Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

Una Introducción a la Dimensión de Representación.

TESIS

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Óscar Alberto Pizá Morales

Director: Dr. Roberto Martínez Villa

Morelia, Michoacán - febrero de 2012.

A mis padres, hermanas y abuelos.
En especial a:
María de la Luz Barrera Rodríguez.

INTRODUCCIÓN

En 1971 M. Auslander en su trabajo *Representation dimension of artin algebras*, [Aus71], definió la noción de dimensión de representación de un álgebra de artin Λ como una manera de medir homológicamente qué tan lejos está un álgebra de tipo de representación infinita de ser de tipo de representación finita (ver [Xi00]). Recientemente, en 2003, O. Iyama ha mostrado que la dimensión de representación de cualquier álgebra de artin es finita, [Iya03]. Sin embargo, hasta la fecha se conoce poco acerca de los valores precisos de dimensión de representación en general. Dentro de los ejemplos que son conocidos se encuentra el trabajo producido por R. Rouquier en [Rou06] donde muestra que el álgebra exterior de un espacio vectorial de dimensión n tiene dimensión de representación $n + 1$, es así que se da a conocer el primer ejemplo de un álgebra de dimensión de representación 4, de ese modo refutando lo antiguamente creído que la dimensión de representación de un álgebra no podría exceder 3.

La importancia del trabajo de M. Auslander se encuentra en el hecho de que los métodos descritos han sido efectivamente aplicados no solamente para la teoría de representaciones de álgebras de artin [ARS95], por ejemplo, se han utilizado también en la teoría de álgebras quasi-hereditarias [CPS88].

Otros estudios de la dimensión de representación se han enfocado en encontrar relaciones entre las dimensiones de representación de álgebras que estén relacionadas de alguna manera. Por ejemplo Auslander y Reiten en [AR78] dieron la definición de equivalencia estable y en [Xi02] C. Xi prueba que bajo equivalencia estable de tipo de Morita se preserva la dimensión de representación; posteriormente A. S. Dugas en [Dug07] muestra que cualesquiera dos álgebras de artin establemente equivalentes tienen igual dimensión de representación, reconociendo así la dimensión de representación como una de las propiedades homológicas que son preservadas bajo equivalencia estable.

Dada la importancia de las nociones, técnicas y métodos descritos por M. Auslander, el presente trabajo se encuentra basado en los temas de tal artículo y hemos tratado de desarrollar con detalle las demostraciones para hacer más fácil su lectura.

En el primer capítulo damos un desarrollo histórico de la teoría de representaciones, así mismo motivamos el estudio del presente trabajo.

En el segundo capítulo daremos los conceptos preliminares necesarios para el tratamiento de los temas posteriores y aunque existe mucha literatura sobre tales conceptos, Auslander los utiliza de una manera un tanto diferente, es por esa razón que este capítulo es de importancia para el resto del trabajo.

En el tercer capítulo damos paso a la teoría clásica de representaciones de un anillo Λ, la cual concierne primero a ver como los Λ-módulos se escinden en sumas directas de otros módulos y describir los módulos inescindibles. Cabe hacer mención que analizamos tales temas bajo la visión de Auslander y en el trabajo no consideramos métodos alternativos como los carcajes. En este capítulo encontramos uno de nuestros principales teoremas (Teorema 3.18), en el cual se demuestra una equivalencia de representación entre las categorías $Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda))$ e $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b}))$. Con el fin de aclarar el significado de ésta equivalencia mostramos que de ella se deduce la construcción hecha por I. Reiten en [Rei75], en la que demuestra que álgebras de radical cuadrado cero son establemente equivalentes a álgebras hereditarias.

En el cuarto capítulo el principal objetivo es introducir la noción de la dimensión de representación de un álgebra de artin. Se espera que la dimensión de representación de un álgebra de artin nos de una manera razonable de medir hasta que punto un álgebra de artin arbitraria se aleja de ser de tipo de representación finita. Después de algunos preliminares sobre categorías y módulos sobre anillos de endomorfismos, una descripción de las álgebras de artin Λ de tipo de representación finita es dada en la sección 3,4. Este resultado sirve como principal motivación para la definición de la dimensión de representación de un álgebra de artin dada en la sección 3,5. También mostramos como construir álgebras de Auslander a partir de álgebras de artin de tipo de representación finita. Éstas construcciones nos dan el teorema principal del artículo, el cual prueba que existe una biyección entre las clases de equivalencia de Morita de álgebras de artin de tipo de representación finita y clases de equivalencia de Morita de álgebras de Auslander.

Finalmente el quinto capítulo, dado que la definición de la dimensión de representación de un álgebra de artin Λ está proporcionada en términos de álgebras de artin Γ con $dom.dim\Gamma \geq 2$ y $End_{\Gamma}(I_0(\Gamma))^{op}$ es Morita equivalente a Λ donde $I_0(\Gamma)$ es una envolvente inyectiva de Γ, es de interés el conocer como construir tales álgebras de artin Γ, éste estudio lo llevamos a cabo en la sección 1.

Índice general

Capítulo 1

Nociones básicas en la teoría de representaciones.

La teoría de representaciones estudia la realización concreta de estructuras abstractas [CR06], por ejemplo, dado un grupo finito G, una **representación** de G es un homomorfismo $\varphi : G \to Gl(n,k)$, donde $Gl(n,k)$ es el grupo lineal de las matrices invertibles de tamaño $n \times n$.

Si denotamos por kG el álgebra de grupo, es decir, kG es el k-espacio vectorial con base G y multiplicación el producto en el grupo extendido linealmente, las representaciones del grupo G forman una categoría, la cual es isomorfa a la categoría $mod(kG)$ de los $kG-$módulos de dimensión finita. En otras palabras, dar una representación de kG es equivalente a dar un kG-módulo.

Observación 1.1. La categoría $mod(kG)$ es Krull-Schmidt, es decir, todo módulo finitamente generado tiene una única descomposición en suma directa de módulos inescindibles.

Observación 1.2. El anillo kG es un ejemplo de una k-álgebra de dimensión finita.

Observación 1.3. Para toda k-álgebra de dimensión finita Λ, la categoría de Λ-módulos finitamente generados $mod(\Lambda)$ es Krull-Schmidt [AF92].

Así el objetivo principal de la teoría de representaciones sería:

Encontrar todos los $\Lambda-$ módulos inescindibles y los morfismos entre ellos. Esas representaciones (por lo menos teóricamente) resultan más fáciles de ser estudiadas en el caso en que Λ es un ***álgebra de tipo de representación finita****, esto es, un álgebra que salvo isomorfismo tiene sólo un número finito de módulos inescindibles.*

El caso más sencillo es el de una k-álgebra semisimple. Las álgebras semisimples de dimensión finita fueron caracterizadas por Wedderburn en 1908.

Teorema 1.4 ([AF92], [CL70])**.** *Una k-álgebra de dimensión finita es semisimple si y sólo si es isomorfa a un producto finito anillos de matrices con coeficientes en k-álgebras con división.*

En el caso semisimple los únicos módulos inescindibles son los módulos simples y estos corresponden a las columnas de los anillos de matrices, más aún, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.5. *Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) El álgebra Λ es semisimple.

ii) Todo módulo es proyectivo.

iii) Todo módulo es inyectivo.

iv) Toda sucesión exacta se escinde.

v) Todo módulo es suma directa de módulos simples.

Ejemplo 1.6 (El álgebra de grupo kG)**.** Se tienen dos casos:

1) La característica del campo no divide al orden del grupo:

En ese caso se tiene:

Teorema (W. Maschke 1858-1908) El álgebra de grupo kG es semisimple si y sólo si la característica del campo no divide al orden del grupo.

2) El campo k tiene característica un primo p que divide al orden de G.

En este caso podemos tener un número finito de inescindibles no isomorfos, por ejemplo si k es un campo de característica p y G es un grupo cíclico de orden p o un número infinito si $G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Segundo problema de teoría de representaciones:

Caracterizar las álgebras de dimensión finita con sólo un número finito de módulos inescindibles de dimensión finita.

Así surgieron las primeras ideas para clasificar las álgebras (del punto de vista de sus representaciones) por así decir, por el tamaño de sus categorías de módulos, dicho de otra manera, por la posibilidad de describir todos sus módulos inescindibles.

Teorema 1.7 (Higman 1954 Hi)**.** *Sea k un campo de característica p y G un grupo cuyo orden es divisible por p. Entonces kG tiene sólo un número finito de inescindibles si sólo si el $p-$grupo de Sylow de G es cíclico.*

¿Qué pasa si el p-grupo de Sylow no es cíclico?

Ejemplo 1.8. $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ y k un campo de característica 2.

En 1963 S. A. Krugljak [Kru63] demostró que las representaciones inescindibles de $k(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ se corresponden, salvo módulos proyectivos, con las formas canónicas de los pares de matrices de Kronecker, [Kro80] (1870) las cuales a su vez estan relacionados con los bloques de Jordan (1870), por lo que se puede dar una lista de todos los $k(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$- módulos inescindibles.

Sin embargo la situación es muy diferente para primos distintos de dos, por ejemplo, no se conocen las representaciones del grupo $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ sobre un campo de característica p con $p \geq 3$.

Heller y Reiner [HR61] demostraron en 1961 que este es un problema de los que hoy llamamos salvajes, es decir la clasificación de los módulos inescindible sobre $k(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p)$ para un primo $p \geq 3$ implicaría la clasificación de todas las representaciones inescindibles de las p matrices.

El problema de clasificar los inescindibles de las 3 matrices implicaría a su vez, la clasificación de los módulos inescindibles para toda álgebra de dimensión finita, según demostró P. Gabriel (1975) [Gab72], [Gab73].

Encontramos entonces tres tipos de representación:

a) **Álgebras de tipo de representación finita**, un número finito de inescindibles.

b) **Álgebras de tipo de representación mansa**, para cada dimensión los inescindibles se parametrizan por un número finito de curvas.

c) **Álgebras de tipo de representación salvaje**, la categoría de módulos inescindibles contiene los módulos inescindibles de cualquier otra álgebra, por lo tanto se considera imposible clasificar sus módulos inescindibles.

Ejemplo 1.9. El anillo de matrices triangulares:

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ V & k \end{bmatrix}$$

con k un campo y V un k-espacio vectorial de dimensión finita es de tipo de representación finita si $\dim V = 1$, es manso si $dim V = 2$ y salvaje si $dim V \geq 3$.

Problemas:

a) Clasificar todas las álgebras de tipo de representación finita.

b) Estudiar las álgebras mansas, clasificarlas, encontrar sus representaciones inescindibles.

c) Entender lo que significa ser salvaje.

Históricamente las primeras tentativas de investigación se dirigían a clasificar las álgebras según el número y/o el tamaño de sus inescindibles. Las de álgebra de tipo infinito se clasificarían en álgebras de tipo limitado y no limitado. Las primeras, serían aquellas en las que las dimensiones de los inescindibles están acotadas. A su vez, las de tipo no limitado se clasificarían en los tipos débilmente no limitado y fuertemente no limitado, siendo estas últimas aquellas en las que hay una infinidad de dimensiones, cada una con una infinidad de inescindibles no isomorfos dos a dos.

Esta expectativa comenzó a reducirse por los años 40 cuando fueron divulgadas dos conjeturas de Brauer y Thrall.

La primera, $B - T$, I, afirmaba que si un álgebra es de tipo limitado, es de tipo finito. Fue demostrada por Roiter en 1965.

La segunda, $B - T$, II, afirmaba que toda álgebra de tipo infinito es de tipo fuertemente no limitado.[1]

[1] La primera demostración conceptual de esta conjetura fue dada por Bautista [Bau85] utilizando resultados de Bautista, Gabriel, Roiter, Salmeron [BGRS84] y de [Bon84].

Para las álgebras de grupo kG es es sencillo probar las siguientes [MV90]:

a) Si kG es de tipo de representación infinita, entonces existen módulos inescindibles de dimensión arbitariamente grande.

b) Si kG es de tipo de representación infinita, entonces existe una sucesión de enteros positivos:$n_1 < n_2 < ...n_k < ...$, tal que para cada n_i existe un número infinito de módulos inescindibles de dimensión n_i.

Estas afirmacaciones son casos particulares de la primera y segunda conjetura de Brauer-Thrall, respectivamente.

1.1. Nilpotencia y equivalencia.

Desde los primeros días de la teoría de álgebras se observó que lo que era determinante para tener complicaciones y situaciones complejas era la presencia de la nilpotencia, es decir de objetos no nulos que admiten potencias nulas. Esto ya se evidencia con la no existencia de elementos nilpotentes. Por ejemplo, un campo o un álgebra con división no tienen elementos nilpotentes (salvo el 0).

La existencia de elementos nilpotentes no es tan importante, sino la existencia autorepresentaciones, es decir subrepresentaciones de ${}_\Lambda\Lambda$, que sean nilpotentes. En ese sentido, basta observar que las álgebras de matrices, tienen todas sus representaciones completamente reducibles, no tienen ideales (no nulos) nilpotentes, pero sí contienen elementos nilpotentes. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así cobró importancia el ideal $\mathbf{r}$, llamado el radical de Λ que contiene todos los ideales nilpotentes. Resulta que él mismo es nilpotente y que es estable por multiplicaciones a la derecha. Por lo tanto, es el máximo ideal nilpotente del álgebra Λ y además es un ideal bilateral. Y puede probarse que el álgebra es semisimple si y sólo si su ideal $\mathbf{r}$ es 0.

Una propiedad caracterśtica de los ideales bilaterales, como $\mathbf{r}$, es que el espacio vectorial cociente, en el caso $\Lambda/\mathbf{r} = \{x + \mathbf{r}/x \in \Lambda\}$, tiene una estructura natural de álgebra (definiendo el producto de clases $(x + \mathbf{r})(y + \mathbf{r})$ igual a la clase del producto $xy + \mathbf{r}$).

Corroborando la importancia del radical para el buen comportamiento del álgebra en cuanto a sus representaciones, podemos anotar que el álgebra cociente, $\Lambda/\mathbf{r}$, es siempre un álgebra semisimple.

Otro de los progresos que son importantes para nosotros son los teoremas de Morita. Sin entrar en detalles, expliquemos lo que más interesa a partir de la siguiente definición.

Definición 1.10. El álgebra Λ se llama **básica** si en su descomposición en suma directa de proyectivos inescindibles no hay repeticiones", es decir, todos ellos son no isomorfos dos a dos.

Si Λ y Γ son álgebras tales que las categorías $mod(\Lambda)$ y $mod(\Gamma)$ son equivalentes, entonces se dice que Λ y Γ son Morita-equivalentes.

Los teoremas de Morita garantizan que toda álgebra es Morita-equivalente a un álgebra básica, que es única salvo isomorfismo.

Puesto que, si dos álgebras son Morita-equivalentes, sus categorías de módulos son categorías equivalentes, se suele estudiar la teoría de representaciones suponiendo que el álgebra es básica.

1.2. De álgebras a gráficas y matrices.

Aunque nuestro própósito en este trabajo no es adentrarnos en carcajes, damos está sección, mostrando la importancia, métodos y técnicas desarrollados con ellos.

Gabriel (1972)[Gab72][Gab73], demostró que las álgebras hereditarias de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado y tipo de representación finita son las álgebras que corresponden a un diagrama de Dynkin.

De manera más precisa:

Definición 1.11. Un **carcaj** Q es una gráfica orientada finita, que consiste de vértices Q_0 y flechas Q_1 ejemplo:

$$\begin{array}{ccccc} & & & \longrightarrow & \\ & & \nearrow & & \downarrow \\ \circlearrowright & & & \rightleftarrows & \circlearrowleft \end{array}$$

Llamamos un camino γ a una composición de flechas $\gamma = \alpha_1\alpha_2...\alpha_k...\alpha_n$. Denotamos por kQ el álgebra con base los caminos del carcaj y producto $\gamma_1 * \gamma_2$ composición de caminos si el final de γ_2 coincide con el inicio de γ_1 y cero de lo contrario. Una relación ρ en Q es una combinación lineal de caminos, $\rho = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\gamma_i$.

Sea Q un carcaj y $\left\{\rho_j\right\}_{1\leq j\leq m}$ un conjunto finito de relaciones. Una **representación del carcaj** Q es un par $V = (\{V_i\}_{i\in Q_0}, \{V_\alpha\}_{\alpha\in Q_1})$, donde V_i es un espacio vectorial de dimensión finita y $V_\alpha : V_i \to V_j$ es una transformación lineal y α es una flecha con inicio i y final j. La representación V satisface la relación $\rho = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\gamma_i$. Si $V(\rho) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i V(\gamma_i) = 0$, donde $V(\gamma) = V_{\alpha_1}V_{\alpha_2}...V_{\alpha_k}...V_{\alpha_n}$.

$Rep\left(Q, \left\{\rho_j\right\}_{1\leq j\leq m}\right)$ es la categoría de representaciones del carcaj Q que satisfacen las relaciones $\left\{\rho_j\right\}_{1\leq j\leq m}$.

Teorema 1.12 (Gabriel)**.** *Dada una $k-$álgebra de dimensión finita Λ sobre un campo algebraicamente cerrado k, existe un carcaj finito Q y un conjunto finito de relaciones $\left\{\rho_j\right\}_{1\leq j\leq m}$, tal que si I es el ideal de kQ generado por las relaciones $\left\{\rho_j\right\}_{1\leq j\leq m}$, entonces las categorías de módulos finitamente generados $mod(\Lambda)$ y $mod(kQ/I)$ son equivalentes y $mod(kQ/I)$ es isomorfa a la categoría de representaciones $Rep\left(Q, \left\{\rho_j\right\}_{1\leq j\leq m}\right)$ del carcaj Q que satisfacen las relaciones $\left\{\rho_j\right\}_{1\leq j\leq m}$.*

Teorema 1.13 (Gabriel-Yoshii [Gab72][Yos56])**.** *Sea Q un carcaj conexo finito sin ciclos orientados, $Rep(Q)$ tiene sólo un número finito de representaciones inescindibles sí y solo si Q es uno de los diagramas de Dynkin:*

A_n:

B_n:

D_6:

D_7:

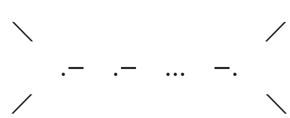
D_8:

Toda álgebra básica de dimensión finita Λ sobre un campo algebraicamente cerrado es isomorfa a una álgebra de carcaj kQ con Q sin ciclos orientados. El teorema de Gabriel-Yoshii clasifica las álgebras hereditarias de tipo de representación finito sobre campos algebraicamente cerrados.

Por su parte P. Donovan y M. R. Freislich [DF73] e independientemente, Nazarova, [Naz73] clasificaron en 1973 las álgebras mansas hereditarias de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado y todos los módulos inescindibles, las álgebras correspondían a los diagramas Euclideanos siguientes:

$\tilde{A}_n$:

$\tilde{D}_n$:



$\widetilde{E}_6$:

|
|
.– .– . –. –.

$\widetilde{E}_7$:

|
–. –. – . –. –. –

$\widetilde{E}_8$:

|
–. – . –. –. –. –. –.

En la demostración utilizaron los funtores de Coxeter y una forma cuadrática, que resulta ser positiva no definida (Ver [DR76] para el caso de especies y una demostración más conceptual y completa).

Por su parte la escuela de Kiev de Roiter y Nazarova utilizó métodos matriciales para encontar los módulos inescindibles de álgebras de dimensión finita, así como de otros objetos como: parcialmente ordenados, policarcajes etc.

1.3. Álgebras de tipo finito y la dimensión de representación.

Aparte de la teoría de representaciones, y con un alcance más general, fueron desenvolviéndose, por la década de los 50, dos grandes ramas del álgebra: el álgebra homológica y la teoría de categorías. Fue hasta principios de los 70 que M. Auslander en sus trabajos de teoría de representaciones de álgebras de artin, dio un gran auge e importancia a éstas dos ramas de la matemática. Por supuesto, existen otras personas muy importantes que ayudaron al auge de estas ramas (por ejemplo, P. Gabriel), pero es de resaltar los puntos de vista homológicos con los que trabajaba Auslander.

Para continuar con el desarrollo de este capítulo hagamos enfásis en los conceptos y trabajos desarrollados por Auslander. Los cuales como veremos proporcionan herramientas para resolver el problema si un álgebra de artin es de tipo de representación finita.

El desarrollo de métodos y aplicaciones funtoriales de la categoría de funtores a la teoría de módulos fue uno de los trabajos esenciales de Auslander. Dichos trabajos de Auslander comenzaron con [Aus98] en 1966, precediendo su interés en la teoría de representaciones de álgebras de artin. Como veremos en el capítulo 4, en este tema se investiga la categoría de funtores coherentes $\hat{C} \subset (C^{op}, Ab)$, asociados con una categoría abeliana C. En particular, se sabe que esta categoría de funtores tiene dimensión global a lo más 2, que la categoría abeliana original C puede ser construida como un cociente de la categoría de funtores módulo una subcategoría densa. Cuando C tiene suficientes proyectivos, dicha subcategoría densa es precisamente $\hat{C}$.

En conexión con los trabajos de funtores coherentes se encuentran las categorías establemente equivalentes. En particular, en en [AR73] se muestra que si la categoría abeliana $C = mod(\Lambda)$, para un álgebra de artin Λ y $\hat{C}_0(\Lambda)$ denota la subcategoría plena de funtores coherentes $\hat{C}$ que se anulan sobre objetos proyectivos. Si $\mathcal{P}$ denota la subcategorá plena de $\hat{C}_0(\Lambda)$, e $\mathcal{I}$ la subcategoría plena de objetos inyectivos en $\hat{C}_0(\Lambda)$, entonces existen equivalencias de categorías $\alpha : \underline{mod(\Lambda)} \to \mathcal{P}$ y $\beta : \overline{mod(\Lambda)} \to \mathcal{I}$. De ésta manera, se muestra que $\hat{C}_0(\Lambda)$ determina la categoría estable $\underline{mod(\Lambda)}$, e inversamente $\hat{C}_0(\Lambda)$ es determinada por $\underline{mod(\Lambda)}$.

Uno de los princiaples resultados de la equivalencia estable, es la caracterización de álgebras que son establemente equivalentes a álgebras hereditarias, un ejemplo de ello es visto en 3.5 del presente trabajo.

Combinado resultados de Gabriel [Gab72] y Yoshii [Yos56] con resultados de Mitchell [Mit68], se pueden clasificar una gran cantidad de clases de álgebras hereditarias en cuanto a si son de tipo finito o no, llamemosle álgebras hereditarias las cuales son producto finito de subanillos de anillos de matrices triangulares inferiores con entradas en un campo k, $Tr_n(k)$.

Dentro de los trabajos más recientes, dando uso e imporatancia de la equivalencia estable, se encuentra el trabajo hecho por Dugas.

Teorema 1.14 (A. Dugas [Dug07]). *Sean Λ y Λ' dos álgebras de artin establemente equivalentes. Entonces, $rep.dim\Lambda = rep.dim\Lambda'$.*

Los conceptos y temas mencionados al incio de esta sección continuarón desarrollandose encontrando una nueva conexión con la **dimensión de representación de un álgebra de artin**, definido por Auslander en [Aus71]. Se espera que la dimensión de representación nos da una manera razonable de medir hasta que punto un álgebra de artin arbitraria se aleja de ser de tipo de representación finita.

Proposición 1.15 (Auslander 4.45). *Sea Λ un álgebra de artin:*

a) *$rep.dim\Lambda = 1$ si y sólo si Λ es semisimple.*

b) *$rep.dim\Lambda \leq 2$ si y sólo si Λ es de tipo de representación finita.*

Siendo este el primer resultado que nos da fé de la relación existente entre el concepto de dimensión de representación y el tipo de representación para álgebras de artin. Después de ello siguieron resultados como el de Iyama.

Teorema 1.16 (O. Iyama [Iya03]). *La dimensión de representación de cualquier álgebra de artin es de tipo finita.*

Con los trabajo hechos hasta su momento fue que Igusa-Todorov relacionó la dimensión de representación con la conjetura de dimensión finitistica; la cual establece que dada un álgebra de aritin Λ, la dimensión proyectiva de todo Λ-módulo M se encuentra acotada.

Teorema 1.17 (Igusa-Todorov [IT05]). *Sea Λ un álgebra. Si $rep.dim\Lambda \leq 3$ entonces Λ satisface la conjetura de dimensión finitística.*

Hasta el año 2001, para todas las álgebras de artin Λ a las que se les calculó la dimensión de la representación, resultó que $rep.dim \leq 3$. Por lo tanto, hubo una fuerte sensación de que todas las álgebras de artin podrían tener esta propiedad. Si esto hubiera sido cierto, la conjetura de dimensión finitística y por lo tanto muchas otras conjeturas homológica hubieran sido probadas. Fue sin embargo R. Rouquier quien da a conocer el primer ejemplo de un álgebra de dimensión de representación 4.

Teorema 1.18 (R. Rouquier [Rou06])**.** *Sea V un k-espacio vectorial de dimensión n, donde k es un campo, y $\Lambda(V)$, el álgebra exterior correspondiente. Entonces, $rep.dim\Lambda(V) = 1 + n$.*

De ésta manera, podemos observar que la dimensión de representación se encuentra relacionada con la clasificación de tipo de representación de álgebras, y surgen preguntas acerca del alcance de dicho concepto, por ejemplo, del Teorema de Rouquier 4.54, es conocido que las álgebras exteriores de dimensión 3, son salvajes. Así mismo dado que bajo equivalencia estable, por el Teorema de Dougas 1.14, la dimensión de representación se preserva, entonces tenemos conocidas algunas de sus propiedades homológicas.

Capítulo 2

Fundamentos Categóricos

En este capítulo introduciremos algunas definiciones básicas y hechos de la teoría de categorías las cuales necesitaremos en el desarrollo del presente trabajo.

2.1. Categorías y Subcategorías.

Definición 2.1. Una **categoría** $\mathcal{C}$ se encuentra compuesta por:

a) Una colección Obj $\mathcal{C}$ de objetos de $\mathcal{C}$.

b) Para cada par de objetos C_1, C_2 en $\mathcal{C}$ un conjunto de morfismos de C_1 a C_2 al cual lo denotamos por $\mathcal{C}(C_1, C_2) = Hom_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$.

c) Funciones

$$\mathcal{C}(C_1, C_2) \times \mathcal{C}(C_2, C_3) \longrightarrow \mathcal{C}(C_1, C_3)$$

para todas las ternas (C_1, C_2, C_3) de objetos en $\mathcal{C}$, las cuales denotaremos por $(f, g) \mapsto gf$, que llamamos la composición de los morfismos f y g, los cuales estan sujetos a las siguientes condiciones:

i) Para cada objeto C en Obj $\mathcal{C}$, existe un morfismo $1_C \in \mathcal{C}(C, C)$, llamado el morfismo identidad tal que:

- $f1_C = f$, para todo $f \in \mathcal{C}(C, X)$, y $X \in \mathcal{C}$.
- $1_C g = g$, para todo $g \in \mathcal{C}(X, C)$, y $X \in \mathcal{C}$.

ii) La composición es asociativa, es decir, si $f \in \mathcal{C}(C_1, C_2)$, $g \in \mathcal{C}(C_2, C_3)$ y $h \in \mathcal{C}(C_3, C_4)$, entonces:

$$h(gf) = (hg)f.$$

Observación 2.2. a) Para cada C en Obj $\mathcal{C}$, existe solamente un morfismo identidad $1_C \in \mathcal{C}(C, C)$. Llamaremos a los elementos de $\mathcal{C}(C, C)$ los **endomorfismos** de C y serán denotados por $End(C)$.

b) Cuando es obvio en que categoría se encuentran nuestros elementos, escribiremos (C_1, C_2) en lugar de $Hom_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$, para denotar el conjunto de morfismos de C_1 a C_2 en $\mathcal{C}$.

c) No estamos asumiendo que nuestra colección de objetos de $\mathcal{C}$ sea un conjunto. En el caso en que Obj $\mathcal{C}$ sea un conjunto, diremos que $\mathcal{C}$ es una **categoría pequeña**.

A continuación daremos algunos ejemplos de categorías.

Ejemplo 2.3. Categoría de conjuntos. Denotaremos por $Sets$ la categoría cuyos objetos son los conjuntos, los morfismo entre objetos son las funciones y la composición de morfismos es la composición usual de funciones entre conjuntos.

Definida así de esta manera es claro que $Sets$ es una categoría.

Ejemplo 2.4. Categoría de grupos abelianos. Denotaremos por Ab a la categoría cuyos objetos son los grupos abelianos, los morfismos entre sus objetos son los homomorfismos de grupos abelianos y la composición de morfismos es la composición de funciones.

Ejemplo 2.5. Recordemos que un monoide es un conjunto con una operación binaria que es asociativa y que tiene un elemento neutro. Asociado a un monoide Λ se encuentra la categoría $\mathcal{C}(\Lambda)$ la cual consiste de un solo objeto C, el conjunto de morfismos $Hom_{\mathcal{C}(\Lambda)}(C, C) = \Lambda$ es el monoide Λ y la composición de morfismos está dada por:

$$\mathcal{C}(C, C) \times \mathcal{C}(C, C) \longrightarrow \mathcal{C}(C, C)$$

$$(f, g) \longmapsto gf$$

la multiplicación en Λ, es decir, gf es el producto de g y f en Λ. En particular si Λ es un anillo podemos construir $\mathcal{C}(\Lambda)$.

Ejemplo 2.6. Categoría opuesta. Asociada a una categoría $\mathcal{C}$ esta la categoría $\mathcal{C}^{op}$ llamada la **categoría opuesta de** $\mathcal{C}$, la cual es dada por los siguientes datos:

a) Obj $\mathcal{C}^{op}$ = Obj $\mathcal{C}$.

b) $\mathcal{C}^{op}(C_1, C_2) = \mathcal{C}(C_2, C_1)$.

c) La composición en $\mathcal{C}^{op}$ se encuentra dada por $(f, g) \mapsto fg$, donde fg es la composición de f y g en $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{C}^{op}(C_1, C_2) \times \mathcal{C}^{op}(C_2, C_3) \longrightarrow \mathcal{C}^{op}(C_1, C_3)$$

$$(f, g) \longmapsto fg$$

$$\mathcal{C}(C_3, C_2) \times \mathcal{C}(C_2, C_1) \longrightarrow \mathcal{C}(C_3, C_1)$$

$$(g, f) \longmapsto fg$$

Esto es, lo que tenemos en $\mathcal{C}^{op}$ es lo mismo que en $\mathcal{C}$, excepto que los morfismos en $\mathcal{C}^{op}$ son en dirección contraria. Lo siguiente es de interés particular para este trabajo. Si Λ es un anillo, definimos Λ^{op} como el anillo cuyos elementos son los de Λ, cuya suma $(+)$ es la suma de Λ y cuya multiplicación $(\times)$ es definida por $x \times y = y \cdot x$, donde $y \cdot x$ es la multiplicación de y y x en Λ. A $(\Lambda^{op}, +, \times)$ llamamos el **anillo opuesto de** Λ. Se puede comprobar fácilmente que:

- $\mathcal{C}(\Lambda^{op}) = \mathcal{C}(\Lambda)^{op}$.

  Demostración: Tenemos por definición que $\mathcal{C}(\Lambda^{op})$ es la categoría dada con un solo elemento C y tal que $Hom_{\mathcal{C}(\Lambda^{op})}(C, C) = \Lambda^{op}$, es decir, dados x y y en $Hom_{\mathcal{C}(\Lambda^{op})}(C, C) = \Lambda^{op}$, entonces $x \times y = yx$, la multiplicación usual en Λ.

  Por otra parte $\mathcal{C}(\Lambda)^{op}$ es la categoría opuesta de $\mathcal{C}(\Lambda)$, se sigue que $\mathcal{C}(\Lambda^{op})$ tiene un solo objeto C y $Hom_{\mathcal{C}(\Lambda)^{op}}(C_1, C_2) = Hom_{\mathcal{C}(\Lambda)^{op}}(C_2, C_1) = \Lambda^{op}$, donde $C_1 = C = C_2$ y por lo tanto las categorías son las mismas.

  ■

- Claramente $\Lambda^{op} = \Lambda$, si Λ es un anillo conmutativo.

Ejemplo 2.7. Categoría de módulos. Sea Λ un anillo con unidad. Denotamos por $Mod(\Lambda)$, la categoría de Λ-módulos izquierdos con sus Λ-homomorfismos como sus morfismos en la categoría. Se debe notar que $Mod(\Lambda^{op})$ es la categoría de Λ-módulos derechos.

Ejemplo 2.8. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Denotaremos por $Morph\,\mathcal{C}$ la categoría dada por los siguientes datos:

a) Los objetos de $Morph\,\mathcal{C}$ son todas las ternas (C_1, C_2, f), donde C_1 y C_2 estan en Obj $\mathcal{C}$ y f en $Hom_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$.

b) Dados objetos (C_1, C_2, f) y (C'_1, C'_2, f') definimos $Morph(\mathcal{C})$ $((C_1, C_2, f), (C'_1, C'_2, f'))$ como el conjunto de todos los pares (α, β), donde α es un morfismo $\alpha : C_1 \to C'_1$ y β es un morfismo $\beta : C_2 \to C'_2$, ambos en $\mathcal{C}$ y son tales que:

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & C_2 \arrow[d, "\beta"] \\ C'_1 \arrow[r, "f'"'] & C'_2 \end{tikzcd}$$

$\beta f = f'\alpha$.

c) Dados morfismos $(\alpha_1, \beta_1) : f \to f'$ y $(\alpha_2, \beta_2) : f' \to f''$ en $Morph\,\mathcal{C}$ definimos su composición $(\alpha_2, \beta_2)(\alpha_1, \beta_1)$ en $Morph\,\mathcal{C}$ como:

$$(Morph\mathcal{C})((C_1, C_2, f), (C'_1, C'_2.f')) \times (Morph\mathcal{C})((C'_1, C'_2, f'), (C''_1, C''_2.f'')) \longrightarrow$$

$$(Morph\mathcal{C})((C_1, C_2, f), (C''_1, C''_2.f''))$$

$$((\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)) \longmapsto (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2\alpha_1, \beta_2\beta_1)$$

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & C_2 \arrow[d, "\beta_1"] \\ C'_1 \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "\alpha_2"'] & C'_2 \arrow[d, "\beta_2"] \\ C''_1 \arrow[r, "f''"'] & C''_2 \end{tikzcd}$$

$(\alpha_2\alpha_1, \beta_2\beta_1)$, donde $\alpha_2\alpha 1$ y $\beta_2\beta_1$ son las composiciones usuales en $\mathcal{C}$.

Definición 2.9. Sea C una categoría. Una **subcategoría** C' de C es una categoría tal que cumple:

a) Obj $C' \subseteq ObjC$.

b) Para todo C_1, C_2 en Obj C', $C'(C_1, C_2) \subseteq C(C_1, C_2)$.

c) Para todo C en C', $1_C = 1_{C'}$.

d) Para todo C_1, C_2, C_3 en Obj C' tenemos que la composición

$$C'(C_1, C_2) \times C'(C_2, C_3) \to C'(C_1, C_3)$$

es la restricción de la función composición en C.

Una subcategoría C' de C se dice **subcategoría plena** de C si y sólo si $C'(C_1, C_2) = C(C_1, C_2)$ para todo objeto C_1, C_2 en C'. Debe de observarse que una subcategoría plena de C está completamente determinada diciendo cuales objetos de C son objetos en C'.

A continuación mostramos algunos ejemplos de subcategorías.

Ejemplo 2.10. Sea C una categoría, denotamos por $End(C)$ la subcategoría de $Morph(C)$ cuyos objetos son todos los pares (C, f), donde $C \in$ Obj C y $f \in End(C)$. Definimos $End(C)((C, f), (C', f'))$ como todos los morfismos $\alpha : C \to C'$ tal que $f'\alpha = \alpha f$. $End(C)$ no es una subcategoría plena de $MorphC$. Estrictamente hablando los objetos de $End(C)$ deberían ser denotados por (C, C, f) y los morfismos por (α, α), pero por razones obvias acortamos nuestra notación.

Ejemplo 2.11. En la categoría $Mod(\Lambda)$ denotaremos por $\mathcal{P}(\Lambda)$ la subcategoría plena de Λ-módulos proyectivos y por $\mathfrak{F}(\Lambda)$ la subcategoría plena de $\mathcal{P}(\Lambda)$ consistiendo de Λ-módulos libres.

2.2. Tipos especiales de morfismos.

Sea C una categoría. Un morfismo $f : C_1 \to C_2$ en C se dice un isomorfismo si y sólo si existe un morfismo $g : C_2 \to C_1$ en C tal que $gf = 1_{C_1}$ y $fg = 1_{C_2}$. Un isomorfismo tiene las siguientes propiedades:

a) Para cada $C \in C$, 1_C es un isomorfismo.

b) Si $f : C_1 \to C_2$ es un isomorfismo entonces existe un único morfismo $g : C_2 \to C_1$, tal que $gf = 1_{C_1}$ y $fg = 1_{C_2}$. Este único morfismo $g : C_2 \to C_1$ es un isomorfismo llamado el inverso de f y es denotado por f^{-1}. Claramente $(f^{-1})^{-1} = f$.

c) Si f y g son isomorfismos y su composición gf está bien definida en C, luego gf es un isomorfismo y $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

d) Si gf es un isomorfismo y fg es también un isomorfismo entonces ambos f y g son un isomorfismo.

Dos objetos C_1 y C_2 en C son **isomorfos** si existe un isomorfismo $f : C_1 \to C_2$. Ser isomorfos es una relación de equivalencia sobre los objetos de C, la cual denotaremos por $C_1 \simeq C_2$.

Existen otros tipos importantes de morfismo, de los cuales mencionaremos los más importantes para este trabajo. En general sea $f : C_1 \to C_2$ un morfismo en una categoría C. Entonces:

a) f es un **epimorfismo** si tiene la propiedad que dados morfismos $g, h : C_2 \to C_3$ y $gf = hf$ entonces $g = h$.

b) f es un **monomorfismo** si tiene la propiedad que dados morfismos $g, h : C_0 \to C_1$ y $fh = fg$ entonces $g = h$.

Los epimorfismos y monomorfismos tienen las siguientes propiedades:

a) Todos los isomorfismos son epimorfismos y monomorfismos.

b) Si $f : C_1 \to C_2$ y $g : C_2 \to C_1$ son morfismos en C, entonces:

   i) Si f y g son monomorfismos (respectivamente epimorfismos) entonces gf es un monomorfismo (epimorfismo).

   ii) Si gf es un monomorfismo, entonces f es un monomorfismo.

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, shift left, "h_1"] \arrow[r, shift right, "h_2"'] & C_1 \arrow[r, "f"] & C_2 \arrow[r, "g"] & C_3 \end{tikzcd}$$

   Supóngase que tenemos morfismos $h_1, h_2 : C_0 \to C_1$, tales que $fh_1 = fh_2$, entonces $g(fh_1) = g(fh_2)$, de donde obtenemos que $(gf)h_1 = (gf)h_2$, y como por hipótesis gf es un monomorfismo, entonces $h_1 = h_2$, y por lo tanto f es un monomorfismo.

   ■

   iii) Si gf es un epimorfismo entonces g es un epimorfismo.
   Esto lo podemos ver de manera análoga al anterior.

   ■

   iv) Debe ser notado que si los objetos de C son conjuntos (no importando otras estructuras) y los morfismos son funciones de conjuntos, entonces si f es una función suprayectiva (respectivamente inyectiva) de conjuntos, f es un epimorfismo (monomorfismo). Mientras que todos los isomorfismos son epimorfismos y monomorfismos, no es cierto que todos los morfismos que son monomorfismos y epimorfismos sean isomorfismos. Para ver esto, consideremos la categoría de anillos, cuyos objetos son anillos con unidad, los morfismos son homomorfismos de anillos (enviando la unidad en la unidad) y cuya composición de morfismos es la composición usual de funciones. En anillos considere el morfismo inclusión de $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, este es inyectivo. Por otro lado también tenemos que es un epimorfismo, para cualquier homomorfismo de anillos de $\mathbb{Q}$ dentro de cualquier otro anillo este es completamente determinado por sus valores en $\mathbb{Z}$. Pero $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ no es un isomorfismo.

Ahora no es difícil ver que en las categorías $Sets$, Ab y $Mod(\Lambda)$, los epimorfismos son precisamente los morfismos que son suprayectivos. Por esta razón los epimorfismos en estas categorías tienen las siguientes propiedades:

- Si $f : A \to B$ es un epimorfismo y estamos dando un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, dashed, "\alpha"'] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & C \\ & X \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

  con k un monomorfismo, entonces existe un morfismo $\alpha : B \to X$, tal que $\alpha f = h$.
  Demostración: Por lo descrito anteriormente f es suprayectiva entonces podemos definir $\alpha : B \to X$ como $\alpha(b) := h(a)$, donde $a \in A$ es tal que $f(a) = b$. Veamos que está bien definida. Notemos que si existen a, a' en A tales que $f(a) = f(a')$, entonces $g(f(a)) = g(f(a')) = k(h(a)) = k(h(a'))$ y por ser k un monomorfismo entonces $h(a) = h(a')$, así $\alpha(f(a)) = h(a) = h(a') = \alpha(f(a'))$, por lo tanto hemos mostrado que α esta bien definida y es tal que $\alpha f = h$.

■

Esta observación nos lleva a realizar la siguiente definición.

Definición 2.12. Sea C una categoría. Diremos que un epimorfismo $f : A \to B$ en C es un **epimorfismo fuerte** si dado cualquier diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, dashed, "\alpha"'] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & C \\ & X \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

con k un monomorfismo, entonces existe un morfismo $\alpha : B \to X$ en C, tal que $k\alpha = g$.

Es claro que si tal morfismo α existe es único, ya que si existe otro morfismo $\alpha' : B \to X$, tal que $k\alpha' = g$, entonces $k\alpha = k\alpha'$, de donde $\alpha = \alpha'$ (recordemos k es un monomorfismo). Más aún α tiene la propiedad que $\alpha f = h$, lo cual se sigue de la igualdad $gf = kh$, entonces $k\alpha f = kh$ y como por hipótesis k es un monomorfismo, entonces $\alpha f = h$.

Definición 2.13. Sea C una categoría. Diremos que un monomorfismo $k : X \to C$ es un **monomorfismo fuerte**, si dado cualquier diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, dashed, "\beta"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & C \\ & X \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

con f un epimorfismo, entonces existe un morfismo $\beta : B \to X$, tal que $\beta f = h$. Si tal morfismo β existe, este es único y tiene la propiedad que $k\beta = g$.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $f : A \to B$ y $g : B \to C$ morfismos en $\mathcal{C}$. Algunas de las propiedades de los epimorfismo fuertes y los monomorfismos fuertes son las siguientes:

i) Si f y g son epimorfismo fuertes (respectivamente monomorfismo fuertes), entonces gf es un epimorfismo fuerte (monomorfismo fuerte).

ii) Si gf es un epimorfismo fuerte, entonces g es un epimorfismo fuerte. Si gf es un monomorfismo fuerte, entonces f es un monomorfismo fuerte.

iii) Isomorfismos son epimorfismos fuertes y monomorfismos fuertes. Por lo tanto un epimorfismo escindible (es decir, un morfismo $f : A \to B$ tal que existe $g : B \to A$, con la propiedad que $fg = 1_B$) es un epimorfismo fuerte. Similarmente un monomorfismo escindible (es decir, un morfismo $f : A \to B$ tal que existe $g : B \to A$ con la propiedad que $gf = 1_A$) es un monomorfismo fuerte.

iv) Para un morfismo $f : A \to B$ que es un epimorfismo y monomorfismo, las siguientes son equivalentes:

   a) f es un isomorfismo.
   b) f es un epimorfismo fuerte.
   c) f es un monomorfismo fuerte.

Definición 2.14. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $f : C_1 \to C_2$ un morfismo en $\mathcal{C}$.

a) Una **coimagen de** f es una factorización de f

$$C_1 \xrightarrow{f_0} B \xrightarrow{f_1} C_2$$

donde f_0 es un epimorfismo fuerte y f_1 un monomorfismo.

b) Una **imagen de** f es una factorización de f:

$$C_1 \xrightarrow{g_0} D \xrightarrow{g_1} C_2$$

donde g_0 es un epimorfismo y g_1 es un monomorfismo fuerte.

Sea $f : C_1 \to C_2$ un morfismo en $\mathcal{C}$ y $C_1 \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} C_2$ una factorización de f, con g un epimorfismo y h un monomorfismo. Algunas propiedades básicas de la coimagen e imagen son las siguientes:

i) Si $C_1 \xrightarrow{f_0} Coimf \xrightarrow{f_1} C_2$ es una coimagen de f, entonces existe un único morfismo $\alpha : Coimf \to X$, tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, equal] & Coimf \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"] & C_2 \arrow[d, equal] \\ C_1 \arrow[r, "g"] & X \arrow[r, "h"] & C_2 \end{tikzcd}$$

Esto es válido, notemos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & Coimf \arrow[dr, "f_1"] & \\ C_1 \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "g"'] & & C_2 \\ & X \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

como h en un monomorfismo y f_0 es un epimorfismo fuerte, entonces existe un único $\alpha : Coimf \to X$ tal que $f_1 = h\alpha$ y además $\alpha f_0 = g$. También α es un epimorfismo y monomorfismo. Es epimorfismo notando que $g = \alpha f$ con g un epimorfismo y es un monomorfismo, dado que $f_1 = h\alpha$ con f_1 un monomorfismo. Más aún si $C_1 \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} C_2$ es una coimagen de f, es decir, g es un epimorfismo fuerte entonces es claro de α es un isomorfismo. Por lo tanto, hasta isomorfismo, las coimágenes de los morfismos son únicas.

ii) Si $C_1 \xrightarrow{g_0} Imf \xrightarrow{g_1} C_2$ es una imagen de f, entonces existe un único morfismo $\beta : X \to Imf$, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta"] & C_2 \arrow[d, equal] \\ C_1 \arrow[r, "g_0"] & Imf \arrow[r, "g_1"] & C_2 \end{tikzcd}$$

El morfismo β es un monomorfismo y un epimorfismo. Más aún, si $C_1 \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} C_2$ es una imagen de f, es decir, h es un monomorfismo fuerte, entonces β es un isomorfismo. Por lo tanto, hasta isomorfismo, las imágenes de morfismos son únicas. Esta propiedad la podemos ver de manera análoga al inciso anterior.

iii) De i) y ii) tenemos que existe un único morfismo $Coimf \to Imf$ el cual hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, equal] & Coimf \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & C_2 \arrow[d, equal] \\ C_1 \arrow[r, "g_0"] & Imf \arrow[r, "g_1"] & C_2 \end{tikzcd}$$

Este único morfismo es un epimorfismo y monomorfismo. Por lo tanto si C tiene la propiedad que todos los morfismos que son monomorfismos y epimorfismos son isomorfismos, entonces para cualquier morfismo f, el único morfismo $Coimf \to Imf$ es un isomorfismo.

iv) Para un morfismo f en C, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $f = hg$, donde g es un epimorfismo fuerte y h es un monomorfismo fuerte.

b) f tiene una $Coimf$ y una Imf y el morfismo canónico $Coimf \to Imf$ es un isomorfismo.

Definición 2.15. Por un **análisis** de un morfismo f en C entendemos una factorización $f = hg$, donde g es un epimorfismo fuerte y h es un monomorfismo fuerte.

Sea f un morfismo en una categoría $\mathcal{C}$ el cual tiene un análisis, algunas de las propiedades básicas son las siguientes.

i) Si $f = hg$ donde g es un epimorfismo y h un monomorfismo, entonces hg es un análisis de f.

ii) Cualesquiera dos análisisis de f son únicos hasta isomorfismo. Estos es, si $f : C_1 \to C_2$ puede ser factorizado como:

$$C_1 \xrightarrow{g} A \xrightarrow{h} C_2$$

$$C_1 \xrightarrow{g'} A' \xrightarrow{h'} C_2$$

donde g, g' son epimorfismos fuertes y h, h' son monomorfismo fuertes, entonces existe un único morfismo $\alpha : A \to A'$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "h"] \arrow[dd, dashed, "\alpha"] & \\ C_1 \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & & C_2 \\ & A \arrow[ur, "h'"'] & \end{tikzcd}$$

iii) Con el morfismo α dado en el inciso anterior se sigue que $(\alpha, 1_c)$ es un isomorfismo de h a h' en $Morph\mathcal{C}$ y $(1_A, \alpha)$ es un isomorfismo de g a g' en $Morph\mathcal{C}$.

En suma tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.16. *Para una categoría $\mathcal{C}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *Todo morfismo en $\mathcal{C}$ tiene un análisis.*

b) *Cada morfismo en $\mathcal{C}$ puede ser únicamente escrito (hasta isomorfismo en el sentido descrito anteriormente) como un epimorfismo seguido de un monomorfismo.*

c) *Todo epimorfismo en $\mathcal{C}$ es un epimorfismo fuerte, igualmente todo monomorfismo en $\mathcal{C}$ en un monomorfismo fuerte, y todo morfismo en $\mathcal{C}$ puede ser factorizado como un epimorfismo seguido de un monomorfismo.*

d) *Todo morfismo en $\mathcal{C}$ tiene una coimagen y además todo morfismo en $\mathcal{C}$ que sea epimorfismo y monomorfismo es un isomorfismo.*

e) *Todo morfismo en $\mathcal{C}$ tiene una imagen y además todo morfismo en $\mathcal{C}$ que sea epimorfismo y monomorfismo es un isomorfismo.*

f) *Todo morfismo en $\mathcal{C}$ tiene una imagen y una coimagen y ellos son isomorfos.*

2.3. Funtores.

Definición 2.17. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un **funtor covariante** (respectivamente **funtor contravariante**) $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una asignación de un objeto $T(C)$ en $\mathcal{D}$ para cada objeto C en $\mathcal{C}$ y un morfismo $T(f) : T(C) \to T(C')$ (respectivamente $T(f) : T(C') \to T(C)$) en $\mathcal{D}$, para cada morfismo $f : C \to C'$ en $\mathcal{C}$, el cual satisface las siguientes condiciones:

a) Para $f : C_1 \to C_2$ y $g : C_2 \to C_3$ morfismos en $\mathcal{C}$, $T(gf) = T(g)T(f)$ (respectivamente $T(gf) = T(f)T(g)$).

b) $T(1_C) = 1_{T(C)}$ para todo C en $\mathcal{C}$.

Algunos ejemplos de funtores son:

Ejemplo 2.18. Funtor identidad. Definido por $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, la identidad en objetos de la categoría $\mathcal{C}$ y morfismos en $\mathcal{C}$.

Ejemplo 2.19. Para cada objeto C en $\mathcal{C}$ determinamos un funtor covariante

$$Hom_{\mathcal{C}}(C, *) : \mathcal{C} \longrightarrow Sets$$

el cual es dado por los siguientes datos:

a) $Hom_{\mathcal{C}}(C, *)(X) = Hom_{\mathcal{C}}(C, X)$ para cada X en $\mathcal{C}$.

b) Para cada $f : X \to X'$ en $\mathcal{C}$ definimos:

$$Hom_{\mathcal{C}}(C, *)(f) : Hom_{\mathcal{C}}(C, X) \to Hom_{\mathcal{C}}(C, X')$$

$$(Hom_{\mathcal{C}}(C, *)(f))(\alpha) = f\alpha$$

para cada α en $Hom_{\mathcal{C}}(C, X)$. Escribimos $Hom_{\mathcal{C}}(C, f)$ en lugar de $Hom_{\mathcal{C}}(C, *)(f)$.

Notemos que cumple las propiedades $a)$ y $b)$ de la definición 2.17. Primero sea C un objeto en la categoría $\mathcal{C}$ y consideremos el funtor $Hom_{\mathcal{C}}(C, *)$. Sean C_1, C_2 dos objetos en $\mathcal{C}$ y $f : C_1 \to C_2$ y $g : C_2 \to C_3$ dos morfismos en $\mathcal{C}$, entonces:

$$Hom_{\mathcal{C}}(C, gf)(\alpha) = gf\alpha = g(f\alpha) = Hom_{\mathcal{C}}(C, g)(f\alpha) = (Hom_{\mathcal{C}}(C, g))(Hom_{\mathcal{C}}(C, f))(\alpha)$$

para todo α en $Hom_{\mathcal{C}}(C, C_1)$, con lo cual $Hom_{\mathcal{C}}(C, gf) = Hom_{\mathcal{C}}(C, g)Hom_{\mathcal{C}}(C, f)$.

Finalmente observemos que dado el morfismo identidad $1_X : X \to X$, entonces

$$Hom_{\mathcal{C}}(C, 1_X)(\alpha) = 1_X\alpha = \alpha$$

para todo α en $Hom_{\mathcal{C}}(C, X)$, con lo cual términamos de demostrar que $Hom_{\mathcal{C}}(C, *)$ es un funtor covariante.

Ejemplo 2.20. De manera similar a nuestro ejemplo anterior, cada objeto C en $\mathcal{C}$ también determina un funtor contravariante:

$$Hom_{\mathcal{C}}(*, C) : \mathcal{C} \to Sets$$

dado por los siguientes datos:

a) $Hom_{\mathcal{C}}(*, C)(X) = Hom_{\mathcal{C}}(X, C)$ para cada X en $\mathcal{C}$.

b) Para cada $f : X \to X'$ en $\mathcal{C}$ definimos:

$$Hom_{\mathcal{C}}(*, C)(f) : Hom_{\mathcal{C}}(X', C) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, C)$$

$$Hom_{\mathcal{C}}((*, C)(f))(\alpha) = \alpha f$$

para todo α en (X', C). Escribimos $Hom_{\mathcal{C}}(f, C)$ en lugar de $Hom_{\mathcal{C}}(*, C)(f)$.

Es sencillo ver que cumple las propiedades *a*) y *b*) de la definición 2.17 para el caso de funtor contravariante. Primero sea C un objeto en la categoría $\mathcal{C}$ y consideremos el funtor $Hom_{\mathcal{C}}(*, C)$. Sean C_1, C_2 dos objetos en $\mathcal{C}$ y $f : C_1 \to C_2$ y $g : C_2 \to C_3$ dos morfismos en $\mathcal{C}$, entonces:

$$Hom_{\mathcal{C}}(gf, C)(\alpha) = \alpha(gf) = (\alpha g)f = Hom_{\mathcal{C}}(f, C)(\alpha g) = (Hom_{\mathcal{C}}(f, C))(Hom_{\mathcal{C}}(g, C))(\alpha)$$

para todo α en $Hom_{\mathcal{C}}(C_3, C)$, con lo cual $Hom_{\mathcal{C}}(gf, C) = Hom_{\mathcal{C}}(f, C)Hom_{\mathcal{C}}(g, C)$.

Finalmente dado el morfismo identidad $1_X : X \to X$ tenemos

$$Hom_{\mathcal{C}}(1_X, C)(\alpha) = \alpha 1_X = \alpha$$

para todo α en $Hom_{\mathcal{C}}(X, C)$, con lo cual términamos de demostrar que $Hom_{\mathcal{C}}(*, C)$ es un funtor contravariante.

Ejemplo 2.21. Asociado con cada subcategoría $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ está el funtor inclusión $i : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$, el cual es dado por la función inclusión de los objetos de $\mathcal{C}'$ dentro de los objetos de $\mathcal{C}$, así como las funciones inclusión de los morfimos de $\mathcal{C}'$ dentro de los morfismos de $\mathcal{C}$.

Ejemplo 2.22. Si $\mathcal{C}$ es una categoría arbitraria cuyos objetos son conjuntos y cuyos morfismos son funciones de conjuntos (en adición a cualquier otra estructura que pudiera tener), definimos el **funtor olvidadizo**:

$$F : \mathcal{C} \to Sets$$

enviando cada objeto C de $\mathcal{C}$ a su conjunto.

Ahora supóngase que estamos dando dos funtores covariantes $T_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $T_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$. Entonces definimos su composición $T_2T_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ por $T_2T_1(C) = T_2(T_1(C))$ para todo C en $\mathcal{C}$ y dado un morfismo $f : C_1 \to C_2$ en $Hom_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$ definimos $(T_2T_1)(f) : T_2(T_1(C_1)) \to T_2(T_1(C_2))$ como $T_2(T_1(f))$. La composición de funtores es asociativa. De igual manera podemos definir la composición de funtores contravariantes, dados dos funtores contravariantes $T_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $T_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ definimos su composición $T_2T_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ por $T_2T_1(C) = T_2(T_1(C))$ para todo C en $\mathcal{C}$ y dado un morfismo $f : C_1 \to C_2$ en $Hom_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$ definimos $(T_2T_1)(f) : T_2(T_1(C_1)) \to T_2(T_1(C_2))$ como $T_2(T_1(f))$.

Existe una manera de comparar dos funtores covariantes $T_1, T_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, para ello ocupamos la siguiente definición:

Definición 2.23. Un **morfismo** $\phi : T_1 \to T_2$ es una colección de morfismos $\phi_C : T_1(C) \to T_2(C)$ en $\mathcal{D}$, uno para cada C en $\mathcal{C}$, sujetos a la regla que para cada morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} T_1(X) \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "T_1(f)"'] & T_2(X) \arrow[d, "T_2(f)"] \\ T_1(Y) \arrow[r, "\phi_Y"] & T_2(Y) \end{tikzcd}$$

Nota 2.24. A tal morfismo ϕ que cumple con tales propiedades también se le suele llamar una **transformación natural**.

Definición 2.25. Sea $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria. Una subcategoría plena $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ se dice **densa** si y sólo si dado cualquier objeto C en $\mathcal{C}$ existe un objeto C' en $\mathcal{C}'$, tal que $C \simeq C'$ en $\mathcal{C}$. Se dice que $\mathcal{C}$ es **esqueléticamente pequeña** si existe una subcategoría pequeña y densa $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$.

Denotaremos la colección de todos los morfismos de T_1 a T_2 por (T_1, T_2). En general (T_1, T_2) no es un conjunto. Si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña entonces (T_1, T_2) es un conjunto debido a que (T_1, T_2) está en correspondencia $1-1$ con $Obj\mathcal{C}$. De manera más general si $\mathcal{C}$ es una categoría esqueléticamente pequeña, entonces (T_1, T_2) es un conjunto para todo par de funtores $T_1, T_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Ejemplo 2.26. Sea $\mathcal{C}$ la subcategoría plena de conjuntos de cardinalidad menor o igual a un cardinal fijo χ. Entonces $\mathcal{C}$ no es pequeña pero es esqueléticamente pequeña. Para lo cual podemos elegir para cada cardinal $\chi_i \leq \chi$ un conjunto fijo X_i de cardinalidad χ_i. Sea $\mathcal{C}'$ la subcategoría plena de $\mathcal{C}$ cuyos objetos son precisamente los X_i. Entonces $\mathcal{C}'$ es una subcategoría pequeña y densa de $\mathcal{C}$. Por lo tanto $\mathcal{C}$ es una categoría esqueléticamente pequeña.

En la práctica, muchas de las categorías con las que estaremos trabajando serán esqueléticamente pequeña.

Ahora dados dos morfismos $\phi : T_1 \to T_2$ y $\psi : T_2 \to T_3$ definimos su composición $\psi\phi$ por $(\psi\phi)_C = \psi_C\phi_C$ para cada objeto C en $\mathcal{C}$. Finalmente, el morfismo 1_T en (T, T) definido por $(1_T)_C = 1_{T(C)}$ para todo C en $\mathcal{C}$ tiene la propiedad que $1_T\phi = \phi$ para todo morfismo $\phi : T' \to T$ y todo funtor $T' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Similarmente $\psi 1_T = \psi$. De esta manera podemos ver que $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la cual consiste de todos los funtores de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ junto con todos los morfismos de T_1 a T_2, (T_1, T_2) y las funciones:

$$(T_1, T_2) \times (T_2, T_3) \to (T_1, T_3)$$

dado por la composición de morfismos de funtores es una categoría siempre que cada (T_1, T_2) sea un conjunto. Entonces si $\mathcal{C}$ es una categoría esqueléticamente pequeña, $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es una categoría para cualquier categoría $\mathcal{D}$. Llamamos a $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la **categoría de funtores** de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$.

Definición 2.27. Un funtor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice **pleno** si $T : \mathcal{C}(C_1, C_2) \to \mathcal{D}(T(C_1), T(C_2))$ es suprayectivo para todo par de objetos C_1, C_2 en $\mathcal{C}$. Un funtor se dice **fiel** si $T : \mathcal{C}(C_1, C_2) \to \mathcal{D}(T(C_1), T(C_2))$ es inyectivo para todo par de objetos C_1, C_2 en $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}'$ es una subcategoría de $\mathcal{C}$ entonces el funtor inclusión $i_{\mathcal{C}'} : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ es un funtor fiel.

T se dice un **funtor fiel y pleno** si $T : \mathcal{C}(C_1, C_2) \to \mathcal{D}(T(C_1), T(C_2))$ es un isomorfismo (de conjuntos). T se dice un **funtor denso** si la subcategoría plena con objetos $T(Obj\mathcal{C})$ es una subcategoría densa de $\mathcal{D}$.

Obviamente, utilizamos los funtores ya que nos dan un significado de comparar categorías. Como un ejemplo, definiremos lo que significa que dos categorías sean isomorfas.

Definición 2.28. Un funtor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un **isomorfismo de categorías** si y sólo si existe un funtor $T' : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $T'T = 1_{\mathcal{C}}$ y $TT' = 1_{\mathcal{D}}$. Las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son **isomorfas** si existe un isomorfismo $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Es claro que un funtor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un isomorfismo de categorías si y sólo si la función $T : Obj\mathcal{C} \to Obj\mathcal{D}$ es un isomorfismo y además $T : (C_1, C_2) \to (T(C_1), T(C_2))$ es un isomorfismo para cada para de objetos C_1, C_2 en $\mathcal{C}$.

En la práctica los isomorfismos de categoría no ocurren muy normalmente. Lo que es más común es la noción de equivalencia de categorías. En orden par definir este concepto necesitamos la noción de funtores isomorfos, una noción que tiene sentido aunque $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ no sea una categoría.

Definición 2.29. Sean T_1, $T_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos funtores. Un morfismo $\phi : T_1 \to T_2$ se dice un **isomorfismo de funtores** si existe un morfismo $\psi : T_2 \to T_1$ tal que $\psi\phi = 1_{T_1}$ y $\phi\psi = 1_{T_2}$. Diremos que T_1 es isomorfo a T_2 (notación $T_1 \simeq T_2$) si existe un isomorfismo de funtores $\psi : T_1 \to T_2$. Claramente, ser isomorfo establece una relación de equivalencia sobre los funtores de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$.

Definición 2.30. Un funtor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ de categorías se dice **una equivalencia de categorías** si existe un funtor $T' : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $TT' \simeq 1_{\mathcal{C}}$ y $TT' \simeq 1_{\mathcal{D}}$. Las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se dicen **equivalentes** si existe un funtor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ el cual es una equivalencia de categorías.

Proposición 2.31. *Un funtor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una equivalencia de categorías si y sólo si T es un funtor denso, fiel y pleno.*

La importancia de la noción de una equivalencia de categorías miente en el hecho que categorías equivalentes tienen exactamente las mismas propiedades. Este punto será claro mientras vayamos avanzando en el presente trabajo.

Ejemplo 2.32. Sea $\mathcal{C}'$ una subcategoría plena de $\mathcal{C}$. Tenemos que $\mathcal{C}'$ es una subcategoría densa de $\mathcal{C}$ si y sólo si el funtor inclusión de $\mathcal{C}'$ a $\mathcal{C}$ es una equivalencia de categorías.

Ejemplo 2.33. Sea k un campo y $\mathcal{C}$ la categoría de k-espacios vectoriales de dimensión finita. El funtor:

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$V \longmapsto V^{**}$$

es una equivalencia de categorías, pero no un isomorfismo.

Ejemplo 2.34. Sea Λ un anillo y $\Lambda[x]$ el anillo de polinomios conmutativo sobre el anillo Λ. Definimos el funtor

$$F : Mod(\Lambda[x]) \longrightarrow End(Mod(\Lambda))$$

$$M \longmapsto F(M) = (M, f)$$

donde $f : M \to M$ es el Λ-morfismo dado por $f(m) = xm$. Este es un isomorfismo de categorías.

Ejemplo 2.35. Sea Λ un anillo y $T_2(\Lambda)$ el anillo de matrices triangulares inferiores sobre Λ, es decir, las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Definimos el funtor

$$G : Morph(Mod(\Lambda)) \longrightarrow Mod(T_2(\Lambda))$$

$$(M_1, M_2, f) \longmapsto G(M_1, M_2, f)$$

el cual es un $T_2(\Lambda)$-módulo de la siguiente manera, es un grupo abeliano con la estructura de la suma directa de los grupos $M_1 + M_2$ cuyos elementos escribimos como una columna:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

con m_i en M_i, junto con la operación del anillo $T_2(\Lambda)$ sobre $M_1 + M_2$ dada por:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 m_1 \\ \lambda_2 m_2 + \lambda_3 m_2 \end{pmatrix}$$

G es una equivalencia de categorías, pero no es un isomorfismo. En [ARS95] (capítuloIII, sección 2) podemos encontrar un estudio mas profundo sobre el anillo de matrices.

Observación 2.36. Como un resultado de los dos últimos ejemplos obtenemos la siguiente manera de comparar las categorías $Mod(\Lambda[x])$ y $(Mod(T_2(\Lambda)))$. Sea Λ un anillo y $T : Mod(\Lambda[x]) \to Mod(T_2(\Lambda))$ el funtor obtenido de la composición de funtores

$$Mod(\Lambda[x]) \xrightarrow[\simeq]{F} End(Mod(\Lambda)) \xrightarrow{i} Morph(Mod(\Lambda)) \xrightarrow[equiv.]{G} Mod(T_2(\Lambda))$$

Entonces T tiene la propiedad que $T : (M_1, M_2) \to (T(M_1), T(M_2))$ es una inclusión para todo M_1, M_2 en $Mod(\Lambda[x])$. No es obvio como ésta manera de comparar las categorías de módulos de los anillos $\Lambda[x]$ y $T_2(\Lambda)$ puede ser obtenida de comparaciones directas de los anillos mismos. En el caso especial en en que Λ es un campo k, tenemos que la teoría de módulos de $T_2(k)$ es considerablemente más simple que $k[x]$. $T_2(k)$ tiene solamente tres módulos inescindibles no cero y todo $T_2(k)$-módulo es isomorfos de manera única a sumas directas de estos módulos inescindibles. De estos módulos inescindibles, dos son módulos proyectivos y uno no proyectivo. Por otra parte $k[x]$ tiene un número infinito de módulos inescindibles de k-dimensión finita e infinita.

2.4. Relaciones de equivalencia en categorías.

Definición 2.37. Sea C un conjunto no vacío y R una relación binaria definida sobre C. Se dice que R es una **relación de equivalencia** si cumple las siguientes propiedades:

a) Reflexividad: Todo elemento de C está relacionado consigo mismo. Es decir,

$$\forall x \in C, \ xRx.$$

b) Simetría: Sean x, y elementos de $\mathcal{C}$. Si x está relacionado con y, entonces y también se relaciona con x. Es decir,
$$\forall x, y \in \mathcal{C},\ xRy \ \Rightarrow\ yRx$$

c) Transitividad: Sean x, y, z elementos de $\mathcal{C}$. Si x está relacionado con y, e y está relacionado con z, entonces x estará relacionado también con y. Es decir,
$$\forall x, y, z \in \mathcal{C},\ xRy, yRz \ \Rightarrow\ xRz$$

Observación 2.38. Supóngase $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor. Entonces asociado a T se encuentra la siguiente relación de equivalencia T_R sobre los morfismos de $\mathcal{C}$. Si f_1 y f_2 son morfismos en $\mathcal{C}$, entonces $f_1 T_R f_2$ si y sólo si:

i) Existen objetos C_1 y C_2 tales que f_1, f_2 estan en $\mathcal{C}(C_1, C_2)$ y,

ii) $T(f_1) = T(f_2)$.

La relación de equivalencia T_R también satisface las dos siguientes condiciones equivalentes:

iii) Si $f_1 T_R f_2$ y $g : C_2 \to C_3$, $h : C_0 \to C_1$, entonces $g f_1 h T_R g f_2 h$.

iii') Supóngase $f_1 T_R f_2$ y $f_1' T_R f_2'$ entonces las relación $f_1 f_1' T_R f_2 f_2'$ se mantiene cuando la composiciones $f_1 f_1'$ y $f_2 f_2'$ son definidas.

Demostración: Comencemos con *iii*) implica *iii'*), supóngase por ejemplo que tenemos morfismos $f_1, f_2 : C_1 \to C_2$ y $f_1', f_2' : C_2 \to C_3$ tales que $f_1 T_R f_2$ y $f_1' T_R f_2'$, y consideremos 1_{C_1} entonces por *iii*):
$$f_1' f_1 = f_1' f_1 1_{C_1} T_R f_1' f_2 1_{C_1} = f_1' f_2$$
y
$$f_2' f_1 = f_2' f_1 1_{C_1} T_R f_2' f_2 1_{C_1} = f_2' f_2$$
así, $T(f_1')T(f_1) = T(f_1')T(f_2) = T(f_2')T(f_1) = T(f_2')T(f_2)$, de donde obtenemos $f_1' f_1 T_R f_2' f_2$.

Queda por ver que *iii'*) implica *iii*). Supóngase que tenemos morfismos $f_1, f_2 : C_1 \to C_2$, $g : C_2 \to C_3$ y $h : C_0 \to C_1$, tales que $f_1 T_R f_2$. Notemos que $g T_R g$ y $h T_R h$ entonces por *iii'*) primero $g f_1 T_R g f_2$ y luego $g f_1 h T_R g f_2 h$.

$\blacksquare$

Definición 2.39. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Por una **relación de equivalencia sobre** $\mathcal{C}$, entendemos una relación de equivalencia R sobre los morfismos de $\mathcal{C}$ satisfaciendo las condiciones *i*) y *iii*) o equivalentemente *i*) y *iii'*) de la observación 2.38.

Ahora mostramos como construir una nueva categoría dada una relación de equivalencia R sobre una categoría $\mathcal{C}$. Este tipo de construcción será muy usada en el resto del presente trabajo. Definimos la categoría $\mathcal{C}/R$ llamada la **categoría** $\mathcal{C}$ **módulo** R de la siguiente manera:

a) $Obj(\mathcal{C}/R) = Obj\mathcal{C}$.

b) Para cada par de objetos C_1 y C_2 en $Obj(C/R)$ definimos $Hom_{(C/R)}(C_1, C_2) = Hom_C(C_1, C_2)/R$.

c) Definimos la composición

$$Hom_{(C/R)}(C_1, C_2) \times Hom_{(C/R)}(C_2, C_3) \longrightarrow Hom_{(C/R)}(C_1, C_3)$$

como la única aplicación que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom_C(C_1, C_2) \arrow[d] & \times & Hom_C(C_2, C_3) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_C(C_1, C_3) \arrow[d] \\ Hom_{(C/R)}(C_1, C_2) & \times & Hom_{(C/R)}(C_2, C_3) \arrow[r] & Hom_{(C/R)}(C_1, C_3) \end{tikzcd}$$

donde cada una de las líneas verticales es la función canónica del conjunto X a X/R donde X/R es el conjunto de clases de equivalencia bajo la relación de equivalencia R.

Claramente, asociado con una relación de equivalencia R sobre una categoría C está el funtor canónico

$$\pi : C \longrightarrow C/R$$

el cual es la identidad sobre los objetos y es la función proyección sobre el conjunto de morfismos

$$\pi : Hom_C(C_1, C_2) \to Hom_{(C/R)}(C_1, C_2)$$

para todo par de objetos C_1, C_2 en C. El funtor canónico π tiene la propiedad que $\pi : Hom_C(C_1, C_2) \to Hom_{(C/R)}(C_1, C_2)$ es suprayectivo para todo par de objetos en C. En otras palabras, éste es un funtor pleno.

Ahora supóngase que tenemos un funtor $T : C \to \mathcal{D}$ el cual define una relación de equivalencia T_R sobre C, entonces el funtor $\pi : C \to C/T_R$ tiene la propiedad que existe un único funtor $G : C/T_R \to \mathcal{D}$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "T"'] & & C/T_R \arrow[dl, "G"] \\ & \mathcal{D} & \end{tikzcd}$$

Además tal funtor G tiene la propiedad que es un funtor fiel. Entonces la factorización de T definida por $T = G\pi$, de un funtor pleno seguido de un funtor fiel es llamada la **factorización canónica de** T.

2.5. Funtores representables y problemas universales.

Sea C una categoría y $F : C \to Sets$ un funtor de C a la categoría de conjuntos. Queremos describir los morfismos de $Hom_C(C, *)$ a F para cada objeto C en C. Supóngase $\phi : Hom_C(C, *) \to F$ es un morfismo. Asociado con ϕ está la función $\phi_C : Hom_C(C, C) \to F(C)$ y por lo tanto el elemento $\phi_C(1_C)$ en $F(C)$.

$$\begin{tikzcd} Hom_C(C, C) \arrow[r, "\phi_C(1_C)"] \arrow[d, "Hom_C(C{,}1_C)"'] & F(C) \arrow[d, "1_{F(C)}"] \\ Hom_C(C, C) \arrow[r, "\phi_C(1_C)"] & F(C) \end{tikzcd}$$

A continuación establecemos el teorema de Yoneda el cual es central en toda la teoría de categorías.

Teorema 2.40. *Yoneda. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $F : \mathcal{C} \to Sets$ un funtor. Si C es un objeto en $\mathcal{C}$, entonces:*

a) *Dos morfismos $\phi, \psi : (C; *) \to F$ son iguales si y sólo si $\phi_C(1_C)$ y $\psi_C(1_C)$ son los mismos en $F(C)$.*

b) *Dado cualquier elemento X en $F(C)$ existe uno y solamente un morfismo $\phi : (C, *) \to F$, tal que $\phi_C(1_C) = X$ en $F(C)$.*

O equivalentemente: la colección $(Hom_{\mathcal{C}}(C, *), F)$ de todos los morfismos de $Hom_{\mathcal{C}}(C, *)$ a F es un conjunto el cual es isomorfo a $F(C)$ bajo la función que envía un morfismo $\phi : Hom_{\mathcal{C}}(C, *) \to F$ al elemento $\phi_C(1_C)$ en $F(C)$.

El isomorfismo $Y : (Hom_{\mathcal{C}}(C, *), F) \to F$ descrito en el teorema de Yoneda es llamado el isomorfismo de Yoneda. No es difícil ver que el isomorfismo de Yoneda

$$Y : (Hom_{\mathcal{C}}(C, *), F) \xrightarrow{\simeq} F$$

es funtorial en ambos lados en $Hom_{\mathcal{C}}(C, *)$ y F. Esto es, si estamos dando un morfismo $f : C \to C'$ en $\mathcal{C}$, entonces el morfismo $Hom_{\mathcal{C}}(f, *) : Hom_{\mathcal{C}}(C, *) \to Hom_{\mathcal{C}}(C', *)$ hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
(Hom_{\mathcal{C}}(C, *), F) \arrow[r, "Y_C"] \arrow[d, "((f,*),1_F)"'] & F(C) \arrow[d, "F(f)"] \\
(Hom_{\mathcal{C}}(C', *), F) \arrow[r, "Y_{C'}"] & F(C')
\end{tikzcd}$$

donde las funciones horizontales son los isomorfismo de Yoneda. También si estamos dando dos funtores $F, G : \mathcal{C} \to Sets$ y un morfismo $g : F \to G$ el siguiente diagrama conmuta para cada C en $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
(Hom_{\mathcal{C}}(C, *), F) \arrow[r, "Y"] \arrow[d, "((f,*),g)"'] & F(C) \arrow[d, "g_C"] \\
(Hom_{\mathcal{C}}(C, *), G) \arrow[r, "Y"] & G(C)
\end{tikzcd}$$

Cuando no exista peligro de confusión identificaremos $(Hom_{\mathcal{C}}(C, *), F)$ y $F(C)$ por el entendido del isomorfismo de Yoneda.

Un importante caso especial a considerar es cuando $F' = Hom_{\mathcal{C}}(C', *)$ para algún C' en $\mathcal{C}$. El teorema de Yoneda nos dice entonces que bajo el isomorfismo de Yoneda, $(Hom_{\mathcal{C}}(C, *), Hom_{\mathcal{C}}(C', *)) = Hom_{\mathcal{C}}(C', C)$. No es difícil ver que para este caso el inverso del isomorfismo de Yoneda es la función bien conocida

$$Hom_{\mathcal{C}}(C', C) \longrightarrow (Hom_{\mathcal{C}}(C, *), Hom_{\mathcal{C}}(C', *))$$
$$f : C' \to C \longmapsto (f, *) : Hom_{\mathcal{C}}(C, *) \to Hom_{\mathcal{C}}(C', *)$$

donde $Hom_{\mathcal{C}}(f, X) : (C, X) \to (C, X')$ es la función $Hom_{\mathcal{C}}(f, X)(\alpha) = \alpha f$ para todo morfismo α en $Hom_{\mathcal{C}}(C, X)$ y todo objeto X en $\mathcal{C}$. Por lo tanto, la función $Hom_{\mathcal{C}}(C', C) \to (Hom_{\mathcal{C}}(C, *), Hom_{\mathcal{C}}(C', *))$ dada por $f \mapsto Hom_{\mathcal{C}}(f, *)$ para todo f en $Hom_{\mathcal{C}}(C', C)$ es un isomorfismo. Como otra consecuencia importante tenemos lo siguiente.

Proposición 2.41. *Sean C y C' dos objetos en la categoría $\mathcal{C}$. Un morfismo $f : C' \to C$ es un isomorfismo si y sólo si el correspondiente morfismo de funtores $Hom_{\mathcal{C}}(f, *) : Hom_{\mathcal{C}}(C, *) \to Hom_{\mathcal{C}}(C', *)$ es un isomorfismo. Por lo tanto, dos objetos C y C' en $\mathcal{C}$ son isomorfos si y sólo si los funtores $Hom_{\mathcal{C}}(C, *)$ y $Hom_{\mathcal{C}}(C', *)$ son isomorfos.*

Lo que nos dice esta proposición es en escencia que un objeto en una categoría arbitraria es determinado por sus morfismos a los otros objetos. Este es precisamente el centro de toda la teoría de categorías. Esto sugiere un nueva manera de describir objetos en una categoría. Es decir, en lugar de describir los objetos directamente es suficiente describir sus morfismos a los demás objetos.

Esto enfatiza la importancia de los funtores $(C, *) : \mathcal{C} \to Sets$ definiendo la categoría $\mathcal{C}$ y nos da la siguiente noción general.

Definición 2.42. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y T un funtor $T : \mathcal{C} \to Sets$. Decimos que un objeto C en $\mathcal{C}$ **representa** el funtor T si T es isomorfo a $Hom_{\mathcal{C}}(C, *)$.

Por el Teorema de Yoneda dos objetos en $\mathcal{C}$ representan el mismo funtor de $\mathcal{C}$ a $Sets$ si y sólo si ellos son isomorfos.

Una **representación** para el funtor T consiste de un objeto C en $\mathcal{C}$ junto con un isomorfismo $T \simeq Hom_{\mathcal{C}}(C, *)$. Finalmente, un funtor $T : \mathcal{C} \to Sets$ es **representable** si existe un objeto en $\mathcal{C}$ el cual representa a T.

Ejemplo 2.43. i) Sea $\mathcal{G}$ la categoría de grupos. Entonces el funtor olvidadizo $F : \mathcal{G} \to Sets$ es el definido por enviar el grupo G al subyaciente conjunto de G, F es un funtor fiel y es representable por $\mathbb{Z}$, el grupo de los enteros.

De manera similar los funtores olvidadizos sobre las siguientes categorías son fieles y representables.

ii) Sobre la categoría $Mod(\Lambda)$ el funtor olvidadizo es representable por Λ.

iii) Sobre la categoría de anillos el funtor olvidadizo es representado por $\mathbb{Z}[z]$.

iv) Sobre conjuntos el funtor olvidadizo es representado por un solo punto.

Ejemplo 2.44. Sea $F : End(Sets) \to Sets$ definido por $F(X, f) = X$, entonces F es un funtor fiel el cual es representado por $(\mathbb{Z}^+, s)$ y $s : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ es la función sucesor, es decir, $s(n) = n + 1$ para todo n en $\mathbb{Z}^+$.

Ejemplo 2.45. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Asociado con cualquier familia $\{C_i\}_{i \in I}$ de objetos de $\mathcal{C}$ (I un conjunto) esta el funtor:

$$\prod_{i \in I} (C_i, *) : \mathcal{C} \longrightarrow Sets$$

$$\left(\prod_{i \in I} (C_i, *) \right) (C) = \prod_{i \in I} (C_i, C)$$

para todo C en $\mathcal{C}$. Un objeto C en $\mathcal{C}$ se dice que **representa la suma** $\coprod_{i\in I} C_i$ de la familia $\{C_i\}_{i\in I}$ de objetos en $\mathcal{C}$ si C representa el funtor $\prod_{i\in I}(C_i, *)$. Dado un objeto C en $\mathcal{C}$ el cual representa la suma $\coprod_{i\in I} C_i$, entonces al isomorfismo $\psi : (C, *) \to \prod_{i\in I}(C_i, *)$ corresponde la familia de morfismos

$$\{f_i : C_i \to C\}$$

tal que los morfismos

$$(C, *) \xrightarrow{(f_i,*)} (C_i, *)$$

inducen el isomorfismo

$$(C, *) \xrightarrow{\psi} \prod(C_i, *)$$

Por lo tanto C representa la suma $\coprod_{i\in I} C_i$ si y sólo si existen morfismos $f_i : C_i \to C$ tal que el morfismo inducido de funtores $(C, *) \to \prod_{i\in I}(C_i, *)$ es un isomorfismo.

A continuación mostramos algunos ejemplos de sumas.

Ejemplo 2.46. i) En $Sets$ sumas arbitrarias existen. La suma $\coprod_{i\in I} C_i$ es la unión disjunta de los conjuntos C_i.

ii) Sea Λ un anillo, entonces $Mod(\Lambda)$ tiene sumas arbitrarias, la suma $\coprod_{i\in I} M_i$ es la suma directa de los M_i. En este caso usualmente denotamos $\coprod_{i\in I} M_i$ por la notación usual $\sum_{i\in I} M_i$ (También utilizada la notación $\oplus_{i\in I} M_i$).

iii) Sea $\mathcal{C}$ la categoría de R-álgebras conmutativas. Entonces $\mathcal{C}$ tiene sumas finitas, es decir, dado cualquier conjunto $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ de R-álgebras, entonces $\coprod_{i=1}^{i=n} \Lambda_i$ existe en $\mathcal{C}$. De hecho $\coprod_{i=1}^{i=n} \Lambda_i = \Lambda_1 \otimes_R \Lambda_2 \otimes_R, \ldots, \otimes_R \Lambda_n$.

Debe ser notado que en general sumas de varios tipos no necesariamente existen en una categoría específica. Por supuesto, todo lo que hemos hecho hasta ahora para funtores covariantes puede ser hecho también para funtores contravariantes. En particular, el Teorema de Yoneda tiene la siguiente forma.

Teorema 2.47. *Yoneda. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, C un objeto en $\mathcal{C}$ y $F : \mathcal{C} \to Sets$ un funtor contravariante. Entonces $(Hom_{\mathcal{C}}(*, C), F)$ es un conjunto que es isomorfo a $F(C)$ bajo la función que manda ϕ en $(Hom_{\mathcal{C}}(*, C), F)$, con $\phi_C(1_C)$ en $F(C)$. Este isomorfismo de Yoneda es funtorial en F y C. De igual manera que con los funtores covariantes, si $F = Hom_{\mathcal{C}}(*, C')$, entonces el inverso del isomorfismo de Yoneda $(Hom_{\mathcal{C}}(*, C), Hom_{\mathcal{C}}(*, C')) \to Hom_{\mathcal{C}}(C, C')$ es el morfismo usual:*

$$Hom_{\mathcal{C}}(C, C') \longrightarrow (Hom_{\mathcal{C}}(*, C), Hom_{\mathcal{C}}(*, C'))$$

$$f : C \to C' \longmapsto Hom_{\mathcal{C}}(*, f) : Hom_{\mathcal{C}}(*, C) \to Hom_{\mathcal{C}}(*, C')$$

*También un morfismo $F : C \to C'$ es un isomorfismo si y sólo si $Hom_{\mathcal{C}}(*, f) : Hom_{\mathcal{C}}(*, C) \to Hom_{\mathcal{C}}(*, C')$ es un isomorfismo. Por lo tanto $C \simeq C'$ si y sólo si $Hom_{\mathcal{C}}(*, C) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(*, C')$. Finalmente, un funtor contravariante $F : \mathcal{C} \to Sets$ es **representable** por un objeto C en $\mathcal{C}$ si y sólo si $F \simeq Hom_{\mathcal{C}}(*, C)$. Claramente, dos objetos C y C' representan el mismo funtor contravariante si y sólo si ellos son isomorfos.*

Ejemplo 2.48. Sea C una categoría y $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en C (I un conjunto). Entonces asociado con la familia $\{C_i\}_{i\in I}$ está el funtor contravariante $\prod(*, C_i) : C \to Sets$ dado por:

$$\left(\prod_{i\in I}(*, C_i)\right)(X) = \prod_{i\in I}(X, C_i)$$

para todo X en C. Un objeto C en C de dice que **representa el producto** $\prod_{i\in I} C_i$ de $\{C_i\}$ si C representa el funtor $\prod_{i\in I} C_i$. Los isomorfismos entre $Hom_C(*, C)$ y $\prod(*, C_i)$ están en correspondencia uno a uno con las familias de morfismos $\{f_i : C \to C_i\}$, tal que los morfismos $Hom_C(*, C) \to Hom_C(*, C_i)$ inducen un isomorfismo $Hom_C(*, C) \to \prod Hom_C(*, C_i)$. Por lo tanto C representa el producto $\prod_{i\in I} C_i$ si y sólo si existen morfismos $C \to C_i$ tal que el morfismo inducido $Hom_C(*, C) \to \prod Hom_C(*, C_i)$ es un isomorfismo.

Algunos ejemplos de productos son los siguiente:

Ejemplo 2.49.

a) En la categoría $Sets$ los productos arbitrarios existen. $\prod C_i$ es el producto cartesiano usual de los conjuntos $\{C_i\}_{i\in I}$.

b) En $Mod(\Lambda)$, productos arbitrarios también existen, $\prod M_i$ es el producto ordinario de los módulos $\{M_i\}_{i\in I}$.

c) En la categoría de R-álgebras, el producto $\prod \Lambda_i$ es el producto ordinario de R-álgebras.

Así mismo como con las sumas, el producto de dos objetos en una categoría no necesariamente existe. Al menos si el producto de familias finitas de objetos existe, el producto de familias infinitas no necesariamente existe.

2.6. Categorías preaditivas.

Definición 2.50. Sea A un anillo conmutativo. Por una A**-categoría preaditiva** nos referimos a una categoría C tal que satisface las siguientes condiciones:

a) Para cualquier par de objetos C_1, C_2 en C, el conjunto $Hom_C(C_1, C_2)$ es un A-módulo.

b) Para toda terna de objetos C_1, C_2, C_3 en C, la composición de morfismos $Hom_C(C_1, C_2) \times Hom_C(C_2, C_3) \to Hom_C(C_1, C_3)$ son funciones bilineales, es decir, $(f + af')g = fg + af'g$ y $f(g + ag') = fg + afg'$, para toda a en A.

Si A es igual a $\mathbb{Z}$, al anillo de los enteros, entonces una A-categoría preaditiva será simplemente llamada **categoría preaditiva**.

Ejemplo 2.51. Sea Λ una A-álgebra. La categoría $C(\Lambda)$ es una A-categoría preaditiva, esto se debe a que el único objeto C en $C(\Lambda)$ tiene la propiedad que $Hom_C(C, C) = \Lambda$ es un A-módulo y la composición:

$$Hom_C(C, C) \times Hom_C(C, C) \longrightarrow Hom_C(C, C)$$

la cual es la misma que la función $\Lambda \times \Lambda \to \Lambda$, dada por la multiplicación en Λ es ciertamente bilineal.

Ejemplo 2.52. Sea A el centro del anillo Λ. Entonces $Mod(\Lambda)$ es una A-categoría preaditiva.

Ejemplo 2.53. Sea $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria y $\mathcal{D}$ una A-categoría preaditiva. Sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos funtores. Si $\phi, \omega : F \to G$ son morfimos, definimos su suma como el morfismo:

$$\phi + \omega : F \longrightarrow G$$

$$(\phi + \omega)_X : F(X) \to G(X) = \phi_X + \omega_X$$

para todo X en $\mathcal{C}$. También dado cualquier a en A definimos:

$$(a\phi) : F \longrightarrow G$$

$$(a\phi)_X : F(X) \to G(X) = a(\phi_X)$$

para todo X en $\mathcal{C}$. De hecho estas operaciones hacen (F, G) un A-módulo cuando (F, G) es un conjunto. Más aún, si $\mathcal{C}$ es esqueléticamente pequeña y $\mathcal{D}$ es una A-categoría preaditiva, entonces $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es una A-categoría preaditiva, donde (F, G) es considerado un A-módulo como lo describimos anteriormente. De esta manera, siempre consideramos a $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ como una A-categoría preaditiva.

Supóngase que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son dos A-categorías preaditivas. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice un **funtor aditivo** si y sólo si $F : \mathcal{C}(C_1, C_2) \to \mathcal{D}(F(C_1), F(C_2))$ es un morfismo de A-módulos para todo C_1, C_2 en $\mathcal{C}$. Obviamente la composición de dos funtores aditivos es nuevamente un funtor aditivo.

Definición 2.54. Sea $\mathcal{C}$ una A-categoría preaditiva. Una subcategoría $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ es una **subcategoría preaditiva** de $\mathcal{C}$ si $Hom_{\mathcal{C}'}(C_1, C_2)$ es un A-submódulo de $Hom_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$ para todo par de objetos C_1, C_2 en $\mathcal{C}'$.

Obviamente una subcategoría preaditiva de una categoría preaditiva es en sí misma una categoría preaditiva. En particular, toda subcategoría plena de una categoría preaditiva es una subcategoría preaditiva.

Ejemplo 2.55. Sea $\mathcal{C}$ una A-categoría preaditiva esqueléticamente pequeña y $\mathcal{D}$ una A-categoría preaditiva arbitraria. Entonces la subcategoría plena de $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ que consiste de todos los funtores aditivos es una categoría preaditiva la cual denotaremos por $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ y la llamaremos la **categoría de funtores aditivos de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$**.

Ejemplo 2.56. Supóngase que $\mathcal{C}$ es una A-categoría preaditiva. Entonces los funtores $Hom_{\mathcal{C}}(C, *) : \mathcal{C} \to Mod(A)$ son funtores aditivos.

Ejemplo 2.57. Sea $\mathcal{C}$ una A-categoría preaditiva y $F : \mathcal{C} \to Mod(A)$ un funtor aditivo. Entonces para cada C en $\mathcal{C}$, la colección $(Hom_{\mathcal{C}}(C, *), F)$ es un conjunto y por lo tanto un A-módulo. Más aún, el isomorfismo de Yoneda $(Hom_{\mathcal{C}}(C, *), F) \to F(C)$ es un isomorfismo de A-módulos.

Definición 2.58. Diremos que dos A-categorías preaditivas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son isomorfas (respectivamente equivalentes) si existe un funtor aditivo $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ el cual es un isomorfismo (equivalencia) de categorías.

Por ejemplo sea Λ un anillo y $\mathcal{C}(\Lambda)$ su categoría preaditiva asociada. Considere el funtor

$$(\mathcal{C}(\Lambda), Ab) \longrightarrow Mod(\Lambda)$$

$$F : \mathcal{C}(\Lambda) \to Ab \longmapsto F(C)$$

consistente del grupo abeliano $F(C)$, donde C es el único objeto de $\mathcal{C}(\Lambda)$ y la operación de Λ sobre $F(C)$ es dada por $\lambda(x) = F(\lambda)x$ para todo λ en Λ y x en $F(C)$. Entonces este funtor $(\mathcal{C}(\Lambda), Ab) \longrightarrow Mod(\Lambda)$ es un isomorfismo de categorías preaditivas.

Sea $\mathcal{C}$ una A-categoría preaditiva y R una relación de equivalencia en $\mathcal{C}$. Entonces la categoría $\mathcal{C}/R$ tiene a lo más una estructura de A- categoría preaditiva tal que el funtor canónico $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/R$ es aditivo. Esta única estructura de A-categoría preaditiva existe si y sólo si la relacion R satisface lo siguiente:

a) Si tenemos morfismos f_1, f_1', f_2, f_2' tales que $f_1 R f_2$ y $f_1' R f_2'$, entonces $(f_1 + f_1')R(f_2 + f_2')$.

b) Si $f_1 R f_2$, entonces $a f_1 R a f_2$ para todo a en A.

Una relación R sobre una A-categoría preaditiva es llamada una **relación aditiva** si satisface las condiciones a) y b).

Proposición 2.59. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ A-categoría preaditivas. Si el funtor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor aditivo, entonces las clases de equivalencia bajo la relación T_R sobre $\mathcal{C}$ forman una categoría preaditiva y todos los funtores en la factorización canónica de T como un funtor pleno seguido de un funtor fiel $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/R \to \mathcal{D}$ son funtores aditivos.*

2.6.1. Pseudo-kerneles y Kerneles.

Definición 2.60. Sea $\mathcal{C}$ una A-categoría preaditiva. Sea $f : C_1 \to C_2$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Un **pseudo-kernel** de f es un morfismo $g : C_0 \to C_1$, tal que para cada C en $\mathcal{C}$ la sucesión de A-módulos

$$Hom_{\mathcal{C}}(C, C_0) \xrightarrow{Hom_{\mathcal{C}}(C,g)} Hom_{\mathcal{C}}(C, C_1) \xrightarrow{Hom_{\mathcal{C}}(C,f)} Hom_{\mathcal{C}}(C, C_2)$$

es exacta. Un pseudo-kernel g de f se llama **kernel** de f si g es un monomorfismo. Más explícitamente, un morfismo $g : C_0 \to C_1$ es un kernel de f si y sólo si tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(C, C_0) \xrightarrow{Hom_{\mathcal{C}}(C,g)} Hom_{\mathcal{C}}(C, C_1) \xrightarrow{Hom_{\mathcal{C}}(C,f)} Hom_{\mathcal{C}}(C, C_2)$$

para todo C en $\mathcal{C}$.

En general, los pseudo-kerneles de un morfismo en $\mathcal{C}$ no son únicos. Sin embargo, el kernel de un morfismo $f : C_1 \to C_2$ es único en el siguiente sentido. Supóngase que $g : C_0 \to C_1$ y $g' : C_0' \to C_1$ son dos kerneles de f. Entonces por el teorema de Yoneda existe uno y solamente un morfismo $\phi : C_0 \to C_0'$ tal que el diagrama siguiente conmuta y este morfismo ϕ es un isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi"'] & C_1 \arrow[d, equal] \\ C_0' \arrow[r, "g'"] & C_1 \end{tikzcd}$$

En general un morfismo f en $\mathcal{C}$ no necesariamente tiene un kernel. Si lo tiene usualmente elegiremos uno en particular el cual denotaremos por $Kerf \to C_1$. Diremos que una A-categoría preaditiva $\mathcal{C}$ tiene pseudo-kernels o kernels si todo morfismo en $\mathcal{C}$ tiene pseudo-kerneles o kerneles, respectivamente.

Proposición 2.61. *Todo kernel en un A-categoría preaditiva $\mathcal{C}$ es un monomorfismo fuerte.*

Definición 2.62. Sea $f : C_1 \to C_2$ un morfismo en una A-categoría preaditiva $\mathcal{C}$. Un morfismo $h : C_2 \to C_3$ en $\mathcal{C}$ se dice un **pseudo-cokernel** de f si para todo C en $\mathcal{C}$ la siguiente sucesión de A-módulos

$$Hom_{\mathcal{C}}(C_3, C) \xrightarrow{Hom_{\mathcal{C}}(h,C)} Hom_{\mathcal{C}}(C_2, C) \xrightarrow{Hom_{\mathcal{C}}(f,C)} Hom_{\mathcal{C}}(C_1, C)$$

es exacta. Un pseudo-cokernel $h : C_2 \to C_3$ para f se llama **cokernel** de f si $h : C_2 \to C_3$ es un epimorfismo o equivalentemente si y sólo si la siguiente sucesión de A-módulos:

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(C_3, C) \xrightarrow{Hom_{\mathcal{C}}(h,C)} Hom_{\mathcal{C}}(C_2, C) \xrightarrow{Hom_{\mathcal{C}}(f,C)} Hom_{\mathcal{C}}(C_1, C)$$

es exacta para todo C en $\mathcal{C}$.

Como el caso de los pseudo-kerneles y kerneles, los pseudo-cokerneles o cokerneles pueden no existir para un morfismo particular en $\mathcal{C}$. En general los pseudo-cokerneles no son únicos. Sin embargo, si los cokerneles existen ellos son únicos en el mismo sentido que los kerneles son únicos. Esto es, si $h : C_2 \to C_3$ y $h' : C_2 \to C_3'$ son cokerneles para el mismo morfismo $f : C_1 \to C_2$ en $\mathcal{C}$ entonces por el teorema de Yoneda existe uno y solamente un morfismo $\psi : C_3 \to C_3'$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} C_2 \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & C_3 \arrow[d, "\psi"] \\ C_2 \arrow[r, "h'"] & C_3' \end{tikzcd}$$

Y elψ es un isomorfismo. Si un morfismo $f : C_1 \to C_2$ tiene cokerneles usualmente tomaremos uno el cual denotaremos por $C_2 \to Cokerf$. Diremos que una categoría $\mathcal{C}$ tiene pseudo-cokerneles o cokerneles si todo morfismo en $\mathcal{C}$ tiene pseudo-cokerneles o cokerneles respectivamente.

Proposición 2.63. *Sea $\mathcal{C}$ una A-categoría preaditiva. Entonces todos los cokerneles son epimorfismos fuertes.*

Ejemplo 2.64. Sea Λ un anillo y $\mathcal{P}(\Lambda)$ e $\mathcal{I}(\Lambda)$ subcategorías plenas de $Mod(\Lambda)$ consistentes de todos los módulos proyectivos y todos los módulos inyectivos respectivamente. Entoces $\mathcal{P}(\Lambda)$ tiene pseudo-kerneles e $\mathcal{I}(\Lambda)$ tiene pseudo-cokerneles. Sin Embargo $\mathcal{P}(\Lambda)$ generalmente no tiene kerneles e $\mathcal{I}(\Lambda)$ generalmente no tiene cokerneles. De hecho, las siguientes afirmaciones son equivalentes para cualquier anillo Λ.

i) $gl.dim\Lambda \leq 2$.

ii) $\mathcal{P}(\Lambda)$ tiene kerneles.

iii) $\mathcal{I}(\Lambda)$ tiene cokerneles.

Ejemplo 2.65. Sea Λ un anillo noetheriano (es decir, un anillo el cual es noetheriano izquierdo y derecho). Sea $\rho(\Lambda)$ la categoría de Λ-módulos proyectivos finitamente generados. Entonces es bien sabido que $\rho(\Lambda)$ tiene pseudo-kerneles, lo que no es bien conocido es que $\rho(\Lambda)$ también tiene pseudo-cokerneles. Esto puede ser visto como sigue: sea $\rho(\Lambda^{op})$ la categoría de Λ^{op}-módulos proyectivos finitamente generados. Como Λ^{op} también es noetheriano entonces $\rho(\Lambda^{op})$ tiene pseudo-kerneles. Ahora el funtor contravariante $D : \rho(\Lambda) \to \rho(\Lambda^{op})$ dado por $P \to P^* = Hom_\Lambda(P, \Lambda)$ es una dualidad entre $\rho(\Lambda)$ y $\rho(\Lambda^{op})$.

Para ver que D es una dualidad, consideremos el funtor contravariante $D' : \rho(\Lambda^{op}) \to \rho(\Lambda)$ el cual es dado por $Q \mapsto Q^*$. Ahora el morfismo $\phi_p : P \to P^{**}$ dado por $\phi_P(x)(f) = f(x)$ para todo x en P y f en P^* define un morfismo $1_{\phi(\Lambda)} \to D'D$ el cual es un isomorfismo de funtores, esto se sigue de que cada ϕ_P es un isomorfismo por el hecho de que cada P en $\rho(\Lambda)$ es un Λ-módulo proyectivo finitamente generado. Similarmente, como cada ψ_Q es un isomorfismo por el hecho que cada uno de los Q es un Λ-módulo proyectivo finitamente generado, se sigue que el morfismo $\psi_Q : Q \to Q^{**}$ dado por $\psi_Q(y)(g) = g(y)$ para todo y en Q y g en Q^* define un morfismo $1_{\rho(\Lambda^{op})} \to DD'$ el cual es un isomorfismo de funtores. Por lo tanto D es un dualidad. El hecho que $\rho(\Lambda^{op})$ tiene pseudo-kerneles ahora implica que $\rho(\Lambda)$ tiene pseudo-cokerneles.

2.7. Categorías aditivas y categorías abelianas.

Definición 2.66. Una A-categoría preaditiva $\mathcal{C}$ es llamada una A**-categoría aditiva** si y sólo si cumple las siguientes condiciones:

a) Existe un objeto cero 0 en $\mathcal{C}$, es decir, existe un objeto 0 con la propiedad que $Hom_{\mathcal{C}}(0, C) = \{0\}$ y $Hom_{\mathcal{C}}(C, 0) = \{0\}$ (como A-módulos) para todo C en $\mathcal{C}$.

b) Existen sumas finitas en $\mathcal{C}$.

Proposición 2.67. *Si $\mathcal{C}$ es una A-categoría aditiva, entonces $\coprod_{i\in I} C_i = \prod_{i\in U} C_i$, para un conjunto finito indexado I.*

El único morfismo $0 \to C$ es siempre un monomorfismo fuerte y el único morfismo $C \to 0$ siempre es un epimorfismo fuerte. Si C_1 y C_2 son objetos de la categoría aditiva $\mathcal{C}$ entonces, el morfismo cero $0 : C_1 \to C_2$ es la composición de los morfismos $C_1 \to 0$ y $0 \to C_2$. Más aún, $\alpha : C_1 \to C_2$ es un monomorfismo si y sólo si $\alpha f = 0$ implica $f = 0$ para todo morfismo $f : C_0 \to C_1$ y $\beta : C_1 \to C_2$ es un epimorfismo si y sólo si $g\beta = 0$ implica $g = 0$ para todo morfismo $g : C_2 \to C_3$.

Proposición 2.68. *Si $f : C_1 \to C_2$ es un morfismo en la categoría aditiva $\mathcal{C}$, entonces un morfismo $g : C_0 \to C_1$ es un kernel para f si y sólo si:*

a) fg es el morfismo cero $0 : C_0 \to C_2$ y *b*) *Si $g' : X \to C$ tiene la propiedad que $fg' = 0$, entonces existe un único morfismo $X \to C_0$ tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr, "g'"] & \\ C_0 \arrow[rr, "g"'] & & C_1 \end{tikzcd}$$

Como estamos en un categoría aditiva estas dos condiciones implican que g es un monomorfismo.

Similarmente para los cokerneles existe una proposición análoga.

Proposición 2.69. *Si $f : C_1 \to C_2$ es un morfismo en la categoría aditiva $\mathcal{C}$, entonces un morfismo $h : C_2 \to C_3$ es un cokernel para f si y sólo si:*

a) *hf es el morfismo 0, y*

b) *Si $h' : C_2 \to Y$ tiene la propiedad que $h'f = 0$, entonces existe un único morfismo $C_3 \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} & C_3 \arrow[dr] & \\ C_2 \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "h'"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Ahora supóngase que C es una categoría aditiva con la propiedad que todo morfismo tiene un kernel y un cokernel (único hasta isomorfismo). Entonces si tenemos el morfismo $f : C_1 \to C_2$ obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} Kerf \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & CokerKerf \\ & C_2 & \end{tikzcd}$$

donde el morfismo $C_1 \to CokerKerf$ es un epimorfismo fuerte como fue establecido en la sección anterior. Luego por la proposición 2.69 existe un único morfismo $CokerKerf \to C_2$ con la propiedad que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} Kerf \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & CokerKerf \arrow[dl] \\ & C_2 & \end{tikzcd}$$

De manera análoga si dado un morfismo $f : C_1 \to C_2$ obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[d, "f"] & \\ KerCokerf \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & Cokerf \end{tikzcd}$$

donde el morfismo $KerCokerf \to C_2$ es un monomorfismo fuerte como fue establecido en la sección anterior. Entonces por la proposición 2.68 existe un único morfismo $C_1 \to KerCokerf$ con la propiedad que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[dl] \arrow[d, "f"] & \\ KerCokerf \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & Cokerf \end{tikzcd}$$

Uniendo estas observaciones y de la definición 2.12 y definición 2.13 de epimorfismo fuerte y monomorfismo fuerte, respectivamente, existe un único morfismo $CokerKerf \to KerCokerf$ que hace conmutar el diagrama.

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "epi.fuerte"] \arrow[d] & CokerKerf \arrow[d] \arrow[dl, dashed] \\ KerCokerf \arrow[r, "mono.fuerte"] & C_2 \end{tikzcd}$$

Este morfismo no es necesariamente un isomorfismo. Sin embargo notemos que de la definición 2.14 de la imagen y coimagen, y de sus propiedades básicas, tenemos que si tal morfismo es un monomorfismo entonces $CokerKerf \simeq Coimf$, si es un epimorfismo entonces $KerCokerf \simeq Imf$.

Definición 2.70. Sea C una categoría aditiva con kerneles y cokerneles. Si el morfismo definido anteriormente $CokerKerf \to KerCokerf$ es un isomorfismo para todo f en C, entonces C se dice una **categoría abeliana**.

O equivalentemente una categoría abeliana es una categoría aditiva tal que:

i) Todo morfismo tiene un kernel y un cokernel.

ii) Todo monomorfismo es un kernel y todo epimorfismo es un cokernel.

Proposición 2.71. *Si C es una categoría abeliana entonces, $Coimf$, $CokerKerf$, $KerCokerf$ e Imf son isomorfos para todo morfismo f en C.*

Es interesante saber que existen ejemplos de categorías aditivas con kerneles y cokerneles y en la cual todo morfismo tiene un análisis pero no es una categoría abeliana.

Ejemplo 2.72. Sea Λ un anillo noetheriano. Sea $\mathbf{m}$ la categoría de Λ-módulos finitamente generados. Supóngase que $Hom_\Lambda(*, \Lambda)$ es un funtor fiel (el cual es un caso en cualquier anillo local artiniano). Denotamos por $Hom_\Lambda(M, \Lambda)$ por M^* para cada M en $\mathbf{m}$. Sea $\phi : M \to M^{**}$ el homomorfismo canónico definido por $\phi(x)(f) = f(x)$. Sea C la subcategoría de $\mathbf{m}$ cuyos objetos son esos M con $\phi : M \to M^{**}$ un monomorfismo (es decir, M esta contenido en un módulo libre). Entonces C es una subcategoría aditiva con kerneles y cokerneles. Más aún, toda función tiene un análisis. Pero C es abeliana si y sólo si $C = \mathbf{m}$; es decir, si y sólo si todo módulo finitamente generado es un submódulo de un módulo libre (o equivalentemente, si y sólo si Λ es auto-inyectiva).

Para demostrar que C tiene las propiedades afirmadas anteriormente considere un morfismo $f : M_1 \to M_2$ en C. Entonces el kernel de f (en el sentido de teoría de módulos) es un objeto de

C. Ahora consideremos la suceción exacta (en $\mathbf{m}$)

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

L no necesariamente esta en C, pero $\phi(L) \subset L^{**}$ esta en C y $M_2 \to \phi(L)$ es $Cokerf$ en C. Esto es cierto porque $Hom_C(M, C) \simeq Hom_C(\phi(M), L)$ para todo C en C. Por lo tanto la exactitud de

$$0 \to Hom_C(L, C) \to Hom_C(M_2) \to Hom_C(M_1, C)$$

implica que

$$0 \to Hom_C(\phi(L), C) \to Hom_C(M_2, C) \to Hom_C(M_1, C)$$

es exacta en C. Entonces hemos mostrado que kerneles y cokerneles existen en C.

Ahora mostraremos que todo $f : M_1 \to M_2$ tiene un análisis. No es difícil ver que los monomorfismo en C son monomorfismos de módulos, por lo tanto $1-1$. Mostramos que los epimorfismo son sobreyectivos. Sea f un epimorfismo en C. Supóngase que la sucesión

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

es exacta en $\mathbf{m}$. Queremos probar que N es cero. Tenemos la sucesión exacta.

$$0 \to Hom_C(N, \Lambda) \to Hom_C(M_2, \Lambda) \to Hom_C(M_1, \Lambda)$$

Pero como Λ esta en C, $(N, \Lambda) = 0$, por lo tanto $N = 0$.

Estos resultados nos dan la información adicional que todo monomorfismo es un monomorfismo fuerte y todo epimorfismo es un epimorfismo fuerte. Luego $M_1 \to f(M_1) \to M_2$ es un análisis.

Finalmente, queremos verifcar que si C no es $\mathbf{m}$ entonces C no es abeliana. Si C no es $\mathbf{m}$ se sigue que existe un módulo L tal que $L \to \phi(L)$ no es un isomorfismo. Considérese el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& K' \arrow[r] & F \arrow[r] & \phi(L) \arrow[d] & \\
& & & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde F es un módulo libre finitamente generado sobre L. Sea K el kernel de esta aplicación y sea $f : K \to F$ la inclusión. Entonces hemos visto que $\phi(L)$ es $Cokerf$ de donde K' es $KerCokerf$. Pero K es $CokerKerf$ y como L' no es isomorfo a $\phi(L)$, K no es isomorfo a K'.

Un contraejemplo es el siguiente. Sea k un campo y sea $\Lambda = \frac{k[x,y]}{(x,y)^2}$. Como el soclo de Λ (la parte semisimple de Λ) es de dimensión 2, Λ no es autoinyectiva.

Ahora veremos algunas propiedades de las categorías abelianas, las cuales utilizaremos en este trabajo.

Proposición 2.73. *En una categoría abeliana todo monomorfismo es un kernel y todo epimorfismo es un cokernel, en particular, todo monomorfismo es un monomorfismo fuerte y todo epimorfismo es un epimorfismo fuerte.*

Note que cuando uno tiene categorías abelianas se puede considerar el concepto de sucesiones exactas.

Definición 2.74. Una sucesión

$$C_1 \xrightarrow{f} C_2 \xrightarrow{g} C_3$$

en una categoría abeliana se dice **sucesión exacta** si $gf = 0$ y si el morfismo $Imf \to Kerg$ es un isomorfismo.

Definición 2.75. Supóngase que tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

en una categoría. Entonces un **pullback** de este diagrama, es un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "f_0"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

con la propiedad que para todo diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g_0'"] \arrow[d, "f_0'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

existe un único morfismo $h : X \to P$ tal que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f_0'"'] & P \arrow[d, "f_0"] \\ & A \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g_0'"'] & P \arrow[d, "g_0"] \\ & B \end{tikzcd}$$

conmutan, es decir, $f_0' = f_0 h$ y $g_0' = g_0 h$

Definición 2.76. Similarmente a la definición anterior, dado un diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

en una categoría. Entonces un **pushout** de este diagrama es un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "f_1"] \\ C \arrow[r, "g_1"'] & P \end{tikzcd}$$

con la propiedad que para todo diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "f_1'"] \\ C \arrow[r, "g_1'"'] & X \end{tikzcd}$$

existe un único morfismo $l : P \to X$ tal que los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "l"] & X \\ B \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, "f_1'"'] & \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "l"] & X \\ C \arrow[u, "g_1"] \arrow[ur, "g_1'"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $f_1' = lf_1$ y $g_1' = lg_1$.

Proposición 2.77. *En una categoría abeliana todo diagrama*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

tiene un pullback que es único hasta isomorfismo y todo diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

tiene un pushout único hasta isomorfismo.

Otras conceptos muy útiles son los de objetos proyectivos y objetos inyectivos. No necesitamos una categoría abeliana para definir tales objetos, debido a que al menos una categoría aditiva es suficiente pero es en estos contextos es que estaremos usando tales objetos. Las definiciones son enteramente análogas a las mismas nociones para módulos.

Definición 2.78. Un objeto P en una categoría $\mathcal{C}$ se dice **proyectivo** si dado cualquier epimorfismo $f : C_1 \to C_2$ y un morfismo $h : P \to C_2$ entonces, existe un morfismo $\tilde{h} : P \to C_1$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\tilde{h}"'] \arrow[d, "h"] & \\ C_1 \arrow[r, "f"'] & C_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Un objeto Q en una categoría $\mathcal{C}$ se dice **inyectivo** si dado culaquier monomorfismo $g : C_0 \to C_1$ y un morfismo $h : C_0 \to Q$ entonces, existe un morfismo $\tilde{h} : C_1 \to Q$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & Q & \\ 0 \arrow[r] & C_0 \arrow[u, "h"] \arrow[r, "g"'] & C_1 \arrow[ul, dashed, "\tilde{h}"'] \end{tikzcd}$$

Como una alternativa familiar para categorías abelianas tenemos:

Proposición 2.79. *En una categoría abeliana un objeto P es proyectivo si y sólo si dada una sucesión exacta $C_1 \to C_2 \to 0$ entonces, la sucesión $(P, C_1) \to (P, C_2) \to 0$ es exacta. Un objeto Q es inyectivo si y sólo si dada una sucesión exacta $0 \to C_0 \to C_1$ entonces, la sucesión $(C_1, Q) \to (C_0, Q) \to 0$ es exacta.*

Definición 2.80. Si C es un objeto en la categoría abeliana $\mathcal{C}$ definimos una **presentación proyectiva** de C como una sucesión exacta $P_2 \to P_1 \to C \to 0$ donde P_1 y P_2 son objetos proyectivos en $\mathcal{C}$. Una **copresentación inyectiva** de C es una sucesión exacta $0 \to C \to Q_1 \to Q_2$ donde Q_1 y Q_2 son objetos inyectivos en $\mathcal{C}$.

Si todo objeto en $\mathcal{C}$ tiene una presentación proyectiva decimos que $\mathcal{C}$ es una categoría con **suficientes proyectivos**. De igual manera si todo objeto tiene una copresentación inyectiva decimos que $\mathcal{C}$ es una categoría con **suficientes inyectivos**.

En el siguiente capítulo haremos uso de morfismos **idempotentes**. Recordemos que un morfismo $f : C \to C$ es idempotente si y sólo si $f^2 = f$. Un idempotente se dice que se escinde si y sólo si tiene kernel y cokernel. Si f es idempotente que se escinde entonces C es isomorfo a la suma $Kerf + Cokerf$. En una categoría aditiva arbitrarira todos los idempotentes no necesariamente se escinden, pero por supuesto en el caso en que $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana todo idempotente se escinde.

En los siguientes capítulos cuando estamos considerando categorías aditivas o abelianas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ y un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entonces se asumirá que F es al menos un funtor aditivo sino se dice otra cosa.

Capítulo 3

Equivalencias de representaciones.

3.1. Preliminares de la teoría de representaciones.

La teoría clásica para la representación de un anillo Λ, se refiere primero a ver como los Λ-módulos se escinden en sumas directas de otros módulos y describir los módulos inescindibles, esos que no pueden ser escritos como suma directa de dos Λ-módulos no cero.

Así la teoría de representaciones estudia la categoría $mod(\Lambda)$, en lo que concierne a la estructura aditiva más que a la estructura abeliana de la categoría. Por esta razón, es mejor considerar la teoría de representaciones esencialmente como el estudio de categorías aditivas en la cual todos los idempotentes se escinden. Aplicaciones desde este punto de vista de la teoría de representaciones de anillos serán dadas en la sección 3.

Todas las categorías aditivas que utilizamos en este capítulo tienen la propiedad que los idempotentes se escinden. Por lo tanto para simplificar terminología, cuando decimos que una categoría es una categoría aditiva esto significará automaticamente que los idempotentes en la categoría se escinden.

Para una categoría aditiva $\mathcal{A}$ denotaremos por $Rep(\mathcal{A})$ la colección de todas las clases de isomorfismos de objetos en $\mathcal{A}$. Por cada A en $\mathcal{A}$ denotaremos su clase de isomorfismo en $Rep(\mathcal{A})$ por $[A]$. En $Rep(\mathcal{A})$ introducimos la ley de composición dada por:

$$[A] + [A'] = [A + A']$$

donde $A + A'$ es la suma de A y A' en $\mathcal{A}$. Es claro que esta ley de composición es conmutativa, asociativa y tiene elemento neutro $[0]$. Por lo tanto $Rep(\mathcal{A})$ es un monoide conmutativo si $Rep(\mathcal{A})$ es un conjunto o equivalentemente si $\mathcal{A}$ es una categoría esqueléticamente pequeña.

Supóngase que $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es un funtor aditivo. Entonces asociado al funtor F tenemos la función $Rep(F) = Rep(\mathcal{A}) \to Rep(\mathcal{A}')$, definida por $Rep(F)([A]) = [F(A)]$ para todo A en $\mathcal{A}$. Claramente $Rep(F)$ satisface las siguientes propiedades:

i) $Rep(F)([A] + [A']) = Rep(F)([A]) + Rep(F)([A]')$.
Demostración: Esto se debe a que $Rep(F)([A] + [A']) = Rep(F)([A + A']) = [F(A + A')] = [F(A) + F(A')] = Rep(F)([A]) + Rep(F)([A]')$.

■

ii) $Rep(F)([0]) = [0]$.

Así si $\mathcal{A}$ es esqueléticamente pequeña, $Rep(F) : Rep(\mathcal{A}) \to Rep(\mathcal{A}')$ es un morfismo de monoides. Obviamente para cada categoría aditiva $\mathcal{A}$ el funtor identidad $1_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tiene la propiedad que:

$$Rep(1_{\mathcal{A}}) : Rep(\mathcal{A}) \to Rep(\mathcal{A})$$

es la identidad. Como $Rep(GF)([A]) = [GF(A)] = [G(F(A))] = Rep(G)[F(A)] = Rep(G)(Rep(F)([A])$, para cada par de funtores funtores $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ y $G : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$

$$Rep(GF) = Rep(G)Rep(F)$$

Entonces si denotamos por *Add* la categoría de categorías aditivas esqueléticamente pequeñas y por *Monoid* la categoría de todos los monoides tenemos el funtor

$$Rep : Add \longrightarrow Monoid$$

$$\mathcal{A} \longmapsto Rep(\mathcal{A})$$

Llamaremos **funtor de representación** a $Rep : Add \longrightarrow Monoid$. El estudio de este funtor será nuestro mayor propósito en este capítulo.

Recordemos ahora algunas definiciones clásicas y resultados. Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva. Decimos que un elemento $[A]$ en $Rep(\mathcal{A})$ es inescindible si y sólo si $[A] = [B] + [C]$ implica que $[B] = [0]$ o $[C] = [0]$. Un objeto A en $\mathcal{A}$ se dice inescindible si $[A]$ en $Rep(\mathcal{A})$ es inescindible. Como todos los idempotentes en $\mathcal{A}$ se escinde, un objeto A en $\mathcal{A}$ y por tanto $[A]$ en $Rep(\mathcal{A})$ es inescindible si y sólo si $End(A)$ no tiene idempotentes no triviales (es decir, 0 y 1 son los únicos idempotentes en $End(A)$), notemos que dado f en $End(A)$ idempotente, entonces $A = Kerf + Cokerf$.

Decimos que una categoría aditiva $\mathcal{A}$ es **una categoría Krull-Schmidt** si todo elemento de $Rep(\mathcal{A})$ puede ser escrito en una y sólamente una manera en una suma finita de elementos inescindibles no cero. Obviamente si $\mathcal{A}'$ es una subcategoría plena de $\mathcal{A}$ la cual es aditiva, entonces $\mathcal{A}'$ es una categoría Krull-Schmidt si $\mathcal{A}$ lo es.

Observación 3.1. Es bien conocido que la categoría de módulos finitamente generados sobre un anillo de artin Λ es una categoría Krull-Schmidt.

Estas serán los principales tipos de categorías Krull-Schmidt que serán de nuestro interés.

Proposición 3.2. *Si $\mathcal{A}$ es una categoría esqueléticamente pequeña, entonces $\mathcal{A}$ es una categoría Krull-Schmidt si y sólo si $Rep(\mathcal{A})$ es un monoide libre con el conjunto de elementos inescindibles en $Rep(\mathcal{A})$ como una base libre.*

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ una categoría Krull-Schmidt, entonces todo elemento de $Rep(\mathcal{A})$ puede ser escrito en una sola manera como suma de inescindibles no cero. Por otra parte por lo visto anteriormente $Rep(\mathcal{A})$ es un monoide. Sea $\{[A_i]\}_{i\in I}$ el conjunto de inescindibles en $Rep(\mathcal{A})$, como

$\mathcal{A}$ es Krull-Schimidt $\{[A_i]\}_{i\in I}$ es una base libre de $Rep(\mathcal{A})$ y por lo tanto $Rep(\mathcal{A})$ es un monoide libre.

Por último supóngase que $Rep(\mathcal{A})$ es un monoide libre y con el conjunto de elementos inescindibles $\{[A_i]\}_{i\in I}$ una base libre en $Rep(\mathcal{A})$, luego todo $[A]$ puede ser escrito de una sola manera como suma finita de elementos inescindibles no cero, es decir, $\mathcal{A}$ es una categoría Krull-Schmdt.

■

Definición 3.3. Decimos que un elemento A en $\mathcal{A}$ es un **generador de la representación de** $\mathcal{A}$, si el elemento $[A]$ en $Rep(\mathcal{A})$ tiene la propiedad que para cada B en $\mathcal{A}$ existe un entero n tal que $n[A] = [B] + [C]$ para algún C en $\mathcal{A}$.

Una categoría aditiva $\mathcal{A}$ se dice de **tipo de representación finita** si $\mathcal{A}$ tiene un generador de la representación.

Definición 3.4. Sea Λ un álgebra de artin, se dice que es **de tipo de representación finita** o de una una manera más corta de **tipo finito**, si existe solamente un numero finito de objetos inescindibles en $mod(\Lambda)$. Tales álgegras son las de mayor interés de estudio en nuestro trabajo.

Como un ejemplo tenemos la categoría $\rho(\Lambda)$ que consiste de todos los módulos proyectivos finitamente generados sobre un anillo Λ. Claramente $\rho(\Lambda)$ es de tipo de representación finita puesto que Λ mismo es un generador de la representación para la categoría $\rho(\Lambda)$.

No es difícil ver que si una categoría $\mathcal{A}$ es de tipo de representación finita entonces $\mathcal{A}$ es esqueléticamente pequeña. También si $\mathcal{A}$ es una categoría Krull-Schmidt, $\mathcal{A}$ es de tipo de representación finita si y sólo si $Rep(\mathcal{A})$ tiene solamente un número finito de elementos inescindibles. Más aún, supóngase que $\mathcal{A}$ es de tipo de representación finita y $A_1, \ldots, A_n$ son objetos en $\mathcal{A}$ tales que $[A_1], \ldots, [A_n]$ son todos los elementos inescindibles de $Rep(\mathcal{A})$. Entonces $\sum_{i=1}^{n} A_i$ en $\mathcal{A}$ es un generador de la representación de $\mathcal{A}$.

Ahora describiremos los tipos de funtores que son de interés para el presente trabajo. Un tal funtor puede ser visto como una manera de decir que la teoría de representaciones de dos categorías aditivas son esencialmente la misma.

Observación 3.5. Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ un funtor, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $Rep(F) : Rep(\mathcal{A}) \to Rep(\mathcal{A}')$ es biyectivo.

b) F es un funtor denso, el cual tiene la propiedad que si A_1 y A_2 estan en $\mathcal{A}$ y $F(A_1) \simeq F(A_2)$ en $\mathcal{A}'$, entonces $A_1 \simeq A_2$ en $\mathcal{A}$.

Demostracióm: Claramente $a)$ implica $b)$. Sea A' un objeto en la categoría $\mathcal{A}'$ como $Rep(F)$ es sobreyectivo existe A en $\mathcal{A}$ tal que $[F(A)] = [A']$, así $F(A) \simeq A'$ y por lo tanto F es denso. Además si A_1 y A_2 son objetos en $\mathcal{A}$ tales que $F(A_1) \simeq F(A_2)$ entonces $[F(A_1)] = [F(A_2)]$ y por ser F inyectivo $[A_1] = [A_2]$, lo cual implica que $A_1 \simeq A_2$.

Para ver que $b)$ implica $a)$, notemos que por ser F denso $Rep(F)$ es sobreyectivo, por otro lado dados dos objetos A_1 y A_2 en $\mathcal{A}$ tales que $[F(A_1)] = [F(A_2)]$ se sigue que $F(A_1) \simeq F(A_2)$ lo cual implica por $b)$ que $A_1 \simeq A_2$ de donde $[A_1] = [A_2]$ y por lo tanto $Rep(F)$ es inyectivo.

■

Definición 3.6. Un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es llamado **equivalencia débil de representación** si satisface cualesquiera de las dos condiciones equivalentes anteriores.

Observación 3.7. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son categorías aditivas esqueléticamente pequeñas entonces un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es una equivalencia débil de representación si y sólo si $Rep(F) : Rep(\mathcal{A}) \to Rep(\mathcal{A}')$ es un isomorfismo de monoides.

Ahora bien sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una equivalencia débil de representación. Algunas de las propiedades básicas que tenemos son:

a) $F(A) = 0$ si y sólo si $A = 0$.
Esto es por inciso b) de nuestra observación 3.5 y además el objeto 0 es único.

b) A es inescindible si y sólo si $F(A)$ es inescindible.
Demostración: Dado A en $\mathcal{A}$ tal que $[F(A)] = [A_1'] + [A_2']$ entonces por ser F una equivalencia débil de representación existen A_1 y A_2 en $\mathcal{A}$ tales que $[A_1'] = [F(A_1)]$ y $[A_2'] = [F(A_2)]$, es decir, $A = A_1 + A_2$ y por lo tanto A es inescindible si y sólo si $F(A)$ es inescindible.

c) Todo objeto en $\mathcal{A}$ es suma finita de objetos inescindibles si y sólo si todo objeto en $\mathcal{A}'$ tiene la misma propiedad (recordemos $Rep(F)$ es biyectivo).

d) $\mathcal{A}$ es una categoría Kull-Schmidt si y sólo si $\mathcal{A}'$ es una categoría Krull-Schmidt.

e) A en $\mathcal{A}$ es un generador de la representación si y sólo si $F(A)$ es $\mathcal{A}$ es un generador de la representación.

f) $\mathcal{A}$ es de tipo de representación finita si y solo $\mathcal{A}'$ es de tipo de representación finita.
Esta es una consecuencia del inciso e).

■

A continuación enunciaremos otra definición que surge como una consecuencia de la definición de equivalencia débil de representación.

Definición 3.8. Dos categorías aditivas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ tienen **representaciones débilmente equivalentes** si existe un conjunto finito $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n = \mathcal{A}'$ de categorías aditivas tal que para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, existen equivalencias débiles de representación $F_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_{i+1}$ o $F_i : \mathcal{A}_{i+1} \to \mathcal{A}_i$.

La definición anterior toma en cuenta el hecho que la existencia de una equivalencia débil de representación $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ no necesariamente implica la existencia de una equivalencia débil de representación de $\mathcal{A}'$ a $\mathcal{A}$.

Algunas de las propiedades básicas de categorías que tienen representaciones débilmente equivalentes son:

a) La relación "$\mathcal{A}$ se relaciona con $\mathcal{A}'$ si y sólo si tienen representaciones débimente equivalentes", es una relación de equivalencia.

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ tienen representaciones débilmente equivalentes entonces:

b) $\mathcal{A}$ es una categoría Krull-Schmidt si y sólo si $\mathcal{A}'$ es una categoría Krull-Schmidt.

c) $\mathcal{A}$ es de tipo de representación finita si y sólo si $\mathcal{A}'$ es de tipo de representación finita.

d) $\mathcal{A}$ es esqueléticamente pequeña si y sólo si $\mathcal{A}'$ lo es.

e) Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son categorías esqueléticamente pequeñas, entonces $Rep(\mathcal{A})$ y $Rep(\mathcal{A}')$ son monoides isomorfos.

f) El conjunto de elementos inescindibles en $Rep(\mathcal{A})$ y el conjunto de elementos inescindibles en $Rep(\mathcal{A}')$ tienen la misma cardinalidad.

Mientras que la definición de una equivalencia débil de representación tiene la apariencia de simplicidad, las únicas representaciones débilmente equivalentes conocidas por Maurice Auslander, son funtores que satisfacen condiciones fuertes las cuales son descritas a continuación:

Proposición 3.9. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ un funtor pleno.*

a) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) Para cada A en $\mathcal{A}$, un endomorfismo $f : A \to A$ es un isomorfismo si $F(f) = 1_{F(A)}$.

ii) Para cada A en $\mathcal{A}$, el kernel del epimorfismo de anillos $F : End(A) \to End(F(A))$ está contenido en el radical de $End(A)$.

iii) Un morfismo $f : A \to A'$ en $\mathcal{A}$ es un isomorfismo si $F(f) : F(A) \to F(A')$ es un isomorfismo en $\mathcal{A}'$.

b) Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ satisface cualesquiera de las condiciones equivalentes de a) y es denso entonces F es una equivalencia débil de representación.

Demostración: Primero demostremos la equivalencia del inciso *a*). Veamos que *i*) implica *ii*). Recordemos que el radical de un anillo Λ ($rad(\Lambda)$), es la intersección de todos sus ideales maximales. Sea $K = KerF$ y supóngase que K no esta contenido en $rad(End(A))$, el radical de $End(A)$, por tanto existe un morfismo f en K tal que f no esta en $rad(End(A))$, es decir existe un ideal maximal m, tal que f no esta en m. Así mismo existe un morfismo g en m tal que $f + g = 1_A$, de donde tenemos que $1_{F(A)} = F(f + g) = F(f) + F(g) = F(g)$, luego $F(g) = 1_{F(A)}$ y por *i*), g es un isomorfismo lo cual es una contradicción dado que esto implica que $1 \in m$. Por lo tanto K esta contenido en $rad(End(A))$.

Veamos que *iii*) implica *i*). Sea $f : A \to A$ tal que $F(f) = 1_{F(A)}$, como $1_{F(A)}$ es un isomorfismo en $\mathcal{A}'$ por *iii*), f es un isomorfismo en $\mathcal{A}$.

Queda por demostrar *b*) Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ un funtor denso y pleno que cumple cualquiera de las condiciones equivalentes anteriores. Sean A_1, A_2 en $\mathcal{A}$ tales que $F(A_1) \simeq F(A_2)$ en $\mathcal{A}'$, por *iii*) del inciso anterior $A_1 \simeq A_2$.

■

Como solamente trabajaremos con los funtores que satisfacen alguna de las condiciones equivalentes anteriores, para simplificar nuestro lenguaje formularemos la siguiente definición.

Definición 3.10. Un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ se dice una **equivalencia de representación** si es un funtor pleno y denso, con la propiedad que un morfismo $f : A_1 \to A_2$ en $\mathcal{A}$ es un isomorfismo si el morfismo $F(f) : F(A_1) \to F(A_2)$ es un isomorfismo en $\mathcal{A}'$.

Algunas de las propiedades básicas para un funtor F que es equivalencia de representación, son:

i) El funtor identidad $1 : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es una equivalencia de representación.

ii) La composición de dos equivalencias de representación, es una equivalencia de representación.

Demostración: Primero sean F, G dos funtores $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{A}' \xrightarrow{G} \mathcal{A}''$ densos y plenos, entonces su composición también es densa y plena. Ahora bien sean A_1, A_2 en $\mathcal{A}$ tales que $GF(A_1) \simeq GF(A_2)$, como G es una equivalencia de representación tenemos que $F(A_1) \simeq F(A_2)$, luego por ser F un equivalencia de representación $A_1 \simeq A_2$.

$\blacksquare$

iii) Todas las equivalencias de representación son equivalencias débiles de representación.

Definición 3.11. Dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ se dice que **tienen representaciones equivalentes** si existe un conjunto finito $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n = \mathcal{A}'$ de categorías tal que para cada $i = 0, \ldots, n-1$ existen equivalencias de representación $F_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_{i+1}$ o $F_i : \mathcal{A}_{i+1} \to \mathcal{A}_i$.

Observación 3.12. La relación "$\mathcal{A}$ esta relacionado con $\mathcal{A}'$ "si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ tienen representaciones equivalentes es una relación de equivalencia.

Finalizamos esta sección con un ejemplo el cual es conveniente tener disponible en las siguientes secciones. Sin embargo, revisamos primero algunos hechos concernientes a morfismos esenciales.

Sea C una categoría abeliana. Recordemos que un morfismo $f : C \to D$ se dice **esencial** si es un monomorfismo y cualquier morfismo $g : D \to X$ en C es un monomorfismo siempre que la composición gf es un monomorfismo. En el caso en que C sea la categoría de módulos un morfismo $f : C \to D$ es esencial si y sólo si es un monomorfismo y dado cualquier submódulo D' de D tal que $f(C) \cap D' = 0$, entonces $D' = 0$. También dados los morfismos $f : C \to D$ y $g : D \to E$, tenemos:

i) gf es esencial si f y g son esenciales.

ii) Si gf es esencial y f,g son monomorfismos, entonces f es esencial.

iii) Si $f : C \to D$ es esencial y C es inyectivo, entonces f es un isomorfismo.

Más aún, supóngase $\{f_i : C_i \to D_i\}_{i \in I}$ es una familia de morfismos. Entonces $\sum f_i : \sum C_i \to \sum D_i$ es esencial si y sólo si cada $f_i : C_i \to D_i$ es esencial.

Definición 3.13. Un morfismo $j : C \to Q$ en C se dice una **envolvente inyectiva** si j es esencial y Q es inyectivo.

Si $j : C \to Q$ es una envolvente inyectiva y $f : C \to Q'$ es esencial entonces existe un morfismo $h : Q' \to Q$ tal que $j = hf$ y cualquier tal morfismo h es un monomorfismo.

Notemos que Q' es inyectivo si y sólo si cualquier $h : Q' \to Q$ tal que $j = hf$ es un isomorfismo. Decimos que $\mathcal{C}$ tiene **envolventes inyectivas** si para cada objeto C en $\mathcal{C}$ existe una envolvente inyectiva $f : C \to Q$. Si $\mathcal{C}$ tiene envolventes inyectivas, denotamos la subcategoría plena de $Morph\mathcal{C}$ cuyos objetos son las envolventes inyectivas en $\mathcal{C}$ por $Inj(\mathcal{C})$. No es difícil mostrar que $Inj(\mathcal{C})$ en una categoría aditiva.

Ejemplo 3.14. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana con envolventes inyectivas. Entonces el funtor $\phi : Inj(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ dado por $\phi(C, Q, j) = C$ es una equivalencia de representación.

Demostración: Primero veamos que la aplicación $\phi : Inj(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ dada por $\phi(C, Q, j) = C$ es un funtor. Sean (C, Q, j), (C', Q', j') y (C'', Q'', j'') objetos y morfismos $(f, g) : (C, Q, j) \to (C', Q', j')$, $(f', g') : (C', Q', j') \to (C'', Q'', j'')$ morfismos en $Inj(\mathcal{C})$. Tenemos por definición de ϕ que $\phi((f, g)) = f : C \to C'$ con lo que obtenemos que $\phi((f', g')(f, g)) = \phi((f'f, g'g)) = f'f = \phi((f', g'))\phi((f, g))$. Y por último $\phi((1_C, 1_Q)) = 1_C$, con esto terminamos de demostrar que es un funtor.

Tal funtor ϕ induce una función suprayectiva en $Obj(Inj(\mathcal{C})) \longrightarrow Obj(\mathcal{C})$, ya que por hipótesis $\mathcal{C}$ es una categoría con envolventes inyectivas. Con esto tenemos que ϕ es un funtor denso.

Ahora bien veamos que es un funtor pleno. Sean C, C' objetos en $\mathcal{C}$ y (C, Q, j), (C', Q', j') sus respectivas envolventes inyectivas, supóngase que tenemos un morfismo $f : C \to C'$ en $\mathcal{C}$ luego por ser Q' inyectivo existe $g : Q \to Q'$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & Q \arrow[d, "g"] \\ 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "j'"'] & Q' \end{tikzcd}$$

Así tenemos objetos (C, Q, j) y (C', Q', j') y un morfismo (f, g) en $Inj(\mathcal{C})$ tal que $\phi((f, g)) = f$ y con esto demostramos que el funtor ϕ es un funtor pleno.

Terminaremos nuestra demostración si mostramos que un morfismo (f, g) en $Inj(\mathcal{C})$ es un isomorfismo cuando $f : C \to C'$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}$. Sin embargo si $f : C \to C'$ es un isomorfismo entonces el hecho que j y j' son envolventes inyectivas implica que $g : Q \to Q'$ es un isomorfismo.

Por lo tanto f y g son isomorfismos si f lo es. Esto muestra que el morfismo (f, g) en $Inj(\mathcal{C})$ es un isomorfismo si f es un isomorfismo en $\mathcal{C}$. Con esto terminamos de demostrar que el funtor ϕ es una equivalencia de representación.

■

3.2. Categorías de Grassman.

Antes de pasar a nuestro principal objetivo de esta sección, el cual es mostrar que varias subcategorías aditivas plenas de las categorías de módulos sobre ciertos anillos de artin tienen representaciones equivalentes es necesario desarrollar la noción de una categoría de Grassman. Como el nombre lo sugiere esta es una generalización de una situación familiar en la cual uno estudia la colección de todos los subespacios de una dimensión fija en un espacio vectorial.

Sea Λ un anillo y A un bimódulo. La categoría Grassman del par (Λ, A), que denotaremos por $Gr(\Lambda, A)$, es dada por los siguientes datos.

Los objetos de $Gr(\Lambda, A)$ consisten de todas las ternas (M_1, M_2, f) donde los M_i son Λ-módulos izquierdos y $f : M_1 \to Hom_\Lambda(A, M_2)$ es un monomorfismo de Λ-módulos izquierdos, aquí $Hom_\Lambda(A, M_2)$ es considerado como un Λ-módulo izquierdo en el sentido usual, es decir, dado A un Λ-bimódulo y g en $Hom_\Lambda(A, M_2)$ entonces definimos $(\lambda g) : A \to M_2$ por $(\lambda g)(a) = g(a\lambda)$, para todo a en A, λ en Λ y g en $Hom_\Lambda(A, M_2)$.

Un morfismo (g_1, g_2) de (M_1, M_2, f) a (M_1', M_2', f') consiste de un par de Λ-morfismos, $g_1 : M_1 \to M_1'$ y $g_2 : M_2 \to M_2'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_1"'] & Hom_\Lambda(A, M_2) \arrow[d, "Hom_\Lambda(A,g_2)"] \\
M_1' \arrow[r, "f'"] & Hom_\Lambda(A, M_2')
\end{tikzcd}$$

Notemos que dados dos morfismos (g_1, g_2) de (M_1, M_2, f) a (M_1', M_2', f') y (h_1, h_2) de (M_1', M_2', f') a (M_1'', M_2'', f''), entonces tenemos que el par el par $(h_1 g_1, h_2 g_2)$ es un morfismo de (M_1, M_2, f) a (M_1'', M_2'', f'').

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_1"'] \arrow[dd, bend right=60, "h_1 g_1"'] & Hom_\Lambda(A, M_2) \arrow[d] \arrow[dd, bend left=60, "Hom_\Lambda(A,h_2 g_2)"] \\
M_1' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h_1"'] & Hom_\Lambda(A, M_2') \arrow[d] \\
M_1'' \arrow[r, "f''"] & Hom_\Lambda(A, M_2'')
\end{tikzcd}$$

Lo cual podemos ver de las igualdades $f' g_1 = Hom_\Lambda(A, g_2) f$ y $f'' h_1 = Hom_\Lambda(A, h_2) f'$, de donde obtenemos:

$$f'' h_1 g_1 = Hom_\Lambda(A, h_2) f' g_1 = Hom_\Lambda(A, h_2) Hom_\Lambda(A, g_2) f = Hom_\Lambda(A, g_2 h_2) f$$

Con esto queda definida la composición.

Así con estos datos definimos una categoría $Gr(\Lambda, A)$ la cual tiene las siguientes propiedades:

a) Para cada (M_1, M_2, f) en $Gr(\Lambda, A)$ el par $(1_{M_1}, 1M_2)$ es un endomorfismo de (M_1, M_2, f) el cual es la identidad sobre (M_1, M_2, f).

b) Un morfismo $(g_1, g_2) : (M_1, M_2, f) \to (M'_1, M'_2, f')$ es un isomorfismo si y sólo si g_1y g_2 son isomorfismos. Además, si (g_1, g_2) es un isomorfismo, entonces $(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-2})$.

Ahora consideramos $Gr(\Lambda, A)$ como una categoría preaditiva por medio de la operación $(g_1, g_2) + (g'_1, g'_2) = (g_1+g'_1, g'_2+g'_2)$ para todos los morfismos (g_1, g_2) y (g'_1, g'_2) de (M_1, M_2, f) a (M'_1, M'_2, f'). Notemos que si (M_1, M_2, f) y (M'_1, M'_2, f') están en $Gr(\Lambda, A)$ se sigue que $(M_1+M'_1, M_2+M'_2, f+f')$ en $Gr(\Lambda, A)$ es la suma de ellos, donde $M_i + M'_i$ es la suma de M_i y M'_i como Λ-módulos y $f+f' : M_1+M'_1 \to Hom_\Lambda(A, M_2+M'_2)$ es la suma de las funciones $f : M_1 \to Hom_\Lambda(A, M_2)$ y $f' : M'_1 \to Hom_\Lambda(A, M'_2)$, después identificamos $Hom_\Lambda(A, M_2+M'_2)$ con $Hom_\Lambda(A, M_2)+Hom_\Lambda(A, M'_2)$ en la manera usual. Por lo tanto $Gr(\Lambda, A)$ es una categoría aditiva y no solo preaditiva.

Por otra parte notemos que dado un endomorfismo (g_1, g_2), tenemos $(g_1, g_2)^2 = (g_1^2, g_2^2)$, con lo cual un endomorfismo (g_1, g_2) en $Gr(\Lambda, A)$ es idempotente si y sólo si g_1 y g_2 son idempotentes,

Por lo tanto vemos que $Gr(\Lambda, A)$ es una categoría aditiva en la cual sus idempotentes se escinden. El lector puede verificar que mientras $Gr(\Lambda, A)$ no es en general una categoría abeliana, tiene kerneles, cokerneles y consecuentemente todo morfismo en $Gr(\Lambda, A)$ tiene un análisis.

Teminaremos la discusión de las propiedades de las categorías de Grassman $Gr(\Lambda, A)$ con las siguientes observaciones.

Observación 3.15. Supóngase que $\mathcal{A}$ es una subcategoría aditiva, plena, esqueléticamente pequeña de $Mod(\Lambda)$ con idempotentes escindibles. Entonces la subcategoría plena de $Gr(\Lambda, A)$ que consiste de todos los objetos (M_1, M_2, f) con M_2 en $\mathcal{A}$ es una subcategoría aditiva, plena, esqueléticamente pequeña con idempotentes que se escinden, la cual llamaremos la subcategoría de $Gr(\Lambda, A)$ generada por $\mathcal{A}$.

Demostración: Primero notemos que el objeto $(0, 0, 0)$ de $Gr(\Lambda, A)$

$$0 \xrightarrow{0} Hom_\Lambda(A, 0) = 0$$

está en en la subcategoría generada por $\mathcal{A}$, debido a que 0 esta en $\mathcal{A}$, de igual manera la subcategoría generada por $\mathcal{A}$ tiene sumas finitas.

Para ver que es plena consideremos objetos (M_1, M_2, f), (M'_1, M'_2, f') en la subacategoría de $Gr(\Lambda, A)$ generada por $\mathcal{A}$ y sea (g_1, g_2) un morfismo entre tales objetos en $Gr(\Lambda, A)$, así tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_1"'] & Hom_\Lambda(A, M_2) \arrow[d, "Hom_\Lambda(A, g_2)"] \\
M'_1 \arrow[r, "f'"] & Hom_\Lambda(A, M'_2)
\end{tikzcd}$$

donde M_2, M'_2 están en $\mathcal{A}$ y por lo tanto $g_2 : M_2 \to M'_2$ está en $\mathcal{A}$, así el morfismo (g_1, g_2) se encuentra en la subcategoría generada por $\mathcal{A}$.

Finalmente queda por demostrar que la subcategoría generada por $\mathcal{A}$ es esqueléticamente pequeña. Sea (M_1, M_2, f) un objeto en $Gr(\Lambda, A)$, entonces por ser $\mathcal{A}$ esqueléticamente pequeña existe un objeto M'_2 en $\mathcal{A}$ tal que $M_2 \simeq M'_2$, sea $g : M_2 \to M'_2$ tal isomorfismo, tomando el objeto

$(M_1, M_2', Hom_\Lambda(\mathcal{A}, g)f)$ en la subcategoría de $Gr(\Lambda, A)$ generada por $\mathcal{A}$ y el isomorfismo entre (M_1, M_2, f) y $(M_1, M_2', (Hom_\Lambda(\mathcal{A}, g))f$:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_{M_1}"'] & Hom_\Lambda(A, M_2) \arrow[d, "Hom_\Lambda(\mathcal{A},g)"] \\ M_1 \arrow[r, "(Hom_\Lambda(\mathcal{A},g))f"] & Hom_\Lambda(A, M_2') \end{tikzcd}$$

demostramos que la subcategoría de $Gr(\Lambda, A)$ generada por $\mathcal{A}$ es esqueléticamente pequeña.

■

3.3. Teorema principal.

En toda esta sección Λ es un anillo. Para cada ideal bilateral $\mathbf{b}$ en Λ definimos el funtor

$$S_{\mathbf{b}} : Mod(\Lambda) \longrightarrow Mod(\Lambda)$$

$$M \longmapsto Hom_\Lambda(\Lambda/\mathbf{b}, M) = \{m \in M | \mathbf{b}m = 0\}$$

para cada M en $Mod(\Lambda)$.

Obviamente $\mathbf{b}S_{\mathbf{b}}(M) = 0$ para cada M en $Mod(\Lambda)$. De aquí que $S_{\mathbf{b}}(M)$ es un $\Lambda/\mathbf{b}$-módulo para cada M en $Mod(\Lambda)$. También si M es un Λ-módulo inyectivo entonces $S_{\mathbf{b}}(M)$ es un $\Lambda/\mathbf{b}$-módulo inyectivo.

Considerando el funtor identidad $I : Mod(\Lambda) \longrightarrow Mod(\Lambda)$, obtenemos el monomorfismo de funtores definido por:

$$0 \longrightarrow S_{\mathbf{b}} \longrightarrow I$$

donde para cada M en $Mod(\Lambda)$, $i_{\mathbf{b}} : S_{\mathbf{b}}(M) \to M$ es la función de inclusión de $S_{\mathbf{b}}(M)$ dentro de M.

Definiendo el funtor

$$T_{\mathbf{b}} : Mod(\Lambda) \longrightarrow Mod(\Lambda)$$

$$M \longmapsto M/S_{\mathbf{b}}(M)$$

podemos asociar con cada ideal bilateral $\mathbf{b}$ en Λ la sucesión exacta de funtores.

$$0 \longrightarrow S_{\mathbf{b}} \longrightarrow I \longrightarrow T_{\mathbf{b}} \longrightarrow 0$$

de $Mod(\Lambda)$ en $Mod(\Lambda)$. Por otra parte la sucesión exacta de Λ-módulos:

$$0 \longrightarrow \mathbf{b} \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda/\mathbf{b} \longrightarrow 0$$

produce la sucesión exacta de funtores de $Mod(\Lambda)$ a $Mod(\Lambda)$:

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(\Lambda/\mathbf{b}, *) \longrightarrow Hom_\Lambda(\Lambda, *) \longrightarrow Hom_\Lambda(\mathbf{b}, *) \ .$$

Pero tenemos $S_{\mathbf{b}} = Hom_\Lambda(\Lambda/\mathbf{b}, *)$ e $I = Hom_\Lambda(\Lambda, *)$ y el monomorfismo $0 \to S_{\mathbf{b}} \longrightarrow I$ es el mismo que $0 \longrightarrow Hom_\Lambda(\Lambda/\mathbf{b}, *) \longrightarrow Hom_\Lambda(\Lambda, *)$, por lo tanto existe un único morfismo $\sigma : T_{\mathbf{b}} \to Hom_\Lambda(\mathbf{b}, *)$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{b}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & I \arrow[r] \arrow[d, equal] & T_{\mathbf{b}} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\sigma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Hom_\Lambda(\Lambda/\mathbf{b}, *) \arrow[r] & Hom_\Lambda(\Lambda, *) \arrow[r] & Hom_\Lambda(\mathbf{b}, *) &
\end{tikzcd}$$

Tal morfismo $\sigma : T_{\mathbf{b}} \to Hom_\Lambda(\mathbf{b}, *)$ es un monomorfismo. Notemos que σ tiene la propiedad que si M es inyectivo entonces $\sigma : T_{\mathbf{b}}(M) \to Hom_\Lambda(\mathbf{b}, M)$ es un isomorfismo. En conjunto, asociado con cada ideal bilateral $\mathbf{b}$ en Λ esta la sucesión exacta de funtores

$$0 \longrightarrow S_{\mathbf{b}} \longrightarrow I \longrightarrow T_{\mathbf{b}} \longrightarrow 0$$

junto con el único monomorfismo $0 \longrightarrow T_{\mathbf{b}} \xrightarrow{\sigma} Hom_\Lambda(\mathbf{b}, *)$ el cual hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{b}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & I \arrow[r] \arrow[d, equal] & T_{\mathbf{b}} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Hom_\Lambda(\Lambda/\mathbf{b}, *) \arrow[r] & Hom_\Lambda(\Lambda, *) \arrow[r] & Hom_\Lambda(\mathbf{b}, *) &
\end{tikzcd}$$

Observación 3.16. Supóngase ahora que $\mathbf{a}$ es un ideal bilateral en Λ tal que $\mathbf{ab} = 0 = \mathbf{ba}$. Entonces para cada Λ-módulo M tenemos:

i) La función $0 \longrightarrow Hom_\Lambda(\mathbf{b}, S_{\mathbf{a}}(M)) \longrightarrow Hom_\Lambda(\mathbf{b}, M)$ inducida por la función inclusión $i_{\mathbf{a}} : S_{\mathbf{a}}(M) \to M$ es un isomorfismo natural el cual consideramos como una identificación.

ii) $\mathbf{a}Hom_\Lambda(\mathbf{b}, M) = 0$ y en consecuencia $\mathbf{a}(T_{\mathbf{b}}(M)) = 0$.

Demostración: Consideremos la función inclusión $i_{\mathbf{a}} : S_{\mathbf{a}}(M) \to M$, aplicando el funtor exacto izquierdo $Hom_\Lambda(\mathbf{b}, *)$ tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(\mathbf{b}, S_{\mathbf{a}}(M)) \xrightarrow{Hom_\Lambda(\mathbf{b}, i_{\mathbf{a}})} Hom_\Lambda(\mathbf{b}, M)$$

Resta probar que $Hom_\Lambda(\mathbf{b}, i_{\mathbf{a}})$ es sobreyectivo. Sea $\varphi : \mathbf{b} \to M$ un Λ-homomorfismo, dado que $\mathbf{a}\varphi(\mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{ba}) = 0$, φ se anula en $\mathbf{a}$, entonces $\varphi(\mathbf{b}) \subseteq S_{\mathbf{a}}(M)$ y por lo tanto φ está en $Hom_\Lambda(\mathbf{b}, S_{\mathbf{a}}(M))$.

Finalmente queda por demostrar el inciso *ii*). Observemos que dado un Λ-homomorfismo φ en $Hom_\Lambda(\mathbf{b}, M)$ éste es anulado por $\mathbf{a}$ puesto que $\mathbf{ba} = 0$ y como $T_{\mathbf{b}}(M) \subseteq Hom_\Lambda(\mathbf{b}, M)$ se sigue que $\mathbf{a}(T_{\mathbf{b}}(M)) = 0$.

■

Estas observaciones nos permiten definir el funtor $F : Inj(Mod(\Lambda)) \to Gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b})$ como sigue:

Supóngase $0 \longrightarrow M \xrightarrow{j} Q$ es una envolvente inyectiva, aplicando el funtor exacto izquierdo $Hom_\Lambda(\mathbf{b}, *)$, se induce el monomorfismo

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(\mathbf{b}, M) \xrightarrow{Hom_\Lambda(\mathbf{b},j)} Hom_\Lambda(\mathbf{b}, Q)$$

Por otra parte, por la observación anterior $Hom_\Lambda(\mathbf{b}, Q) \simeq Hom_\Lambda(\mathbf{b}, S_{\mathbf{a}}(Q))$, y por lo tanto tenemos el monomorfismo

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(\mathbf{b}, M) \longrightarrow Hom_\Lambda(\mathbf{b}, S_{\mathbf{a}}(Q)) .$$

Con esto podemos definir el funtor F para toda envolvente inyectiva $j : M \to Q$ por:

$$Inj(Mod(\Lambda)) \xrightarrow{F} Gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$$(M, Q, j) \longmapsto (T_{\mathbf{b}}(M), S_{\mathbf{a}}(Q), F(j))$$

Veamos que esta bien definido. Primero, notemos que $T_{\mathbf{b}}(M)$ es un $\Lambda/\mathbf{a}$-módulo dado que por la observación anterior $\mathbf{a}(T_{\mathbf{b}}(M)) = 0$. Segundo, considerando los monomorfismos

$$0 \longrightarrow T_{\mathbf{b}}(M) \xrightarrow{\sigma} Hom_\Lambda(\mathbf{b}, M)$$

y

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(\mathbf{b}, M) \longrightarrow Hom_\Lambda(\mathbf{b}, S_{\mathbf{a}}Q) .$$

entonces su composición es un monomorfismo el cual es denotado por $F(j)$

$$0 \longrightarrow T_{\mathbf{b}}(M) \xrightarrow{F(j)} Hom_\Lambda(\mathbf{b}, S_{\mathbf{a}}Q)$$

Por último como por hipótesis $\mathbf{ab} = 0 = \mathbf{ba}$, $S_{\mathbf{a}}(Q)$ es por definición un $\Lambda/\mathbf{a}$-módulo y $\mathbf{b}$ es un $\Lambda/\mathbf{a}$-bimódulo, con éstas observaciones notamos que el funtor F está bien definido.

Es este funtor F el principal objeto de estudio de esta sección. Sin embargo, antes de que podamos formular y probar nuestro principal resultado concerniente al funtor F, necesitamos suposiciones extras para el ideal $\mathbf{b}$ las cuales explicamos ahora.

Definición 3.17. Sea $\mathbf{b}$ un ideal bilateral en Λ. Decimos que el **funtor $S_{\mathbf{b}}$ es esencial** si satisface cualquiera de las dos condiciones equivalentes.

a) Si M es un Λ-módulo y $S_{\mathbf{b}}(M) = 0$, entonces $M = 0$.

b) El monomorfismo $0 \to S_{\mathbf{b}}(M) \to M$ es esencial para todo Λ-módulo M.

Sea $\mathbf{b}$ un ideal en Λ, algunas de las propiedades son:

i) Si $\mathbf{b}$ es nilpotente (es decir, $\mathbf{b}^n = 0$, para algun entero positivo n), entonces $S_{\mathbf{b}}$ es esencial.

Ahora bien, dado un monomorfismo esencial $0 \to M_1 \to M_2$ de Λ-módulos y $S_{\mathbf{b}}$ esencial, entonces:

ii) Tenemos el monomorfismo esencial

$$0 \longrightarrow S_{\mathbf{b}}(M_1) \longrightarrow S_{\mathbf{b}}(M_2).$$

iii) Si M_1 es un $\Lambda/\mathbf{b}$-módulo inyectivo

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow S_{\mathbf{b}}(M_2)$$

es un isomorfismo.

Sea $Inj(Gr(\Lambda, A))$ la subcategoría plena de $Gr(\Lambda, A)$ que consiste de todas las triplas (M_1, M_2, f) con M_2 inyectivo. Nuestro principal resultado es:

Teorema 3.18. *Sea Λ un anillo y $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ dos ideales bilaterales en Λ tal que $S_{\mathbf{a}}$ y $S_{\mathbf{b}}$ son esenciales. Supóngase que $\mathbf{ab} = 0 = \mathbf{ba}$, entonces:*

a) *La subcategoría plena $Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda))$ de $Inj(Mod(\Lambda))$ que consiste de esas envolventes inyectivas $f : M \to Q$ tal que $S_{\mathbf{b}}(M)$ es un $\Lambda/\mathbf{b}$-módulo inyectivo, es una categoría aditiva en la cual todos los idempotentes se escinden.*

b) *El funtor $J : Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda)) \to Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b}))$, inducido por el funtor $F : Inj(Mod(\Lambda)) \to Gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es una equivalencia de representación.*

Demostración: Comencemos con el primer inciso de nuestro teorema. Veamos que $Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda))$ es una subcategoría aditiva de $Inj(Mod(\Lambda))$.

Sean (M, Q, j), (M', Q', j') objetos de $Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda))$ y de manera canónica consideremos su suma $(M, Q, j) + (M', Q', j')$ como $(M + M', Q + Q', j + j')$. Notemos que $S_{\mathbf{b}}(M + M') = S_{\mathbf{b}}(M) + S_{\mathbf{b}}(M')$ y dado que la suma de módulos inyectivos es inyectivo, así $S_{\mathbf{b}}(M + M')$ es un $\Lambda/\mathbf{b}$- módulo inyectivo y por consiguiente la subcategoría $Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda))$ es aditiva.

Continuemos con *b*). Primero probemos que J es denso. Supóngase que (N_1, N_2, h) está en $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b}))$, es decir, tenemos una sucesión

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{h} Hom_{\Lambda}(\mathbf{b}, N_2) \ .$$

Sea (N_2, Q, j) una envolvente inyectiva de N_2 en $Mod(\Lambda)$. Dado que N_2 es un $\Lambda/\mathbf{a}$-módulo y por definición $S_{\mathbf{a}}(Q)$ es el $\Lambda/\mathbf{a}$-módulo más grande contenido en Q, $N_2 \subseteq S_{\mathbf{a}}(Q)$. Por otra parte como $N_2 \subseteq Q$ es esencial y $N_2 \subseteq S_{\mathbf{a}}(Q)$, se sigue que $N_2 \subseteq S_{\mathbf{a}}(Q)$ es esencial, es decir, dado X submódulo de $S_{\mathbf{a}}(Q)$, tal que $X \cap N_2 = 0$, entonces $X = 0$, esto se sigue de que X en particular es submódulo de Q y N_2 es esencial en Q. Pero por hipótesis N_2 es un $\Lambda/\mathbf{a}$-módulo inyectivo y por lo visto anteriormente $N_2 = S_{\mathbf{a}}(Q)$.

Ahora bien considerando la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Hom_{\Lambda}(\Lambda/\mathbf{b}, Q) \longrightarrow Hom_{\Lambda}(\Lambda, Q) \longrightarrow Hom_{\Lambda}(\mathbf{b}, Q) \longrightarrow 0$$

y recordando que $Hom_\Lambda(\mathbf{b}, Q) = Hom_\Lambda(\mathbf{b}, S_{\mathbf{a}}(Q))$ y $S_a(Q) = N_2$, obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & N_1 \arrow[d, "h"] & \\
0 \arrow[r] & Hom_\Lambda(\Lambda/\mathbf{b}, Q) \arrow[r] & Hom_\Lambda(\Lambda, Q) \arrow[r] & Hom_\Lambda(\mathbf{b}, N_2) \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Tomando el pull-back de

$$\begin{tikzcd}
 & N_1 \arrow[d, "h"] & \\
Hom_\Lambda(\Lambda, Q) = Q \arrow[r] & Hom_\Lambda(\mathbf{b}, N_2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

nos da el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{b}}(Q) \arrow[r] \arrow[d, equal] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & N_1 \arrow[d, "h"] & \\
0 \arrow[r] & Hom_\Lambda(\Lambda/\mathbf{b}, Q) \arrow[r] & Hom_\Lambda(\Lambda, Q) \arrow[r] & Hom_\Lambda(\mathbf{b}, N_2) \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Del hecho que $S_{\mathbf{b}}(Q) \to M_1 \to Q$ es un monomorfismo se sigue que $S_{\mathbf{b}}(Q) \to M_1$ es un monomorfismo. Por otra parte como el funtor $S_{\mathbf{b}}$ es esencial entonces $S_{\mathbf{b}}(Q) \to Q$ es esencial, por lo tanto $h' : M_1 \to Q$ es un monomorfismo esencial y (M_1, Q, h') está en $Inj(Mod(\Lambda))$. Aplicando el funtor $S_{\mathbf{b}}$ al diagrama exacto

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{b}}(Q) \arrow[r] \arrow[d, equal] & M_1 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{b}}(Q) \arrow[r] & Q
\end{tikzcd}$$

obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{b}}(Q) \arrow[r] \arrow[d, equal] & S_{\mathbf{b}}(M_1) \arrow[d, "\simeq"] \\
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{b}}(Q) \arrow[r] & S_{\mathbf{b}}(Q)
\end{tikzcd}$$

de donde se sigue que $S_{\mathbf{b}}(M_1) \simeq S_{\mathbf{b}}(Q)$. Como $S_{\mathbf{b}}(M_1)$ es esencial y $S_{\mathbf{b}}(Q)$ es $\Lambda/\mathbf{b}$-inyectivo, $S_{\mathbf{b}}(M_1)$ es $\Lambda/\mathbf{b}$- inyectivo. Por lo tanto $0 \to M_1 \to Q$ está en $Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda))$.

Aplicando el funtor J a la terna (M_1, Q, h') obtenemos: $J(M_1, Q, h') = (T_{\mathbf{b}}(M_1), S_{\mathbf{a}}(Q), F(h'))$, y como de nuestros diagramas anteriores tenemos que $M_1 \simeq N_1/S_{\mathbf{b}}(Q)$, $Q \simeq Hom_\Lambda(\mathbf{b}, N_2)/S_{\mathbf{b}}(Q)$, conseguimos lo siguiente:

$$T_{\mathbf{b}}(M_1) = \frac{M_1}{S_{\mathbf{b}}(M_1)} \simeq \frac{\frac{N_1}{S_{\mathbf{b}}(Q)}}{S_{\mathbf{b}}(M_1)} = \frac{N_1}{S_{\mathbf{b}}(Q) + S_{\mathbf{b}}(M_1)} = \frac{N_1}{S_{\mathbf{b}}(Q)}$$

Así podemos formar el diagrama conmutativo exacto:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_{\mathbf{b}}(M_1) \arrow[r, "F(h')"] \arrow[d, "\simeq"'] & Hom_{\Lambda/\mathbf{a}}(\mathbf{b}, S_{\mathbf{a}}(Q)) \arrow[d, "Hom_{\Lambda/\mathbf{b}}(*,\simeq)"] \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "h"'] & Hom_{\Lambda/\mathbf{a}}(\mathbf{b}, N_2)
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $(T_{\mathbf{b}}(M_1), S_{\mathbf{a}}(Q), F(h')) \simeq (N_1, N_2, h)$. Esto completa la demostración que J es un funtor denso. Hasta el momento se deberá notar que el hecho que $S_{\mathbf{a}}$ sea esencial no ha sido utilizado hasta el momento.

A continuación mostraremos que un morfismo $(g_1, g_2) : (M_1, Q_1, j_1) \to (M_2, Q_2, j_2)$ en $Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda))$ es un isomorfismo si $J(g_1, g_2) = F(g_1, g_2)$ es un isomorfismo en $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b}))$. Por lo visto anteriormente $F(g_1, g_2)$ es un isomofismo si y sólo si los morfismo $T_{\mathbf{b}}(g_1) : T_{\mathbf{b}}(M_1) \to T_{\mathbf{b}}(M_2)$ y $S_{\mathbf{a}}(g_2) : S_{\mathbf{a}}(Q_1) \to S_{\mathbf{a}}(Q_2)$ son isomorfismos. Como tenemos el diagrama exacto conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{a}}(Q_1) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "S_{\mathbf{a}}(g_2)"'] & Q_1 \arrow[d, "g_2"] \\
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{a}}(Q_2) \arrow[r, "i_2"'] & Q_2
\end{tikzcd}$$

y como i_1, i_2 son envolventes injectivas dado que $S_{\mathbf{a}}$ es esencial, se sigue que el hecho que $S_{\mathbf{a}}(g_2)$ sea un isomorfismo implica que g_2 sea un isomorfismo también. Solo queda por ver que el morfismo $g_1 : M_1 \to M_2$ es un isomorfismo.

Notemos que por hipótesis cada objeto (M_i, Q_i, j_i) esta en $Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda))$, y por tanto cada uno de los $S_{\mathbf{b}}(M_i)$ es $\Lambda/\mathbf{b}$-inyectivo. Esto combinado con el hecho que $S_{\mathbf{b}}$ es esencial implica que cada una de las envolventes inyectivas $M_i \to Q_i$ induce un isomorfismo $S_{\mathbf{b}}(M_i) \to S_{\mathbf{b}}(Q_i)$. Tomando en cuenta el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
S_{\mathbf{b}}(M_1) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "S_{\mathbf{b}}(g_1)"'] & S_{\mathbf{b}}(Q_1) \arrow[d, "S_{\mathbf{b}}(g_2)"] \\
S_{\mathbf{b}}(M_2) \arrow[r, "\simeq"'] & S_{\mathbf{b}}(Q_2)
\end{tikzcd}$$

y el hecho que g_2 es un isomorfismo, implica que $S_{\mathbf{b}}(g_2)$ es un isomorfismo y en consecuencia $S_{\mathbf{b}}(g_1)$ es un isomorfismo. Entonces si consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{b}}(M_1) \arrow[r] \arrow[d, "S_{\mathbf{b}}(g_1)"'] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1"'] & T_{\mathbf{b}}(M_1) \arrow[r] \arrow[d, "T_{\mathbf{b}}(g_1)"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{b}}(M_2) \arrow[r] & M_2 \arrow[r] & T_{\mathbf{b}}(M_2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y ya que por hipótesis $T_{\mathbf{b}}(g_1)$ es un isomorfismo, g_1 es un isomorfismo. Con esto terminamos de demostrar que J refleja isomorfismos. Solamente nos queda por demostrar que J es pleno para completar la demostración de que J es una equivalencia de representación.

Supóngase que (M_1, Q_1, j_1) y (M_2, Q_2, j_2) están en $Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda))$ y un morfismo (h_1, h_2) : $(T_{\mathbf{b}}(M_1), S_{\mathbf{a}}(Q_1), F(j_1)) \to (T_{\mathbf{b}}(M_2), S_{\mathbf{a}}(Q_2), F(j_2))$ en $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b}))$, es decir, tenemos morfismos $h_1 : T_{\mathbf{b}}(M_1) \to T_{\mathbf{b}}(M_2)$ y $h_2 : S_{\mathbf{a}}(Q_1) \to S_{\mathbf{a}}(Q_2)$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_{\mathbf{b}}(M_1) \arrow[r, "F(j_1)"] \arrow[d, "h_1"'] & Hom_{\Lambda/\mathbf{a}}(\mathbf{b}, S_{\mathbf{a}}(Q_1)) \arrow[d, "Hom_{\Lambda/\mathbf{a}}(*,h_2)"] \\
0 \arrow[r] & T_{\mathbf{b}}(M_2) \arrow[r, "F(j_2)"'] & Hom_{\Lambda/\mathbf{a}}(\mathbf{b}, S_{\mathbf{a}}(Q_2))
\end{tikzcd}$$

Como cada uno de los Q_i son inyectivos podemos encontrar un morfismo $g_2 : Q_1 \to Q_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{a}}(Q_1) \arrow[r] \arrow[d, "h_2"'] & Q_1 \arrow[d, "g_2"] \\
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{a}}(Q_2) \arrow[r] & Q_2
\end{tikzcd}$$

Consideremos la sucesión exacta $0 \to \mathbf{b} \to \Lambda \to \Lambda/\mathbf{b} \to 0$ y apliquemos el funtor $Hom_{\Lambda}(*, Q_i)$ a tal sucesión, esto combinado con el hecho de que $Hom_{\Lambda}(\mathbf{b}, S_{\mathbf{a}}(Q_i)) = Hom_{\Lambda}(\mathbf{b}, Q_i)$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{b}}(Q_1) \arrow[r] \arrow[d, "h_2"'] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_2"'] & Hom_{\Lambda/\mathbf{a}}(\mathbf{b}, S_{\mathbf{a}}(Q_1)) \arrow[r] \arrow[d, "Hom_{\Lambda/\mathbf{a}}(*,h_2)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{b}}(Q_2) \arrow[r] & Q_2 \arrow[r] & Hom_{\Lambda/\mathbf{a}}(\mathbf{b}, S_{\mathbf{a}}(Q_2)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ahora bien dado que (M_i, Q_i, j_i) estan en $Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda))$ entonces sabemos que $S_{\mathbf{b}}(M_i)$ es un $\Lambda/\mathbf{b}$- módulo inyectivo y dado que $S_{\mathbf{b}}$ es esencial, $S_{\mathbf{b}}(M_i) \simeq S_{\mathbf{b}}(Q_i)$. Así podemos expandir nuestro anterior diagrama a el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{b}}(M_1) \arrow[r] \arrow[d, "S_{\mathbf{b}}(j_1)"'] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "j_1"'] & T_{\mathbf{b}}(M_1) \arrow[r] \arrow[d, "F(j_1)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{b}}(Q_1) \arrow[r] \arrow[d, "h_2"'] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_2"'] & Hom_{\Lambda/\mathbf{a}}(\mathbf{b}, S_{\mathbf{a}}(Q_1)) \arrow[r] \arrow[d, "Hom_{\Lambda/\mathbf{a}}(*,h_2)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{b}}(Q_2) \arrow[r] & Q_2 \arrow[r] & Hom_{\Lambda/\mathbf{a}}(\mathbf{b}, S_{\mathbf{a}}(Q_2)) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_{\mathbf{b}}(M_2) \arrow[r] \arrow[u, "S_{\mathbf{b}}(j_2)"] & M_2 \arrow[r] \arrow[u, "j_2"] & T_{\mathbf{b}}(M_2) \arrow[r] \arrow[u, "F(j_2)"'] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Como podemos ver del diagrama anterior, la función $h_1 : T_{\mathbf{b}}(M_1) \to T_{\mathbf{b}}(M_2)$ tiene la propiedad que $Hom_{\Lambda}(*, h_2)F(j_1) = F(j_2)h_1$, de donde se sigue que $Im(Hom_{\Lambda}(*, h_2)F(j_1)) \subseteq ImF(j_2)$. De esta observación no es difícil deducir del diagrama anterior que $Im(g_2 j_1) \subseteq Im(j_2)$. Como $j_2 : M_2 \to Q_2$ es un monomorfismo entonces existe un único morfismo $g_1 : M_1 \to M_2$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "g_1"'] & Q_1 \arrow[d, "g_2"] \\
0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r, "j_2"'] & Q_2
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto (g_1, g_2) es un morfismo de (M_1, Q_1, j_1) a (M_2, Q_2, j_2) en $Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda))$. Notemos que $J(g_1, g_2) = F(g_1, g_2) = (h_1, h_2)$ en $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b}))$. Por lo tanto tenemos que el funtor J es un funtor pleno y por ende J es una equivalencia de representación.

■

Terminamos esta sección dando una reformulación del teorema principal en el siguiente lenguaje.

Definición 3.19. Sea Λ un anillo y $\mathbf{b}$ un ideal bilateral en Λ. Denotamos por $Mod(\Lambda)_{\mathbf{b}}$ la subcategoría plena de $Mod(\Lambda)$ que consiste de todos los módulos M tal que $S_{\mathbf{b}}(M)$ es un $\Lambda/\mathbf{b}$-módulo inyectivo. Denotamos por $Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda))$ la subcategoría plena de $Inj(Mod(\Lambda))$ que consiste de todas las envolventes inyectivas (M, Q, j) tal que $S_{\mathbf{b}}(M)$ es un $\Lambda/\mathbf{b}$-módulo inyectivo.

Sea $\mathbf{b}$ un ideal bilateral en Λ, algunas de las propiedades básicas son las siguientes:

i) $Mod(\Lambda)_{\mathbf{b}}$ e $Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda))$ son categorías aditivas en las cuales todo idempotente se escinde.

Demostración: Por el Teorema 3.18, $Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda))$ es una categoría aditiva en la cual todo idempotente se escinde. Queda por demostrar lo mismo para $Mod(\Lambda)_{\mathbf{b}}$.

De manera análoga al Teorema 3.18 podemos demostrar que $Mod(\Lambda)_{\mathbf{b}}$ es una subcategoría aditiva de $Mod(\Lambda)$. Queda por ver que todo idempotente en $Mod(\Lambda)_{\mathbf{b}}$ se escinde, dado que la categoría $Mod(\Lambda)$ es abeliana, entonces todo morfismo tiene un análisis, es decir, todo morfismo tiene un kernel y un cokernel, entonces dado un morfismo g en $Mod(\Lambda)_{\mathbf{b}}$ idempotente, este tiene un análisis, $g = kerg + cokerg$, con esto tenemos que g se escinde.

■

ii) La equivalencia de representación $\phi : Inj(Mod(\Lambda)) \to Mod(\Lambda)$ dada en el ejemplo 3.14, induce un equivalencia de representación $\phi : Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda)) \to Mod(\Lambda)_{\mathbf{b}}$.

Demostración: Primero notemos que $\phi : Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda)) \to Mod(\Lambda)_{\mathbf{b}}$ esta bien definido, dado que $S_{\mathbf{b}}(M)$ es un $\Lambda/\mathbf{b}$-módulo inyectivo por definición de $Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda))$. Solo queda por demostrar que ϕ es denso, pleno y refleja isomorfismos.

ϕ es denso ya que $Mod(\Lambda)$ es un categoría con suficientes inyectivos y de igual manera al ejemplo 3.14, ϕ es pleno y refleja isomorfismos.

■

Ahora podemos reescribir nuestro teorema principal de la siguiente manera.

Teorema 3.20. *Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ dos ideales bilaterales en Λ tal que $S_{\mathbf{a}}$ y $S_{\mathbf{b}}$ son esenciales y $\mathbf{ab} = 0 = \mathbf{ba}$, entonces las categorías $Mod(\Lambda)_{\mathbf{b}}$ e $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ tienen representaciones equivalentes.*

Demostración: Tenemos las equivalencias de representación:

$$\phi : Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda)) \longrightarrow Mod(\Lambda)_{\mathbf{b}}$$

y

$$J : Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda)) \longrightarrow Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b}))$$

entonces $Mod(\Lambda)_{\mathbf{b}}$ e $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ tienen representaciones equivalentes.

■

Corolario 3.21. *Sean Λ, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y Λ', $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, anillos e ideales los cuales satisfacen la hipótesis del teorema anterior. Supóngase que existe un isomorfismo de anillos $f : \Lambda/\mathbf{a} \to \Lambda'/\mathbf{a}'$ y un isomorfismo de grupos $g : \mathbf{b} \to \mathbf{b}'$ tal que $g(xb) = f(x)g(b)$ y $g(bx) = g(b)f(x)$ para todo x en $\Lambda/\mathbf{a}$ y b en $\mathbf{b}$. Entonces $Mod(\Lambda)_{\mathbf{b}}$ y $Mod(\Lambda')_{\mathbf{b}'}$ tienen representaciones equivalentes.*

Demostración: Los isomorfismos f y g inducen un isomorfismos de categorías

$$Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b})) \longrightarrow Inj(Gr(\Lambda'/\mathbf{a}', \mathbf{b}')).$$

Por lo tanto $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ e $Inj(Gr(\Lambda'/\mathbf{a}', \mathbf{b}'))$ tienen representaciones equivalentes. Dado que $Mod(\Lambda)_{\mathbf{b}}$ e $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ tienen representaciones equivalentes, y también de igual manera $Mod(\Lambda')_{\mathbf{b}'}$ e $Inj(Gr(\Lambda'/\mathbf{a}', \mathbf{b}'))$ tienen representaciones equivalentes, entonces se sigue que $Mod(\Lambda)_{\mathbf{b}}$ y $Mod(\Lambda')_{\mathbf{b}'}$ tienen representaciones equivalentes.

■

3.4. Álgebras de artin.

3.4.1. Aplicaciones del teorema principal.

Ahora damos algunas interpretaciones de nuestro resultado principal. Pero primero introduciremos algo de terminología.

Un ideal $\mathbf{a}$ en un anillo Λ se dice nilpotente si existe un entero $n \geq 1$ tal que $\mathbf{a}^n = 0$. Si $\mathbf{a}$ es nilpotente, definimos el **índice de nilpotencia de a** como el mínimo entero n tal que $\mathbf{a}^n = 0$. Hemos visto que si $\mathbf{a}$ es un ideal bilateral nilpotente en Λ entonces $S_{\mathbf{a}}$ es esencial, en consecuencia nuestro principal teorema nos da lo siguiente:

Teorema 3.22. *Si* $\mathbf{a}$ *es un ideal nilpotente bilateral en* Λ *con índice de nilpotenia* n *entonces* $Mod(\Lambda)_{\mathbf{a}^i}$ *e* $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{a}^{n-i}, \mathbf{a}^i))$ *tienen representaciones equivalentes para cada* $i = 1, \dots, n-1$.

Demostración: Notemos que $(\mathbf{a}^i)^n = 0$ para todo $i = 1, \dots, n-1$ y así todos esos ideales $\mathbf{a}^i$ son nilpotentes, por lo tanto $S_{\mathbf{a}^i}$ es esencial y $(\mathbf{a}^i)(\mathbf{a}^{n-i}) = \mathbf{a}^n = 0 = \mathbf{a}^n = (\mathbf{a}^{n-i})(\mathbf{a}^i)$. Aplicando el teorema 3.18 tenemos que $Mod(\Lambda)_{\mathbf{a}^i}$ e $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{a}^{n-i}, \mathbf{a}^i))$ tienen representaciones equivalentes para cada $i = 1, \dots, n-1$.

■

Ahora aplicaremos este resultado en anillos semiprimarios. Recordemos que un anillo Λ se dice semiprimario si su radical $\mathbf{r}$ es nilpotente y $\Lambda/\mathbf{r}$ es semisimple artiniano. Si Λ es semiprimario, definimos **el índice de** Λ como el índice de nilpotencia del radical de Λ. Reemplazando $\mathbf{a}$ por $\mathbf{r}$ en nuestro teorema previo nos da:

Teorema 3.23. *Sea* Λ *un anillo semiprimario con radical* $\mathbf{r}$ *e índice* n. *Entonces* $Mod(\Lambda)_{\mathbf{r}^i}$ *e* $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{r}^{n-i}, \mathbf{r}^i))$ *tienen representaciones equivalentes para cada* $i = 1, \dots, n-1$.

■

Supóngase que $i = 1$. Como $Mod(\Lambda)_{\mathbf{r}}$ es la subcategoría plena de $Mod(\Lambda)$ que consiste de todos los módulos M tal que $S_{\mathbf{r}}(M)$ es $\Lambda/\mathbf{r}$-inyectivo, entonces el hecho que $\Lambda/\mathbf{r}$ es un anillo semisimple implica que todos los $\Lambda/\mathbf{r}$-módulos son inyectivos y por lo tanto $Mod(\Lambda) = Mod(\Lambda)_{\mathbf{r}}$. Así podemos dar la siguiente descripción de la teoría de representación de la categoría $Mod(\Lambda)$ en el caso en que Λ es un anillo semiprimario.

Corolario 3.24. *Sea* Λ *un anillo semiprimario de índice* n *con radical* $\mathbf{r}$. *Entonces* $Mod(\Lambda)$ *e* $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{r}^{n-1}, \mathbf{r}))$ *tienen representaciones equivalentes.*

■

Este resultado y el último corolorario 3.21 visto en la sección anterior tiene como consecuencia la siguiente afirmación:

Corolario 3.25. *Sean Λ, Λ', anillos semiprimarios del mismo índice n y radicales* $\mathbf{r}$ *y* $\mathbf{r}'$ *respectivamente. Supóngase que existe un isomorfismo de anillos $f : \Lambda/\mathbf{r}^{n-1} \to \Lambda'/(\mathbf{r}')^{n-1}$ y un isomorfimo de grupos $g : \mathbf{r} \to \mathbf{r}'$ tal que $g(xr) = f(x)g(r)$ y $g(rx) = g(r)f(x)$ para todo x en $\Lambda/\mathbf{r}^{n-1}$ y r en* $\mathbf{r}$. *Entonces $Mod(\Lambda)$ y $Mod(\Lambda')$ tienen representaciones equivalentes.*

■

Para poder establecer nuestro siguiente resultado necesitamos lo siguiente

Definición 3.26. Sea Λ un anillo y A un Λ-bimódulo. Definimos el anillo $\Lambda + A$ el cual es llamado **la extensión trivial de Λ por** A, como el anillo cuya estructura de grupo abeliano es la suma de los grupos abelianos de Λ y A, es decir:

$$(x, a) + (x', a') := (x + x', a + a')$$

de donde vemos claramente que: la suma es asociativa, tiene elemento neutro $(0_\Lambda, 0_A) + (x, a) = (0_\Lambda + x, 0_A + a) = (x, a)$, tiene inversos $(x, a) + (-x, -a) = (x - x, a - a) = (0, 0)$ y la suma conmuta $(x, a) + (x', a') = (x + x', a + a') = (x' + x, a' + a) = (x', a') + (x, a)$.

Y cuya multiplicación es dada por

$$(x, a)(x', a') := (xx', ax' + xa')$$

para todo x, x' en Λ y a, a' en A, la cual distribuye sobre la suma, notemos: $(x, a)\Big((x', a') + (x'', a'')\Big) = (x, a)(x' + x'', a' + a'') = \Big(x(x + x'), a(x' + x'') + x(a' + a'')\Big) = (xx' + xx'', ax' + ax'' + xa' + xa'') = (x, a)(x', a') + (x, a)(x'', a'')$.

Si A es un Λ-bimódulo entonces algunas de las propiedades básicas son:

i) El radical de $\Lambda + A$ es $\mathbf{r} + A$, donde $\mathbf{r}$ es el radical de Λ.

ii) $(\mathbf{r} + A)^i = (\mathbf{r}^i, \sum_{k+i=n} \mathbf{r}^k A r^i)$, para todo $k, i \geq 0$.

iii) Si Λ es semiprimario de índice n, entonces $\Lambda + A$ es semiprimario de índice $\leq n + 1$.

En consecuencia, en el caso particular en que Λ sea semiprimario de índice 2 y por la última observación anterior, obtenemos:

Proposición 3.27. *Si Λ es un anillo semiprimario de índice 2 con radical* $\mathbf{r}$*, entonces $Mod(\Lambda)$, $Mod((\Lambda/\mathbf{r}) + \mathbf{r})$ y $Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r})$ tienen representaciones equivalentes.*

Demostración: Ya que $\Lambda/\mathbf{r}$ es semisimple sabemos que todos los $\Lambda/\mathbf{r}$- módulos son inyectivos y por lo tanto $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r})) = Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r})$. Pero por lo visto anteriormente sabemos que $Mod(\Lambda)$ e $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r}))$ tienen representaciones equivalentes. Así $Mod(\Lambda)$ y $Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r})$ tienen representaciones equivalentes.

Por otra parte, como $\Lambda/\mathbf{r}$ es semisimple sabemos que $0 + \mathbf{r}$ es el radical del anillo $(\Lambda/\mathbf{r}) + \mathbf{r}$. Por lo tanto $Mod((\Lambda/\mathbf{r}) + \mathbf{r})$ y $Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r})$ tienen representaciones equivalentes. Así tenemos el resultado de que $Mod(\Lambda)$, $Mod((\Lambda/\mathbf{r}) + \mathbf{r})$ y $Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r})$ tienen representaciones equivalentes.

■

Supóngase que Γ es un anillo semisimple y A un Γ-bimódulo. Por nuestro último resultado sabemos que $Mod(\Gamma + A))$ y $Gr(\Gamma, A)$ tienen representaciones equivalentes. Estas observaciones nos dan la siguiente.

Proposición 3.28. *Sea Λ un anillo semiprimario de índice n y con radical* $\mathbf{r}$. *Entonces* $Mod(\Lambda)_{\mathbf{r}^{n-1}}$ *y* $Mod((\Lambda/\mathbf{r}) + \mathbf{r}^{n-1})$ *tienen representaciones equivalentes.*

Demostración: Por nuestros resultados generales sabemos que $Mod(\Lambda)_{\mathbf{r}^{n-1}}$ e $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r}^{n-1}))$ tienen representaciones equivalentes. Dado que $\Lambda/\mathbf{r}$ es semisimple, sabemos que la subcategoría plena $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r}^{n-1}))$ de $Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r}^{n-1})$ es todo $Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r}^{n-1})$. Por lo tanto $Mod(\Lambda)_{\mathbf{r}^{n-1}}$ y $Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r}^{n-1})$ tienen representaciones equivalentes. Pero como hemos observado anteriormente, el hecho de que $\Lambda/\mathbf{r}$ es semisimple implica que $Mod(\Lambda)_{\mathbf{r}^{n-1}}$ y $Mod((\Lambda/\mathbf{r}) + \mathbf{r}^{n-1})$ tienen representaciones equivalentes.

■

Antes de enunciar nuestro resultado final de esta sección, necesitamos dar algunas definiciones y notación la cual también será usada en los siguientes capítulos.

Definición 3.29. Sea (Λ, R, ϕ) una R-álgebra. Decimos que Λ es una R**- álgebra de artin**, si R es un anillo artiniano y Λ es un R-módulo finitamente generado, con la estructura de R-módulo inducida por el morfismo de anillos $\phi : R \to \Lambda$.

Sea R un anillo conmutativo y Λ un anillo. Recordamos que la terna (Λ, R, ϕ), con $\phi : R \to \Lambda$ un morfismo de anillos tal que $\phi(R) \subseteq Cen(\Lambda)$, es una R-álgebra.

Para efectos del presente trabajo estaremos considerando a $R = Cen(\Lambda)$ y diremos que Λ es una **álgebra de artin**, si es un anillo de artin el cual es finitamente generado sobre su centro y además el $Cen(\Lambda)$ es también un anillo de artin.

A continuación describimos propiedades de las álgebras de artin Λ las cuales necesitamos inmediatamente.

i) Λ es un anillo de artin bilateral.

ii) Todo anillo cociente de Λ es un álgebra de artin.

iii) Si M es un Λ-módulo finitamente generado y $0 \to M \to Q$ es una extensión esencial, entonces Q es un Λ-módulo finitamente generado.

La demostración de las primeras dos propiedades estan estableciadas. Demostraremos la última propiedad después.

Definición 3.30. Sea Λ un anillo. Denotaremos la subcategoría plena de $Mod(\Lambda)$ cuyos objetos son Λ-módulos finitamente presentados por $mod(\Lambda)$.

Algunas de las propiedades básicas de la subcategoría $mod(\Lambda)$ son:

i) $mod(\Lambda)$ es una categoría aditiva esqueléticamente pequeña con idempotentes escindibles.

Si además asuminos que Λ es un anillo noetheriano izquierdo entonces:

ii) Un Λ-módulo es finitamente presentado si y sólo si es finitamente generado.

iii) $mod(\Lambda)$ consiste de los Λ-módulos finitamente generados.

iv) $mod(\Lambda)$ es una categoría abeliana.

v) Si Λ es un álgebra de artin entonces $mod(\Lambda)$ es una categoría abeliana con envolventes inyectivas.

Supóngase ahora que Λ es un álgebra de artin y A es un Λ-bimódulo. Si A es un Λ-módulo finitamente generado sobre cada lado, entonces es un módulo finitamente generado sobre el centro de Λ y entonces es un $Cen(\Lambda)$-módulo finitamente generado sobre ambos lados. También, si M es un Λ-módulo finitamente generado entonces $Hom_\Lambda(A, M)$ y en consecuencia cada submódulo de $Hom_\Lambda(A, M)$ son también Λ-módulos finitamente generados.

Si A es un Λ-módulo finitamente generado, entonces denotaremos por $gr(\Lambda, A)$ la subcategoría plena de $Gr(\Lambda, A)$ que consiste de todas las triplas (M_1, M_2, f) en $Gr(\Lambda, A)$ con M_1 y M_2 Λ-módulos finitamente generados.

También acordaremos en denotar por $Inj(gr(\Lambda, A))$ la subcategoría plena de $gr(\Lambda, A)$ que consiste de todas las ternas (M_1, M_2, f) en $gr(\Lambda, A)$ tal que M_2 es un Λ-módulo inyectivo. No es difícil ver que $gr(\Lambda, A)$ es una categoría esqueléticamente pequeña, aditiva y con idempotentes que se escinden.

También denotaremos por $Inj(mod(\Lambda))$ la subcategoría plena de $inj(Mod(\Lambda))$ la cual consiste de todas las envolventes inyectivas (M, Q, j) con M un Λ-módulo finitamente generado. Dado que Λ es un álgebra de artin, sabemos que Q es finitamente generado si (M, Q, j) esta en $Inj(mod(\Lambda))$. También no es dificíl ver que $Inj(mod(\Lambda))$ es una categoría esqueléticamente pequeña, aditiva y con idempotentes que se escinden. Además la equivalencia de representaciones $Inj(Mod(\Lambda)) \to Mod(\Lambda)$, induce una equivalencia de representaciones $Inj(mod(\Lambda)) \to mod(\Lambda)$.

Teorema 3.31. *Sean* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *dos ideales bilaterales en el álgebra de artin* Λ *tal que* $\mathbf{ab} = 0 = \mathbf{ba}$ *y* $S_{\mathbf{a}}$ *y* $S_{\mathbf{b}}$ *son esenciales. Entonces la equivalencia de representaciones*

$$J : Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda)) \longrightarrow Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b}))$$

induce una equivalencia de representaciones

$$J : Inj_{\mathbf{b}}(mod(\Lambda)) \longrightarrow Inj(gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b}))$$

la cual también denotaremos por J. *Consecuentemente* $mod(\Lambda)_{\mathbf{b}}$ *e* $Inj(gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ *tienen representaciones equivalentes.*

De manera similar podemos especializar los otros resultados obtenidos para las categorías $Mod(\Lambda)$ y $Gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b})$ donde Λ es un álgebra de artin. En particular obtenemos:

Proposición 3.32. *Sea Λ un álgebra de artin de índice n, con radical* $\mathbf{r}$. *Entonces* $mod(\Lambda)_{\mathbf{r}^{n-1}}$ *y* $mod((\Lambda/\mathbf{r}) + \mathbf{r}^{n-1})$ *tienen representaciones equivalentes. Consecuentemente si* $mod(\Lambda)$ *es de tipo de representación finita entonces cada una de las categorías* $mod((\Lambda/\mathbf{r}) + (\mathbf{r}^i/\mathbf{r}^{i+1}))$ *son de tipo de representación finita para todo i.*

Los resultados que hemos obtenido en esta sección claramente indican que varias subcategorías plenas de las categorías de Grassmann son de considerable interés en el estudio de teorías de representaciones de al menos anillos semiprimarios. Desafortunadamente poco parece ser conocido acerca de las categorías de Grassman, incluso en casos muy simples. Por ejemplo, si K es un campo y V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre K entonces es poco lo conocido acerca de $Gr(K, V)$, excepto cuando $[V : K] \leq 2$, en tal caso una descripción más o menos completa de $Gr(K, V)$ esta disponible. En general, el estudio de las categorías $Gr(K, V)$ esta íntimamente ligada a los problemas clásicos de clasificar para cada entero n todas las familias $\{M_1, \ldots, M_n\}$ de matrices cuadradas de un tamaño fijo, las cuales conmutan y también tienen la propiedad que $M_i^2 = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

3.4.2. Dualidad.

Una importante razón por la que se fija la atención sobre álgebras de artin Λ, es la existencia de una dualidad entre $mod(\Lambda)$ y $mod(\Lambda^{op})$.

Sea Λ una R-álgebra de artin, como R es un anillo conmutativo de artin, tiene solamente un número finito de módulos simples no isomorfos, $S_1, \ldots, S_n$. Sea $I(S_i)$ la envolvente inyectiva de $_i$ y sea $J = \coprod_{i=1}^{n} I(S_i)$. Entonces J es la envolvente inyectiva de $\coprod_{i=1}^{n} S_i$ y para cada X en $mod(R)$ existe un monomorfismo $0 \to X \to J'$, con J' en $addJ$, la subcategoría de $mod(R)$ generada por J. Tenemos que $S_i \simeq R/m_i$, donde m_i es un ideal maximal de R y obtenemos R-isomorfismos $Hom_R(S_i, S_i) \simeq Hom_r(R/m_i, S_i) \simeq Hom_R(R, S_i) \simeq S_i$. Además para cada $i \neq j$ tenemos $Hom_R(S_i, S_j) = 0$.

Lema 3.33. *Sea R un anillo conmutativo artiniano, J la envolvente inyectiva de* $\coprod_{i=1}^{n} S_i$ *y X en* $mod(R)$*. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen:*

a) $Hom_R(X, J) \in mod(R)$ *y* $m_{S_i}(HomR(X, J)) = m_{S_i}(X)$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$.

b) *El R-morfismo* $\phi_X : X \to Hom_R(Hom_R(X, J), J)$*, definido por* $\phi_X(x)(f) := f(x)$*, es un isomorfismo natural.*

Demostración: Para la prueba de *a*) procedamos por inducción sobre $l(X)$. Si $X = 0$ no hay nada que probar. Supóngase que $l(X)$, entonces $X \simeq S_j$ para algún j. Puesto que $Hom_R(S_i, J) \simeq Hom_R\left(S_j, \coprod_{i=1}^{n} S_I\right) \simeq Hom_R(S_j, S_i) \simeq S_j$, y por lo tanto obtenemos $m_{S_i}(X) = m_{S_i}(Hom_R(X, J))$.[1]

Ahora bien supongamos que $l(X) > 1$, entonces existe una sucesión exacta $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ en $mod(R)$ con $X' \simeq S_j$, para algún j, entonces tenemos la sucesión exacta $0 \to Hom_R(X'', J) \to Hom_R(X, J) \to S_j \to 0$ en $mod(R)$. Dado que $l_R(X'') = l_R(X) - 1$, concluimos por inducción que $Hom_R(X'', J)$ está en $mod(R)$ y $m_{S_i}(Hom_R(X'', J)) = m_{S_i}(X'')$; por lo

[1] $m_{s_i}(X)$ denota el número de factores de composición que son isomorfos a S_i y $l(X)$ la longitud de X, ver [AS93] I.1.

que $Hom_R(X, J)$ esta en $mod(R)$; y además

$$m_{S_i}(Hom_R(X, J)) = m_{S_i}(S_i) + m_{S_i}(Hom_R(X'', J)) = m_{S_i}(S_j) + m_{S_i}(X'') = m_{S_i}(X).$$

b) Veamos la naturalidad de $\phi : mod(R) \to Hom_R(HomR(*, J), J)$. Sea $f : X \to Y$ un morfismo en $mod(R)$; luego tenemos los siguientes morfismos en $mod(R)$:

$$Hom_R(f, J) : Hom_R(Y, J) \longrightarrow Hom_R(X, J).$$

$$Hom_R(Hom_R(f, J), J) : Hom_R(Hom_R(X, J), J) \longrightarrow Hom_R(Hom_R(Y, J))$$

A continuación veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_X"] & Y \arrow[d, "\phi_Y"] \\ Hom_R(Hom_R(X, J), J) \arrow[r, "\varphi(f)"] & Hom_R(Hom_R(Y, J)) \end{tikzcd}$$

donde $\varphi(f) := Hom_R(Hom_R(f, J), J)$. Primero recordamos que para todo α en $Hom_R(Y, J)$ se tiene $Hom_R(f, J)(\alpha) := \alpha f$ y para todo x en X, $\varphi(f)(\phi_X(x)) := \phi_X(x)Hom_R(f, J)$. Entonces

$$(\varphi(f)(\phi_X(x)))\,(\alpha) = (\phi_X(x)Hom_R(f, J))\,(\alpha) = \phi_X(x)(Hom_R(f, J)(\alpha)) = \phi_X(x)(\alpha f) = (\alpha f)(x) =$$

$$\alpha(f(x)) = \phi_Y(f(x))(\alpha) = ((\phi_Y f)(x)(\alpha))\,.$$

Por lo tanto $\varphi(f)(\phi_X(x)) = (\phi_Y f)(x)$, para todo x en X y por consiguiente $\varphi(f)\phi_X = \phi_Y f$.

Ahora, veamos que ϕ_X es un isomorfismo. Por a), sabemos que

$$l_R(Hom_R(Hom_R(X, J), J)) = l_R(X).$$

Por lo tanto, basta ver que ϕ_X es un monomorfismo. Como $\phi(x)(f) = f(x)$ para todo f en $Hom_R(X, J)$ y x en X, tenemos que $\phi(x) \neq 0$ si existe un $F : X \to J$ tal que $f(X) \neq 0$. Supóngase x es un elemnto no cero de X y sea Rx el submódulo de X generado por x, pero entonces $Rx/(rad(Rx))Rx \neq 0$ por el teorema de Nakayama y por lo tanto existe un morfismo no cero:

$$\frac{Rx}{(rad(Rx))Rx} \longrightarrow \coprod_{i=1}^{n} S_i.$$

Entonces, la función inducida $g : Rx \to J$ es no cero, en particular $g(x) \neq 0$. Como J es inyectivo, podemos extender g a una función $f : X \to J$ la cual no se anula en X. Por lo tanto $\phi : X \to Hom_R\,(Hom_R(X, J), J)$ es un isomorfismo.

■

Teorema 3.34. *Sea R un anillo conmutativo artiniano, J la envolvente inyectiva de $\coprod_{i=1}^{n} S_i$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen:*

a) El funtor contravariante $D : mod(R) \to mod(R)$, definido por $D(*) = Hom_R(*, J)$ es una dualidad.

b) *Para todo R-módulo simple S_i, $m_{S_i}(R) = m_{S_i}(J)$.*

c) $R \simeq End_R(J)$.

Demostración: *a*) Por el Lema 3.33 a) tenemos que $D(X) \in mod(R)$ para todo X en $mod(R)$. Y por 3.33 b), $\phi : 1_{mod(R)} \to D^2$ es un isomorfismo.

b) Sea S_i simple. Por 3.33 a), $m_{S_i}(R) = m_{S_i}(Hom_R(R, J)) = m_{S_i}(J)$.

c) $R \simeq End(R)^{op}$ y por *a*), $End(R)^{op} \simeq End(D(R)) \simeq End_R(J)$, donde el último isomorfismo se da puesto que $D(R) \simeq J$.

■

Teorema 3.35. *La dualidad $D_R : mod(R) \to mod(R)$ define una dualidad, la cual también denotaremos por D_Λ:*

$$D_\Lambda : mod(\Lambda) \longrightarrow mod(\Lambda^{op})$$

donde $D_\Lambda({}_\Lambda X) = Hom_R({}_\Lambda X_R, J_R)$.[2]

Demostración: Primero veamos que para todo X en $mod(\Lambda)$, $D_\Lambda({}_\Lambda X)$ está en $mod(\Lambda^{op})$.

Sea Λ una R-álgebra de artin vía $\varphi : R \to \Lambda$. Luego Λ^{op} es una R-álgebra de artin vía $\varphi^{op} : R \to \Lambda^{op}$, donde $\varphi^{op}(\lambda^{op}) := \varphi(\lambda)$. Por lo tanto, tenemos 2 estructuras de R-módulo en $D(X)$:

- $(\lambda \cdot f)(x) := f(\lambda x)$, para cada f en $Hom_R(X, J)$ y λ en Λ.
- $\lambda \circ f$, dada por el cambio de anillos $\varphi^{op} : R \to \Lambda^{op}$, puesto que $D_\Lambda({}_\Lambda X)$ es un Λ^{op}-módulo.

Notemos que ambas estructuras de R-módulo coinciden, ya que:

$$(\lambda \circ f)(x) = (\varphi^{op}(\lambda)f)(x) = (f\varphi(\lambda))(x) = f(\varphi(\lambda)x) = f(\lambda x) = (\lambda \cdot f)(x).$$

Es claro que $Hom_R(X, J)$ es un Λ^{op}-módulo finitamente generado puesto que es un R-módulo finitamente generado por la proposición 1.1 de II [ARS95].

Ahora probamos que si $f : X \to Y$ está en $mod(\Lambda)$, se tiene que $Hom_R(f, J) : D_\Lambda(Y) \to D_\Lambda(X)$ es un morfismo en $mod(\Lambda^{op})$. Esto se sigue del hecho que para toda α en $D(Y) = Hom_R(Y, J)$, para todo x en X, λ en Λ tenemos las igualdades:

$$D(f)(\alpha\lambda)(x) = Hom_R(f, J)(\alpha\lambda)(x) = ((\alpha\lambda)f)(x) = (\alpha\lambda)(f(x)) =$$

$$\alpha(\lambda f(x)) = \alpha(f(\lambda x)) = Hom_R(f, J)(\alpha)(\lambda x) = (D(f)(\alpha))\lambda)(x).$$

Por lo tanto $D(f)(\lambda^{op}\alpha) = (D(f)(\alpha))\lambda = \lambda^{op} D(f)(\alpha)$.

Por lo anterior tenemos que $D_\Lambda : mod(\Lambda) \to mod(\Lambda^{op})$ con $D_\Lambda(X) = Hom_R(X, J)$ es un R-funtor. Análogamente (reemplazando a Λ por Λ^{op}), tenemos que $D_{\Lambda^{op}} : mod(\Lambda^{op}) \to mod(\Lambda)$ es un R-funtor. Ahora bien:

$$\phi : X \to Hom_R(Hom_R(X, J), J) = D_{\Lambda^{op}} D_\Lambda(X)$$

[2]Cuando no exista confusión alguna simplemente escribiremos D.

con $\phi_X(x)(f) := f(x)$ es un R-isomorfismo natural (por 3.33 b)). Veamos que *phi* es un Λ-morfismo (en particular, tendríamos que $\phi : 1_{mod(\Lambda)} \to D_{\Lambda^{op}} D_\Lambda$ es un isomorfismo natural. Esto se sigue del hecho que si λ esta en Λ y x en X se tiene que:

$$\phi(\lambda x)(f) = f(\lambda x) = (f\lambda)(x) = \phi(x)(f\lambda) = (\lambda\phi(x))(f)$$

para todo f en $Hom_R(X, J)$, por lo tanto $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)$. Por lo tanto tenemos un isomorfismo $\phi : 1_{mod(\Lambda)} \to D^2$ y similarmente un isomorfismo $\phi : 1_{mod(\Lambda^{op})} \to D^2$ y concluimos que $D : mod(\Lambda) \to mod(\Lambda^{op})$ es una dualidad.

■

Observación 3.36. Sea Λ una R-álgebra de artin. Tenemos que:

i) $D(\Lambda) = Hom_R(\lambda, J)$ en $Mod(\Lambda)$ por medio de:

- $D(\Lambda) = Hom_R(\Lambda, J) = D_{\Lambda^{op}}(\Lambda)$.
- $D(\Lambda) = Hom_R(\Lambda, J) = D_\Lambda(\Lambda)$.

ii) $Hom_\Lambda(*, D(\Lambda)) : mod(\Lambda) \to mod(\Lambda^{op})$ es un R-funtor contravariante.

Observación 3.37. Como $mod(\Lambda^{op})$ tiene suficientes proyectivos, esta dualidad muestra que $mod(\Lambda)$ tiene suficientes inyectivos o equivalentemente si S es un Λ-módulo simple y $S \to I$ es una envolvente inyectiva, se sigue que I es un Λ-módulo finitamente generado.

Proposición 3.38. *Sea Λ una R-álgebra de artin. Entonces, los funtores $Hom_R(*, J)$ y $Hom_\Lambda(*, D(\Lambda))$ son isomorfos.*

Considerando ${}_R\Lambda_\Lambda$ y usando la adjunción y el producto tensorial, tenemos los isomorfismos naturales:

$$Hom_R(M, J) \xrightarrow{\simeq} Hom_R({}_R\Lambda_\Lambda \otimes_\Lambda M, J) \xrightarrow{\simeq} Hom_\Lambda(M, Hom_R(\Lambda, J)) = Hom_\Lambda(M, D(\Lambda)) .$$

para todo Λ-módulo M.

■

3.5. Equivalencia estable

Continuando con nuestras aplicaciones de la equivalencia de representación, en esta sección damos la prueba de una equivalencia estable entre un álgebra de artin de radical cuadrado cero Λ y un álgebra hereditaria Γ. Esta prueba es general y tiene como aplicación particular lo hecho por I. Reiten en [Rei75]. Dando así una muestra más de la importancia de la equivalencia de representación proporcionada por Auslander. Para ello comenzamos con los siguientes datos.

Consideraremos otra categoría asociada con Λ, **la categoría de módulos proyectivamente estable** denotada por $\underline{mod}(\Lambda)$. Los objetos son los Λ-módulos finitamente generados, los cuales denotaremos por $\underline{M}$ y los morfismos son dados por $Hom(\underline{M}, \underline{N}) = Hom_\Lambda(M, N)/R(M, N)$ donde $R(M, N)$ es el subgrupo de $Hom_\Lambda(M, N)$ consistiendo de los Λ-homomorfismos de M a N que se factorizan a través de un Λ-módulo proyectivo. Supóngase que $mod_P(\Lambda)$ denota la subcategoría plena de $mod(\Lambda)$ cuyos objetos son los Λ-módulos sin sumandos directos que sean proyectivos. Entonces la correspondiente categoría proyectivamente estable $\underline{mod_P(\Lambda)}$, es equivalente a $\underline{mod(\Lambda)}$.

Análogamente se define **la categoría de módulos inyectivamente estable** $\overline{mod(\Lambda)}$ asociada a $mod(\Lambda)$. Los objetos de $\overline{mod(\Lambda)}$ son los mismos que los objetos de $mod(\Lambda)$ y serán denotados por $\overline{M}$, los morfismos están dados por $Hom(\overline{M}, \overline{N}) = Hom_\Lambda(M, N)/U(M, N)$ donde $U(M, N)$ es el subgrupo de $Hom_\Lambda(M, N)$ consistiendo de los Λ-homomorfismos de M a N los cuales se factorizan a través de un Λ-módulo inyectivo. Supóngase que $mod_I(\Lambda)$ denota la subcategoría plena de $mod(\Lambda)$ cuyos objetos son los Λ-módulos sin sumando directos inyectivos, entonces $\overline{mod_I(\Lambda)}$ y $\overline{mod(\Lambda)}$ son equivalentes.

Dada un álgebra de artin Λ tenemos que las categorías $\underline{mod_P(\Lambda)}$ y $\overline{mod_I(\Lambda)}$ son equivalentes. Esto surge de los hechos que dado un Λ-módulo M en $mod_P(\Lambda)$, entonces $T(M) \in mod_P(\Lambda^{op})$, donde T es definida como sigue: Sea $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ una presentación proyectiva de M, definimos $T(M)$ como el objeto tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$P_0^* \longrightarrow P_1^* \longrightarrow T(M) \longrightarrow 0$$

donde $P_i^* = Hom_\Lambda(P_i, \Lambda)$, como veremos al término de 3,1, T induce una dualidad $T : \underline{mod(\Lambda)} \to \underline{mod(\Lambda^{op})}$. Sea M un Λ^{op}-módulo, y D la dualidad dada en el teorema 3.35. D nos proporciona una dualidad $D : mod(\Lambda^{op}) \to mod(\Lambda)$, la cual induce una dualidad $D : mod_P(\Lambda^{op}) \to mod_I(\Lambda)$, de esto es sencillo notar que obtenemos una dualidad, la cual también denotaremos por D, de $\underline{mod(\Lambda^{op})}$ a $\overline{mod(\Lambda)}$. Por lo tanto la composición $D \circ T : \underline{mod(\Lambda)} \to \underline{mod(\Lambda^{op})} \to \overline{mod(\Lambda)}$ nos proporciona nuestra equivalencia deseada. De ésta manera justificamos el denotar como equivalencia estable en un álgebra de artin Λ, sin importar si es estable módulo proyectivos o inyectivos.

Definición 3.39. Diremos que dos álgebra de artin Λ y Λ' son **establemente equivalentes** si $\underline{mod(\Lambda)}$ y $\underline{mod(\Lambda')}$ son equivalentes.

Existen casos sencillos donde álgebras no isomorfas son establemente equivalentes: Si Λ y Λ' son Morita equivalentes ellas son claramente establemente equivalentes. También podemos ver que si S es un álgebra semisimple, entonces Λ y $\Lambda \times S$ son establemente equivalentes.

En orden de ideas para continuar con nuestra siguiente aplicación, veamos lo siguiente:

Dados dos anillos T y U y un $U - T$-módulo M construimos el anillo de matrices triangulares

$$\Gamma = \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$$

donde la operación multiplicación se encuentra dada por: $\begin{pmatrix} t & 0 \\ m & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t' & 0 \\ m' & u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tt' & 0 \\ mt' + um' & uu' \end{pmatrix}$, Γ tiene a los idempotentes

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\; y \;\; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

los cuales cumplen las siguientes propiedades: $e_1\Gamma e_1 = T$, $e_2\Gamma e_2 = U$ y $e_2\Gamma e_1 = M$. Además dado un Γ-módulo izquierdo X, obtenemos un T-módulo $X_1 := e_1X$, un U-módulo $X_2 := e_2X$ y un homomorfismo $\mu : M \otimes_T X_1 \to X_2$ dado por la multiplicación:

$$e_2\Gamma e_1 \times e_1X \longrightarrow e_2X$$

$$e_2re_1 \times e_1x \longmapsto e_2re_1x$$

Es bien conocido ([ARS95] III,2) que Γ es un R-álgebra de artin si y sólo si T, U son R-álgebras de artin y M es un R-módulo finitamente generado.

Definición 3.40. Definimos la **categoría coma** C, como la categoría cuyos objetos son ternas de la forma (X_1, X_2, φ), donde X_1 es un T-módulo, X_2 es U-módulo y $\varphi : M \otimes X_1 \to X_2$ un U-homomorfismo.

Un morfismo en C está dado por $(f_1, f_2) : (X_1, X_2, \varphi) \to (Y_1, Y_2, \psi)$, donde $f_1 : X_1 \to Y_1$ es un T-homomorfismo y $f_2 : X_2 \to Y_2$ es un U-homomorfismo tal que, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \otimes X_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "1\otimes f_1"'] & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\ M \otimes Y_1 \arrow[r, "\psi"] & Y_2 \end{tikzcd}$$

Observación 3.41. Sean T, U anillos y sea Γ el anillo de matrices definido anteriormente, sea C la categoría coma, entonces tenemos una equivalencia de categorías $\phi : Mod_\Gamma \to C$, dada en objetos por $\phi(X) = (e_1X, e_2X, \mu)$. De esta manera identificaremos C con Mod_Γ

Una prueba de esta afirmación y análisis mas profundo puede ser encontrada en [ARS95], capítulo III, sección 2.

Por otra parte tenemos la **categoría co-coma** C_0, cuyos objetos son ternas de la forma (X_1, X_2, η), donde X_1 es un T-módulo, X_2 un U-módulo y $\eta : X_1 \to Hom_U(M, X_2)$ un T-homomorfismo.

La adjunción $Hom_U(M \otimes_T X_1, X_2) \simeq Hom_T(X_1, Hom_U(M, X_2))$ nos induce un isomorfismo de categorías, $C \simeq C_0$, así de esta manera podemos identificar C_0 con Mod_Γ.

Ahora bien consideremos un álgebra de artin Λ con radical de Jacobson r, tal que $r \neq 0$ y $r^2 = 0$. Notemos que r es un Λ/r - Λ/r-bimódulo y por consiguiente podemos construir el anillo de matrices triangulares $\Gamma = \begin{pmatrix} \Lambda/r & 0 \\ r & \Lambda/r \end{pmatrix}$.

Identificando Mod_Γ con la categoría coma tenemos que un Γ-módulo (X_1, X_2, φ), $\varphi : M \otimes X_1 \to$

X_2 un Λ/r-homomorfismo. Tiene como resolución proyectiva:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[d] \\ M\otimes X_1 \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes X_1 \oplus C \arrow[d] \\ M\otimes X_1 \arrow[r] & X_2 \arrow[d] \\ & 0 \end{tikzcd}$$

donde $K = Ker\varphi$ y $C = Coker\varphi$. Así de esta manera $(X_1, M\otimes X_1, 1)$ y $(0, K, 0)$ son proyectivos y por lo tanto Γ es un álgebra hereditaria.

Idun Reiten en [Rei75] demostró que el funtor

$$F : mod_\Lambda \longrightarrow mod_\Gamma$$

que asocia al Λ-módulo X la terna $(\frac{X}{rX}, rX, \mu)$, donde $\mu : r\otimes X/(rX) \to rX$, es la multiplicación por r, induce una equivalencia estable $\underline{mod_\Lambda} \simeq \underline{mod_\Gamma}$. Demostrando así que toda áñgebra de artin de radical cuadrado cero es establemente equivalente a un álgebra hereditaria.

Es esta sección queremos aplicar la equivalencia de representación $J : Inj_{\mathbf{b}}(Mod(\Lambda)) \to Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ visto en 2,3, al caso particular, Λ un álgebra de artin de radical cuadrado cero, con $r = \mathbf{a} = \mathbf{b}$ y estudiar las relaciones entre este funtor y el funtor dado por I. Reiten.

Primero notemos que tenemos el funtor $S_{\mathbf{b}}(M) = \{Hom_\Lambda(\Lambda/\mathbf{b}, M)\} = S_{\mathbf{r}}(M) = Hom_\Lambda(\Lambda/\mathbf{r}, M) = Soc(M)$. Por lo tanto $S_{\mathbf{r}}(M)$ es esencial en M.

Por otra parte notemos que la categoría de Grassman $Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r})$ son todas las ternas (M_1, M_2, φ) tales que, M_1, M_2 son $\Lambda/\mathbf{r}$-módulos y $\varphi : M_1 \to Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(\mathbf{r}, M_2)$ es un monomorfismo. Como $\mathbf{r}^2 = 0$, $\mathbf{r}$ es un $\Lambda/\mathbf{r}$-módulo y $Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(\mathbf{r}\otimes_{\Lambda/\mathbf{r}} M_1, M_2) \simeq Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(M_1, Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(\mathbf{r}, M_2))$. Por consiguiente obtenemos que $Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r})$ es una subcategoría plena de la categoría co-coma $C_0 = \{(M_1, M_2, \varphi) | \varphi \in Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(M_1, Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(\mathbf{r}, M_2))\}$, la cual recordemos es equivalente a mod_Γ.

Dado un morfismo $\varphi : M_1 \to Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(\mathbf{r}, M_2)$, tenemos que $M_1 = Ker\varphi \oplus Im\varphi$ y φ es isomorfo a $0 \to Im\varphi \hookrightarrow Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(\mathbf{r}, M_2) \oplus \left(Ker\varphi \to 0\right)$. Por lo tanto $Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r})$ es la subcategoría plena de C_0 que no tiene sumandos de la forma $S \to 0$, con S un $\Lambda/\mathbf{r}$-módulo simple.

De la sucesión exacta $0 \to \mathbf{r} \to \Lambda \to \Lambda/ra \to 0$, tenemos el diagrama conmutativo exacto:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Soc(M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & M/Soc(M) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Hom_\Lambda(\Lambda/\mathbf{r}, M) \arrow[r] & Hom_\Lambda(\Lambda, M) \arrow[r] & Hom_\Lambda(\mathbf{r}, M) & \end{tikzcd}$$

notemos que el funtor $T_{\mathbf{b}}$, se encuentra dado por $T_{\mathbf{b}}(M) = T_{\mathbf{r}}(M) = M/Soc(M)$ y tenemos un monomorfismo $0 \longrightarrow M/soc(M) \xrightarrow{\sigma} Hom_\Lambda(\mathbf{r}, M)$.

Observación 3.42. El hecho que $\mathbf{r}$ sea semisimple implica que $Hom_\Lambda(\mathbf{r}, M) = Hom_\Lambda(\mathbf{r}, Soc(M))$.

Sea (M, Q, j) la envolvente inyectiva de M, dado que $Soc(M)$ es esencial en M tenemos que $Soc(M) = Soc(Q)$ y $Hom_\Lambda(\mathbf{r}, M) = Hom_\Lambda(\mathbf{r}, Soc(M)) = Hom_\Lambda(\mathbf{r}, Q) = Hom_\Lambda(\mathbf{r}, Soc(Q))$. Por lo tanto $Hom_\Lambda(\mathbf{r}, j) : Hom_\Lambda(\mathbf{r}, M) \to Hom_\Lambda(\mathbf{r}, Q)$ es un isomorfismo.

Tomemos el funtor $F : Inj(Mod(\Lambda)) \to Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r})$, dado por $F(M, Q, j) = (T_r(M), S_\mathbf{r}(Q), F(j))$, en resumén tenemos que $T_\mathbf{r}(M) = M/Soc(M)$, $S_\mathbf{r}(Q) = Soc(Q) = Soc(M)$ y $j : M \to Q$ induce el isomorfismo $j' : Soc(M) \to Soc(Q)$ y $F(j) = Hom_\Lambda(\mathbf{r}, j')\sigma$. Por lo tanto tenemos $F(M, Q, j) = (M/Soc(M), Soc(M), Hom_\Lambda(\mathbf{r}, j')\sigma)$.

El morfismo $\sigma : M/Soc(M) \to Hom_\Lambda(\mathbf{r}, M)$ esta definido de la siguiente manera:

$$\sigma(m + Soc(M))(r) = \sigma'(m)(r)$$

y $\sigma'(m) = h$, con $h(r) = rm$. Por lo tanto $\sigma(m + Soc(M)) = rm \in Soc(M)$.

Tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M/Soc(M) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, equal] & Hom_\Lambda(r, Soc(M)) \arrow[d, "Hom_\Lambda(r,j')"] \\
M/Soc(M) \arrow[r, "\alpha\sigma"] & Hom_\Lambda(r, Soc(Q))
\end{tikzcd}$$

donde $\alpha = Hom_\Lambda(\mathbf{r}, j')$ y $\alpha\sigma : M/Soc(M) \to Hom_\Lambda(r, Soc(Q))$ ésta definido por $\alpha\mathbf{r}(m+Soc(M))(r) = \sigma j(m)$. Por consiguiente la terna $(M/Soc(M), Soc(M), \sigma)$ es isomorfa a la terna $(M/Soc(M), Soc(M), \alpha\sigma)$ en $Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r})$. Por lo tanto $F(M, Q, j) = (M/Soc(M), Soc(M), \sigma)$.

Con lo cual obtenemos que F induce una equivalencia de representación:

$$J : Inj_\mathbf{r}(Mod(\Lambda)) \longrightarrow Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r}))$$

donde $Inj_\mathbf{r}(Mod(\Lambda)) = \{j : M \hookrightarrow Q\}$ tal que (M, Q, j) es envolvente inyectiva de M y $S_\mathbf{r}(M)$ en $\Lambda/\mathbf{r}$-inyectivo, así $Inj_\mathbf{r}(Mod(\Lambda)) = Inj(Mod(\Lambda))$. Por otra parte $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r}))$ son todas las ternas (M_1, M_2, f) tales que M_2 es inyectivo y f un monomorfismo, así $Inj(Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r})) = Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r})$. Por lo tanto $F = J : Inj(Mod(\Lambda)) \to Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r})$ es una equivalencia de representación.

Observación 3.43. Existe una equivalencia de representación $\phi : Inj(Mod(\Lambda)) \to Mod(\Lambda)$, dada por $\phi(M, Q, j) = M$.

Sea G el funtor. $G : Mod(\Lambda) \to Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r})$, dado por $G(M) = (M/Soc(M), Soc(M), \sigma)$, donde $\sigma : M/Soc(M) \to Hom_\Lambda(\mathbf{r}, Soc(M))$ es $\sigma(m + Soc(M)) = rm$. El morfismo $\alpha : Gr(\Lambda/\mathbf{r}, ra) \to Gr(\Lambda/\mathbf{r}, ra)$ esta dado de la siguiente manera: dado (M_1, M_2, g) con $g : M_1 \to Hom_\Lambda(\mathbf{r}, M_2)$ un monomorfismo y M_1, M_2 $\Lambda/\mathbf{r}$-módulos. Además si (M_2, Q, j) es la envolvente inyectiva de M_2, entonces j induce un isomorfismo $j' : M_2 \to Soc(Q)$, tomando

$$\alpha((M_1, M_2, g)) := (M_1, Soc(Q), Hom_\Lambda(\mathbf{r}, j')g)$$

tenemos que α es un equivalencia de categorías y el siguiente diagra conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Inj(Mod(\Lambda)) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\phi"'] & Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r}) \arrow[d, "\alpha"] \\
Mod(\Lambda) \arrow[r, "G"'] & Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r})
\end{tikzcd}$$

Los hechos de que F, ϕ sean equivalencias de representación y α una equivalencia de categorías implican que G es una equivalencia de representación.

Como vimos anteriormente, podemos identificar $Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r})$ con una subcategoría plena de C_0, donde los objetos de tal subcategoría son ternas que no tienen sumandos de la forma $(S, 0, 0)$. Mediante la equivalencia $C \to C_0$ identificamos a $Gr(\Lambda/\mathbf{r}, \mathbf{r})$ con las ternas (M_1, M_2, f) en C que no tiene sumandos de la forma $(S, 0, 0)$ y denotamos esta categoría por $Mod_S(\Gamma)$ la cual puede ser identificada con una subcategoría plena de $Mod(\Gamma)$.

Bajo al adjunción $Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(\mathbf{r} \otimes_{\Lambda/\mathbf{r}} M_1, M_2) = Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(M_1, Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(\mathbf{r}, M_2))$, el morfismo $\sigma : M/Soc(M) \to Hom_{\Lambda}(r, Soc(M))$ corresponde con la multiplicación $\mu : \mathbf{r} \otimes M/Soc(M) \to Soc(M)$ y el funtor inducido $\overline{G}$ ésta definido por:

$$\overline{G}(M) := (M/Soc(M), Soc(M), \mu)$$

Dado que $\overline{G}$ es una equivalencia de representación, entonces es un funtor denso. En orden de ideas para continuar con esta sección queremos describir el kernel de $\overline{G}$.

Sea $h : M \to N$ un morfismo de Λ-módulos, h induce el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Soc(M) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h'"'] & M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "h"'] & M/Soc(M) \arrow[r] \arrow[d, "h''"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Soc(N) \arrow[r, "f'"] & N \arrow[r, "\pi'"] & M/Soc(N) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{3.5.1}$$

y $G(h) = (h', h'')$.

Ahora bien notemos que $G(h) = 0$ si y sólo si existe un morfismo $t : M/Soc(M) \to Soc(N)$ tal que $f't\pi = h$. Esta propiedad es la que nos describe el kernel de $\overline{G}$. Como $\overline{G}$ es denso, $\overline{G}$ induce una equivalencia $\frac{Mod(\Lambda)}{\sim} \simeq Mod_S(\Gamma)$, donde

$$\frac{Hom(M, N)}{\sim} := \frac{Hom(M, N)}{Ker\overline{G}(M, N)}.$$

Queremos demostrar ahora que $\overline{G} : Mod(\Lambda) \to Mod_S(\Gamma)$ induce una equivalencia $\overline{Mod(\Lambda)} \simeq \overline{Mod(\Gamma)}$ en las categorías estables módulo inyectivos.

Si M es un Λ-módulo no semisimple, entonces $Soc(M) \neq M$ y $rM \subset Soc(M)$, puesto que $\mathbf{r}^2 M = 0$, de ésto se sigue que existe un epimorfismo $M/\mathbf{r}M \to M/Soc(M) \to 0$ y $M/Soc(M)$ es semisimple.

Supóngase que $h : M \to N$ es un morfismo de Λ-módulos y $h' = 0$, entonces existe un morfismo $t' : M/Soc(M) \to N$ tal que h se factoriza a través de t', $t'\pi = h$, e $Imt' \subset Soc(N)$, por lo tanto $h'' = 0$.

Sean (M, Q, j) y (N, Q', j') las envolventes inyectivas de M y N, respectivamente. Entonces existe un morfismo $g : Q \to Q'$, tal que $gj = j'h$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "h"'] & Q \arrow[d, "g"] \\ N \arrow[r, "j'"] & Q' \end{tikzcd}$$

e isomorfismos $\lambda : Soc(M) \to Soc(Q)$, $\lambda' : Soc(N) \to Soc(Q')$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[rr] & & Soc(M) \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "\lambda"'] \arrow[dd, dashed] & & M \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dl, "j"'] \arrow[dd, dashed] & & \frac{M}{Soc(M)} \arrow[rr] \arrow[dl, "i"'] \arrow[dd, dashed] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & Soc(Q) \arrow[rr, "\nu"] \arrow[dd, "g'"] & & Q \arrow[rr, "q"] \arrow[dd, "g"] & & \frac{Q}{Soc(Q)} \arrow[rr] \arrow[dd, "g''"] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr, dashed] & & Soc(N) \arrow[rr, dashed] \arrow[dl, "\lambda'"'] & & N \arrow[rr, dashed] \arrow[dl, "j'"'] & & \frac{N}{Soc(N)} \arrow[rr, dashed] \arrow[dl, "i'"'] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & Soc(Q') \arrow[rr, "\nu'"] & & Q' \arrow[rr, "q'"] & & \frac{Q'}{Soc(Q')} \arrow[rr] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde identicamos los morfismos que la cara del fondo del diagrama con los dados en 3.5.1. Supóngase que $\overline{G}(h) = (h', h'') = 0$, dado que λ y λ' son isomorfismos $h' = 0$ implica $g' = 0$, entonces existe un morfismo $s' : Q/Soc(Q) \to Q'$, tal que $s'q = g$. Como $Soc(Q) \neq Q$, $\mathbf{r}Q \subset Soc(Q)$, $Q/Soc(Q)$ es semisimple y $s'(Q/Soc(Q)) \subset Soc(Q')$. Por lo taanto existe $s : Q/Soc(Q) \to Soc(Q')$, con $\nu' sq = g$.

Consideremos el morfismo $\eta = f'(\lambda')^{-1}sq$, $\eta : Q \to N$, satisface que $\eta j = f'(\lambda')^{-1}sqj$, de donde $j'\eta j = j'f'(\lambda')^{-1}sqj = \nu' sqj = gj = j'h$. j' un monomorfismo implica $\eta j = h$ y por consiguiente h se factoriza por el inyectivo Q. Por lo tanto podemos concluir que $Ker\overline{G}(M,N) \subset U(M,N)$.

En el caso en que M sea un Λ-módulo semisimple tenemos que $Ker\overline{G}(M,N) = 0$. Por lo tanto $Ker\overline{G}(M,N) \subset U(M,N)$ en cualesquiera de los dos casos y existe un epimorfismo

$$\frac{Hom_\Lambda}{\sim} = \frac{Hom(M,N)}{Ker\overline{G}(M,N)} \longrightarrow Hom(\overline{M}, \overline{N}) \longrightarrow 0$$

Afirmación 3.44. *El funtor $\overline{G} : Mod(\Lambda) \to Mod_S(\Gamma)$, envía Λ-módulos inyectivos en Γ-módulos inyectivos.*

Demostración: Sea I un Λ-módulo inyectivo. La sucesión exacta $0 \to \mathbf{r} \to \Lambda \to \Lambda/\mathbf{r} \to 0$ induce una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(\Lambda/\mathbf{r}, I) \longrightarrow Hom_\Lambda(\Lambda, I) \longrightarrow Hom_\Lambda(\mathbf{r}, I) \longrightarrow 0$$

y por lo descrito anteriormente existe un morfismo $\sigma : I/Soc(I) \to Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(\mathbf{r}, Soc(I))$ dado por $\sigma(x + Soc(I))(r) = rx$, que en este caso es un isomorfismo.

La composición:

$$r \otimes_{\Lambda/\mathbf{r}} Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(r, Soc(I)) \xrightarrow{\mathbf{r}\otimes\sigma^{-1}} r \otimes I/Soc(I) \xrightarrow{\mu} Soc(I)$$

con μ multiplicación, es el morfismo evaluación $e : r \otimes_{\Lambda/\mathbf{r}} Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(r, Soc(I)) \to Soc(I)$, dado por $e(r \otimes f) = f(r)$.

Dado que $\Lambda/\mathbf{r}$ es semisimple, entonces la terna $(Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(r, Soc(I)), Soc(I), e)$ es un Γ-módulo inyectivo (ver [ARS95]). Por lo anto $\overline{G}$ preserva módulos inyectivos.

■

Los objetos de la forma $(S, 0, 0)$ de $Mod(\Gamma)$ son Γ-módulos inyectivos. Sea $(Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(\mathbf{r}, X), X, e)$ un Γ-módulo inyectivo sin sumandos de la forma $(S, 0, 0)$. Como $\overline{G}$ es denso en $Mod_S(\Gamma)$, existe un Λ-módulo M tal que:

$$\overline{G}(M) = (M/Soc(M), Soc(M), \mu) \simeq (Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(\mathbf{r}, X), X, e)$$

es decir, $X \simeq Soc(M)$ y $M/Soc(M) \simeq Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(\mathbf{r}, X)$.

Sea (M, Q, j) la envolvente inyectiva de M. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Soc(M) \arrow[r] \arrow[d, "j'"', "\simeq"] & M \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & M/Soc(M) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "j''"'] & Hom_\Lambda(r, Soc(M)) \arrow[d, "Hom_\Lambda(r,j')"', "\simeq"] \\ 0 \arrow[r] & Soc(Q) \arrow[r] & Q \arrow[r] & Q/Soc(Q) \arrow[r, "\simeq"] & Hom_\Lambda(r, Soc(Q)) \end{tikzcd}$$

de dicho diagrama obtenemos que j'' es un isomorfismo y po el lema del cinco, j es un isomorfismo también. Por lo tanto hemos demostrado que M es un inyectivo.

Sea $f : M \to N$ un morfismo en Λ que se factoriza a través de un inyectivo, digamos I

$$M \xrightarrow{g} I \xrightarrow{h} N, \qquad hg = f.$$

por la afirmación anterior, $\overline{G}(M) \xrightarrow{\overline{G}(g)} \overline{G}(I) \xrightarrow{\overline{G}(h)} \overline{G}(N)$, $\overline{G}(f) = \overline{G}(h)\overline{G}(g)$ con $\overline{G}(I)$ inyectivo.

Inversamente, si existe una factorización $\overline{G}(M) \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{\psi} \overline{G}(N)$, con φ, ψ Γ-morfismo y J inyectivo. Dado que $\overline{G}(M)$, $\overline{G}(N)$ no tiene sumandos de la forma $(S, 0, 0)$, podemos suponer que J no tiene sumandos de esta forma y existe un Λ-módulo inyectivo I tal que $\overline{G}(I) = J$, como $\overline{G}$ es denso, existen morfismos $g : M \to I$ y $f : I \to N$ tales que $\overline{G}(g) = \varphi$ y $\overline{G}(f) = \psi$.

Afirmación 3.45. *El funtor $\overline{G}$ induce una equivalencia:*

$$\mathcal{G} : \overline{Mod(\Lambda)} \longrightarrow \overline{Mod(\Gamma)}$$

dado por $\mathcal{G}(f - U(M, N)) = \overline{G}(f) - U(M, N)$

Demostración: Por lo visto anteriormente, $\mathcal{G}$ está bien definido y es fiel. el hecho que $\mathcal{G}$ sea pleno se sigue de que $\overline{G}$ es pleno. $\mathcal{G}$ es denso ya que los objetos de la forma $(S, 0, 0)$ son inyectivos en $Mod(\Gamma)$ y por lo tanto son cero en $\overline{Mod(\Gamma)}$.

■

Así mismo por otra parte tenemos que el funtor $\mathcal{G} : \overline{Mod(\Lambda)} \longrightarrow \overline{Mod(\Gamma)}$ induce una equivalencia entre las categorías estables $\overline{mod(\Lambda)}$ y $\overline{mod(\Gamma)}$ la cual denotaremos por $\mathfrak{g} : \overline{mod(\Lambda)} \longrightarrow \overline{mod(\Gamma)}$. Si consideramos módulos derechos tenemos la equivalencia $\overline{mod(\Lambda^{op})} \xrightarrow{\mathfrak{g}_0} \overline{mod(\Gamma^{op})}$.

Consideremos la siguiente composición de funtores

$$\overline{mod(\Lambda)} \xrightarrow{D} \overline{mod(\Lambda^{op})} \xrightarrow{\mathfrak{g}_0} \overline{mod(\Gamma^{op})} \xrightarrow{D} \underline{mod(\Gamma)}$$

Afirmación 3.46. *La composición $D\mathfrak{g}_0 D$ es el funtor dado por I. Reiten en [Rei75].*

Demostración: Sea M un Λ-módulo finitamente generado sin sumandos proyectivos. Notemos que $\mathfrak{g}_0(D(M))$ es la terna $(D(M)/Soc(D(M)), Soc(D(M)), \mu)$, donde $\mu : D(M)/Soc(D(M)) \otimes \mathbf{r} \to Soc(D(M))$ es multiplicación por r.

Dualizando tenemos un morfismo:

$$D(Soc(D(M))) \longrightarrow Hom_\Lambda(D(M)/Soc(D(M)) \otimes \mathbf{r}, D(\Lambda))$$

el cual por adjunción nnos proporciona

$$D(Soc(D(M))) \xrightarrow{D(\mu)} Hom_\Lambda\left(\mathbf{r}, D\left(\frac{D(M)}{Soc(D(M))}\right)\right)$$

pero para cualquier Λ-módulo finitamente generado X tenemos que $D(X/Soc(X)) \simeq \mathbf{r}X$ y $D(Soc(X)) = X/\mathbf{r}X$. Por lo tanto $D(Soc(D(M))) = \frac{D^2(M)}{\mathbf{r}D^2(M)} \simeq \frac{M}{\mathbf{r}M}$ y $D\left(\frac{D(M)}{Soc(D(M))}\right) = \mathbf{r}D^2(M) \simeq \mathbf{r}M$.

Tenemos por lo tanto un morfismo

$$\frac{M}{\mathbf{r}M} \xrightarrow{\nu'} Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}\left(\frac{M}{\mathbf{r}M}, Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}M)\right)$$

y por adjunción $Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}\left(\frac{M}{\mathbf{r}M}, Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}M)\right) = Hom_{\Lambda/\mathbf{r}}\left(\mathbf{r} \otimes \frac{M}{\mathbf{r}M}, \mathbf{r}M\right)$. ν' corresponde a un morfismo $\nu' : r \otimes \frac{M}{\mathbf{r}M} \to \mathbf{r}M$, basta comprobar que ν' es multiplicación.

■

Capítulo 4

Dimensión de Representación de Álgebras de Artin.

El principal objetivo de este capítulo es introducir la noción de la dimensión de representación de un álgebra de artin. Se espera que la dimensión de representación de un álgebra de artin nos de una manera razonable de medir hasta que punto la categoría de módulos finitamente generados sobre un álgebra de artin es una categoría de tipo de representación finita.

Después de algunos preliminares sobre categorías y módulos sobre anillos de endomorfismos, una descripción de las álgebras de artin de tipo de representación finita es dada en la sección 4. Este resultado sirve como principal motivación para la definición de la dimensión de representación de un álgebra de artin dada en la sección 5.

4.1. Módulos, comódulos y módulos de homotopía.

Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva y (g_1, g_2) un morfismo en $Morph(\mathcal{A})$, es decir, tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_1"'] & A_2 \arrow[d, "g_2"] \\ A_1' \arrow[r, "f'"] & A_2' \end{tikzcd}$$

Decimos que (g_1, g_2) es **proyectivamente trival** si existe un morfismo $h : A_2 \to A_1'$ tal que $f'h = g_2$.

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_1"'] & A_2 \arrow[d, "g_2"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ A_1' \arrow[r, "f'"] & A_2' \end{tikzcd}$$

Decimos que (g_1, g_2) es **inyectivamente trival** si existe un morfismo $h : A_2 \to A_1'$ tal que $hf = g_1$. Finalmente, (g_1, g_2) se dice **homotópicamente trivial** si existe un morfismo $h : A_2 \to A_1'$ tal que

$f'hf = g_2f = f'g_1$.

Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva, algunas de las propiedades básicas son:

i) Un morfismo en $Morph(\mathcal{A})$ que es proyectivamente trivial, o inyectivamente trivial, es homotópicamente trivial.

Demostración: Supóngase primero que (g_1, g_2) es proyectivamente trivial, entonces existe un morfismo $h : A_2 \to A'_1$ tal que $f'h = g_2$. Por hipótesis tenemos que $f'g_1 = g_2f$, así usando la igualdad anterior nos da $g_2f = f'hf = f'g_1$ y por lo tanto (g_1, g_2) es homotópicamente trivial.

De manera análoga si que (g_1, g_2) es inyectivamente trivial, se sigue que $hf = g_1$ y por lo tanto $f'g_1 = f'hf = g_2f$.

■

ii) Cada una de las relaciones en $Morph(\mathcal{A})$ dada por:

a) (g_1, g_2) se relaciona con (g'_1, g'_2), $(g_1, g_2)P(g'_1, g'_2)$, si y sólo si $(g_1 - g'_1, g_2 - g'_2)$ es proyectivamente trivial.

b) (g_1, g_2) se relaciona con (g'_1, g'_2), $(g_1, g_2)I(g'_1, g'_2)$, si y sólo si $(g_1 - g'_1, g_2 - g'_2)$ es inyectivamente trivial.

c) (g_1, g_2) se relaciona con (g'_1, g'_2), $(g_1, g_2)H(g'_1, g'_2)$, si y sólo si $(g_1 - g'_1, g_2 - g'_2)$ es homotópicamente trivial.

es una relación de equivalencia sobre $Morph(\mathcal{A})$.

Demostración: Veamos que P cumple con las condiciones *i*) y *iii*) de 2.38 para ver que es una relación de equivalencia sobre $Morph(\mathcal{A})$, claramente se cumple *i*). Queda por demostrar *iii*) consideremos entonces $(g_1, g_2)P(g'_1, g'_2)$ y supóngase que tenemos morfismos (l_1, l_2) y (k_1, k_2) tales que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "l_1"'] & B_2 \arrow[d, "l_2"] \\
A_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_1-g'_1"'] & A_2 \arrow[d, "g_2-g'_2"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\
A'_1 \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "k_1"'] & A'_2 \arrow[d, "k_2"] \\
C'_1 \arrow[r, "f_1"] & C'_2
\end{tikzcd}$$

consideremos $h' : B_2 \to C'_1$ como $h' = k_1hl_2$, entonces tenemos que $f_1h' = f_1k_1hl_2 = k_2f'hl_2 = k_2(g_2 - g'_2)l_2$, por lo tanto el morfismo $((k_1(g_1 - g'_1)l_1), (k_2(g_2 - g'_2)l_2))$ es proyectivamente trivial, es decir, $(k_1, k_2)(g_1, g_2)(l_1, l_2)P(k_1, k_2)(g'_1, g'_2)(l_1, l_2)$, con lo cual terminamos de probar que P es un relación de equivalencia en $Morph\mathcal{A}$.

Queda por demostrar que es una relación de equivalencia aditiva, consideremos $(g_1, g_2)P(g_1', g_2')$ y $(\tilde{g_1}, \tilde{g_2})P(\tilde{g_1}', \tilde{g_2}')$, de aquí que existen morfismos $h, \tilde{h} : A_2 \to A_1'$ tales que $f'h = g_2 - g_2'$ y $f'\tilde{h} = \tilde{g_2} - \tilde{g_2}'$, sumando ambas igualdades obtenemos $f'(h + \tilde{h}) = g_2 + g_2' - (g_2' + \tilde{g_2}')$, así:

$$((g_1, g_2) + (\tilde{g_1}, \tilde{g_2}))\, P \left((g_1', g_2') + (\tilde{g_1}', \tilde{g_2}')\right)$$

Por lo tanto hemos probado que P es una relación de equivalencia aditiva sobre $Morph(\mathcal{A})$, de manera similar podemos demostrar que las relaciones I y H sobre $Morph(\mathcal{A})$ son relaciones de equivalencia aditivas.

■

Llamamos a $Morph(\mathcal{A})/P$ **la categoría de módulos sobre** $\mathcal{A}$ y la denotaremos por $Mod(\mathcal{A})$. Llamamos a $Morph(\mathcal{A})/I$ **la categoría de comódulos sobre** $\mathcal{A}$ y la denotaremos por $Comod(\mathcal{A})$. Por último, llamamos a $Morph(\mathcal{A})/H$ **la categoría de módulos de homotopía sobre** $\mathcal{A}$ y la denotaremos por $H - Mod(\mathcal{A})$.

Ejemplo 4.1. Sea Λ un anillo, $\mathcal{P}$ la subcategoría de $Mod(\Lambda)$ que consiste de todos los módulos proyectivos en $Mod(\Lambda)$.

a) El funtor
$$\phi : Morph(\mathcal{P}) \longrightarrow Mod(\Lambda)$$
dado por $\phi(P_1, P_2, f) = P_2/Imf$, induce una equivalencia de categorías
$$\varphi : Mod(\mathcal{P}) \longrightarrow Mod(\Lambda)$$
también el funtor
$$\psi : \mathcal{P} \longrightarrow Mod(\mathcal{P})$$
dado por $\psi(P) = (0, P, 0)$ es un funtor fiel y pleno.

b) No es difícil ver que el diagrama exacto conmutativo de Λ-módulos
$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_2"'] & P_1 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "g_1"] \arrow[dl, dashed, "h"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "t"'] & 0 \\
P_2' \arrow[r, "f'"] & P_1' \arrow[r, "\varepsilon'"] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
con los P_i y P_i' Λ-módulos proyectivos, tienen la propiedad que existe un morfismo $h : P_1 \to P_2'$ tal que $f'hf = g_1 f = f'g_2$, es decir, $(g_2, g_1) : f \to f'$ es homotópicamente trivial si y sólo si existe una función $t : M \to P_1'$ tal que $g = \varepsilon' t$.

c) Además para un morfismo $g : M \to M'$ en $Mod(\Lambda)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   i) Existe una factorización $M \to P \to M'$ de g con P proyectivo.

   ii) Si $P \to M' \to 0$ es exacta entonces existe un morfismo $t : M \to P$ tal que g es la composición de $M \to P \to M'$.

Usando esta observación, se muestra fácilmente que la relación $R(P)$ sobre $Mod(\Lambda)$ definida por:

$f_2 : M \to M'$ entonces $f_1 R(P) f_2$ si y sólo si $f_1 - f_2 : M \to M'$ se factoriza a través de un módulo proyectivo.

Es una relación de equivalencia aditiva. Estas observaciones convenientemente son resumidas de la siguiente manera.

Proposición 4.2. *El funtor $\phi : Morph(\mathcal{P}) \to Mod(\Lambda)$, induce una equivalencia de categorías $H - Mod(\mathcal{P}) \to Mod(\Lambda)/R(P) = \underline{Mod(\Lambda)}$.*

■

Ejemplo 4.3. Sea Λ un anillo, $\mathcal{I}$ la subcategoría de $Mod(\Lambda)$ que consiste de todos los módulos inyectivos en $Mod(\Lambda)$.

a) El funtor
$$\tilde{\phi} : Morph(\mathcal{I}) \longrightarrow Mod(\Lambda)$$
dado por $\tilde{\phi}(I_0, I_1, f) = Kerf$, induce una equivalencia de categorías
$$\tilde{\varphi} : Comod(\mathcal{I}) \longrightarrow Mod(\Lambda).$$
También el funtor
$$\tilde{\psi} : \mathcal{I} \longrightarrow Comod(\mathcal{I})$$
dado por $\tilde{\psi}(I) = (I, 0,0)$ es un funtor fiel y pleno.

b) Dado un diagrama exacto conmutativo de Λ-módulos
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "g"'] & I_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_0"'] & I_1 \arrow[d, "g_1"'] \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varepsilon'"] & I'_0 \arrow[r, "f'"] & I'_1 \end{tikzcd}$$
con los I_i y I'_i Λ-módulos inyectivos, tienen la propiedad que existe un morfismo $h : I_1 \to I'_0$ tal que $f'hf = f'g_0 = g_1 f$, es decir, $(g_0, g_1) : f \to f'$ es homotópicamente trivial si y sólo si existe una función $t : I_0 \to M'$ tal que $t\varepsilon = \varepsilon'$.

c) Además para un morfismo $g : M \to M'$ en $Mod(\Lambda)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   i) Existe una factorización $M \to I \to M'$ de g con I inyectivo.

   ii) Dado un morfismo $M \to I$ con I inyectivo, entonces existe un morfismo $t : I \to M'$ tal que g es la composición de $M \to I \to M'$.

De esto se sigue que la relación $R(I)$ sobre $Mod(\Lambda)$ definida por:

$f_1, f_2 : M \to M'$ entonces $f_1 R(I) f_2$ si y sólo si $f_1 - f_2 : M \to M'$ se factoriza a través de un módulo inyectivo. Es una relacion de equivalencia aditiva. Estas obervaciones son resumidas convenientemente en la siguiente manera.

Proposición 4.4. *El funtor* $\tilde{\varphi} : \underline{Morph(\mathcal{I})} \to Mod(\Lambda)$ *induce una equivalencia de categorías* $H - Mod(\mathcal{I}) \to Mod(\Lambda)/R(I) = \overline{Mod(\Lambda)}$.

■

Tales ejemplos sugieren hacer lo siguiente:

Definición 4.5. Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva. Definimos el funtor

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow Mod(\mathcal{A})$$

dado por $P(A) = (0, A, 0)$, y el funtor

$$I : \mathcal{A} \longrightarrow Comod(\mathcal{A})$$

por $I(A) = (A, 0, 0)$.

Ahora bien notemos que dada cualquier categoría aditiva $\mathcal{A}$ tenemos el funtor contravariante

$$D : Morph(\mathcal{A}) \longrightarrow Morph(\mathcal{A}^{op})$$

dado por $D(\ A_1 \xrightarrow{f} A_2\ ) = \ A_2 \xrightarrow{f} A_1$ en $Morph(\mathcal{A}^{op})$. Como las composiciones

$$Morph(\mathcal{A}) \xrightarrow{D} Morph(\mathcal{A}^{op}) \xrightarrow{D} Morph(\mathcal{A})$$

y

$$Morph(\mathcal{A}^{op}) \xrightarrow{D} Morph(\mathcal{A}) \xrightarrow{D} Morph(\mathcal{A}^{op})$$

son claramente la identidad, se sigue que $D : Morph(\mathcal{A}) \longrightarrow Morph(\mathcal{A}^{op})$ es una dualidad. Tal funtor dualidad tiene las siguientes propiedades, donde π_P y π_I denotan los funtores canónicos:

a) Este induce un funtor contravariante $D_P : Mod(\mathcal{A}) \to Comod(\mathcal{A}^{op})$ el cual es una dualidad con la propiedad de que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Morph(\mathcal{A}) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\pi_P"'] & Morph(\mathcal{A}^{op}) \arrow[d, "\pi_I"] \\ Mod(\mathcal{A}) \arrow[r, "D_P"] & Comod(\mathcal{A}^{op}) \end{tikzcd}$$

b) Este induce un funtor contravariante $D_I : Comod(\mathcal{A}) \to Mod(\mathcal{A}^{op})$ el cual es una dualidad teniendo la propiedad de que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Morph(\mathcal{A}) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\pi_I"'] & Morph(\mathcal{A}^{op}) \arrow[d, "\pi_P"] \\ Comod(\mathcal{A}) \arrow[r, "D_I"] & Mod(\mathcal{A}^{op}) \end{tikzcd}$$

c) Éste induce un funtor contravariante $D_H : H - Mod(\mathcal{A}) \to H - Mod(\mathcal{A}^{op})$ el cual es una dualidad teniendo la propiedad de que el siguiente diagrama conmuta;

$$\begin{array}{ccc} Morph(\mathcal{A}) & \xrightarrow{D} & Morph(\mathcal{A}^{op}) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_H} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_H} \\ H - Mod(\mathcal{A}) & \xrightarrow{D_H} & H - Mod(\mathcal{A}^{op}) \end{array}$$

Como una aplicación de estos resultados mostramos que para un anillo arbitrario Λ, la categoría de Λ-módulos izquierdos finitamente presentados determina la categoría de Λ-módulos derechos finitamente presentados. Sea $\rho(\Lambda)$ la subcategoría plena de $Mod(\Lambda)$ que consiste de todos los Λ-módulos proyectivos finitamente presentado. Obviamente $\rho(\Lambda) \subset \mathcal{P}(\Lambda)$, la categoría de todos los Λ-módulos proyectivos. La inclusión $\rho(\Lambda) \subset \mathcal{P}(\Lambda)$ induce un funtor fiel y pleno $Mod(\rho(\Lambda)) \to Mod(\mathcal{P}(\Lambda))$. Entonces la composición.

$$Mod(\rho(\Lambda)) \xrightarrow{i} Mod(\mathcal{P}(\Lambda)) \xrightarrow{\varphi} Mod(\Lambda)$$

es un funtor fiel y pleno. Es sencillo notar que un módulo M en $Mod(\Lambda)$ es finitamente presentado si y sólo si M es isomorfo a algo en la imagen de $Mod(\rho(\Lambda)) \to Mod(\Lambda)$. Por lo tanto si denotamos por $mod(\Lambda)$ la subcategoría plena de $Mod(\Lambda)$ que consiste de los Λ-módulos finitamente presentados, entonces el funtor fiel y pleno $Mod(\rho(\Lambda)) \to Mod(\Lambda)$ induce una equivalencia de categorías $Mod(\rho(\Lambda)) \to mod(\Lambda)$.

A continuación describiremos una equivalencia de categorías de $Mod(\rho(\Lambda)^{op})$ a $mod(\Lambda^{op})$, la subcategoría plena de Λ-módulos derechos finitamente presentados. Haremos esto demostrando que $(\rho(\Lambda))^{op}$ es equivalente a $\rho(\Lambda^{op})$, los Λ-módulos derechos proyectivos, finitamente presentados.

A saber defínase:

$$\psi : (\rho(\Lambda))^{op} \longrightarrow \rho(\Lambda^{op})$$

por $\psi(P) := P^* = Hom_\Lambda(P, \Lambda)$ para cada P en $(\rho(\Lambda))^{op}$, es decir, para cada Λ-módulo izquierdo proyectivo finitamente presentado P. Notemos que ψ es una equivalencia de categorías, dado que cada Λ-módulo proyectivo finitamente presentado P es reflexivo, es decir, el morfismo $\phi_P : P \to P^{**}$ dado por $\phi_P(x)(f) = f(x)$ para todo x en P y f en P^{**} es un isomorfismo.

Obviamente la equivalencia de categorías ψ induce una equivalencia de categorías $Mod\big((\rho(\Lambda))^{op}\big) \to Mod(\rho(\Lambda^{op}))$. Por lo tanto la composición de equivalencias

$$Mod\big((\rho(\Lambda))^{op}\big) \longrightarrow Mod(\rho(\Lambda^{op})) \longrightarrow mod(\Lambda^{op})$$

nos da la equivalencia de categorías $Mod\big((\rho(\Lambda))^{op}\big) \to mod(\Lambda^{op})$, que es la equivalencia de categorías que deseabamos obtener.

Como hemos descrito anteriormente tenemos una dualidad particular

$$D_I : Comod(\rho(\Lambda)) \longrightarrow Mod((\rho(\Lambda))^{op})$$

y la composición:

$$Comod(\rho(\Lambda)) \xrightarrow{D_I} Mod((\rho(\Lambda))^{op}) \longrightarrow mod(\Lambda^{op})$$

nos da una dualidad particular, $Comod(\rho(\Lambda)) \to mod(\Lambda^{op})$. Notemos que esta dualidad nos da una equivalencia de categorías

$$Comod((\rho(\Lambda))^{op}) \longrightarrow mod(\Lambda^{op})$$

Estamos ahora en posición de mostrar que hasta equivalencia canónica, la categoría de módulos izquierdos finitamente presentados $mod(\Lambda)$ determina la categoría de módulos derechos finitamente presentados $mod(\Lambda^{op})$. Dada la categoría $mod(\Lambda)$ podemos determinar cuando un módulo M en $mod(\Lambda)$ es proyectivo. Entonces la categoría $mod(\Lambda)$ determina la subcategoría plena $\rho(\Lambda)$ de $mod(\Lambda)$ y por lo tanto la categoría $Comod(\rho(\Lambda))$. Como ya hemos descrito anteriormente una equivalencia de categorías de $Comod((\rho(\Lambda))^{op})$ a $mod(\Lambda^{op})$, vemos como hasta equivalencia de categorías, la categoría $mod(\Lambda)$ de módulos izquierdos finitamente presentados determina la categoría $mod(\Lambda^{op})$ de Λ-módulos derechos finitamente presentados.

Antes de regresar a nuestra discusión general de varias categorías de módulos asociados con una categoría arbitraria aditiva $\mathcal{A}$, sentamos una consecuencia más de la equivalencia de categorías:

$$\psi : (\rho(\Lambda))^{op} \longrightarrow \rho(\Lambda^{op})$$

Esta equivalencia de categorías induce una equivalencia de categorías

$$\psi_H : H - Mod((\rho(\Lambda))^{op}) \longrightarrow H - Mod(\rho(\Lambda^{op}))$$

pero ya hemos definido la dualidad canónica $D_H : H - Mod(\rho(\Lambda)) \to H - Mod((\rho(\Lambda))^{op})$, por lo tanto la composición

$$H - Mod(\rho(\Lambda)) \xrightarrow{D_H} H - Mod((\rho(\Lambda))^{op}) \xrightarrow{\psi_H} H - Mod(\rho(\Lambda^{op}))$$

nos da una dualidad entre $H - Mod(\rho(\Lambda))$ y $H - Mod(\rho(\Lambda^{op}))$. Ahora interpretamos este resultado en términos de las categorías $mod(\Lambda)$ y $mod(\Lambda^{op})$.

Sea $R(\rho(\Lambda))$ la restricción a $mod(\Lambda)$ de la relación de equivalencia aditiva $R(P(\Lambda))$ de $Mod(\Lambda)$. Similarmente, sea $R(\rho(\Lambda^{op}))$ la restricción a $mod(\Lambda^{op})$ de la relación de equivalencia $R(P(\Lambda^{op}))$ sobre $Mod(\Lambda^{op})$. Entonces los funtores inclusión $mod(\Lambda) \to Mod(\Lambda)$ y $mod(\Lambda^{op}) \to Mod(\Lambda^{op})$ inducen funtores fieles y plenos:

$$\underline{mod(\Lambda)} = \frac{mod(\Lambda)}{R(\rho(\Lambda))} \longrightarrow \frac{Mod(\Lambda)}{R(P(\Lambda))} = \underline{Mod(\Lambda)}$$

y

$$\underline{mod(\Lambda^{op})} = \frac{mod(\Lambda^{op})}{R(\rho(\Lambda^{op}))} \longrightarrow \frac{Mod(\Lambda^{op})}{R(P(\Lambda^{op}))} = \underline{Mod(\Lambda^{op})}$$

los cuales permiten considerar a $\underline{mod(\Lambda)}$ y $\underline{mod(\Lambda^{op})}$ como subcategorías plenas de $\underline{Mod(\Lambda)}$ y $\underline{Mod(\Lambda^{op})}$, respectivamente.

También los funtores inclusión $\rho(\Lambda) \to \mathcal{P}(\Lambda)$ y $\rho(\Lambda^{op}) \to \mathcal{P}(\Lambda^{op})$ inducen funtores fieles y plenos

$$H - Mod(\rho(\Lambda)) \longrightarrow H - Mod(\mathcal{P}(\Lambda))$$

y

$$H - Mod(\rho(\Lambda^{op})) \longrightarrow H - Mod(\mathcal{P}(\Lambda^{op}))$$

Ahora se puede comprobar fácilmente que las composiciones

$$H-Mod(\rho(\Lambda)) \longrightarrow H-Mod(\mathcal{P}(\Lambda)) \longrightarrow \underline{Mod(\Lambda)}$$

y

$$H-Mod(\rho(\Lambda^{op})) \longrightarrow H-Mod(\mathcal{P}(\Lambda^{op})) \longrightarrow \underline{Mod(\Lambda^{op})}$$

inducen equivalencias de categorías

$$H-Mod(\rho(\Lambda)) \longrightarrow \underline{mod(\Lambda)}$$

y

$$H-Mod(\rho(\Lambda^{op})) \longrightarrow \underline{mod(\Lambda^{op})}$$

Como $H-Mod(\rho(\Lambda)) \to \underline{mod(\Lambda)}$ es una equivalencia de categorías sabemos que existe una equivalencia de categorías $\underline{mod(\Lambda)} \to H-Mod(\rho(\Lambda))$ tal que las composiciones

$$\underline{mod(\Lambda)} \longrightarrow H-Mod(\rho(\Lambda)) \longrightarrow \underline{mod(\Lambda)}$$

$$H-Mod(\rho(\Lambda)) \longrightarrow \underline{mod(\Lambda)} \longrightarrow H-Mod(\rho(\Lambda))$$

son isomorfas a los funtores identidad apropiados. En general no existe una manera canónica de elegir la equivalencia $\underline{mod(\Lambda)} \to H-Mod(\rho(\Lambda))$. Sin embargo, una vez elegida una la composición de equivalencias

$$\underline{mod(\Lambda)} \longrightarrow H-Mod(\rho(\Lambda)) \longrightarrow H-Mod(\rho(\Lambda^{op})) \longrightarrow \underline{mod(\Lambda^{op})}$$

nos da una dualidad $\underline{mod(\Lambda)} \to \underline{mod(\Lambda^{op})}$. Se comprueba fácilmente ahora que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Morph(\rho(\Lambda)) \arrow[r] \arrow[d] & Morph(\rho(\Lambda^{op})) \arrow[d] \\
\underline{mod(\Lambda)} \arrow[r] & \underline{mod(\Lambda^{op})}
\end{tikzcd}$$

donde $Morph(\rho(\Lambda)) \to Morph(\rho(\Lambda^{op}))$ es la dualidad dada por $P_1 \to P_0$ va a $P_0^* \to P_1^*$. Como en el caso en que los P_i son módulos libres la matriz de morfismos $P_0^* \to P_1^*$ no es nada mas que la transpuesta de la matriz de $P_1 \to P_0$, llamaremos a la dualidad $T : \underline{mod(\Lambda)} \to \underline{mod(\Lambda^{op})}$ **la transpuesta** y usualmente será denotada por T. Por lo tanto si estamos dando un Λ-módulo izquierdo finitamente presentado M, entonces visto como un objeto en $\underline{mod(\Lambda)}$ el objeto $T(M)$ en $\underline{mod(\Lambda^{op})}$, puede ser visto hasta isomorfismo como sigue: Sea $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ una presentación proyectiva de M con los P_i en $\rho(\Lambda^{op})$. Entonces el cokernel de $P_0^* \to P_1^*$ es isomorfo a $T(M)$ cuando es visto como objeto en $\underline{mod(\Lambda^{op})}$.

4.2. La categoría Mod($\mathcal{A}$)

Nuestro objetivo en esta sección es desarrollar algunos de los hechos básicos concernientes a la categoría $Mod(\mathcal{A})$. Todos los resultados que establecemos para la categoría $Mod(\mathcal{A})$ son válidos cuando $\mathcal{A}$ es esqueléticamente pequeña o no. Sin embargo, como las demostraciones son técnicamente menos involucradas para categorías esqueléticamente pequeñas y como estas son suficientes para las aplicaciones que tendremos en mente, desarrollamos la teoría de $Mod(\mathcal{A})$ bajo la hipótesis adicional que $\mathcal{A}$ es una categoría esqueléticamente pequeña.

Comenzaremos por mostrar que $Mod(\mathcal{A})$ es equivalente a ciertas subcategorías plenas de las categorías abelianas $Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$. Para esto definimos un funtor $Morph(\mathcal{A}) \to Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ el cual involucrará un funtor fiel y pleno $Mod(\mathcal{A}) \to Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$.

Asociado con cada objeto (A_1, A_2, f) en $Morph(\mathcal{A})$ se encuentra funtor:

$$F : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow Ab$$

dado por $F(A) := Cokernel(Hom_{\mathcal{A}}(A, A_1) \to Hom_{\mathcal{A}}(A, A_2)) = Hom_{\mathcal{A}}(A, A_2)/Im(Hom_{\mathcal{A}}(A, f))$, para todo A en $\mathcal{A}$. Notemos que F está bien definido ya que para cada morfismo $g : A \to A'$ en $\mathcal{A}^{op}$ adquirimos un correspondiente morfismo $g : A' \to A$ en $\mathcal{A}$ el cual hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{A}}(A, A_1) \arrow[r, "Hom_{\mathcal{A}}(A,f)"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{A}}(g,A_1)"'] & Hom_{\mathcal{A}}(A, A_2) \arrow[r] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{A}}(g,A_2)"] & F(A) \arrow[r] & 0 \\
Hom_{\mathcal{A}}(A', A_1) \arrow[r, "Hom_{\mathcal{A}}(A',f)"] & Hom_{\mathcal{A}}(A', A_2) \arrow[r] & F(A') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Así mismo para todo A en $\mathcal{A}$ nos encontramos con la sucesión exacta de funtores en $Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$:

$$Hom_{\mathcal{A}}(*, A_1) \xrightarrow{Hom_{\mathcal{A}}(*,f)} Hom_{\mathcal{A}}(*, A_2) \xrightarrow{\varepsilon} F \longrightarrow 0$$

Como un morfismo (g_1, g_2) en $Morph(\mathcal{A})$ no es más que un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_1"'] & A_2 \arrow[d, "g_2"] \\
A_1' \arrow[r, "f'"] & A_2'
\end{tikzcd}$$

entonces existe un único morfismo $F \to F'$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{A}}(*, A_1) \arrow[r, "Hom_{\mathcal{A}}(*,f)"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{A}}(*,g_1)"'] & Hom_{\mathcal{A}}(*, A_2) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{A}}(*,g_2)"] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
Hom_{\mathcal{A}}(*, A_1') \arrow[r, "Hom_{\mathcal{A}}(*,f')"] & Hom_{\mathcal{A}}(*, A_2') \arrow[r, "\varepsilon'"] & F' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Estos datos son los que definen nuestro funtor deseado $\psi : Morph(\mathcal{A}) \to Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$. Como los funtores $Hom_{\mathcal{A}}(*, A)$ son objetos proyectivos en $Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$, esto combinado con álgebra homológica estándar y los isomorfismos de Yoneda muestran dos cosas acerca de los funtores $\psi : Morph(\mathcal{A}) \to Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$.

a) Es un funtor pleno.

Demostración: Sean (A_1, A_2, f), (A'_1, A'_2, f') en $Morph(\mathcal{A})$ para los cuales asociamos los funtores F y F' en $Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$, respectivamente. Supóngase que existe un morfismo $g : F \to F'$ en $Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$, como los objetos $Hom_{\mathcal{A}}(*, A_i)$ y $Hom_{\mathcal{A}}(*, A'_i)$ son proyectivos entonces tenemos el siguiente diagrama exacto conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{A}}(*, A_1) \arrow[r, "Hom_{\mathcal{A}}(*,f)"] \arrow[d] & Hom_{\mathcal{A}}(*, A_2) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
Hom_{\mathcal{A}}(*, A'_1) \arrow[r, "Hom_{\mathcal{A}}(*,f')"] & Hom_{\mathcal{A}}(*, A'_2) \arrow[r, "\varepsilon'"] & F' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

tal diagrama proporciona morfismos $g_1 : A_1 \to A'_1$ y $g_2 : A_2 \to A'_2$ tales que producen el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_1"'] & A_2 \arrow[d, "g_2"] \\
A'_1 \arrow[r, "f'"] & A'_2
\end{tikzcd}$$

De ésta manera podemos tomar el morfismo (g_1, g_2) en $Morph(\mathcal{A})$ el cual cumple que $\psi(g_1, g_2) = g$.

■

b) Un morfismo en $Morph(\mathcal{A})$ va a cero si y sólo si es proyectivamente trivial.

Demostración: Por lo visto anteriormente logramos el siguiente diagrama conmutativo exacto

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{A}}(*, A_1) \arrow[r, "Hom_{\mathcal{A}}(*,f)"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{A}}(*,g_1)"'] & Hom_{\mathcal{A}}(*, A_2) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{A}}(*,g_2)"] & F \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
Hom_{\mathcal{A}}(*, A'_1) \arrow[r, "Hom_{\mathcal{A}}(*,f')"] & Hom_{\mathcal{A}}(*, A'_2) \arrow[r, "\varepsilon'"] & F' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Supóngase que el morfismo (g_1, g_2) en $Morph(\mathcal{A})$ es proyectivamente trivial, entonces existe $h : A_2 \to A'_1$ tal que $g_2 = f'h$, así conseguimos un morfismo $(*, h) : (*, A_2) \to (*, A'_1)$, tal que $Hom_{\mathcal{A}}(*, g_2) = Hom_{\mathcal{A}}(*, f')Hom_{\mathcal{A}}(*, h)$, de aquí que el morfismo inducido g es el morfismo cero.

Asi si tenemos que si un morfismo (g_1, g_2) en $Morph(\mathcal{A})$ es el morfismo $(0, 0)$, entonces por el diagrama anterior tenemos que el morfismo inducido.

■

Observación 4.6. Considerando el funtor $\psi : Morph(\mathcal{A}) \to Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ y dado que un morfismo en $Morph(\mathcal{A})$ bajo ψ va a dar a cero si y sólo si es proyectivamente trivial. Entonces tenemos que ψ induce un funtor fiel y pleno $Mod(\mathcal{A}) \to Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$.

■

Ahora es fácil ver que un funtor G es isomorfo a la imagen de un objeto en $Mod(\mathcal{A})$ si y sólo si existe una sucesión exacta

$$Hom_{\mathcal{A}}(*, A_1) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(*, A_2) \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

para algunos objetos A_1 y A_2 en $\mathcal{A}$. Esto sugiere la siguiente definición:

Definición 4.7. Decimos que un funtor $G : \mathcal{A}^{op} \to Ab$ es **coherente** si existe una sucesión exacta

$$Hom_{\mathcal{A}}(*, A_1) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(*, A_2) \longrightarrow G \longrightarrow 0.$$

Denotamos la subcategoría plena de $Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ que consiste de todos los funtores coherentes por $\widehat{\mathcal{A}}$.

Nota 4.8. Para simplificar notación en lo que resta del presente trabajo, cuando no exista ambiguedad acerca de la categoría C o del anillo Λ abreviamos los grupos $Hom_C(A, B) = Hom(A, B)$ y $Hom_\Lambda(A, B) = Hom(A, B)$, respectivamente. De manera similar denotamos los funtores $Hom_C(*, A) = Hom(*, A)$ y $Hom_\Lambda(*, A) = Hom(*, A)$.

Notemos que el funtor fiel y pleno $\psi : Mod(\mathcal{A}) \to Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ induce una equivalencia de categorías $Mod(\mathcal{A}) \to \widehat{\mathcal{A}}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, equal] & Mod(\mathcal{A}) \arrow[d] \\
\mathcal{A} \arrow[r] & \widehat{\mathcal{A}}
\end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}$ es el funtor dado por A va a dar a $Hom(*, A)$, para todo A en $\mathcal{A}$. La equivalencia de categorías canónicamente definida, nos muestra que poco importa si estudiamos $Mod(\mathcal{A})$ o $\widehat{\mathcal{A}}$. Como $\widehat{\mathcal{A}}$ es una subcategoría plena de la categoría abeliana $Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ es un tanto más fácil de estudiar que la categoría abstracta dada $Mod(\mathcal{A})$. Por esta razón trabajaremos principalmente con la categoría $\widehat{\mathcal{A}}$. Por supuesto, cualquier cosa que establezcamos para $\widehat{\mathcal{A}}$ también se mantiene para $Mod(\mathcal{A})$ vía nuestra equivalencia de categorías.

Los resultados básicos referentes a la categoría $\hat{\mathcal{A}}$ son simplemente casos especiales de algunos resultados generales concernientes a objetos proyectivos en categorías abelianas. Antes de dar estos resultados generales es conveniente dar algunas definiciones.

Definición 4.9. Supóngase que $\mathcal{P}$ es una subcategoría aditiva plena de una categoría abeliana C que consiste de objetos proyectivos en C. Por una $\mathcal{P}$ **- presentación** de un objeto C en C entendemos una sucesión exacta

$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

con los P_i en $\mathcal{P}$. Denotaremos la subcategoría plena de C consistente de esos objetos en C los cuales tienen $\mathcal{P}$ - presentaciones por $\mathcal{P}(C)$.

Supóngase que $\mathcal{P}$ es una subcategoría aditiva plena de C cuyos objetos son proyectivos en C. Dejamos a la verificación del lector los siguientes puntos básicos.

i) $\mathcal{P}(C)$ es una subcategoría aditiva de C.

ii) $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ es esqueléticamente pequeña si $\mathcal{P}$ es esqueléticamente pequeña.

iii) El funtor $Morph(\mathcal{P}) \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$ dado por $P_1 \to P_2$ va a $Coker(P_1 \to P_2)$ induce una equivalencia de categorías
$$Mod(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}).$$

iv) Si $0 \to C_1 \to C_2 \to C_2 \to 0$ es una sucesión exacta en $\mathcal{C}$ y C_1 y C_3 están en $\mathcal{P}(\mathcal{C})$, entonces C_2 está en $\mathcal{P}(\mathcal{C})$.

Con lo anterior estamos en posición de establecer nuestro principal resultado de esta sección.

Proposición 4.10. *Sea $\mathcal{P}$ una subcategoría plena aditiva de una categoría abeliana $\mathcal{C}$ cuyos objetos son todos proyectivos en $\mathcal{C}$. Entonces la categoría aditiva $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ tiene las siguientes propiedades:*

a) *Si $C_2 \to C_3 \to C_4 \to 0$ es exacta en $\mathcal{C}$ y C_2, C_3 están en $\mathcal{P}(\mathcal{C})$, entonces C_4 está en $\mathcal{P}(\mathcal{C})$. Por lo tanto todos los morfismos en $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ tienen cokerneles.*

b) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *Si $0 \to C_1 \to C_2 \to C_3$ es exacta en $\mathcal{C}$ con C_2 y C_3 en $\mathcal{P}(\mathcal{C})$, entonces C_1 esta en $\mathcal{P}(\mathcal{C})$.*

ii) *Dado cualquier morfismo $P_2 \to P_3$ en $\mathcal{P}$ existe un morfismo $P_1 \to P_2$ en $\mathcal{P}$ tal que $P_1 \to P_2 \to P_3$ es exacta en $\mathcal{C}$.*

iii) *$\mathcal{P}(\mathcal{C})$ es una categoría abeliana y el funtor inclusión $\mathcal{P}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ es exacto.*

c) *Supóngase que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ son categorías esqueléticamente pequeñas y $\mathcal{D}$ una categoría aditiva tal que todo morfismo en $\mathcal{D}$ tiene un cokernel en $\mathcal{D}$. Si*
$$u_* : Fun(\mathcal{P}(\mathcal{C}), \mathcal{D}) \longrightarrow Fun(\mathcal{P}, \mathcal{D})$$
es el funtor inducido por el funtor inclusión $i : \mathcal{P} \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$, entonces existe un funtor
$$u^* : Fun(\mathcal{P}, \mathcal{D}) \longrightarrow Fun(\mathcal{P}(\mathcal{C}), \mathcal{D})$$
tal que:

i) *Existen isomorfismos*
$$(u^* F, G) \simeq (F, u_* G)$$
los cuales son naturales en F y en G para todo F en $Fun(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ y G en $Fun(\mathcal{P}(\mathcal{C}), \mathcal{D})$.

ii) *$u_* u^* F = F$ para todo F en $Fun(\mathcal{P}, \mathcal{D})$.*

iii) *$u^* F : \mathcal{P}(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}$ es exacto derecho.*

Demostración: Comezaremos con la demostración del inciso *a*), es decir, que todos los morfismos en $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ tienen cokerneles, consideremos la siguiente sucesión exacta en $\mathcal{C}$
$$C_2 \xrightarrow{f} C_3 \xrightarrow{h} C_4 \longrightarrow 0$$
tal que C_2 y C_3 están en $\mathcal{P}(\mathcal{C})$, por demostrar que C_4 esta en $\mathcal{P}(\mathcal{C})$, es decir, por demostrar que C_4 tiene una $\mathcal{P}$-presentación.

Como C_2 y C_3 están en $\mathcal{P}(C)$, entonces tienen $\mathcal{P}$-presentaciones digamos:

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "g_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ P'_1 \arrow[r, "g'_1"] & P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & C_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dado que los P_i y P'_i son proyectivos en C se sigue que f puede ser levantado y producir el siguiente diagrama conmutativo exacto

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"'] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ P'_1 \arrow[r, "g'_1"] & P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & C_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

De tal diagrama si consideramos las sucesiones:

$$P: \qquad \cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_2=0} P_1 \xrightarrow{\partial_1=g_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0=0} 0 \longrightarrow \cdots$$

y

$$P': \qquad \cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial'_2=0} P'_1 \xrightarrow{\partial'=g'_1} P'_0 \xrightarrow{\partial'_0=0} 0 \longrightarrow \cdots$$

Por lo tanto P y P' son complejos, y obtenemos el morfismo de complejos $P \xrightarrow{f} P'$ de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} P: \arrow[d, "f"'] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f_2=0"'] & P_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f_0"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "f_{-1}=0"'] & \cdots \\ P': & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] & P'_1 \arrow[r, "g'_1"] & P'_0 \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Sea $M = M(f)$ la aplicación cono de f, es decir, $M_n = P_{n-1} \oplus P'_n$ y $\partial(P, P') = (-\partial P, \partial P' + fP)$. Como es bien sabido (ver [Lan65]), tenemos la sucesión exacta de homología

$$\cdots \longrightarrow H_n(P') \xrightarrow{i'_*} H_n(M_n(f)) \xrightarrow{\pi_*} H_{n-1}(P) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(P') \longrightarrow \cdots \tag{4.2.1}$$

donde i' es la inclusión $i' : P' \to M_n$, π es la proyección $\pi : M_n \to P^+$, con P^+ el complejo P elevado en un grado, es decir, $(P^+)_n = P_{n-1}$ y $f_* = H_n(f) : H_n(P) \to H_n(P')$ definido por $f_*(C + \partial P_{n+1}) = fC + \partial P'_{n+1}$, de la misma manera tenemos definidos i'_* y π_*. Así notemos que el complejo M es el siguiente:

$$M: \qquad \cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_3(P,P')} P_1 \xrightarrow{\partial_2(P,P')} P_0 \oplus P'_1 \xrightarrow{\partial_1(P,P')} P'_0 \xrightarrow{\partial_0(P,P')} 0 \longrightarrow \cdots$$

Ahora bien haciendo los cálculos para la homología de los complejos P y P' proporciona los siguientes datos: $H_2(P) = 0$, $H_1(P) = \frac{Kerg_1}{Im\partial_2} = Kerg_1$, $H_0(P) = \frac{Ker\partial_0}{Im\partial_1} = \frac{P_0}{g_1(P_1)} = C_2$, $H_{-1}(P) = 0$, de igual manera para el caso del complejo P' tenemos: $H_2(P') = 0$, $H_1(P') = Kerg'_1$, $H_0(P') = C_3$

y $H_{-1}(P') = 0$, por último notemos que $H_0(f) : H_0(P) \to H_0(P')$ es $f_*(C + \partial P_1) = f_0 C + \partial'_1 P'_1 = f_0 C + g_1 P'_1 = f$. De esta manera la sucesión 4.2.1 en el grado 1 y 0 es de la forma:

$$\cdots \longrightarrow Kerg'_1 \longrightarrow H_1(M_1(f)) \longrightarrow C_2 \xrightarrow{f} C_3 \longrightarrow H_0(M_0(f)) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Luego $H_0(M(f)) \simeq Cokerf$. Pero la sucesión exacta

$$P_0 + P'_1 \longrightarrow P'_0 \longrightarrow H_0(M(f)) \longrightarrow 0$$

muestra que $H_0(M(f))$ está en $\mathcal{P}(C)$ dado que $P_0 + P'_1$ y P'_0 están en $\mathcal{P}$, por lo tanto $Cokerf$ está en $\mathcal{P}(C)$, con lo cual está demostrada la parte a).

Continuamos con la demostración de b), claramente $b)i)$ implica $b)iii)$ ya que por lo demostrado en a) $\mathcal{P}(C)$ tiene cokerneles y por hipótesis $\mathcal{P}(C)$ tiene kerneles, por lo tanto $\mathcal{P}(C)$ es un categoría abeliana. Claramente $b)iii)$ implica $b)i)$.

Veamos que $b)ii)$ implica $b)i)$. Asuma que $\mathcal{P}$ tiene la propiedad que si $P_2 \to P_3$ es un morfismo en $\mathcal{P}$, entonces existe un morfismo $P_1 \to P_2$ en $\mathcal{P}$ tal que $P_1 \to P_2 \to P_3$ es exacta en C. De esto se sigue que para cada morfismo $g : Q \to Q'$ de C su kernel se encuentra en $\mathcal{P}(C)$.

Supóngase que tenemos una sucesión exacta $0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{f} C_3$, C_2 y C_3 están en $\mathcal{P}(C)$, así podemos formar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & \\
 & & C_1 \arrow[d] & \\
P_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"'] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
P'_1 \arrow[r, "g'_1"] & P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & C_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y consideremos nuevamente los complejos P y P', con su morfismo de complejos $f : P \to P'$ como fue descrito anteriormente

$$\begin{tikzcd}
P : \arrow[d, "f"'] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f_2=0"'] & P_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f_0"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "f_{-1}=0"'] & \cdots \\
P' : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] & P'_1 \arrow[r, "g'_1"] & P'_0 \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto dado que $H_1(P') = Kerg'_1$ tenemos que $H_1(P')$ está en $\mathcal{P}(C)$. Considerando nuevamente la sucesión 4.2.1 en grado 0 y 1 tenemos:

$$\cdots \longrightarrow H_1(P) \xrightarrow{f_*} H_1(P') \xrightarrow{i'_*} H_1(M_1(f)) \xrightarrow{\pi_*} C_2 \xrightarrow{f} C_3 \longrightarrow H_0(M_0(f)) \longrightarrow \cdots$$

con $H_1(P)$, $H_1(P')$, C_2 y C_3 en $\mathcal{P}(C)$, esto junto con el hecho que demostramos en a), muestra que $Ker(f) = Ker(H_0(P) \to H_0(P'))$ está en $\mathcal{P}(C)$ si $H_1(M(f))$ está en $\mathcal{P}(C)$.

Pero notemos que $H_1(M(f)) = Ker\partial_1/Im\partial_2 = Coker(M_2(f) \to Z_1(M(f)))$, donde $Z_1(M(f)) = Ker\partial_1$. Dado que $M_1(f) = P_0 \oplus P'_1$ y $M_0(f) = P'_0$, entonces $Ker\partial_1$ está en $\mathcal{P}(C)$ también tenemos $M_2(f) = P_1$ está en $\mathcal{P}(C)$, por lo tanto por $a)$ $H_1(M_1(f))$ está en $\mathcal{P}(C)$ y por consiguiente $Kerf$ también lo está.

Ahora veamos que $b)i)$ implica $b)ii)$. Sea $P_2 \to P_3$ un morfismo en $\mathcal{P}$, notemos que P_2 y P_3 están en $\mathcal{P}(C)$ ya que podemos tomar las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow P_2 = P_2 \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow P_3 = P_3 \longrightarrow 0$$

como las $\mathcal{P}$-presentaciones de P_2 y P_3, respectivamente. Entonces por el análisis hecho en el párrafo anterior tenemos que existe un morfismo $P_1 \to P_2$ con P_1 en $\mathcal{P}$.

Finalmente, terminaremos con la demostración de $c)$. Comenzaremos definiendo un funtor

$$u^* : Fun(\mathcal{P}, \mathcal{D}) \longrightarrow Fun(\mathcal{P}(C), \mathcal{D})$$

el cual tendrá las propiedades deseadas. Para cada C en $\mathcal{P}(C)$ elegimos una $\mathcal{P}$-presentación fija

$$P_1 \xrightarrow{g_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} C \longrightarrow 0$$

con la única condición que si C esta en $\mathcal{P}(C)$ entonces tomamos la $\mathcal{P}$-presentación

$$0 \longrightarrow C = C \longrightarrow 0$$

Para cada funtor aditivo $F : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ definimos

$$u^*F : \mathcal{P}(C) \longrightarrow \mathcal{D}$$

por $u^*F(C) = Coker(F(P_1) \to F(P_0))$, donde $P_1 \xrightarrow{g_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} C \longrightarrow 0$ es la $\mathcal{P}$-presentación de C elegida, notemos que u^*F está bien definada dado que todo morfismo en $\mathcal{D}$ tiene cokernel en $\mathcal{D}$ por hipótesis. Notemos que en el caso particular en que C esta en $\mathcal{P}$ tenemos que $u^*F(C) = Coker(F(0) \to F(C)) = F(C)$, así tenemos que para todo C en $\mathcal{P}$, $u^*F(C) = F(C)$. Si tenemos un morfismo en $f : C \to C'$ en $\mathcal{P}(C)$ es bien sabido que este puede ser levantado a morfismos $P_i \to P'_i$ tales que nos dan el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
P'_1 \arrow[r, "g'_1"] & P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Aplicando F al cuadro izquierdo y cálculando conúcleos tenemos:

$$\begin{tikzcd}
F(P_1) \arrow[r, "F(g_1)"] \arrow[d, "F(f_1)"'] & F(P_0) \arrow[r] \arrow[d, "F(f_0)"'] & u^*F(C_2) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "u^*F(f)"] & 0 \\
F(P'_1) \arrow[r, "F(g'_1)"] & F(P'_0) \arrow[r] & u^*F(C_3) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

el cual nos da un morfismo $u^*F(f) : u^*F(C) \to u^*F(C')$. Así tenemos definido un funtor $u^*F : \mathcal{P}(C) \to \mathcal{D}$ para cada funtor $F : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$. Con esto podemos definir el funtor

$$u^* : Fun(\mathcal{P}, \mathcal{D}) \longrightarrow Fun(\mathcal{P}(C), \mathcal{D})$$
$$F \longmapsto u^*F$$

También como $u^*F(*) = F(*)$ para todo F en $Fun(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} Fun(\mathcal{P}, \mathcal{D}) & \xrightarrow{u^*} & Fun(\mathcal{P}(C), \mathcal{D}) & \xrightarrow{u_*} & Fun(\mathcal{P}, \mathcal{D}) \\ F & \longmapsto & u^*F & \longmapsto & F \end{array}$$

$u_*(u^*F) = F$ para todo F en $Fun(\mathcal{P}, \mathcal{D})$, lo cual establece $c)ii)$.

Ahora continuamos con la demostración de $c)i)$. Supóngase ahora que estamos dando funtores $F : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{P}(C) \to \mathcal{D}$. Queremos definir un isomorfismo $(u^*F, G) \to (F, u_*G)$ el cual es funtorial en F y en G. Supóngase que estamos dando una transformación natural $\psi : u^*F \to G$. Ya que para cada P en $\mathcal{P}$ sabemos que $u_*G(P) = G(P)$ y $u^*F(P) = F(P)$, asociado con el morfismo $\psi : u^*F \to G$ se encuentra el correspondiente morfismo $\psi' : F \to u_*G$ dado por:

$$\{\psi_P : u^*F(P) \to G(P)\} \ \longmapsto \ \{\psi'_P : F(P) \to u_*G(P)\}$$

para todo P en $\mathcal{P}$. Entonces obtenemos morfismo $(u^*F, G) \to (F, u_*G)$ los cuales son obviamente funtoriales en F y en G. No es difícil mostrar que los morfismos $(u^*F, G) \to (F, u_*G)$ son todos isomorfismos, lo cual completa la demostración de $c)i)$.

Finalizamos con la demostración de $c)iii)$. Mostramos ahora que para cada $F : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ el funtor $u^*F : \mathcal{P}(C) \to \mathcal{D}$ es exacto derecho. Supóngase que $P_1 \xrightarrow{g_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} C \longrightarrow 0$ es una $\mathcal{P}$-presentación de C elegida y $P'_1 \xrightarrow{g'_1} P'_0 \xrightarrow{\varepsilon'} C \longrightarrow 0$ es una $\mathcal{P}$-presentación arbitraria de C. Ya que los P_i y P'_i son proyectivos en C, los complejos

$$P: \qquad P_1 \xrightarrow{g_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} C \longrightarrow 0$$

$$P': \qquad P'_1 \xrightarrow{g'_1} P'_0 \xrightarrow{\varepsilon'} C \longrightarrow 0$$

son homotópicamente equivalentes, de aquí que los complejos

$$u^*F(P): \qquad u^*F(P_1) \xrightarrow{u^*F(g_1)} u^*F(P_0) \xrightarrow{u^*F(\varepsilon)} u^*F(C) \longrightarrow 0$$

$$u^*F(P'): \qquad u^*F(P'_1) \xrightarrow{u^*F(g'_1)} u^*F(P'_0) \xrightarrow{u^*F(\varepsilon')} u^*F(C) \longrightarrow 0$$

son homotópicamente equivalentes. Por lo tanto los complejos de funtores:

$$0 \longrightarrow (u^*F(C), *) \longrightarrow (u^*F(P'_0), *) \longrightarrow (u^*F(P'_1), *) \tag{4.2.2}$$

$$0 \longrightarrow (u^*F(C), *) \longrightarrow (u^*F(P_0), *) \longrightarrow (u^*F(P_1), *)$$

son homotópicamente equivalentes.

El hecho que la sucesión inferior en la ecuación 4.2.2 es exacta implica que la sucesión superior en la ecuación 4.2.2 es exacta también ya que ellos tienen la misma homología. Por lo tanto hemos mostrado que si $P'_1 \xrightarrow{g'_1} P'_0 \xrightarrow{\varepsilon'} C \longrightarrow 0$ es exacta en C con los P'_i en $\mathcal{P}$, entonces

$$u^*F(P') : \qquad u^*F(P'_1) \xrightarrow{u^*F(g'_1)} u^*F(P'_0) \xrightarrow{u^*F(\varepsilon')} u^*F(C) \longrightarrow 0 \text{ es exacta en } \mathcal{D}.$$

Ahora supóngase que estamos dando una sucesión exacta $C_1 \xrightarrow{f} C_2 \xrightarrow{h} C_3 \longrightarrow 0$ en C con los C_1 en $\mathcal{P}(C)$. Si $P_1 \xrightarrow{g_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} C_1 \longrightarrow 0$ y $P'_1 \xrightarrow{g'_1} P'_0 \xrightarrow{\varepsilon'} C_2 \longrightarrow 0$ son las $\mathcal{P}$-presentaciones y considerando nuevamente la aplicación cono descrita en la demostración de a), tenemos la sucesión exacta:

$$P_0 + P'_1 \longrightarrow P'_0 \longrightarrow C_3 \longrightarrow 0$$

Por lo tanto por nuestro resultado anterior sabemos que $u^*F(P_0 + P'_1) \longrightarrow u^*F(P'_0) \longrightarrow u^*F(C_3) \longrightarrow 0$ es exacta. Combinando estos datos dentro del siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (u^*F(C_3), *) \arrow[r] \arrow[d] & (u^*F(P'_0), *) \arrow[r] \arrow[d] & (u^*F(P_0 + P'_1), *) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & (u^*F(C_2), *) \arrow[r] \arrow[d] & (u^*F(P'_0), *) \arrow[r] \arrow[d] & (u^*F(P'_1), *) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & (u^*F(C_1), *) \arrow[r] & (u^*F(P_0), *) \arrow[r] & (u^*F(P_1), *)
\end{tikzcd}$$

obtenemos nuestro resultado deseado que $0 \longrightarrow (u^*F(C_3), *) \longrightarrow (u^*F(C_2), *) \longrightarrow (u^*F(C_1), *)$ es exacta. Por lo tanto si la sucesión $C_1 \xrightarrow{f} C_2 \xrightarrow{h} C_3 \longrightarrow 0$ es exacta en C con los C_i en $\mathcal{P}(C)$, entonces $u^*F(C_1) \xrightarrow{u^*F(f)} u^*F(C_2) \xrightarrow{u^*F(h)} u^*F(C_3) \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathcal{D}$. Esto termina la demostración de $c)iii)$ lo cual completa la demostración de nuestra proposición.

■

Aplicamos ahora estos resultados a la categoría $\hat{\mathcal{A}}$ y por consiguiente también a $Mod(\mathcal{A})$. Si dejamos que $\mathcal{P}$ sea la subcategoría plena de $C = Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ consistiendo de todos esos funtores $(*, A)$ con A en $\mathcal{A}$ es claro que $\mathcal{P}$ es una subcategoría plena aditiva de $C = Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ consistente de objetos proyectivos en $Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ y que $\mathcal{P}(C) = \hat{\mathcal{A}}$. Aplicamos nuestras proposiciones anteriores a $\hat{\mathcal{A}}$ como el primer paso para estudiar la categoría $\hat{\mathcal{A}}$. La traslación de estos resultados a la categoría $Mod(\mathcal{A})$ se deja al lector.

Proposición 4.11. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva esqueléticamente pequeña, entonces tenemos:*

a) *Todo morfismo en $\hat{\mathcal{A}}$ tiene un cokernel.*

b) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) Todo morfismo en $\mathcal{A}$ tiene un pseudo-kernel.

ii) Todo morfismo en $\hat{\mathcal{A}}$ tiene un kernel.

iii) $\hat{\mathcal{A}}$ es una categoría abeliana y el funtor inclusion $\hat{\mathcal{A}} \to Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ es exacto.

iv) $\hat{\mathcal{A}}$ es una categoría abeliana.

c) Supóngase que $\mathcal{D}$ es una categoría aditiva tal que todo morfismo en $\mathcal{D}$ tiene un cokernel y $G : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ es un funtor arbitrario. Entonces existe un funtor exacto derecho $F : \hat{\mathcal{A}} \to \mathcal{D}$ tal que $FP = G$ donde $P : \mathcal{A} \to \hat{\mathcal{A}}$ es el funtor dado por $P(A) = (*, A)$. Más aún, si $F' : \hat{\mathcal{A}} \to \mathcal{D}$ es otro funtor exacto derecho tal que $F'P = G$, entonces existe uno y sólo un isomorfismo $F \to F'$.

Demostración: Dado que todo objeto de la forma $(*, A)$ es proyectivo en $Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ considerando a $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{C} = Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ por la proposición anterior es válido a).

Claramente en b) tenemos las equivalencias i), ii) y iii), de igual manera iii) implica iv). La única parte de esta proposición que no se sigue trivialmente de la proposición anterior es el hecho que $b)iv)$ implica $b)iii)$. Supóngase ahora que $\hat{\mathcal{A}}$ es abeliana y que

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_3 \longrightarrow 0$$

es exacta en $\hat{\mathcal{A}}$. Dado que cada uno de los $(*, A)$ es proyectivo en $\hat{\mathcal{A}}$, entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow ((*, A), F_1) \longrightarrow ((*, A), F_2) \longrightarrow ((*, A), F_3) \longrightarrow 0$$

para todo A en $\mathcal{A}$. Por lo tanto la sucesión $F_1(A) \to F_2(A) \to F_3(A)$ es exacta para todo A en $\mathcal{A}$ si $F_1 \to F_2 \to F_3$ es exacta en $\hat{\mathcal{A}}$.

Pero esto significa que $F_1 \to F_2 \to F_3$ es exacta en $Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$. Por lo tanto el funtor inclusión $\hat{\mathcal{A}} \to Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$ es exacto si $\hat{\mathcal{A}}$ es abeliana. De esta manera tenemos $b)iv)$ implica $b)iii)$.

■

Este último resultado nos proporciona la siguiente descripción del funtor $P : \mathcal{A} \to \hat{\mathcal{A}}$.

Corolario 4.12. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva esqueléticamente pequeña. Supóngase que $\mathcal{B}$ es una categoría aditiva con cokerneles y $P' : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor satisfaciendo la condición que dada cualquier categoría aditiva $\mathcal{D}$ con cokerneles y cualquier funtor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$, existe un funtor exacto derecho $F : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ tal que $FP' = G$. Entonces existe una equivalencia de categorías $J : \hat{\mathcal{A}} \to \mathcal{B}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "P"] \arrow[d, equal] & \hat{\mathcal{A}} \arrow[d, "J"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "P'"'] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

y si $J' : \hat{\mathcal{A}} \to \mathcal{B}$ es otra tal equivalencia, entonces existe un único isomorfismo $J \to J'$.

Demostración: Por la proposición 4.11 $\hat{\mathcal{A}}$ es una categoría con cokerneles, así tomamos $\mathcal{D} = \hat{\mathcal{A}}$ y por consiguiente existe un funtor exacto derecho $F : \mathcal{B} \to \hat{\mathcal{A}}$ tal que

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "P'"] \arrow[d, equal] & \mathcal{B} \arrow[d, "F"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "P"'] & \hat{\mathcal{A}} \end{tikzcd}$$

$FP' = P$, de igual manera por la proposición 4.11 c) existe $F' : \hat{\mathcal{A}} \to \mathcal{B}$ tal que $F'P = P'$. Tales funtores F y F' nos aportan lo siguiente: $F'FP' = F'P = P'$ y $FF'P = FP' = P$, así $F'F \simeq 1_{\mathcal{B}}$ y $FF' \simeq 1_{\hat{\mathcal{A}}}$, es decir, las categorías $\hat{\mathcal{A}}$ y $\mathcal{B}$ son equivalentes con la propiedad que dada cualquier otra equivalencia existe un único isomorfismo.

$\blacksquare$

Terminamos esta sección dando algunas conexiones de la categoría $Mod(\mathcal{A})$ con la categoría de módulos sobre anillos.

Supóngase que $\mathcal{A}$ es una categoría aditiva esqueléticamente pequeña, A_0 un objeto en $\mathcal{A}$ y $\Lambda = End(A_0)$. Entonces, para cada F en $Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab)$, consideramos el grupo abeliano $F(A_0)$ como un Λ-módulo derecho mediante la asignación

$$x\lambda = F(\lambda)(x)$$

para cada x en $F(A_0)$ y λ en Λ. Es un Λ-módulo derecho dado que $x(\lambda\mu) = F(\lambda\mu)(x) = F(\mu)F(\lambda)(x) = F(\mu)(F(\lambda)(x)) = (x\lambda)\mu$. En consecuencia, asociado con cada A_0 en $\mathcal{A}$ esta el funtor

$$\psi : Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab) \longrightarrow Mod(\Lambda^{op})$$

dado por $\psi(F) = F(A_0)$. En vista de nuestra discusión hasta ahora no es difícil establecer:

Proposición 4.13. *Sea A_0 un generador de la representación de la categoría aditiva $\mathcal{A}$ y $\Lambda = End(A_0)$. La restricción $\hat{\mathcal{A}} \to Mod(\Lambda^{op})$ del funtor exacto $\psi : Fun(\mathcal{A}^{op}, Ab) \longrightarrow Mod(\Lambda^{op})$ dado por $\psi(F) = F(A_0)$ tiene las siguientes propiedades:*

a) *Si A en $\mathcal{A}$ es una suma finita de copias de A_0 en $\mathcal{A}$ entonces $Hom_{\mathcal{A}}(A_0, A)$ es un Λ^{op}-módulo libre finitamente generado. Por lo tanto $\mathcal{P}$ la subcategoría plena de $Mod(\Lambda^{op})$ cuyos objetos son los Λ^{op}-módulos $Hom_{\mathcal{A}}(A_0, A)$ para todo A en $\mathcal{A}$, es una subcategoría aditiva de $Mod(\Lambda^{op})$ que consiste de todos los Λ^{op}-módulos proyectivos finitamente generados. Más aún, $\mathcal{P}$ contiene todos los Λ^{op}-módulos libres finitamente generados.*

b) *Si F está en $\hat{\mathcal{A}}$ entonces $F(A_0)$ es un Λ^{op}-módulo finitamente presentando. En consecuencia la imagen de $\hat{\mathcal{A}}$ en $Mod(\Lambda^{op})$ esta contenida en $mod(\Lambda^{op})$, la categoría de Λ^{op}-módulos finitamente presentados.*

c) *El funtor inducido $\hat{\mathcal{A}} \to mod(\Lambda^{op})$ es una equivalencia de categorías.*

d) *$\hat{\mathcal{A}}$ es una categoría abeliana si y sólo si $mod(\Lambda^{op})$ es una categoría abeliana.*

Demostración: Comencemos primero con la demostración de a) Supóngase que $A = \oplus_{i=1}^{i=n} A_0$, de aquí que $Hom_{\mathcal{A}}(A_0, A) = Hom_{\mathcal{A}}(A_0, \oplus_{i=1}^{i=n} A_0) = \oplus_{i=1}^{i=n} Hom_{\mathcal{A}}(A_0, A_0) = \oplus_{i=1}^{i=n} End(A_0) = \oplus_{i=1}^{i=n} \Lambda = \Lambda^n$. Por lo tanto $Hom_{\mathcal{A}}(A_0, A)$ es un Λ^{op}-módulo libre finitamente generado. Por otra parte recordemos que un Λ-módulo P es proyectivo y finitamente generado si y sólo si para algún Λ-módulo P' y un entero n positivo existe un isomorfismo $\Lambda^n \simeq P \oplus P'$. Luego dado que $\Lambda = End(A_0)$, tenemos que $\mathcal{P}$ contiene todos los Λ^{op}-módulos libres.

Notemos que el inciso b) se sigue de a). Sea F en $\hat{\mathcal{A}}$ entonces existe una sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{A}}(A_0, A_1) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & Hom_{\mathcal{A}}(A_0, A_2) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & F(A_0) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\Lambda^m \arrow[r] & \Lambda^n \arrow[r] & F(A_0) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y de ésta manera $F(A_0)$ es finitamente presentado.

Para c) notemos que cumple con el corolario anterior. Finalmente, d) se sigue de manera sencilla.

■

Sea Λ un anillo y supóngase que la categoría de Λ-módulos derechos finitamente presentados $mod(\Lambda^{op})$ es abeliana, es fácil probar las siguientes propiedades bajo estas condiciones.

Proposición 4.14. *Para un anillo Λ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *$mod(\Lambda^{op})$ es abeliana.*

b) *Si M es un Λ-módulo derecho finitamente presentado, entonces M tiene una Λ-resolución proyectiva, cada uno de cuyos términos es un Λ-módulo proyectivo finitamente generado.*

c) *Si M es un Λ-módulo derecho finitamente presentado y $M' \subset M$ es un submódulo de M finitamente generado, entonces M' es un Λ-módulo derecho finitamente presentado.*

Como los anillos que satisfacen cualquier de las condiciones anteriores son anillos coherentes podemos sumar esta discusión en lo siguiente:

Proposición 4.15. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva con un generador de la representación A_0 cuyo anillo de endomorfismos denotaremos por Λ. Entonces:*

a) *$Mod(\mathcal{A})$ es equivalente a $mod(\Lambda^{op})$.*

b) *$\mathcal{A}$ tiene pseudo-kerneles si y sólo si $Mod(\mathcal{A})$ es abeliana si y sólo si Λ es coherente derecho.*

c) *En particular, si Λ es noetheriano derecho entonces $\mathcal{A}$ tiene pseudo-kerneles.*

4.3. Anillos de endomorfismos

En esta sección aplicaremos algunos de nuestros resultados anteriores al estudio del anillo de endomorfismos de un Λ- módulo. Si M es un objeto en una categoría aditiva $\mathcal{A}$ denotaremos por $Add(M)$ la subcategoría plena de $\mathcal{A}$ consistente de todos los objetos isomorfos a sumandos de sumas finitas de M. Claramente $Add(M)$ es una categoría aditiva que es esqueléticamente pequeña. Los idempotentes en $Add(M)$ se escinden si todos los idempotentes en $\mathcal{A}$ se escinden. Llamamos a $Add(M)$ la subcategoría aditiva de $\mathcal{A}$ generada por M.

Notación 4.16. El lo siguiente a menos que se diga otra cosa, dada una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y P un objeto proyectivo en $\mathcal{C}$, denotaremos la subcategoría generada por P, $Add(P)$ por $\mathcal{P}$.

Nuestros resultados de la sección anterior nos proporcionan lo siguiente:

Proposición 4.17. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, P un objeto proyectivo en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P} = Add(P)$. Entonces $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ la subcategoría plena de $\mathcal{C}$ que consiste en esos objetos teniendo P-presentaciones tiene la propiedad que el funtor*

$$F : \mathcal{P}(\mathcal{C}) \longrightarrow mod((End_{\mathcal{C}}(P))^{op})$$

dado por $F(C) = Hom_{\mathcal{C}}(P, C)$ para todo C en $\mathcal{C}$, es una equivalencia de categorías. Por lo tanto si $End(P)$ es coherente derecho entonces $P(\mathcal{C})$ y $mod((End_{\mathcal{C}}(P))^{op})$ son categorías abelianas.

Demostración: La prueba de esta afirmación es una consecuencia inmediata de 4.13*c*).

■

Como una consecuencia inmediata de esta proposición tenemos:

Corolario 4.18. *Sea Λ un anillo, P un Λ-módulo proyectivo finitamente generado tal que Λ está en $\mathcal{P}$. Entonces el funtor*

$$F : mod(\Lambda) \longrightarrow mod((End_{\Lambda}(P))^{op})$$

dado por $F(C) = Hom_{\mathcal{C}}(P, C)$ para todo C en $mod(\Lambda)$ es una equivalencia de categorías.

Demostración: Para este caso particular tenemos que $\mathcal{C} = Mod(\Lambda)$ y dado que Λ está en $\mathcal{P}$, por lo tanto $mod(\Lambda) = \mathcal{P}(Mod(\Lambda))$ y por 4.17 tenemos el resultado.

■

Estamos ahora en condiciones de demostrar el celebre teorema de Morita:

Teorema 4.19. *Para dos anillos Λ y Λ' las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *Las categorías $mod(\Lambda)$ y $mod(\Lambda')$ son equivalentes.*

b) *Existe un Λ-módulo proyectivo P finitamente generado tal que Λ esta en $\mathcal{P}$ y además $End(P)$ y Λ'^{op} son anillos isomorfos.*

c) *Existen P y P' Λ y Λ'-módulos proyectivos finitamente generados, respectivamente, tal que Λ esta en $\mathcal{P}$ y Λ' esta en $\mathcal{P}'$ y los anillos $End(P)$ y $End(P')$ son isomorfos.*

Demostración: Comencemos con a) implica b). Sea $F : mod(\Lambda') \to mod(\Lambda)$ una equivalencia de categorías. Es sencillo probar que $F(\Lambda') = P$ es un Λ-módulo proyectivo finitamente generado tal que Λ esta en $\mathcal{P}$. Como F es una equivalencia de categorías sabemos que $F : End(\Lambda') \to End(P)$ es un isomorfismo de anillos, pero $End(\Lambda') = (\Lambda')^{op}$, por lo tanto $(\Lambda')^{op}$ y $End(P)$ son anillos isomorfos.

Notemos que b) implica a). Supóngase que existe un Λ-módulo proyectivo finitamente generado P, tal que Λ está en $\mathcal{P}$ y $End_\Lambda(P) \simeq \Lambda'^{op}$, entonces $mod(\Lambda'^{op})$ y $mod(End_\Lambda(P))$ son categorías equivalentes, luego $mod(\Lambda')$ y $mod(End_\Lambda(P)^{op})$ son categorías equivalentes. Por otra parte por 4.18 $mod(\Lambda)$ y $mod(End_\Lambda(P)^{op})$ son equivalentes y por lo tanto $mod(\Lambda')$ y $mod(\Lambda)$ son categorías equivalentes.

Que b) implica c) se sigue fácilmente. Por las hipótesis de b) $End_\Lambda(P) \simeq \Lambda'^{op}$ y $End_{\Lambda'}(P') \simeq \Lambda^{op}$ y como $mod(\Lambda)$ y $mod(\Lambda')$ son categorías equivalentes por a), tenemos que $\Lambda \simeq \Lambda'$ y por consiguiente $\Lambda^{op} \simeq \Lambda'^{op}$. Por lo tanto $End_\Lambda(P) \simeq End_{\Lambda'}(P')$.

Por último veamos que c) implica a). Dado que $End(P)$ y $End(P')$ son anillos isomorfos en consecuencia lo son $End(P)^{op}$ y $End(P')^{op}$. Por consiguiente las categorías $mod(End(P)^{op})$ y $mod(End(P')^{op})$ son equivalentes. Por el corolario anterior el hecho que Λ esta en $\mathcal{P}$ y Λ' esta en $\mathcal{P}'$ nos da que $mod(\Lambda)$ y $mod(End(P)^{op})$ son categorías equivalentes y que $mod(\Lambda')$ y $mod(End(P')^{op})$ son también categorías equivalentes. Por lo tanto $mod(\Lambda)$ y $mod(\Lambda')$ son categorías equivalentes.

■

Estos resultados nos sugieren la siguiente definición:

Definición 4.20. Dos anillos Λ y Λ' se dicen **Morita equivalentes** (notación: $\Lambda \sim \Lambda'$) y si y sólo si $mod(\Lambda)$ y $mod(\Lambda')$ son equivalentes.

Observación 4.21. Claramente la relación sobre anillos dada por dos anillos estan relacionados si ellos son Morita equivalentes es una relación de equivalencia.

Observación 4.22. No es difícil mostrar que para dos anillos Λ y Λ', las categorías $Mod(\Lambda)$ y $Mod(\Lambda')$ son equivalentes si y sólo si las categorías $mod(\Lambda)$ y $mod(\Lambda')$ son equivalentes. Por lo tanto Λ y Λ' son Morita equivalentes si y sólo si $Mod(\Lambda)$ y $Mod(\Lambda')$ son categorías equivalentes. Un análisis y prueba de tal afirmación pueden ser encontrados en [AF92].

Dado que lo que más nos interesa acerca de un anillo Λ es la categoría $mod(\Lambda)$, optaremos por considerar que dos anillos son lo "mismo"si ellos son Morita equivalentes. Esta no es una gran diferencia ya que el Teorema de Morita nos dice como dos anillos Morita equivalentes estan relacionados.

Antes de continuar revisaremos algunas propiedades de la teoría de módulos de anillos de artin. Las pruebas de estas propiedades pueden ser encontrados en [ARS95] capítulos I y II.

Sea Λ un anillo izquierdo de artin con radical $\mathbf{r}$. Entonces sabemos que $\mathbf{r}^n = 0$ para algún entero n positivo. Definimos **el índice de nilpotencia de** Λ como el menor entero n tal que $\mathbf{r}^n = 0$.

También como $\Lambda/\mathbf{r}$ es un anillo de artin semisimple éste tiene solamente un número finito de módulos simples no-isomorfos.

Dado que $\mathbf{r}$ es nilpotente se ve fácilmente que un submódulo M' de M es todo M si y sólo si la composición $M' \to M \to M/\mathbf{r}M$ es suprayectiva. De esto se sigue que si M y M' son Λ-módulos, un morfismo $f : M \to M'$ es un epimorfismo si y sólo si el morfismo inducido

$$M/\mathbf{r}M \longrightarrow M'/\mathbf{r}M'$$

es un epimorfismo. En particular, si P y P' son módulos proyectivos obtenemos que:

i) Un morfismo $f : P \to P'$ es un isomorfismo si y sólo si el morfismo inducido $P/\mathbf{r}P \to P'/\mathbf{r}P'$ es un isomorfismo.

ii) Si $g : P/\mathbf{r}P \to P'/\mathbf{r}P'$ es un isomorfismo, entonces existe un isomorfismo $\tilde{g} : P \to P'$ el cual induce $g : P/\mathbf{r}P \to P'/\mathbf{r}P'$. Más aún, el hecho que idempotentes en $\Lambda/\mathbf{r}$ pueden ser levantados a Λ muestra que dado cualquier módulo simple S existe un módulo proyectivo P tal que $P/\mathbf{r}P \simeq S$. Por lo tanto dado cualquier módulo semisimple M existe un módulo proyectivo P y un epimorfismo $P \to M$ tal que el morfismo inducido $P/\mathbf{r}P \to M$ es un isomorfismo.

Más aún, si estamos dando otro epimorfismo $P' \to M \to 0$ con P' proyectivo tal que $P'/\mathbf{r}P' \to M$ es un isomorfismo entonces existe un morfismo $P \to P'$ tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d, equal] \\ P' \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

y cualquier tal morfismo $P \to P'$ es un isomorfismo. Por lo tanto un módulo proyectivo P es inescindible si y sólo si $P/\mathbf{r}P$ es simple.

De manera más general, dado cualquier módulo M existe un epimorfismo $P \to M \to 0$ con P proyectivo tal que $P/\mathbf{r}P \to M/\mathbf{r}M$ es un isomorfismo. Tal epimorfismo es llamado **una cubierta proyectiva de** M. Si $P' \to M \to 0$ es otra cubierta proyectiva mínima entonces existe un morfismo $P \to P'$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ P' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

y tal morfismo $P \to P'$ es un isomorfismo.

Una resolución proyectiva

$$\cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

es llamada una resolución proyectiva si y sólo si cada epimorfismo $P_i \xrightarrow{f_i} Ker(f_{i-1}) \longrightarrow 0$ es una cubierta proyectiva mínima. Obviamente todos los módulos tienen resoluciones proyectivas minimales y cualesquiera dos resoluciones proyectivas minimales son isomorfas como complejos. Una resolución proyectiva

$$\cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva minimal si y sólo si $Imf_i \subseteq \mathbf{r}P_{i-1}$, para todo $i \geq 1$.

También como $\mathbf{r}$ es nilpotente se sigue que un módulo M es 0 si y sólo si $Hom_\Lambda(\Lambda/\mathbf{r}, M) = 0$ donde $Hom_\Lambda(\Lambda/\mathbf{r}, M)$ es un submódulo semisimple de M consistiendo de todos los m en M tal que $\mathbf{r}m = 0$. Recordamos que $Hom_\Lambda(\Lambda/\mathbf{r}, M)$ es llamado **el soclo de** M el cual algunas veces denotamos por $soc(M)$.

Ahora no es difícil ver que un monomorfismo $f : M \to M'$ es esencial si y sólo si el morfismo inducido $soc(M) \to soc(M')$ es un isomorfismo. Por lo tanto $0 \to M \to I$ es una envolvente inyectiva si y sólo si $0 \to soc(M) \to I$ es un envolvente inyectiva. También como Λ es noetheriano sabemos que una suma arbitraria de envolventes inyectivas es una envolvente inyectiva. Combinando estos hechos tenemos:

a) Un módulo inyectivo I es un envolvente inyectiva de su soclo.

b) Si $soc(I) = \sum S_i$, donde los S_i son módulos simples, entonces $I \simeq \sum I_i$, donde I_i es la envolvente inyectiva de S_i para toda i.

c) Un módulo inyectivo I es inescindible si y solo su soclo es simple.

d) Dos módulos inyectivos I e I' son isomorfos si y sólo si sus soclos son isomorfos.

Por lo tanto Λ tiene solamente un número finito de módulos proyectivos e inyectivos inescindibles no isomorfos, uno para cada Λ-módulo simple. En particular supóngase que P y P' son dos Λ-módulos proyectivos finitamente generados. Entonces $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$, las subcategorías aditivas generadas por P y P' respectivamente, son las misma si y sólo si todo sumando inescindible de P es isomorfo a un sumando inescindible de P' y viceversa.

Dado que las categorías $\mathcal{P}(Mod(\Lambda))$ y $mod(End(P)^{op})$ son equivalentes, donde $\mathcal{P}$ es la categoría aditiva generada por P, obtenemos que existen solamente un número finito de categorías diferentes $\mathcal{P}$ como P corre a través de todos los módulos proyectivos finitamente generados.

Específicamente, $End(P)$ y $End(P')$ son Morita equivalentes si y sólo si todo sumando de P es isomorfo a un sumando de P' y viceversa. Como aplicación de algunas de estas ideas demostramos las siguientes afirmaciones:

Lema 4.23. *Sea Λ un anillo izquierdo de artin con índice de nilpotencia n y sea $M = \sum_{1=1}^{i=n} \Lambda/\mathbf{r}^i$. Si C es un Λ-módulo tal que $\mathbf{r}^m C = 0$ con $m \leq n$, entonces tenemos una sucesión exacta de Λ-módulos*

$$0 \longrightarrow M_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

con M_i en $Add(M)$, tal que

$$0 \longrightarrow (X, M_m) \longrightarrow (X, M_{m-1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (X, M_1) \longrightarrow (X, C) \longrightarrow 0$$

es exacta para todo X en $Add(M)$.

Demostración: Procedemos por inducción sobre n. Si $n = 1$ se sigue que Λ es semisimple y C está en $Add(M)$ puesto que $Add(M)$ es la categoría de los Λ-módulos finitamente generados. Además designando $M_1 = C$ obtenemos nuestra sucesión exacta deseada

$$0 \longrightarrow M_1 = C \longrightarrow 0$$

Supóngase que el teorema es cierto para $n \geq 1$ y el índice de nilpotencia de Λ es $n + 1$. Sea C un Λ-módulo tal que $\mathbf{r}^m C = 0$ con $m \leq n$. Entonces C es un $\Lambda/\mathbf{r}^n$-módulo y por hipótesis de inducción sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_m \longrightarrow M_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

de Λ-módulos tal que:

i) Los M_i estan en la subcategoría aditiva $Add(N)$, donde $N = \sum_{i=1}^{i=n} \Lambda/\mathbf{r}^i$.

ii) La sucesión

$$0 \longrightarrow (X, M_m) \longrightarrow (X, M_{m-1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (X, M_1) \longrightarrow (X, C) \longrightarrow 0$$

es exacta para todo X en la subcategoría aditiva de $Mod(\Lambda)$ generada por N.

Ahora el hecho que $\sum_{i=1}^{i=n} \Lambda/\mathbf{r}^i$ es un sumando de $\sum_{i=1}^{i=n+1} \Lambda/\mathbf{r}^i$ implica que $Add(N) \subset Add(M)$, así cada uno de los M_i esta en $Add(M)$. También, como los únicos Λ-módulos inescindibles en $Add(M)$ que no están en $Add(N)$ son Λ-módulos proyectivos y como la sucesión

$$0 \longrightarrow M_m \longrightarrow M_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces

$$0 \longrightarrow (X, M_m) \longrightarrow (X, M_{m-1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (X, M_1) \longrightarrow (X, C) \longrightarrow 0$$

es exacta para todo X en $Add(M)$. Por lo tanto, si $\mathbf{r}^m C = 0$ con $m \leq n$, obtenemos nuestra sucesión exacta deseada.

Queda por ver el caso en que $m = n + 1$. Supóngase ahora que $\mathbf{r}^n C \neq 0$. Sea C' el submódulo de C consistiendo de todos los c en C tal que $\mathbf{r}^n c = 0$. Entonces $\mathbf{r}^n C' = 0$. Además sabemos que existe un epimorfismo

$$M' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

con M' en $Add(N)$, tal que $(X, M') \longrightarrow (X, C') \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta para todo X en $Add(N)$. Dado que para cada X en $Add(N)$ tenemos que $\mathbf{r}^n X = 0$, se sigue que la composición $M' \to C' \to C$ la cual denotamos por $f : M' \to C$ tiene la propiedad que $(X, M') \to (X, C) \to 0$ es exacta para todo X en $Add(N)$.

Ahora consideramos el epimorfismo $h : P \to C/C' \to 0$ de Λ-módulos como un cubriente proyectivo de C/C'. Dado que $\pi : C \to C/C' \to 0$ es un epimorfismo, existe un morfismo $g : P \to C$ tal que la composición $P \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\pi} C/C'$ es nuestro cubriente proyectivo h.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & C/C' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ C \arrow[r, "\pi"] & C/C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dado que h es un cubriente proyectivo sabemos que $Kerh \subseteq \mathbf{r}P$. Como $g^{-1}(C') \subseteq Kerh$, se sigue que $g^{-1}(C') \subseteq \mathbf{r}P$.

Enseguida tomando el morfismo $t : P + M' \to C$ dado por $t(p, m) = g(p) + f(m')$. Puesto que $M' \to C'$ y la composición $P \to C \to C/C'$ son epimorfismos se sigue que t es un epimorfismo. También el hecho que $(X, M') \to (X, C) \to 0$ es exacta para todo X en $Add(N)$ muestra que $(X, P + M') \to (X, C) \to 0$ es exacta para todo X en $Add(M)$, ya que los únicos Λ-módulos inescindibles en $Add(M)$ que no estan en $Add(N)$ son Λ-módulos proyectivos.

Finalmente veamos que $\mathbf{r}^n Kert = 0$. Tenemos que (p, m') está en $Ker\ t$ si y sólo si $g(p) = -f(m')$, como $Imf = C'$, se sigue que si (p, m') esta en $Ker\ t$ entonces p esta en $g^{-1}(C')$. Como $\mathbf{r}^n g^{-1}(C') = 0$ y $\mathbf{r}^n M' = 0$ se sigue que $\mathbf{r}^n Ker\ t = 0$. De esta manera, por nuestro resultado previo podemos encontrar una sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow M_{n+1} \longrightarrow M_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_2 \longrightarrow Kert \longrightarrow 0$$

de Λ-módulos con los M_i en $Add(N) \subset Add(M)$ tal que

$$0 \longrightarrow (X, M_{n+1}) \longrightarrow (X, M_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (X, M_2) \longrightarrow (X, Kert) \longrightarrow 0$$

es exacta para todo X en $Add(M)$. Por lo tanto la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_{n+1} \longrightarrow M_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_2 \longrightarrow P + M' \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

tiene nuestra propiedad deseada que los M_i estan $Add(M)$ y

$$0 \longrightarrow (X, M_{n+1}) \longrightarrow (X, M_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (X, M_2) \longrightarrow (X, P + M') \longrightarrow (X, C) \longrightarrow 0$$

es exacta para todo X en $Add(M)$.

■

Teorema 4.24. *Sea Λ un anillo izquierdo de artin con índice de nilpotencia n y sea $M = \sum_{1=1}^{i=n} \Lambda/\mathbf{r}^i$. Entonces $\Gamma = End(M)^{op}$ tiene las siguientes propiedades:*

a) *Γ es coherente izquierdo.*

b) *Si N es un Γ-módulo finitamente presentado, entonces $pd_\Gamma N \leq n + 1$.*

c) *Existe un Γ-módulo proyectivo finitamente generado P, tal que $End_\Gamma(P)^{op} \simeq \Lambda$.*

Demostración: Comencemos con el inciso *a*). Para mostrar que Γ es coherente izquierdo es lo mismo que probar que $End(M)$ es coherente derecho: Pero ya hemos visto que $End(M)$ es coherente derecho si y sólo si $Add(M)$ tiene pseudo-kerneles. Ahora supóngase que estamos dando un morfismo $f : M_2 \to M_3$ en $Add(M)$ y sea $C = Kerf$. Entonces $r^n C = 0$ y por el lema anterior podemos encontrar un epimorfismo $M_1 \to C \to 0$ con M_1 en $Add(M)$ tal que $(X, M_1) \to (X, C) \to 0$ es exacta para todo X en $Add(M)$.

Sea g la composición $M_1 \to C \to M_2$, de lo anterior se sigue que la sucesión exacta $M_1 M_2 \xrightarrow{g} M_3$ tiene la propiedad que $(X, M_1) \to (X, M_2) \to (X, M_3)$ es exacta para todo X en $Add(M)$. Por lo tanto

$M_1 \to M_2$ es un pseudo-kernel de $M_2 \to M_3$, así $Add(M)$ tiene pseudo-kerneles, lo cual muestra que $End(M)$ es coherente derecho.

Para el inciso b) sabemos que el funtor $\widehat{Add(M)} \to mod(End(M)^{op})$ dado por $F \to F(M)$ es una equivalencia de categorías. Por consiguiente dado un $End(M)^{op}$-módulo finitamente presentado N existe un funtor F en $\widehat{Add(M)}$ tal que $F(M) \simeq N$. Sea $M_1 \to M_0$ en $Add(M)$ tal que

$$(*, M_1) \longrightarrow (*, M) \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

es exacta. Si tomamos $C = Ker(M_1 \to M_0)$ y como $r^n C = 0$, entonces por el lema anterior tenemos que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_{n+1} \longrightarrow M_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_2 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

de Λ-módulos con los M_i en $Add(M)$ tal que

$$0 \longrightarrow (X, M_{n+1}) \longrightarrow (X, M_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (X, M_2) \longrightarrow (X, C) \longrightarrow 0$$

es exacta para todo X en $Add(M)$. Así tenemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow (*, M_{n+1}) \longrightarrow (*, M_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (*, M_2) \longrightarrow (*, M_1) \longrightarrow (*, M_0) \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

es exacta en $\widehat{Add(M)}$. Por lo tanto

$$0 \longrightarrow (M, M_{n+1}) \longrightarrow (M, M_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (M, M_1) \longrightarrow (M, M_0) \longrightarrow F(M) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de $End(M)^{op}$-módulos. Como cada (M, M_i) es un $End(M)^{op}$-módulo proyectivo y $F(M) \simeq N$ se sigue que $pd_{End(M)^{op}} N \leq n + 1$ donde n es el índice de Λ. Como esto es cierto para cualquier $End(M)^{op}$-módulo finitamente presentado N hemos probado b).

c) Ahora $(*, \Lambda)$ es un objeto proyectivo en $\widehat{Add(M)}$ y $End_{\widehat{Add(M)}}(*, \Lambda) \simeq End(\Lambda) \simeq \Lambda^{op}$. Por 4.13 tenemos que el funtor

$$\psi : \widehat{Add(M)} \longrightarrow mod(End(M)^{op})$$

dado por $\psi(F) = F(M)$ es una equivalencia de categorías, se sigue por el teorema de Morita que el $End(M)^{op}$-módulo, $P := (M, \Lambda)$ es un $End(M)^{op}$-módulo proyectivo tal que $End_{End(M)^{op}}(P) \simeq \Lambda^{op}$. Por lo tanto $End_\Gamma(P)^{op} \simeq \Lambda$, nuestro resultado deseado.

■

Observación 4.25. Dado que $M = \sum_{i=1}^{n} \Lambda/\mathbf{r}^i$ es un Λ-módulo finitamente generado, sabemos que el funtor $(M, *)$ conmuta con sumas arbitrarias. Si tomamos que $\mathcal{D}$ sea la categoría de todos los Λ-módulos que son sumandos de sumas arbitrarias de copias de M, entonces $\mathcal{D}$ es una categoría aditiva.

No es difícil ver que el funtor

$$\psi : \hat{\mathcal{D}} \longrightarrow Mod(End(M)^{op})$$

dado por $\psi(F) = F(M)$, es una equivalencia de categorías. Ahora solamente con una pequeña modificación del argumento usado para módulos finitamente generados C proporciona el resultado que si C es un módulo arbitrario, entonces existe una sucesión exacta de Λ-módulos.

$$0 \longrightarrow M_{n+1} \longrightarrow M_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

con los M_i en $\mathcal{D}$ tal que tenemos la siguiente sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow (M, M_{n+1}) \longrightarrow (M, M_n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (M, M_1) \longrightarrow (M, C) \longrightarrow 0$$

Como cada M, M_i es un $\Gamma = End(M)^{op}$-módulo proyectivo, procediendo como lo hicimos anteriormente para Γ-módulos finitamente presentados podemos mostrar que la $pd_\Gamma N \leq n+1$ para Γ-módulos arbitrarios N. Por lo tanto si n = índice Λ tenemos que $gl.dim\Gamma \leq n+1$.

Supóngase ahora que Λ es un álgebra de artin, es decir, el centro de Λ es un anillo conmutativo de artin y Λ es un módulo finitamente generado sobre su centro. Entonces cada Λ-módulo M finitamente generado tiene la propiedad que $End(M)$ es también un álgebra de artin. Por lo tanto como una consecuencia inmediata de nuestro teorema tenemos:

Corolario 4.26. *Sea Λ un álgebra de artin de índice n. Entonces el álgebra de artin $\Gamma = End(\sum_{i=1}^{n} \Lambda/\mathbf{r}^i)$ tiene las siguientes propiedades:*

a) $gl.dim\Gamma \leq n+1$.

b) *Existe un Γ-módulo proyectivo P finitamente generado tal que $End_\Gamma(P)^{op}$ y Λ son álgebras de artin isomorfas.*

Este corolario tiene la siguiente interpretación.

Como Γ corre através de todas las álgebras de artin de dimensión global finita, el álgebra de artin de la forma $\Lambda = End_\Gamma(P)^{op}$ con P un Γ-módulo proyectivo finitamente generado, corre atraves de todas las álgebras de artin. Por lo tanto, en este sentido las álgebras de artin de dimensión global finita determinan todas las álgebras de artin.

4.4. Álgebras de artin de tipo de representación finita

Esta sección está dedicada principalmente a mostrar como construir álgebras tales que $dom.dim \geq 2$ y $gl.dim \leq 2$ a partir de álgebras de artin de tipo de representación finita. Estas construcciones nos dan una biyección entre las clases de álgebras de artin Morita equivalentes tales que son de tipo de representación finita y clases de álgebras de artin Morita equivalentes tales que $dom.dim \geq 2$ y $gl.dim \leq 2$.

Supóngase que I es un Λ-módulo inyectivo finitamente generado y $\Pi = Add(I)$ la subcategoría aditiva de $mod(\Lambda)$ generada por I. Sea $mod(\Lambda)(\Pi)$ la subcategoría plena de $mod(\Lambda)$ que consiste de todos los M en $mod(\Lambda)$ tal que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2$$

con los I_i en Π, es decir, la subcategoría plena de $mod(\Lambda)$ que tiene Π-copresentaciones. Obviamente $mod(\Lambda)(\Pi)$ es una categoría aditiva. Ahora mostraremos que $mod(\Lambda)(\Pi)$ es una categoría equivalente a $mod(End(I)^{op})$ y es entonces una categoría abeliana.

Dado que I es un Λ-módulo inyectivo finitamente generado entonces sabemos por la observación 3.37 que $P = D(I)$ es un Λ^{op}-módulo proyectivo finitamente generado. También $D(\Pi)$

es equivalente a $\mathcal{P}$ la subcategoría aditiva de $mod(\Lambda^{op})$ generada por P. Por lo tanto la dualidad $D : mod(\Lambda) \to mod(\Lambda^{op})$ nos produce una dualidad:

$$D : mod(\Lambda)(\Pi) \longrightarrow \mathcal{P}(mod(\Lambda^{op}))$$

Ya hemos establecido una equivalencia de categorías.

$$\mathcal{P}(mod(\Lambda^{op})) \longrightarrow mod(End_{\Lambda^{op}}(P)^{op})$$

Por lo tanto obtenemos una dualidad $mod(\Lambda)(\Pi) \to mod(End_{\Lambda^{op}}(P)^{op})$. Pero se ve fácilmente que $End_{\Lambda^{op}}(D(M))^{op}$ y $End_\Lambda(M)$ son isomorfos para cada Λ-módulo M. Por lo tanto $End_\Lambda(I) \simeq End_{\Lambda^{op}}(P)^{op}$ y entonces $mod(End_\Lambda(I))$ es equivalente a $mod(End_{\Lambda^{op}}(P)^{op})$. Por lo tanto tenemos una dualidad

$$mod(\Lambda)(\Pi) \longrightarrow mod(End_\Lambda(I))$$

Como $End_\Lambda(I)$ es un álgebra de artin sabemos por 3.35 que $mod(End_\Lambda(I))$ y $mod(End_\Lambda(I)^{op})$ son duales. Asi la dualidad $mod(\Lambda)(\Pi) \to mod(End_\Lambda(I))$ nos produce una equivalencia de categorías entre $mod(\Lambda)(\Pi)$ y $mod(End_\Lambda(I)^{op})$.

Sumando la discusión hasta el momento tenemos:

Lema 4.27. *Sea Λ un álgebra de artin, I un Λ-módulo inyectivo finitamente generado y $\Pi = Add(I)$ la categoría aditiva generada por I. Entonces la categoría $mod(\Lambda)(\Pi)$ es equivalente a la categoría $mod(End_\Lambda(I)^{op})$ donde $End_\Lambda(I)^{op}$ es también un álgebra de artin.*

■

Una vez vistos estos resultados, comenzamos nuestro estudio de álgebras de artin de tipo de representación finita.

Supóngase que Λ es un álgebra de artin de tipo de representación finita. Por lo tanto existe solamente un número finito de Λ-módulos inescindibles finitamente generados $M_1, \dots, M_n$ no isomorfos. De aquí que todo Λ-módulo M finitamente generado es isomorfo a una suma finita de los M_i. Sea $\mathcal{C} = mod(\Lambda)$. Por consiguiente $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana esqueléticamente pequeña. Consideremos ahora la categoría $\hat{\mathcal{C}}$. Nuestras primeras observaciones concernientes a la categoría $\hat{\mathcal{C}}$ están basadas en los siguientes hechos generales.

Proposición 4.28. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria, abeliana y esqueléticamente pequeña. Entonces la categoría $\hat{\mathcal{C}}$ tiene las siguientes propiedades:*

a) *$\hat{\mathcal{C}}$ es una categoría abeliana con suficientes objetos proyectivos.*

b) *F en $\hat{\mathcal{C}}$ es proyectivo si y sólo si $F \simeq (*, M)$ para algún M en $\mathcal{C}$.*

c) *$gl.dim\hat{\mathcal{C}} \leq 2$.*

d) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

   i) *$\mathcal{C}$ es semisimple.*

ii) El funtor

$$\psi : C \longrightarrow \hat{C}$$

dado por $\psi(C) = (*, C)$ es una equivalencia de categorías.

iii) $\hat{C}$ es semisimple.

iv) $gl.dim\hat{C} < 2$.

Demostración: Iniciemos con la prueba del inciso a). Como la categoría C es abeliana todo morfismo en C tiene un pseudo-kernel ya que todo morfismo en C tiene un kernel. Por teorema 4,11 $\hat{C}$ es una categoría abeliana. También cada $(*, M)$ es proyectivo en $\hat{C}$ dado que es proyectivo en $Fun(C^{op}, Ab)$ de la cual $\hat{C}$ es una subcategoría plena. Por lo tanto, el hecho que $\hat{C}$ tiene suficientes proyectivos se sigue puesto que F en $Fun(C^{op}, Ab)$ está en $\hat{C}$ si y sólo si existe una sucesión exacta en $Fun(C^{op}, Ab)$

$$(*, C_1) \longrightarrow (*, C_0) \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

Supóngase F en $\hat{C}$ es proyectivo y como existe un epimorfismo $(*, C) \to F \longrightarrow 0$, tenemos que F es un sumando directo de $(*, C)$. Dado que C es abeliana, un sumando directo de $(*, C)$ es isomorfo a $(*, C')$ donde C' es un sumando de C. De esta manera $F \simeq (*, C')$ con C' un sumando directo de C. Luego si F es proyectivo se sigue que $F \simeq (*, C')$ para algún C' en C, con esta discusión probamos b).

Continuamos con la prueba del inciso c). Supóngase que F está en $\hat{C}$. Entonces existe una sucesión exacta

$$(*, C_1) \longrightarrow (*, C_0) \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

Por el teorema de Yoneda sabemos que existe un único morfismo $C_1 \to C_0$ el cual induce el morfismo $(*, C_1) \to (*, C_0)$. Como C es abeliana, el morfismo $C_1 \to C_0$ tiene un kernel $C_2 \to C_1$ en C. Así considerando la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0$$

ésta nos produce una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (*, C_2) \longrightarrow (*, C_1) \longrightarrow (*, C_0) \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

la cual nos muestra que $pdF \leq 2$ dado que los $(*, C_i)$ son proyectivos en $\hat{C}$. Luego como ésto es cierto para todo F en $\hat{C}$, tenemos que $gl.dim\hat{C} \leq 2$.

Finalmente, queda por probar d). Recordemos que una categoría abeliana se dice una **categoría semisimple** si todo monomorfismo (o equivalentemente, todo epimorfismo) se escinde. Supóngase ahora que C es semisimple, entonces si $C_2 \to C_1 \to C_0 \to 0$ es exacta en C se sigue que $(*, C_2) \to (*, C_1) \to (*, C_0) \to 0$ es exacta en $\hat{C}$.

Ahora bien si F está en $\hat{C}$ y

$$(*, C_2) \longrightarrow (*, C_1) \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

es exacta, se sigue que $F \simeq (*, C_0)$ donde $C_0 = Coker(C_2 \to C_1)$. Por lo tanto todos los funtores en $\hat{C}$ son representables lo cual muestra que el funtor $C \to \hat{C}$ es una equivalencia de categorías. Esto muestra que i) implica ii).

Ahora veamos que *ii*) implica *iii*). Si $\mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ es una equivalencia de categorías, se sigue que cada F en $\hat{\mathcal{C}}$ es isomorfo a $(*, C)$ para algún C en $\mathcal{C}$. Por consiguiente cada F en $\hat{\mathcal{C}}$ es proyectivo, lo cual significa que $\hat{\mathcal{C}}$ es semisimple.

El hecho que *iii*) implica *iv*) es claro. Solo queda por ver que *iv*) implica *i*). Supóngase que $gl.dim\hat{\mathcal{C}} < 2$. Sea

$$0 \longrightarrow C_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2$$

una sucesión exacta en $\mathcal{C}$. Luego, tenemos una sucesión exacta en $\hat{\mathcal{C}}$:

$$0 \longrightarrow (*, C_0) \longrightarrow (*, C_1) \longrightarrow (*, C_2) \longrightarrow F \longrightarrow 0 \ .$$

Como $gl.dim\hat{\mathcal{C}} < 2$ sabemos que el $Ker((*, C_2) \to F)$ es proyectivo en $\hat{\mathcal{C}}$. Por lo tanto el monomorfismo $0 \to (*, C_0) \to (*, C_1)$ se escinde lo cual significa que el monomorfismo $0 \to C_0 \to C_1$ se escinde. Por lo tanto si $gl.dim\hat{\mathcal{C}} < 2$ todo monomorfismo en $\mathcal{C}$ se escinde lo cual muestra que $\mathcal{C}$ es semisimple.

■

Observación 4.29. Regresando a nuestra situación original donde $\mathcal{C} = mod(\Lambda)$ y Λ es un álgebra de artin de tipo de representación finita, tenemos que $\hat{\mathcal{C}}$ es una categoría abeliana de dimensión global finita a lo más 2.

Observación 4.30. Ahora bien sea $\mathcal{P}$ la subcategoría plena de $\hat{\mathcal{C}}$ consistiendo de todos los $(*, C)$ con C en $\mathcal{C}$, entonces por 4.17 y 4.18, $\mathcal{P}(\hat{\mathcal{C}})$ es equivalente a $\mathcal{C} = mod(\Lambda)$.

Pero el hecho que Λ es de tipo de representación finita implica que $\mathcal{P}$ tiene como generador de la representación a $(*, \sum_{i=1}^{n} M_i)$, donde $M_1 \ldots, M_n$ son los Λ-módulos inescindibles no isomorfos en $mod(\Lambda)$. Con esto dado cualquier M en $\mathcal{C}$, éste es un sumando de una suma finita de $\sum_{i=1}^{n} M_i$, lo cual significa que $(*, M)$ es un sumando de una suma finita de $(*, \sum_{i=1}^{n} M_i)$, lo cual muestra que $(*, \sum_{i=1}^{n} M_i)$ es un generador de la representación de $\mathcal{P}$.

En resumen, por 4.13, $\hat{\mathcal{C}}$ es equivalente a $mod(End_{\hat{\mathcal{C}}}(*, \sum_{i=1}^{n} M_i)^{op})$.

Ahora bien, por Yoneda $End_{\hat{\mathcal{C}}}\left(*, \sum_{i=1}^{n} M_i\right)^{op} \simeq End_{\Lambda}\left(\sum_{i=1}^{n} M_i\right)^{op}$. Por lo tanto $\hat{\mathcal{C}}$ es equivalente a $mod\left(End_{\Lambda}\left(\sum_{i=1}^{n} M_i\right)^{op}\right)$, en particular $\Gamma = End_{\Lambda}\left(\sum_{i=1}^{n} M_i\right)^{op}$ es un álgebra de artin con $gl.dim\Gamma$ es 0 o 2 en función de si Λ es semisimple o no. Más aún si Λ es semisimple por *d*) de la prosición anterior tenemos que $mod(\Lambda)$ es equivalente a $\hat{\mathcal{C}}$.

Con estas observaciones hemos demostrado lo siguiente:

Teorema 4.31. *Sea Λ una álgebra de artin de tipo de representación finita y $M_1, \ldots, M_n$ un sistema completo de Λ-módulos inescindibles no isomorfos en $mod(\Lambda)$. Sea $\Gamma = End_{\Lambda}\left(\sum_{i=1}^{n} M_i\right)^{op}$, entonces tenemos lo siguiente:*

a) *Si Λ es semisimple, entonces Γ es semisimple y Morita equivalente a Λ.*

b) *Si Λ no es semisimple, entonces $gl.dim\Gamma = 2$.*

■

Ahora desarrollamos algunas de las propiedades del álgebra de artin Γ.

Recordamos que la equivalencia entre $\hat{C}$ y $mod(\Gamma)$ es dada por $F \to F(\sum_{i=1}^{n} M_i)$ para todo F en $\hat{C}$. Lo primero que mostramos es que si P es un Γ-módulo proyectivo en $mod(\Gamma)$ y

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_3 \longrightarrow 0$$

es una resolución inyectiva minimal de P, entonces I_1 e I_2 son Γ-módulos proyectivos así como Γ-módulos inyectivos.

El Γ-módulo proyectivo P corresponde a $(*, C)$ para algún C en $\mathcal{C}$. Como Λ es un álgebra de artin sabemos que C tiene una copresentación inyectiva minimal

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1$$

Supóngase que hemos mostrado que cada uno de los $(*, I_i)$ es inyectivo en $\hat{C}$ y la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (*, C) \longrightarrow (*, I_0) \longrightarrow (*, I_1)$$

es una copresentación minimal inyectiva de $(*, C)$. Luego tomando el módulo proyectivo $P = \left(\sum_{i=1}^{n} M_i, C\right)$ tiene la propiedad deseada que $\left(\sum_{i=1}^{n} M_i, I_0\right)$ y $\left(\sum_{i=1}^{n} M_i, I_1\right)$ son proyectivos dado que $(*, I_0)$ y $(*, I_1)$ son proyectivos en $\hat{C}$. De esta manera nuestro resultado deseado se obtiene de lo siguiente:

Lema 4.32. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana esqueléticamente pequeña. Se verifican las siguientes propiedades:*

a) *Un objeto C en $\mathcal{C}$ es inyectivo si y sólo si $(*, C)$ es inyectivo en $\hat{C}$.*

b) *Si $0 \to C \to I_0 \to I_1$ es exacto en $\mathcal{C}$ con los I_i inyectivos, entonces*

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1$$

es una copresentación inyectiva minimal de C si y sólo si

$$0 \longrightarrow (*, C) \longrightarrow (*, I_0) \longrightarrow (*, I_1)$$

es una copresentación inyectiva minimal de $(*, C)$ en $\hat{C}$.

Demostración: Iniciamos con la prueba de *a*). Sabemos que $(*, C)$ es inyectivo en $\hat{C}$ si y sólo si $Ext^i(F, (*, C)) = 0$ para todo $i > 0$ y todo F en $\hat{C}$. Supóngase que

$$0 \longrightarrow (*, C_2) \longrightarrow (*, C_1) \longrightarrow (*, C_0) \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

es exacta en $\hat{C}$. Luego los grupos $Ext^i(F, (*, C))$ pueden ser calculados por la homología del complejo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & ((*, C_0), (*, C)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & ((*, C_1), (*, C)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & ((*, C_2), (*, C)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (C_0, C) \arrow[r] & (C_1, C) \arrow[r] & (C_2, C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

De donde obtenemos que $Ext^i(F,(*,C)) = 0$ para $i > 0$ y todo F en $\hat{\mathcal{C}}$ si y sólo si dada cualquier sucesión exacta en $\mathcal{C}$

$$0 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0$$

entonces la sucesión

$$(C_0, C) \longrightarrow (C_1, C) \longrightarrow (C_2, C) \longrightarrow 0$$

es exacta. Por lo tanto se sigue que $Ext^i(F,(*,C)) = 0$ para todo $i > 0$ y todo F en $\hat{\mathcal{C}}$ si y sólo si C es inyectivo en $\mathcal{C}$. Por lo tanto hemos mostrado que $(*,C)$ es inyectivo en $\hat{\mathcal{C}}$ si y sólo si C es inyectivo en $\mathcal{C}$.

Finalmente, queda por probar b). Ahora no es difícil mostrar que una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1$$

con I_i inyectivo en una categoría abeliana arbitraria es una copresentación inyectiva minimal de C si y sólo si dada cualquier sucesión exacta con los I'_i inyectivos,

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow I'_0 \longrightarrow I'_1$$

existe un diagrama conmutativo exacto

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & I_0 \arrow[r] \arrow[d] & I_1 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] & I'_0 \arrow[r] & I'_1
\end{tikzcd}$$

De esto se sigue que una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1$$

es una copresentación inyectiva minimal de C en $\mathcal{C}$ si y sólo si

$$0 \longrightarrow (*, C) \longrightarrow (*, I_0) \longrightarrow (*, I_1)$$

es una copresentación inyectiva minimal de $(*,C)$ en $\hat{\mathcal{C}}$.

■

Este resultado sugiere lo siguiente:

Definición 4.33. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana tal que cada objeto de $\mathcal{C}$ tiene una resolucion inyectiva minimal. Si

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots$$

es una resolución inyectiva minimal de C en $\mathcal{C}$, entonces **la dimensión dominante de** $\mathcal{C}$ (notación: $dom.dim\mathcal{C}$) se dice que es mayor o igual a $n \geq 1$ si y sólo si I_i es proyectivo para todo $i \leq n-1$.

Por lo tanto lo que hemos probado es que los módulos proyectivos finitamente generados sobre Γ tienen dimensión dominante al menos 2. Así, si $M_1, \ldots, M_n$ son un conjunto completo de módulos inescindibles no isomorfos para un álgebra de artin Λ de tipo de representación finita, entonces el álgebra de artin $\Gamma = End_\Lambda(\sum_{i=1}^n M_i)^{op}$ tiene

i) $gl.dim\Gamma \leq 2$.

y

ii) $dom.dim\Gamma \geq 2$.

Esto nos lleva a considerar otro clase de álgebras, las cuales definimos ahora:

Definición 4.34. Un álgebra de artin Γ es un **álgebra de Auslander** si satisface las condiciones *i)* y *ii)*, del parrafo anterior.

A continuación mostraremos como construir álgebras de Auslander a partir de álgebras de tipo de representación finita y viceversa.

Sabemos que existen solamente un número finito de Γ-módulos inescindibles no isomorfos $V_1, \ldots, V_n$, los cuales son proyectivos e inyectivos. Si mostramos que $End_\Gamma(\sum_{i=1}^n V_i)^{op}$ es Morita equivalente a Λ, entonces habremos mostrado como recuperar un álgebra de artin Morita equivalente a Λ de Γ.

Sea $I_1, \ldots, I_m$ un conjunto completo de Λ-módulos inyectivos inescindibles no isomorfos. Entonces por lo que ya hemos mostrado tenemos que las imágenes $(\sum M_i, I_j)$ de los $(*, I_j)$ bajo la equivalencia $\hat{C} \to mod(\Gamma)$ tiene la propiedad que $m = n$ y después de un cambio de índices apropiado, tenemos $(\sum M_i, I_j) \simeq V_j$ para $j = 1, \ldots, n$. Por lo tanto tenemos el isomorfismo de álgebras de artin:

$$End_\Gamma\left(\sum_{i=1}^n V_i\right) \simeq End_{\hat{C}}\left(\left(*, \sum_{i=1}^n I_i\right)\right).$$

Dado que $I_1 \ldots, I_n$ es un conjunto completo de Λ^{op}-módulos inyectivos inescindibles no isomorfos, obtenemos que $End_{\hat{C}}\left((*, \sum_{i=1}^n I_i)\right) \simeq End_\Lambda\left(\sum_{i=1}^n I_i\right) \simeq End_{\Lambda^{op}}\left(\sum_{i=1}^n D(I_i)\right)^{op}$. Por lo tanto Λ^{op} está en la categoría aditiva generada por $\sum_{i=1}^n D(I_i)$. En consecuencia $End_{\Lambda^{op}}\left(\sum_{i=1}^n D(I_i)\right)^{op}$ es Morita equivalente a Λ^{op}. Pero ya hemos mostrado que

$$End_\Gamma\left(\sum V_i\right) \simeq End_{\Lambda^{op}}\left(\sum_{i=1}^n D\left(I_i\right)\right)^{op}$$

Por lo tanto tenemos que $End_\Gamma(\sum V_i)^{op}$ es Morita equivalente a Λ, nuestro resultado deseado.

Resumimos nuestra discusión hasta el momento en:

Proposición 4.35. *Supóngase Λ es un álgebra de artin de tipo de representación finita y $M_1, \ldots, M_n$ es un conjunto completo de Λ-módulos inescindibles no isomorfos. Entonces el álgebra de artin $\Gamma = End_\Lambda\left(\sum_{i=1}^n M_i\right)^{op}$ tiene las siguientes propiedades:*

a) Γ *es un álgebra de Auslander.*

b) *Si* $V_1, \ldots, V_m$ *es un conjunto completo de* Γ*-módulos inescindibles no isomorfos los cuales son proyectivos e inyectivos, entonces* $End_\Gamma\left(\sum_{i=1}^n V_i\right)^{op}$ *es Morita equivalente a* Λ.

■

Supóngase ahora que Γ es un álgebra de artin con $gl.dim\Gamma \leq 2$. Sea M un Γ-módulo que es proyectivo e inyectivo y sea $Add(M)$ una categoría aditiva generada por M. Como M es un Γ-módulo inyectivo sabemos por 4.27 que $mod(\Gamma)(Add(M))$ es equivalente a $mod(End_\Gamma(M)^{op})$. Pero $mod(\Gamma)(Add(M))$ es la subcategoría plena de $mod(\Gamma)$ que consiste de todos los Γ-módulos C tal que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1$$

con los M_i en $Add(M)$. Como los M_i son también Γ-módulos proyectivos, el hecho que el $gl.dim\Gamma \leq 2$ implica que C es un Γ-módulo proyectivo. Por lo tanto $mod(\Gamma)(Add(M))$ es una subcategoría plena de la categoría $\rho(\Gamma)$ de Γ-módulos proyectivos finitamente generados. El hecho que $\rho(\Gamma)$ tiene solamente un número finito de Γ-módulos inescindibles no isomorfos implica que $mod(\Gamma)(Add(M))$ y por lo tanto $mod(End_\Gamma(M)^{op})$ tiene solamente un número finito de objetos inescindibles no isomorfos. Entonces hemos establecido el siguiente lema:

Lema 4.36. *Supóngase* Γ *es un álgebra de artin con gl.dim* ≤ 2 *y* M *un* Γ*-módulo finitamente generado que es proyectivo e inyectivo. Entonces*

a) $mod(\Gamma)(Add(M))$ *es una subcategoría plena de* $\rho(\Gamma)$ *y por lo tanto de tipo de representación finita.*

b) $End_\Gamma(M)^{op}$ *es un álgebra de artin de tipo de representación finita puesto que las categorías* $mod(\Gamma)(Add(M))$ *y* $mod(End_\Gamma(M)^{op})$ *son equivalentes.*

■

Observación 4.37. Supóngase ahora que $dom.dim\Gamma \geq 2$ así como $gl.dim\Gamma \leq 2$. Sea $M_1, \ldots, M_n$ un conjunto completo de Γ-módulos proyectivos e inyectivos, inescindibles no isomorfos. Además sea $M = \sum_{i=1}^n M_i$ y sea $Add(M)$ la categoría aditiva generada por M. Dado que $dom.dim\Gamma \geq 2$, $gl.dim\Gamma \leq 2$, se sigue que $mod(\Gamma)(Add(M)) = \rho(\Gamma)$ donde $\rho(\Gamma)$ es la subcategoría plena de $mod(\Gamma)$ que consiste de todos los Γ-módulos proyectivos finitamente generados. Por lo tanto $\rho(\Gamma)$ es equivalente a $mod(End_\Gamma(M)^{op})$. De esta manera obtenemos que $\Lambda = End_\Gamma(M)^{op}$ es un álgebra de artin de tipo de representación finita con la propiedad que $\rho(\Gamma)$ es equivalente a $mod(\Lambda)$.

Observación 4.38. Sea $N_1, \ldots, N_n$ un conjunto completo de Λ-módulos inescindibles no isomorfos y sean $P_1, \ldots, P_n$ los objetos en $\rho(\Gamma)$ que corresponden a $N_1, \ldots, N_n$ bajo la equivalencia $\rho(\Gamma) \to mod(\Lambda)$, luego $End_\Lambda\left(\sum_{i=1}^n N_i\right) \simeq End_\Gamma\left(\sum_{i=1}^n P_i\right)$. Pero el conjunto $P_1, \ldots, P_n$ es un conjunto completo de Γ-módulos proyectivos inescindibles no isomorfos, por lo tanto $End_\Gamma\left(\sum_{i=1}^n P_i\right)^{op}$ es Morita equivalente a Γ, de donde se sigue que $End_\Lambda\left(\sum_{i=1}^n N_i\right)^{op}$ es Morita equivalente a Γ.

En resumen tenemos la siguiente proposición:

Proposición 4.39. *Sea Γ un álgebra de artin tal que gl.dim$\Gamma \leq 2$ y dom.dim$\Gamma \geq 2$. Sea $M_1, \ldots, M_n$ un conjunto completo de Γ-módulos inescindibles no isomorfos los cuales son proyectivos e inyectivos. Entonces $\Lambda = End_\Gamma\left(\sum_{i=1}^n M_i\right)^{op}$ es un álgebra de artin de tipo de representación finita teniendo las siguientes propiedades:*

a) *$\rho(\Gamma)$ es equivalente a mod(Λ).*

b) *Si $N_1, \ldots, N_n$ es un conjunto completo de Λ-módulos inescindibles no isomorfos entonces $End_\Lambda\left(\sum_{i=1}^n N_i\right)$ es Morita equivalente a Γ.*

Demostración: Notemos que *a*) se obtiene de la observación 4.37 y *b*) es la observación 4.38.

■

Combinando nuestras dos últimas proposiciones obtenemos nuestro principal resultado de esta sección.

Teorema 4.40. *Sea S la clase cuyos objetos son las clases de álgebras de artin Morita equivalentes $[\Lambda]$, tales que son de tipo de representación finita. Sea J la clase cuyos objetos son las clases de álgebras de artin Morita equivalentes $[\Gamma]$, tales que son álgebras de Auslander. Entonces existe una correspondencia uno a uno entre S y J dada de la siguiente manera:*

a) *Si Λ es un álgebra de artin de tipo de representación finita y $M_1, \ldots, M_n$ es un conjunto completo de Λ-módulos inescindibles no isomorfos, entonces enviamos*

$$\Lambda \longrightarrow \Gamma = End_\Lambda\left(\sum_{i=1}^n M_i\right)^{op}$$

b) *Si Γ es un álgebra de Auslander y $N_1, \ldots, N_m$ es un conjunto completo de Γ-módulos proyectivos e inyectivos, inescindibles no isomorfos, entonces tenemos la asignación*

$$\Gamma \longrightarrow \Lambda = End_\Gamma\left(\sum_{i=1}^m N_i\right)^{op}.$$

Este teorema muestra que el problema de clasificar álgebras de artin de tipo de representación finita (hasta equivalencia de Morita) es lo mismo que clasificar (hasta equivalencia de Morita) álgebras de Auslander. Hasta le facha se conocen trabajos para determinar cunado un álgebra de artin es de tipo de representación finita [Bon84], [Rie80]. En la práctica teoricamente se puede decir que es más sencillo determinar si un álgebra de artin, es un álgebra de Auslander, puesto que esto es un proceso finito.

4.5. Dimensión de representación de álgebras de artin.

Nuestro propósito en esta sección es introducir la noción de la dimensión de representación de un álgebra de artin. Se espera que ésto nos de una manera razonable de medir hasta que punto un álgebra de artin se aleja de ser un álgebra de tipo de representación finita.

En la proposión 4.35 vimos que si Λ es un álgebra de artin de tipo de representación finita entonces existe asociada con ella un álgebra de artin Γ satisfaciendo

a) Γ es un álgebra de Auslander.

b) Λ es Morita equivalente a $End(\sum_{i=1}^{n} M_i)^{op}$ donde $M_1, \ldots, M_n$ es un conjunto completo de Γ-módulos inescindibles no isomorfos que son proyectivos e inyectivos.

Sea $I_0(\Gamma)$ una envolvente inyectiva de Γ, dado que $dom.dim\Gamma \geq 2$, entonces $I_0(\Gamma)$ es proyectivo y notemos que tiene la propiedad que $Add(I_0(\Gamma)) = Add\left(\sum_{i=1}^{n} M_i\right)$. Por 4.37 las categorías $mod\,(End_\Gamma\,(I_0(\Gamma))^{op})$ y $mod\left(\left(\sum_{i=1}^{n} M_i\right)^{op}\right)$ son equivalentes y por consiguiente $End_\Gamma\,(I_0(\Gamma))^{op}$ es Morita equivalente a $End_\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} M_i\right)^{op}$. Por lo tanto el álgebra de artin Γ tiene las siguientes porpiedades:

a) Γ es un álgebra de Auslander.

b) Λ es Morita equivalente a $End(I_0(\Gamma))^{op}$ donde $I_0(\Gamma)$ es un envolvente inyectivo de Γ.

Este resultado sugiere lo siguiente:

Notación 4.41. Para cada álgebra de artin Λ consideremos la coleccion $A(\Lambda)$ de todas las álgebras de artin Γ satisfaciendo:

i) $dom.dim\Gamma \geq 2$.

ii) Λ es Morita equivalente a $End_\Gamma(I_0(\Gamma))^{op}$, donde $I_0(\Gamma)$ es una envolvente inyectiva de Γ.

Como veremos más adelante, la dimensión de representación de Λ es determinada por la dimensión global de las álgebras de artin en $A(\Lambda)$. Sin embargo, antes de dar la definición formal de la dimensión de la representación de Λ mostramos que $A(\Lambda)$ es no vacío.

Lema 4.42. *Sea Λ un álgebra de artin y M un Λ-módulo finitamente generado tal que $Add(M)$ contiene todo Λ-módulo proyectivo finitamente generado. Las siguientes afirmaciones se satisfacen:*

a) La sucesión de Λ-módulos en $Add(M)$

$$C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3$$

es exacta si la sucesión

$$(*, C_1) \longrightarrow (*, C_2) \longrightarrow (*, C_3)$$

es exacta en $\widehat{Add(M)}$.

b) C en $Add(M)$ es un Λ-módulo inyectivo si y sólo si $(*, C)$ es inyectivo en $\widehat{Add(M)}$.

c) *Una sucesión exacta de* Λ*-módulos en* $Add(M)$

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1$$

es una copresentación inyectiva minimal de C *si y sólo si la sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow (*, C) \longrightarrow (*, I_0) \longrightarrow (*, I_1)$$

es una copresentación inyectiva minimal de $(*, C)$ *en* $Ad\hat{d}(M)$*.*

Demostración: Iniciemos con la prueba de *a*). Supóngase que la sucesión $C_1 \to C_2 \to C_3$ en $Add(M)$ tiene la propiedad que $(*, C_1) \to (*, C_2) \to (*, C_3)$ es exacta en $Ad\hat{d}(M)$. En particular $(\Lambda, C_1) \to (\Lambda, C_2) \to (\Lambda, C_3)$ es exacta puesto que Λ está en $Add(M)$. Pero (Λ, X) es funtorialmente isomorfo a X para todo X en $mod(\Lambda)$, por lo tanto la sucesión de Λ-módulos

$$C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3$$

es exacta.

Continuamos con el inciso *b*). Sea C en $Add(M)$, por consiguiente $(*, C)$ es inyectivo en $\widehat{Add(M)}$ si y sólo si $Ext^1(F, (*, C)) = 0$ para todo F en $\widehat{Add(M)}$. Pero de manera análoga a la prueba de 4.32.*a*) no es difícil mostrar que $Ext^1(F, (*, C)) = 0$ para todo F en $\widehat{Add(M)}$ si y sólo si dada cualquier sucesión en $Add(M)$,

$$C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0$$

tal que la sucesión $(*, C_2) \longrightarrow (*, C_1) \longrightarrow (*, C_0)$ es exacta en $\widehat{Add(M)}$, entonces la siguiente sucesión es exacta

$$(C_0, C) \longrightarrow (C_1, C) \longrightarrow (C_2, C).$$

Ahora bien ya hemos visto que si $(*, C_2) \longrightarrow (*, C_1) \longrightarrow (*, C_0)$ es exacta se sigue que $C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0$ es exacta. Por lo tanto si C en $Add(M)$ es inyectivo y $(*, C_2) \longrightarrow (*, C_1) \longrightarrow (*, C_0)$ es exacta en $\widehat{Add(M)}$, obtenemos que $C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0$ es exacta lo cual implica que $(C_0, C) \longrightarrow (C_1, C) \longrightarrow (C_2, C)$ es exacta. Por lo tanto si C en $Add(M)$ es inyectiva, entonces $(*, C)$ en $\widehat{Add(M)}$ es inyectivo.

Supóngase ahora que C en $Add(M)$ es tal que $(*, C)$ es inyectivo en $\widehat{Add(M)}$ y que $\mathbf{a}$ es un ideal izquierdo en Λ. Como $Add(M)$ contiene todos los Λ-módulos proyectivos finitamente generados y $Add(M)$ tiene pseudo-cokerneles, podemos encontrar una sucesión en $Add(M)$ $C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow \Lambda$, tal que

$$(*, C_2) \longrightarrow (*, C_1) \longrightarrow (*, \Lambda)$$

es exacta en $\widehat{Add(M)}$ e $Im(C_1 \to \Lambda) = \mathbf{a}$. Dado que $(*, C)$ es inyectivo se sigue que la siguiente sucesión es exacta.

$$((*, \Lambda), (*, C)) \longrightarrow ((*, C_1), (*, C)) \longrightarrow ((*, C_2), (*, C))$$

y por lo tanto la sucesión

$$(\Lambda, C) \longrightarrow (C_1, C) \longrightarrow (C_2, C)$$

es exacta. Pero el hecho que $(*, C_2) \longrightarrow (*, C_1) \longrightarrow (*, \Lambda)$ sea exacta implica que $C_2 \to C_1 \to \Lambda$ es exacta. Por lo tanto $C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow \mathbf{a} \longrightarrow 0$ sea exacta. Por consiguiente si $(*, C)$ es inyectivo en $\widehat{Add(M)}$, entonces

$$(\Lambda, C) \longrightarrow (\mathbf{a}, C) \longrightarrow 0$$

es exacta para todo ideal izquierdo $\mathbf{a}$ en Λ, pero esto es equivalente a que C sea inyectivo. Esto concluye la prueba que si $(*, C)$ es inyectivo en $\widehat{Add(M)}$, entonces C es inyectivo.

La prueba de *c*) es de manera análoga a la prueba de 4.32.*b*).

■

Proposición 4.43. *Sea Λ un álgebra de artin y M un Λ-módulo finitamente generado tal que todo Λ-módulo inyectivo inescindible y todo proyectivo inescindible es isomorfo a un sumando de M (o equivalentemente, $Add(M)$ contiene todos los Λ-módulos finitamente generados proyectivos e inyectivos). Entonces $\Gamma = End_\Lambda(M)^{op}$ está en $A(\Lambda)$.*

Demostración: Primero mostraremos que $dom.dim\Gamma \geq 2$. Sabemos por 4.13 que $\widehat{Add(M)}$ es equivalente a $mod(\Gamma)$ y que los objetos proyectivos en $mod(\Gamma)$ corresponden a los funtores representables en $\widehat{Add(M)}$. Sea C en $Add(M)$, dado que los Λ-módulos inyectivos finitamente generados estan en $Add(M)$, sabemos que existe un copresentación inyectiva minimal de C en $Add(M)$:

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1.$$

Como una consecuencia inmediata del lema anterior tenemos que

$$0 \longrightarrow (*, C) \longrightarrow (*, I_0) \longrightarrow (*, I_1)$$

es una copresentación inyectiva minimal de $(*, C)$ en $\widehat{Add(M)}$. Esto muestra que $dom.dim(*, C) \geq 2$ dado que los $(*, I_1)$ son obviamente tanto proyectivos como inyectivos en $\widehat{Add(M)}$. Como $Ad\hat{d}(M)$ y $mod(\Gamma)$ son categorías equivalentes se sigue que $dom.dim\Gamma \geq 2$.

Para ver que Γ se encuentra en $A(\Lambda)$, tenemos que demostrar que $End_\Gamma(I_0(\Gamma))^{op}$ es Morita equivalente a Λ. Pero la subcategoría aditiva generada por $I_0(\Gamma)$ es la subcategoría plena de $mod(\Gamma)$ que consiste de todos los Γ-módulos que son proyectivos e inyectivos. Esto corresponde a la subcategoría plena de todos los objetos en $\widehat{Add(M)}$ que son proyectivos e inyectivos en $\widehat{Add(M)}$. Dado que por nuestro lema anterior F en $\widehat{Add(M)}$ es proyectivo e inyectivo en $\widehat{Add(M)}$ si y sólo si $F \simeq (*, I)$ con I inyectivo, se sigue que $(*, \sum_{i=1}^n I_i)$ genera la categoría aditiva de todos los objetos en $\widehat{Add(M)}$ que son proyectivos e inyectivos, donde $I_1, \ldots, I_n$ es un conjunto completo de Λ-módulos inyectivos inescindibles no isomorfos. Son estas observaciones que nos proporcionan que $End_\Gamma(I_0(\Gamma))^{op}$ y $End_{\widehat{Add(M)}}\left((*, \sum_{i=1}^n I_i)\right)^{op}$ son álgebras Morita equivalentes.

Por otra parte, también sabemos que $End_{\widehat{Add(M)}}\left((*, \sum_{i=1}^n I_i)\right) \simeq End_\Lambda\left(\sum_{i=1}^n I_i\right)$ el cual es Morita equivalente a Λ^{op}. Por lo tanto $End_\Gamma(I_0(\Gamma))^{op}$ es Morita equivalente a Λ, esto termina la demostración que si M es un Λ-módulo finitamente generado tal que $Add(M)$ contiene todo Λ-módulo proyectivo finitamente generado así como todo módulo inyectivo finitamente generado, entonces $\Gamma = End_\Lambda(M)$ está en $A(\Lambda)$.

■

Estamos ahora en posición de definir la dimensión de representación de un álgebra de artin.

Definición 4.44. Sea Λ un álgebra de artin.

a) Si Λ es semisimple definimos **la dimensión de la representación de** Λ, la cual denotaremos por $rep.dim\Lambda$, igual a uno.

b) Si Λ no es semisimple definimos la $rep.dim\Lambda$ como el mínimo de las dimensiones globales de todas las álgebras de artin en $A(\Lambda)$.

Tenemos los siguientes hechos concernientes a la dimensión de la representación de un álgebra de artin:

Proposición 4.45 (Auslander)**.** *Sea Λ un álgebra de artin, entonces:*

a) $rep.dim\Lambda = 1$ *si y sólo si Λ es semisimple.*

b) $rep.dim\Lambda \leq 2$ *si y sólo si Λ es de tipo de representación finita.*

Demostración: Iniciamos con la prueba de *a*). Como por definición un álgebra semisimple tiene dimensión de representación uno, para probar el primer inciso es suficiente mostrar que si $rep.dim\Lambda = 1$, entonces Λ es semisimple. Hacemos esto mostrando que si Λ no es semisimple y Γ está en $A(\Lambda)$, entonces $gl.dim\Gamma \geq 2$ lo cual muestra que $rep.dim\Lambda \geq 2$.

Supóngase que Λ no es semisimple y Γ está en $A(\Lambda)$. Sabemos que si $0 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1$ es una copresentación inyectiva minimal de Γ, entonces I_0 e I_1 son módulos proyectivos y Λ es Morita equivalente a $End_\Gamma(I_0)^{op}$. Supóngase $gl.dim\Gamma \leq 1$, se sigue que

$$0 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1$$

es exacta. Como I_1 es proyectivo sabemos que esta sucesión se escinde, lo cual significa que Γ es un sumando de I_0 y por lo tanto inyectivo así como proyectivo. Pero es bien conocido que un álgebra de artin autoinyectiva es semisimple o tiene dimensión global infinita. Por lo tanto tenemos que Γ es semisimple, de esta manera Λ es semisimple puesto que Λ es Morita equivalente a $End_\Gamma(I_0)^{op} = \Gamma$. Pero por hipótesis Λ no es semisimple y Γ esta en $A(\Lambda)$ de donde $gl.dim\Gamma \geq 2$. Esto termina la demostración que si Λ no es semisimple, entonces $rep.dim\Lambda \geq 2$

Finalmente notemos que *b*) se sigue del Teorema 4.31.

∎

Uno de primeros resultados que surgieron, muestra que álgebras de artin autoinyectivas son de tipo de representación finita.

Proposición 4.46. *Sea Λ un álgebra de artin autoinyectiva, es decir, Λ es un Λ-módulo inyectivo con índice de nilpotencia n. Entonces $rep.dim\Lambda \leq n + 1$.*

Demostración: Sea $M = \Lambda/\mathbf{r} + \Lambda/\mathbf{r}^2 + \cdots + \Lambda/\mathbf{r}^n$. Como $\Lambda/\mathbf{r}^n = \Lambda$ sabemos que todo Λ-módulo proyectivo inescindible es sumando de M, la hipótesis de que Λ es autoinyectiva implica que todo

Λ-módulo inyectivo inescindible es también proyectivo, por consiguiente todo Λ-módulo inyectivo inescindible es también sumando de M.

Por 4.43 sabemos que $End_\Lambda(M)^{op}$ está en $A(\Lambda)$, pero hemos probado en el resultado 4.26 que $gl.dimEnd_\Lambda(M)^{op} \leq n+1$, esto combinado con el hecho que $End_\Lambda(M)^{op}$ esta en $A(\Lambda)$ muestra que $rep.dim\Lambda \leq n+1$.

■

Como una primera aplicación de este resultado tenemos:

Corolario 4.47. *Sea G un grupo finito y k un campo, entonces el anillo de grupos $k[G]$ tiene la propiedad que $rep.dimk[G] \leq n+1$, donde n es el índice de nilpotencia d $k[G]$.*

Demostración: Como $k[G]$ es autoinyectivo, este resultado se sigue de la proposición anterior.

■

Nuestra siguiente aplicación es basada en el hecho que toda álgebra de artin es homeomorfa a la imagen de un álgebra de artin autoinyectiva, un resultado que ahora demostraremos.

Sea Λ un álgebra de artin con centro R y sea I un envolvente R-inyectivo de R/I, donde **r** es el radical de R. Como ya hemos observado el funtor

$$(*, I) : mod(R) \longrightarrow mod(R)$$

es una dualidad. Sea $E = Hom_R(\Lambda, I)$ el cual consideramos un Λ-módulo bilateral dado por $(\lambda f)(x) = f(\lambda x)$ para todo f en E, λ en Λ y x en Λ. Debe ser observado que desde que Λ es un Λ^{op}-módulo proyectivo, $E = Hom_R(\Lambda, I)$ es un Λ-módulo inyectivo. También no es difícl de ver que todo Λ-módulo inyectivo izquierdo inescindible es un sumando de E. Por simetría el Λ^{op}-módulo E tiene propiedades similares.

Sea $\Gamma = \Lambda + E$ una extensión trivial derecha de Λ por E, obviamente Γ es un álgebra de artin. Ahora mostramos que Γ es autoinyectiva probando que los Γ-módulos Γ y $Hom_R(\Gamma, I)$ son isomorfos. Como $Hom_R(\Gamma, I)$ es obviamente Γ-inyectivo esto implica que Γ es Γ-inyectivo.

Considere la función $t : \Gamma \to Hom_R(\Gamma, I)$ dado por $t(\lambda, f)(\lambda', f') = f(\lambda') + f'(\lambda)$ para (λ, f), (λ', f') en $\Gamma = \Lambda + Hom_R(\Lambda, I)$. No es difícil verificar que t es un morfismo de Γ-módulos. Ahora bien $t(\lambda, f) = 0$ si y sólo si $f(\lambda') = f'(\lambda) = 0$, para todo λ' en Λ y todo f' en $Hom_R(\Lambda, I)$. Por lo tanto si $t(\lambda, f) = 0$ deberíamos de tener que

$$t(\lambda, f)(0, f') = f'(\lambda) = 0$$

Para todo f' en $Hom_R(\Lambda, I)$. Pero esto implica que $\lambda = 0$, dado que $(*, I) : mod(R) \to mod(R)$ es una dualidad. Entonces si $t(\lambda, f) = 0$, tenemos que $\lambda = 0$. Por otra parte, si $t(0, f) = 0$, se sigue que $t(0, f)(\lambda, 0) = f(\lambda) = 0$ para todo λ en Λ. De ésta manera si $t(0, f) = 0$ obtenemos que $f = 0$. Así $t(\lambda, f) = 0$ si y sólo si $\lambda = 0 = f$, por lo tanto $t : \Gamma \to Hom_R(\Gamma, I)$ es un monomorfismo de Γ-módulos y por consiguiente de R-módulos. Pero visto como R-módulo Γ y $Hom_R(\Gamma, I)$ tienen la mism longitud, por lo tanto t es suprayectiva y luego es un isomorfimo de Γ-módulos. Esto termina el argumento que Γ es autoinyectiva.

Por lo tanto hemos establecido.

Lema 4.48. *Sea Λ un álgebra de artin. Entonces existe un álgebra de artin autoinyectiva Γ tal que $\Lambda \simeq \Gamma/\mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ es un ideal bilateral tal que $\mathbf{a}^2 = 0$.*

Combinando esto con nuestros resultados previos tenemos:

Proposición 4.49. *Sea Λ un álgebra de artin. Entonces existe un álgebra de artin Γ con $rep.dim\Gamma < \infty$ tal que $\Lambda = \Gamma/\mathbf{a}$ donde $\mathbf{a}^2 = 0$.*

Estos resultados sugieren las siguientes preguntas concernientes a un álgebra de artin Λ

a) ¿Es $rep.dim\Lambda \geq rep.dim\Lambda/\mathbf{a}$, para todo ideal bilateral $\mathbf{a}$ en Λ?.

b) ¿Es $rep.dim\Lambda \geq rep.dim\Lambda/\mathbf{a}$, si $\mathbf{a}^2 = 0$?.

c) ¿El que $rep.dim\Lambda$ sea finito implica que $rep.dim\Lambda/\mathbf{a}$ sea finito, para todo ideal bilateral $\mathbf{a}$?.

d) ¿El que $rep.dim\Lambda$ sea finito implica que $rep.dim\Lambda/\mathbf{a}$ sea finito, para todo ideal bilateral $\mathbf{a}$ tal que $\mathbf{a}^2 = 0$?.

Obviamente, una respuesta afirmativa a cualesquiera de estas preguntas implicará que $rep.dim\Lambda$ es finita para toda álgebra de artin Λ. Éstas fueron algunas de las preguntas hechas por Auslander, con la inteción de conocer si una álgebra de artin es de tipo de representación finita. Fue hasta el año 2003 que O. Iyamma nos da una respuesta afirmativa de tal hecho.

Teorema 4.50 (O. Iyama [Iya03])**.** *La dimensión de representación de cualquier álgebra de artin es de tipo finita.*

A continuación algunos ejemplos de álgebras de artin Λ tales que $rep.dim\Lambda \leq 3$.

Proposición 4.51. *Sea Λ un álgebra de artin con radical $\mathbf{r}$ e índice de nilpotencia n. Si $rep.dim\Lambda/\mathbf{r}^{n-1} \leq 2$, entonces $rep.dim\Lambda \leq 3$. En particular, si Λ es un álgebra de artin arbitraria con $\mathbf{r}^2 = 0$, entonces $rep.dim\Lambda \leq 3$.*

Demostración: Asumamos que $\Lambda/\mathbf{r}^{n-1}$ es de tipo de representación finita. Sea $N_1, \ldots, N_t$ un conjunto completo de $\Lambda/\mathbf{r}^{n-1}$-módulos inescindibles no isomorfos y sea $N = \sum_{i=1}^{t} N_i$. Sea $P_1, \ldots, P_S$ un conjunto completo de Λ-módulos proyectivos inescindibles no isomorfos y $I_1, \ldots, I_s$ un conjunto completo de Λ-módulos inyectivos inescindibles no isomorfos.

Es algo sencillo de demostrar que todo submódulo propio de un P_i y todo módulo cociente de I_i es anulado por $\mathbf{r}^{n-1}$ y entonces es un $\Lambda/\mathbf{r}^{n-1}$-módulo. Sea $V = N + \sum_{i=1}^{s} P_i + \sum_{i=1}^{s} I_i$ y $Add(V)$ la categoría aditiva generada por V.

Primero debe ser notado que $Add(V)$ contiene todo $\Lambda/\mathbf{r}^{n-1}$-módulo. A continuación establecemos nuestro resultado deseado mostrando que $gl.dimEnd_{\Lambda}(V)^{op} \leq 3$. Para ello veremos primero que dado un Λ-módulo inescindible M existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow V_3 \longrightarrow V_2 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con los V_i en $Add(V)$ tal que

$$0 \longrightarrow (X, V_3) \longrightarrow (X, V_2) \longrightarrow (X, M) \longrightarrow 0$$

es exacta para todo X en $Add(V)$.

Si M está en $Add(V)$ entonces habremos terminado. Simplemente definimos $V_2 = M$ y $V_3 = 0$ y el morfismo $V_2 \to M$ la identidad.

Supongamos que M no está en $Add(V)$. Entonces $\mathbf{r}^{n-1}M \neq 0$. Sea M' el submódulo de M consistiendo de todos los m en M tal que $\mathbf{r}^{n-1}m = 0$. Sea $P \xrightarrow{g} M/M' \longrightarrow 0$ un cubriente proyectivo minimal de M/M' como Λ-módulo. Como P es proyectivo entonces existe un morfismo $h : P \to M$ tal que la composición $P \xrightarrow{h} M \longrightarrow M/M'$ es $g : P \to M/M'$.

En seguida definimos $f : P + M' \to M$ por $f(p, m') = h(p) + m'$, par todo p en P y todo m' en M': Claramente f es un epimorfismo. Más aún, supóngase que X es un módulo inescindible en $Add(V)$. Afirmamos que $(X, P + M') \to (X, M) \to 0$, es exacta, para probar esto notemos que tenemos tres casos: X es un Λ/r^{n-1} -módulo, si X en $Add(V)$ no es un $\Lambda/\mathbf{r}^{n-1}$-módulo, se sigue que X es un Λ-módulo proyectivo ó X es un Λ-módulo inyectivo.

Notemos que si X es un $\Lambda/\mathbf{r}^{n-1}$-módulo, entonces $(X, M') = (X, M)$ y queda demostrada nuestra afirmación.

Supóngase que X en $Add(V)$ no es un $\Lambda/\mathbf{r}^{n-1}$-módulo, si X es proyectivo no hay nada que probar.

Finalmente que X es inyectivo, si $\alpha : X \to M$ es un morfismo, entonces α no es un monomorfismo puesto que si lo fuera entonces el monomorfismo $0 \longrightarrow X \xrightarrow{g} M$ se escindiría, por ser X inyectivo y como M es inescindible obtenemos que $X \simeq M$ y por consiguiente X están en $Add(N)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, cada morfismo $\alpha : X \to M$ no es un monomorfismo. Como X es un Λ-módulo inyectivo inescindible, sabemos que X es una extensión esencial de su soclo S el cual es semisimple. Con lo cual obtenemos que S está contenido en $Ker\alpha$ para todo morfismo $\alpha : X \to M$. Entonces el morfismo $X \to X/S$ induce un isomorfismo

$$(X/S, M) \longrightarrow (X, M)$$

Pero $\mathbf{r}^{n-1}X \neq 0$ puesto que X no es un $\Lambda/\mathbf{r}^{n-1}$-módulo, entonces $S \subset \mathbf{r}^{n-1}X$. Como $\mathbf{r}(\mathbf{r}^{n-1}X) = 0$, tenemos que $\mathbf{r}^{n-1}X \subset soclo(X) = S$ y así tenemos que $S = \mathbf{r}^{n-1}X$. Por lo tanto X/S es un $\Lambda/\mathbf{r}^{n-1}$-módulo lo cual muestra que $(X, M) = (X/S, M) = (X/S, M')$. De esto se sigue trivialmente que

$$(X, P + M') \longrightarrow (X, M) \longrightarrow 0$$

es exacta para todo X en $Add(V)$ inyectivo inescindible.

Por lo tanto hemos probado que $(X, P + M') \longrightarrow (X, M) \longrightarrow 0$ es exacta para todo X en $Add(V)$ inescindible y entonces para todo X en $Add(V)$.

Por otra parte notemos que $ker(P + M' \to M)$ está en $Add(V)$ por que es un $\Lambda/\mathbf{r}^{n-1}$-módulo. Tenemos (p, m') en $kerf$ si y sólo si $h(p) = -m'$, donde $h : P \to M$ tienen la propiedad que la composición $P \xrightarrow{h} M \longrightarrow M/M'$ es un cubriente proyectivo minimal de M/M'. Sea $K = h^{-1}(M')$, entonces el morfismo $\phi : K \to P + M'$ definido por $\phi(p) = (p, -h(p))$ nos da una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\phi} P + M' \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

Como la composición $P \xrightarrow{h} M \longrightarrow M/M'$ es un cubriente proyectivo minimal, tenemos que $ker(P \to M/M')$ esta contenido en $\mathbf{r}P$ y es entonces un $\Lambda/\mathbf{r}^{n-1}$-módulo. Como K y M' son $\Lambda/\mathbf{r}^{n-1}$-módulos, se sigue que K y $P + M'$ estan en $Add(V)$, lo cual muestra que la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P + M' \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

tiene nuestras propiedades deseadas, que K y $P + M$ están en $Add(V)$ y son tales que la sucesión $0 \to (X, K) \to (X, P + M') \to (X, M) \to 0$ es exacta.

Por lo tanto hemos mostrado que si M es inescindible entonces existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow V_3 \longrightarrow V_2 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con V_i en $Add(V)$ tal que

$$0 \longrightarrow (X, V_3) \longrightarrow (X, V_2) \longrightarrow (X, M) \longrightarrow 0$$

es exacta para todo X en $Add(V)$.

De este resultado se sigue trivialmente que dado cualquier Λ-módulo M finitamente generado podemos encontrar una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow V_3 \longrightarrow V_2 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con los V_i en $Add(V)$ tal que $0 \to (X, V_3) \to (X, V_2) \to (X, M) \to 0$ es exacta para todo X en $Add(V)$.

Ahora usamos esto para mostrar que $gl.dim\widehat{Add}(M) \leq 3$. Para ello supóngase que F esta en $\widehat{Add(V)}$, entonces existe un morfismo $V_1 \to V_0$ en $Add(V)$ tal que la siguiente sucesión es exacta

$$(*, V_1) \longrightarrow (*, V_0) \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

Sea $M = ker(V_1 \to V_0)$, por nuestro resultado arriba mencionado sabemos que podemos encontrar una sucesión exacta $\to V_3 \to V_2 \to M \longrightarrow 0$ con los V_i en $Add(V)$ tal que la sucesión $0 \to (X, V_3) \to (X, V_2) \to (X, M) \to 0$ es exacta para todo X en $Add(V)$. Por consiguiente podemos formar la siguiente sucesión exacta en $\widehat{Add(V)}$:

$$0 \longrightarrow (X, V_3) \longrightarrow (X, V_2) \longrightarrow (X, V_1) \longrightarrow (X, V_0) \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto $pdF \leq 3$, lo cual muestra que $gl.dim\widehat{Add(V)} \leq 3$. Por 4.13 sabemos que las categorías $\widehat{Add(V)}$ y $mod\,(End_\Lambda(V)^{op})$ son equivalentes y por consiguiente $gl.dimEnd_\Lambda(V)^{op} \leq 3$. Esto termina la demostración que si $rep.dim\Lambda/\mathbf{r}^{n-1} \leq 2$, entonces $rep.dim\Lambda \leq 3$.

Supóngase ahora que Λ es un álgebra de artin con radical cuadrado cero, entonces como $\Lambda/\mathbf{r}$ es semisimple por el teorema 4.31 tenemos que $rep.dim\Lambda/\mathbf{r} \leq 2$. Por lo tanto en este caso obtenemos que $rep.dim\Lambda \leq 3$.

■

Proposición 4.52. *Sea Λ un álgebra de artin con $gl.dim\Lambda \leq 1$. Entonces $rep.dim\Lambda \leq 3$.*

Demostración: Procederemos de manera análoga a la proposición anterior. Sean $P_1, \ldots, P_s$ un conjunto completo de Λ-módulos proyectivos inescindibles no isomorfos y $I_1, \ldots, I_s$ un conjunto completo de Λ-módulos inyectivos inescindibles no isomorfos. Sea $V = \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{i=1}^{n} I_i$ y consideremos $Add(V)$.

Supóngase que M es un Λ-módulo finitamente generado y M' un submódulo inyectivo máximal de M, entonces la suceción exacta $0 \to M' \to M \to M/M' \to 0$ tiene la propiedad que $M = M' + M/M'$ y M/M' no tiene submódulos inyectivos. Como $gl.dim \leq 1$, sabemos que la imagen de todo Λ-módulo inyectivo es inyectivo, por consiguiente sí I es un módulo inyectivo y $f : I \to M$ es un morfismo, entonces $Imf \subset M'$.

Supóngase que $gl.dim\Lambda \leq 1$, para M/M' tenemos que existe una sucesión exacta $0 \to P_1 \to P_0 \to M/M' \to 0$ con los P_i Λ-módulos proyectivos finitamente generados. Entonces tenemos la sucesión exacta $0 \to P_1 \to P_0 + M' \to M/M' + M' \to 0$. Claramente P_1 y $P_0 + M'$ están en $Add(V)$.

Ahora mostraremos que $0 \to (X, P_1) \to (X, P_0 + M') \to (X, M/M' + M') \to 0$ es exacta pra todo X en $Add(V)$, para ello es suficiente hacerlo para X inescindible.

Sea X en $Add(V)$ inescindible, entonces tenemos dos casos: X es proyectivo ó X es inyectivo. Si X es proyectivo no hay nada que hacer.

Supóngase que X es inyectivo, dado que M/M' no tiene submódulos inyectivos, entonces $(X, M/M' + M') = (X, M')$ y por consiguiente $0 \to (X, P_1) \to (X, P_1 + M') \to (X, M/M' + M') \to 0$ es exacta.

De manera similar a nuestra prueba anterior esto muestra que $gl.dim\widehat{Add(V)} \leq 3$ lo cual muestra que $gl.dimEnd_\Lambda(V)^{op} \leq 3$. Esto termina la prueba que $rep.dim\Lambda \leq 3$ si $gl.dim\Lambda \leq 1$.

■

Como hemos visto con estos resultados dichas álgebras de artin tienen la propiedad que $dim.rep\Lambda \leq 3$. Así si $dim.rep\Lambda \leq 3$ para toda álgebra de artin, entonces por los resultados vistos es este trabajo, tendríamos una clasificación de las álgebras de artin por la dimensión de representación, en tres tipos:

a) Λ es un álgebra semisimple.

b) Λ es de tipo de representación finta.

c) Λ no es de tipo de representación finta.

Bajo la hipótesis que $rep.dim\Lambda \leq 3$ para toda álgebra de artin, fue que Igusa-Todorov relacionó la dimensión de representación con la conjetura de dimensión finitistica; la cual establece que dada un álgebra de artin Λ, la dimensión proyectiva de todo Λ-módulo M se encuentra acotada.

Teorema 4.53 (Igusa-Todorov [IT05])**.** *Sea Λ un álgebra. Si $rep.dim\Lambda \leq 3$ entonces Λ satisface la conjetura de dimensión finitística.*

Hasta el año 2001, para todas las álgebras de artin Λ a las que se les calculó la dimensión de la representación, resultó que $rep.dim \leq 3$. Por lo tanto, hubo una fuerte sensación de que todas las álgebras de artin podrían tener esta propiedad. Si esto hubiera sido cierto, la conjetura de dimensión finitística y por lo tanto muchas otras conjeturas homológica hubieran sido probadas. Fue sin embargo R. Rouquier quien da a conocer el primer ejemplo de un álgebra de dimensión de representación 4.

Teorema 4.54 (R. Rouquier [Rou06])**.** *Sea V un k-espacio vectorial de dimensión n, donde k es un campo, y $\Lambda(V)$, el álgebra exterior correspondiente. Entonces, $rep.dim\Lambda(V) = 1 + n$.*

De ésta manera, podemos observar que la dimensión de representación se encuentra relacionada con la clasificación de tipo de representación de álgebras, y surgen preguntas acerca del alcance de dicho concepto, por ejemplo, del Teorema de Rouquier, es conocido que las álgebras exteriores de dimensión 3, son salvajes.

Así mismo dado que bajo equivalencia estable, por el Teorema de Dougas 1.14, la dimensión de representación se preserva, entonces tenemos conocidas algunas de sus propiedades homológicas.

Es por ello que resulta interesante en la teoría de representaciones, el estudio de la dimensión de representación de un álgebra, como hemos visto, nos brinda la oportunidad de conocer si un álgebra de artin es de tipo de representación finita, pero queda aún desconocido que es lo que exactamente mide la dimensión de representación o los alcances de dicho concepto.

Bibliografía

[AF92] F. W. Anderson and K. R. Fuller. *Rings and categories of modules*. Springer-Verlag, 1992.

[AR73] M. Auslander and I. Reiten. Stable equivalence of artin algebras. *Proc. of the Conf. on Orders. Group Rings and Related Topics*, Springer Lecture Notes 353:8–71, 1973.

[AR78] M. Auslander and I. Reiten. Representation theory of artin algebras vi. *Communications in Algebra*, 6(3):267–300, 1978.

[ARS95] M. Auslander, I. Reiten, and S. O. Smalo. *Representation theory of Artin algebras*. Cambridge studies in advanced mathematics, 1995.

[AS93] M. Auslander and O. Solberg. Relative homology and represemtation theory i. *Communications in Algebra*, 21(9):2995–3031, 193.

[Aus71] M. Auslander. Representation dimension of artin algebras. *Queen Mary College, London*, pages 1–179, 1971.

[Aus98] M. Auslander. Coherent functors. *Select works of Maurice Auslander.*, Providence, Rhode Island: AMS. Part 1:283–327, 1998.

[Bau85] R. Bautista. On the algebras of strogly unbounded representation type. *Comment Math*, 60:392–399, 1985.

[BGRS84] R. Bautista, Gabriel, P. Roiter, and L. Salmeron. Representation finite algebras and multiplicative bases. *Invent. math*, 81:217–285, 1984.

[Bon84] K. Bongartz. A criterion for finite representation type. *Math Ann.*, 269:1–12, 1984.

[CL70] H. Cárdenas and E. Lluis. *Módulos semisimples y representación de grupos finitos*. Trillas, 1970.

[CPS88] E. Cline, B. Parshall, and L. Scott. Finite-dimensional algebras and highest weight categories. *J. Reine Angew. Math*, 391:85–99, 1988.

[CR06] Ch. Curtis and I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras*. Providence, Rhode Island : AMS Chelsea, 2006.

[DF73] P. Donova and M.R. Freislich. The representation theory of finite graphs and associeted algebras. *Carleton Lecture Notes*, 5, 1973.

[DR76] V. Dlab and C.M. Ringel. Indecomposable representations of graphs and algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 173, 1976.

[Dug07] A. S. Dugas. Representation dimension as a relative homological invariant of stable equivalence. *Algebra Representation Theory*, 10:223–240, 2007.

[Gab72] P. Gabriel. Unzerlegbare dartellungen i. *Manuscripta Mathematica*, 6:71–103, 1972.

[Gab73] P. Gabriel. Indecomposable representations ii. *Symposia Mat. Inst. Naz. Alta Mat.*, 11:81–104, 1973.

[HR61] A. Heller and I. Reiner. Indecomposable representations. *Illinois J. Math.*, 5:314–323, 1961.

[IT05] K. Igusa and G. Todorov. On the finitistic global dimension conjecture for artin algebras. *Fields Inst. Commun*, 45:201–204, 2005.

[Iya03] O. Iyama. Finiteness of representation dimension. *Proc. of the AMS*, 131(4):1011–1014, 2003.

[Kro80] L. Kronecker. Algebraische reduction der scharen bilinearen formen. *Sitzungsber. Akad. Berlin*, pages 1225–1237, 1980.

[Kru63] S. A. Krugljak. Representations of the group $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ over a field of characteristic p. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 153:1253–1256, 1963.

[Lan65] S. Mac Lane. *Homological algebra*. Oliver and Boyd, 1965.

[Mit68] B. Mitchell. On teh dimension of objects and categoríes ii. *Journal of algebra*, 9:341–368, 1968.

[MV90] R. Martínez-Villa. *Introducción a la teoría clásica de representaciones de álgebras*. Monografías del Instituto de Matemáticas 23; Universidad Nacional Autónoma de México, 1990.

[Naz73] L. A. Nazarova. Representations of quivers of infinite type. *Izv. Akad. Nauk SSSR*, 37:75–91, 1973.

[Rei75] I. Reiten. Stable equivalence for some categories with radical square zero. *American Mathematical Society*, 212:333–345, 1975.

[Rie80] Ch. Riedtmann. Algebren, darstellungsk Überlagerungen und zurück. *Comment. Math.*, 55:199–224, 1980.

[Rou06] R. Rouquier. Representation dimension of exterior algebras. *Invent. Math*, 165:357–367, 2006.

[Xi00] C. C. Xi. On the representation dimension of finite dimensional algebras. *J. Algebra 226*, 1:332–346, 2000.

[Xi02] C. C. Xi. Representation dimension and quasi-hereditary algebras. *Adv. in Math*, 168:193–212, 2002.

[Yos56] T. Yoshii. On algebras of bounded representation type. *Osaka Math*, 8:51–105, 1956.

Índice alfabético