1 + c_2 \frac{z_k}{k^2} = 1 + \frac{14}{45} \frac{\alpha^2}{m^4} \frac{z_k}{k^2}, \quad (5.17)$$

$$\varepsilon_2^\mu : \quad n_2 = 1 + c_1 \frac{z_k}{k^2} = 1 + \frac{8}{45} \frac{\alpha^2}{m^4} \frac{z_k}{k^2}. \quad (5.18)$$

Esto será de gran utilidad en los siguientes capítulos.

5.2. Propagación de la luz dentro de un campo electromagnético en la teoría Born-Infeld.

Como ya mencionamos anteriormente, la teoría Born-Infeld es una teoría clásica no-lineal de la electrodinámica. El Lagrangiano de Maxwell más la primera corrección no-lineal en la teoría Born-Infeld es

$$\mathcal{L}^{BI} = s + \frac{1}{2b^2} (s^2 + p^2), \quad (5.19)$$

con b un parámetro libre.

Nótese que (5.1) y (5.19) tienen la misma forma, además en (5.19) $c_1 = c_2 = 1/2b^2$ (esto es importante y lo vamos a mostrar más adelante). Esta similitud entre los Lagrangianos garantiza que lo que desarrollamos anteriormente también es válido en esta teoría.

Entonces, directamente podemos utilizar los resultados obtenidos en la sección anterior para la velocidad de fase (5.14) y (5.15), resultando

$$\varepsilon_{1,2}^{\mu}, \quad v^{BI} = 1 - c_1 \frac{z_k}{k^2} = 1 - \frac{1}{2b^2} \frac{z_k}{k^2}, \quad (5.20)$$

donde z_k es definida en (5.16). Entonces, las ondas con diferentes polarizaciones se propagan con la misma velocidad a través del campo electromagnético de fondo. Esto demuestra la *no birrefringencia* de la teoría Born-Infeld.

Entonces, el índice de refracción (a nivel árbol, no depende de la polarización) es

$$n^{BI} = 1 + \frac{1}{2b^2} \frac{z_k}{k^2}. \quad (5.21)$$

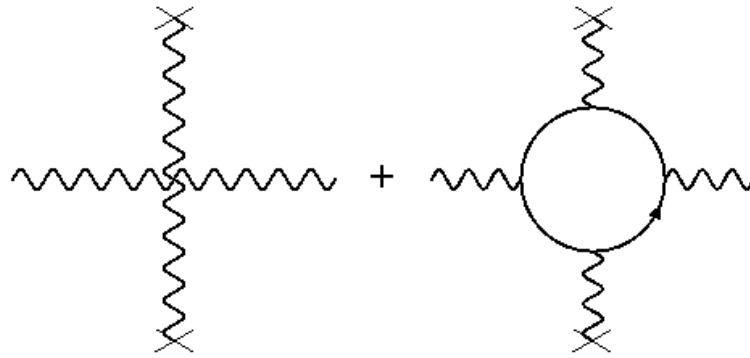


Figura 5.1: En la teoría Born-Infeld la interacción con un campo externo se representa por este diagrama, una contribución a nivel árbol y otra a nivel de un lazo.

La figura (5.1) muestra uno de los diagramas de Feynman que representan los términos a cuarto orden en los campos del Lagrangiano de Born-Infeld. Este diagrama es la suma de un diagrama a *nivel árbol* (que son correcciones clásicas al campo), y un diagrama a *nivel un lazo* (que tiene un origen cuántico). En esta teoría ambos diagramas existen pero sólo el primero es especial, ya que el segundo diagrama es el mismo al ya existente en la QED ordinaria. Por su parte, cada uno de estos diagramas aporta una corrección al índice de refracción de la forma $\delta n = c_{1,2} z_k / k^2$.

Por lo tanto, en la teoría Born-Infeld a cuarto orden en los campos, el índice de refracción es

$$n_{Total}^{BI}(1, 2) = 1 + (n^{BI} - 1) + (n_{1,2} - 1), \quad (5.22)$$

donde n^{BI} es dada en (5.21) y $n_{1,2}$ por (5.17) y (5.18), respectivamente para cada estado de polarización. Explícitamente, para las polarizaciones perpendicular (n_{\perp}^{BI}) y paralela (n_{\parallel}^{BI}) tenemos

$$n_{\perp}^{BI} = 1 + \left(\frac{1}{2b^2} + \frac{14}{45} \frac{\alpha^2}{m^4} \right) \frac{z_k}{k^2}, \quad (5.23)$$

$$n_{\parallel}^{BI} = 1 + \left(\frac{1}{2b^2} + \frac{8}{45} \frac{\alpha^2}{m^4} \right) \frac{z_k}{k^2}. \quad (5.24)$$

Capítulo 6

Photon splitting en QED.

Dentro de los procesos que se llevan a cabo con fotones tenemos: dispersión fotón-fotón, *photo-pair process* y *photon splitting*. Cada uno de estos procesos es caracterizado por el volumen de su espacio fase $\rho(k)$ y sus elementos matriciales $|\mathcal{M}|$. Si uno de los dos es cero entonces el proceso no puede ocurrir.

En el vacío, el volumen del espacio fase relativista $\rho_N(k)$ para N fotones libres de cuatro-momento total k es (ver [15])

$$\rho_N(k) = \int \prod_{i=1}^N d^4k_i \vartheta(k_{i0}) \delta(k_i^2) \delta^{(4)}(k - \sum_{j=1}^N k_j) = C_N \vartheta(k^2) (k^2)^{N-2}, \quad (6.1)$$
$$C_N = \frac{(\frac{1}{2}\pi)^{N-1}}{(N-2)!(N-1)!}, \quad N = 2, 3, 4 \dots$$

Durante el cálculo de la matriz \mathcal{M} el *Teorema de Furry* es una herramienta útil. El Teorema de Furry establece que todos los diagramas involucrados en un lazo fermiónico con un número impar de vértices pueden ser omitidos en el cálculo de la función de Green (ver [9]), ya que el elemento de matriz correspondiente es cero.

En el vacío, ya hemos estudiado el proceso de dispersión de fotones. En este capítulo nos interesa estudiar el proceso de *photon splitting* y para *photo-pair process* sólo diremos que cuando este proceso es cinemáticamente permitido (y lo es cuando $\omega > 2m$) domina sobre *photon splitting* como un mecanismo de absorción de fotones.

Dentro del proceso de *photon splitting* en el vacío se encuentra que:

1. En el decaimiento de un fotón en dos fotones existe espacio fase pero la matriz \mathcal{M} es cero.
2. En el decaimiento de un fotón en tres o más fotones la matriz \mathcal{M} es distinta de cero para un número impar de fotones (Teorema de Furry), pero no hay espacio fase.

Entonces, el decaimiento de un fotón en N fotones esta prohibido en el vacío.

Esto nos hace ir más allá. Si tomamos en cuenta la influencia de un campo electromagnético externo en la propagación de fotones (6.1) deja de ser válida. Este campo electromagnético influye en el cálculo de la matriz \mathcal{M} ya que el teorema de Furry deja de ser válido, y el **índice de birrefringencia**, λ , deja de ser cero. En este contexto el índice de birrefringencia se define por

$$|v| = c \left(1 - \frac{1}{2} \lambda |Q|^2 \right), \quad (6.2)$$

donde¹⁷ $c = 1$, v la velocidad de fase (que en este caso es igual a la velocidad de grupo) y $Q = \hat{k} \times (\hat{k} \times B)$ para $\vec{E} = \vec{0}$, el cual es el único caso que se considerará en el siguiente estudio: *photon splitting*.

El cálculo del volumen del espacio fase de los N fotones, $\tilde{\rho}_N(k)$, inmersos en un campo electromagnético externo es fácil (ver [15]) sólo cuando todos los fotones tienen el mismo índice de birrefringencia λ_f . En este caso

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_N(k) &\equiv \int \prod_{i=1}^N d^4 k_i \vartheta(k_{i0}) \delta(k_i \cdot b \cdot k_i) \delta^{(4)}(k - \sum_{j=1}^N k_j) \\ &= |\det(b)|^{-(N+1)/2} C_N \vartheta(k \cdot b \cdot k) (k \cdot b \cdot k)^{N-2}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde $b_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \lambda_f F_{\mu\kappa} F_{\nu}^{\kappa}$ y con la misma definición de C_N como en (6.1).

Denotando al índice de birrefringencia del fotón inicial por λ_i , entonces

$$k \cdot b \cdot k = (\lambda_i - \lambda_f) a^2(k), \quad (6.4)$$

donde, en nuestro caso, $a^2(k) = -(\vec{k} \times \vec{B})^2$. Entonces, de (6.3) y (6.4) se concluye (I. Bialynicki-Birula y Z. Bialynicka-Birula (1970) [15]) que:

¹⁷Recordemos que estamos trabajando en unidades en las que $c = 1$. Además nótese que para diferentes polarizaciones tenemos diferentes índices de birrefringencia.

- Si el fotón inicial es más rápido que todos los fotones resultantes en el decaimiento ($\lambda_i < \lambda_f$), el fotón inicial puede decaer en cualquier número de fotones, (6.4) es mayor que cero.
- Si $\lambda_i = \lambda_f$, sólo el decaimiento en dos fotones es posible, (6.4) es cero.
- Si $\lambda_i > \lambda_f$, el volumen del espacio fase es cero para cualquier número de fotones en el que decaiga el primero, (6.4) es menor que cero.

Uno de los procesos presentes a este nivel y, como mencionamos antes, en el que estamos interesados es *photon splitting*.

Consideraremos el caso en el que el campo magnético \vec{B} es constante y espacialmente uniforme. Entonces, no hay transferencia de cuatro-momento a los fotones y por lo tanto los cuatro-vectores de propagación de los fotones inicial k_1 , y finales k_2 y k_3 , satisfacen las condiciones de conservación de energía y momento, es decir,

$$k_1 = \omega_1(1, \hat{k}_1) = k_2 + k_3 = \omega_2(1, \hat{k}_2) + \omega_3(1, \hat{k}_3). \quad (6.5)$$

Estas condiciones son válidas sólo si los tres fotones son colineales

$$\hat{k}_1 = \hat{k}_2 = \hat{k}_3, \quad (6.6)$$

esto implica que todos los productos escalares entre ellos son cero, es decir,

$$k_1^2 = k_2^2 = k_3^2 = k_1 \cdot k_2 = k_1 \cdot k_3 = k_2 \cdot k_3 = 0. \quad (6.7)$$

Estas condiciones nos llevan a una importante simplificación de los elementos de matriz para el proceso *photon splitting*.

Cuando todas las permutaciones de los vértices son consideradas, el elemento de matriz es un invariante de norma y por lo tanto debe incluir a los tres fotones y al campo externo solo a través de sus respectivos tensores de campo de esfuerzos, $F_{\mu\nu}^{(1)}$, $F_{\mu\nu}^{(2)}$, $F_{\mu\nu}^{(3)}$ y $F_{\mu\nu}^{(ext)}$, ver [16].

También, se puede probar (ver Adler (1970), [16]) que los elementos de matriz se pueden descomponer en contribuciones de la forma

$$F^{(1)} F^{(2)} F^{(3)} \underbrace{F^{(ext)} \dots F^{(ext)}}_{(2n+1)} \underbrace{k \dots k}_{2n-2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.8)$$

Debido a la colinealidad de los vectores de propagación, los tensores del campo de los fotones pueden ser escritos en términos de los cuatro-vectores de polarización ϵ como lo hicimos en el capítulo 3:

$$F_{\mu\nu}^j = i(k_\mu \epsilon_\nu - k_\nu \epsilon_\mu), \quad j = 1, 2, 3. \quad (6.9)$$

Entonces para los dos casos más simples $n = 0$ y $n = 1$, en (6.8), tenemos lo siguiente. Para $n = 0$ sólo hay una interacción¹⁸ con el campo magnético externo \vec{B} , los elementos matriciales son de cuarto orden en los campos, es decir, tienen la forma $F^1 F^2 F^3 F^{ext}$ con todos los índices contraídos y sin k . Los elementos matriciales son calculados con la ayuda del Lagrangiano de Euler-Heisenberg dado por (3.2). En un cálculo en *MATHEMATICA*, análogo como al que presentamos en el apéndice B y que usaremos para los cálculos de este capítulo, mostramos que estos términos a cuarto orden no contribuyen. *Photon splitting* con sólo una interacción con el campo \vec{B} esta prohibido, la matriz \mathcal{M} es cero.

Para $n = 1$, los elementos matriciales correspondientes son a sexto orden en los campos y tienen la forma $F^1 F^2 F^3 F^{ext} F^{ext} F^{ext}$ (sin factores de k , nuevamente), y ahora los fotones interactúan tres veces con el campo \vec{B} . Como veremos a continuación este es el orden más bajo posible que contribuye a los elementos matriciales en el proceso de *photon splitting*.

Estos elementos matriciales son determinados a partir del Lagrangiano de Euler-Heisenberg a sexto orden en los campos

$$\delta\mathcal{L}_6^{EH} = -\frac{1}{5040\pi^2 m^8} \left[\frac{241}{13} (F^2)^3 + \frac{13}{8} (F^2)(\tilde{F} \cdot F)^2 \right], \quad (6.10)$$

que a través de (1.10) y (1.11) dadas en la introducción, $\delta\mathcal{L}_6^{EH}$ se puede escribir como función sólo de las trazas de los tensores del campo¹⁹:

$$\delta\mathcal{L}_6^{EH} = -\frac{1}{8\pi^2 m^8} \left[-\frac{1}{108} (\text{tr}(F^2))^3 + \frac{7}{180} \text{tr}(F^2) \text{tr}(F^4) - \frac{62}{945} \text{tr}(F^6) \right], \quad (6.11)$$

donde, análogamente que en el capítulo 3, $F = F^1 + F^2 + F^3 + F^{ext}$. Sustituyendo F y (6.9) en (6.11) obtenemos los elementos de la matriz \mathcal{M} a sexto orden en los campos y de la forma $F^1 F^2 F^3 F^{ext} F^{ext} F^{ext}$. Uno de los diagramas de este proceso se presenta en la figura (6), y la suma sobre todos los diagramas correspondientes nos da la matriz \mathcal{M} .

¹⁸El resultado para este proceso ya fue obtenido por I. Bialynicki-Birula y Z. Bialynicka-Birula [15] y Adler [16].

¹⁹Esta forma de la densidad lagrangiana fue tomada de la tesis de doctorado de José Manuel Dávila Dávila titulada *La teoría de Einstein-Maxwell al nivel de un lazo usando el formalismo línea de mundo*.

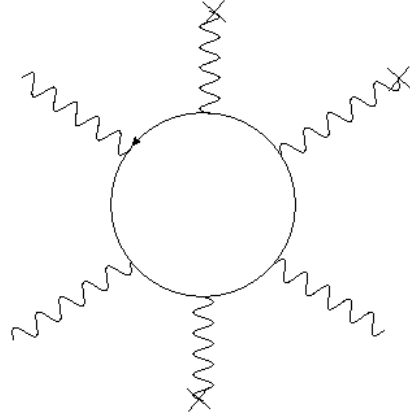


Figura 6.1: Proceso de interacción con el campo magnético \vec{B} en un diagrama de seis piernas, en el que se consideran tres interacciones con el campo, tales interacciones son representadas con una cruz.

Los estados de polarización de nuestro interés son los estados linealmente polarizados²⁰, ya sean paralelos (\parallel) o perpendiculares (\perp) al plano formado por el campo externo y la dirección de propagación de los fotones \hat{k} . Así, existen ocho posibles elementos matriciales, que escribiremos como

$$\mathcal{M} \left[\begin{pmatrix} \parallel \\ \perp \end{pmatrix}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \parallel \\ \perp \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} \parallel \\ \perp \end{pmatrix}_3 \right]. \quad (6.12)$$

Cuatro de estos elementos son cero debido a la invariancia CP que presenta la electrodinámica cuántica ($\mathcal{M}[(\parallel)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3]$, $\mathcal{M}[(\parallel)_1 \rightarrow (\perp)_2 + (\perp)_3]$, $\mathcal{M}[(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\perp)_3]$, $\mathcal{M}[(\perp)_1 \rightarrow (\perp)_2 + (\parallel)_3]$).

En este trabajo recalculamos estos resultados elaborando un programa en *MATHEMATICA*, en el que consideramos al campo magnético externo constante \vec{B} en la dirección \hat{z} ($\vec{B} = B\hat{z}$), la dirección de propagación de los fotones \hat{y} , y entonces los vectores de polarización (considerando sólo los estados de polarización lineal) paralelo $\epsilon_{\parallel} = (0, 0, 1, 0)$ y perpendicular al campo $\epsilon_{\perp} = (1, 0, 0, 0)$ (donde la última entrada de estos cuatro-vectores corresponde a la coordenada temporal). Para los cuatro elementos matriciales distintos de

²⁰Aquí, para nombrar a las polarizaciones paralelas y perpendiculares usamos una elección distinta a la que Adler hace en su artículo [16]. Nosotros seguimos la elección que se hizo en el libro de Dittrich y Gies [13].

cero obtuvimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[(\parallel)_1 \rightarrow (\perp)_2 + (\parallel)_3] &= \mathcal{M}[(\parallel)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\perp)_3] = \mathcal{M}[(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3] = \\ &= \frac{13}{315} \frac{B^3}{\pi^2 m^8} \omega_1 \omega_2 \omega_3, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\mathcal{M}[(\perp)_1 \rightarrow (\perp)_2 + (\perp)_3] = \frac{94}{315} \frac{B^3}{\pi^2 m^8} \omega_1 \omega_2 \omega_3. \quad (6.14)$$

Ahora examinaremos la influencia de los efectos de dispersión en el **coeficiente de absorción** κ de *photon splitting*. Restringimos nuestro estudio al caso en que $\omega < 2m$, donde *photo-pair production* como un proceso real esta prohibido y sólo *photon splitting* ocurre. En este rango de energías *photo-pair production* ocurre como un proceso virtual, implicando una modificación en la relación de dispersión para la propagación de fotones en los eigenmodos paralelos o perpendiculares²¹,

$$\frac{k}{\omega} = n_{\parallel, \perp}(\omega). \quad (6.15)$$

Entonces el **coeficiente de absorción** para *photon splitting* es

$$\begin{aligned} d\kappa \left[\begin{pmatrix} \parallel \\ \perp \end{pmatrix}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \parallel \\ \perp \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} \parallel \\ \perp \end{pmatrix}_3 \right] &= \frac{1}{2\omega_1} \frac{1}{2} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3 2\omega_3} (2\pi)^4 \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \\ &\times \delta^3(n(\omega_1)\omega_1 \hat{k}_1 - n(\omega_2)\omega_2 \hat{k}_2 - n(\omega_3)\omega_3 \hat{k}_3) \left| \mathcal{M} \left[\begin{pmatrix} \parallel \\ \perp \end{pmatrix}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \parallel \\ \perp \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} \parallel \\ \perp \end{pmatrix}_3 \right] \right|^2, \end{aligned} \quad (6.16)$$

donde cada n , *índice de refracción*, debe ser el apropiado para cada polarización del fotón. Cuando los índices de refracción son iguales a 1 la conservación de energía y momento requiere que los tres fotones se propaguen en la misma dirección, entonces (6.16) se reduce a

$$\begin{aligned} d\kappa \left[\begin{pmatrix} \parallel \\ \perp \end{pmatrix}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \parallel \\ \perp \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} \parallel \\ \perp \end{pmatrix}_3 \right] &= \frac{1}{2\omega_1} \frac{1}{2} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3 2\omega_3} (2\pi)^4 \\ &\times \delta^4(k_1 - k_2 - k_3) \left| \mathcal{M} \left[\begin{pmatrix} \parallel \\ \perp \end{pmatrix}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \parallel \\ \perp \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} \parallel \\ \perp \end{pmatrix}_3 \right] \right|^2. \end{aligned} \quad (6.17)$$

²¹La igualdad entre la relación de dispersión paralela y perpendicular nos garantiza la no birrefringencia en el proceso.

Cuando el índice de refracción, n , se desvía una pequeña cantidad del 1 pueden suceder dos cosas: las tres direcciones de propagación de los fotones se desvían una de la otra por un pequeño ángulo ó el proceso es totalmente prohibido. La condición para que la primera de las alternativas ocurra es precisamente la desigualdad del triángulo para la adición de fotones, es decir,

$$\begin{aligned} (\omega_2 + \omega_3)n(\omega_2 + \omega_3) &= |n(\omega_1)\omega_1\hat{k}_1| = |n(\omega_2)\omega_2\hat{k}_2 + n(\omega_3)\omega_3\hat{k}_3| \\ &\leq n(\omega_2)\omega_2 + n(\omega_3)\omega_3, \end{aligned} \quad (6.18)$$

donde ahora usaremos una condición mucho más fuerte, que $\omega < 2m$, sobre la energía. Ahora $\omega/m \ll 1$, que nos permite expandir en serie de Taylor alrededor de una energía nula.

Esta condición puede ser convenientemente reescrita como

$$\Delta = \omega_2 n(\omega_2) + \omega_3 n(\omega_3) - (\omega_2 + \omega_3) n(\omega_2 + \omega_3) \quad \Delta \geq 0. \quad (6.19)$$

Examinemos para cuales casos de polarización de la reacción *photon splitting* se satisface la desigualdad (6.19). Vamos a dar un análisis válido para ω pequeño, $\omega/m \ll 1$, basado en las siguientes propiedades cualitativas de los índices de refracción ([16], Adler (1971)) n_{\parallel} y n_{\perp} :

1. $n_{\parallel}(0) > n_{\perp}(0)$.

2. $\frac{\partial n_{\perp}}{\partial \omega_2} = \frac{\partial n_{\perp}}{\partial \omega_3} = \frac{\partial n_{\parallel}}{\partial \omega_2} = \frac{\partial n_{\parallel}}{\partial \omega_3} = 0$, $\frac{\partial^2 n_{\perp}}{\partial \omega_2^2} > 0$, $\frac{\partial^2 n_{\perp}}{\partial \omega_3^2} > 0$, $\frac{\partial^2 n_{\parallel}}{\partial \omega_2^2} > 0$, $\frac{\partial^2 n_{\parallel}}{\partial \omega_3^2} > 0$,
 $\frac{\partial^2 n_{\perp}}{\partial \omega_2 \partial \omega_3} > 0$, $\frac{\partial^2 n_{\parallel}}{\partial \omega_2 \partial \omega_3} > 0$.

La expansión en serie de Taylor de (6.19) sobre los índices de refracción alrededor de cero y hasta segundo orden en las frecuencias, y las propiedades de arriba nos dan las siguientes relaciones para Δ :

$$\begin{aligned} \Delta[(\perp)_1 \rightarrow (\perp)_2 + (\perp)_3] &= \omega_2 n_{\perp}(\omega_2) + \omega_3 n_{\perp}(\omega_3) - (\omega_2 + \omega_3) n_{\perp}(\omega_2 + \omega_3) \\ &\approx \omega_2 \left[n_{\perp}(0) + \frac{1}{2} \omega_2^2 \frac{d^2 n_{\perp}(0)}{d\omega_2^2} \right] + \omega_3 \left[n_{\perp}(0) + \frac{1}{2} \omega_3^2 \frac{d^2 n_{\perp}(0)}{d\omega_3^2} \right] - \\ &\quad - (\omega_2 + \omega_3) \left[n_{\perp}(0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 n_{\perp}(0)}{\partial \omega_2^2} + \frac{\partial^2 n_{\perp}(0)}{\partial \omega_2 \partial \omega_3} + \frac{\partial^2 n_{\perp}(0)}{\partial \omega_3^2} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \omega_2 \omega_3 \left[\omega_2 \frac{\partial^2 n_{\perp}(0)}{\partial \omega_2^2} + \omega_3 \frac{\partial^2 n_{\perp}(0)}{\partial \omega_3^2} + (\omega_2 + \omega_3) \frac{\partial^2 n_{\perp}(0)}{\partial \omega_2 \partial \omega_3} \right] < 0, \end{aligned} \quad (6.20)$$

análogamente,

$$\begin{aligned}
\Delta[(\perp)_1 \rightarrow (\perp)_2 + (\parallel)_3] &\approx (\omega_2 + \omega_3)(n_\perp - n_\parallel) + O[(frecuencia)^3] > 0, \\
\Delta[(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\perp)_3] &\approx \omega_2(n_\parallel(0) - n_\perp(0)) + O[(frecuencia)^3] > 0 \\
\Delta[(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3] &\approx \omega_2(n_\perp(0) - n_\parallel(0)) + O[(frecuencia)^3] > 0, \\
\Delta[(\parallel)_1 \rightarrow (\perp)_2 + (\perp)_3] &\approx \omega_2(n_\parallel(0) - n_\perp(0)) + O[(frecuencia)^3] < 0, \\
\Delta[(\parallel)_1 \rightarrow (\perp)_2 + (\parallel)_3] &\approx \omega_3(n_\perp(0) - n_\parallel(0)) + O[(frecuencia)^3] < 0, \\
\Delta[(\parallel)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3] &\approx -\frac{1}{2}\omega_2\omega_3 \left[\omega_2 \frac{\partial^2 n_\parallel(0)}{\partial \omega_2^2} + \omega_3 \frac{\partial^2 n_\parallel(0)}{\partial \omega_3^2} + (\omega_2 + \omega_3) \frac{\partial^2 n_\parallel(0)}{\partial \omega_2 \partial \omega_3} \right] < 0, \\
\Delta[(\parallel)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\perp)_3] &\approx (\omega_2 + \omega_3)(n_\parallel(0) - n_\perp(0)) + O[(frecuencia)^3] < 0,
\end{aligned} \tag{6.21}$$

donde, por estar en el rango de bajas frecuencias ($\omega/m \ll 1$), los términos a tercer orden en la frecuencia no contribuyen para el análisis anterior.

Hemos mostrado que las reacciones $(\perp)_1 \rightarrow (\perp)_2 + (\parallel)_3$, $(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\perp)_3$ y $(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3$ son permitidas por la conservación de energía y momento, todos los otros casos de polarización están prohibidos. Este análisis se puede extender para altas frecuencias ([16] Adler (1971)) pero no lo haremos aquí, ya que sería salirse mucho de contexto.

Nótese que para $\omega/m \ll 1$, el proceso *photon splitting* de fotones paralelamente polarizados es absolutamente prohibido por los efectos de dispersión, mientras que el proceso de *photon splitting* de fotones perpendicularmente polarizados si es permitido. En la tabla 6 resumimos los resultados hasta ahora presentados para las reglas de selección del proceso *photon splitting*, aquí se observa que el único estado permitido por las reglas de selección es $(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3$.

Después de integrar sobre el espacio fase a (6.17), el coeficiente de absorción (para el único elemento de matriz permitido) es

$$\begin{aligned}
\kappa[(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3] &= \frac{1}{32\pi\omega_1^2} \int_0^{\omega_1} d\omega_2 \int_0^{\omega_1} d\omega_3 \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \\
&\quad \times |\mathcal{M}[(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3]|^2 \\
&= \frac{1}{32\pi\omega_1^2} \int_0^{\omega_1} d\omega_2 \int_0^{\omega_1} d\omega_3 \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \times \\
&\quad \times \left(\frac{13}{315} \frac{B^3}{\pi^2 m^8} \omega_1 \omega_2 \omega_3 \right)^2.
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Cuadro 6.1: Reglas de selección para el proceso *photon splitting*.

Reacción	Reglas de selección <i>CP</i>	Reglas de selección cinemáticas (para $\omega < 2m$)
$(\parallel)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3$	Prohibido	Prohibido
$(\parallel)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\perp)_3$	Permitido	Prohibido
$(\parallel)_1 \rightarrow (\perp)_2 + (\parallel)_3$	Prohibido	Prohibido
$(\parallel)_1 \rightarrow (\perp)_2 + (\perp)_3$	Permitido	Prohibido
$(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3$	Permitido	Permitido
$(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\perp)_3$	Prohibido	Permitido
$(\perp)_1 \rightarrow (\perp)_2 + (\parallel)_3$	Prohibido	Permitido
$(\perp)_1 \rightarrow (\perp)_2 + (\perp)_3$	Permitido	Prohibido

Integrando para $0 < \omega_2, \omega_3 < \omega_1$ el coeficiente de absorción es

$$\kappa[(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3] = \left(\frac{13}{315} \frac{1}{\pi^2 m^8} \right)^2 \frac{\omega_1^5 B^6}{960\pi}. \quad (6.23)$$

Capítulo 7

Photon splitting en la teoría Born-Infeld.

Retomemos (2.23)

$$\mathcal{L}^{BI} = -b^2 \sqrt{1 - \frac{(E^2 - B^2)}{b^2} - \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{b^4}} + b^2 = -b^2 \sqrt{1 - \frac{2s}{b^2} - \frac{p^2}{b^4}} + b^2.$$

Considerando campos electromagnéticos pequeños donde s y p^2 son mucho más pequeños que b^2 , la expansión a sexto orden en los campos de (2.23) es:

$$\delta\mathcal{L}_6^{BI} = -\frac{1}{384b^4} \left[3(F^2)^3 + 2(F^2)(\tilde{F} \cdot F)^2 \right], \quad (7.1)$$

que a través de (1.10) y (1.11) se puede escribir como función sólo de las trazas de los tensores del campo:

$$\delta\mathcal{L}_6^{BI} = \frac{1}{768b^4} \left[(tr(F^2))^3 - 2tr(F^2)tr(F^4) + 24tr(F^6) \right]. \quad (7.2)$$

Nótese la gran similitud entre los Lagrangianos (6.11) y (7.2), sólo difieren en los coeficientes. Entonces, el cálculo de los elementos matriciales de \mathcal{L}^{BI} se efectúa de forma análoga como al que realizamos, en el capítulo 6, para el proceso *photon splitting* en la QED.

Uno de los digramas de Feynman que representan este proceso en la teoría Born-Infeld es el representado en la figura (me falta), que corresponde a la suma de un diagrama a *nivel árbol* más un diagrama a *nivel un lazo*. Como en el capítulo 5, en esta teoría ambos diagramas existen pero el diagrama especial es el primero, el segundo es el mismo al ya existente en la QED ordinaria.

Con el mismo programa (que usamos en el capítulo anterior) elaborado en MATHEMATICA, sólo cambiando los coeficientes, obtuvimos que los únicos elementos matriciales distintos de cero, para el límite de bajas energías $\omega/m \ll 1$, tienen como valor

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{BI}[(\parallel)_1 \rightarrow (\perp)_2 + (\parallel)_3] &= \mathcal{M}_{BI}[(\parallel)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\perp)_3] = \mathcal{M}_{BI}[(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3] \\ &= \frac{512 B^3}{768 b^4} \omega_1 \omega_2 \omega_3, \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\mathcal{M}^{BI}[(\perp)_1 \rightarrow (\perp)_2 + (\perp)_3] = \frac{2304 B^3}{768 b^4} \omega_1 \omega_2 \omega_3. \quad (7.4)$$

De acuerdo con (5.23) y (5.24) la relación entre los índices de refracción para las posibles polarizaciones son las mismas que en la QED, esto implica que las relaciones (6.20) y (6.21), permitidos por la conservación de energía y momento, son aún válidas en este proceso (es decir, los estados de polarización permitidos son $(\perp)_1 \rightarrow (\perp)_2 + (\parallel)_3$, $(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\perp)_3$ y $(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3$), y el diagrama mostrado en la figura (5.1) es válida en este proceso.

Por lo tanto, análogamente como el proceso de *photon splitting* en la QED, sólo un estado cumple con la invariancia CP y con la condición de conservación de energía y momento $(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3$. Para este estado de polarización podemos obtener el **coeficiente de absorción** sustituyendo $|\mathcal{M}^{BI}[(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3]|^2$ en (6.22), es decir

$$\begin{aligned} \kappa^{BI}[(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3] &= \frac{1}{32\pi\omega_1^2} \int_0^{\omega_1} d\omega_2 \int_0^{\omega_1} d\omega_3 \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \\ &\quad \times |\mathcal{M}_{BI}[(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3]|^2 \\ &= \frac{1}{32\pi\omega_1^2} \int_0^{\omega_1} d\omega_2 \int_0^{\omega_1} d\omega_3 \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \times \\ &\quad \times \left(\frac{512 B^3}{768 b^4} \omega_1 \omega_2 \omega_3 \right)^2. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Integrando para $0 < \omega_2, \omega_3 < \omega_1$ el coeficiente de absorción es

$$\kappa^{BI}[(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3] = \left(\frac{512}{768} \right)^2 \frac{1}{30} \frac{\omega_1^5 B^6}{b^8}. \quad (7.6)$$

Recordemos que el propósito de esta tesis es encontrar cotas inferiores para b , el parámetro libre de la teoría Born-Infeld, para ello, hagamos caso de la Astrofísica. En este momento los Astrofísicos están de acuerdo que el proceso *photon splitting* juega cierto papel

para algunos procesos que ocurren cerca de la superficie de las estrellas de neutrones, debido a sus campos magnéticos intensos (ver [17], [18], [19] y [20]). Estos procesos son: (i) polarización de fotones, (ii) cuando el espectro de radiación de estas estrellas cambian de energías mayores a energías menores y (iii) el efecto conocido como *efecto cascada de pares electrón-positrón*, que ocurren cerca de los polos de las estrellas de neutrones²².

Sin embargo, las observaciones astrofísicas aún no permiten una comparación muy directa con la QED. Lo que en este momento se puede decir es que la tasa del proceso *photon splitting* en la teoría Born-Infeld no puede ser mucho más grande que la predicha por la QED. Con esto podemos pedir que

$$\kappa^{BI} \leq 10\kappa, \quad (7.7)$$

donde κ fue determinada en el capítulo anterior (6.23), para *photon-splitting* en la QED:

$$\kappa[(\perp)_1 \rightarrow (\parallel)_2 + (\parallel)_3] = \left(\frac{13}{315} \frac{1}{\pi^2 m^8} \right)^2 \frac{\omega_1^5 B^6}{960\pi}.$$

Con esta relación obtenemos una cota para b igual a

$$17m^2 \lesssim b, \quad (7.8)$$

cuyo valor numérico es

$$4,4 \times 10^{12} eV^2 \lesssim b. \quad (7.9)$$

Por otro lado, si en el futuro se obtienen datos más precisos y los Astrofísicos logran averiguar no sólo la importancia del *photon splitting*, sino también confirmar la tasa predicha por la QED, eso nos llevaría a una cota más estricta para b . Es decir, una vez que la tasa observada este cerca de la tasa de la QED (que se deriva del diagrama a un lazo) es claro que la parte adicional, que viene del diagrama con el vértice a sexto orden de la teoría Born-Infeld, k^{BI} , (suponiendo que existe tal vértice) puede constituir sólo una pequeña contribución. En este escenario futuro la ecuación (7.7) se podrá escribir reemplazando 10 por 1 ó aún menos.

²²Sólo hablaremos de la Astrofísica y no de experimentos del laboratorio, esto debido a que el elemento de matriz (físicamente permitido) involucra la tercera potencia del campo magnético en el factor $(B/m^2)^3$. En el laboratorio el mayor campo magnético producido es $B \simeq 40T$, para el cual $(B/m^2)^3 \simeq 2,7 \times 10^{-23}$, es mucho menor que 1. Mientras, en la superficie de las estrellas de neutrones $B \simeq 1 \times 10^{12}T$, con el que $(B/m^2)^3 \simeq 5,4 \times 10^4$.

Capítulo 8

Conclusiones.

En este trabajo estudiamos una teoría no lineal de la electrodinámica clásica: *la teoría Born-Infeld*. En el capítulo 2, vimos las consecuencias que las descripciones que ciertos fenómenos electromagnético llevan consigo si los estudiamos con la teoría Born-Infeld. Como mostramos, un hecho relevante viene cuando calculamos la auto-energía de una partícula puntual con carga Q , encontramos que la auto-energía es finita; y para un capacitor de placas paralelas encontramos que la capacitancia es mayor que el la teoría de Maxwell.

Para campos electromagnéticos pequeños vimos que la expansión hasta sexto orden en los campos del Lagrangiano de la teoría Born-Infeld es totalmente análogo, pero con coeficientes distintos, a la expansión hasta sexto orden en los campos del Lagrangiano de Euler-Heisenberg de la QED. Usando esta analogía fuimos capaces de poner atención a dos procesos particulares: dispersión fotón-fotón y *photon splitting* en la teoría Born-Infeld (en la QED, estos son procesos bien conocidos). Para cada proceso encontramos una cota inferior para el parámetro libre b de la teoría Born-Infeld.

En el capítulo 3, recalculamos la sección eficaz σ para la dispersión fotón-fotón en la QED (este fue desarrollado en [9]), elaboramos un programa en MATHEMATICA que nos permitió calcular los elementos matriciales correspondientes. Aquí se encontraron algunos errores en [9] y fueron señalados a uno de los autores, Jean-Bernard Zuber, quien concordó con nuestras observaciones. En el capítulo 4, calculamos la sección eficaz en la teoría Born-Infeld utilizando el mismo programa en MATHEMATICA, solo cambiando los coeficientes; donde de los resultados experimentales para la sección eficaz de [11] obtuvimos

una cota para b , (4.7).

El capítulo 5 ilustra cómo el índice de refracción cambia en la presencia de un campo electromagnético externo y es fundamental para los siguientes capítulos. También mostramos que las relaciones entre los diferentes índices de refracción son las mismas tanto en la QED como en la teoría Born-Infeld.

En el capítulo 6 estudiamos el proceso *photon splitting* en un campo magnético externo constante. Con otro programa elaborado en MATHEMATICA y por la conservación de energía-momento mostramos que, en el límite de bajas energías $\omega/m \ll 1$, este proceso solo tiene un estado de polarización lineal permitido. Y para este proceso recalculamos su coeficiente de absorción κ . En el capítulo 7, mostramos que la gran similitud, solo con coeficientes distintos, entre la expansión a sexto orden de los Lagrangianos de la QED y la teoría Born-Infeld nos llevan a las mismas reglas de selección para ambas teorías. Con el mismo programa en MATHEMATICA, solo cambiando los coeficientes, obtuvimos el valor del elemento de matriz permitido y calculamos el coeficiente de absorción κ^{BI} en esta teoría.

Con los acuerdos que actualmente se tiene en la Astrofísica, concluimos que, lo que en este momento podemos decir es que la tasa de producción del proceso *photon splitting* en la teoría Born-Infeld no puede ser mucho más grande que la predicha por la QED. Entonces podemos pedir que $\kappa^{BI} \leq 10\kappa$, con lo que obtuvimos otra cota para b , (7.9).

La cota para b de la dispersión fotón-fotón es la más confiable (en cuanto a la física de donde viene), pero es más débil (en cuanto a valor numérico) que la cota que obtuvimos en *photon splitting*, pero ambas son mucho menores que la que se obtiene en [4], es decir, en los fenómenos experimentales a los que se refiere en [4] las no linealidades se ven con más fuerza que en la dispersión fotón-fotón o en el *photon splitting*; obteniendo una cota mejor que las nuestras. Pero el valor obtenido por Soff et. al. en [4] se refiere a experimentos con átomos pesados para los cuales existen ciertas dificultades conceptuales, mientras los efectos a los que se refieren nuestras cotas prueban de una manera mucho más limpia y directa la importancia de los vértices a cuarto y sexto orden en los campos del Lagrangiano de Born-Infeld.

Apéndice A

Cálculo en MATHEMATICA de la matriz de dispersión del proceso dispersión fotón-fotón.

Para calcular la sección eficaz de dispersión debemos calcular

$$\overline{|M|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^{(i)}} |M|^2,$$

donde M es la matriz de dispersión y $\varepsilon^{(i)}$ son las posibles polarizaciones del sistema. Para el proceso dispersión fotón-fotón la matriz M es calculada a través del Lagrangiano de Euler-Heisenberg a cuarto orden en los campos (que se ve como una corrección a cuarto orden en los campos del Lagrangiano de Maxwell)

$$M := i\delta\mathcal{L}_4^{EH} = i\frac{2\alpha^2}{45m^4} \left[\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2 \right)^2 + 7 \left(\vec{E} \cdot \vec{B} \right)^2 \right] = i\frac{2\alpha^2}{45m^4} \left[\frac{7}{4} \text{tr}(F^4) - \frac{5}{8} (\text{tr}(F^2))^2 \right].$$

Con el programa elaborado en MATHEMATICA que mostraremos a continuación calculamos la expresión que viene dentro de los corchetes cuadrados. Para ello usamos MATHEMATICA 6 y una implementación llamada *Mathtensor*.

A continuación presentamos el programa.

Iniciar MathTensor

```
<< MathTensor.m
```

```
Off[MetricgFlag]
```

Definición de tensores

DefineTensor[{F2, F4}, {{2, 1}, 1}]

DefineTensor[{A, B, X, Y}, {{2, 1}, -1}]

DefineTensor[{F, Fm, Fc, fm, fc}, {{1, 3, 2}, -1}]

DefineTensor[{k, K}, {{1, 2}, 1}]

DefineTensor[{e, c}, {{1, 2, 3}, 1}]

Cálculo de $\epsilon^{abcd}\epsilon_{ijkl}$

$$FD2 = \text{Expand}[24\text{Antisymmetrize}[K\text{delta}[ua, li]K\text{delta}[ub, lj]K\text{delta}[uc, lk] \\ K\text{delta}[ud, ll], \{li, lj, lk, ll\}]]$$

$$\begin{aligned} & K\text{delta}_i^d K\text{delta}_j^c K\text{delta}_k^b K\text{delta}_l^a - K\text{delta}_i^c K\text{delta}_j^d K\text{delta}_k^b K\text{delta}_l^a - \\ & K\text{delta}_i^d K\text{delta}_j^b K\text{delta}_k^c K\text{delta}_l^a + K\text{delta}_i^b K\text{delta}_j^d K\text{delta}_k^c K\text{delta}_l^a + \\ & K\text{delta}_i^c K\text{delta}_j^b K\text{delta}_k^d K\text{delta}_l^a - K\text{delta}_i^b K\text{delta}_j^c K\text{delta}_k^d K\text{delta}_l^a - \\ & K\text{delta}_i^d K\text{delta}_j^c K\text{delta}_k^a K\text{delta}_l^b + K\text{delta}_i^c K\text{delta}_j^d K\text{delta}_k^a K\text{delta}_l^b + \\ & K\text{delta}_i^d K\text{delta}_j^a K\text{delta}_k^c K\text{delta}_l^b - K\text{delta}_i^a K\text{delta}_j^d K\text{delta}_k^c K\text{delta}_l^b - \\ & K\text{delta}_i^c K\text{delta}_j^a K\text{delta}_k^d K\text{delta}_l^b + K\text{delta}_i^a K\text{delta}_j^c K\text{delta}_k^d K\text{delta}_l^b + \\ & K\text{delta}_i^d K\text{delta}_j^b K\text{delta}_k^a K\text{delta}_l^c - K\text{delta}_i^b K\text{delta}_j^d K\text{delta}_k^a K\text{delta}_l^c - \\ & K\text{delta}_i^d K\text{delta}_j^a K\text{delta}_k^b K\text{delta}_l^c + K\text{delta}_i^a K\text{delta}_j^d K\text{delta}_k^b K\text{delta}_l^c + \\ & K\text{delta}_i^b K\text{delta}_j^c K\text{delta}_k^d K\text{delta}_l^c - K\text{delta}_i^a K\text{delta}_j^b K\text{delta}_k^d K\text{delta}_l^c - \\ & K\text{delta}_i^c K\text{delta}_j^b K\text{delta}_k^a K\text{delta}_l^d + K\text{delta}_i^b K\text{delta}_j^c K\text{delta}_k^a K\text{delta}_l^d + \\ & K\text{delta}_i^c K\text{delta}_j^a K\text{delta}_k^b K\text{delta}_l^d - K\text{delta}_i^a K\text{delta}_j^c K\text{delta}_k^b K\text{delta}_l^d - \\ & K\text{delta}_i^b K\text{delta}_j^a K\text{delta}_k^c K\text{delta}_l^d + K\text{delta}_i^a K\text{delta}_j^b K\text{delta}_k^c K\text{delta}_l^d \end{aligned}$$

Orden de la traza de F4

$$\begin{aligned} f41 = & \text{MaxwellF}[la, lb] \text{MaxwellF}[lc, ld] \text{MaxwellF}[ua, ud] \text{MaxwellF}[ub, uc] \rightarrow \\ & - \text{MaxwellF}[la, lb] \text{MaxwellF}[ub, uc] \text{MaxwellF}[lc, ld] \text{MaxwellF}[ud, ua] \end{aligned}$$

$$f42 = \text{MaxwellF}[la, lb] \text{MaxwellF}[lc, ld] \text{MaxwellF}[ua, uc] \text{MaxwellF}[ub, ud] \rightarrow$$

MaxwellF[la, lb] MaxwellF[ub, uc] MaxwellF[lc, ld] MaxwellF[ud, ua]

$$F_{ab}F_{cd}F^{ad}F^{bc} \rightarrow -F_{ab}F^{bc}F_{cd}F^{da}$$

$$F_{ab}F_{cd}F^{ac}F^{bd} \rightarrow F_{ab}F^{bc}F_{cd}F^{da}$$

El valor de $(f * \tilde{f})^2$.

ResA = AbsorbKdelta[Expand[-FD2 MaxwellF[la, lb]

MaxwellF[lc, ld] MaxwellF[ui, uj] MaxwellF[uk, ul]/4]]

$$-2F_{ab}F_{cd}F^{ad}F^{bc} + 2F_{ab}F_{cd}F^{ac}F^{bd} - 2F_{ab}F_{cd}F^{ab}F^{cd}$$

MMD2 = ResA /. f41 /. f42

$$-4F_{ab}F_{cd}F^{ad}F^{bc} - 2F_{ab}F_{cd}F^{ab}F^{cd}$$

El valor de $(f2)^2$.

M22 = MaxwellF[la, lb] MaxwellF[lc, ld] MaxwellF[ua, ub] MaxwellF[uc, ud]

$$F_{ab}F_{cd}F^{ab}F^{cd}$$

Haciendo el cambio $f \rightarrow f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)} + f^{(4)}$.

$$fs := MaxwellF[la_-, lb_-] \rightarrow F[-1, la, lb] + F[-2, la, lb] + F[-3, la, lb] + F[-4, la, lb]$$

Notacion para la traza de **f2**

$$t1 := F[x_-, li_-, la_-]F[y_-, lj_-, lb_-] \rightarrow -tr[F[x]F[y]]/; PairQ[la, lb]/; PairQ[li, lj]$$

$$n1 := F[-1, li_-, la_-]F[-1, lj_-, lb_-] \rightarrow 0$$

$$n2 := F[-2, li_-, la_-]F[-2, lj_-, lb_-] \rightarrow 0$$

$$n3 := F[-3, li_-, la_-]F[-3, lj_-, lb_-] \rightarrow 0$$

$$n4 := F[-4, li_-, la_-]F[-4, lj_-, lb_-] \rightarrow 0$$

$(f2)^2$ en términos de la traza de $f^{(j)}f^{(j)}$.

f22 = Expand[M22 /. fs] /. n1 /. n2 /. n3 /. n4 /. t1 /. t1

$$8\text{tr}[F_3F_2]\text{tr}[F_4F_1] + 8\text{tr}[F_4F_2]\text{tr}[F_3F_1] + 8\text{tr}[F_4F_3]\text{tr}[F_2F_1]$$

Ordenar los productos de f

$$\text{ordn} := F[x_-, la, lb]F[z_-, lc, ld]F[w_-, ua, ud]F[y_-, ub, uc] \rightarrow A[x]B[y]X[z]Y[w]$$

Traza de f4 en función de $f^{(j)}$

Expand[MaxwellF[la, lb] MaxwellF[lc, ld] MaxwellF[ua, ud]

MaxwellF[ub, uc] /. fs] /. n1 /. n2 /. n3 /. n4

$$\begin{aligned} &F_4^{bc}F_3^{ad}F_{2cd}F_{1ab} + F_4^{ad}F_3^{bc}F_{2cd}F_{1ab} + F_4^{bc}F_{3cd}F_2^{ad}F_{1ab} + \\ &F_{4cd}F_3^{bc}F_2^{ad}F_{1ab} + F_4^{ad}F_{3cd}F_2^{bc}F_{1ab} + F_{4cd}F_3^{ad}F_2^{bc}F_{1ab} + \\ &F_4^{bc}F_3^{ad}F_{2ab}F_{1cd} + F_4^{ad}F_3^{bc}F_{2ab}F_{1cd} + F_4^{bc}F_{3ab}F_2^{ad}F_{1cd} + \\ &F_{4ab}F_3^{bc}F_2^{ad}F_{1cd} + F_4^{ad}F_{3ab}F_2^{bc}F_{1cd} + F_{4ab}F_3^{ad}F_2^{bc}F_{1cd} + \\ &F_4^{bc}F_{3cd}F_{2ab}F_1^{ad} + F_{4cd}F_3^{bc}F_{2ab}F_1^{ad} + F_4^{bc}F_{3ab}F_{2cd}F_1^{ad} + \\ &F_{4ab}F_3^{bc}F_{2cd}F_1^{ad} + F_{4cd}F_{3ab}F_2^{bc}F_1^{ad} + F_{4ab}F_{3cd}F_2^{bc}F_1^{ad} + \\ &F_4^{ad}F_{3cd}F_{2ab}F_1^{bc} + F_{4cd}F_3^{ad}F_{2ab}F_1^{bc} + F_4^{ad}F_{3ab}F_{2cd}F_1^{bc} + \\ &F_{4ab}F_3^{ad}F_{2cd}F_1^{bc} + F_{4cd}F_{3ab}F_2^{ad}F_1^{bc} + F_{4ab}F_{3cd}F_2^{ad}F_1^{bc} + \end{aligned}$$

Mantener el orden de las trazas de f4 en función de $f^{(j)}$

trF4 = Expand[MaxwellF[la, lb] MaxwellF[lc, ld] MaxwellF[ua, ud] MaxwellF[ub, uc]
/.fs] /. n1 /. n2 /. n3 /. n4 /. ordn

$$\begin{aligned} &A_1B_2X_3Y_4 + A_2B_1X_3Y_4 + A_1B_3X_2Y_4 + A_3B_1X_2Y_4 + A_2B_3X_1Y_4 + \\ &A_3B_2X_1Y_4 + A_1B_2X_4Y_3 + A_2B_1X_4Y_3 + A_1B_4X_2Y_3 + A_4B_1X_2Y_3 + \\ &A_2B_4X_1Y_3 + A_4B_2X_1Y_3 + A_1B_3X_4Y_2 + A_3B_1X_4Y_2 + A_1B_4X_3Y_2 + \\ &A_4B_1X_3Y_2 + A_3B_4X_1Y_2 + A_4B_3X_1Y_2 + A_2B_3X_4Y_1 + A_3B_2X_4Y_1 + \\ &A_2B_4X_3Y_1 + A_4B_2X_3Y_1 + A_3B_4X_2Y_1 + A_4B_3X_2Y_1 \end{aligned}$$

Reglas para ordenar las trazas de f4.

$$R1 := A[-4] B[-3] X[-2] Y[-1] \rightarrow A[-1] B[-2] X[-3] Y[-4]$$

$$R2 := A[-2] B[-1] X[-4] Y[-3] \rightarrow A[-1] B[-2] X[-3] Y[-4]$$

$$R3 := A[-1] B[-2] X[-4] Y[-3] \rightarrow A[-2] B[-1] X[-3] Y[-4]$$

$$R4 := A[-4] B[-1] X[-2] Y[-3] \rightarrow A[-3] B[-2] X[-1] Y[-4]$$

$$R5 := A[-1] B[-3] X[-4] Y[-2] \rightarrow A[-3] B[-1] X[-2] Y[-4]$$

$$R6 := A[-2] B[-3] X[-4] Y[-1] \rightarrow A[-3] B[-2] X[-1] Y[-4]$$

$$R7 := A[-3] B[-2] X[-4] Y[-1] \rightarrow A[-2] B[-3] X[-1] Y[-4]$$

$$R8 := A[-3] B[-1] X[-4] Y[-2] \rightarrow A[-1] B[-3] X[-2] Y[-4]$$

$$R9 := A[-4] B[-1] X[-3] Y[-2] \rightarrow A[-2] B[-3] X[-1] Y[-4]$$

$$R10 := A[-4] B[-3] X[-1] Y[-2] \rightarrow A[-2] B[-1] X[-3] Y[-4]$$

$$R11 := A[-4] B[-2] X[-3] Y[-1] \rightarrow A[-1] B[-3] X[-2] Y[-4]$$

$$R12 := A[-4] B[-2] X[-1] Y[-3] \rightarrow A[-3] B[-1] X[-2] Y[-4]$$

$$R13 := A[-1] B[-4] X[-2] Y[-3] \rightarrow A[-2] B[-3] X[-1] Y[-4]$$

$$R14 := A[-2] B[-4] X[-1] Y[-3] \rightarrow A[-1] B[-3] X[-2] Y[-4]$$

$$R15 := A[-1] B[-4] X[-3] Y[-2] \rightarrow A[-3] B[-2] X[-1] Y[-4]$$

$$R16 := A[-3] B[-4] X[-1] Y[-2] \rightarrow A[-1] B[-2] X[-3] Y[-4]$$

$$R17 := A[-2] B[-4] X[-3] Y[-1] \rightarrow A[-3] B[-1] X[-2] Y[-4]$$

$$R18 := A[-3] B[-4] X[-2] Y[-1] \rightarrow A[-2] B[-1] X[-3] Y[-4]$$

$$\text{trf4} = \text{trF4} /. R1 /. R2 /. R3 /. R4 /. R5 /. R6 /. R7 /. R8 /. R9 /. R10 /. R11 /. R12 /. R13 /. R14 /. R15 /. R16 /. R17 /. R18$$

$$4A_1B_2X_3Y_4 + 4A_2B_1X_3Y_4 + 4A_1B_3X_2Y_4 + 4A_3B_1X_2Y_4 + 4A_2B_3X_1Y_4 + 4A_3B_2X_1Y_4$$

Resultado del corchete de la matriz M.

$$\text{corch} = \text{Expand}\left[\frac{1}{4} (7\text{tr}f4 - \frac{5}{2}f22)\right]$$

$$\begin{aligned} & - 5\text{tr}[F_3F_2]\text{tr}[F_4F_1] - 5\text{tr}[F_4F_2]\text{tr}[F_3F_1] - 5\text{tr}[F_4F_3]\text{tr}[F_2F_1] + 7A_1B_2X_3Y_4 + \\ & + 7A_2B_1X_3Y_4 + 7A_1B_3X_2Y_4 + 7A_3B_1X_2Y_4 + 7A_2B_3X_1Y_4 + 7A_3B_2X_1Y_4 \end{aligned}$$

Descomposición de f en función de k y ε

$$Fm[x_-, ua_-, ub_-] := I(k[x, ua]e[x, ub] - k[x, ub]e[x, ua])$$

Fm[-1, ua, ub]

$$I(e_1^b k_1^a - e_1^a k_1^b)$$

Complejo conjugado de f en función de k y ε

$$Fc[x_-, ua_-, ub_-] := -I(k[x, ua]c[x, ub] - k[x, ub]c[x, ua])$$

Fc[-1, ua, ub]

$$-I(c_1^b k_1^a - c_1^a k_1^b)$$

Producto escalar de ε y ε

$$Rd := e[x_-, la_-]e[x_-, lb_-] \rightarrow -Kdelta[la, lb] /; PairQ[la, lb]$$

e[-1, la] e[-2, ua]

e[-1, la] e[-1, ua] /. Rd

$$e_2^a e_{1a}$$

$$-Kdelta_a^a$$

Producto escalar de ε y ε^*

$$Rmetric := c[x_-, la_-]e[x_-, lb_-] \rightarrow -Metricg[la, lb]$$

c[x, la] e[x, lb] /. Rmetric

$$-g_{ab}$$

Para encontrar $\sum f_a^b f_m^{*n}$.

Expand[Fc[-1, la, ub] Fm[-1, lm, un]] /. Rmetric

$$-(k_1^b k_1^n g_{am}) + k_{1m} k_1^b g_a^n + k_{1a} k_1^n g_m^b - k_{1a} k_{1m} g^{bn}$$

Reglas para invertir las trazas de f_4 a índices de Lorentz

$$inv := A[x_-]B[y_-]X[z_-]Y[w_-] \rightarrow F[x, la, lb]F[y, ub, uc]F[z, lc, ld] \\ F[w, ud, ua]$$

$$invc := A[x_-]B[y_-]X[z_-]Y[w_-] \rightarrow F[x, le, lf]F[y, uf, ug]F[z, lg, lh] \\ F[w, uh, ue]$$

A[-1] B[-3] X[-2] Y[-4] /. inv

A[-1] B[-3] X[-2] Y[-4] /. invc

$$- (F_4^{ad} F_3^{bc} F_{2cd} F_{1ab})$$

$$- (F_4^{eh} F_3^{fg} F_{2gh} F_{1ef})$$

Reglas para invertir las trazas de f2 a índices de Lorentz.

$$inv1 := tr[F[x_-]F[y_-]]tr[F[z_-]F[w_-]] : \rightarrow F[x, la, lb]F[y, ub, ua]F[z, lc, ld]$$

$$F[w, ud, uc]$$

$$inv1c := tr[F[x_-]F[y_-]]tr[F[z_-]F[w_-]] : \rightarrow F[x, le, lf]F[y, uf, ue]F[z, lg, lh]$$

$$F[w, uh, ug]$$

tr[F[-1] F[-2]] tr[F[-3] F[-4]] /. inv1

tr[F[-1] F[-2]] tr[F[-3] F[-4]] /. inv1c

$$F_{4ab}F_3^{ab}F_2^{cd}F_{1cd}$$

$$F_{4ef}F_3^{ef}F_2^{gh}F_{1gh}$$

Cambio de nombre a f (fm)y su conjugado (fc).

$$cambio1 := F[x_-, la_-, lb_-] : \rightarrow fm[x, la, lb]$$

$$cambio2 := F[x_-, la_-, lb_-] : \rightarrow fc[x, la, lb]$$

F[-1, la, lb] /. cambio1

F[-1, le, lf] /. cambio2

$$fm_{1ab}$$

$$fc_{1ef}$$

Resultado en el corchete de la matriz M.

Mp = corch /. inv1 /. inv /. cambio1

$$- 7fm_4^{ad}fm_3^{bc}fm_{2cd}fm_{1ab} - 7fm_4^{ad}fm_{3cd}fm_2^{bc}fm_{1ab} - 7fm_4^{ad}fm_3^{bc}fm_{2ab}fm_{1cd} -$$

$$- 5fm_4^{cd}fm_{3ab}fm_2^{ab}fm_{1cd} - 5fm_{4ab}fm_3^{cd}fm_2^{ab}fm_{1cd} - 7fm_4^{ad}fm_{3ab}fm_2^{bc}fm_{1cd} -$$

$$- 5fm_{4ab}fm_3^{ab}fm_2^{cd}fm_{1cd} - 7fm_4^{ad}fm_{3cd}fm_{2ab}fm_1^{bc} - 7fm_4^{ad}fm_{3ab}fm_{2cd}fm_1^{bc}$$

Resultado en el corchete de la matriz M^*

Mpc = corch /. inv1c /. invc /. cambio2

$$\begin{aligned}
& - 7f c_4^{eh} f c_3^{fg} f c_{2gh} f c_{1ef} - 7f c_4^{eh} f c_{3gh} f c_2^{fg} f c_{1ef} - 7f c_4^{eh} f c_3^{fg} f c_{2ef} f c_{1gh} - \\
& - 5f c_4^{gh} f c_{3ef} f c_2^{ef} f c_{1gh} - 5f c_{4ef} f c_3^{gh} f c_2^{ef} f c_{1gh} - 7f c_4^{eh} f c_{3ef} f c_2^{fg} f c_{1gh} - \\
& - 5f c_{4ef} f c_3^{ef} f c_2^{gh} f c_{1gh} - 7f c_4^{eh} f c_{3gh} f c_{2ef} f c_1^{fg} - 7f c_4^{eh} f c_{3ef} f c_{2gh} f c_1^{fg}
\end{aligned}$$

Regla para $\sum f_a^b f_m^{*n}$.

$$\begin{aligned}
Rsuma := & fc[x_-, la_-, ub_-] fm[x_-, lm_-, un_-] :\rightarrow -Metricg[la, lm]k[x, ub]k[x, un] - \\
& Metricg[ub, un]k[x, la]k[x, lm] + Metricg[la, un]k[x, ub]k[x, lm] + \\
& Metricg[lm, ub]k[x, la]k[x, un]
\end{aligned}$$

fc[-1, le, uf] fm[-1, la, ub] /. Rsuma

fc[-1, le, uf] fm[-2, la, ub] /. Rsuma

$$\begin{aligned}
& - \left(k_1^b k_1^f g_{ae} \right) + k_{1e} k_1^b g_a^f + k_{1a} k_1^f g_e^b - k_{1a} k_{1e} g^{bf} \\
& f c_{1e}^f f m_{2a}^b
\end{aligned}$$

El vector de momento satisface $k \cdot k = 0$.

$$Rn := k[x_-, la_-]k[x_-, lb_-] :\rightarrow 0; PairQ[la, lb]$$

k[-1, la] k[-2, lb] /. Rn

k[-1, la] k[-2, ub] /. Rn

k[-1, la] k[-1, ub] /. Rn

k[-1, la] k[-1, ua] /. Rn

k[-1, la] k[-2, ua] /. Rn

$$k_{2b} k_{1a}$$

$$k_2^b k_{1a}$$

$$k_{1a} k_1^b$$

$$0$$

$$k_2^a k_{1a}$$

Notación para $k_i \cdot k_j = 0$.

$$Rp := k[x_-, la_-]k[y_-, lb_-] \rightarrow K[x, y]; PairQ[la, lb]$$

$$k[-1, la] k[-2, lb] /. Rp$$

$$k[-1, la] k[-2, ub] /. Rp$$

$$k[-1, la] k[-1, ub] /. Rp$$

$$k[-1, la] k[-1, ua] /. Rn /. Rp$$

$$k[-1, la] k[-2, ua] /. Rp$$

$$k_{2b} k_{1a}$$

$$k_2^b k_{1a}$$

$$k_{1a} k_1^b$$

$$0$$

$$K_{21}$$

Declarar la dimensión del espacio con el que se trabaja.

$$\text{Dimension} = 4$$

$$4$$

Resultado de MM^* .

$$M2 = \text{Absorbg}[\text{Expand}[\text{Expand}[\text{Mp Mpc}] /. \text{Rsuma} /. \text{Rsuma} /. \text{Rsuma} /. \text{Rsuma}]] /. \text{Rn} /. \text{Rp} /. \text{Rp} /. \text{Rp} /. \text{Rp}$$

$$1256K_{41}^2 K_{32}^2 - 288K_{42}K_{41}K_{32}K_{31} + 1256K_{42}^2 K_{31}^2 \\ - 288K_{43}K_{41}K_{32}K_{21} - 288K_{43}K_{42}K_{31}K_{21} + 1256K_{43}^2 K_{21}^2$$

$$Rx := K[-4, -2]K[-4, -1]K[-3, -2]K[-3, -1] \rightarrow \frac{1}{2}(K[-4, -1]^2 K[-3, -2]^2 + \\ + K[-4, -2]^2 K[-3, -1]^2 + K[-4, -3]^2 K[-2, -1]^2) - (K[-4, -3]K[-4, -1] \cdot \\ \cdot K[-3, -2]K[-2, -1] + K[-4, -3]K[-4, -2]K[-3, -1]K[-2, -1])$$

Resultado final de MM^* .

$$\text{ResC} = \text{Expand}[\text{M2} /. \text{Rx}]$$

$$1112K_{41}^2 K_{32}^2 + 1112K_{42}^2 K_{31}^2 + 1112K_{43}^2 K_{21}^2$$

Con este mismo programa pero ahora para el Lagrangiano de la teoría Born-Infeld a cuarto orden en los campos, podemos calcular $\overline{|M|^2}$ para el proceso de dispersión fotón-fotón en la teoría Born-Infeld, el Lagrangiano correspondiente es

$$\delta\mathcal{L}_4^{BI} = \frac{1}{32b^2} [4\text{tr}(F^4) - (\text{tr}(F^2))^2].$$

Nuevamente, sólo calculamos la expresión entre corchetes cuadrados, debido a que lo único que cambia, en ambos Lagrangianos aquí dados, son los coeficientes, el cálculo es muy análogo y lo único que se tiene que hacer es cambiar los coeficientes en el programa anterior donde se calcula el valor del corchete:

Resultado del corchete de la matriz M.

$$\text{corch} = \text{Expand}[(4\text{tr}f4 - f22)]$$

$$\begin{aligned} & - 8\text{tr}[F_3 F_2] \text{tr}[F_4 F_1] - 8t\text{tr}[F_4 F_2] \text{tr}[F_3 F_1] - 8\text{tr}[F_4 F_3] \text{tr}[F_2 F_1] + 16A_1 B_2 X_3 Y_4 + \\ & + 16A_2 B_1 X_3 Y_4 + 16A_1 B_3 X_2 Y_4 + 16A_3 B_1 X_2 Y_4 + 16A_2 B_3 X_1 Y_4 + 16A_3 B_2 X_1 Y_4 \end{aligned}$$

Resultado en el corchete de la matriz M.

$$\text{Mp} = \text{corch} /. \text{inv1} /. \text{inv} /. \text{cambio1}$$

$$\begin{aligned} & - 16fm_4^{ad} fm_3^{bc} fm_{2cd} fm_{1ab} - 16fm_4^{ad} fm_{3cd} fm_2^{bc} fm_{1ab} - 16fm_4^{ad} fm_3^{bc} fm_{2ab} fm_{1cd} - \\ & - 8fm_4^{cd} fm_{3ab} fm_2^{ab} fm_{1cd} - 8fm_{4ab} fm_3^{cd} fm_2^{ab} fm_{1cd} - 16fm_4^{ad} fm_{3ab} fm_2^{bc} fm_{1cd} - \\ & - 8fm_{4ab} fm_3^{ab} fm_2^{cd} fm_{1cd} - 16fm_4^{ad} fm_{3cd} fm_{2ab} fm_1^{bc} - 16fm_4^{ad} fm_{3ab} fm_{2cd} fm_1^{bc} \end{aligned}$$

Resultado en el corchete de la matriz M^*

$$\text{Mpc} = \text{corch} /. \text{inv1c} /. \text{invc} /. \text{cambio2}$$

$$\begin{aligned} & - 16fc_4^{eh} fc_3^{fg} fc_{2gh} fc_{1ef} - 16fc_4^{eh} fc_{3gh} fc_2^{fg} fc_{1ef} - 16fc_4^{eh} fc_3^{fg} fc_{2ef} fc_{1gh} - \\ & - 8fc_4^{gh} fc_{3ef} fc_2^{ef} fc_{1gh} - 8fc_{4ef} fc_3^{gh} fc_2^{ef} fc_{1gh} - 16fc_4^{eh} fc_{3ef} fc_2^{fg} fc_{1gh} - \\ & - 8fc_{4ef} fc_3^{ef} fc_2^{gh} fc_{1gh} - 16fc_4^{eh} fc_{3gh} fc_{2ef} fc_1^{fg} - 16fc_4^{eh} fc_{3ef} fc_{2gh} fc_1^{fg} \end{aligned}$$

Resultado de MM^* .

M2 = Absorbg[Expand[Expand[Mp Mpc] /. Rsuma /. Rsuma /. Rsuma /. Rsuma]] /.
Rn /. Rp /. Rp /. Rp /. Rp

$$8192K_{41}^2 K_{32}^2 + 8192K_{42}^2 K_{31}^2 + 8192K_{43}^2 K_{21}^2$$

$$\begin{aligned} Rx := & K[-4, -2]K[-4, -1]K[-3, -2]K[-3, -1] \rightarrow \frac{1}{2}(K[-4, -1]^2 K[-3, -2]^2 + \\ & + K[-4, -2]^2 K[-3, -1]^2 + K[-4, -3]^2 K[-2, -1]^2) - (K[-4, -3]K[-4, -1] \cdot \\ & \cdot K[-3, -2]K[-2, -1] + K[-4, -3]K[-4, -2]K[-3, -1]K[-2, -1]) \end{aligned}$$

Resultado final de MM^* .

ResC = Expand[M2 /. Rx]

$$8192K_{41}^2 K_{32}^2 + 8192K_{42}^2 K_{31}^2 + 8192K_{43}^2 K_{21}^2$$

Apéndice B

Cálculo en MATHEMATICA de la matriz de dispersión del proceso Photon splitting.

El proceso *photon-splitting* se manifiesta a través del Lagrangiano a sexto orden en el campo de Euler-Heisenberg

$$M := \delta\mathcal{L}_6^{EH} = -\frac{1}{8\pi^2 m^8} \left[-\frac{1}{108} (\text{tr}(F^2))^3 + \frac{7}{180} \text{tr}(F^2) \text{tr}(F^4) - \frac{62}{945} \text{tr}(F^6) \right].$$

Con este lagrangian es posible calcular la matriz de dispersión. Lo que mostraremos en este apéndice es un programa realizado en MATHEMATICA, que nos permitió calcular el término dentro del corchete cuadrado, y más aún para expresiones más generales considerando coeficientes arbitrarios. Para ello usamos MATHEMATICA 6 y una implementación llamada *Feyncalc*.

Acontinuación presentaremos el programa.

Iniciar Feyncalc

```
<< HighEnergyPhysics'FeynCalc'
```

Vamos a introducir objetos no conmutativos.

```
DataType[F, F1, F2, F3, NonCommutative] = True;
```

Definamos f como la suma de los objetos definidos anteriormente

```
f = F + F1 + F2 + F3;
```

$$\begin{aligned}
 \text{definicion } Fs &= \{F \rightarrow \{\{0, B, 0, 0\}, \{-B, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\}, \\
 F1 &\rightarrow \{\{0, q_{11}\epsilon_{12} - q_{12}\epsilon_{11}, q_{11}\epsilon_{13} - q_{13}\epsilon_{11}, q_{11}\epsilon_{14} - q_{14}\epsilon_{11}\}, \\
 &\quad \{q_{12}\epsilon_{11} - q_{11}\epsilon_{12}, 0, q_{12}\epsilon_{13} - q_{13}\epsilon_{12}, q_{12}\epsilon_{14} - q_{14}\epsilon_{12}\}, \\
 &\quad \{q_{13}\epsilon_{11} - q_{11}\epsilon_{13}, q_{13}\epsilon_{12} - q_{12}\epsilon_{13}, 0, q_{13}\epsilon_{14} - q_{14}\epsilon_{13}\}, \\
 &\quad \{q_{14}\epsilon_{11} - q_{11}\epsilon_{14}, q_{14}\epsilon_{12} - q_{12}\epsilon_{14}, q_{14}\epsilon_{13} - q_{13}\epsilon_{14}, 0\}\}, \\
 F2 &\rightarrow \{\{0, q_{21}\epsilon_{22} - q_{22}\epsilon_{21}, q_{21}\epsilon_{23} - q_{23}\epsilon_{21}, q_{21}\epsilon_{24} - q_{24}\epsilon_{21}\}, \\
 &\quad \{q_{22}\epsilon_{21} - q_{21}\epsilon_{22}, 0, q_{22}\epsilon_{23} - q_{23}\epsilon_{22}, q_{22}\epsilon_{24} - q_{24}\epsilon_{22}\}, \\
 &\quad \{q_{23}\epsilon_{21} - q_{21}\epsilon_{23}, q_{23}\epsilon_{22} - q_{22}\epsilon_{23}, 0, q_{23}\epsilon_{24} - q_{24}\epsilon_{23}\}, \\
 &\quad \{q_{24}\epsilon_{21} - q_{21}\epsilon_{24}, q_{24}\epsilon_{22} - q_{22}\epsilon_{24}, q_{24}\epsilon_{23} - q_{23}\epsilon_{24}, 0\}\}, \\
 F3 &\rightarrow \{\{0, q_{31}\epsilon_{32} - q_{32}\epsilon_{31}, q_{31}\epsilon_{33} - q_{33}\epsilon_{31}, q_{31}\epsilon_{34} - q_{34}\epsilon_{31}\}, \\
 &\quad \{q_{32}\epsilon_{31} - q_{31}\epsilon_{32}, 0, q_{32}\epsilon_{33} - q_{33}\epsilon_{32}, q_{32}\epsilon_{34} - q_{34}\epsilon_{32}\}, \\
 &\quad \{q_{33}\epsilon_{31} - q_{31}\epsilon_{33}, q_{33}\epsilon_{32} - q_{32}\epsilon_{33}, 0, q_{33}\epsilon_{34} - q_{34}\epsilon_{33}\}, \\
 &\quad \{q_{34}\epsilon_{31} - q_{31}\epsilon_{34}, q_{34}\epsilon_{32} - q_{32}\epsilon_{34}, q_{34}\epsilon_{33} - q_{33}\epsilon_{34}, 0\}\}.
 \end{aligned}$$

Condiciones sobre las polarizaciones, solo paralela y perpendicular al campo B , EN EL PLANO yz , y la dirección de propagación y z la dirección del campo. A demás usamos 4-vectores de la forma $(x, y, z, I * t) = (\text{dir } x, \text{dir } y, \text{dir } z, \text{tiempo complejo})$ (donde I es para trabajar sobre el ESPACIO EUCLIDIANO). A continuación escribimos las ocho posibles combinaciones de las polarizaciones

$$\begin{aligned}
 \text{condiciones } \epsilon_1 &= \{\epsilon_{11} \rightarrow 1, \epsilon_{12} \rightarrow 0, \epsilon_{13} \rightarrow 0, \epsilon_{21} \rightarrow 1, \epsilon_{22} \rightarrow 0, \epsilon_{23} \rightarrow 0, \\
 &\quad \epsilon_{31} \rightarrow 1, \epsilon_{32} \rightarrow 0, \epsilon_{33} \rightarrow 0, \epsilon_{14} \rightarrow 0, \epsilon_{24} \rightarrow 0, \epsilon_{34} \rightarrow 0\}; \\
 \text{condiciones } \epsilon_2 &= \{\epsilon_{11} \rightarrow 1, \epsilon_{12} \rightarrow 0, \epsilon_{13} \rightarrow 0, \epsilon_{21} \rightarrow 1, \epsilon_{22} \rightarrow 0, \epsilon_{23} \rightarrow 0, \\
 &\quad \epsilon_{31} \rightarrow 0, \epsilon_{32} \rightarrow 0, \epsilon_{33} \rightarrow 1, \epsilon_{14} \rightarrow 0, \epsilon_{24} \rightarrow 0, \epsilon_{34} \rightarrow 0\}; \\
 \text{condiciones } \epsilon_3 &= \{\epsilon_{11} \rightarrow 1, \epsilon_{12} \rightarrow 0, \epsilon_{13} \rightarrow 0, \epsilon_{21} \rightarrow 0, \epsilon_{22} \rightarrow 0, \epsilon_{23} \rightarrow 1, \\
 &\quad \epsilon_{31} \rightarrow 1, \epsilon_{32} \rightarrow 0, \epsilon_{33} \rightarrow 0, \epsilon_{14} \rightarrow 0, \epsilon_{24} \rightarrow 0, \epsilon_{34} \rightarrow 0\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{condiciones}\epsilon_4 &= \{\epsilon_{11} \rightarrow 1, \epsilon_{12} \rightarrow 0, \epsilon_{13} \rightarrow 0, \epsilon_{21} \rightarrow 0, \epsilon_{22} \rightarrow 0, \epsilon_{23} \rightarrow 1, \\
&\quad \epsilon_{31} \rightarrow 0, \epsilon_{32} \rightarrow 0, \epsilon_{33} \rightarrow 1, \epsilon_{14} \rightarrow 0, \epsilon_{24} \rightarrow 0, \epsilon_{34} \rightarrow 0\}; \\
\text{condiciones}\epsilon_5 &= \{\epsilon_{11} \rightarrow 0, \epsilon_{12} \rightarrow 0, \epsilon_{13} \rightarrow 1, \epsilon_{21} \rightarrow 1, \epsilon_{22} \rightarrow 0, \epsilon_{23} \rightarrow 0, \\
&\quad \epsilon_{31} \rightarrow 1, \epsilon_{32} \rightarrow 0, \epsilon_{33} \rightarrow 0, \epsilon_{14} \rightarrow 0, \epsilon_{24} \rightarrow 0, \epsilon_{34} \rightarrow 0\}; \\
\text{condiciones}\epsilon_6 &= \{\epsilon_{11} \rightarrow 0, \epsilon_{12} \rightarrow 0, \epsilon_{13} \rightarrow 1, \epsilon_{21} \rightarrow 1, \epsilon_{22} \rightarrow 0, \epsilon_{23} \rightarrow 0, \\
&\quad \epsilon_{31} \rightarrow 0, \epsilon_{32} \rightarrow 0, \epsilon_{33} \rightarrow 1, \epsilon_{14} \rightarrow 0, \epsilon_{24} \rightarrow 0, \epsilon_{34} \rightarrow 0\}; \\
\text{condiciones}\epsilon_7 &= \{\epsilon_{11} \rightarrow 0, \epsilon_{12} \rightarrow 0, \epsilon_{13} \rightarrow 1, \epsilon_{21} \rightarrow 0, \epsilon_{22} \rightarrow 0, \epsilon_{23} \rightarrow 1, \\
&\quad \epsilon_{31} \rightarrow 1, \epsilon_{32} \rightarrow 0, \epsilon_{33} \rightarrow 0, \epsilon_{14} \rightarrow 0, \epsilon_{24} \rightarrow 0, \epsilon_{34} \rightarrow 0\}; \\
\text{condiciones}\epsilon_8 &= \{\epsilon_{11} \rightarrow 0, \epsilon_{12} \rightarrow 0, \epsilon_{13} \rightarrow 1, \epsilon_{21} \rightarrow 0, \epsilon_{22} \rightarrow 0, \epsilon_{23} \rightarrow 1, \\
&\quad \epsilon_{31} \rightarrow 0, \epsilon_{32} \rightarrow 0, \epsilon_{33} \rightarrow 1, \epsilon_{14} \rightarrow 0, \epsilon_{24} \rightarrow 0, \epsilon_{34} \rightarrow 0\};
\end{aligned}$$

Las condiciones sobre los vectores de propagación q 's, especificando que fotón entra y cuales salen, son

$$\begin{aligned}
\text{condiciones}q &= \{q_{11} \rightarrow 0, q_{12} \rightarrow k_{12}, q_{13} \rightarrow 0, q_{14} \rightarrow -I * \omega_1, \\
&\quad q_{21} \rightarrow 0, q_{22} \rightarrow -k_{22}, q_{23} \rightarrow 0, q_{24} \rightarrow I * \omega_2, \\
&\quad q_{31} \rightarrow 0, q_{32} \rightarrow -k_{32}, q_{33} \rightarrow 0, q_{34} \rightarrow I * \omega_3\};
\end{aligned}$$

Como consecuencias de la colinealidad de los vectores de propagación q_i (con $i = 1, 2, 3$), las condiciones de conservación de energía-momento implican las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}
\text{conservacion} &= \{k_{12} * k_{22} \rightarrow \omega_1 * \omega_2, k_{12} * k_{32} \rightarrow \omega_1 * \omega_3, k_{22} * k_{32} \rightarrow \omega_2 * \omega_3, \\
&\quad k_{12}^2 \rightarrow \omega_1^2, k_{22}^2 \rightarrow \omega_2^2, k_{32}^2 \rightarrow \omega_3^2, k_{32} \rightarrow \omega_3, k_{12} \rightarrow \omega_1, k_{22} \rightarrow \omega_2\};
\end{aligned}$$

Comenzemos calculando el cuadrado de f

$$f1 = \text{DotSimplify}[f^2];$$

Introduzcamos la regla para eliminar las interacciones de la forma Fi.Fi , donde $i=1,2,3$.

$$\text{interaccion}\gamma\gamma = \{F1.F1 \rightarrow 0, F2.F2 \rightarrow 0, F3.F3 \rightarrow 0\};$$

El cuadrado de f sin interacciones de la forma Fi.Fi es

$$f2 = f1/.interaccion\gamma\gamma;$$

La traza del cuadrado de f, sin términos de interacción de la forma Fi.Fi es

$$f42 = \text{Tr}[F.F] + 2 \text{Tr}[F.F1] + 2 \text{Tr}[F.F2] + 2 \text{Tr}[F.F3] + 2 \text{Tr}[F1.F2] + 2 \text{Tr}[F2.F3] + 2 \text{Tr}[F3.F1];$$

Regla para eliminar los términos donde alguna Fi (para i = 1, 2, 3) aparece dos o más veces.

$$\begin{aligned} \text{cubo} = \{ & 24\text{Tr}[F.F1]\text{Tr}[F1.F2](\text{Tr}[F.F]) \rightarrow 0, 24(\text{Tr}[F.F2])^2\text{Tr}[F.F3] \rightarrow 0, \\ & 24\text{Tr}[F.F2]\text{Tr}[F2.F3](\text{Tr}[F.F]) \rightarrow 0, 24\text{Tr}[F.F1](\text{Tr}[F.F2])^2 \rightarrow 0, \\ & 24\text{Tr}[F.F1]\text{Tr}[F3.F1](\text{Tr}[F.F]) \rightarrow 0, 24\text{Tr}[F.F2](\text{Tr}[F.F3])^2 \rightarrow 0 \\ & 8(\text{Tr}[F.F1])^3 \rightarrow 0, 8(\text{Tr}[F.F2])^3 \rightarrow 0, 8(\text{Tr}[F.F3])^3 \rightarrow 0, \\ & 24(\text{Tr}[F.F1])^2\text{Tr}[F.F2] \rightarrow 0, 24\text{Tr}[F.F2]\text{Tr}[F1.F2](\text{Tr}[F.F]) \rightarrow 0, \\ & 24(\text{Tr}[F.F1])^2\text{Tr}[F.F3] \rightarrow 0, 24\text{Tr}[F.F3]\text{Tr}[F2.F3](\text{Tr}[F.F]) \rightarrow 0, \\ & 24\text{Tr}[F.F1](\text{Tr}[F.F3])^2 \rightarrow 0, 24\text{Tr}[F.F3]\text{Tr}[F3.F1](\text{Tr}[F.F]) \rightarrow 0, \}; \end{aligned}$$

El cubo de la traza del cuadrado de f.

$$f41 = \text{Expand}[(f42)^3] /. \text{cubo};$$

Introduzcamos las definiciones de las Fi y F.

$$f43 = f41 /. \text{definicionFs};$$

Consideremos los término que contribuyen al cálculo de la matriz M, es decir, los términos con B^3

$$f44 = \text{Coefficient}[f43, B, 3];$$

La cuarta potencia de f, es dada por

$$f6 = \text{DotSimplify}[(f2)^2];$$

Regla para eliminar los términos en los que aparece dos o más veces alguna

Fi y más de tres veces F

$$\begin{aligned} elF2F2 &= \{-.F2...F2._ \rightarrow 0, -.F2.F2._ \rightarrow 0\}; \\ elF1F1 &= \{-.F1...F1._ \rightarrow 0, -.F1.F1._ \rightarrow 0\}; \\ elF3F3 &= \{-.F3...F3._ \rightarrow 0, -.F3.F3._ \rightarrow 0\}; \\ ordentres &= F.F.F.F \rightarrow 0; \end{aligned}$$

La cuarta potencia de f, donde los elementos que contribuyen son los términos en los que no aparecen dos o más Fi o más de tres F son

$$sol1 = f6/.elF2F2/.elF1F1/.elF3F3/.ordentres;$$

En términos de las trazas, $sol1$ se ve como

$$\begin{aligned} l1 &= 4Tr[F.F.F.F1] + 4Tr[F.F.F.F2] + 4Tr[F.F.F.F3] + 4Tr[F.F.F1.F2] + \\ &4Tr[F.F.F2.F1] + 4Tr[F.F1.F.F2] + 4Tr[F.F.F1.F3] + 4Tr[F.F.F3.F1] + \\ &4Tr[F.F1.F.F3] + 4Tr[F.F.F2.F3] + 4Tr[F.F.F3.F2] + 4Tr[F.F2.F.F3] + \\ &4Tr[F.F1.F2.F3] + 4Tr[F.F1.F3.F2] + 4Tr[F.F3.F2.F1] + 4Tr[F.F2.F3.F1] + \\ &4Tr[F.F3.F1.F2] + 4Tr[F.F2.F1.F3]; \end{aligned}$$

Calculemos el producto de la traza del cuadrado de f por la traza de la cuarta potencia de f

$$l2 = Expand[(l1) * (f42)];$$

Regla para eliminar los términos en los que aparecen dos o más Fi o más de

tres F.

$$\begin{aligned}
 \text{reglal2} = \{ & 8\text{Tr}[F1.F2]\text{Tr}[F.F.F.F1] \rightarrow 0, 8\text{Tr}[F3.F1]\text{Tr}[F.F.F.F1] \rightarrow 0, \\
 & 8\text{Tr}[F1.F2]\text{Tr}[F.F.F.F2] \rightarrow 0, 8\text{Tr}[F2.F3]\text{Tr}[F.F.F.F2] \rightarrow 0, \\
 & 8\text{Tr}[F2.F3]\text{Tr}[F.F.F.F3] \rightarrow 0, 8\text{Tr}[F3.F1]\text{Tr}[F.F.F.F3] \rightarrow 0, \\
 & 8\text{Tr}[F.F1]\text{Tr}[F.F.F1.F2] \rightarrow 0, 8\text{Tr}[F.F2]\text{Tr}[F.F.F1.F2] \rightarrow 0, \\
 & 8\text{Tr}[F.F1]\text{Tr}[F.F.F1.F3] \rightarrow 0, 8\text{Tr}[F.F3]\text{Tr}[F.F.F1.F3] \rightarrow 0, \\
 & 8\text{Tr}[F.F1]\text{Tr}[F.F.F2.F1] \rightarrow 0, 8\text{Tr}[F.F2]\text{Tr}[F.F.F2.F1] \rightarrow 0, \\
 & 8\text{Tr}[F.F2]\text{Tr}[F.F.F2.F3] \rightarrow 0, 8\text{Tr}[F.F3]\text{Tr}[F.F.F2.F3] \rightarrow 0, \\
 & 8\text{Tr}[F.F1]\text{Tr}[F.F.F3.F1] \rightarrow 0, 8\text{Tr}[F.F3]\text{Tr}[F.F.F3.F1] \rightarrow 0, \\
 & 8\text{Tr}[F.F2]\text{Tr}[F.F.F3.F2] \rightarrow 0, 8\text{Tr}[F.F3]\text{Tr}[F.F.F3.F2] \rightarrow 0, \\
 & 8\text{Tr}[F.F2]\text{Tr}[F.F1.F.F2] \rightarrow 0, 8\text{Tr}[F.F1]\text{Tr}[F.F1.F.F3] \rightarrow 0, \\
 & 8\text{Tr}[F.F3]\text{Tr}[F.F1.F.F3] \rightarrow 0, 8\text{Tr}[F.F2]\text{Tr}[F.F2.F.F3] \rightarrow 0, \\
 & 8\text{Tr}[F.F3]\text{Tr}[F.F2.F.F3] \rightarrow 0, 8\text{Tr}[F.F1]\text{Tr}[F.F1.F.F2] \rightarrow 0\};
 \end{aligned}$$

Aplicando la regla *reglal2* el producto de la traza del cuadrado de f por la traza de la cuarta potencia de f se reduce a

$$l3 = l2 /. \text{reglal2};$$

Con la definición de las Fi y F

$$l4 = l3 /. \text{definicionFs};$$

Considerando sólo los término a tercer orden en B del producto $\text{tr}(f^4)\text{tr}(f^2)$

$$l5 = \text{Expand}[\text{Coefficient}[l4, B, 3]];$$

Calculemos la sexta potencia de f (f^6), eliminando términos en los que aparecen dos o más Fi

$$f10 = \text{DotSimplify}[(f2)^3] /. \text{elF1F1} /. \text{elF2F2} /. \text{elF3F3};$$

Sustituyendo la definición de las Fi y F

$$f11 = f10 /. \text{definicionFs};$$

Considerando la traza de los elementos anteriores

f12 = Expand[Tr[f11]];

Considerando términos de la forma $\text{Tr}(\mathbf{F.F1.F2.F.F.F3})$, es decir, sólo los término a tercer orden en \mathbf{B} (B^3)

f13 = Coefficient[f12, B, 3];

Entonces, el resultado del término entre paréntesis cuadrados (al cual la matriz \mathbf{M} es proporcional) para coeficientes arbitrarios, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, que se encuentran dentro de Lagranginos que son escrito en la forma $\mathcal{L} \propto \beta_1(\text{Tr}(f^2))^3 + \beta_2\text{Tr}(f^2)\text{Tr}(f^4) + \beta_3\text{Tr}(f^6)$ es

$$g = \beta_1 * (f44) + \beta_2 * (l5) + \beta_3 * (f13);$$

Para el Lagrangiano de Euler - Heisenberg, y espín 1/2, $\beta_1 = -1/108$, $\beta_2 = 7/180$, $\beta_3 = -62/945$, se tiene

$$g1 = \text{Expand}[g/.\beta_1 \rightarrow (-1/108)/.\beta_2 \rightarrow (7/180)/.\beta_3 \rightarrow (-62/945)];$$

Aplicando las condiciones de polarización, de dirección de los vectores de propagación de los fotones y la conservación de energía-momento, tenemos que

$$g2 = g1 /. \text{condicionesq}/.\text{conservacion};$$

$$g31 = g2 /. \text{condiciones}\epsilon_1/.\text{conservacion}$$

$$g32 = g2 /. \text{condiciones}\epsilon_2/.\text{conservacion}$$

$$g33 = g2 /. \text{condiciones}\epsilon_3/.\text{conservacion}$$

$$g34 = g2 /. \text{condiciones}\epsilon_4/.\text{conservacion}$$

$$g35 = g2 /. \text{condiciones}\epsilon_5/.\text{conservacion}$$

$$g36 = g2 /. \text{condiciones}\epsilon_6/.\text{conservacion}$$

$$g37 = g2 /. \text{condiciones}\epsilon_7/.\text{conservacion}$$

$$g38 = g2 /. \text{condiciones}\epsilon_8/.\text{conservacion}$$

El resultado final, para el término dentro del corchete cuadrado con el Lagrangiano de Euler-Heisenberg es

$$-\frac{752}{315}\omega_1\omega_2\omega_3$$

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 -\frac{104}{315}\omega_1\omega_2\omega_3 \\
 0 \\
 -\frac{104}{315}\omega_1\omega_2\omega_3 \\
 -\frac{104}{315}\omega_1\omega_2\omega_3 \\
 0
 \end{array}$$

Born Infeld

Los coeficientes para la teoría Born - Infeld cambian, ahora $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -2$ y $\beta_3 = 24$, con esto tenemos

$$bi = g/.\beta_1 \rightarrow 1/. \beta_2 \rightarrow -2/. \beta_3 \rightarrow 24;$$

Aplicando las condiciones sobre los vectores de propagación $q's$, haciendo el cálculo para los estados de polarización posibles y usando la condición de conservación de energía-momento tenemos

$$bi1 = bi /. condicionesq/.conservacion;$$

$$bi21 = bi1 /. condiciones\epsilon_1/.conservacion$$

$$bi22 = bi1 /. condiciones\epsilon_2/.conservacion$$

$$bi23 = bi1 /. condiciones\epsilon_3/.conservacion$$

$$bi24 = bi1 /. condiciones\epsilon_4/.conservacion$$

$$bi25 = bi1 /. condiciones\epsilon_5/.conservacion$$

$$bi26 = bi1 /. condiciones\epsilon_6/.conservacion$$

$$bi27 = bi1 /. condiciones\epsilon_7/.conservacion$$

$$bi28 = bi1 /. condiciones\epsilon_8/.conservacion$$

y el resultado final para los ocho posibles estados de polarización es

$$2304\omega_1\omega_2\omega_3$$

0

0

$512\omega_1\omega_2\omega_3$

0

$512\omega_1\omega_2\omega_3$

$512\omega_1\omega_2\omega_3$

0

Bibliografía

- [1] J. Rafelski, W. Greiner and L. P. Fulcher. Superheavy elements and nonlinear electrodynamics. *Nuovo Cimento*, 13:135–159, 1973.
- [2] M. Born y L. Infeld. Foundations of the new field theory. *Proceedings of the Royal Society of London*, 144:425–451, (1934). "JSTOR".
- [3] J. Rafelski, W. Greiner and L. P. Fulcher. Superheavy elements and an upper limit to the nonlinear electrodynamics. *Physical Review Letters*, 27:958–961, 1971.
- [4] Gerhard Soff, Johann Rafelski and Walter Greiner. Lower bound to limiting fields in nonlinear electrodynamics. *Physical Review A*, 7:903–907, 1973.
- [5] E. Iacopini and E. Zavattini. Vacuum polarization effects in the $(\mu^{-4}He)^+$ atom and the born-infeld electromagnetic theory. *Nuovo Cimento*, 78:38–52, 1983.
- [6] E. Iacopini. Photon-photon interaction detection via the vacuum birefringence induced by a magnetic field: Status of the experiment. *European Organization for Nuclear Research*, 1984.
- [7] B. Zwiebach. *A first course in string theory*. Cambridge University Press, (2004).
- [8] E. S. Fradkin y A. A. Tseytlin. Non-linear electrodynamics from quantized strings. *Physics Letters*, 163B:123–130, 1985.
- [9] C. Itzykson y J. B. Zuber. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill Inc., (1980).
- [10] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Lehrbuch der Theoretischen Physik (IV): Relativistische Quantentheorie*. Akademie-Verlag, Berlin, (1980).

- [11] D. Bernard, F. Moulin, F. Amiranoff, F. Perrone, A. Braun, J.P. Chambaret, G. Darpentigny, G. Grillon, S. Ranc. Search for stimulated photon-photon scattering in vacuum. *The European Physical Journal D*, 10:141–145, 2000.
- [12] L. I. Schiff. *Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, 3er edition, (1968).
- [13] W. Dittrich and H. Gies. *Probing the Quantum Vacuum*. Springer, (2000).
- [14] I. T. Drummond and S.J. Hathrell. *Physical Review D*, 22:343, 1980.
- [15] Z. Bialynicka-Birula and I. Bialynicki-Birula. Nonlinear effects in quantum electrodynamics. photon propagation and photon splitting in an external field. *Physical Review D*, 2:2341–2346, 1970.
- [16] Stephen L. Adler. Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field. *Annals of Physics*, 67:599–647, 1971.
- [17] M. Pilia and A. Pellizzoni. Agile observations of psr b1509-58: is qed photon splitting at work in pulsars. 2010. arXiv:1009.1636v1.
- [18] Ya.Ñ. Istomin and D.Ñ. Sobýanin. The appearance of a radio-pulsar magnetosphere from a vacuum with a strong magnetic field. motion of charged particles. 2010. arXiv:1012.3662v1.
- [19] Ya.Ñ. Istomin and D.Ñ. Sobýanin. Electron-positron plasma generation in a magnetar magnetosphere. 2010. arXiv:0710.1000v2.
- [20] Vladimir V. Usov. Photon splitting in the superstrong magnetic fields of pulsars. 2002. arXiv:astro-ph/0205018v1.