UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

EL PROBLEMA DE MINKOWSKI

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

Lic. VICTOR HUGO PATTY YUJRA

ASESOR:

Dr. PIERRE MICHEL BAYARD

MORELIA-MICHOACÁN, JUNIO 2012

Índice general

Agradecimientos

Agradecer en principio a Dios por compartir conmigo un poco de la matemática, por darme salud, por llenarme de energía y muchas ganas de seguir aprendiendo cada día.

A mis queridos papás Dionicio y Andrea por todos los consejos que siempre me han dado y con quienes mi deuda simpre será infinita; agradecer también a mis hermanos Lourdes, Wilson, Jenny y Gonzalo, con quienes he compartido tanto. A mi amada esposa Claudia y a mi adorada princesa Victoria, por su paciencia, por su gran amor y sobre todo por llenarme de felicidad.

Quiero agradecer a todos mis profesores del programa de maestría del Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas por todos los cursos que han impartido, por sus consejos y por confiar en mí; de manera especial quiero agradecer a mi asesor Dr. Pierre Bayard por todo lo que me enseñó y por su gran paciencia conmigo.

A mi profesor y gran amigo Efraín Cruz por estar siempre al pendiente de mí, a mis estimados paisanos Leonardo, Alex,... con quienes he aprendido a reducir las distancias.

Victor Patty

Morelia-Michoacán, Junio de 2012.

Introducción

El problema de Minkowski consiste en encontrar una superficie convexa, cerrada en $\mathbb{R}^3$ cuya curvatura Gaussiana es de la forma $f \circ N$ donde f es una función continua, positiva, definida en la esfera $\mathbb{S}^2$ y N es la aplicación de Gauss de la superficie. Este problema tiene una extension directa y natural a hipersuperficies cerradas convexas en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Minkowski observó que necesariamente la función f satisface la condición

$$\int_{\mathbb{S}^n} \frac{y_i}{f(y)} d\omega = 0,$$

donde las y_i son las funciones coordenadas sobre $\mathbb{S}^n$. Entonces Minkowski resolvió el problema análogo en la categoría de los poliedros, demostrando también la unicidad de la solución. A. D. Alexandrov y otros autores resolvieron el problema en general. Sin embargo, esta última solución no daba información alguna sobre la regularidad de la hipersuperficie encontrada incluso en el caso de asumir que f sea una función analítica.

En el caso dos dimensional, H. Lewy fue el primero quien probó, por el año 1936, que si f es analítica, la solución al problema de Minkowski es también analítica. Alrededor de 1953 V. Pogorelov y L. Nirenberg resolvieron el problema en la categoría diferenciable independientemente. Sus métodos eran bastante diferentes y restrictas sólo a dos dimensiones. El método de Pogorelov mostró que la (única) solución generalizada de Alexandrov es diferenciable. Esto depende de la regularidad de una solución de una ecuación de Monge-Ampère en dos dimensiones. El método de L. Nirenberg es basado en el método de continuidad produciendo una solución diferenciable directamente. Ambas soluciones dependían de unas estimaciones a priori que fueron válidas sólo para ecuaciones elípticas de dos variables.

Para dimensiones mayores que dos, el problema de regularidad ha sido resuelto independientemente por Cheng y Yau [3] y Pogorelov [9] en los años setenta, usando estimaciones a priori de soluciones de una ecuación de Monge-Ampère hasta las terceras derivadas.

El presente trabajo se encuentra dividido en tres capítulos.

En el primer capítulo, desarrollamos la solución generalizada del problema de Minkowski, en donde se hace uso de diversos resultados de la teoría de los cuerpos convexos [10]. Los principales resultados del capítulo pueden ser consultados en [9], [2].

En el segundo capítulo, presentamos la solución regular del problema de Minkowski, mas precisamente, presentamos la solución obtenida por Cheng-Yau [3], en donde se hace uso de resultados de la teoría de EDP elípticas [7], [4].

En el tercer capítulo, se expone brevemente el problema de Minkowski en el espacio de Lorentz-Minkowski. Mostramos la analogía con el espacio euclidiano y enunciamos los trabajos realizados hasta ahora para su solución.

CAPÍTULO I

Solución Generalizada del Problema de Minkowski

I.1. Preliminares

Cuerpos convexos, Hipersuperficies convexas

Un *cuerpo convexo* en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo con puntos interiores. El borde de un cuerpo convexo F es llamado una *hipersuperficie convexa*.

Sea T un cuerpo convexo acotado y F la hipersuperficie convexa asociada. Para $x \in F$ definimos un *hiperplano soporte* α que pasa por el punto x, para ser un hiperplano que deja a todos los puntos del cuerpo convexo a un lado del hiperplano. Es claro de la definición que por un punto puede pasar una familia de dichos hiperplanos.

Supongamos que 0 es un punto interior de un cuerpo convexo acotado T, podemos definir la *función soporte* asociada, $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $H(u) = sup\{< u, y >: y \in T\}$, que se encuentra bien definida pues T es acotado. Para $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ escribimos $H_u = \{x \in \mathbb{R}^n :< x, u >= H(u)\}$, el hiperplano soporte a F con vector normal exterior u.

La interpretación geométrica de la función soporte es visible cuando esta es restringida a la hiperesfera unitaria. Esto es, dado $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ tenemos que $H(u)$ es la distancia del origen al hiperplano soporte con normal exterior u. De hecho, esta fue la gran idea de Minkowski: describir un cuerpo convexo por medio de la distancia del origen a sus hiperplanos soportes.

Se puede verificar que una función soporte es convexa y homogénea positiva de grado uno. Las funciones soporte se encuentran muy íntimamente relacionadas a los cuerpos convexos. En efecto, se puede probar que dada una función homogénea positiva de grado uno y convexa, entonces existe un cuerpo convexo T para el cual la función dada es su función soporte asociada ([10], pag. 38).

Área y curvatura de una hipersuperficie convexa

Dada F una hipersuperficie convexa. Sea o un punto dentro de F. Consideremos una sucesión de poliedros P_n convergiendo (en la métrica de Hausdorff) a la hipersuperficie F. Cuando n es suficientemente grande, el punto o es un punto interior a P_n. Sea M un conjunto de Borel sobre la hipersuperficie F. Proyectamos M sobre el poliedro P_n desde el punto o. Denotemos por $S_{n\alpha}$ el área (medida de Lebesgue) de la proyección del conjunto M sobre la cara α del poliedro P_n. Definimos

$$S_n = \sum_{\alpha} S_{n\alpha}$$

donde la suma es tomada sobre todas las caras del poliedro P_n. Resulta que cuando $n \to \infty$, la sucesión S_n converge a un límite $S(M)$, que no depende del punto o ni de la sucesión de poliedros P_n [10]. Este número $S(M)$ es llamado *el área del conjunto* M sobre la hipersuperficie F.

Dado un conjunto $M \subset F$ definimos la imagen esférica de M para ser el conjunto M^* de todos los puntos $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ tal que existe $x \in M$ y un hiperplano soporte α de F en x de modo que v es el vector normal exterior a α en el punto x. Cuando el conjunto M es un conjunto de Borel, tenemos que M^* es un conjunto de Borel, por lo tanto es medible y al área de este conjunto la llamaremos *la curvatura del conjunto* M sobre la hipersuperficie, que será denotada por $\omega(M)$. La curvatura es una medida de Borel sobre F, esto es, es una función conjunto, no negativa, completamente aditiva sobre los conjuntos de Borel. Este posee una importante propiedad de convergencia. Específicamente, cuando una sucesión de hipersuperficies convexas converge a una hipersuperficie F sus curvaturas convergen débilmente a la curvatura de F.

Para una hipersuperficie F y $x \in F$, consideramos G un dominio (abierto, conexo) arbitrario en F que contiene a x. Denotemos por $S(G)$ el área del dominio G y $\omega(G)$ su curvatura. El límite, si este existe, de la razón $\frac{\omega(G)}{S(G)}$ cuando G se contrae al punto x, es llamado *la curvatura Gaussiana de F en x*.

Sea $M \subset \mathbb{S}^{n-1}$. Definimos un conjunto M' en F declarando $x \in M'$ si la imagen esférica de x vive en M. Cuando M es un conjunto de Borel, M' es también un conjunto de Borel. En este caso se encuentra bien definido su área, a la cual la denotaremos por $\sigma(M)$; se sigue de la definición que $\sigma(M) = S(M')$. Tenemos que la función σ es una medida de Borel sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ que llamaremos *función área de superficie* de F; la función área de superficie es una función conjunto definida a partir de F, es no negativa y completamente aditiva sobre el anillo de los conjuntos de Borel sobre $\mathbb{S}^{n-1}$. Como la curvatura, las funciones área de superficie de hipersuperficies convexas F_k convergiendo a la hipersuperficie F, convergen débilmente a la función área de superficie de F. Esto significa que para cada función continua f definida sobre $\mathbb{S}^{n-1}$,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f d\sigma_k = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f d\sigma,$$

donde σ_k y σ son las funciones área de superficie de F_k y F respectivamente.

Volumen Mixto y Desigualdad de Minkowski

El volumen de un cuerpo acotado por una hipersuperficie convexa puede ser fácilmente definido por medio de la función área de superficie, específicamente,

$$Vol(T) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} H d\sigma \tag{I.1}$$

donde H es la función soporte del cuerpo T y σ es su función área de superficie. Esta fórmula es obvia cuando el cuerpo es un poliedro. En el caso general, esta puede ser obtenida aproximando el cuerpo T por poliedros [10].

La *suma de Minkowski* de dos conjuntos convexos A y B es el conjunto

$$A + B = \{a + b : a \in A, \in B\} = \bigcup_{b \in B} (A + b).$$

Como algunas propiedades tenemos que la suma de Minkowski preserva convexidad y compacidad, verifica la ley de la cancelación, entre otras ([10], cap. 3).

Para cuerpos convexos $T_1, T_2, \ldots, T_k$ y números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0$, consideramos el cuerpo convexo

$$T = \lambda_1 T_1 + \cdots + \lambda_k T_k;$$

es llamado *la mezcla de los cuerpos* T_i. De la definición de función soporte de un cuerpo convexo se sigue que la función soporte del cuerpo T es dada por $H = \lambda_1 H_1 + \cdots + \lambda_k H_k$, donde H_i es la función soporte del cuerpo T_i, para cada $i = 1, \ldots, k$.

El volumen del cuerpo convexo $T = \lambda_1 T_1 + \cdots + \lambda_k T_k$ es un polinomio homogéneo de grado la dimensión n, en las variables λ_i,

$$Vol(\lambda_1 T_1 + \cdots + \lambda_k T_k) = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_k} V(T_{i_1}, T_{i_2}, \ldots, T_{i_k}) \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k},$$

cuyos coeficientes $V(T_{i_1}, T_{i_2}, \ldots, T_{i_k})$ se denominan *los volúmenes mixtos* de los cuerpos convexos $T_1, \ldots, T_k$.

Dados T_1, T_2 cuerpos convexos tenemos la siguiente fórmula para el volumen mixto

$$V(T_1, T_2, \ldots, T_2) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_{T_2} d\sigma_{T_1}$$

donde H_{T_2} es la función soporte asociada a T_2 y σ_{T_1} es la función área de superficie de T_1. De especial interés es la mezcla de dos cuerpos T_0 y $T_1 : T_v = (1 - v)T_0 + vT_1,\ 0 \leq v \leq 1$. La función $v \longmapsto \sqrt[n]{Vol(T_v)}$ es cóncava con respecto a $v :$

$$\sqrt[n]{Vol(T_v)} \geq (1 - v) \sqrt[n]{Vol(T_0)} + v \sqrt[n]{Vol(T_1)},$$

donde la igualdad vale sólo cuando T_0 y T_1 son homotéticos (el Teorema de Brunn-Minkowski). El hecho que la función $v \longmapsto \sqrt[n]{Vol(T_v)}$ sea cóncava con respecto a v nos lleva a la desigualdad de Minkowski para volúmenes mixtos

$$V^n(T_0, T_1, \ldots, T_1) \geq Vol(T_1)^{n-1} Vol(T_0)$$

valiendo la igualdad si y sólo si T_0 y T_1 son homotéticos ([10], cap. 6).

La desigualdad isoperimétrica

Para un cuerpo convexo n-dimensional K, denotemos por S_K, V_K su área de superficie y su volumen respectivamente. La desigualdad isoperimétrica entonces dice: S_K y V_K satisfacen

$$\left(\frac{S_K}{\omega_n}\right)^n \geq \left(\frac{V_K}{\kappa_n}\right)^{n-1}, \tag{I.2}$$

donde ω_n, κ_n son el área de superficie y el volumen de la bola unitaria respectivamente; además la igualdad es válida si y sólo si K es una bola. Una demostración de este hecho puede ser consultada en ([10], pag. 318) en donde se obtiene el resultado como una aplicación de la desigualdad de Minkowski.

Teorema de Selección de Blaschke

Consideremos $\mathcal{C}^n$ la familia de conjuntos compactos en $\mathbb{R}^n$ y por $\mathcal{K}^n \subset \mathcal{C}^n$, el conjunto de cuerpos convexos acotados de $\mathbb{R}^n$. Consideramos la métrica de Hausdorff δ. Se tiene que $(\mathcal{C}^n, \delta)$ es un espacio métrico completo y además que $(\mathcal{K}^n, \delta)$ es cerrado en $\mathcal{C}^n$. El teorema de selección de Blaschke dice: de cualquier sucesión uniformemente acotada de conjuntos convexos compactos se puede extraer una subsucesión convergente, que converge a un conjunto convexo compacto [10].

I.2. Problema de Minkowski generalizado y su método de resolución

Para una hipersuperficie convexa regular dos veces diferenciable F la función área de superficie admite una representación analítica simple: denotemos por N la función de Gauss de F, así $f(u) = |Jac(N)_{N^{-1}(u)}|$ es su función curvatura de Gauss en el punto con normal exterior u y luego

$$\sigma(M) = S(M') = \int_{M'} dS = \int_M |Jac(N)_{N^{-1}(u)}|^{-1} d\omega = \int_M \frac{1}{f(u)} d\omega, \tag{I.3}$$

para todo conjunto de Borel M de $\mathbb{S}^{n-1}$, donde $d\omega$ es la medida natural sobre $\mathbb{S}^{n-1}$. De aquí tenemos que la función curvatura nos determina la función área de superficie. Por lo tanto el problema de Minkowski puede ser naturalmente generalizado al problema de encontrar condiciones para que una función conjunto σ, no negativa, completamente aditiva definida sobre $\mathbb{S}^{n-1}$, sea la función área de superficie de alguna hipersuperficie convexa.

En particular cuando la función σ es igual a cero casi en todas partes, excepto en un conjunto finito de puntos $v_1, \ldots, v_m$ en el cual esta asume valores positivos $\sigma_i = \sigma(v_i)$, para $i = 1, \ldots, m$. Esto se convierte en el problema de la existencia de un poliedro con caras de áreas σ_k y con normales exteriores v_k. En efecto, si F es solución del problema de Minkowski correspondiente y si denotamos por $M_k \subset F$ el conjunto que tiene por imagen esférica el vector v_k tenemos, $\sigma_k = \sigma(v_k) = S(M_k)$; además, para que la imagen esférica de M_k sea constante igual a v_k, este debe vivir en el hiperplano ortogonal a v_k.

Minkowski resolvió el problema primero para un poliedro convexo. Luego para una función de la normal exterior $f(v)$, el construye la función conjunto σ sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ dada por (I.3). Esta función es aproximada por una función σ' que es cero en todas partes excepto en un número finito de puntos v_k, $k = 1, \ldots, m$ en los cuales este es igual a σ_k, $k = 1, \ldots, m$. Para definir la función σ', particionamos la esfera en dominios pequeños $\mathbb{S}^{n-1} = \bigcup_{k=1}^{m} g_k$. Entonces los vectores v_k y los números σ_k están determinados por las condiciones

$$\sigma_k v_k = \int_{g_k} v d\sigma, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

El siguiente paso es considerar un poliedro $P_{\sigma'}$ con caras de áreas σ_k y normales exteriores v_k. Finalmente, haciendo $\text{diam}(g_k) \to 0$, obtenemos una sucesión de poliedros que converge a una hipersuperficie convexa (teorema de selección de Blaschke). Esta hipersuperficie es la solución del problema, esto es, este tiene la curvatura preasignada $f(v)$ en cada punto con normal exterior v. Damos los detalles de la prueba en las secciones (I.4) y (I.5).

Condición necesaria para la existencia de una solución

Cuando una hipersuperficie F es una solución del problema, necesariamente, toda traslación de esta es también una solución del problema. Por lo tanto debemos imponer una cierta condición de integrabilidad sobre la función área de superficie.

Primero consideremos el caso de un poliedro. Supongamos que un poliedro P' es obtenido de P por una traslación de una pequeña distancia. Sean v_k las normales exteriores de P y s_k las áreas de las caras. Supongamos que P se traslada una distancia $\epsilon > 0$ en la dirección del vector unitario e. El desplazamiento de una cara con normal v_k ocasiona un cambio en el volumen equivalente a $s_k < v_k, e > \epsilon$. Como el volumen de P es igual al volumen de P', el cambio del total del volumen es cero. Por lo tanto,

$$\sum_k < v_k, e > s_k = 0,$$

pero ya que e es un vector arbitrario, tenemos que $\sum_k s_k v_k = 0$.

Ahora consideremos el caso general. Para una hipersuperficie convexa dada F, construimos una sucesión de poliedros convexos P_n que converge a F. La función área de superficie de P_n converge débilmente a la función área de superficie de F. Para el poliedro,

$$\sum_k s_k v_k = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} v d\sigma_n = 0.$$

Por esta razón y por la convergencia débil de la función área de superficie se sigue que, para F

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} v d\sigma = 0.$$

Así, esta condición es necesaria para la existencia de una hipersuperficie convexa con una función área de superficie σ dada. Si la hipersuperficie tiene una curvatura Gaussiana, entonces $d\sigma = \frac{d\omega}{f(v)}$ y luego la condición necesaria puede ser escrita como

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{v}{f(v)} d\omega = 0.$$

I.3. Unicidad de una solución al problema de Minkowski

Mostraremos que, si dos hipersuperficies convexas F_1 y F_2 son soluciones del problema, esto es, tienen la misma función área de superficie, entonces ellas son iguales salvo por una traslación.

Sean T_1, T_2 cuerpos convexos acotados por F_1, F_2 respectivamente. Sean H_1 y H_2 sus funciones soportes asociadas y sean σ_1, σ_2 las funciones área de superficie de F_1 y F_2 respectivamente. Tenemos que

$$V(T_1, T_2, \cdots, T_2) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_2 d\sigma_1.$$

Como $\sigma_1 = \sigma_2$, se tiene de (I.1) que

$$\frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_2 d\sigma_1 = Vol(T_2).$$

Por lo tanto, $V(T_1, T_2, \cdots, T_2) = Vol(T_2)$. Por la desigualdad de Minkowski para volúmenes mixtos

$$V^n(T_2) = V^n(T_1, T_2, \cdots, T_2) \geq Vol^{n-1}(T_2) Vol(T_1),$$

de donde $Vol(T_2) \geq Vol(T_1)$. Si intercambiamos los papeles de T_1 y T_2, tenemos la otra desigualdad y en consecuencia $Vol(T_1) = Vol(T_2)$. Pero esto nos indica que vale la igualdad en la desigualdad de Minkowski. Esto es posible siempre que F_1 y F_2 sean homotéticos, pero como tienen el mismo volumen, ellos difieren por una traslación. De aquí tenemos la unicidad del problema.

Así, la hipersuperficie convexa se encuentra completamente determinada (salvo traslación) por la función área de superficie. En particular un poliedro convexo esta únicamente determinado por las áreas de sus caras y sus normales exteriores.

I.4. Existencia de un poliedro convexo con caras de áreas preasignadas y normales exteriores dadas

Teorema I.1. *(Teorema de Minkowski) Sean* $\xi_1, \ldots, \xi_m$ *un conjunto de vectores unitarios no coplanares de* $\mathbb{R}^n$ *y sean* $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ *números positivos tales que*

$$\sum_k \sigma_k \xi_k = 0. \tag{I.4}$$

Entonces existe un poliedro convexo con caras de áreas σ_k *y exteriores normales* ξ_k*. Este poliedro es único salvo traslaciones.*

La prueba de este teorema está basada en el

Lema I.2. *(Lema del Mapeo de Alexandrov) Sean* A *y* B *dos variedades de la misma dimensión. Sea* ψ *una función de* A *en* B *que satisface lo siguiente:*

1. *Cada componente de* B *contiene imágenes de puntos de* A*.*

2. ψ *es inyectiva y continua.*

3. *Si una sucesión de puntos* b_k *de* B*, que son imágenes de puntos de* a_k *de* A *converge a un punto* b*, entonces* A *contiene un punto* a *cuya imagen es* b *y que es punto límite de la sucesión* a_k*.*

Entonces ψ *es sobreyectiva.*

Una demostración del Lema del Mapeo de Alexandrov puede ser consultada en [1].

Para usar el Lema del Mapeo en la prueba del Teorema de Minkowski, notemos algunas propiedades de poliedros satisfaciendo (I.4).

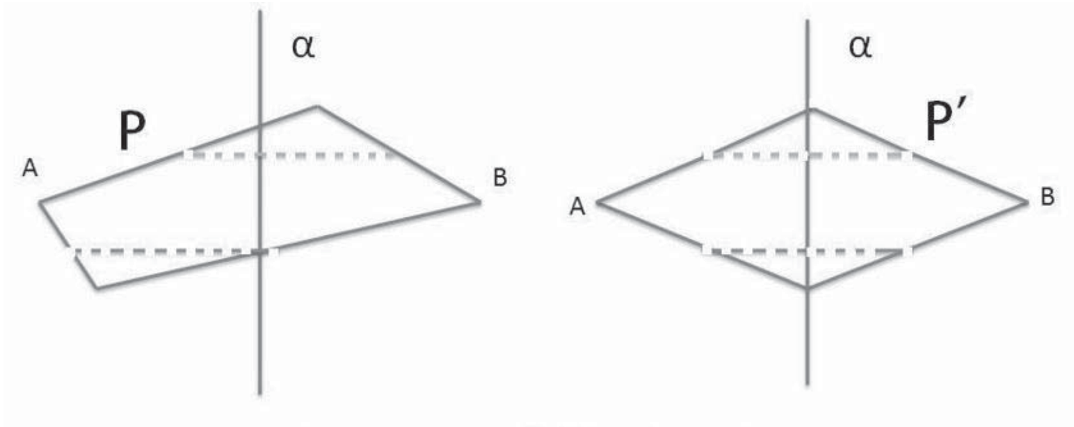
Remarca I.3. 1. *Notemos que las normales exteriores no pueden ser puntos que viven en el mismo semiespacio. Supongamos, por contradicción, que las normales exteriores viven en un* *mismo semiespacio. Entonces, ya que los vectores ξ_k son no coplanares y los σ_k son números positivos, el vector $\sum_k \sigma_k \xi_k$ es vector no nulo, lo que contradice (I.4).*

2. *Para cualesquiera vectores unitarios no coplanares satisfaciendo (I.4), existe un poliedro convexo acotado con caras cuyas normales exteriores son ξ_k. Para mostrar este resultado, tome la hiperesfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$ y considere los hiperplanos tangentes a $\mathbb{S}^{n-1}$ en los puntos finales de los vectores ξ_k. Marcamos ahora los semiespacios generados por cada uno de estos hiperplanos que contiene a la hiperesfera. La intersección de todos estos semiespacios es un poliedro convexo P. El poliedro P es acotado. Si no fuera así, existiría un rayo l emitido desde el centro de $\mathbb{S}^{n-1}$ totalmente contenido en el poliedro P. Notemos que el rayo l forma un ángulo positivo $\geq \frac{\pi}{2}$ con cada uno de los vectores ξ_k : si existiera un vector ξ_k que forme con l un ángulo $< \frac{\pi}{2}$, el hiperplano tangente en el punto final ξ_k y l se intersecarían, lo cual no es posible por la hipótesis sobre l. Por lo tanto, todos los vectores ξ_k serían puntos en el semiespacio definido por el hiperplano pasando por el centro de $\mathbb{S}^{n-1}$ y perpendicular a l, esto es, los vectores ξ_k estarían en el mismo semiespacio, pero eso no es cierto como se mostró encima.*

3. *Afirmamos ahora que el conjunto de todos los poliedros convexos con normales exteriores ξ_k tal que el área de superficie de sus caras σ_k satisface la condición*

$$0 < a \leq \sigma_k \leq b < \infty$$

es acotado, esto es, aquellos están todos contenidos en una bola de radio suficientemente grande. Supongamos que la afirmación no es cierta. Entonces entre los poliedros en cuestioń existen poliedros de diámetros arbitrariamente grandes. Sea P un tal poliedro con diámetro D y tomemos puntos A y B en P tal que $|AB| = D$. Mostraremos que la proyección de este poliedro sobre el hiperplano perpendicular a la linea AB en el punto medio, tiene área arbitrariamente pequeña cuando D es suficientemente grande. Realizamos la simetrización de Steiner [2] del poliedro P con respecto a un hiperplano α pasando por el punto medio de AB y perpendicular a AB.



Simetrización de Steiner del poliedro P
con respecto al hiperplano α

Obtenemos un nuevo poliedro P' que es simétrico con respecto al hiperplano α, tiene el mismo volumen que P y la misma área de proyección sobre α. La proyección de P' sobre el hiperplano α es una sección del poliedro P' por α, la cual denotaremos por B'. Los dos conos con vértices A, B y base común B' están contenidos en P'; por tanto, la suma de sus volúmenes no es más grande que el volumen V del poliedro P'. Así, se obtiene la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{n}Ds \leq V \tag{I.5}$$

donde s es el área de B'. Puesto que el poliedro P tiene un área de superficie uniformemente acotada $\sum_{k=1}^{m} \sigma_k \leq mb$ entonces tiene por la desigualdad isoperimétrica (I.2), un volumen uniformemente acotado. Por lo tanto, de (I.5) la proyección del poliedro P sobre el hiperplano perpendicular a la linea AB tiene un área arbitrariamente pequeña s si el diámetro D del poliedro es suficientemente grande. Pero como los vectores ξ_k son no coplanares y las áreas de superficie de las caras son acotadas por debajo $0 < a \leq \sigma_k$ el área de la proyección del poliedro P sobre cualquier hiperplano, en particular sobre el hiperplano perpendicular a la linea AB, es acotada por debajo por un número positivo. Esta contradicción prueba la afirmación.

Demostración. (del Teorema de Minkowski) Primero definamos las variedades A y B del Lema del Mapeo.

Los puntos de A son las clases de poliedros equivalentes (iguales salvo traslación) cuyas normales exteriores son $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Como cada poliedro está completamente determinado por sus números soporte (las distancias de la cara del hiperplano a un cierto punto fijo en el interior), la variedad A es de dimensión $m - n$.

Los puntos de B son los puntos del espacio euclidiano m-dimensional con coordenadas σ_k tal que $\sigma_k > 0$ y $\sum_k \sigma_k \xi_k = 0$. La dimensión de B es también $m - n$.

La función ψ en el Lema del Mapeo asigna a cada clase de equivalencia de poliedro un punto de B con coordenadas $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m$ igual a las áreas de las caras de un poliedro de esta clase, que satisfacen (por la definición de A) la relación $\sum_k \sigma_k \xi_k = 0$.

A continuación, mostraremos que se satisfacen las condiciones del Lema del Mapeo.

La primera condición del Lema del Mapeo es válida, pues B (siendo la intersección de cuerpos convexos) es convexo, luego conexo. Como fue mostrado encima, existe un poliedro con caras cuyas normales exteriores son ξ_k. Por lo tanto la preimagen de B es un subconjunto no vacío de A.

La segunda condición del lema requiere que ψ sea uno a uno, esto se sigue de la unicidad salvo traslación de un poliedro de normales exteriores ξ_k y caras de áreas σ_k. De manera evidente ψ es continua.

Finalmente verificaremos la tercera condición del lema. En el presente caso, consideremos una sucesión de poliedros $\{P^i\}$ tal que las áreas $\{\sigma_k^i\}$, $m \geq k \geq 1$, de sus caras convergen a números $\sigma_k > 0$. Tenemos que mostrar que esta sucesión de poliedros, después de ser adecuadamente trasladada, es convergente y que las áreas del poliedro límite son σ_k. Sea o el origen de coordenadas, el centro de gravedad del poliedro P^i, que puede ser siempre alcanzado por medio de una traslación. Notemos ahora que los números σ_k^i, satisfacen para $b = \text{máx}\{\sigma_k^1, \ldots, \sigma_k^N, \sigma_k + 1, m \geq k \geq 1\}$ y para $a = \text{mín}\{\sigma_k^1, \ldots, \sigma_k^N, \sigma_k, m \geq k \geq 1\}$ la condición (3) de Remarca I.3 para cierto $N \in \mathbb{N}$, por tanto, la sucesión $\{P^i\}$ se encuentra uniformemente acotada; luego del Teorema de Selección de Blaschke, $\{P^i\}$ contiene una subsucesión convergente a un cuerpo convexo que podría, en primer lugar, ser degenerado. Pero la degeneración es imposible, pues esto significa que el área de la proyección de P^i sobre un cierto hiperplano es arbitrariamente pequeña. Por lo tanto, el cuerpo P es no degenerado. Además, P es un poliedro con caras de áreas σ_k y exteriores normales ξ_k, con centro de gravedad o el origen de coordenadas. Cualquier otra subsucesión convergente P^k tiene su poliedro límite con las mismas normales exteriores, áreas y centro de gravedad, por lo tanto coincide con P. Así es probada la tercera afirmación.

Por el Lema del Mapeo, $\psi(A) = B$, esto es, para cualquier sistema de números positivos σ_k satisfaciendo

$$\sum_k \sigma_k \xi_k = 0,$$

existe un poliedro (único salvo traslación) con caras de áreas σ_k y vectores normales ξ_k. Con eso tenemos probado el teorema. $\square$

I.5. Existencia de una hipersuperficie convexa con curvatura Gaussiana dada

Teorema I.4. *(Teorema de Minkowski) Sea $K(\xi)$ una función continua positiva sobre la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ satisfaciendo la condición*

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\xi}{K(\xi)} d\omega = 0.$$

Entonces existe una hipersuperficie convexa F, única salvo traslación, para la cual $K(\xi)$ es la curvatura Gaussiana en el punto con normal exterior ξ.

Demostración. Descomponemos la hiperesfera $\mathbb{S}^{n-1}$ en dominios pequeños g_k. Definimos los números σ_k y vectores unitarios ξ_k por la relación

$$\sigma_k \xi_k = \int_{g_k} \frac{\xi}{K(\xi)} d\omega.$$

Claramente se tiene $\sum_k \sigma_k \xi_k = 0$. Luego, existe un poliedro convexo P con caras de áreas σ_k y normales exteriores ξ_k. Construyamos una sucesión de descomposiciones de la hiperesfera tal que el diámetro de los dominios g_k en la m-ésima descomposición tiende a 0 cuando $m \to \infty$.

Sea P^m un poliedro convexo construido por la m-ésima descomposición de la hiperesfera en los dominios g_k^m. Mostraremos que los poliedros están uniformemente acotados.

Sea d_m el diámetro de P^m y A, B puntos en P^m tal que $|AB| = d_m$. Denotemos por α el hiperplano pasando por el punto medio de AB perpendicular a AB. Sea Q^m la proyección del poliedro P^m sobre el hiperplano α y sea s^m el área de Q^m. Probaremos que s^m esta acotado por debajo por un cierto número s^0. Tenemos

$$\begin{aligned} s^m &= \frac{1}{2}\sum_k \sigma_k| < \xi_k, e > | \\ &= \frac{1}{2}\sum_k \left| \int_{g_k^m} \frac{< \xi, e >}{K(\xi)} d\omega \right| \end{aligned}$$

donde e es el vector unitario en la dirección AB. Como $K(\xi)$ es una función continua, tenemos que existe un $a > 0$ tal que $K(\xi) < a$. Denotemos por $M^m = \cup_{k'} g_{k'}^m$ el conjunto de los dominios g_k^m en el cual se satisface $< \xi, e >> \epsilon > 0$, entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a}\left\{\int_{M^m} \epsilon d\omega\right\} &\leq \frac{1}{2a}\left\{\int_{M^m} < \xi, e > d\omega\right\} \\ &= \frac{1}{2a}\sum_{k'}\left\{\int_{g_{k'}^m} < \xi, e > d\omega\right\} \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_k \left| \int_{g_k^m} \frac{< \xi, e >}{K(\xi)} d\omega \right| \\ &= s^m. \end{aligned}$$

Esto es, $s^m \geq \frac{\epsilon}{2a}\int_{M^m} d\omega$; cuando ϵ es suficientemente pequeño y m es suficientemente grande, los diámetros de g_k^m son pequeños y

$$\int_{M^m} d\omega > \frac{S}{4}$$

donde S es el área de la hiperesfera. Así, para m suficientemente grande, el área de la proyección de P^m sobre el hiperplano α es tal que

$$s^m > \frac{\epsilon S}{8a}. \tag{I.6}$$

Realicemos una simetrización de Steiner del poliedro P^m con respecto al hiperplano α. Entonces su volumen V^m permanece siendo el mismo y la sección Q^m por el hiperplano α es de área s^m. El volumen total de los dos conos con vertices A y B, con base común Q^m no es mayor que V^m. Por tanto,

$$V^m \geq \frac{1}{n} s^m d_m \geq \frac{1}{n} d_m \frac{\epsilon S}{8a}.$$

Mostraremos ahora que el volumen V^m esta acotado por encima. El área de superficie del poliedro P^m es

$$\sigma^m = \sum_k \sigma_k^m \leq \sum_k \int_{g_k^m} \frac{d\omega}{K(\xi)}.$$

Ya que $K(\xi)$ es estrictamente positiva, existe $b > 0$ tal que $K(\xi) > b$ y sustituyendo encima obtenemos $\sigma^m \leq \frac{1}{b} S$. Aplicando la desigualdad isoperimétrica (I.2) al poliedro P^m, de la cota del área deducimos una estimación para el volumen $V^m < V^0$. Así,

$$\frac{1}{n} d_m \frac{\epsilon S}{8a} < V^0$$

y obtenemos una estimación uniforme para d_m, esto es, una estimación que no depende de m.

Por el teorema de selección de Blaschke, la sucesión acotada uniformemente de poliedros P^m contiene una subsucesión convergente. La hipersuperficie límite P^0 no puede ser degenerada. En efecto, si lo fuera, el poliedro P^m sería para m suficientemente grande de anchura arbitrariamente pequeña en una cierta dirección t^m. Entonces la proyección de este poliedro sería de área arbitrariamente pequeña ya que d_m es acotado (ver Remarca I.3,(3)), pero como se mostró en (I.6), el área de la proyección es acotada por debajo por el número $\frac{\epsilon S}{8a}$. Así P^0 no puede ser degenerada. Como las funciones área de superficie de los poliedros P^m convergen débilmente a la función área de superficie de la hipersuperficie P^0 se tiene

$$\sigma(M) = \int_M \frac{d\omega}{K(\xi)}.$$

Por tanto, P^0 tiene curvatura Gaussiana K y tenemos probado el teorema. $\square$

CAPÍTULO II

Solución Regular del Problema de Minkowski

En este capítulo resolveremos el problema de Minkowski en la categoría diferenciable, esto es, además de suponer que la función $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ sea continua y positiva, supondremos también que es diferenciable, de cierta clase de diferenciabilidad. En esta situación, se mostrará la existencia de una única (salvo traslación) hipersuperficie cerrada, convexa y regular M, para la cual f es su función curvatura de Gauss.

En este ámbito, el problema de Minkowski es equivalente a resolver una ecuación diferencial parcial (EDP) elíptica de segundo orden totalmente no lineal, mas precisamente, una ecuación de Monge-Ampère sobre $\mathbb{S}^n$. Presentamos la solución obtenida por Cheng-Yau [3] vía el método de continuidad.

II.1. Escenario del problema de Minkowski

El problema de Minkowski, consiste en encontrar una hipersuperficie regular, cerrada y convexa en $\mathbb{R}^{n+1}$, cuya curvatura Gaussiana es una función $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ positiva, diferenciable que se encuentra dada.

Supongamos que M es una hipersuperficie regular cerrada y convexa en $\mathbb{R}^{n+1}$. Denotemos por $n_M : M \to \mathbb{S}^n$ la función de Gauss de M. Definamos la función $K : M \to \mathbb{R}$, dada por la expresión

$$K(x) = \det(d(n_M)_x),$$

la función curvatura de Gauss. Por el Teorema de Hadamard[1] tenemos que n_M es un difeomorfismo, K es una función positiva y diferenciable. Luego $K \circ n_M^{-1} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ es una función definida en $\mathbb{S}^n$ positiva y diferenciable.

El problema de Minkowski, interpretado desde este punto de vista es el siguiente: dada una función real positiva f sobre $\mathbb{S}^n$ diferenciable, encuentre una hipersuperficie regular, cerrada y convexa M tal que $f(y) = K \circ n_M^{-1}(y)$ para cada $y \in \mathbb{S}^n$.

Mostremos ahora que en este contexto la condición necesaria de resolución del problema de Minkowski es una consecuencia sencilla del teorema de cambio de variables.

Supongamos que se da la igualdad $f(y) = K \circ n_M^{-1}(y)$; para $n_M(x) = y \in \mathbb{S}^n$ e $i = 1, \ldots, n+1$ tenemos $y_i =< n_M(x), e_i >$ y aplicando el teorema de cambio de variable,

$$\int_{\mathbb{S}^n} \frac{y_i}{f(y)} = \int_M \frac{< n_M(x), e_i >}{f(n_M(x))} |\det(d(n_M)_x)| = \int_M < n_M(x), e_i >,$$

pues $f(n_M(x)) = K \circ n_M^{-1}(n_M(x)) = K(x) = \det(d(n_M)_x) > 0$. Se sigue del teorema de la

[1] Vea por ejemplo: Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. III, pag. 66.

divergencia,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^n} \frac{y_i}{f(y)} &= \int_M < n_M(x), e_i > \\ &= \int_{int(M)} div(e_i) = 0,\end{aligned}$$

para cada $i = 1, \ldots, n+1$. Por lo tanto, la condición

$$\int_{\mathbb{S}^n} \frac{y}{f(y)} = 0$$

debe ser impuesta a la función f en el problema de Minkowski.

II.2. El problema de Minkowski como una EDP

Denotemos por $h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, la función soporte de la hipersuperficie M, esto es,

$$h(u) =< u, n_M^{-1}(u) >,$$

para cada $u \in \mathbb{S}^n$. Fijado $u \in \mathbb{S}^n$, u es normal a la hipersuperficie M en el punto $n_M^{-1}(u) = x$ y $h(u)$ representa la distancia (con signo) del origen al hiperplano soporte que pasa por $x \in M$ con normal u. Buscamos describir x en términos de u a partir de la función soporte h. El hiperplano soporte que pasa por x y con normal u tiene por ecuación

$$\mathcal{H}_u = \left\{ z \in \mathbb{R}^{n+1} / < z, u >= h(u) \right\}.$$

Observemos que M, parametrizada por $x(u)$ es la superficie envolvente de la familia de hiperplanos $\{\mathcal{H}_u\}_{u \in \mathbb{S}^n}$. Tenemos las dos relaciones

$$\begin{cases} < x, u >= h(u) \\ < x, v >= dh_u(v), \quad \forall v \in T_u\mathbb{S}^n \end{cases}$$

donde la segunda ecuación se obtuvo a partir de la primera por medio de una diferenciación. Para conseguir la descripción buscada primero escribamos la igualdad

$$x = proy_u(x) + proy_{u^\perp}(x),$$

donde $proy_u$ y $proy_{u^\perp}$ denotan las proyecciones ortogonales sobre la recta generada por u y sobre el hiperplano $u^\perp$ respectivamente. De manera directa obtenemos $proy_u(x) =< x, u > u = h(u)u$; por otra parte, para cada $v \in T_u\mathbb{S}^n$

$$< proy_{u^\perp}(x), v >=< x, v >= dh_u(v) =< \nabla h(u), v >,$$

y se sigue que $proy_{u^\perp}(x) = \nabla h(u)$. De esta manera $x = h(u)u + \nabla h(u)$.

Luego obtenemos una parametrización de la hipersuperficie M,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_h : \mathbb{S}^n &\to M \\ u &\to h(u)u + \nabla h(u). \end{aligned}$$

Esta es la inversa de la función de Gauss, pues, para $u \in \mathbb{S}^n$ se tiene $\mathcal{X}_h(u) = x \in M$, el punto por el cual pasa el hiperplano soporte cuya normal es u. En particular, la regularidad de M está determinada por la regularidad de su función soporte h. Por lo tanto, la curvatura de Gauss viene dada por la expresión

$$f(u) = \det d(n_M)_{(n_M)^{-1}(u)} = \frac{1}{\det d(\mathcal{X}_h)_u}.$$

Diferenciando la función $\mathcal{X}_h$ en el punto u,

$$d(\mathcal{X}_h)_u(v) = dh_u(v)u + h(u)v + d(\nabla h)_u(v),$$

para todo $v \in T_u\mathbb{S}^n$. La parte tangente a $\mathbb{S}^n$ del último término de la expresión es el $(1, 1)$ tensor Hessiano asociado a la función h, esto es, para $v, w \in T_u\mathbb{S}^n$, $< d(\nabla h)_u(v), w >= Hessh_u(v, w)$.

Luego

$$\begin{aligned}
< d(\mathcal{X}_h)_u(v), w > &= < dh_u(v)u, w > + < h(u)v, w > + Hessh_u(v, w) \\
&= dh_u(v) < u, w > + h(u) < v, w > + Hessh_u(v, w) \\
&= h(u) < v, w > + Hessh_u(v, w).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en una base ortonormal de $\mathbb{S}^n$, tenemos $\det(h_{ij} + h\delta_{ij}) = \frac{1}{f(u)}$, donde los coeficientes h_{ij} son las componentes del Hessiano de h sobre $\mathbb{S}^n$. Esta es una ecuación de Monge-Ampère sobre $\mathbb{S}^n$. Recíprocamente, si suponemos que h es una función convexa que satisface la EDP de encima, podemos definir la parametrización $\mathcal{X}_h$ como antes y ver que $M = \mathcal{X}_h(\mathbb{S}^n)$ es una superficie regular, cerrada convexa cuya función soporte es h y cuya curvatura Gaussiana es f.

En resumen el problema de Minkowski es equivalente a la resolución de la ecuación diferencial parcial (escrita de manera covariante, donde g denota la métrica canónica de $\mathbb{S}^n$)

$$\det{}_g(\nabla dh + hg) = \frac{1}{f(u)} \tag{II.1}$$

sobre la esfera $\mathbb{S}^n$, sujeta a la condición $\int_{\mathbb{S}^n} \frac{x_i}{f} = 0$, para todas las funciones coordenadas $x_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Como buscamos solución convexa, pedimos también que el tensor $\nabla dh + hg$ sea definido positivo en todo punto de $\mathbb{S}^n$.

II.3. Solución de la EDP

Para resolver el problema, usaremos el método de continuidad usado por L. Nirenberg y que consiste en introducir nuestro problema en un familia de problemas dependiendo de un parámetro, de los cuales conozcamos que para algunos casos particulares ellos son solubles y luego aplicar un argumento de conexidad.

Consideremos la familia de funciones diferenciables definidas sobre $\mathbb{S}^n$, $\frac{1}{f_t} = \frac{t}{f} + (1-t)1$, para $0 \leq t \leq 1$. Claramente estas funciones son positivas, diferenciables y satisfacen la condición $\int_{\mathbb{S}^n} \frac{x_i}{f_t} = 0$ para cada $i = 1, \ldots, n+1$.

Entonces consideramos el problema E_t:

$$\det{}_g(\nabla dh + hg) = \frac{1}{f_t}$$

sobre $\mathbb{S}^n$, sujeto a la condición

$$\int_{\mathbb{S}^n} \frac{x_i}{f_t} = 0$$

para todas las funciones coordenadas $x_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

Sea $0 < \alpha < 1$. Consideremos el conjunto

$$S_\alpha = \left\{ t \in [0,1] : E_t \text{ tiene solución } h \in C^{4,\alpha}(\mathbb{S}^n), (\nabla dh + hg) > 0 \right\}.$$

Observemos que la linealización del operador diferencial $h \to \det_g(\nabla dh + hg)$, se encuentra íntimamente relacionada con la ecuación de Poisson $\triangle u = f$, para la cual se sabe que aun siendo $f \in C^0$ las soluciones u no necesariamente son de clase C^2; sin embargo eso no ocurre cuando los espacios de funciones son los espacios Hölder: para $f \in C^{0,\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$, la solución u es de clase C^2, y de hecho de clase $C^{2,\alpha}$. De ahí la elección del espacio de Hölder en la definción del conjunto de parámetros S_α.

Notemos ahora que $0 \in S_\alpha$: si $f_0 \equiv 1$, $h \equiv 1$ es solución. El método consiste en dos etapas. El primero es mostrar que S_α es abierto en $[0,1]$ y el segundo es mostrar que S_α es cerrado en $[0,1]$. De ahí por la conexidad de $[0,1]$, ya que $S_\alpha \neq \emptyset$ tendremos que $S_\alpha = [0,1]$ y así el problema E_t será soluble, en particular, será soluble para $t = 1$ y el problema de Minkowski estará resuelto.

S_α es un conjunto abierto

Supongamos que $t_0 \in S_\alpha$, queremos probar que existe un $\epsilon > 0$, tal que $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset S_\alpha$. Para $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, ϵ pequeño, queremos probar que la ecuación $\det_g(\nabla dh + hg) = f_t^{-1}$ tiene solución.

Queremos aplicar el teorema de la función implícita al operador $F(h) := \det_g(\nabla dh + hg)$, en la solución h de E_{t_0}. Sea L_h el operador linealizado de F en h. Entonces para todas las funciones diferenciables u sobre $\mathbb{S}^n$ tenemos

$$\begin{aligned} L_h(u) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} F(h+su) \\ &= \sum_{i,j} c_{ij}(u_{ij}+ug_{ij}) \end{aligned}$$

donde (c_{ij}) es la matriz de cofactores de la matriz $(h_{ij}+hg_{ij})$. Esta fórmula proviene fácilmente del desarrollo

$$\det(A+sU) = \det(A) + s\, tr(CU) + \cdots + s^n \det(U)$$

donde C es la matriz de cofactores de A.

Se tiene que (ver [3]), para $u, v \in C^2(\mathbb{S}^n)$,

$$\int_{\mathbb{S}^n} uL_h(v) = \int_{\mathbb{S}^n} vL_h(u). \tag{II.2}$$

Afirmamos ahora, para cualquier función u de clase $C^{4,\alpha}$ definida sobre la esfera y para cualquier función coordenada x_i, que

$$\int_{\mathbb{S}^n} x_i \det{}_g(\nabla du + ug) = 0. \tag{II.3}$$

En efecto, $L_i(u) = \int_{\mathbb{S}^n} x_i \det_g(\nabla du + ug)$ define un funcional diferenciable sobre el espacio de Banach de funciones $C^{4,\alpha}(\mathbb{S}^n)$. La derivada de Fréchet de este funcional en u y aplicada a $v \in C^{4,\alpha}(\mathbb{S}^n)$ está dada por

$$d(L_i)_u(v) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} L_i(u+sv) = \int_{\mathbb{S}^n} x_i L_u(v).$$

Observemos primero que $L_u(x_i) = 0$, usando la unicidad del problema. Pensemos que u es la función soporte de un cuerpo convexo; la función $v = u + tx_i$ define otra función soporte, que nos dará una traslación del cuerpo convexo inicial. Tenemos que $F(u) = F(v)$ ya que los dos cuerpos tienen la misma curvatura de Gauss, y por lo tanto

$$F(v) = F(u+tx_i) = F(u);$$

de ahí, $L_u(x_i) = \frac{d}{dt}F(u + tx_i) = 0$. Usando la igualdad (II.2) deducimos que

$$\begin{aligned} d(L_i)_u(v) &= \int_{\mathbb{S}^n} x_i L_u(v) \\ &= \int_{\mathbb{S}^n} v L_u(x_i) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que la derivada de Fréchet del operador L_i es cero, así que L_i es constante, pero ya que $L_i(h) = 0$ para h solución del problema (por ejemplo para $h \equiv 1$, solución de E_0) tenemos que $L_i \equiv 0$, lo que completa la prueba de (II.3).

Ahora si estamos en una posición para mostrar que S_α es un conjunto abierto. Sean

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= C^{4,\alpha}(\mathbb{S}^n) \\ \mathcal{B}_2 &= \left\{ f \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^n) / \int_{\mathbb{S}^n} x_i f = 0, i = 1, \ldots, n+1 \right\}. \end{aligned}$$

Además, sea $\mathcal{U} = \{h \in \mathcal{B}_1 / (\nabla dh + hg) > 0\}$, abierto de $\mathcal{B}_1$. Entonces, de acuerdo con (II.3) podemos considerar la transformación

$$\begin{aligned} F : \mathcal{U} \subset & \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2 \\ & u \to \det{}_g(\nabla dh + hg). \end{aligned}$$

Afirmamos que si h es la función soporte de alguna hipersuperficie estrictamente convexa tal que $h > 0$ sobre $\mathbb{S}^n$, entonces para funciones f en una vecindad de $F(h) = \det_g(\nabla dh + hg)$ (en la topologa de $\mathcal{B}_2$) podemos siempre resolver la ecuación $F(u) = f$, donde u es también la función soporte de alguna hipersuperficie estrictamente convexa. Para eso, es suficiente verificar que el operador linealizado de F en h, L_h, es sobreyectivo. En efecto, de ahí tendremos que F es una función abierta en una vecindad de h.

Primero encontraremos el núcleo de L_h.

Lema II.1. *(Cheng-Yau) Sea u una función en $C^2(\mathbb{S}^n)$ tal que $L_h(u) = 0$, donde $(\nabla dh + hg) > 0$.*

Entonces para algunas constantes $a_1, \ldots, a_{n+1}$

$$u = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i.$$

La demostración de este lema puede ser encontrada en [3].

Puesto que $x_i \in Ker(L_h)$, para cada $i = 1, \ldots, n+1$, el lema nos dice que

$$Ker(L_h) = span\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}. \tag{II.4}$$

Se sigue de (II.2), (II.4) que el núcleo del adjunto de L_h es el espacio de funciones lineales restringidas a $\mathbb{S}^n$.

Finalmente probaremos la sobreyectividad del operador linealizado L_h.

Sea $H^m(\mathbb{S}^n)$ el espacio de Sobolev de funciones L^2 definidas sobre $\mathbb{S}^n$ con derivadas L^2 hasta el orden m. Entonces L_h puede ser considerado como una función lineal acotada de $H^{k+2}(\mathbb{S}^n)$ a $H^k(\mathbb{S}^n)$.

Entonces nos preguntamos, para $f \in H^k(\mathbb{S}^n)$ dada, cuando la ecuación $L_h(u) = f$ tiene solución, donde

$$L_h : H^{k+2}(\mathbb{S}^n) \to H^k(\mathbb{S}^n)$$

se encuentra definida como encima. La respuesta a esta pregunta no las dá el teorema de Alternativa de Fredholm (ver [4], pag. 303), que nos dice: la ecuación $L_h(u) = f$ tiene una solución $u \in H^{k+2}(\mathbb{S}^n)$ si y sólo si $f \in \ker(L_h^*)^\perp$, esto es, si y sólo si $\int_{\mathbb{S}^n} x_i f = 0$, para cada $i = 1, \ldots, n+1$. Por lo tanto, concluimos que el operador

$$L_h : H^{k+2}(\mathbb{S}^n) \to \{f \in H^k(\mathbb{S}^n) : \int_{\mathbb{S}^n} x_i f = 0, i = 1, \ldots, n+1\}$$

es sobreyectivo. Finalmente, cuando $f \in C^{k,\alpha}(\mathbb{S}^n)$, con $k \geq 2$, $f \in H^k(\mathbb{S}^n)$ luego existe $u \in H^{k+2}(\mathbb{S}^n)$ solución de $L_h(u) = f$. Con ayuda de la teoría de regularidad de ecuaciones lineales elípticas ([7]) concluimos que $u \in C^{k+2,\alpha}(\mathbb{S}^n)$.

S_α es un conjunto cerrado

Estimaciones a priori

Presentamos primero las estimaciones a priori para una solución h de la EDP (II.1).

Estimaciones C^0 (Cheng-Yau) El siguiente lema afirma que el diámetro exterior de una hipersuperficie convexa, cerrada en $\mathbb{R}^{n+1}$ de clase C^4 se encuentra acotado superiormente.

Lema II.2. *Sea $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un hipersuperficie convexa, cerrada de clase C^4. Sea K su función curvatura de Gauss definida sobre $\mathbb{S}^n$. Entonces el diámetro extrínseco L de M puede ser estimado superiormente por la cantidad*

$$c_n \left(\int_{\mathbb{S}^n} \frac{1}{K} \right)^{\frac{n}{n-1}} \left[\inf_{u \in \mathbb{S}^n} \int_{\mathbb{S}^n} \frac{\max(0, < u, w >)}{K(w)} \right]^{-1}$$

donde c_n es una constante positiva dependiendo sólo de n.

El siguiente lema muestra que los diámetros interiores de M también se encuentran acotados inferiormente por una constante positiva.

Lema II.3. *Con las hipótesis del lema anterior, podemos encontrar siempre una constante positiva $\widetilde{c}_n$ tal que*

$$r \geq \widetilde{c}_n \left(\int_{\mathbb{S}^n} \frac{1}{K} \right)^{-n} \left[\inf_{y \in \mathbb{S}^n} \int_{\mathbb{S}^n} \frac{\max(0, < y, x >)}{K(x)} \right]^{n}$$

donde r es el diámetro interior de M y $\widetilde{c}_n$ es una constante que sólo depende de n.

Estimaciones C^1 (Cheng-Yau) Por las estimaciones C^0 debidas a Cheng y Yau tenemos que existe una constante $c > 0$ que satisface $0 < \frac{1}{c} < h < c < \infty$.

Sea $x_0 \in \mathbb{S}^n$, donde la función $h^2 + |\nabla h|^2$ alcanza su valor máximo, esto es,

$$\max_{\mathbb{S}^n} \left(h^2 + |\nabla h|^2 \right) = h^2(x_0) + |\nabla h(x_0)|^2.$$

Por tanto en x_0, $d(h^2 + |\nabla h|^2) = 0$, es decir, para todo i, $hh_i + h^j h_{ij} = 0$ donde $h_i = g_{ij}h^j$; luego

$$\left(\; h_{ij} + hg_{ij} \; \right) \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix} = 0,$$

pero $(h_{ij} + hg_{ij}) > 0$, entonces $\nabla h(x_0) = 0$. Por lo tanto, $\max_{\mathbb{S}^n} (h^2 + |\nabla h|^2) = h^2(x_0)$.

Finalmente,

$$\max_{\mathbb{S}^n} \left(h^2 + |\nabla h|^2\right) = h^2(x_0) \leq \max_{\mathbb{S}^n} h^2,$$

lo que implica

$$\max_{\mathbb{S}^n} |\nabla h| \leq \max_{\mathbb{S}^n} h < c.$$

Estimaciones C^2 (Pogorelov) A continuación presentamos una estimación (que ahora es estándar) debida a Pogorelov. Inicialmente consideremos soluciones diferenciables de la ecuación de Monge-Ampère

$$\det(D^2u) = f(x) \qquad en\ \Omega \tag{II.5}$$

donde Ω es un dominio uniformemente convexo y acotado en $\mathbb{R}^n$ con borde $C^{3,\alpha}$. Asuma que $f \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$ y f satisface

$$c_0 \leq f \leq c_1, \tag{II.6}$$

para algunas constantes positivas c_0, c_1.

Lema II.4. *Sea $u \in C^4(\Omega)$ una solución convexa de (II.5). Supongamos que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Entonces*

$$[-u(x)]\, D^2u(x) \leq C(1 + M)$$

donde C depende de n, $\sup_\Omega |u|$ y $||\log f||_{C^{1,1}}$, pero es independiente de $M = \sup_\Omega |Du|^2$.

Idea de la demostración. La prueba de este lema es debida a Pogorelov. Considera la función test $w(x,\xi) = \rho(x)\eta\left(\frac{1}{2}|Du|^2\right) u_{\xi\xi}$, sobre $\Omega \times \mathbb{S}^n$, donde $\rho = -u$, $\eta(t) = \left(1 - \frac{t}{2M}\right)^{-\frac{1}{8}}$. La función w alcanza su máximo en un punto $x = x_0$ y en una dirección $\xi = e_1$.

Después de una serie de cálculos usando la ecuación de Monge-Ampère y las condiciones que traducen que w es maximal en (x_0, e_1), se obtiene que $w(x,\xi) \leq w(x_0, e_1) \leq C(1+M)$. $\square$

Las estimaciones de la segunda derivada y la condición (II.6) implican que el operador de Monge-Ampère es uniformemente elíptico. Por lo tanto, de las estimaciones interiores para las terceras derivadas de Calabi y las estimaciones de Schauder para ecuaciones lineales elípticas, uno obtiene estimaciones para las derivadas de mayor orden de las soluciones de la ecuación de Monge-Ampère, siempre que f sea suficientemente diferenciable.

Remarca II.5. *Por 1980 Evans y Krylov independientemente establecieron estimaciones interiores fundamentales $C^{2,\alpha}$, el teorema de regularidad de Evans-Krylov (ahora bien conocido), para ecuaciones uniformemente elípticas siempre que $f \in C^{1,1}$.*

Ahora tenemos el siguiente teorema de regularidad:

Teorema II.6. *Sea u una solución estrictamente convexa de (II.5). Supongamos que $f > 0$ y $f \in C^{1,1}(\Omega)$. Entonces $u \in C^{3,\alpha}(\Omega)$ para cualquier $\alpha \in (0,1)$. Si además $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ para $k \geq 2$ y $\alpha \in (0,1)$, entonces $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$.*

Actualmente existen estimaciones para una solución h de nuestra ecuación (II.1) (ver [6]) análogas a las obtenidas para la ecuación (II.5):

$$||h||_{C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^n)} \leq C.$$

Finalmente con la ayuda de todos estos resultados mostraremos que el conjunto S_α es cerrado.

Consideremos una sucesión $t_n \in S_\alpha$ tal que $t_n \to t_0 \in [0,1]$. Debemos probar que $t_0 \in S_\alpha$. Sean $h^{t_n} \in C^{4,\alpha}(\mathbb{S}^n)$ correspondientes funciones soportes soluciones del problema. Las estimaciones a priori $C^{2,\alpha}$ nos indican que existe una constante $P > 0$ tal que

$$||h^{t_n}||_{C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^n)} \leq P$$

y ya que $C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^n) \hookrightarrow C^2(\mathbb{S}^n)$ es compacta, existe una subsucesión que converge a una $h \in C^2$.

Esta es la solución del problema correspondiente a t_0. Nuevamente, cuando la función f es suficientemente diferenciable, obtenemos que h es suficientemente diferenciable por el teorema II.6.

Por lo tanto tenemos resuelto el problema de Minkowski en $\mathbb{R}^{n+1}$:

Teorema II.7. *Sea f una función positiva en $C^{k,\alpha}$ con $k \geq 2$. Supongamos que $\int_{\mathbb{S}^n} x_i f^{-1} = 0$ para todas las funciones coordenadas x_i. Entonces podemos resolver la ecuación $\det_g(\nabla dh + hg) = f^{-1}$, donde la solución pertenece a $C^{k+2,\alpha}(\mathbb{S}^n)$ para todo $1 > \alpha > 0$. Por tanto, podemos encontrar una hipersuperficie regular, cerrada y convexa en $\mathbb{R}^{n+1}$ cuya función soporte es dada por h y cuya función curvatura de Gauss-Kronecker es f. Además, cualesquiera dos de tales hipersuperficies necesariamente coinciden salvo una traslación.*

CAPÍTULO III

El problema de Minkowski en el espacio de Lorentz-Minkowski

III.1. Presentación del problema

Denotemos por $\mathbb{R}^{n,1}$ el *espacio de Lorentz-Minkowski,* esto es, el espacio vectorial $\mathbb{R}^{n+1}$ con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ equipado con la métrica de Minkowski

$$< \cdot, \cdot >= dx_1 \otimes dx_1 + \ldots + dx_n \otimes dx_n - dx_{n+1} \otimes dx_{n+1}. \tag{III.1}$$

Una *hipersuperficie de tipo espacio* M en $\mathbb{R}^{n,1}$ es una subvariedad 1-codimensional cuya métrica inducida $g :=< \cdot, \cdot > |_M$ es una métrica Riemanniana.

Sea M una hipersuperficie de tipo espacio y estrictamente convexa. En lo que sigue, daremos una descripción de la función de Gauss asociada a M.

Sea $x \in M$. Escojamos $e_1, ..., e_n, e_{n+1}$ marco local de campos vectoriales sobre M tal que

$$e_1(x), ..., e_n(x) \in T_xM$$

y $e_{n+1}(x)$ es el vector normal unitario a M en el punto x, de última coordenada positiva. $e_{n+1}(x)$ es de tipo tiempo[1].

Sabemos que el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n(-1)$ puede ser canónicamente incrustado en $\mathbb{R}^{n,1}$ como la hipersuperficie $< x, x >= -1$, $x_{n+1} > 0$. Por una traslación paralela al origen podemos pensar a $e_{n+1}(x)$ como un punto en $\mathbb{H}^n(-1)$. Por lo tanto, tenemos definida la función de Gauss de la hipersuperficie de tipo espacio M para ser la función

$$\begin{aligned} G : M &\longrightarrow \mathbb{H}^n(-1) \\ x &\longmapsto e_{n+1}(x) \quad . \end{aligned}$$

Notemos que al ser M estrictamente convexa, G es un difeomorfismo sobre su imagen $G(M)$. Si tomamos el hiperplano $\alpha := \{(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 1\}$ y consideramos la proyección de $\mathbb{H}^n(-1)$ al origen $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ en α, entonces $\mathbb{H}^n(-1)$ es mapeado difeomorficamente sobre la bola abierta unitaria

$$B^n(1) = \left\{ (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 < 1 \right\}$$

vía la aplicación

$$\begin{aligned} p : \mathbb{H}^n(-1) &\longrightarrow B^n(1) \\ (x_1, ..., x_n, x_{n+1}) &\longmapsto (\xi_1, ..., \xi_n) \end{aligned}$$

donde

$$\xi_i = \frac{x_i}{x_{n+1}}, \quad x_{n+1} = \sqrt{1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

A la función $p \circ G : M \to B^n(1)$ la llamaremos también la función de Gauss de M y por simplicidad la denotaremos por G.

[1] Un vector $v \in \mathbb{R}^{n,1}$ se dice de *tipo tiempo* si satisface $< v, v >< 0$.

Por lo tanto, si denotamos por $K : M \to \mathbb{R}$ la curvatura de Gauss de la hipersuperficie M, por medio de la inversa de G obtenemos la función positiva $K \circ G^{-1} : G(M) \subset B^n(1) \to \mathbb{R}$.

El problema de Minkowski es el recíproco del argumento anterior: dada una función positiva $\eta : B^n(1) \to \mathbb{R}$, ¿es posible encontrar una hipersuperficie de tipo espacio y estrictamente convexa M con función de Gauss G que satisfaga $K \circ G^{-1} = \eta$, esto es, para $u \in B^n(1)$, $\eta(u)$ es igual a la curvatura de Gauss de M en el punto $G^{-1}(u)$?

También podemos considerar el problema de Minkowski en su forma más general: dado un dominio $\Omega \subset B^n(1)$ y una función $\eta > 0$ positiva sobre Ω, ¿es posible encontrar una hipersuperficie estrictamente convexa de tipo espacio cuya imagen bajo su función de Gauss es Ω y cuya curvatura de Gauss en $G^{-1}(y)$ es dado por $\eta(y)$ para $y \in \Omega$, donde $G : M \to G(M) = \Omega$ es la función de Gauss de M?

III.2. El problema de Minkowski como una EDP

Supongamos que $M = graf(f)$ donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, estrictamente convexa, y de tipo espacio, i.e. tal que $|Df(x)| < 1$ para todo x en $\mathbb{R}^n$. En este caso, podemos tomar el marco global de campos vectoriales sobre M definidos por

$$e_1 = \left(1, 0, ..., 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}\right), e_2 = \left(0, 1, ..., 0, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right), ..., e_n = \left(0, ..., 0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Entonces el campo normal unitario de tipo tiempo e_{n+1} está dado por

$$e_{n+1} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}, 1\right)}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial x_i})^2}}. \tag{III.2}$$

La métrica inducida y la segunda forma fundamental de M están dadas por

$$g_{ij} = g(e_i, e_j) = \delta_{ij} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}, \tag{III.3}$$

y

$$h_{ij} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2}}. \tag{III.4}$$

Por un cálculo directo tenemos

$$\det(g_{ij}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2. \tag{III.5}$$

El determinante de la matriz $(\sum_k g^{ik} h_{kj})_{ij}$ es la curvatura de Gauss de M, donde

$$g^{ij} = \delta_{ij} + \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}}{1 - \sum_{i=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2}$$

es la inversa de la matriz (g_{ij}) dada en (III.3).

Finalmente, la función curvatura de Gauss de M está dada por

$$K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)}{\left(1 - \sum_{i=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 \right)^{\frac{n+2}{2}}}. \tag{III.6}$$

Escribamos ahora la aplicación de Gauss de M en las coordenadas naturales $x \in \mathbb{R}^n \simeq (x, f(x)) \in M$: por (III.2), $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{H}^n(-1) \simeq B^n(1)$ está dada por

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x), 1 \right)}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_i}(x))^2}} \in \mathbb{H}^n(-1) \\ &\simeq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) = Df(x) \in B^n(1). \end{aligned}$$

Definamos entonces nuevas coordenadas $\xi_i := \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, e introducimos la transformación de Legendre de la función f, que es el análogo de la función soporte de M.

Como M es una hipersuperficie de tipo espacio, la matriz (g_{ij}) es definida positiva y tenemos de

(III.5)

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 < 1. \tag{III.7}$$

El dominio de la transformación de Legendre de f es por definición

$$\Omega = \left\{ (\xi_1, ..., \xi_n) : \xi_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

y de la teoría de los cuerpos convexos sabemos que Ω es un conjunto convexo. Definamos ahora la transformación $u : \Omega \to \mathbb{R}$ para ser

$$u(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i - f.$$

De (III.7) tenemos $\Omega \subset B^n(1)$. La ecuación (III.6) puede ser escrita en términos de ξ_i como sigue

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right) = \frac{1}{K}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{-\frac{n+2}{2}}. \tag{III.8}$$

Reciprocamente, supongamos que tenemos definida una función diferenciable $u : \Omega \to \mathbb{R}$ estrictamente convexa que satisface la ecuación (III.8), donde Ω es un dominio en $B^n(1)$; introducimos las coordenadas $x_i = \dfrac{\partial u}{\partial \xi_i}$ y la transfomación de Legendre de u dada por

$$f^*(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} - u,$$

con dominio dado por $\Omega^* = \left\{ (x_1, ..., x_n) : x_i = \dfrac{\partial u}{\partial \xi_i}(\xi), \xi \in \Omega \subset B^n(1) \right\}$, conseguimos así una hipersuperficie regular de tipo espacio $M = graf(f^*)$ cuya curvatura Gaussiana es K.

En resumen: para una hipersuperficie de tipo espacio $M = graf(f)$ vimos que la transformada de Legendre u de la función f satisface la ecuación de Monge-Ampère (III.8) sobre el dominio $\Omega \subset B^n(1)$. Conversamente, de una solución u de la ecuación (III.8) podemos construir una hipersuperficie de tipo espacio, como el gráfico de su transformación de Legendre.

En el año 1995, Li [8] con ayuda de la teoría de ecuaciones de Monge-Ampère, resuelve el problema suponiendo $K \equiv 1$ y que $\Omega = B^n(1)$. Además, también resolvió el problema para una función K arbitraria que satisface cierta condición de regularidad sobre $\partial B^n(1)$.

En el año 2006, Guan, Jian y Schoen [5] inspirados en el trabajo de Li [8], consideran el dominio $B^n_+(1) := B^n(1) \cap \{x_1 > 0\}$ y resuelven el problema de Minkowski para una K arbitraria con la suposición de ciertas condiciones de regularidad sobre $\partial B^n_+(1)$.

En la actualidad, el problema de Minkowski en su forma general es un problema que se encuentra casi completamente abierto.

Bibliografía

[1] Alexandrov A. D., *Convex Polyhedra,* Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[2] Bonnesen, T. and Fenchel, W., *Theory of Convex Bodies,* BCS Associates, Moscow, Idaho USA, 1987.

[3] Cheng, S. Y. and Yau, S. T., *On the Regularity of the Solution of the n-Dimentional Minkowski Problem,* Communications on Pure and Aplied Mathematics, Vol. XXIX, 1976, 495-516.

[4] Evans, L. C., *Partial Differential Equations,* Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, 1998.

[5] Guan, B., Jian, H. Y. and Schoen, R. M., *Entire spacelike hypersurfaces of prescribed Gauss curvature in Minkowski space,* J. reine angew. Math. 595, 167-188, 2006.

[6] Guan, P., *Monge-Ampère Equations and Related Topics,* Morningside Institute, Academic Sinica, Beijing, China, 1998.

[7] Gilbarg, D. and Trudinger, N., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,* Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[8] Li, An-Min, *Spacelike hypersurfaces with constant Gauss-Kronecker curvature in the Minkowski space,* Birkahauser Verlag, Basel, Arch. Math.,Vol. 64, 534-551, 1995.

[9] Pogorelov, A. V., *The Minkowski Multidimentional Problem,* John Wiley, (1978).

[10] Schneider, R., *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory,* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 44, 1993.