



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
Y  
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
UNAM-UMSNH

**Aspectos geométricos de  
la función de Weierstrass**

---

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas  
Presenta:

**L.M. JULIO CÉSAR MAGAÑA CÁCERES**

*Director:* Dr. Jorge Luis López López

---

MORELIA, MICHOACÁN - ENERO DE 2012.

## Índice general

Agradecimientos	iii
INTRODUCCIÓN	v
Capítulo 1. Disfenoides euclidianos y esféricos.	1
1. La función de Weierstrass.	1
2. Estructura compleja de Disfenoides.	4
3. Automorfismos anticonformes de $\widehat{\mathbb{C}}$ .	11
4. Simetrías de disfenoides.	12
5. Propiedades geométricas de $\varphi_\tau$ .	20
Capítulo 2. Disfenoides isósceles y rectángulos.	25
1. Método de la longitud extrema.	25
2. Disfenoides rectángulos.	29
3. Disfenoides isósceles.	33
4. Módulo de disfenoides escalenos.	35
Apéndice A. Proyección central	39
Bibliografía	43



## **Agradecimientos**

Deseo agradecer a mi familia por todo el apoyo que me dieron para seguir adelante con mis estudios. A mi papá y mi abuelita que han estado conmigo cuando más lo necesito y mi tía Lety por todos sus buenos consejos.

Quiero agradecer a mi asesor el Dr. Jorge Luis López López por todo lo que me ha enseñado y por ser paciente y apoyarme en el desarrollo de este trabajo.

Agradezco a mis sinodales el Dr. Jesus Muciño, Dr. Ferran Valdez, Dr. Pierre Bayard y el Dr. Elmar Wagner por todas sus observaciones y correcciones de la tesis que hicieron mejorar este trabajo.

También agradezco a mis profesores de la maestría que enriquecieron mi formación académica.

Agradezco a Adriana Briceño por su apoyo en todos los trámites académico.

Quiero agradecer a mis compañeros y amigos de la Maestría que me dieron su apoyo y que sin ellos no hubiese sido agradable la estancia en Morelia. Agradezco a mis amigos del cubículo 106 del CCM de la UNAM que hicieron divertido y menos estresante el trabajo, a Teresa Patiño y la familia Trejo Espinosa, en especial a Oscar, Ana y Llazmín por brindarme su amistad y compañía en esta ciudad.

Por último y no menos importante quiero agradecer a mi amiga Claudia Balam por enseñarme a no rendirme hasta alcanzar mis metas.



## INTRODUCCIÓN

### Funciones elípticas y aplicaciones de la función de Weierstrass.

Durante la segunda mitad del siglo *XVII* ciertas integrales llamaron la atención, ya que no podían ser evaluadas con las llamadas “*funciones elementales*”. Este tipo de integrales fueron conocidas como *integrales elípticas* debido a que la integral

$$\int \sqrt{\left(\frac{a^2 - ex^2}{a^2 - x^2}\right)} dx,$$

estaba incluida. (Los valores  $a$  y  $b$  son los semiejes de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  y  $e = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ .)

A finales de los años 1790s Gauss noto que las funciones inversas obtenidas de las integrales

$$\int \frac{dx}{1+x^2} \quad y \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

están dadas por las funciones periódicas tangente y seno respectivamente, mientras que la función inversa de la integral elíptica

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

da una función doblemente periódica. Estas ideas no fueron publicadas por Gauss, hasta que en los años 1820s fueron redescubiertas por Abel y Jacobi. Estas funciones doblemente periódicas son llamadas *funciones elípticas*. En esta tesis estudiamos una función elíptica conocida como la función de Weierstrass.

Existen varias aplicaciones de las funciones elípticas y de sus funciones inversas en física y matemáticas. En particular la función de Weierstrass  $\wp$  aparece como sigue:

*En aritmética:* De la misma manera en que las extensiones cíclicas de campos sobre  $\mathbb{Q}$  se forman agregando valores de la función exponencial a  $\mathbb{Q}$ , las extensiones abelianas de  $\mathbb{Q}(i)$  se forman agregando ciertos valores de una función de Weierstrass a  $\mathbb{Q}(i)$  (ver [18] pág. 211).

*En criptografía:* Si  $E$  es una curva elíptica en  $\mathbb{C}^2$ , la operación que se utiliza para crear llaves públicas de sistemas de criptografía está dada por la función  $(\wp(z), \wp'(z)) \mapsto (\wp(mz), \wp'(mz))$ , donde  $m$  es un entero y  $\wp'$  denota la derivada compleja de la función  $\wp$  (ver [9] pág 178).

*En física:* La función de Weierstrass aparece en las ecuaciones de movimiento del trompo y el péndulo esférico (ver [2] y [7]).

*En geometría elemental:* Algunas construcciones geométricas en el plano se vuelven cíclicas cuando se definen de manera inductiva, es decir, se regresa a una condición inicial después de realizar una construcción  $k$  veces. Por ejemplo, si fijamos tres circunferencias  $C_1, C_2$  y  $C_3$  en el plano, construimos una circunferencia  $S_1$  tangente a  $C_1$  y  $C_2$ . Luego construimos una circunferencia  $S_2$  tangente a  $C_2, C_3$  y  $S_1$ . Si continuamos esta construcción cíclica la circunferencia  $S_6$  coincide con  $S_1$  (ver [19]). Esto se modela por una función de Weierstrass  $\wp$ , donde el ciclo de  $k$  pasos se representa con la condición  $\wp(z) = \wp(kz)$ .

*En sistemas dinámicos:* Las transformaciones afines complejas  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  inducen una función racional  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  por medio de la conjugación por una función de Weierstrass. La iteración de este tipo de funciones dan lugar a sistemas dinámicos interesantes (ver [13]).

### La función de Weierstrass como función elíptica básica.

Consideremos  $\tau$  en el conjunto  $\mathfrak{M} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\tau) \in [0, 1), \operatorname{Im}(\tau) > 0, |\tau| \geq 1, |\tau - 1| \geq 1\}$  y la retícula generada por los números 1 y  $\tau$  dada como  $\langle 1, \tau \rangle = \{n_1 + n_2\tau \in \mathbb{C} \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ . El toro complejo inducido por la retícula  $\langle 1, \tau \rangle$  está dado por el cociente

$$T_\tau = \mathbb{C} / \langle 1, \tau \rangle.$$

Además, dada dicha retícula podemos definir la función de Weierstrass  $\wp_\tau : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , con periodos 1 y  $\tau$  como

$$\wp_\tau = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \langle 1, \tau \rangle \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right).$$

Si  $F : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es una función elíptica con periodos 1 y  $\tau$ , existe una función meromorfa  $\widehat{F} : T_\tau \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  la cual cumple que  $\widehat{F}([z]) = F(z)$  (ver [6] pág. 72).

El conjunto  $\mathfrak{M}$  es una región fundamental del grupo unimodular (ver [10] pág. 270) y por el teorema de uniformización, dado un toro complejo  $T$ , existe  $\tau$  en la región  $\mathfrak{M}$  tal que el toro  $T$  es biholomorfo a  $T_\tau$ , por lo que podemos definir una función de Weierstrass con esta retícula. Recíprocamente dada una función de Weierstrass  $\wp_\tau$  podemos definir un toro complejo inducido

por la retícula dada. Por lo tanto existe una correspondencia biyectiva entre los toros complejos y las funciones de Weierstrass.

Además, entender la función de Weierstrass  $\wp_\tau$  nos ayuda a entender todas las funciones elípticas con los mismos periodos, ya que estas funciones se expresan como

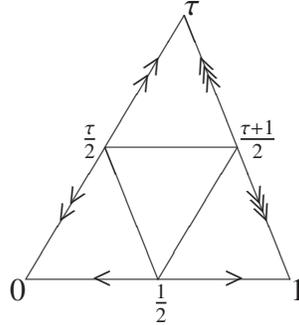
$$\frac{a_1 + a_2\wp_\tau + \dots + a_n\wp_\tau^n}{b_1 + b_2\wp_\tau + \dots + b_m\wp_\tau^m}\wp'_\tau + \frac{c_1 + c_2\wp_\tau + \dots + c_k\wp_\tau^k}{d_1 + d_2\wp_\tau + \dots + d_r\wp_\tau^r},$$

donde  $a_i, b_j, c_\ell, d_s$  son números complejos y  $\wp'_\tau$  es la derivada compleja de la función de Weierstrass (ver [6] página 99).

En esta tesis analizamos de manera geométrica la función de Weierstrass de la siguiente forma.

### Relacionando objetos geométricos con la función de Weierstrass.

Un *disfenoide euclideo* es un tetraedro euclideo cuyas aristas que no comparten vértices tienen longitudes iguales. Dado  $\tau$  en la región  $\mathfrak{M}$  obtenemos un disfenoide euclideo  $\Omega_\tau$  a partir de un triángulo, identificando sus lados como se muestra en la siguiente figura.



En el Capítulo 1 demostramos que la función de Weierstrass induce una estructura compleja sobre los disfenoides euclideos biholomorfa a la esfera de Riemann. Un *disfenoide esférico* es la esfera unitaria con 4 puntos marcados y cumplen que la longitud de los arcos de círculo máximo, que unen dichos puntos, sean iguales cuando los arcos no tengan puntos en común. A los 4 puntos les llamamos vértices y a los arcos de círculo que unen los vértices les llamamos aristas. Identificando a la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  con la esfera de Riemann bajo la proyección estereográfica, una pregunta natural que podemos hacer es la siguiente:

*¿La función de Weierstrass  $\wp_\tau$  induce un biholomorfismo entre  $\Omega_\tau$  y un disfenoide esférico, que relacione vértices con vértices y aristas con aristas?*

La respuesta a la pregunta no será cierta, sin embargo, aplicando una transformación de Möbius  $h$  adecuada demostramos que la función  $h \circ \wp_\tau$  induce un biholomorfismo  $\widehat{\Psi}_\tau : \Omega_\tau \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  que cumple lo siguiente:

- i. La función  $\widehat{\Psi}_\tau$  manda los vértices de  $\Omega_\tau$  en los vértices de un disenoide esférico.
- ii. La función  $\widehat{\Psi}_\tau$  manda los puntos medios de las aristas de  $\Omega_\tau$  en los puntos medios de las aristas del disenoide esférico.
- iii. Consideremos  $\tau$  en la región  $\mathfrak{M}$  y  $\Delta$  el triángulo formado por los puntos  $\{0, 1, \tau\}$ . Entonces se cumple lo siguiente:
  - Si  $\Delta$  es escaleno, entonces  $\widehat{\Psi}_\tau$  no manda aristas en aristas.
  - Si  $\Delta$  es isósceles, entonces  $\widehat{\Psi}_\tau$  envía un par de aristas a las respectivas aristas del disenoide esférico.
  - Si  $\Delta$  es rectángulo, entonces  $\widehat{\Psi}_\tau$  envía 2 pares de aristas a las respectivas aristas del disenoide esférico.
  - Si  $\Delta$  es equilátero o isósceles y rectángulo, entonces  $\widehat{\Psi}_\tau$  manda aristas en aristas.

Estos son los principales resultados de la tesis, los cuales son originales. Las técnicas utilizadas en este capítulo son de geometría euclídeana, geometría esférica elemental y variable compleja básica.

### **Una aplicación interesante de la función $\widehat{\Psi}_\tau$ .**

Aunque la definición de la función de Weierstrass permite su estudio de manera algebraica y analítica, es difícil calcular valores de  $\wp$  para ciertos puntos dados, incluso estimarlos.

En el capítulo 2 analizamos la correspondencia entre los disenoides euclídeanos y los disenoides esféricos que obtenemos con la función  $\widehat{\Psi}_\tau$ . Obtenemos cotas con el método de la longitud extrema usado inicialmente por Grötzsch y desarrollado por Beurling y Ahlfors ([11] Capítulo 4) y el módulo conforme de una región doblemente conexa (anillo). Este resultado nos pareció interesante ya que Ahlfors ([11] pág. 76), Lehto y K. I. Virtanen ([12] pág. 34) y G. D. Anderson et al, ([5] pág. 177) también encuentran cotas de este tipo. El Corolario 2.17 nos muestra que las cotas que damos son mejores que las dadas por Lehto y K. I. Virtanen. Un análisis por computadora indica que nuestras cotas mejoran las de Ahlfors solamente en pocos casos, mientras que la cota de G. D. Anderson et al, es mejor incluso que la de Ahlfors. Las cotas que obtenemos en este capítulo tampoco las encontramos en la literatura existente.

En el Apéndice A enunciamos un resultado que obtenemos con ayuda de la proyección central de un disenoide euclídeano a su esfera circunscrita. Estas observaciones fueron realizadas durante nuestra investigación y las agregamos pues nos parecieron elegantes.

## Capítulo 1

### Disfenoides euclidianos y esféricos.

En este capítulo empezamos con una sección dedicada a la definición formal de una función elíptica, la expresión analítica de la función de Weierstrass y sus propiedades. Sin embargo los resultados no serán demostrados ya que pueden encontrarse en la literatura existente. Para más detalles puede ver [6] capítulo 3.

#### 1. La función de Weierstrass.

Una función  $F$ , definida del plano complejo  $\mathbb{C}$  a la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$ , se dice que es doblemente periódica si existen números complejos  $w_1$  y  $w_2$  (linealmente independientes considerando a  $\mathbb{C}$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial) tales que

$$F(z) = F(z + w_1) = F(z + w_2)$$

para toda  $z$  en  $\mathbb{C}$ . A  $w_1$  y  $w_2$  se les llaman periodos de  $F$ .

DEFINICIÓN 1.1. Una función  $F : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es elíptica si es meromorfa y doblemente periódica.

Si  $F$  es una función elíptica sin polos entonces es constante (ver [6] pág 73). Este resultado es inmediato del teorema de *Liouville* para funciones enteras.

Consideremos  $F$  una función elíptica con periodos  $w_1$  y  $w_2$ . La *retícula* generada por dichos periodos es el conjunto

$$\langle w_1, w_2 \rangle := \{n_1 w_1 + n_2 w_2 \in \mathbb{C} \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Un análisis inductivo nos muestra que para todo  $w$  en la retícula  $\langle w_1, w_2 \rangle$  se cumple que

$$F(z) = F(z + w),$$

para toda  $z \in \mathbb{C}$ .

DEFINICIÓN 1.2. La función de *Weierstrass*  $\wp : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  con periodos  $w_1$  y  $w_2$  está dada por la expresión

$$(1) \quad \wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \langle w_1, w_2 \rangle^*} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right),$$

donde  $\langle w_1, w_2 \rangle^*$  denota el conjunto de números distintos de cero de la retícula generada por  $w_1$  y  $w_2$ .

Los siguientes resultados se deducen de la definición anterior, para ver detalles consultar [6] página 94:

- i. La función de Weierstrass  $\wp$  es elíptica.
- ii. La función  $\wp$  es una función par.
- iii. Si los periodos de  $\wp$  están dados por los números  $w_1$  y  $w_2$  entonces la función  $\wp$  tiene polos de orden 2 en cada número de la retícula  $\langle w_1, w_2 \rangle$ .

La retícula  $\langle w_1, w_2 \rangle$  nos define un toro complejo como el cociente

$$T = \mathbb{C} / \langle w_1, w_2 \rangle,$$

donde  $\langle w_1, w_2 \rangle$  actúa por isometrías en  $\mathbb{C}$  asociando a  $\omega = n_1 w_1 + n_2 w_2$  la translación  $f(z) = z + \omega$ . Si  $F$  es una función elíptica con periodos  $w_1$  y  $w_2$ , ésta induce una función definida sobre el toro complejo  $T$  a la esfera de Riemann (ver [6] pág. 72). En particular la función de Weierstrass cumple la siguiente propiedad.

OBSERVACIÓN 1.3. La función de Weierstrass  $\wp$ , definida sobre el toro complejo  $T$ , es una función  $2 : 1$  con 4 puntos de ramificación.

Si  $T$  es el toro complejo inducido por la retícula  $\langle w_1, w_2 \rangle$ , la función  $\wp$  es la principal función elíptica con periodos  $w_1$  y  $w_2$ . Esto se refleja en el siguiente resultado (ver [6] página 99).

TEOREMA 1.4. Si  $F$  es una función elíptica, entonces existen funciones racionales  $R_1$  y  $R_2$  definidas de  $\widehat{\mathbb{C}}$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , tales que

$$(2) \quad F = \wp'(R_1 \circ \wp) + R_2 \circ \wp,$$

donde  $\wp$  es la función de Weierstrass con los mismo periodos que  $F$  y  $\wp'$  denota su derivada compleja.

Para concluir con esta sección demostramos un resultado de este teorema, que utilizaremos en la tesis.

**COROLARIO 1.5.** *Consideremos  $m(z) = az + b$  una transformación afín compleja no constante y  $F$  una función elíptica con periodos  $w_1$  y  $w_2$  con polos de orden 2. Si  $\wp$  es la función de Weierstrass con periodos  $\frac{w_1}{a}$  y  $\frac{w_2}{a}$ , entonces*

$$F \circ m = f \circ \wp,$$

donde  $f$  es una transformación de Möbius.

**DEMOSTRACIÓN.** Veamos que la función  $F \circ m$  es una función elíptica con periodos  $\frac{w_1}{a}$  y  $\frac{w_2}{a}$ . Por la periodicidad de  $F$  tenemos que

$$F \circ m \left( z + \frac{w_1}{a} \right) = F \left( az + w_1 + b \right) = F \left( m(z) + w_1 \right) = F \circ m(z),$$

$$F \circ m \left( z + \frac{w_2}{a} \right) = F \left( az + w_2 + b \right) = F \left( m(z) + w_2 \right) = F \circ m(z).$$

Por el teorema anterior existen funciones racionales  $g$  y  $f$  tales que

$$F \circ m = \wp'(g \circ \wp) + f \circ \wp.$$

Además  $m$  es una transformación afín compleja, entonces los polos de  $F \circ m$  tienen orden 2. Esto implica que el término  $\wp'(g \circ \wp)$  en la ecuación (2) se elimina, ya que la derivada de una función de Weierstrass aporta polos de orden 3 (ver [6] pág 95). Por lo tanto

$$F \circ m = f \circ \wp,$$

donde  $f$  es una transformación de Möbius ya que los polos de la función  $\wp$  tienen orden 2 (ver inciso iii de la página 2). □

## 2. Estructura compleja de Disfenoides.

DEFINICIÓN 1.6. Un disfenoido euclideo es un tetraedro euclideo con vértices distintos tal que las aristas que no comparten vértices tienen longitudes iguales.

Consideremos  $\tau$  un número complejo con parte real y parte imaginaria positiva. Identificando los lados del triángulo con vértices  $\{0, 1, \tau\}$  como se muestra en la Figura 1 obtenemos un disfenoido euclideo al cual denotaremos por  $\Omega_\tau$ . Veamos como construir estos disfenoides a partir de un toro complejo. Para ello recordemos unas propiedades del toro como superficie de Riemann.

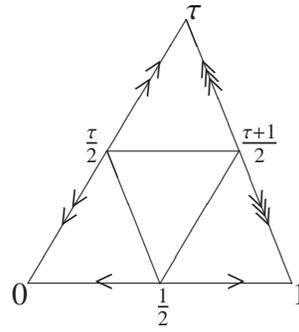


FIGURA 1. Disfenoido  $\Omega_\tau$  generado por el triángulo con vértices  $\{0, 1, \tau\}$ .

Decimos que 2 retículas  $\langle w_1, w_2 \rangle$  y  $\langle u_1, u_2 \rangle$  son equivalentes si y sólo si existe un número complejo  $\lambda$  distinto de cero tal que  $\langle w_1, w_2 \rangle = \lambda \langle u_1, u_2 \rangle$ , donde

$$\lambda \langle u_1, u_2 \rangle = \{ \lambda w \in \mathbb{C} \mid w \in \langle u_1, u_2 \rangle \}.$$

Los toros complejos  $\mathbb{C}/\langle w_1, w_2 \rangle$  y  $\mathbb{C}/\langle u_1, u_2 \rangle$  son biholomorfos si y sólo si las retículas  $\langle w_1, w_2 \rangle$  y  $\langle u_1, u_2 \rangle$  son equivalentes (ver [6] pág 202).

Si consideramos las retículas de la forma  $\langle 1, \tau \rangle$ , donde  $\tau$  pertenece al conjunto

$$\mathfrak{M} := \{ \tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\tau) \in [0, 1), \operatorname{Im}(\tau) > 0, |\tau| \geq 1, |\tau - 1| \geq 1 \},$$

los toros obtenidos no son biholomorfos entre sí. Además, para cada toro complejo  $T$  existe una retícula  $\langle 1, \tau \rangle$ , donde  $\tau$  pertenece a  $\mathfrak{M}$ , tal que  $T$  es biholomorfo a  $\mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle$ . El conjunto  $\mathfrak{M}$  es una región fundamental del grupo unimodular (ver [10] pág 270). El toro complejo obtenido por la retícula  $\langle 1, \tau \rangle$  lo denotaremos por  $T_\tau$ .

PROPOSICIÓN 1.7. Si  $h : T_\tau \longrightarrow T_\tau$  es la involución elíptica dada por  $h([z]) = [-z]$ , entonces  $T_\tau/h$  es isométrico a  $\Omega_\tau$ .

DEMOSTRACIÓN. Realizando la identificación  $T_\tau/h$  obtenemos como región fundamental al triángulo con vértices  $\{0, 1, \tau\}$  identificando los lados como se muestra en la Figura 1. Sabemos que la acción de  $h$  sobre el toro es una rotación de ángulo  $\pi$  (ver [6] pág. 108), por lo tanto  $h$  actúa por isometrías sobre el toro  $T_\tau$  y  $T_\tau/h$  es isométrico a  $\Omega_\tau$ .  $\square$

Demos una estructura compleja sobre el disfenoide  $\Omega_\tau$  de la siguiente manera. Denotemos por  $\Omega_\tau^*$  al disfenoide euclidean eliminando sus vértices. Consideremos  $p_1 : \mathbb{C} \longrightarrow T_\tau$  la proyección estandar del toro complejo y  $p_2 : T_\tau \longrightarrow \Omega_\tau$  la proyección que se obtiene de la proposición anterior. Definamos la función  $\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \Omega_\tau$  como

$$\pi = p_2 \circ p_1.$$

Entonces  $\pi$  es una función suprayectiva y abierta. Dotemos a  $\Omega_\tau$  con la topología cociente inducida por la función  $\pi$ . Sea  $\widehat{\pi}$  la restricción de  $\pi$  sobre el conjunto  $\widetilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\langle 1, \tau \rangle$ . Es inmediato ver que la función  $\widehat{\pi}$  manda el conjunto  $\widetilde{\mathbb{C}}$  al disfenoide  $\Omega_\tau^*$ .

PROPOSICIÓN 1.8. El disfenoide  $\Omega_\tau^*$  es una superficie de Riemann.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $V$  un conjunto abierto en  $\widetilde{\mathbb{C}}$  tal que para toda  $x$  e  $y$  en  $V$ ,  $\widehat{\pi}(x) \neq \widehat{\pi}(y)$ . Si  $U := \widehat{\pi}(V)$ , la función  $\widehat{\pi}|_V : V \longrightarrow U$  es un homeomorfismo. Consideremos la familia de abiertos  $\{U_i\}$  en  $\Omega_\tau^*$  contruidos de esta forma. Sea  $\varphi_i : V_i \longrightarrow U_i$  la inversa de  $\widehat{\pi}|_{V_i} : V_i \longrightarrow U_i$ . Veamos que la familia  $\mathfrak{U} = (U_i, \varphi_i)$  es un atlas complejo sobre  $\Omega_\tau^*$ . Para ello basta ver que las funciones  $\varphi_i$  son cartas complejas holomorfamente compatibles.

Consideremos dos cartas  $\varphi_i$  y  $\varphi_j$  y definamos  $\psi = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ . La función  $\psi$  es un homeomorfismo ya que las funciones  $\varphi_i$  y  $\varphi_j$  lo son. Si  $z$  pertenece a  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ , entonces

$$\widehat{\pi}(\psi(z)) = \widehat{\pi}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(z)) = \varphi_i^{-1}(z) = \widehat{\pi}(z).$$

Esto implica que  $\psi(z) \sim z$ . Por lo tanto  $\psi(z) - z \in \langle 1, \tau \rangle$  o bien  $\psi(z) = -z$ . Si  $\psi(z) - z \in \langle 1, \tau \rangle$  entonces  $\psi(z) - z$  es constante en cada componente conexa ya que la función  $\psi$  es continua y  $\langle 1, \tau \rangle$  es un conjunto discreto. Así la función  $\psi$  es holomorfa en ambos casos. Por lo tanto  $\Omega_\tau^*$  es una superficie de Riemann.  $\square$

Denotemos por  $\varphi_\tau$  a la función de Weierstrass con periodos 1 y  $\tau$ . Por la paridad de la función  $\varphi_\tau$  y la definición de  $\pi$  existe una función continua  $\widehat{\varphi}_\tau : \Omega_\tau \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi_\tau} & \widehat{\mathbb{C}} \\ \pi \downarrow & \nearrow \widehat{\varphi}_\tau & \\ \Omega_\tau & & \end{array}$$

Además  $\widehat{\varphi}_\tau$  es un homeomorfismo entre el disfenoide  $\Omega_\tau$  y la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$  (ver [6] pág. 108). Más aún, la función  $\widehat{\varphi}_\tau|_{\Omega_\tau^*}$  es un biholomorfismo entre  $\Omega_\tau^*$  y la esfera de Riemann menos 4 puntos. Para demostrar esto, basta ver que la función  $\widehat{\varphi}_\tau \circ \varphi^{-1}$  es un biholomorfismo para las cartas de  $\Omega_\tau^*$  definidas anteriormente. Esto es, la función  $\varphi$  es la función inversa de  $\widehat{\pi}$  para alguna vecindad del disfenoide sin vértices. Este resultado es cierto porque el diagrama anterior conmuta. Así llegamos de manera natural al siguiente resultado.

**COROLARIO 1.9.** *El disfenoide euclideo  $\Omega_\tau$  es una superficie de Riemann biholomorfa a la esfera de Riemann.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sabemos que la función  $\widehat{\varphi}_\tau$  es un homeomorfismo sobre  $\Omega_\tau$  y es holomorfa sobre  $\Omega_\tau^*$ . Por el teorema de Riemann para singularidades removibles (ver [4] pág. 5), la estructura compleja de  $\Omega_\tau^*$  se extiende sobre los 4 puntos faltantes y la función  $\widehat{\varphi}_\tau$  es un biholomorfismo.  $\square$

A continuación damos un concepto similar a los disfenoides euclideanos en la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Para ello recordemos algunos conceptos de geometría esférica.

Si  $X$  e  $Y$  son puntos en la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2$ , la distancia esférica está definida como la longitud del ángulo central menor o igual a  $\pi$  formado por dichos puntos. Sabemos que esta distancia se realiza como la longitud del arco de círculo máximo que une los puntos  $X$  e  $Y$ . A la distancia esférica la denotamos como  $d_{esf}$ .

Recordemos que las isometrías de la esfera unitaria con esta distancia están dadas por el grupo de rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ , el cual se identifica con el grupo  $SO(3)$ . Un resultado importante es que toda isometría de  $\mathbb{S}^2$  se puede ver como composición de rotaciones por los ejes  $X$  e  $Y$  (ver [14] pág. 125).

**DEFINICIÓN 1.10.** Un disfenoide esférico es la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  con 4 puntos distintos marcados  $A, B, C$  y  $D$  tales que  $d_{esf}(A, B) = d_{esf}(C, D)$ ,  $d_{esf}(A, D) = d_{esf}(B, C)$  y  $d_{esf}(A, C) = d_{esf}(B, D)$ . A dichos puntos los llamamos vértices y a los arcos de círculo máximo que realizan la distancia esférica entre los vértices les llamamos aristas.

Identificando a la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  y la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$  con la proyección estereográfica, podemos pensar a los disfenoides esféricos como superficies de Riemann. Con dicha asignación las isometrías de la esfera unitaria se identifican con un subgrupo de las transformaciones de Möbius. Bajo proyección estereográfica existe una isometría que transforma a los vértices de un disfenoides esférico en valores de la forma  $k$ ,  $-k$ ,  $k\alpha$  y  $-k\alpha$ , donde  $k$  es un valor real positivo menor a 1.

A continuación nos concentraremos en demostrar el siguiente teorema, el cual nos da una relación biyectiva entre los disfenoides euclidianos y los disfenoides esféricos.

**TEOREMA 1.11.** *Sea  $\Omega_\tau$  un disfenoides euclidiano. Entonces existe un biholomorfismo que manda los vértices de  $\Omega_\tau$  en los vértices de un disfenoides esférico.*

Este teorema es consecuencia del Lema 1.13 y el Lema 1.15 que veremos a continuación. Para realizar esta demostración utilizamos algunas propiedades de las transformaciones de Möbius y la razón cruzada  $\chi$  entre 4 puntos de la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Recordemos que dados 4 puntos ordenados  $z_1, z_2, z_3$  y  $z_4$  en  $\mathbb{C}$ , entonces la razón cruzada de ellos está dada por

$$\chi(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}.$$

De manera análoga, si uno de estos puntos es infinito, para definir la razón cruzada  $\chi$  basta con eliminar en la expresión anterior los factores que tienen a dicho punto. Por ejemplo, si  $z_4 = \infty$  entonces

$$\chi(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_3 - z_2)}{(z_3 - z_1)}.$$

**OBSERVACIÓN 1.12.** Sean  $z_1, z_2, z_3$  y  $z_4$  puntos distintos en  $\widehat{\mathbb{C}}$  y  $\chi = \chi(z_1, z_2, z_3, z_4)$ . Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $\chi$  es invariante bajo transformaciones de Möbius.
- Existe una única transformación de Möbius  $f$  tal que  $f(z_1) = 0$ ,  $f(z_2) = \infty$ ,  $f(z_3) = 1$ ,  $f(z_4) = \chi$ .
- $\chi$  es real si y sólo si los cuatro puntos  $z_1, z_2, z_3$  y  $z_4$  están en una línea o un círculo.
- Las transformaciones de Möbius mandan círculos y rectas en círculos o rectas.
- Una transformación de Möbius está completamente determinada por las imágenes de 3 puntos distintos.

Para más detalles de esta observación ver [10] página 79.

LEMA 1.13. Sean  $z_1, z_2, z_3$  y  $z_4$  puntos distintos en  $\widehat{\mathbb{C}}$  y  $\chi = \chi(z_1, z_2, z_3, z_4)$ . Entonces existe una transformación de Möbius que manda a los puntos  $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$  en los puntos  $\{1, -1, \alpha, -\alpha\}$ . Más aún, hay solamente 2 valores,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  que cumplen esto y su producto es 1.

DEMOSTRACIÓN. Por la Observación 1.12 va a existir una transformación de Möbius  $m$  que manda a los puntos  $\{1, -1, \alpha, -\alpha\}$  en los puntos  $\{0, \infty, 1, \chi\}$  si y sólo si la razón cruzada de los puntos  $\{1, -1, \alpha, -\alpha\}$  es  $\chi$ . Esto es cierto sólo cuando la siguiente ecuación tiene solución.

$$(4) \quad \chi = \frac{(\alpha + 1)^2}{(\alpha - 1)^2}.$$

Veamos que esto siempre es cierto. Despejando  $\alpha$  de la ecuación anterior obtenemos que

$$\alpha = \frac{-(\chi + 1) \pm 2\sqrt{\chi}}{1 - \chi}.$$

Sabemos que  $\chi$  no puede tomar los valores 0, 1 e  $\infty$ , ya que  $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$  son puntos distintos. Así la ecuación anterior va a estar bien definida y  $\alpha$  no puede tomar los valores 1,  $-1$  ó 0. Por lo tanto siempre podemos encontrar  $\alpha$  que cumpla la ecuación. Luego existe una transformación de Möbius  $m$  que manda a los puntos  $\{1, -1, \alpha, -\alpha\}$  en los puntos  $\{0, \infty, 1, \chi\}$ . Por la Observación 1.12 va a existir una transformación de Möbius  $m_1$  que manda a los puntos  $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$  en los puntos  $\{0, \infty, 1, \chi\}$  respectivamente. Por lo tanto, la función  $m^{-1} \circ m_1$  es una transformación de Möbius que manda los puntos  $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$  en los puntos  $\{1, -1, \alpha, -\alpha\}$ . Se deduce de la ecuación de  $\alpha$  que sólo hay dos soluciones y su producto es 1.  $\square$

Utilizando la identificación de la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  con  $\widehat{\mathbb{C}}$  bajo la proyección estereográfica podemos dar una expresión de la distancia esférica para los puntos de  $\widehat{\mathbb{C}}$  de la siguiente manera.

PROPOSICIÓN 1.14. Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ . Entonces

$$(5) \quad \cos(d_{esf}(z, w)) = \frac{|1 + z\bar{w}|^2 - |z - w|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)},$$

$$(6) \quad \cos(d_{esf}(z, \infty)) = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si denotamos por  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2$  a la inversa de la proyección estereográfica vemos que

$$\phi(z) = \left( \frac{2\operatorname{Re}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2} \right).$$

Utilizando el producto punto entre los valores  $\phi(z)$  y  $\phi(w)$  obtenemos lo siguiente.

$$(7) \quad \cos(d_{esf}(z, w)) = \frac{4\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w) + 4\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w) + (|z|^2 - 1)(|w|^2 - 1)}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}.$$

Un cálculo directo nos muestra que

$$(8) \quad |1 + z\bar{w}|^2 = 1 + 2(\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)) + |z|^2|w|^2,$$

$$(9) \quad |z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2(\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)).$$

Luego

$$\begin{aligned} |1 + z\bar{w}|^2 - |z - w|^2 &= 4(\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)) + 1 + |z|^2|w|^2 - |z|^2 - |w|^2 \\ &= 4(\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)) + (|z|^2 - 1)(|w|^2 - 1). \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (7) obtenemos la ecuación (5). Sabiendo que  $\phi(\infty) = (0, 0, 1)$  la segunda ecuación se obtiene inmediatamente del producto punto de los valores  $\phi(z)$  y  $\phi(\infty)$ .  $\square$

Consideremos los arcos de círculos máximos entre los puntos 1 y  $-1$  y  $\alpha$  con  $-\alpha$ . Si  $|\alpha| \neq 1$  obtenemos que  $d_{esf}(1, -1) \neq d_{esf}(\alpha, -\alpha)$ . Sin embargo aplicando una dilatación por un factor  $k$  apropiado podemos igualar dichas distancias esféricas. El siguiente resultado nos indica cuál es dicho factor.

LEMA 1.15. *Considere los puntos  $\{1, -1, \alpha, -\alpha\}$ . Entonces  $k = \pm|\alpha|^{-\frac{1}{2}}$  son los únicos valores reales distintos de cero tales que*

$$d_{esf}(-k, k) = d_{esf}(-k\alpha, k\alpha).$$

DEMOSTRACIÓN. De la ecuación (5) y sustituyendo los valores de  $k$  tenemos que

$$\cos(d_{esf}(-k, k)) = \frac{k^4 - 6k^2 + 1}{(1 + k^2)^2} = \frac{|\alpha|^2 - 6|\alpha| + 1}{(|\alpha|^2 + 1)^2}.$$

De manera análoga

$$\cos(d_{esf}(-k\alpha, k\alpha)) = \frac{|\alpha|^4 k^4 - 6|\alpha|^2 k^2 + 1}{(1 + k^2|\alpha|^2)^2} = \frac{|\alpha|^2 - 6|\alpha| + 1}{(|\alpha|^2 + 1)^2}.$$

Claramente se cumple que  $d_{esf}(-k, k) = d_{esf}(-k\alpha, k\alpha)$ . Ahora veamos que dichos valores son los únicos. Supongamos que se cumple la igualdad entre las distancias esféricas, entonces  $\cos(d_{esf}(-k, k)) = \cos(d_{esf}(-k\alpha, k\alpha))$ . Así

$$\frac{k^4 - 6k^2 + 1}{(1 + k^2)^2} = \frac{|\alpha|^4 k^4 - 6|\alpha|^2 k^2 + 1}{(1 + k^2|\alpha|^2)^2}.$$

Resolviendo la ecuación tenemos que  $k = \pm|\alpha|^{-\frac{1}{2}}$ . Entonces los únicos valores de  $k$  que cumplen las condiciones son los dados.  $\square$

Por el Lema 1.13 sabemos que existen transformaciones de Möbius que mandan 4 puntos distintos de  $\widehat{\mathbb{C}}$  en los puntos  $\{1, -1, \alpha, -\alpha\}$  o  $\{1, -1, \frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\alpha}\}$ . Los complejos  $\alpha$  y  $\frac{1}{\alpha}$  son los únicos puntos con esta propiedad. Es fácil ver que la transformación de Möbius  $f(z) = \frac{1}{z}$  manda a los puntos  $\{1, -1, \alpha, -\alpha\}$  en los puntos  $\{1, -1, \frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\alpha}\}$  y viceversa. Así, sin pérdida de generalidad podemos suponer que 4 puntos distintos  $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$  son enviados por una transformación de Möbius a los puntos  $\{1, -1, \alpha, -\alpha\}$ , donde  $|\alpha| \geq 1$ . Así el valor de  $k$  obtenido en el Lema 1.15 es menor a 1. Además  $d_{esf}(-k, k) = d_{esf}(-k\alpha, k\alpha)$ . De la ecuación (5) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} d_{esf}(-k, -k\alpha) &= \arccos\left(\frac{|1 + (-k)(\overline{-k\alpha})|^2 - |-k - (-k\alpha)|^2}{(1 + |-k|^2)(1 + |-k\alpha|^2)}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{|1 + (k)(\overline{k\alpha})|^2 - |k - k\alpha|^2}{(1 + |k|^2)(1 + |k\alpha|^2)}\right) = d_{esf}(k, k\alpha). \end{aligned}$$

De manera análoga  $d_{esf}(-k\alpha, k) = d_{esf}(k\alpha, -k)$ . Por lo tanto los puntos  $\{k, -k, k\alpha, -k\alpha\}$  son los vértices de un disfenoide esférico. Denotaremos a éste disfenoide esférico como  $\Theta(\alpha)$ .

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.11. Del Corolario 1.9 la función  $\widehat{\varphi}_\tau$  es un biholomorfismo entre  $\Omega_\tau$  y la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$  que manda los vértices de  $\Omega_\tau$  a los puntos

$$\left\{ \varphi_\tau(0), \varphi_\tau\left(\frac{1}{2}\right), \varphi_\tau\left(\frac{\tau+1}{2}\right), \varphi_\tau\left(\frac{\tau}{2}\right) \right\}.$$

Por el Lema 1.13 y el Lema 1.15 existe una transformación de Möbius  $h$  que manda dichos puntos a puntos de la forma  $\{k, -k, k\alpha, -k\alpha\}$ , los cuales son los vértices de un disfenoide esférico  $\Theta(\alpha)$ . Así la función  $h \circ \widehat{\varphi}_\tau$  manda los vértices de  $\Omega_\tau$  en los vértices de un disfenoide esférico.  $\square$

Consideremos  $\Omega_\tau$  un disfenoide euclideo y  $h$  la transformación de Möbius asociada a  $\Omega_\tau$  por el Lema 1.13 y el Lema 1.15. El teorema 1.11 nos muestra que la función  $h \circ \widehat{\varphi}_\tau$ , manda los vértices

del disfenoide euclideo a los vértices de un disfenoide esférico. A éste disfenoide esférico lo denotaremos como  $\Theta_\tau$ .

El biholomorfismo  $\widehat{\varphi}_\tau$  relaciona el disfenoide euclideo  $\Omega_\tau$  con la esfera de Riemann, sin embargo es difícil saber si los valores de los vértices del disfenoide euclideo son los vértices de un disfenoide esférico. A pesar de esto, aplicando la transformación de Mobius  $h$  obtenemos un biholomorfismo entre  $\Omega_\tau$  y  $\Theta_\tau$  que relaciona los vértices. En las siguientes secciones analizamos con más detalle esta función.

### 3. Automorfismos anticonformes de $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Las funciones anticonformes son transformaciones conformes que invierten la orientación. Como veremos en esta sección, las funciones anticonformes están directamente relacionadas con las simetrías de un disfenoide esférico. A continuación damos un lema el cual nos caracteriza las funciones biyectivas y anticonformes en la esfera de Riemann.

LEMA 1.16. *Si  $f$  es una función biyectiva y anticonforme, definida de  $\widehat{\mathbb{C}}$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , entonces*

$$(10) \quad f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

donde  $ad - bc \neq 0$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$  y  $df_{z_0}$  la diferencial de  $f$  en  $z_0$ . Como  $f$  es anticonforme sabemos que existe  $a \in \mathbb{C}$  tal que  $df_{z_0}(z) = a\bar{z}$  (ver [16] pág.15). Si  $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$  vemos que se cumplen las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) &= -\frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) \end{aligned}$$

Definamos  $g(x, y) = (f_1(x, y), -f_2(x, y))$  y  $c(x, y) = (x, -y)$  la función conjugación, entonces  $f = c \circ g$ . De las ecuaciones anteriores la función  $g$  cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann, así la función  $g$  es holomorfa. Como  $f$  es biyectiva entonces  $g$  también lo sera. Por lo tanto  $f$  puede expresarse por la Ecuación (10).  $\square$

El lema anterior nos muestra que los automorfismo anticonformes son composición de una transformación de Mobius y la conjugación. El siguiente resultado es una aplicación inmediata del Lema 1.16 y la Observación 1.12.

OBSERVACIÓN 1.17. Un automorfismo anticonforme de la esfera de Riemann está completamente determinado por las imágenes de 3 puntos distintos.

#### 4. Simetrías de disfenoides.

DEFINICIÓN 1.18. Una simetría de un disfenoides euclideo (o esférico) es una isometría del disfenoides que manda vértices en vértices y aristas en aristas.

En esta sección caracterizamos las simetrías de los disfenoides euclideos y los disfenoides esféricos. Además relacionamos el grupo de simetrías del disfenoides euclideo  $\Omega_\tau$  y el grupo de simetrías del disfenoides esférico  $\Theta_\tau$  utilizando la función  $h \circ \widehat{\varphi}_\tau$ . Notemos que el tipo de triángulo de las caras del disfenoides  $\Omega_\tau$  nos determina la ubicación de  $\tau$  en la región fundamental  $\mathfrak{M}$ .

OBSERVACIÓN 1.19. Consideremos  $\tau$  en la región  $\mathfrak{M}$ . Entonces se cumplen las siguientes condiciones:

1. Las caras del disfenoides  $\Omega_\tau$  están formadas por triángulos escalenos si y sólo si  $\tau \neq \frac{1}{2} + ir$  y  $|\tau| \neq 1$ .
2. Las caras del disfenoides  $\Omega_\tau$  están formadas por triángulos isósceles si y sólo si  $|\tau| = 1$  o  $\tau = \frac{1}{2} + ir$  con  $r \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
3. Las caras del disfenoides  $\Omega_\tau$  están formadas por triángulos equiláteros si y sólo si  $\tau = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ .

DEFINICIÓN 1.20. Llamaremos al disfenoides euclideo  $\Omega_\tau$  *disfenoides escaleno* si  $\tau \neq \frac{1}{2} + ir$  y  $|\tau| \neq 1$ , *disfenoides isósceles* si  $|\tau| = 1$  o  $\tau = \frac{1}{2} + ir$  con  $r \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$  y *disfenoides equilátero* si  $\tau = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ .

Una característica que difiere entre estos 3 tipos de disfenoides es el número de aristas iguales que tienen. Un disfenoides escaleno tiene 3 pares de aristas distintas mientras que el disfenoides isósceles tiene 4 aristas iguales y un par de aristas iguales entre sí pero distintas a las otras 4 y el disfenoides equilátero tiene sus 6 aristas iguales. Esto nos ayuda a caracterizar las simetrías de los disfenoides euclideos como vemos a continuación.

PROPOSICIÓN 1.21. Consideremos  $\tau$  en la región  $\mathfrak{M}$ , entonces el grupo de simetrías del disfenoides euclideo esta dado de la siguiente forma:

1. Si  $\Omega_\tau$  es un disfenoides escaleno, el grupo de simetrías es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  (grupo 4 de Klein).
2. Si  $\Omega_\tau$  es un disfenoides isósceles, el grupo de simetrías es isomorfo a  $D_4$  (grupo diédrico de orden 8).

3. Si  $\Omega_\tau$  es un disfenoide equilátero, el grupo de simetrías es isomorfo a  $S_4$  (grupo de permutaciones de 4 elementos).

DEMOSTRACIÓN. Demostremos el primer inciso. Denotemos a los vértices del disfenoide  $\Omega_\tau$  como se muestra en la Figura 2. Sea  $\ell$  la recta que pasa por los puntos medios de dos aristas opuestas. Entonces la rotación por ángulo  $\pi$  sobre la recta  $\ell$  es una simetría del disfenoide  $\Omega_\tau$ . En la Figura 2 vemos la rotación por ángulo  $\pi$  por la recta  $\ell$  que intercambia los vértices 1 y 2 y los vértices 3 y 4. Además no existen otras simetrías, ya que las caras del disfenoide  $\Omega_\tau$  están formadas por triángulos escalenos (las longitudes de los 3 lados son distintas). Así, determinando la imagen de uno de los vértices queda completamente determinada la simetría, la cual coincide con una de las rotaciones mencionadas.

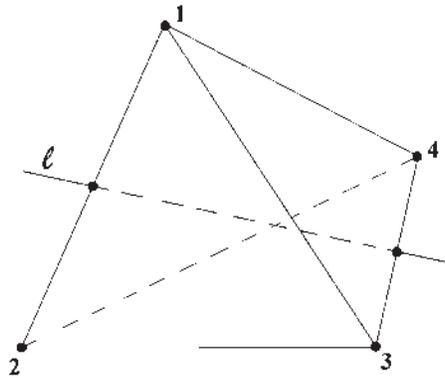


FIGURA 2. Rotación de ángulo  $\pi$  correspondiente a  $\sigma_1 = (1\ 2)(3\ 4)$ .

Identificando a estas simetrías con las permutaciones de 4 elementos las rotaciones anteriores se representan por  $\sigma_1 = (1\ 2)(3\ 4)$ ,  $\sigma_2 = (1\ 4)(2\ 3)$  y  $\sigma_3 = (1\ 3)(2\ 4)$ . Como  $\sigma_i$  es el producto de dos bi-ciclos entonces  $\sigma_i$  tiene orden 2 para  $i = 1, 2, 3$ . Si denotamos por  $e$  a la permutación identidad, el conjunto  $\{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  forma un grupo donde cada  $\sigma_i$  tiene orden 2. Por lo tanto dicho grupo es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Esto implica que el grupo de simetrías del disfenoide  $\Omega_\tau$  es isomorfo éste grupo.

Para demostrar el segundo inciso realicemos como antes la identificación entre las simetrías del disfenoide  $\Omega_\tau$  y las permutaciones de 4 elementos. Siguiendo la misma notación tenemos 3 simetrías que se realizan por rotaciones,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ . Además las caras del disfenoide  $\Omega_\tau$  están formadas por triángulos isósceles. Denotemos por  $a_{ij}$  a la arista que une los vértices  $i$  y  $j$ , con  $i, j$  en el conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Supongamos que las aristas  $a_{12}$ ,  $a_{14}$ ,  $a_{23}$  y  $a_{34}$  tienen longitudes iguales. Entonces la reflexión por el plano que contiene a la arista  $a_{13}$  y el punto medio de la arista  $a_{24}$  es una simetría del disfenoide  $\Omega_\tau$ . Análogamente la reflexión por el plano que contiene a la arista  $a_{24}$  y el

punto medio de la arista  $a_{13}$  es una simetría del disfenoide  $\Omega_\tau$ . Las permutaciones correspondientes a dichas reflexiones están dadas por  $\sigma_4 = (13)$  y  $\sigma_5 = (24)$ . Es inmediato ver que  $\sigma_2\sigma_4 = (1234) := \sigma_6$  y  $\sigma_1\sigma_4 = (1432) := \sigma_7$ . Además el grupo  $G$  generado por el conjunto  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7\}$  tiene orden 8. Como el grupo diédrico  $D_4$  es generado por el conjunto  $\{\sigma_6, \sigma_7\}$  (ver [14] pág. 25) y tiene orden 8, entonces  $G = D_4$ . Por lo tanto el grupo de simetrías del disfenoide  $\Omega_\tau$  es isomorfo a  $D_4$ .

El tercer inciso es un resultado conocido del grupo de simetrías de un tetraedro regular (ver [21]).  $\square$

Para caracterizar las simetrías de los disfenoides esféricos realizamos una separación de manera análoga a los disfenoides euclidianos.

DEFINICIÓN 1.22. Llamaremos al disfenoide esférico  $\Theta$  *disfenoide escaleno* si tiene 3 pares de aristas distintas, *disfenoide isósceles* si tiene 4 aristas iguales y el otro par de aristas distintas a estas 4 y *disfenoide equilátero* si todas las aristas son iguales.

PROPOSICIÓN 1.23. *El grupo de simetrías de un disfenoide esférico escaleno (isósceles o equilátero) es isomorfo al grupo de simetrías de un disfenoide euclidiano escaleno (isósceles o equilátero).*

DEMOSTRACIÓN. La demostración es análoga a la Proposición 1.21. Así supongamos que  $\Theta$  es un disfenoide esférico escaleno. Denotemos las aristas del disfenoide como en la figura 3. La rotación de ángulo  $\pi$  sobre la recta marcada en la figura es una simetría del disfenoide  $\Theta$ . Realizando esta construcción en cada par de aristas opuestas obtenemos las únicas simetrías del disfenoide. Identificando las simetrías con las permutaciones de 4 elementos obtenemos un grupo de 4 elementos isomorfo a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

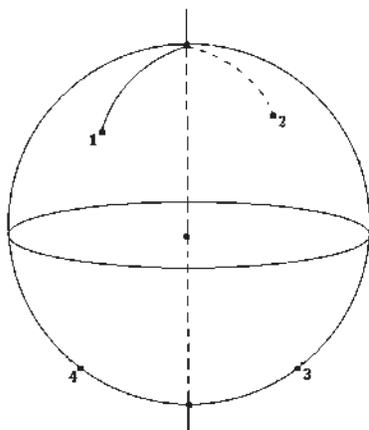


FIGURA 3. Rotación de ángulo  $\pi$ .

Para el caso isósceles basta con ver que el par de aristas distintas a las otras 4 son ortogonales. Así obtenemos 2 simetrías inducidas por reflexiones. Sin pérdida de generalidad suponemos que bajo proyección estereográfica los vértices del disfenoides están dados por los puntos  $\{k, -k, k\alpha, -k\alpha\}$  y el par de aristas distintas a las otras están dadas por los vértices  $k$  con  $-k$  y  $k\alpha$  con  $-k\alpha$ . Entonces  $d_{esf}(k, k\alpha) = d_{esf}(-k, k\alpha)$ . Esto implica que

$$\frac{|1 + k\alpha|^2 - |k - k\alpha|^2}{(1 + k^2)(1 + k^2|\alpha|^2)} = \frac{|1 - k\alpha|^2 - |k + k\alpha|^2}{(1 + k^2)(1 + k^2|\alpha|^2)}.$$

Utilizando las ecuaciones (8) y (9) (ver página 9) obtenemos que  $Re(\alpha) = 0$ . Por lo tanto  $\alpha$  es imaginario puro y las aristas son ortogonales. Así el grupo de simetrías de un disfenoides esférico isósceles es isomorfo al grupo diédrico  $D_4$ .

Para el caso de un disfenoides esférico equilátero es suficiente con realizar las simetrías análogas al caso euclideano (ver [21]).  $\square$

Consideremos  $h$  la transformación de Möbius dada por el Teorema 1.11 que manda en orden los valores  $\{\wp_\tau(0), \wp_\tau\left(\frac{1}{2}\right), \wp_\tau\left(\frac{\tau+1}{2}\right), \wp_\tau\left(\frac{\tau}{2}\right)\}$  en los vértices  $\{k, -k, k\alpha, -k\alpha\}$  del disfenoides esférico  $\Theta_\tau$ . Denotaremos por  $\Psi_\tau$  a la función  $h \circ \wp_\tau$ . Es inmediato ver que  $\Psi_\tau$  es una función par y elíptica con los mismos periodos que  $\wp_\tau$ . Esto induce un biholomorfismo  $\widehat{\Psi}_\tau$  entre el disfenoides euclideano  $\Omega_\tau$  y el disfenoides esférico  $\Theta_\tau$  tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$(11) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\Psi_\tau} & \Theta_\tau \\ \pi \downarrow & \nearrow & \uparrow \\ \Omega_\tau & & \widehat{\Psi}_\tau \end{array}$$

Más aún,  $\widehat{\Psi}_\tau = h \circ \widehat{\wp}_\tau$ .

Los resultados anteriores nos caracterizan las simetrías de los disfenoides euclidianos y los disfenoides esféricos. Consideremos  $\tau$  en la región  $\mathfrak{M}$ . Una pregunta natural que podemos hacer es si existe una relación entre el grupo de simetrías del disfenoides euclideano  $\Omega_\tau$  y el grupo de simetrías del disfenoides esférico  $\Theta_\tau$ . El siguiente resultado nos muestra dicha relación.

**COROLARIO 1.24.** *Sea  $\tau \in \mathfrak{M}$ . Entonces el grupo de simetrías del disfenoides esférico  $\Theta_\tau$  es isomorfo al grupo de simetrías del disfenoides euclideano  $\Omega_\tau$ .*

Para realizar esta demostración a continuación vemos unos resultados sobre las simetrías del disfenoide  $\Omega_\tau$  y la relación que hay entre los puntos medios de las aristas del disfenoide  $\Omega_\tau$  y el disfenoide  $\Theta_\tau$ .

**PROPOSICIÓN 1.25.** *Consideremos  $\tau$  en la región  $\mathfrak{M}$ . Si  $f$  es una simetría del disfenoide euclideo  $\Omega_\tau$  que se realiza por una rotación de ángulo  $\pi$  (ver figura 2), entonces  $\widehat{\Psi}_\tau \circ f \circ \widehat{\Psi}_\tau^{-1}$  es una simetría del disfenoide esférico  $\Theta_\tau$  que se realiza por una rotación de ángulo  $\pi$  (ver figura 3).*

**DEMOSTRACIÓN.** Sabemos que la función  $g = \widehat{\Psi}_\tau \circ f \circ \widehat{\Psi}_\tau^{-1}$  es un automorfismo complejo de la esfera de Riemann, entonces  $g$  es una transformación de Möbius. Sean  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$  los vértices de  $\Omega_\tau$  y  $w_1, w_2, w_3, w_4$  los respectivos vértices de  $\Theta_\tau$  bajo  $\widehat{\Psi}_\tau$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $f$  es la rotación que intercambia los vértices  $v_1$  con  $v_2$  y  $v_3$  con  $v_4$ . Por la Observación 1.12 la simetría de  $\Theta_\tau$  que se realiza por rotación e intercambia los vértices  $w_1$  con  $w_2$  y  $w_3$  con  $w_4$  es la única transformación de Möbius con esta propiedad. Veamos que la transformación  $g$  cumple esto.

$$\begin{aligned} g(w_1) &= \widehat{\Psi}_\tau \circ f \circ \widehat{\Psi}_\tau^{-1}(w_1) = \widehat{\Psi}_\tau \circ f(v_1) = \widehat{\Psi}_\tau(v_2) = w_2. \\ g(w_2) &= \widehat{\Psi}_\tau \circ f \circ \widehat{\Psi}_\tau^{-1}(w_2) = \widehat{\Psi}_\tau \circ f(v_2) = \widehat{\Psi}_\tau(v_1) = w_1. \end{aligned}$$

Esto muestra que los vértices  $w_1$  y  $w_2$  se intercambian con la transformación  $g$ . Realizando las mismas operaciones vemos que  $g$  intercambia los vértices  $w_3$  y  $w_4$ . Por lo tanto  $g$  es una simetría del disfenoide esférico  $\Theta_\tau$  que se realiza por una rotación.  $\square$

**TEOREMA 1.26.** *Los puntos medios del disfenoide esférico  $\Theta_\tau$  forman 3 pares de puntos antípodas, además bajo proyección estereográfica 4 de ellos tienen norma 1 y los otros 2 son los puntos 0 e  $\infty$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $\{k, -k, k\alpha, -k\alpha\}$  los vértices de  $\Theta_\tau$ . Sabemos que las simetrías que preservan orientación e intercambian dos a dos los vértices son rotaciones de ángulo  $\pi$  por rectas que pasan por 2 puntos medios. Por lo tanto los puntos medios de aristas opuestas son puntos antípodas. En particular la rotación  $R$  de ángulo  $\pi$  por la recta que pasa por los puntos 0 e  $\infty$  es una simetría de  $\Theta_\tau$ . Así dichos puntos tienen que ser puntos medios de las aristas formadas por  $k$  con  $-k$  y  $k\alpha$  con  $-k\alpha$ . La simetría  $R$  también intercambia dos a dos los puntos medios de las otras aristas. Como son puntos antípodas dos a dos, los 4 puntos medios deben estar sobre la circunferencia unitaria. Por lo tanto bajo proyección estereográfica 4 de los puntos medios tienen norma 1 y los otros 2 son cero e infinito.  $\square$

COROLARIO 1.27. Si  $\tau$  pertenece al conjunto  $\mathfrak{M}$  entonces  $\Psi_\tau\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ ,  $\Psi_\tau\left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{4}\right) = \infty$  y

$$\left|\Psi_\tau\left(\frac{\tau}{4}\right)\right| = \left|\Psi_\tau\left(\frac{\tau+1}{4}\right)\right| = \left|\Psi_\tau\left(\frac{\tau}{4} + \frac{1}{2}\right)\right| = \left|\Psi_\tau\left(\frac{\tau+1}{4} + \frac{1}{2}\right)\right| = 1.$$

Además  $\Psi_\tau(0) = k$ ,  $\Psi_\tau\left(\frac{1}{2}\right) = -k$ ,  $\Psi_\tau\left(\frac{\tau+1}{2}\right) = k\alpha$  y  $\Psi_\tau\left(\frac{\tau}{2}\right) = -k\alpha$  con  $0 < k \leq 1$ , donde  $\{k, -k, k\alpha, -k\alpha\}$  son los vértices del disfenoide esférico  $\Theta_\tau$ .

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 1.11 la función  $\widehat{\Psi}_\tau$  manda los vértices de  $\Omega_\tau$  a los vértices del disfenoide esférico  $\Theta_\tau$ . Por definición de la función  $\widehat{\Psi}_\tau$  tenemos que  $\widehat{\Psi}_\tau(\pi(0)) = k$ ,  $\widehat{\Psi}_\tau\left(\pi\left(\frac{1}{2}\right)\right) = -k$ ,  $\widehat{\Psi}_\tau\left(\pi\left(\frac{\tau+1}{2}\right)\right) = k\alpha$  y  $\widehat{\Psi}_\tau\left(\pi\left(\frac{\tau}{2}\right)\right) = -k\alpha$ . Como el diagrama (11) conmuta obtenemos el resultado para la función  $\Psi_\tau$ .

Si  $f$  es la simetría del disfenoide euclidean  $\Omega_\tau$  que se realiza por una rotación y deja fijo los puntos medios  $\pi\left(\frac{1}{2}\right)$  y  $\pi\left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{4}\right)$ , por la Proposición 1.25 la función  $g = \widehat{\Psi}_\tau \circ f \circ \widehat{\Psi}_\tau^{-1}$  es una simetría del disfenoide esférico e intercambia los vértices  $k$  con  $-k$  y  $k\alpha$  con  $-k\alpha$ . Así la función  $g$  esta dada por  $g(z) = -z$ . Como la función  $g$  deja fijo los valores  $0$  e  $\infty$  y la función  $\widehat{\Psi}_\tau \circ f \circ \widehat{\Psi}_\tau^{-1}$  deja fijo los valores  $\widehat{\Psi}_\tau\left(\pi\left(\frac{1}{4}\right)\right)$  y  $\widehat{\Psi}_\tau\left(\pi\left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{4}\right)\right)$ , entonces dichos valores coinciden. Por lo tanto  $\widehat{\Psi}_\tau\left(\pi\left(\frac{1}{4}\right)\right) = 0$ ,  $\widehat{\Psi}_\tau\left(\pi\left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{4}\right)\right) = \infty$  y por el diagrama (11) obtenemos el resultado para  $\Psi_\tau$ . De manera análoga los valores  $\{\pi\left(\frac{\tau}{4}\right), \pi\left(\frac{\tau+1}{4}\right), \pi\left(\frac{\tau}{4} + \frac{1}{2}\right), \pi\left(\frac{\tau+1}{4} + \frac{\tau}{4}\right)\}$  son los puntos medios del disfenoide  $\Omega_\tau$  y son enviados por  $\widehat{\Psi}_\tau$  a los correspondientes puntos medios de  $\Theta_\tau$  distintos de  $0$  e  $\infty$ . Por el Teorema 1.26 y el diagrama (11) tenemos que

$$\left|\Psi_\tau\left(\frac{\tau}{4}\right)\right| = \left|\Psi_\tau\left(\frac{\tau+1}{4}\right)\right| = \left|\Psi_\tau\left(\frac{\tau}{4} + \frac{1}{2}\right)\right| = \left|\Psi_\tau\left(\frac{\tau+1}{4} + \frac{1}{2}\right)\right| = 1.$$

□

PROPOSICIÓN 1.28. Sea  $\tau \in \mathfrak{M}$  donde  $\tau = \frac{1}{2} + ir$ . Si la función  $g$  es una simetría de  $\Omega_\tau$  que se realiza por una reflexión, entonces la función  $\widehat{\Psi}_\tau \circ g \circ \widehat{\Psi}_\tau^{-1}$  está dada por  $\bar{z}$  o  $-\bar{z}$ .

DEMOSTRACIÓN. Llamemos  $f = \widehat{\Psi}_\tau \circ g \circ \widehat{\Psi}_\tau^{-1}$ . Por el Lema 1.16 la función  $f$  está dada por la Ecuación (10) por ser anticonforme y biyectiva. Sabemos que la función  $g$  deja fijos los puntos medios dados por  $\pi\left(\frac{1}{4}\right)$  y  $\pi\left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{4}\right)$ . Por el Corolario 1.27 y el diagrama (11) tenemos que  $\widehat{\Psi}_\tau\left(\pi\left(\frac{1}{4}\right)\right) = 0$  y  $\widehat{\Psi}_\tau\left(\pi\left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{4}\right)\right) = \infty$ . Así

$$f(0) = \widehat{\Psi}_\tau \circ g \circ \widehat{\Psi}_\tau^{-1}(0) = \widehat{\Psi}_\tau \circ g\left(\pi\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \widehat{\Psi}_\tau\left(\pi\left(\frac{1}{4}\right)\right) = 0.$$

Análogamente  $f(\infty) = \infty$ . Entonces  $f$  queda de la forma

$$f(z) = \frac{a}{d} \bar{z}.$$

Si  $\{k, -k, k\alpha, -k\alpha\}$  son los vértices de  $\Theta_\tau$ , sabemos que la simetría  $g$  deja fijos los vértices  $k$  y  $-k$  o los intercambia. Si los deja fijos entonces  $f(k) = k$ , luego  $\frac{a}{d} = 1$  por lo que  $f(z) = \bar{z}$ . Si los intercambia  $f(k) = -k$  y  $\frac{a}{d} = -1$ . Así  $f(z) = -\bar{z}$ .  $\square$

LEMA 1.29. *Sea  $\tau$  un elemento de la región  $\mathfrak{M}$  tal que  $|\tau| = 1$  y  $m : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es la transformación afín compleja dada por  $m(z) = \frac{z}{\tau-1} + \frac{1}{1-\tau}$ . Si  $\tau' = \frac{1}{1-\tau}$ , entonces existe una transformación de Möbius  $m_2$  tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$(12) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{m} & \mathbb{C} \\ \Psi_\tau \downarrow & & \downarrow \Psi_{\tau'} \\ \Theta_\tau & \xrightarrow{m_2} & \Theta_{\tau'} \end{array}$$

Más aún, la transformación  $m_2$  manda vértices en vértices, puntos medios en puntos medios y aristas en aristas.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que la transformación  $m$  manda a los puntos  $0, 1$  y  $\tau$  a los valores  $\tau', 0$  y  $1$  respectivamente. Por el Corolario 1.5 la función  $\Psi_{\tau'} \circ m$  es una función elíptica con periodos  $-1$  y  $\tau-1$ . Además dichos puntos pertenecen a la retícula  $\langle 1, \tau \rangle$  y viceversa,  $1$  y  $\tau$  pertenecen a la retícula  $\langle -1, \tau-1 \rangle$ . Esto implica que  $\Psi_{\tau'} \circ m$  tiene periodos  $1$  y  $\tau$ , por lo que existe una transformación de Möbius  $m_1$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{m} & \mathbb{C} \\ \wp_\tau \downarrow & & \downarrow \Psi_{\tau'} \\ \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{m_1} & \Theta_{\tau'} \end{array}$$

Si  $h$  es la transformación de Möbius tal que  $\Psi_\tau = h \circ \wp_\tau$ , entonces  $h$  manda en orden el conjunto  $\{\wp_\tau(0), \wp_\tau(\frac{1}{2}), \wp_\tau(\frac{\tau+1}{2}), \wp_\tau(\frac{\tau}{2})\}$  en el conjunto de vértices del disfenode esférico  $\Theta_\tau$  dado por  $\{k, -k, k\alpha, -k\alpha\}$ . Si denotamos como  $\{k', -k', k'\alpha', -k'\alpha'\}$  los vértices del disfenode esférico  $\Theta_{\tau'}$ , el diagrama anterior nos muestra que la razón cruzada  $\chi(\wp_\tau(0), \wp_\tau(\frac{1}{2}), \wp_\tau(\frac{\tau+1}{2}), \wp_\tau(\frac{\tau}{2}))$  es igual a la razón cruzada  $\chi(k', -k'\alpha', -k', k'\alpha')$ . Además sabemos que la razón cruzada de los valores críticos de  $\wp_\tau$ , en ese orden, coinciden con  $\chi(k, -k, k\alpha, -k\alpha)$ . Por lo tanto  $\chi(k', -k'\alpha', -k', k'\alpha') = \chi(k, -k, k\alpha, -k\alpha)$  y por la Observación 1.12 existe una transformación de Möbius  $m_2$  tal que  $m_2(k) =$

$k'$ ,  $m_2(-k) = -k'\alpha'$ ,  $m_2(k\alpha) = -k'$  y  $m_2(-k\alpha) = k'\alpha'$ . Lo cual implica que el diagrama (12) conmuta y  $m_2$  manda vértices en vértices. Además por el Corolario 1.27 vemos que los puntos medios de las aristas del disfenoide esférico  $\Theta_\tau$  son enviados a los puntos medios de las aristas del disfenoide esférico  $\Theta_{\tau'}$ . Luego las aristas de  $\Theta_\tau$  son enviadas a las aristas de  $\Theta_{\tau'}$  con la transformación  $m_2$  ya que las transformaciones de Möbius mandan rectas y círculos en rectas o círculos por la Observación 1.12.  $\square$

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO 1.24. Para probar este resultado basta con demostrar que si  $\Omega_\tau$  es un disfenoide escaleno (isósceles o equilátero), entonces  $\Theta_\tau$  es un disfenoide escaleno (isósceles o equilátero).

Supongamos que  $\Omega_\tau$  es isósceles. Si  $\tau = \frac{1}{2} + ir$  y  $g$  la simetría por reflexión de  $\Omega_\tau$  que intercambia los vértices  $v_1 = \pi(0)$  y  $v_2 = \pi(\frac{1}{2})$  y deja fijo los vértices  $v_3 = \pi(\frac{\tau+1}{2})$  y  $v_4 = \pi(\frac{\tau}{2})$ . Por la Proposición 1.28  $f(z) := \widehat{\Psi}_\tau \circ g \circ \widehat{\Psi}_\tau^{-1}(z) = -\bar{z}$ . Además

$$f(k\alpha) = \widehat{\Psi}_\tau \circ g \circ \widehat{\Psi}_\tau^{-1}(k\alpha) = \widehat{\Psi}_\tau \circ g(v_3) = \widehat{\Psi}_\tau(v_3) = k\alpha.$$

Entonces  $-k\bar{\alpha} = k\alpha$ . Lo cual implica que  $\alpha$  es imaginario puro y  $\Theta_\tau$  es un disfenoide esférico isósceles.

Supongamos que  $|\tau| = 1$ , demostremos que las aristas del disfenoide esférico  $\Theta_\tau$  formadas por los vértices  $-k$  con  $-k\alpha$  y  $k$  con  $k\alpha$  son ortogonales. Consideremos la transformación de Möbius  $m : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada como

$$m(z) = \frac{z}{\tau - 1} + \frac{1}{1 - \tau}.$$

Denotemos por  $\tau' = \frac{1}{1-\tau}$ . Entonces  $\tau' = \frac{1}{2} + ir$  para algún real  $r$  ya que

$$Re(\tau') = Re\left(\frac{1}{1-\tau}\right) = Re\left(\frac{1}{1-\tau} \left(\frac{1-\bar{\tau}}{1-\bar{\tau}}\right)\right) = Re\left(\frac{1-\bar{\tau}}{2-2Re(\tau)}\right) = \frac{1}{2}.$$

Si  $\{k', -k', k'\alpha', -k'\alpha'\}$  son los vértices del disfenoide esférico  $\Theta_{\tau'}$ , el caso anterior nos muestra que  $\alpha'$  es imaginario puro y las aristas del disfenoide  $\Theta_{\tau'}$  formadas por los vértices  $k'$  con  $-k'$  y  $k'\alpha'$  con  $-k'\alpha'$  son ortogonales. Por el Lema 1.29 existe una transformación de Möbius  $m_2$  que manda las aristas de  $\Theta_\tau$  en las aristas de  $\Theta_{\tau'}$ . En particular, las aristas formadas por los vértices  $-k$  con  $-k\alpha$  y  $k$  con  $k\alpha$  son enviadas con  $m_2$  a las aristas formadas por  $-k'\alpha'$  con  $k\alpha$  y  $-k'$  con  $k'$  respectivamente. Por lo tanto las aristas mencionadas del disfenoide esférico  $\Theta_\tau$  son ortogonales y el disfenoide  $\Theta_\tau$  es isósceles.

Supongamos que  $\Omega_\tau$  es un disfenoide equilátero, entonces  $\tau = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$  y  $\tau$  cumple los dos casos anteriores, luego todas las aristas de  $\Theta_\tau$  son iguales y por lo tanto es un disfenoide esférico equilátero.

Supongamos que  $\Omega_\tau$  es un disfenoide escaleno. Si  $\Theta_\tau$  no es escaleno, entonces es un disfenoide isósceles o equilátero. En ambos casos tenemos al menos 2 aristas ortogonales. Sin pérdida de generalidad supongamos que las aristas ortogonales son las formadas por los vértices  $k$  con  $-k$  y  $-k\alpha$  con  $k\alpha$ . Entonces la transformación  $f(z) = \bar{z}$  es una simetría del disfenoide  $\Theta_\tau$ . Por la Proposición 1.28 la función  $\Psi_\tau^{-1} \circ f \circ \Psi_\tau$  es una simetría que invierte orientación, del disfenoide euclideo  $\Omega_\tau$ , lo cual es imposible ya que  $\Omega_\tau$  es un disfenoide escaleno. Por lo tanto  $\Theta_\tau$  es un disfenoide esférico escaleno.  $\square$

### 5. Propiedades geométricas de $\wp_\tau$ .

Sabemos que la función  $\widehat{\Psi}_\tau$  manda vértices en vértices y los puntos medios de las aristas de  $\Omega_\tau$  en los puntos medios de las aristas de  $\Theta_\tau$  (Teorema 1.11 y Corolario 1.27). Una pregunta natural que nos podemos hacer es si la función  $\widehat{\Psi}_\tau$  manda las aristas de  $\Omega_\tau$  en las aristas de  $\Theta_\tau$ . Lamentablemente la respuesta a esta pregunta es negativa. Así podemos preguntarnos

*¿Cuándo la función  $\widehat{\Psi}_\tau$  manda aristas del disfenoide  $\Omega_\tau$  en aristas del disfenoide  $\Theta_\tau$ ?*

Los siguientes resultados nos responden la pregunta. En adelante denotamos por  $v_1 = \pi(0)$ ,  $v_2 = \pi\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $v_3 = \pi\left(\frac{\tau+1}{2}\right)$  y  $v_4 = \pi\left(\frac{\tau}{2}\right)$  los vértices del disfenoide euclideo  $\Omega_\tau$  y por  $a_{ij}$  a la arista que une los vértices  $v_i$  con  $v_j$ .

PROPOSICIÓN 1.30. *Consideremos  $\tau$  en la región  $\mathfrak{M}$ .*

1. *Si  $\tau = ir$ , las aristas  $a_{12}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{34}$  y  $a_{41}$  del disfenoide euclideo  $\Omega_\tau$  son enviadas por  $\widehat{\Psi}_\tau$  a las correspondientes aristas del disfenoide esférico  $\Theta_\tau$ .*
2. *Si  $\tau = \frac{1}{2} + ir$ , las aristas  $a_{12}$  y  $a_{34}$  del disfenoide  $\Omega_\tau$  son enviadas por  $\widehat{\Psi}_\tau$  a las aristas correspondientes del disfenoide esférico  $\Theta_\tau$ .*
3. *Si  $|\tau| = 1$  y  $\tau \neq i$ , las aristas  $a_{13}$  y  $a_{24}$  del disfenoide  $\Omega_\tau$  son enviadas por  $\widehat{\Psi}_\tau$  a las aristas correspondientes del disfenoide esférico  $\Theta_\tau$ .*

Para realizar la demostración de la proposición anterior basta con realizar el siguiente análisis de la función  $\wp_\tau$  de Weierstrass. En estos resultados consideramos a la función  $\wp_\tau$  definida de  $\mathbb{C}$  a la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

PROPOSICIÓN 1.31. Si  $\tau \in \mathfrak{M}$  y  $\tau = ir$  o  $\tau = \frac{1}{2} + ir$ , entonces  $\wp_\tau(z) = \overline{\wp_\tau(\bar{z})}$ .

DEMOSTRACIÓN. De la expresión analítica de  $\wp_\tau$  tenemos que

$$\overline{\wp_\tau(z)} = \frac{1}{\bar{z}^2} + \sum_{\omega \in \langle 1, \tau \rangle^*} \left( \frac{1}{(\bar{z} - \bar{\omega})^2} - \frac{1}{\bar{\omega}^2} \right).$$

Como  $\tau = ir$  o  $\tau = \frac{1}{2} + ir$ , entonces  $\omega \in \langle 1, \tau \rangle$  si y solo si  $\bar{\omega} \in \langle 1, \tau \rangle$ . Como la serie en la expresión anterior es absolutamente convergente fuera de los polos tenemos que

$$\sum_{\omega \in \langle 1, \tau \rangle^*} \left( \frac{1}{(\bar{z} - \bar{\omega})^2} - \frac{1}{\bar{\omega}^2} \right) = \sum_{\omega \in \langle 1, \tau \rangle^*} \left( \frac{1}{(\bar{z} - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Por lo tanto  $\wp_\tau(\bar{z}) = \overline{\wp_\tau(z)}$ . □

PROPOSICIÓN 1.32. Las siguientes afirmaciones son ciertas para  $\tau \in \mathfrak{M}$  y  $\beta \in \mathbb{R}$ .

1. Si  $\tau = ir$  o  $\tau = \frac{1}{2} + ir$ , los valores  $\wp_\tau(\beta)$ ,  $\wp_\tau(i\beta)$  y  $\wp_\tau(\frac{1}{2} + i\beta)$  son reales.
2. Si  $\tau = ir$ , el valor  $\wp_\tau(\beta + i\frac{r}{2})$  es real.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar que dichos valores son reales basta con demostrar que son iguales a su conjugado. De la Proposición 1.31 es inmediato que  $\wp_\tau(\beta)$  es real. Sabemos que  $\wp_\tau$  cumple la igualdad  $\wp_\tau(z) = \wp_\tau(-z)$  y por la Proposición 1.31 tenemos que

$$\wp_\tau(i\beta) = \wp_\tau(-i\beta) = \wp_\tau(\overline{i\beta}) = \overline{\wp_\tau(i\beta)}.$$

Así  $\wp_\tau(i\beta)$  es real. Análogamente y utilizando la doble periodicidad de  $\wp_\tau$ , vemos que

$$\wp_\tau\left(\frac{1}{2} + i\beta\right) = \wp_\tau\left(-\frac{1}{2} + i\beta\right) = \wp_\tau\left(\frac{1}{2} - i\beta\right) = \wp_\tau\left(\overline{\frac{1}{2} + i\beta}\right) = \overline{\wp_\tau\left(\frac{1}{2} + i\beta\right)}.$$

Con esto concluimos la primera parte de la proposición. Para demostrar la segunda parte, utilizando la doble periodicidad de  $\wp_\tau$  obtenemos que  $\wp_\tau(\beta + i\frac{r}{2}) = \overline{\wp_\tau(\beta + i\frac{r}{2})}$ . Por lo tanto dichos valores serán reales. □

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 1.30. Si  $\tau = ir$ , de la Proposición 1.32 los valores  $\wp_\tau(\beta)$ ,  $\wp_\tau(i\beta)$ ,  $\wp_\tau(\frac{1}{2} + i\beta)$  y  $\wp_\tau(\beta + i\frac{r}{2})$  son reales para todo  $\beta \in \mathbb{R}$ . Entonces los lados del rectángulo formado por los vértices  $0$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\tau+1}{2}$  y  $\frac{\tau}{2}$  son enviados por  $\wp_\tau$  al eje real incluyendo los vértices. En particular vemos que los puntos  $\wp_\tau(0)$ ,  $\wp_\tau(\frac{1}{4})$  y  $\wp_\tau(\frac{1}{2})$  son reales. Por el Corolario 1.27 sabemos que  $\Psi_\tau(0)$ ,  $\Psi_\tau(\frac{1}{4})$  y  $\Psi_\tau(\frac{1}{2})$  son reales. Como  $\Psi_\tau = h \circ \wp_\tau$ , donde  $h$  es una transformación de Möbius, entonces

$h$  envía el eje real en el eje real ya que las transformaciones de Möbius mandan círculos y rectas en círculos o rectas (ver Observación 1.12). Del diagrama (11) vemos que las aristas  $a_{12}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{34}$  y  $a_{41}$  son enviadas por  $\widehat{\Psi}_\tau$  a las correspondientes aristas del disfenoide esférico  $\Theta_\tau$ . Con esto concluimos la primera parte de la proposición.

Si  $\tau = \frac{1}{2} + ir$ , de manera análoga al caso anterior tenemos que la arista  $a_{12}$  del disfenoide  $\Omega_\tau$  es enviada por  $\widehat{\Psi}_\tau$  a la arista correspondiente de  $\Theta_\tau$ . Como la función  $\widehat{\Psi}_\tau$  induce una simetría del disfenoide esférico conjugando una simetría del disfenoide euclideando (ver Corolario 1.24), entonces la arista  $a_{34}$  será enviada por  $\widehat{\Psi}_\tau$  a la arista correspondiente del disfenoide  $\Theta_\tau$ .

Si  $|\tau| = 1$  la transformación  $m(z) = \frac{z}{\tau-1} + \frac{1}{1-\tau}$  manda los puntos  $\{0, 1, \tau\}$  en los puntos  $\{\tau', 0, 1\}$ , donde  $\tau' = \frac{1}{1-\tau} = \frac{1}{2} + ir$  (Lema 1.29). Por el inciso anterior sabemos que las aristas  $a_{13}$  y  $a_{24}$  son enviadas por la función  $\widehat{\Psi}_{\tau'} \circ m$  a las respectivas aristas de  $\Theta_{\tau'}$ . Por el Lema 1.29 existe una transformación de Möbius  $m_0$  tal que  $\Psi_{\tau'} \circ m = m_0 \circ \Psi_\tau$ . Por lo tanto las aristas  $a_{13}$  y  $a_{24}$  son enviadas a las respectivas aristas de  $\Theta_\tau$  por la función  $\widehat{\Psi}_\tau$ .  $\square$

La Proposición 1.30 nos muestra que si  $\tau = ir$ ,  $\tau = \frac{1}{2} + ir$  o  $|\tau| = 1$ , la función  $\widehat{\Psi}_\tau$  manda algunas aristas del disfenoide  $\Omega_\tau$  en las respectivas aristas del disfenoide  $\Theta_\tau$ . Los siguientes resultados nos muestran que el recíproco de dicha proposición es cierto.

LEMA 1.33. *Si la función  $\wp_\tau$  manda los reales en los reales, entonces  $\tau = ir$  o  $\tau = \frac{1}{2} + ir$ .*

DEMOSTRACIÓN. Como  $\wp_\tau$  manda los reales en los reales entonces  $\wp_\tau(z) = \overline{\wp_\tau(\bar{z})}$  para todo  $z$  en  $\mathbb{R}$ . Utilizando la expresión analítica de la función  $\wp_\tau$  tenemos que  $\wp_\tau(z) = \wp_{\bar{\tau}}(z)$  para todo  $z \in \mathbb{R}$ . Por el teorema de identidad para funciones holomorfas, esta igualdad es cierta para todo  $z \notin \langle 1, \tau \rangle$ , esto es, fuera de los polos. Por lo tanto, si  $z$  es un polo entonces  $\bar{z}$  también lo será. En particular  $\bar{\tau} \in \langle 1, \tau \rangle$ , lo cual es cierto si y sólo si  $\tau = ir$  o  $\tau = \frac{1}{2} + ir$ .  $\square$

LEMA 1.34. *Si  $m$  es una transformación de Möbius tal que  $m \circ \wp_\tau$  manda los reales a los reales entonces  $\tau = ir$  o  $\tau = \frac{1}{2} + ir$ .*

DEMOSTRACIÓN. Si  $m \circ \wp_\tau$  manda los reales a los reales, entonces  $\overline{m \circ \wp_\tau(\bar{z})} = m \circ \wp_\tau(z)$ . Lo cual implica que

$$(13) \quad \wp_\tau(z) = h \circ \wp_\tau(\bar{z}),$$

donde  $h$  es un automorfismo anticonforme de la esfera. Por el Lema 1.16 sabemos que  $h(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ . Si evaluamos 0 en la Ecuación (13) vemos que  $h(\infty) = \infty$ . Por lo tanto podemos expresar a  $h$  como  $h(z) = a\bar{z} + b$ . Entonces

$$\wp_\tau(z) = h \circ \wp_\tau(\bar{z}) = \overline{a\wp_\tau(\bar{z})} + b = a\wp_{\bar{\tau}}(z) + b.$$

Esto implica que  $\wp_\tau$  y  $\wp_{\bar{\tau}}$  tienen los mismos polos, en particular  $\bar{\tau} \in \langle 1, \tau \rangle$ , lo cual pasa si y sólo si  $\tau = ir$  o  $\tau = \frac{1}{2} + ir$ .  $\square$

**TEOREMA 1.35.** *Si  $\widehat{\Psi}_\tau$  manda una arista de  $\Omega_\tau$  a una arista de  $\Theta_\tau$  entonces  $\tau = ir$ ,  $\tau = \frac{1}{2} + ir$  o  $|\tau| = 1$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $\widehat{\Psi}_\tau$  manda la arista  $a_{12}$  a la correspondiente arista de  $\Theta_\tau$ , entonces  $\Psi_\tau$  manda reales en reales. Por el Lema 1.34  $\tau = ir$  o  $\tau = \frac{1}{2} + ir$ .

Si  $\widehat{\Psi}_\tau$  manda la arista  $a_{41}$  a la arista correspondiente de  $\Theta_\tau$ , entonces  $\Psi_\tau$  manda la recta que pasa por 0 y  $\tau$  a un círculo máximo  $C$  en la esfera  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Por la Observación 1.12 existe una transformación de Möbius  $m'$  que manda la  $C$  al eje real. Si consideramos la transformación de Möbius  $m(z) = \frac{1}{\tau}z$ , ésta manda los puntos 0,  $\tau$  y 1 en los puntos 0, 1 y  $\frac{1}{\tau}$  respectivamente. Entonces, la función  $m' \circ \Psi_\tau \circ m^{-1}$  manda el eje real en el eje real. Además  $m' \circ \Psi_\tau \circ m^{-1}$  es una función elíptica con periodos 1 y  $\tau'$ , donde  $\tau' = \frac{1}{\tau}$ , ya que

$$m' \circ \Psi_\tau \circ m^{-1}(z+1) = m' \circ \Psi_\tau(\tau z + \tau) = m' \circ \Psi_\tau(\tau z) = m' \circ \Psi_\tau \circ m^{-1}(z),$$

$$m' \circ \Psi_\tau \circ m^{-1}(z + \tau') = m' \circ \Psi_\tau(\tau z + 1) = m' \circ \Psi_\tau(\tau z) = m' \circ \Psi_\tau \circ m^{-1}(z).$$

Entonces  $m' \circ \Psi_\tau \circ m^{-1} = g \circ \wp_{\tau'}$ , donde  $g$  es una transformación de Möbius (ver [6] pág. 99). Como  $m' \circ \Psi_\tau \circ m^{-1}$  manda el eje real en el eje real, entonces  $g \circ \wp_{\tau'}$  manda el eje real en el eje real. Por el Lema 13  $\tau' = ir$  o  $\tau' = \frac{1}{2} + ir$ , entonces el triángulo formado con los puntos 0, 1 y  $\tau'$  es isósceles o rectángulo. Luego podemos encontrar  $\tau_0 \in \mathfrak{M}$  que genere una retícula equivalente a la generada por 1 y  $\tau'$  y además  $\tau_0 = is$  o  $|\tau_0| = 1$ .

Si  $\widehat{\Psi}_\tau$  manda la arista  $a_{13}$  en la arista correspondiente de  $\Theta_\tau$ , el resultado es análogo al caso anterior.  $\square$



## Capítulo 2

### Disfenoides isósceles y rectángulos.

En este capítulo utilizamos el concepto de longitud extrema para analizar la correspondencia entre los disfenoides euclidianos y los disfenoides esféricos antes mencionada. Utilizamos el hecho de que la métrica extrema de la familia de curvas  $\Gamma$  que unen las componentes fronteras de un anillo es la métrica plana (ver Ejemplo 2.2). El análisis se divide en tres casos, dependiendo de las simetrías de los disfenoides.

#### 1. Método de la longitud extrema.

Consideremos  $U \subset \mathbb{C}$  un subconjunto abierto y  $\rho(z)|dz|$  una métrica de Riemann en  $U$ , con  $\rho : U \rightarrow [0, \infty)$ , continua. Recordemos que la  $\rho$ -longitud para una curva diferenciable en  $U$  está definida como

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho(z)|dz|.$$

Además la  $\rho$ -área esta dada por

$$area_\rho(U) = \iint_U \rho(z)^2 dx dy,$$

donde  $z = x + iy$ . Con esto podemos definir la  $\rho$ -longitud de una familia de curvas sobre  $U$  y la *longitud extrema* sobre la familia de curvas mencionada.

DEFINICIÓN 2.1. Sea  $\Gamma$  una familia de curvas diferenciables sobre  $U$ . Definimos la *longitud extrema* de  $(U, \Gamma)$  como

$$(14) \quad \lambda(\Gamma) = \sup_\rho \frac{\ell_\rho(\Gamma)^2}{area_\rho(U)},$$

donde  $\ell_\rho$  es la  $\rho$ -longitud de  $\Gamma$  dada por

$$\ell_\rho(\Gamma) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \ell_\rho(\gamma).$$

El supremo en la ecuación (14) se toma sobre todas las métricas cuya  $\rho$ -área es no nula. Una métrica  $\rho_0$  se llama *métrica extrema* si realiza el supremo en la ecuación (14). El problema de la existencia y unicidad de la métrica extrema es difícil en general. Sin embargo en el caso de un anillo  $U$  es posible probar que la métrica extrema es la métrica plana.

**EJEMPLO 2.2.** Consideremos el anillo  $\mathcal{A}_R = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq R\}$ . Si definimos  $\Gamma$  como la familia de curvas que unen las fronteras del anillo  $\partial B_1(0)$  y  $\partial B_R(0)$ , entonces

$$\lambda(\Gamma) = \frac{\ln(R)}{2\pi}.$$

Además la métrica extrema está dada por la métrica plana  $\rho_0(z) |dz| = \frac{|dz|}{2\pi|z|}$ , es decir  $\rho_0(z) = \frac{1}{2\pi|z|}$ .

**DEMOSTRACIÓN.** La función  $g(z) = e^{2\pi z}$  es un biholomorfismo entre el rectángulo  $Q = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(z) < M, 0 < \operatorname{Im}(z) < i\}$  con vértices  $\{0, M, M + i, i\}$  y el anillo  $\mathcal{A}_R$ , donde  $M = \frac{\ln(R)}{2\pi}$ . Si  $z \in Q$  y  $T_z Q$  es el plano tangente de  $Q$  sobre el punto  $z$ , consideremos  $\varsigma_1, \varsigma_2 \in T_z Q$  y  $\rho(z)|dz|$  la métrica en  $\mathcal{A}_R$  que se obtiene al empujar con  $g$  la métrica plana  $|dz|$  en  $Q$ , entonces

$$\varsigma_1 \cdot \varsigma_2 = \langle g'(z)\varsigma_1, g'(z)\varsigma_2 \rangle_\rho = \rho^2(g(z))|g'(z)|^2(\varsigma_1 \cdot \varsigma_2).$$

Así  $\rho(w) = |g'(z)|^{-1} = \frac{1}{2\pi|w|}$ , donde  $w = e^{2\pi z}$ . Por lo tanto  $g$  es una isometría de  $Q$  en  $\mathcal{A}_R$  donde  $Q$  esta equipado con la métrica euclídeana  $|dz|$  y  $\mathcal{A}_R$  con la métrica  $\rho_0(w)|dw|$ . Es inmediato ver que dado  $\gamma \in \Gamma'$ , donde  $\Gamma'$  es la familia de curvas que unen los lados laterales del rectángulo  $Q$ , entonces la curva  $g \circ \gamma$  pertenece a la familia  $\Gamma$ . Recíprocamente, si  $\gamma$  es una curva en  $\Gamma$  distinta del segmento que une 1 con  $R$ , entonces  $g^{-1} \circ \gamma$  es una curva en la familia  $\Gamma'$ . Esto implica que  $\ell_{\rho_0}(\Gamma) = \ell_{\text{euc}}(\Gamma') = M$ . Además por el teorema de cambio de variable  $\text{area}_{\rho_0}(\mathcal{A}_R) = \text{area}_{\text{euc}}(Q) = M$ . Así

$$\frac{\ell_{\rho_0}(\Gamma)^2}{\text{area}_{\rho_0}(\mathcal{A}_R)} = \frac{\ln(R)}{2\pi},$$

luego  $\frac{\ln(R)}{2\pi} \leq \lambda(\Gamma)$ . Consideremos  $\rho(w) |dw|$  una métrica en  $\mathcal{A}_R$  arbitraria. Si aplicamos el cambio de variable dado por  $g$  en la integral  $\text{area}_{\rho_0}(\mathcal{A}_R)$ , entonces

$$\iint_{\mathcal{A}_R} \rho(z)^2 dx dy = \iint_Q (2\pi e^{2\pi x})^2 \rho(e^{2\pi z})^2 dx dy.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\int_0^M (2\pi e^{2\pi y})^2 \rho(e^{-2\pi iz})^2 dx \geq \frac{1}{M} \left( \int_0^M (2\pi e^{2\pi y}) \rho(e^{-2\pi iz}) dx \right)^2.$$

Si definimos la curva  $\gamma_y(x) = g(x + iy)$ , aplicando el teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_Q (2\pi e^{2\pi x})^2 \rho(e^{2\pi z})^2 dx dy &= \int_0^1 \left( \int_0^M (2\pi e^{2\pi x})^2 \rho(e^{-2\pi iz})^2 dx \right) dy \\ &\geq \int_0^1 \frac{1}{M} \left( \int_0^M (2\pi e^{2\pi x}) \rho(e^{-2\pi iz}) dx \right)^2 dy \\ &= \frac{1}{M} \int_0^1 \left( \int_{\gamma_y} \rho(w) |dw| \right)^2 dy \\ &= \frac{1}{M} \int_0^1 \ell_\rho^2(\gamma_y) dy \\ &\geq \frac{1}{M} \int_0^1 \ell_\rho^2(\Gamma) dy = \frac{\ell_\rho^2(\Gamma)}{M}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$M \geq \frac{\ell_\rho^2(\Gamma)}{\text{area}_\rho(\mathcal{A}_R)},$$

lo cual implica que  $M \geq \lambda(\Gamma)$ . Así concluimos que  $\lambda(\Gamma) = M$  y además  $\rho_0$  es la métrica extrema.  $\square$

En el siguiente resultado podemos ver la importancia que tiene la longitud extrema.

**PROPOSICIÓN 2.3.** *La longitud extrema es un invariante conforme de  $(U, \Gamma)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Consideremos  $U$  y  $V$  subconjuntos abiertos de  $\mathbb{C}$  y familias de curvas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  en  $U$  y en  $V$  respectivamente. Sea  $g : U \rightarrow V$  una función conforme, biyectiva y además  $g$  manda de manera biyectiva a la familia de curvas  $\Gamma_1$  en la familia de curvas  $\Gamma_2$ . Demostremos que  $\lambda(\Gamma_1) = \lambda(\Gamma_2)$ . Como  $g$  es conforme la diferencial  $dg_z = \lambda_z A_z$ , donde  $A_z$  es una matriz ortogonal y  $\lambda_z = \sqrt{|Jac(g)(z)|}$ . Además para todo  $\zeta_1, \zeta_2$  en el tangente  $T_z U$ , si  $\rho'(w)|dw|$  es una métrica en  $V$ , existe una métrica  $\rho(z)|dz|$  en  $U$  la cual cumple que

$$\begin{aligned}
\rho(z)^2(\mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2) &= \langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \rangle_\rho = \langle dg_z(\mathcal{S}_1), dg_z(\mathcal{S}_2) \rangle_{\rho'} = \langle \lambda_z A_z \mathcal{S}_1, \lambda_z A_z \mathcal{S}_2 \rangle_{\rho'} \\
&= |\lambda_z|^2 \langle A_z \mathcal{S}_1, A_z \mathcal{S}_2 \rangle_{\rho'} \\
&= |\lambda_z|^2 \langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \rangle_{\rho'} = \rho'(g(z))^2 |\lambda_z|^2 (\mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2).
\end{aligned}$$

Así

$$(15) \quad \rho(z) = \rho'(g(z)) |\lambda_z|.$$

Utilizando el teorema de cambio de variable, si  $\gamma_1$  pertenece a  $\Gamma_1$  entonces

$$(16) \quad \ell_\rho(\gamma_1) = \ell_{\rho'}(g \circ \gamma_1)$$

$$(17) \quad \text{area}_\rho(U) = \text{area}_{\rho'}(V).$$

Como  $g$  es biyectiva, de las ecuaciones (15), (16) y (17) tenemos que  $\lambda(\Gamma_1) = \lambda(\Gamma_2)$ . Por lo tanto  $\lambda$  es un invariante conforme.  $\square$

OBSERVACIÓN 2.4. Si  $\Gamma^*$  es la familia de curvas cerradas en  $\mathcal{A}_R$  que separan las fronteras, entonces

$$\lambda(\Gamma^*) = \frac{2\pi}{\ln(R)}.$$

Lo cual implica que

$$\lambda(\Gamma) = \frac{1}{\lambda(\Gamma^*)}.$$

Además, la métrica extrema es la misma obtenida para la familia  $\Gamma$ , esto es,  $\rho_0(z)|dz| = \frac{|dz|}{2\pi|z|}$ .

La Observación 2.4 es un resultado análogo al Ejemplo 2.2. Utilizando la función conforme  $g(z) = e^{2\pi z}$  vemos que las curvas que unen los segmentos horizontales del rectángulo  $Q$  del Ejemplo 2.2, son enviadas por  $g$  a la familia de curvas  $\Gamma^*$ .

Un dominio doblemente conexo  $D$  en una superficie de Riemann  $S$  es un conjunto abierto y conexo tal que  $S \setminus D$  está formado por exactamente dos componentes conexas disjuntas  $E_1$  y  $E_2$ . Un *anillo*  $D$  es un dominio doblemente conexo tal que  $E_1$  y  $E_2$  no son un solo punto. El siguiente resultado nos muestra la relación que tienen estos anillos con los anillos  $\mathcal{A}_R$ .

PROPOSICIÓN 2.5. *El anillo  $D$  es conformemente equivalente con un anillo  $\mathcal{A}_R$  para algún  $R \in (1, +\infty)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ver [8] pág. 63. □

Para un anillo  $D$ , si  $\Gamma$  es la familia de curvas que unen puntos de las componentes  $E_1$  y  $E_2$ , definimos el *módulo* del anillo  $D$  como la longitud extrema de la familia de curvas  $\Gamma$  y lo denotamos como  $M(D)$ .

Consideremos  $\tau \in \mathfrak{M}$  y el disfenode esférico  $\Theta_\tau$ . Sean  $E_1$  y  $E_2$  las imágenes por  $\widehat{\Psi}_\tau$  de las aristas  $a_{12}$  y  $a_{34}$  respectivamente del disfenode  $\Omega_\tau$ . Es inmediato ver que  $\mathcal{A}_\tau := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{E_1 \cup E_2\}$  y el conjunto  $\Omega_\tau \setminus \{a_{12} \cup a_{34}\}$  son anillos.

DEFINICIÓN 2.6. El módulo del disfenode  $\Omega_\tau$  está dado por el módulo del anillo  $\Omega_\tau \setminus \{a_{12} \cup a_{34}\}$  y lo denotamos por  $M(\Omega_\tau)$ .

El Teorema 1.11 nos muestra que  $\Omega_\tau \setminus \{a_{12} \cup a_{34}\}$  es conformemente equivalente con el anillo  $\mathcal{A}_\tau$  y por la Proposición 2.5 tenemos que  $M(\Omega_\tau) = M(\mathcal{A}_\tau)$ . En las siguientes secciones analizamos el módulo del disfenode  $\Omega_\tau$  en los casos cuando  $E_1$  y  $E_2$  coinciden con las aristas del disfenode esférico  $\Theta_\tau$ .

## 2. Disfenoides rectángulos.

DEFINICIÓN 2.7. Consideremos  $\tau$  en la región  $\mathfrak{M}$ , decimos que  $\Omega_\tau$  es un disfenode rectángulo si  $\tau$  es imaginario puro, esto es  $\tau = ir$ . Si  $\Theta_\tau$  es el disfenode esférico inducido por la función  $\widehat{\Psi}_\tau$ , lo llamaremos disfenode esférico rectángulo.

En este caso tenemos un disfenode, el cual es un tetraedro degenerado, ya que el disfenode  $\Omega_\tau$  es el doble de un rectángulo.

PROPOSICIÓN 2.8. *Sea  $\Omega_\tau$  un disfenode rectángulo. Entonces los vértices  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  son enviados por  $\widehat{\Psi}_\tau$  respectivamente a los vértices  $\{k, -k, -\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\}$  del disfenode esférico  $\Theta_\tau$ .*

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar la proposición basta ver que los puntos  $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1+ir}{2}, i\frac{r}{2}\}$  son enviados por  $\Psi_\tau$  respectivamente a los vértices  $\{k, -k, -\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\}$  del disfenode esférico  $\Theta_\tau$ . Sea  $R$  la región en  $\mathbb{C}$  acotada por los segmentos de recta que unen  $0$  con  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$  con  $\frac{1}{2} + ir$ ,  $\frac{1}{2} + ir$  con  $ir$  e  $ir$  con  $0$ . Por la Proposición 1.32 la frontera de la región  $R$  es enviada por  $\Psi_\tau$  al eje real, en particular los vértices de  $\Theta_\tau$ ,  $\{k, -k, k\alpha, -k\alpha\}$  son reales. Entonces  $\alpha \in \mathbb{R}$  y la región  $R$  es enviada al semiplano inferior por  $\varphi_\tau$ , ya que en una vecindad de cero  $\varphi_\tau$  se comporta como la función  $\frac{1}{z}$ . Entonces evaluando el valor  $z = \varepsilon e^{i\frac{\pi}{4}} \in \Omega_\tau$  vemos que los valores de  $R$  cercanos a  $0$  son enviados al semiplano inferior. Si  $h$  es

la transformación de Möbius dada en el Corolario 1.27, podemos ver que  $h$  es un automorfismo del semiplano inferior, ya que tiene coeficientes reales y el determinante de los coeficientes es positivo. Entonces  $\Psi_\tau$  manda a  $R$  al semiplano inferior. Por lo tanto  $\Psi_\tau$  manda los puntos  $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1+ir}{2}, i\frac{r}{2}\}$  en los vértices  $\{k, -k, -k\alpha, k\alpha\}$  respectivamente si  $\alpha$  es positivo, y los manda a  $\{k, -k, k\alpha, -k\alpha\}$  si  $\alpha$  es negativo.

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\alpha$  es positivo. De la Definición 1.10 tenemos que  $d_{esf}(-k, k) = d_{esf}(-k\alpha, k\alpha)$  y  $d_{esf}(k, k\alpha) = d_{esf}(-k, -k\alpha)$ . Entonces  $k$  y  $-k\alpha$  son puntos antípodas en la esfera. Análogamente tenemos que  $-k$  y  $k\alpha$  son puntos antípodas. Utilizando la inversa de la proyección estereo-gráfica  $\phi$  tenemos que

$$\begin{aligned}\phi(k) &= \left( \frac{2k}{k^2 + 1}, 0, \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \right) \\ \phi(-k\alpha) &= \left( \frac{-2k\alpha}{k^2\alpha^2 + 1}, 0, \frac{k^2\alpha^2 - 1}{k^2\alpha^2 + 1} \right).\end{aligned}$$

Como dichos puntos son antípodas podemos ver que

$$\frac{2k}{k^2 + 1} = \frac{2k\alpha}{k^2\alpha^2 + 1}.$$

Despejando  $\alpha$  de la ecuación anterior obtenemos que  $\alpha = \frac{1}{k^2}$ , lo cual nos da el resultado.  $\square$

**TEOREMA 2.9.** Si  $\tau = ir$  y  $\chi = \chi\left(k, -k, -\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$  es la razón cruzada de los vértices de  $\Theta_\tau$ , entonces

$$\frac{(\arccos(1 - 2\chi))^2}{2\pi} \leq r \leq \frac{2\pi}{(\arccos(2\chi - 1))^2}.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Si denotamos por  $E_1, E_2, E_3$  y  $E_4$  a las aristas del disfenoide esférico  $\Theta_\tau$ , formadas por los vértices  $-k$  con  $k$ ,  $-\frac{1}{k}$  con  $\frac{1}{k}$ ,  $k$  con  $\frac{1}{k}$  y  $-k$  con  $-\frac{1}{k}$  respectivamente, entonces podemos definir los siguientes anillos,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{12} &= \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{E_1 \cup E_2\} \\ \mathcal{A}_{34} &= \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{E_3 \cup E_4\}\end{aligned}$$

Sean  $\Gamma_1^*$  y  $\Gamma_2^*$  las familias de curvas que unen las aristas del disfenoide euclideo  $\Omega_\tau$ ,  $a_{12}$  con  $a_{34}$  y  $a_{23}$  con  $a_{41}$  respectivamente. Por la Proposición 2.3 vemos que

$$M(\mathcal{A}_{12}) = \lambda(\Gamma_1^*) = \frac{r}{2},$$

$$M(\mathcal{A}_{34}) = \lambda(\Gamma_2^*) = \frac{1}{2r}.$$

Si  $\Gamma_1$  es la familia de curvas en  $\widehat{\mathbb{C}}$  que unen puntos de la arista  $E_1$  con puntos de la arista  $E_2$  y  $\Gamma_2$  la familia de curvas que unen los puntos de la arista  $E_3$  con puntos de la arista  $E_4$ , entonces  $\widehat{\Psi}_r$  manda de manera biyectiva a las curvas de  $\Gamma_1^*$  con las curvas de  $\Gamma_1$  y las curvas de  $\Gamma_2^*$  con las curvas de  $\Gamma_2$  respectivamente. Así de la definición de longitud extrema y la Proposición 2.3 tenemos que

$$\frac{r}{2} = M(\mathcal{A}_{12}) \geq \frac{\ell_{esf}^2(\Gamma_1)}{4\pi}.$$

Análogamente

$$\frac{1}{2r} = M(\mathcal{A}_{34}) \geq \frac{\ell_{esf}^2(\Gamma_2)}{4\pi}.$$

Es inmediato de la Proposición 2.8 y de la ecuación (5) que

$$\begin{aligned} \ell_{esf}(\Gamma_1) &= d_{esf}\left(k, \frac{1}{k}\right) = \arccos\left(\frac{4k^2 - (1 - k^2)^2}{(1 + k^2)^2}\right) \\ \ell_{esf}(\Gamma_2) &= d_{esf}(-k, k) = \arccos\left(\frac{(1 - k^2)^2 - 4k^2}{(1 + k^2)^2}\right). \end{aligned}$$

De las desigualdades anteriores obtenemos que

$$\frac{d_{esf}^2\left(k, \frac{1}{k}\right)}{2\pi} \leq r \leq \frac{2\pi}{d_{esf}^2(-k, k)}.$$

De la definición de razón cruzada  $\chi = \left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2$ , entonces

$$\frac{4k^2 - (1 - k^2)^2}{(1 + k^2)^2} = 1 - 2\chi.$$

Sustituyendo este valor en la desigualdad anterior obtenemos el resultado.  $\square$

Consideremos el disfenoido esférico rectángulo  $\Theta_r$  con vértices  $\{k, -k, -\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\}$ . En este caso las componentes  $E_1$  y  $E_2$  del anillo  $\mathcal{A}_r$  son las aristas de  $\Theta_r$  formadas por los vértices  $k$  con  $-k$  y  $-\frac{1}{k}$  con  $\frac{1}{k}$  respectivamente. Si  $\chi = \chi\left(k, -k, -\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$  es la razón cruzada de los vértices del disfenoido  $\Theta_r$ , Ahlfors muestra que la desigualdad

$$(18) \quad \frac{16\chi}{1-\chi} \leq e^{2\pi M(\Omega_\tau)} \leq \frac{16}{1-\chi}$$

se cumple para el módulo de un disfenoido rectángulo  $\Omega_\tau$  (ver [11] pág. 76). Su demostración es una estimación a partir de una expresión de  $\chi$  como un producto infinito. G. D. Anderson et al, obtienen una cota superior para el módulo de un disfenoido rectángulo (ver [5] pág 177), la cual esta dada por

$$(19) \quad e^{2\pi M(\Omega_\tau)} \leq \left( 2\sqrt{\frac{1}{1-\chi}} + 2\sqrt{\frac{\chi}{1-\chi}} \right)^2.$$

Esta cota es obtenida haciendo un análisis del invariante conforme llamado *capacidad*. El siguiente resultado se obtiene inmediato del Teorema 2.9.

**COROLARIO 2.10.** *Sea  $\tau = ir$  en la región  $\mathfrak{M}$  y  $\chi = \chi\left(k, -k, -\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$  la razón cruzada de los vértices de  $\Theta_\tau$ , entonces*

$$e^{\left(\frac{(\arccos(1-2\chi))^2}{2}\right)} \leq e^{2\pi M(\Omega_\tau)} \leq e^{\left(\frac{2\pi^2}{(\arccos(2\chi-1))^2}\right)}.$$

En la Figura 1 vemos una comparación, hecha en el programa Maple, de las cotas obtenidas en el Corolario 2.10 y las obtenidas por Ahlfors. Solo cuando  $\chi$  es muy pequeño las cotas obtenidas en el Corolario 2.10 son mejores que las cotas de Ahlfors en la desigualdad (18).

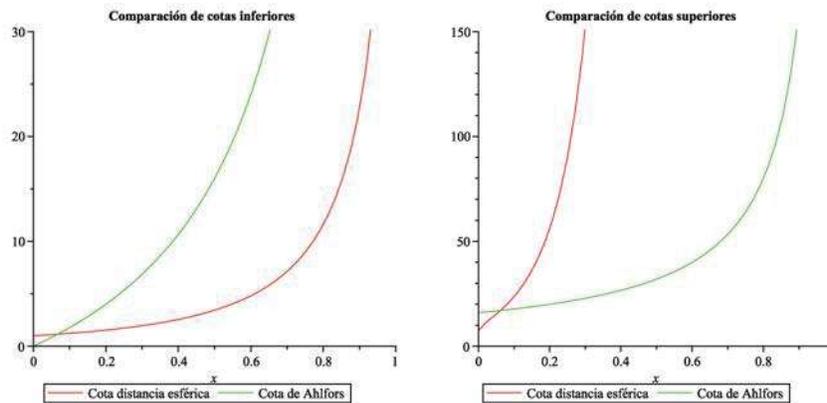


FIGURA 1. Gráficas de comparación de cotas dadas en la desigualdad (18) y el Corolario 2.10

Concluimos esta sección comparando las 3 cotas superiores obtenidas en el Corolario 2.10, la desigualdad (18) y la desigualdad (19). Como vemos en la Figura 2 la cota de G. D. Anderson et al supera incluso a la cota de Ahlfors.

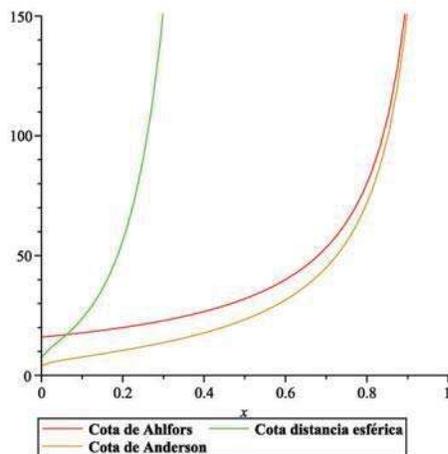


FIGURA 2. Gráfica de comparación de las cotas superiores.

### 3. Disfenoides isósceles.

En el capítulo anterior dimos la definición de disfenoides euclideo isósceles y disfenoides esférico isósceles. En esta sección realizamos un análisis del módulo de dichos disfenoides cuando  $\tau = \frac{1}{2} + ir$ .

**PROPOSICIÓN 2.11.** *Los vértices  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  del disfenoides isósceles  $\Omega_\tau$  son enviados por  $\widehat{\Psi}_\tau$  respectivamente a los vértices  $\{k, -k, \frac{i}{k}, -\frac{i}{k}\}$  o  $\{k, -k, -\frac{i}{k}, \frac{i}{k}\}$  del disfenoides esférico  $\Theta_\tau$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Denotemos por  $\{k, -k, k\alpha, -k\alpha\}$  a los vértices del disfenoides esférico  $\Theta_\tau$ . De la Proposición 1.28 vemos que la función  $f(z) = \bar{z}$  es una simetría del disfenoides esférico  $\Theta_\tau$ . Dicha simetría deja fijos los vértices  $k$  y  $-k$  por ser valores reales, pero intercambia los vértices  $k\alpha$  con  $-k\alpha$ . Entonces

$$k\alpha = f(-k\alpha) = \overline{-k\alpha} = -k\bar{\alpha}.$$

De la ecuación anterior obtenemos que  $\alpha + \bar{\alpha} = 0$ , por lo que  $\alpha$  es imaginario puro. Supongamos que  $\alpha = i\beta$ , donde  $\beta$  es un real distinto de cero. Por el Lema 1.15  $k = \pm|\alpha|^{-\frac{1}{2}}$ , entonces  $k = \pm|\beta|^{-\frac{1}{2}}$ . Despejando esta ecuación tenemos que  $\beta = \pm\frac{1}{k^2}$ . Por lo tanto  $\alpha = \pm\frac{i}{k^2}$ , lo cual nos da el resultado.  $\square$

PROPOSICIÓN 2.12. Sea  $\tau = \frac{1}{2} + ir$  en la región  $\mathfrak{M}$  y  $\{k, -k, \frac{i}{k}, -\frac{i}{k}\}$  los vértices del disfenoides esférico isósceles  $\Theta_\tau$ . Si  $\Gamma$  es la familia de curvas en la esfera que unen las aristas formadas por los vértices  $-k$  con  $k$  y  $-\frac{i}{k}$  con  $\frac{i}{k}$  y  $\Gamma^*$  es la familia de curvas cerradas que separan dichas aristas, entonces

$$\begin{aligned}\ell_{esf}(\Gamma) &= d_{esf}\left(k, \frac{i}{k}\right). \\ \ell_{esf}(\Gamma^*) &= 2d_{esf}(-k, k).\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Demostremos la primera igualdad. Si  $P$  y  $Q$  son puntos en las aristas formadas por los vértices  $-\frac{i}{k}$  con  $\frac{i}{k}$  y  $-k$  con  $k$  respectivamente, entonces  $P = i\frac{s}{k}$ , donde  $s \leq -1$  ó  $1 \leq s$  y  $Q = tk$  con  $-1 \leq t \leq 1$ . Por la simetría de las aristas podemos suponer  $1 \leq s$  y  $0 \leq t \leq 1$ . De la ecuación (5) obtenemos que

$$d_{esf}(P, Q) = \arccos\left(\frac{(k^2 - s^2)(1 - t^2k^2)}{(k^2 + s^2)(1 + t^2k^2)}\right).$$

Consideremos las funciones  $f(s) = \frac{k^2 - s^2}{k^2 + s^2}$  y  $g(t) = \frac{1 - t^2k^2}{1 + t^2k^2}$ , donde  $1 \leq s$  y  $0 \leq t \leq 1$ . Analizando las derivadas de las funciones  $f$  y  $g$  vemos que ambas funciones son decrecientes en sus correspondientes dominios. Así obtenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}\frac{k^2 - s^2}{k^2 + s^2} &\leq \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \\ \frac{1 - k^2}{1 + k^2} &\leq \frac{1 - t^2k^2}{1 + t^2k^2}.\end{aligned}$$

Como  $k \leq 1$ , los valores de la primera desigualdad son negativos, mientras que los valores de la segunda desigualdad son positivos. Entonces

$$\frac{(k^2 - s^2)(1 - t^2k^2)}{(k^2 + s^2)(1 + t^2k^2)} \leq \frac{(k^2 - 1)(1 - k^2)}{(k^2 + 1)(1 + k^2)}.$$

Aplicando la función  $\arccos$ , la cual es decreciente, obtenemos que  $d_{esf}\left(k, \frac{i}{k}\right) \leq d_{esf}(P, Q)$  para todo valor  $1 \leq s$  y  $0 \leq t \leq 1$ . Por lo tanto  $\ell_{esf}(\Gamma) = d_{esf}\left(k, \frac{i}{k}\right)$ .

□

TEOREMA 2.13. Consideremos  $\Omega_\tau$  un disfenoides isósceles con  $\tau = \frac{1}{2} + ir$ . Si  $\{k, -k, \frac{i}{k}, -\frac{i}{k}\}$  son los vértices del disfenoides esférico  $\Theta_\tau$ , entonces

$$\frac{d_{esf}^2\left(k, \frac{i}{k}\right)}{2\pi} \leq r \leq \frac{2\pi}{d_{esf}^2(-k, k)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean  $E_1$  y  $E_2$  las aristas del disfenoide  $\Theta_\tau$  que unen los vértices  $-k$  con  $k$  y  $-\frac{i}{k}$  con  $\frac{i}{k}$  respectivamente. Por la Proposición 1.30 la función  $\widehat{\Psi}_\tau$  manda las aristas  $a_{12}$  y  $a_{34}$  del disfenoide  $\Omega_\tau$  a las aristas  $E_1$  y  $E_2$  del disfenoide esférico  $\Theta_\tau$  respectivamente. Entonces  $\mathcal{A}_\tau = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_1 \cup E_2$  y

$$\frac{r}{2} = M(\Omega_\tau) = M(\mathcal{A}_\tau).$$

De la definición de longitud extrema y la Observación 2.4 tenemos que

$$\frac{\ell_{esf}^2(\Gamma)}{4\pi} \leq \frac{r}{2} \leq \frac{4\pi}{\ell_{esf}^2(\Gamma^*)},$$

donde  $\Gamma$  y  $\Gamma^*$  son las familias de curvas definidas en la Proposición 2.12. El resultado se obtiene despejando la desigualdad anterior y sustituyendo los valores de  $\ell_{esf}(\Gamma)$  y  $\ell_{esf}(\Gamma^*)$  dados en la Proposición 2.12.  $\square$

#### 4. Módulo de disfenoideos escalenos.

Si el disfenoide euclideo  $\Omega_\tau$  no es rectángulo o isósceles no podemos hacer comparaciones con la métrica esférica ya que  $\widehat{\Psi}_\tau$  no manda las aristas de  $\Omega_\tau$  en las aristas de  $\Theta_\tau$ . Sin embargo, si  $F_1$  y  $F_2$  son las aristas de  $\Theta_\tau$  que unen los vértices  $-k$  con  $k$  y  $-k\alpha$  con  $k\alpha$  respectivamente, entonces  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{F_1 \cup F_2\}$  es un anillo. Definamos el módulo de un disfenoide esférico  $\Theta_\tau$  como el módulo de dicho anillo al cual denotaremos por  $M(\Theta_\tau)$ .

Recordemos que el módulo de un disfenoide euclideo  $\Omega_\tau$  está definido como el módulo del anillo  $\mathcal{A}_\tau = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{E_1 \cup E_2\}$  donde  $E_1$  y  $E_2$  son las imágenes bajo  $\widehat{\Psi}_\tau$  de las aristas  $a_{12}$  y  $a_{34}$ . El siguiente teorema de Teichmüller nos dice como podemos relacionar el módulo de un disfenoide euclideo  $\Omega_\tau$  con el módulo de un disfenoide esférico.

TEOREMA 2.14 (Teichmüller). *Consideremos  $\tau$  en la región  $\mathfrak{M}$  y  $\Theta_\tau$  el disfenoide esférico inducido por  $\widehat{\Psi}_\tau$  cuyos vértices son  $\{k, -k, k\alpha, -k\alpha\}$ . Si  $\Theta(k)$  es el disfenoide esférico con vértices  $\{k, -k, -\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\}$ , entonces*

$$M(\Omega_\tau) \leq M(\Theta(k)).$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [11], pág. 72.  $\square$

El teorema anterior nos da una cota para el módulo de un disfenoido euclideo arbitrario. A continuación enunciamos un resultado que obtenemos de manera inmediata del teorema de Teichmüller.

**COROLARIO 2.15.** *Si  $\Omega_\tau$  es un disfenoido euclideo y  $\{k, -k, k\alpha, -k\alpha\}$  los vértices de  $\Theta_\tau$ , entonces*

$$M(\Omega_\tau) \leq \frac{\pi}{d_{esf}^2(-k, k)}.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Por el Teorema 2.14 sabemos que  $M(\Omega_\tau) \leq M(\Theta(k))$ , donde  $\Theta(k)$  es el disfenoido esférico con vértices  $\{k, -k, -\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\}$ . Sea  $\Gamma$  la familia de curvas cerradas que separan las aristas formadas por los vértices  $k$  con  $-k$  y  $\frac{1}{k}$  con  $-\frac{1}{k}$  respectivamente. Por definición de módulo de un disfenoido esférico y la Observación 2.4 sabemos que  $M(\Theta(k)) = \frac{1}{\lambda(\Gamma)}$ . Además

$$\lambda(\Gamma) \geq \frac{\ell_{esf}^2(\Gamma)}{4\pi} = \frac{4d_{esf}^2(-k, k)}{4\pi} = \frac{d_{esf}^2(-k, k)}{\pi}.$$

Invirtiendo la desigualdad anterior obtenemos que

$$M(\Theta(k)) \leq \frac{\pi}{d_{esf}^2(-k, k)}.$$

Por lo tanto se obtiene el resultado. □

Recordemos que la métrica esférica en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , inducida por la proyección estereográfica sobre la esfera de radio  $\frac{1}{2}$  y centro en  $(0, 0, \frac{1}{2})$  esta dada por

$$d_0(z, w) = \arctan \left| \frac{z - w}{1 + z\bar{w}} \right|,$$

para  $z, w \in \mathbb{C}$  y  $d_0(z, \infty) = \arctan \left| \frac{1}{z} \right|$ . Consideremos  $\tau$  en la región  $\mathfrak{M}$  y  $\{k, -k, k\alpha, -k\alpha\}$  los vértices de  $\Theta_\tau$ . O. Lehto y K.I. Virtanen demuestran que

$$(20) \quad M(\Omega_\tau) \leq \frac{\pi}{d_0^2(-k, k)},$$

(ver [12] p.34). Esta cota es muy parecida a la obtenida en el Corolario 2.15. Así podemos preguntarnos que relación tienen las métricas  $d_{esf}$  y  $d_0$ .

**OBSERVACIÓN 2.16.** Si  $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$ , entonces  $d_{esf}(z, w) = 2d_0(z, w)$ .

DEMOSTRACIÓN. Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ , de la Ecuación (5) tenemos que

$$\cos(d_{esf}(z, w)) = \frac{|1 + z\bar{w}|^2 - |z - w|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)} = \frac{|1 + z\bar{w}|^2 - |z - w|^2}{|1 + z\bar{w}|^2 + |z - w|^2}.$$

Si  $d_{esf}(z, w) = 2x$ , sabemos por identidades trigonométricas que

$$\cos(x) = \sqrt{\frac{\cos(2x) + 1}{2}} = \sqrt{\frac{|1 + z\bar{w}|^2}{|1 + z\bar{w}|^2 + |z - w|^2}} = \frac{|1 + z\bar{w}|}{\sqrt{|1 + z\bar{w}|^2 + |z - w|^2}}.$$

Como  $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$  obtenemos que

$$\sin(x) = \frac{|z - w|}{\sqrt{|1 + z\bar{w}|^2 + |z - w|^2}}.$$

Haciendo el cociente del seno entre el coseno de  $x$  obtenemos el resultado. Cuando un punto es infinito la demostración es análoga.  $\square$

La observación anterior nos indica que  $d_{esf}(z, w) \geq d_0(z, w)$  para todo  $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Esto nos da el siguiente resultado.

**COROLARIO 2.17.** *Consideremos  $\tau$  en la región  $\mathfrak{M}$  y  $\{k, -k, k\alpha, -k\alpha\}$  los vértices del disfenoide esférico  $\Theta_\tau$ , entonces*

$$\frac{\pi}{d_{esf}^2(-k, k)} \leq \frac{\pi}{d_0^2(-k, k)}.$$

El corolario anterior nos muestra que la cota del Corolario 2.15 es mejor que la cota dada por O. Lehto y K.I. Virtanen en la desigualdad (20).



## Apéndice A

### Proyección central

La primera función con la cuál se sugiere trabajar, para dar una correspondencia biyectiva entre un disenoide euclideo  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{S}^2$  es la proyección (central) desde el centro de  $\Omega$  a su esfera circunscrita. Es inmediato ver que dicha función no es conforme. Apesar de ésto dicha función tiene una interesante propiedad.

**TEOREMA A.1.** *Existe una función  $F$  tal que si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son las longitudes de los lados de un triángulo euclideo, entonces  $F(a)$ ,  $F(b)$  y  $F(c)$  son las longitudes de los lados de un triángulo esférico cuya suma de sus ángulos internos es  $2\pi$ .*

Para demostrar dicha propiedad utilizamos conceptos de geometría euclidea y esférica elemental.

Recordemos que la mediatriz de un segmento  $\overline{AB}$ , como lugar geométrico, es el conjunto de puntos  $X$  tales que  $|\overline{AX}| = |\overline{XB}|$ . Se deduce fácilmente que la mediatriz de un segmento  $\overline{AB}$  es la recta perpendicular a dicho segmento que pasa por su punto medio.

**PROPOSICIÓN A.2.** *Si  $ABCD$  es un disenoide euclideo con  $M$  y  $N$  puntos medios de  $\overline{AB}$  y  $\overline{DC}$  respectivamente, entonces la recta  $\ell$  que pasa por los puntos  $M$  y  $N$  es la mediatriz de los segmentos  $\overline{DC}$  y  $\overline{AB}$ . El punto medio del segmento  $\overline{MN}$  es el centro de la esfera circunscrita al disenoide.*

**DEMOSTRACIÓN.** Notemos que las longitudes de los segmentos  $\overline{DM}$  y  $\overline{CM}$  son iguales ya que son las medianas de los triángulos congruentes  $ADB$  y  $ACB$ . El triángulo  $DMC$  es isósceles y el segmento  $\overline{MN}$  es la mediana de dicho triángulo a la base, por lo tanto es perpendicular a  $\overline{DC}$ . De manera análoga podemos demostrar que  $\overline{MN}$  es perpendicular a  $\overline{AB}$ . Por lo tanto  $\ell$  es mediatriz de los segmentos  $\overline{DC}$  y  $\overline{AB}$ .

Es claro que el punto medio de  $\overline{MN}$  equidista de los 4 vértices por la definición de mediatriz. Por lo tanto el punto medio de  $\overline{MN}$  es el centro de la circunferencia circunscrita.  $\square$

**PROPOSICIÓN A.3.** *Sea  $ABC$  un triángulo con las longitudes de sus lados  $|AB| = c$ ,  $|BC| = a$  y  $|CA| = b$ . Si  $M$  es punto medio de  $\overline{BC}$  tenemos que*

$$|AM|^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

DEMOSTRACIÓN. Utilizando la ley cosenos en los triángulos  $AMC$  y  $AMB$  obtenemos las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} |AM|^2 &= b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ab \cos(\angle CMA) \\ |AM|^2 &= c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ac \cos(\angle BMA) \end{aligned}$$

Además  $\angle CMA + \angle BMA = \pi$ , entonces  $\cos(\angle CMA) = -\cos(\angle BMA)$ . Despejando el valor de  $\cos(\angle BMA)$  en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera obtenemos el resultado.  $\square$

PROPOSICIÓN A.4. *El radio  $R$  de la esfera circunscrita al disenoide  $ABCD$ , con las longitudes de sus aristas  $a$ ,  $b$  y  $c$  es*

$$R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Llamemos  $M$  y  $N$  a los puntos medios de las aristas  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  respectivamente. Aplicando la Proposición A.3 al triángulo  $ABD$  con la mediana  $\overline{DM}$  obtenemos que

$$(21) \quad |DM|^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

Además si  $O$  es el punto medio de  $\overline{MN}$  entonces  $O$  es el centro de la esfera circunscrita a  $ABCD$ . Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos  $DON$  y  $DMN$  obtenemos que

$$R^2 = |DO|^2 = |DN|^2 + |ON|^2 = |DN|^2 + \frac{|MN|^2}{4} = |DN|^2 + \frac{|DM|^2 - |DN|^2}{4} = \frac{|DM|^2 + 3|DN|^2}{4}.$$

Sabemos que  $|DN| = \frac{a}{2}$  y  $|DM|$  esta dado por la ecuación (21). Entonces se tiene que

$$R^2 = \frac{|DM|^2 + 3\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4} = \frac{4|DM|^2 + 3a^2}{16} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2 + 3a^2}{16} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8},$$

lo cual queríamos probar.  $\square$

A continuación enunciamos unos resultados básicos de geometría esférica (ver [15] pág. 169)

OBSERVACIÓN A.5. Las siguientes propiedades se dan para un triángulo esférico:

- La suma de los ángulos internos de un triángulo esférico es mayor a  $\pi$ .
- El área esférica de un triángulo cuyos ángulos internos son  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ , está dada por  $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ .

Para realizar la demostración de la existencia de un triángulo esférico en el Teorema A.1 podemos utilizar la desigualdad del triángulo esférico y para ver que la suma de los ángulos internos es  $2\pi$  podemos utilizar la ley de cosenos para triángulos esféricos. Sin embargo aquí damos una demostración utilizando la proyección central de un disenoide euclideo a su esfera circunscrita y las propiedades básicas antes mencionadas.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA A.1. Sea  $h = \sqrt{\frac{8}{a^2+b^2+c^2}}$  y definamos la función  $F$  como

$$F(x) = 2 \arcsin\left(\frac{hx}{2}\right).$$

Veamos que dicha función cumple lo pedido. Aplicando una homotecia con constante 2 obtenemos un triángulo cuyas longitudes de los lados son el doble de las longitudes de los lados del triángulo  $ABC$ . Dicho triángulo induce un disenoide  $\Omega$  cuyas longitudes de sus aristas son  $a$ ,  $b$ , y  $c$ . Si  $R$  es el radio de la esfera circunscrita a  $\Omega$ , por la Proposición A.4  $h = \frac{1}{R}$ . Esto implica que la  $h$ -homotecia manda al disenoide  $\Omega$  a un disenoide  $\Omega'$  cuya esfera circunscrita es la esfera unitaria y las longitudes de sus aristas son  $ha$ ,  $hb$  y  $hc$ . Denotemos por  $O$  al centro de la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2$ ,  $D$  y  $E$  dos vértices de  $\Omega'$ . Consideremos el círculo máximo que pasa por los vértices  $D$  y  $E$  de  $\Omega'$ , entonces  $d_{esf}(D, E) = \angle DOE$ . Es inmediato ver que

$$d_{esf}(D, E) = 2 \arcsin\left(\frac{DE}{2}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{ha}{2}\right).$$

De manera análoga ocurre para los lados  $hb$  y  $hc$ . Así, al mandar  $\Omega'$  a la esfera unitaria con la proyección central obtenemos 4 triángulos esféricos congruentes. Esto divide a la esfera unitaria en 4 regiones de áreas iguales delimitadas por los 4 triángulos esféricos mencionados. Como la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  tiene área  $4\pi$  entonces cada triángulo tiene área  $\pi$ . Si  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son los ángulos internos de cada triángulo, su área está dada por  $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \pi$ . Por lo tanto la suma de los ángulos internos de cada triángulo esférico es  $2\pi$ .  $\square$

Notemos que, en general, cuando aplicamos la proyección central los ángulos esféricos obtenidos no son el doble de los ángulos euclideos que proyectamos. En efecto, si el ángulo euclideo que tenemos es menor a  $\frac{\pi}{3}$  entonces el correspondiente ángulo esférico es mayor que el doble del ángulo euclideo. Mientras que si el ángulo euclideo es mayor a  $\frac{\pi}{3}$  el correspondiente ángulo esférico será menor que el doble. Si el ángulo es  $\frac{\pi}{3}$ , entonces el ángulo esférico es  $\frac{2\pi}{3}$ . Esto puede verificarse haciendo un análisis infinitesimal de la proyección central.



## Bibliografía

- [1] Baker Alan. *Transcendental number theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1975.
- [2] Beukers Frits; Cushman Richard. *The complex geometry of the spherical pendulum*. Contemporary mathematics 292, páginas 47-70, 2002.
- [3] Conway John Horton; Norton S.P. *Monstrous moonshine*. Bull. London Math. Soc. 11, páginas 308-339, 1979.
- [4] Forster Otto. *Lecture on Riemann surfaces*. New York, Springer-Verlag, 1981.
- [5] G. D. Anderson; M. K. Vamanamurty; M. Vuorinen. *Conformal invariants, inequalities and quasiconformal mappings*. Wiley-Interscience, 1997.
- [6] Gareth A. Jones; David Singerman *Complex functions: An algebraic and geometric viewpoint*. Cambridge University Press, 1987.
- [7] Gavrilov L.; A. Zhivkov. *The complex geometry of Lagrange Top*. L'Enseignement Mathématique, tomo 44: páginas 133-170, 1998.
- [8] Hubbard J. *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics*. Vol 1. Matrix Edition, Ithaca, NY 2006.
- [9] Koblitz Neal . *A course in number theory and cryptography*. New York, Springer-Verlag, 2nd ed. 1994.
- [10] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis*. Ed. McGraw-Hill. 1979.
- [11] Lars V. Ahlfors. *Conformal invariants: topics in geometric function theory*. Ed. McGraw Hill, 1973.
- [12] Lehto O.; K. I. Virtanen. *Quasiconformal mappings in the plane*. New York, Springer-Verlag, 1973.
- [13] Milnor J. *On Lattés maps*. [www.math.sunysb.edu/~jack/PREPRINTS/lattes-ims.pdf](http://www.math.sunysb.edu/~jack/PREPRINTS/lattes-ims.pdf).
- [14] Perez Terrazas Jesus Efrén; Guerrero Lara Ernesto A. *Álgebra abstracta: De grupos a preliminares de la teoría de Galois*. Ed. Universidad Autónoma de Yucatán, México 2010.
- [15] Ramírez-Galarza Ana Irene; Saede Kuri Jose. *Introducción a la geometría avanzada*. México, Coordinación de Servicios editoriales, Facultad de ciencias de la UNAM, 2002.
- [16] Remmert Reinhold. *Theory of complex functions*. New York, Springer-Verlag, 1991.
- [17] Siegel C. L. *Transcendental numbers*. Annals of mathematics studies No. 16, Princeton University Press, Princeton, 1999.
- [18] Silverman Josep; John Tate. *Rational points on elliptic curves*. New York, Springer-Verlag, 1992.
- [19] Tyrrell; M.T. Powell. *A theorem in circle geometry*. Bull London Math. Soc. 3, páginas 70-74, 1971.
- [20] Vladut S. G. *Kronecker's Jugendtraum and modular functions (Studies in the Development of Modern Mathematics)*. Gordon and Breach, New York, Vol 2, 1991.
- [21] Wu William. *The platonic solids*. [www.ocf.berkeley.edu/~wwu/articles/platonicsolids.pdf](http://www.ocf.berkeley.edu/~wwu/articles/platonicsolids.pdf).