Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

La Estructura Idealística de las Inmersiones Cerradas entre Espacios Anillados

TESIS

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Oscar Sánchez Reyes

Director: Dr. Mustapha Lahyane (IFM-UMSNH)

Morelia, Michoacán - Agosto de 2012.

Índice general

Agradecimientos

A todo y todos los que me han ayudado a llegar un poco más lejos. En especial quiero agradecer a mi madre Sara Reyes Quiroz por su amor infinito, a mi padre Jaime Sánchez Villalobos por ser un guerrero incansable que predica con el ejemplo, a mi hermano y buen amigo Jaime Omar y también a la persona que quiero Oralia Almendariz.

Con la misma importancia quiero dar las gracias al Dr. Mustapha Lahyane por sus enseñanzas, tolerancia, paciencia y por ser quién guío mi camino en la Geometría Algebraica. Además agradezco a Mary, Viky, Niña, Bety y Lety todas ellas grandes mujeres y a mis colegas y amigos Jonathán Rivera Gómez (Toto) y Juan Bosco Frías Medina.

Mis agradecimientos al Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y al Centro de Ciencias Matemáticas de la Universidad Autónoma de México por brindar los medios necesarios para mi formación académica. Así mismo a Conacyt por el apoyo económico durante mis estudios de maestría.

Por último sólo resta agradecer al comité sinodal: Dr. Abel Castorena, Dr. Israel Moreno, Dr. Jorge Olivares y Dr. Osvaldo Osuna.

Introducción

Una buena parte de la importancia de la Geometría Algebraica Moderna radica en su capacidad para resolver problemas viejos con técnicas de esta nueva área y uno de sus objetos más usados son los esquemas, en el caso de los esquemas afines y el estudio de los morfismos entre ellos las inmersiones cerradas juegan un papel importante. El primero en estudiar las inmersiones cerradas entre esquemas fue Grothendieck, después estos mismos conceptos los retoma Hartshorne y los plasma de manera más elegante y sólo con los detalles necesarios para que aquel que ha estudiado la teoría de esquemas lo entienda, pero dejando muchos detalles sin demostrar. Así, lo que haremos es estudiar las inmersiones cerradas entre espacios anillados probando todos los detalles necesarios y como los espacios anillados son una generalización de los esquemas tenemos la certeza de que este trabajo ayudará a tener una mejor comprensión de lo que pasa con los esquemas y sus debilidades.

Más general que un esquema afín son los espacios anillados, los cuales son un par $(X, \mathcal{F})$, donde X es un espacio topológico y $\mathcal{F}$ es una gavilla de anillos sobre X. De manera general una gavilla de anillos es un conjunto de anillos indexados por los abiertos de una topología, más una familia de homomorfismos de anillos entre los anillos del conjunto. Con estos conceptos podemos decir que una inmersión cerrada es un morfismo entre espacios anillados $f : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ que cumple con otra condición, la cual no tiene mucho sentido abordar sin antes definir más conceptos y adentrarnos más en la Geometría Algebraica. Aún así, podemos resaltar que una vez que se conocen bien las inmersiones cerradas entre espacios anillados daremos un teorema de clasificación, con lo que contribuiremos a una mejor comprensión de los morfismos entre los esquemas afines.

Debido a que es necesario estudiar una buena parte de la teoría de la Geometría Algebraica antes de abordar las inmersiones cerradas entre espacios anillados, creemos que dar un panorama general de la estructura del trabajo es equivalente a dar un recorrido por algunos temas de la materia que nos permitirán hacer la clasificación.

El recorrido comienza cuando nos adentraremos en el Álgebra Conmutativa para estudiar dos de sus herramientas: la localización y la topología de Zariski para el conjunto de ideales primos de un anillo. También es necesario hacer una introducción en la Teoría de Gavillas y posteriormente, poniendo en práctica las herramientas aprendidas del Álgebra Conmutativa, construiremos un par de gavillas tomando como espacio topológico el espacio de Zariski de una anillo. Estos temas conforman el Capítulo 1.

Lo siguiente es el estudio de los espacios anillados y los espacios localmente anillados. Para su estudio introducimos la imagen directa de una gavilla ya que será necesaria al momento de estudiar los morfismos entre espacios anillados. Estos son los temas que darán estructura al Capítulo 2.

Posteriormente en el Capítulo 3 con un mejor manejo de las gavillas se da a conocer la gavilla asociada y la imagen inversa de una gavilla, las cuales son cruciales para nuestro trabajo. Definiremos una inmersión cerrada entre espacios anillados y estudiaremos un ejemplo clásico que después generalizaremos. Esto nos llevará a preguntarnos cual es la estructura idealista de las inmersiones cerradas entre espacios anillados, a lo que por respuesta se tiene el Teorema 3.14 (pág. 64), con el que daremos la clasificación de las inmersiones cerradas y terminaremos el trabajo.

Notación y Terminología

Como es costumbre denotaremos por $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ al anillo de los enteros y a los campos racional, real y complejo, respectivamente. Las letras mayúsculas A y B denotarán anillos conmutativos con unidad, sus minúsculas a, b usualmente se usarán para denotar elementos en un anillo, las letras I y J se usarán para los ideales de un anillo, Ab denotará el ideal generado por el elemento b en el anillo A y para un ideal I de A el radical de I se denotará por $\sqrt{I}$. Para un anillo A, usaremos notaciones como $Nil(A)$ para el conjunto de los elementos nilpotentes de A y $\mathcal{U}(A)$ para el conjunto de las unidades de A. Las letras M y N se usarán para representar módulos. La notación $Hom_A(M,N)$ representará el conjunto de homomorfismos entre los A-módulos M y N. La notación, terminología y conceptos que estaremos usando están basados en los libros [**1**], [**2**], [**3**] y [**8**].

Los símbolos $f, g, h, \phi, \varphi, \psi$ normalmente denotarán funciones, homomorfismos de anillos o morfismos de gavillas.

En el contexto de la Teoría de Gavillas, las letras $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ están reservadas para pregavillas o gavillas. Cabe señalar que toda la notación que usaremos en esta teoría y en la de los espacios anillados será tomada siguiendo los libros [**4**], [**6**] y [**7**].

Capítulo 1

Preliminares

1. Localización

La localización es una herramienta del Álgebra Conmutativa que permite a partir de un anillo A y de un subconjunto multiplicativo S de A, construir un anillo denotado por $S^{-1}A$ y un homomorfismo de anillos i_S^A entre A y $S^{-1}A$ tal que $i_S^A(S) \subseteq \mathcal{U}(S^{-1}A)$. El anillo $S^{-1}A$ tiene entre sus propiedades que contiene un subanillo isomorfo a A cuando A es un dominio entero. El propósito de esta sección es de introducir dicha herramienta, así como ciertas propiedades que serán necesarias a lo largo de este trabajo.

Cabe destacar que desarrollaremos directamente la localización para módulos ya que es lo que vamos a necesitar y como caso particular en que el módulo sea un anillo se tiene el resultado para anillos.

Para su desarrollo primero se considera un módulo M sobre un anillo A y definimos lo que es un conjunto multiplicativo de un anillo A, usualmente denotado por S. Después consideramos una relación de equivalencia $\sim$ en el conjunto $S \times M$ y posteriormente se considera el cociente de $S \times M$ con dicha relación de equivalencia.

Cabe mencionar que a lo largo de todo el trabajo sólo se consideran anillos conmutativos con unidad.

1.1. Localización de un Módulo en un Conjunto Multiplicativo.

Definición 1.1. Un subconjunto S de un anillo A es un **conjunto multiplicativo de** A si:

1. 1_A es un elemento de S.
2. Para cualesquier elementos a y b de S, el producto $a \cdot b$ es un elemento de S.

Aquí algunos ejemplos de conjuntos multiplicativos. Los dos primeros son los más usados.

Ejemplo 1.2. Sea f un elemento de un anillo A. Considerando $S = \{f^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$, se prueba que S es un conjunto multiplicativo de A. En efecto, 1_A es elemento de S (pues, $1_A = f^0$) y para cualesquiera $n, m \in \mathbb{Z}_+$ se tiene que $f^n f^m = f^{n+m}$.

Ejemplo 1.3. Dado un ideal primo $\mathfrak{p}$ de un anillo A, el conjunto $S = A \setminus \mathfrak{p}$ es un conjunto multiplicativo de A: 1_A está en $A \setminus \mathfrak{p}$ (de no ser así, $\mathfrak{p} = A$); por otro lado, para a, b en $A \setminus \mathfrak{p}$, como $\mathfrak{p} \in Spec(A)$, se sigue que ab está en $A \setminus \mathfrak{p}$.

Ejemplo 1.4. El conjunto de los elementos que no son divisores de cero de un anillo es multiplicativo.

Ejemplo 1.5. Sea I un ideal de un anillo A tal que $I \neq A$, se tiene que $1_A + I$ es un conjunto multiplicativo de A.

Ahora, dado un módulo M sobre un anillo A y un conjunto multiplicativo S de A, se considera la relación $\sim$ sobre el conjunto $S \times M$ definida para los elementos m, n de M y s, t de S como: $(s, m) \sim (t, n)$ si y sólo si $u(tm - sn) = 0_M$ para algún $u \in S$. La relación $\sim$ es una relación de equivalencia. En efecto, sean m, n y p elementos de M y r, s y t en S:

- La relación $\sim$ es reflexiva. Ya que $1_A \in S$ y $1_A(sm - sm) = 0_M$.
- La relación $\sim$ es simétrica. Pues, suponiendo que $(s, m) \sim (t, n)$, existe un elemento u en S tal que $u(tm - sn) = 0_M$. Por lo tanto, $u(sn - tm) = 0_M$ y así, $(t, n) \sim (s, m)$.
- La relación $\sim$ es transitiva. En efecto, si $(s, m) \sim (t, n)$ y $(t, n) \sim (r, p)$, entonces existen u y v en S tales que $u(tm - sn) = 0_M$ y $v(rn - tp) = 0_M$. De donde se obtienen las igualdades $utm = usn$ y $vrn = vtp$. Así, se obtiene $vr \cdot (utm) = vr \cdot (usn)$ y $us \cdot (vrn) = us \cdot (vtp)$. Esto implica que $vrutm = usvtp$, luego $uvt(rm - sp) = 0_M$, donde uvt es elemento de S. Por lo tanto, $(s, m) \sim (r, p)$.

En definitiva, $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $S \times M$. Por consiguiente, se puede considerar el conjunto cociente del conjunto $S \times M$ con la relación de equivalencia $\sim$, $\dfrac{S \times M}{\sim}$ que denotaremos por $S^{-1}M$; más aún, se denota $\dfrac{m}{s}$ al elemento de $S^{-1}M$ cuyo representante es (s, m), donde $m \in M$ y $s \in S$. Se sigue que $S^{-1}M$ tiene una estructura algebraica de un módulo sobre A. Dicha estructura algebraica está dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} + : S^{-1}M \times S^{-1}M &\rightarrow S^{-1}M \\ \left(\frac{m}{s}, \frac{n}{t}\right) &\mapsto \frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{tm + sn}{st} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : A \times S^{-1}M &\rightarrow S^{-1}M \\ \left(a, \frac{m}{s}\right) &\mapsto a \cdot \frac{m}{s} = \frac{am}{s} \end{aligned}$$

No es difícil verificar que $(S^{-1}M, +, \cdot)$ es un módulo sobre A, con neutro aditivo $\dfrac{0_M}{1_A}$ y el inverso aditivo de $\dfrac{m}{s}$ es $\dfrac{-m}{s}$, para cada $m \in M$ y $s \in S$.

Por otro lado, existe de manera natural una aplicación A-lineal i_S^M definida por

$$\begin{array}{rcl} i_S^M : M & \to & S^{-1}M \\ m & \mapsto & \dfrac{m}{1_A} \end{array}$$

Es posible definir la localización de un A-módulo sobre un conjunto multiplicativo S de A, donde A es un anillo, de la siguiente manera.

Definición 1.6. Sean S un conjunto multiplicativo de un anillo A y M un módulo sobre A. La **localización** de M en S es el A-módulo $(S^{-1}M, +, \cdot)$, donde la suma $+$ y el producto $\cdot$ son los antes definidos y que por simplicidad denotaremos como $S^{-1}M$.

Si se considera un anillo A como A-módulo, con el producto $\times$ en $S^{-1}A$ definido por

$$\begin{array}{rcl} \times : S^{-1}A \times S^{-1}A & \to & S^{-1}A \\ \left(\dfrac{a}{r}, \dfrac{b}{s}\right) & \mapsto & \dfrac{ab}{rs} \end{array}$$

se tiene que $S^{-1}A$ es un álgebra sobre A, dada por el homomorfismo de anillos i_S^A. Más aún, se tiene que $S^{-1}M$ tiene una estructura natural de $S^{-1}A$-módulo dada por:

$$\begin{array}{rcl} \cdot : S^{-1}A \times S^{-1}M & \to & S^{-1}M \\ \left(\dfrac{a}{s}, \dfrac{m}{t}\right) & \mapsto & \dfrac{am}{st} \end{array}$$

El siguiente resultado es conocido como la propiedad universal de la localización.

Teorema 1.7 (Propiedad Universal de la Localización). *Sean S un conjunto multiplicativo de un anillo A y M un módulo sobre A. Para cualquier módulo N sobre A tal que para todo $t \in S$, la aplicación A-lineal*

$$(\star) \qquad \begin{array}{rcl} \psi_t : N & \to & N \\ n & \mapsto & t \cdot n \end{array}$$

es un isomorfismo, se sigue que para cualquier elemento $\varphi \in Hom_A(M, N)$ existe un único elemento $\widetilde{\varphi} \in Hom_A(S^{-1}M, N)$ tal que $\varphi(m) = t \cdot \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{m}{t}\right)$, para cualesquier $m \in M$ y $t \in S$. En particular, si N es un $S^{-1}A$-módulo, entonces $\widetilde{\varphi} \in Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}M, N)$.

Demostración. Sea N un A-módulo que satisface la condición $(\star)$ y sea $\varphi \in Hom_A(M, N)$. Sea $\widetilde{\varphi}$ definida por:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi} : S^{-1}M & \to & N \\ \dfrac{m}{t} & \mapsto & \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{m}{t}\right) = \psi_t^{-1} \circ \varphi(m) \end{array}$$

- $\widetilde{\varphi}$ es una aplicación A-lineal. En efecto, $\widetilde{\varphi}$ cumple con los siguientes incisos:
  1. $\widetilde{\varphi}$ está bien definida. Primero, observamos que para m en M y t en S se tiene que $\widetilde{\varphi}\left(\dfrac{m}{t}\right) \in N$ pues $\widetilde{\varphi}\left(\dfrac{m}{t}\right) = \psi_t^{-1} \circ \varphi(m) = \psi_t^{-1}(\varphi(m))$, por hipótesis $\varphi(m)$ es elemento de N y al aplicar ψ_t^{-1} obtenemos un elemento de N. Además, sean m' en M y t' en S tales que $m/t = m'/t'$, se sigue que existe u en S tal que $u \cdot (t'm) = u \cdot (tm')$ y al ser ambos elementos de M aplicamos φ, de donde se obtiene que $\varphi(u \cdot t'm) = \varphi(u \cdot tm')$. Luego, $u \cdot (t' \cdot \varphi(m)) = u \cdot (t \cdot \varphi(m'))$. Así, se tiene que $\psi_u(t' \cdot \varphi(m)) = \psi_u(t \cdot \varphi(m'))$. Por lo tanto, $t' \cdot \varphi(m) = t \cdot \varphi(m')$. De este modo, $\psi_{t'} \circ \varphi(m) = \psi_t \circ \varphi(m')$ de donde se sigue que $\psi_{tt'}^{-1} \circ \psi_{t'} \circ \varphi(m) = \psi_{tt'}^{-1} \circ \psi_t \circ \varphi(m')$, y consecuentemente $\psi_t{}^{-1} \circ \psi_{t'}{}^{-1} \circ \psi_{t'} \circ \varphi(m) = \psi_{t'}{}^{-1} \circ \psi_t{}^{-1} \circ \psi_t \circ \varphi(m')$. Esto implica que, $\psi_t{}^{-1} \circ \varphi(m) = \psi_{t'}{}^{-1} \circ \varphi(m')$. Por lo tanto, $\widetilde{\varphi}\left(\dfrac{m}{t}\right) = \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{m'}{t'}\right)$. En conclusión, $\widetilde{\varphi}$ está bien definida.
  2. Sean $a, b \in A$, $m, m' \in M$ y $t, t' \in S$, se tiene que: $\widetilde{\varphi}\left(a \cdot \dfrac{m}{t} + b \cdot \dfrac{m'}{t'}\right) = \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{(t' \cdot a \cdot m) + (t \cdot b \cdot m')}{tt'}\right) = \psi_{tt'}^{-1}(\varphi((t' \cdot a \cdot m) + (t \cdot b \cdot m'))) =$ $\psi_{tt'}^{-1} \circ \psi_{t'} \circ \varphi(a \cdot m) + \psi_{tt'}^{-1} \circ \psi_t \circ \varphi(b \cdot m') = a \cdot (\psi_t^{-1} \circ \varphi(m)) + b \cdot (\psi_{t'}^{-1} \circ \varphi(m'))$. Por lo tanto, $\widetilde{\varphi}\left(a \cdot \dfrac{m}{t} + b \cdot \dfrac{m'}{t'}\right) = a \cdot \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{m}{t}\right) + b \cdot \widetilde{\varphi}\left(\dfrac{m'}{t'}\right)$. En definitiva, $\widetilde{\varphi}$ es una aplicación A-lineal.
- Además, se cumple que $\widetilde{\varphi}\left(\dfrac{m}{t}\right) \cdot t = (\psi_t^{-1}(\varphi(m))) \cdot t = \psi_t(\psi_t^{-1}(\varphi(m))) = \varphi(m)$, para cualesquier $m \in M$ y $t \in S$. Ahora, suponiendo que existe una aplicación A-lineal $g : S^{-1}M \to N$ tal que $\varphi = g \circ i_S^M$, se tiene que para todo m en M y para todo t en S, $\varphi(m) = t \cdot g\left(\dfrac{m}{t}\right)$. Aplicando ψ_t^{-1} a ambos lados de la ecuación se tiene que $\psi_t^{-1}(\varphi(m)) = \psi_t^{-1}\left(t \cdot g\left(\dfrac{m}{t}\right)\right)$. Así, $\psi_t^{-1} \circ \varphi(m) = g\left(\dfrac{m}{t}\right)$, lo cual implica que $\widetilde{\varphi} = g$.

Por último, observemos que si N es un módulo sobre $S^{-1}A$, entonces N satisface obviamente la condición $(\star)$ y que $\widetilde{\varphi}$ es una aplicación $S^{-1}A$-lineal. ❑

Este teorema permite la construcción de una biyección entre $Hom_A(M, N)$ y $Hom_A(S^{-1}M, N)$ cuando el A-módulo N cumple con la condición estrella y esto precisamente, es lo que enuncia el siguiente corolario.

Corolario 1.8. *Sean M y N módulos sobre un anillo A. Si N cumple que para todo $t \in S$ la aplicación A-lineal ψ_t antes definida es un A-isomorfismo, entonces $Hom_A(M,N)$ está en biyección con $Hom_A(S^{-1}M,N)$.*

Así, como una consecuencia directa de este último corolario se sigue que:

Corolario 1.9. *Sean S un conjunto multiplicativo de un anillo A y M un módulo sobre A. Se tiene que para cualquier módulo N sobre $S^{-1}A$, los A-módulos $Hom_A(M,N)$, $Hom_A(S^{-1}M,N)$ y $Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}M,N)$ son isomorfismo.*

En seguida, se estudia el comportamiento de la localización con respecto a las aplicaciones lineales entre módulos.

Proposición 1.10. *Sean M y N módulos sobre un anillo A y S un conjunto multiplicativo de A. Si f es un elemento de $Hom_A(M,N)$, entonces existe una aplicación $S^{-1}A$-lineal $S^{-1}f$ definida por:*

$$\begin{array}{rcl} S^{-1}f : S^{-1}M & \to & S^{-1}N \\ \dfrac{m}{t} & \mapsto & \dfrac{f(m)}{t} \end{array}$$

Más aún, si f es inyectiva (respectivamente sobreyectiva, respectivamente biyectiva), entonces $S^{-1}f$ es inyectiva (respectivamente sobreyectiva, respectivamente biyectiva).

Demostración. $S^{-1}f$ es una aplicación $S^{-1}A$-lineal. En efecto, sean $a, a' \in A$, $s, s', t, t' \in S$ y $m, m' \in M$. Se cumplen los siguientes incisos:

1. $S^{-1}f$ está bien definida, pues $S^{-1}f\left(\dfrac{m}{t}\right)$ está en $S^{-1}N$ ya que $f(m) \in N$ y suponiendo que $\dfrac{m}{t} = \dfrac{m'}{t'}$, existe $u \in S$ tal que $u \cdot (t' \cdot m) = u \cdot (t \cdot m')$. Aplicando f en ambos lados se tiene que $f(u \cdot (t' \cdot m)) = f(u \cdot (t \cdot m'))$. Luego, $ut' \cdot f(m) = ut \cdot f(m')$. Así, $u \in S$ es tal que $u \cdot (t' \cdot f(m) - t \cdot f(m')) = 0_N$, por lo tanto $\dfrac{f(m)}{t} = \dfrac{f(m')}{t'}$ en $S^{-1}N$ y en consecuencia $S^{-1}f$ está bien definida.
2. $S^{-1}f$ es $S^{-1}A$-lineal. En efecto:

$$\begin{aligned} S^{-1}f\left(\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} + \frac{a'}{s'} \cdot \frac{m'}{t'}\right) &= S^{-1}f\left(\frac{(s't'a) \cdot m + (sta') \cdot m'}{sts't'}\right) \\ &= \frac{f[(s't'a) \cdot m + (sta') \cdot m']}{sts't'} \\ &= \frac{s't'}{s't'} \cdot \frac{a \cdot f(m)}{st} + \frac{st}{st} \cdot \frac{a' \cdot f(m')}{s't'} \\ &= \frac{a \cdot f(m)}{st} + \frac{a' \cdot f(m')}{s't'} \end{aligned}$$

$$= \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{f(m)}{t} + \frac{a'}{s'} \cdot \frac{f(m')}{t'}.$$

Por lo tanto $S^{-1}f$ es una aplicación $S^{-1}A$-lineal.

Ahora, suponiendo que f es inyectiva, a continuación se prueba que $S^{-1}f$ es inyectiva:
Sean $m \in M$ y $t \in S$ tales que $\frac{m}{t} \in Ker(S^{-1}f)$, se sigue que $S^{-1}f\left(\frac{m}{t}\right) = 0_{S^{-1}N}$, es decir $\frac{f(m)}{t} = \frac{0_N}{1_A}$, por lo tanto existe $u \in S$ tal que $u \cdot f(m) = 0_N$ y ya que f es A-lineal se tiene que $f(u \cdot m) = 0_N$. Como f es inyectiva, $u \cdot m = 0_M$, lo que implica que $\frac{m}{t} = \frac{u \cdot m}{ut} = 0_{S^{-1}M}$.
Si f es sobreyectiva, entonces para $n \in N$ existe $m \in M$ tal que $f(m) = n$. Por lo tanto, para todo $t \in S$ se tiene que $\frac{n}{t} = \frac{f(m)}{t} = S^{-1}f\left(\frac{m}{t}\right)$. Así, $S^{-1}f$ es sobreyectiva.
Finalmente, si f es biyectiva, entonces es obvio que $S^{-1}f$ lo es. ❑

El siguiente teorema habla del comportamiento de la localización con respecto a las sucesiones exactas.

Teorema 1.11. *Sea S un conjunto multiplicativo de un anillo A. Se tiene que, si*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos, entonces la siguiente sucesión de $S^{-1}A$-módulos

$$0 \longrightarrow S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}P \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Sea $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de A-módulos. Por la Proposición 1.10 se tiene que $S^{-1}f$ es inyectiva y $S^{-1}g$ es sobreyectiva. Sólo falta probar que $Im(S^{-1}f) = Ker(S^{-1}g)$.

- $Im(S^{-1}f) \subseteq Ker(S^{-1}g)$. Sean $n \in N$ y $t \in S$ tales que $\frac{n}{t} \in Im(S^{-1}f)$, existen $m \in M$ y $t' \in S$ tales que $\frac{n}{t} = S^{-1}f\left(\frac{m}{t'}\right)$. Así, $S^{-1}g\left(\frac{n}{t}\right) = S^{-1}g\left(S^{-1}f\left(\frac{m}{t'}\right)\right) = S^{-1}g\left(\frac{f(m)}{t'}\right) = \frac{g(f(m))}{t}$. Como $Im(f) = Ker(g)$, se tiene que $g(f(m)) = 0_P$. Luego, $S^{-1}g\left(\frac{n}{t}\right) = \frac{0_P}{t} = \frac{0_P}{1_A}$. Por lo tanto, $\frac{n}{t} \in Ker(S^{-1}g)$.
- $Ker(S^{-1}g) \subseteq Im(S^{-1}f)$. Sean $n \in N$ y $t \in S$, tales que $\frac{n}{t} \in Ker(S^{-1}g)$, se sigue que, $S^{-1}g\left(\frac{n}{t}\right) = 0_{S^{-1}P}$, es decir, $\frac{g(n)}{t} = \frac{0_P}{1_A}$. Luego, existe $u \in S$ tal que $u \cdot g(n) = 0_P$, lo que es equivalente a decir que existe $u \in S$ tal que $g(u{\cdot}n) = 0_P$. Como $Im(f) = Ker(g)$ y $u{\cdot}n$ está en

$Im(f)$ existe $m \in M$ tal que $u \cdot n = f(m)$. Con ello, se sigue que $\frac{n}{t} = \frac{u}{u} \cdot \frac{n}{t} = \frac{un}{ut} = \frac{f(m)}{ut} = S^{-1}f\left(\frac{m}{ut}\right)$ y por lo tanto, $\frac{n}{t} \in Im(S^{-1}f)$.

En definitiva, la sucesión $0 \longrightarrow S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}P \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de $S^{-1}A$-módulos. ❑

Lo último que se estudia de la localización para módulos es la forma de los submódulos de $S^{-1}M$. En caso de tener un A-submódulo N de M, se toma la sucesión exacta de A-módulos

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} \frac{M}{N} \longrightarrow 0$$

donde i es el homomorfismo inclusión y π el homomorfismo proyección, al aplicar el Teorema 1.11 se obtiene que

$$0 \longrightarrow S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}i} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}\pi} S^{-1}\left(\frac{M}{N}\right) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de $S^{-1}A$-módulos, teniendo así que $S^{-1}N = Im(S^{-1}i) = Ker(S^{-1}\pi)$, que siempre es un submódulo de $S^{-1}M$. Con el siguiente lema se asegura que los $S^{-1}A$-submódulos de $S^{-1}M$ son de la forma $S^{-1}P$, para algún submódulo P de M.

Lema 1.12. *Sean M un módulo sobre un anillo A y S un conjunto multiplicativo de A. Si Γ es un $S^{-1}A$-submódulo de $S^{-1}M$, entonces $\Gamma = S^{-1}N$ para algún A-submódulo N de M.*

Demostración. Sea Γ un $S^{-1}A$-submódulo de $S^{-1}M$, consideramos el conjunto

$$N = \left\{n \in M : \frac{n}{s} \in \Gamma \text{ para algún } s \in S\right\}.$$

Se quiere probar que N es el submódulo de M tal que $\Gamma = S^{-1}N$. Primero verificaremos que $(N, +)$ es un subgrupo de $(M, +)$.

- 0_M está en N, basta considerar $1_A \in S$, para tener que $\frac{0_M}{1_A} \in \Gamma$.
- Sean $m, n \in N$, se quiere probar que $m - n \in N$. En efecto, como $m, n \in N$, existen $s, t \in S$ tales que $\frac{m}{s}, \frac{n}{t}$ son elementos de Γ. Ya que Γ es $S^{-1}A$-submódulo, se sigue que $\frac{s}{1_A} \cdot \frac{m}{s} = \frac{m}{1_A} \in \Gamma$ y $\frac{t}{1_A} \cdot \frac{n}{t} = \frac{n}{1_A} \in \Gamma$, así, se tiene que $\frac{m}{1_A} - \frac{n}{1_A} = \frac{m-n}{1_A} \in \Gamma$, por lo que $m - n$ es un elemento de N.

Con esto se tiene que $(N, +)$ es un subgrupo de $(M, +)$, si además, se consideran $a \in A$ y $n \in N$, ya que por definición existe $t \in S$ tal que $\frac{n}{t} \in \Gamma$, una vez más por ser Γ un $S^{-1}A$- submódulo, se tiene

que $\dfrac{a}{1_A} \cdot \dfrac{n}{t} = \dfrac{an}{t} \in \Gamma$ y por lo tanto an está en N, así, N es un A-submódulo de M.
Sólo resta verificar que $\Gamma = S^{-1}N$. Por un lado, $\Gamma \subseteq S^{-1}N$, pues al ser Γ un submódulo de $S^{-1}M$ sus elementos son de la forma $\dfrac{n}{t}$, donde $n \in M$ y $t \in S$, así, por construcción de N, se tiene que $n \in N$ y con ello $\dfrac{n}{t} \in S^{-1}N$. Por otro lado, $\Gamma \supseteq S^{-1}N$, sea $\dfrac{n}{t}$ en $S^{-1}N$, como $n \in N$ existe $s \in S$ tal que $\dfrac{n}{s} \in \Gamma$, así, se tiene que $\dfrac{s}{t} \cdot \dfrac{n}{s} = \dfrac{n}{t}$ es un elemento de Γ y por lo tanto $S^{-1}N = \Gamma$. ❑

1.2. El Espectro de la Localización de un Anillo en un Conjunto Multiplicativo. Sea S un conjunto multiplicativo de un anillo A. Considerando el anillo A como un módulo sobre sí mismo, se puede definir un producto de forma natural sobre $S^{-1}A$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} \times : S^{-1}A \times S^{-1}A & \rightarrow & S^{-1}A \\ \left(\dfrac{a}{s}, \dfrac{b}{t}\right) & \mapsto & \dfrac{ab}{st} \end{array}$$

No es difícil de verificar que $(S^{-1}A, +, \times)$ es un anillo, con neutro $\dfrac{0_A}{1_A}$ e identidad $\dfrac{1_A}{1_A}$. Además, existe un homomorfismo de anillos entre A y $S^{-1}A$ dado por:

$$\begin{array}{rcl} i_S^A : A & \rightarrow & S^{-1}A \\ a & \mapsto & \dfrac{a}{1_A} \end{array}$$

Con esto es posible enunciar la propiedad universal de la localización para anillos (igual que en [**1**]) de la siguiente manera:

Proposición 1.13. *Sea S un conjunto multiplicativo de un anillo A y sea $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorfismo de anillos. Si para todo $s \in S$, $\varphi(s)$ es una unidad de B, entonces existe un único homomorfismo de anillos $\widetilde{\varphi} : S^{-1}A \rightarrow B$ tal que $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ i_S^A$.*

La prueba es muy parecida a la del Teorema 1.7, con la diferencia que en lugar de pedir la condición estrella, se pide que $\varphi(s)$ sea una unidad en B, esto para todo $s \in S$. Además, sabemos que los $S^{-1}A$-submódulos de $S^{-1}A$ son de la forma $S^{-1}I$, donde I es un ideal de A, ya que $S^{-1}A$ es un $S^{-1}A$-módulo. En caso que el ideal I intersecte el conjunto multiplicativo, tenemos que $S^{-1}I$ es igual a $S^{-1}A$, dicha afirmación se aclara en el siguiente lema.

Lema 1.14. *Sea S un conjunto multiplicativo de un anillo A y sea I un ideal de A. Se tiene que $S^{-1}I = S^{-1}A$ si y sólo si $(S \bigcap I) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea S un conjunto multiplicativo de un anillo A y $S^{-1}I$ la localización de I en S. Se tiene que $S^{-1}A = S^{-1}I$, si y sólo si, $1_{S^{-1}A} \in S^{-1}I$ o bien, $\frac{1_A}{1_A} = \frac{a}{s}$ para algún $a \in I$ y $s \in S$, es decir, existe $t \in S$ tal que $t(s-a) = 0_A$. De donde se obtiene que existe $t \in S$ tal que $ts = ta$

y así $a \in S$, por lo tanto $\frac{a}{s} = \frac{t}{t} \times \frac{a}{s} = \frac{ta}{ts} = \frac{1_A}{1_A}$, es decir, $1_A \in I$, lo cual es una contradicción. Se concluye que $(I \bigcap S) \neq \emptyset$. ❑

El siguiente teorema (ejercicio de [**1**]) da a conocer el espectro de la localización de un anillo en un conjunto multiplicativo.

Teorema 1.15. *Sean S un conjunto multiplicativo de un anillo A y $\Gamma = S^{-1}J$ un ideal de $S^{-1}A$, donde J es un ideal de A. Se tiene que Γ es primo si y sólo si J es un ideal primo, tal que $(J \bigcap S) = \emptyset$.*

Demostración. Si tenemos un ideal primo J de A y $(J \bigcap S) = \emptyset$, entonces $S^{-1}J$ es un ideal primo en $S^{-1}A$, pues, $S^{-1}J$ es un ideal de $S^{-1}A$ y como $(J \bigcap S) = \emptyset$, por el Lema 1.14 se tiene que $S^{1}J \neq S^{-1}A$, sólo falta verificar que pasa con el producto, es decir, sean a, b elementos en A y s, t en S, si $\frac{a}{s} \times \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$ está en Γ, entonces $ab \in J$ y $st \in S$, como J es primo, se sigue que $a \in J$ o $b \in J$, de donde obtenemos que $\frac{a}{s}$ está en $S^{-1}J$ o $\frac{b}{t}$ está en $S^{-1}J$ y por lo tanto $S^{-1}J$ es ideal primo de $S^{-1}A$.
Ahora, supongamos que Γ es un ideal primo de $S^{-1}A$, sabemos es de la forma $\Gamma = S^{-1}J$, se quiere probar que J es un ideal primo tal que $(J \bigcap S) = \emptyset$. Por el Lema 1.14 tenemos que $(J \bigcap S) = \emptyset$, pues de lo contrario $S^{-1}J = S^{-1}A$, contradiciendo que Γ es ideal primo. Y al considerar la aplicación A-lineal i_S^A, se sabe que $(i_S^A)^{-1}(\Gamma) = J$ es ideal primo en A (ver antes de Proposición 1.41). ❑

2. Breve Introducción a la Teoría de Gavillas

Otra de las herramientas que más vamos a usar es la Teoría de Gavillas, la cual pertenece a la rama de la Geometría Algebraica y es la base para desarrollar el concepto de inmersión cerrada.

Lo que nos interesa por el momento de la Teoría de Gavillas es: una pregavilla, el anillo de gérmenes de una pregavilla en un punto y una gavilla. Después, centramos nuestra atención en los morfismos de pregavillas y gavillas, de donde surgen la gavilla kernel de un morfismo de gavillas y la pregavilla imagen de un morfismo de gavillas, la sección se acaba con el estudio de la pregavilla cociente de dos gavillas.

2.1. Pregavilla, Gavilla y sus Anillos de Gérmenes. De manera informal, una gavilla (o pregavilla) es una colección de conjuntos, todos con el mismo tipo de estructura algebraica, todos indexados por los abiertos de una topología, más una colección de homomorfismos entre ellos, es posible verificar estos conceptos en [**6**] o en [**7**].

Definición 1.16. Sea X un espacio topológico. Una **pregavilla** de anillos sobre X es un par $(\mathcal{F},\rho)$, donde $\mathcal{F}$ es una aplicación que a cada abierto U de X le asigna un anillo conmutativo con unidad $\mathcal{F}(U)$ y ρ es tal que a los abiertos U, V de X tales que $V \subseteq U$, les asigna un homomorfismo de anillos $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ al que llamaremos restricción. Además este par cumple con las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$,
2. para todo abierto U de X, $\rho_U^U = id_{\mathcal{F}(U)}$ y
3. para toda terna de abiertos U, V, W tales que $W \subseteq V \subseteq U$, se tiene que $\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$.

Los elementos del anillo $\mathcal{F}(U)$ suelen llamarse secciones y para una sección $s \in \mathcal{F}(U)$ la restricción $\rho_V^U(s)$ cuando no hay temor de confusión la denotamos por $s|_V$. Con el único fin de simplificar la notación denotaremos la pregavilla $(\mathcal{F},\rho)$ por $\mathcal{F}$. A continuación construiremos el anillo de gérmenes para un punto de X, lo mejor es que con la misma construcción se obtiene el anillo de gérmenes de una gavilla.

Sea $\mathcal{F}$ una pregavilla de anillos sobre un espacio topológico X y sea p un elemento de X, consideramos el conjunto $\Gamma_p = \{(U, s) : U \text{ es abierto de } X, p \in U \text{ y } s \in \mathcal{F}(U)\}$, se observa que Γ_p no es vacío, ya que $(X, 0_A)$ y $(X, 1_A)$ están en Γ_p. Definimos la relación $\backsim$ en Γ_p de la siguiente manera: sean U, V abiertos de X que contienen a p, $s \in \mathcal{F}(U)$ y $t \in \mathcal{F}(V)$, diremos que (U, s) esta relacionado con (V, t), denotado $(U, s) \backsim (V, t)$ si y sólo si, existe un abierto W de X que contiene a p, tal que: $W \subseteq (U \cap V)$ y $\rho_W^U(s) = \rho_W^V(t)$.

Lema 1.17. *La relación $\backsim$ que se acaba de definir en Γ_p es de equivalencia.*

Demostración. Para la prueba se van a considerar U, V y W abiertos de X que contienen a p y las secciones $s \in \mathcal{F}(U)$, $t \in \mathcal{F}(V)$ y $r \in \mathcal{F}(W)$.

- La relación $\backsim$ es reflexiva. En efecto, sea $(U, s) \in \Gamma_p$, basta tomar el abierto $W = U$ para obtener que $(U, s) \backsim (U, s)$ ya que $\rho_U^U(s) = \rho_U^U(s)$.
- La relación $\backsim$ es simétrica. Pues, si $(U, s) \backsim (V, t)$, entonces existe un abierto W del espacio topológico X, que contiene a p, tal que $W \subseteq U \cap V$ y $\rho_W^U(s) = \rho_W^V(t)$, tomando el mismo abierto, W se tiene que $p \in W \subseteq V \cap U$ y $\rho_W^V(t) = \rho_W^U(s)$.
- La relación $\backsim$ es transitiva. En efecto, suponiendo que $(U, s) \backsim (V, t)$ y $(V, t) \backsim (W, r)$, se tiene que existen abiertos E, F en la topología de X que contienen a p y cumplen que $E \subseteq U \cap V$, $F \subseteq V \cap W$ y además, $\rho_E^U(s) = \rho_E^V(t)$ y $\rho_F^V(t) = \rho_F^W(r)$. Considerando el abierto

$L = E \cap F$ del espacio topológico X que contiene a p y contenido en $E \cap F$, se tiene que $\rho^E_L \circ \rho^U_E(s) = \rho^E_L \circ \rho^V_E(t)$ y $\rho^F_L \circ \rho^V_F(t) = \rho^F_L \circ \rho^W_E(r)$, es decir, $\rho^U_L(s) = \rho^V_L(t)$ y $\rho^V_L(t) = \rho^W_L(r)$. Así, $\rho^U_L(s) = \rho^W_L(r)$ y por lo tanto, $(U, s) \backsim (W, r)$.

En conclusión $\backsim$ es una relación de equivalencia. ❑

Ya que la relación$\backsim$ es de equivalencia, hacemos el cociente de Γ_p con $\backsim$ obteniendo $\frac{\Gamma_p}{\backsim} = \mathcal{F}_p = \{[(U, s)] : U \subseteq X, p \in U \text{ y } s \in \mathcal{F}(U)\}$, en donde definimos una suma y un producto de la siguiente manera;

- suma $+$: $[(U, f)] + [(V, g)] = [(U \cap V, f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V})]$,
- producto $\times$: $[(U, f)] \times [(V, g)] = [(U \cap V, f|_{U\cap V} \times g|_{U\cap V})]$,

donde $[(U, f)]$ y $[(V, t)]$ son elementos de $\mathcal{F}_p$. Es fácil verificar que $(\mathcal{F}, +, \times)$ es un anillo. De esto nace la siguiente definición.

Definición 1.18. Sean $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre un espacio topológico X, p un elemento en X, considerando el conjunto de antes $\Gamma_p = \{(U, s) : U$ es abierto de $X, p \in U$ y $s \in \mathcal{F}(U)\}$ y la relación de equivalencia $\backsim$ antes definida. El **anillo de gérmenes** de la pregavilla $\mathcal{F}$ en el punto p, es el cociente de Γ_p con la relación de equivalencia $\backsim$ igual al conjunto $\{[(U, s)] : U \subseteq X, p \in U \text{ y } s \in \mathcal{F}(U)\}$ y se denota por $\mathcal{F}_p$.

Los elementos $[(U, s)] \in \mathcal{F}_p$ suelen llamarse gérmenes y algunas veces los denotaremos por s_p.

Definición 1.19. Una pregavilla $\mathcal{F}$ sobre el espacio topológico X es una **gavilla** si para todo abierto U de X y toda cubierta abierta $(U_i)_{i\in I}$ de U donde $I \neq \emptyset$, se cumple que:

1. Si $s \in \mathcal{F}(U)$ es tal que $\rho^U_{U_i}(s) = 0_{\mathcal{F}(U_i)}$ para todo $i \in I$, entonces $s = 0_{\mathcal{F}(U)}$.
2. Si $(s_i)_{i\in I}$ es una familia de secciones tal que $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ para todo $i \in I$ y cumple que $\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(s_i) = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(s_j)$, para todo i, j en I, entonces existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho^U_{U_i}(s) = s_i$ para todo $i \in I$.

Ejemplo 1.20. Un ejemplo sencillo de una pregavilla es el siguiente, consideramos un espacio topológico Hausdorff X, distinto del reducido a un punto y un anillo A de cardinalidad distinta de uno. Definimos la pregavilla constante A^-_X de la siguiente manera: $A^-_X(U) = \{0\}$ si $U = \emptyset$ y $A^-_X(U) = A$ si $U \neq \emptyset$. Y definimos ρ tal que $\rho^U_V = 0$ si $V = \emptyset$ y $\rho^U_V = id_A$ si $V \neq \emptyset$, para cualesquier abiertos U, V de X tales que $V \subseteq U$. La primera condición para que A^-_X sea pregavilla se tiene por definición, la segunda se cumple, pues, en caso que $U = \emptyset$, ρ^U_U va del cero en el cero y si $U \neq \emptyset$, entonces ρ^U_U por construcción es la identidad en A. Lo más laborioso, pero sin ser complicado, es probar la tercer condición, esto ya que, para cualesquier abiertos U, V y W de X, tales que $W \subseteq V \subseteq U$, es necesario verificar que $\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$ para los siguientes casos: si $U = \emptyset$, si $U \neq \emptyset$ y $V = \emptyset$, si $V \neq \emptyset$ y $W = \emptyset$ y si $W \neq \emptyset$. En todos los casos se cumple la tercer condición, los detalles se pueden observar en [**5**].

El Ejemplo 1.20 es especial ya que es una pregavilla que no es una gavilla. En efecto, si consideramos los elementos x, y en X, como X es Hausdorff existen abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Ahora, ya que A tiene al menos dos elementos tomamos a, b en A, con $a \neq b$ y tales que $a \in A_X^-(U)$ y $b \in A_X^-(V)$, si A_X^- fuera una gavilla, una de las secciones se extendería a $\{a, b\}$ pero como $U \cap V = \emptyset$ se tiene que $a|_{U\cap V} = 0_A = b|_{U\cap V}$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto A_X^- no puede cumplir con la condición dos para ser gavilla.

Ejemplo 1.21. Sean X un espacio topológico, A un anillo y p un elemento en X, definimos como: $A_X^p(U) = A$ si p es elemento de U y $A_X^p(U) = \{0\}$ si p no es elemento de U y para todo par de abiertos U, V en X, tal que $V \subseteq U$ se define ρ como $\rho_V^U = id_A$ en el caso que p este en V y $\rho_V^U = 0_A$ si p no es elemento de V. A_X^p es conocida como la gavilla rascacielos. Para ver que A_X^p es una pregavilla es parecido al ejemplo anterior, sólo que ahora se consideran los casos de si el punto está o no en el abierto, también es posible ver los detalles en [**5**].

2.2. Morfismos entre Gavillas. Al considerar una estructura algebraica y dos conjuntos con dicha estructura siempre queremos definir una aplicación entre ellos, como en el caso de lo homomorfismos de grupos, los de anillos, de módulos, etc. en el caso de las gavillas se tiene la siguiente definición para un morfismo.

Definición 1.22. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ gavillas de anillos sobre un espacio topológico X. Un **morfismo de gavillas** $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es una aplicación que a cada abierto U de X le asigna un homomorfismo de anillos $\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, de tal manera que para cualesquier abiertos U, V de X, tales que $V \subseteq U$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "{\rho_{\mathcal{F}}}_V^U"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "{\rho_{\mathcal{G}}}_V^U"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\phi_V"'] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

De manera no formal, un morfismo de gavillas es una familia de homomorfismos de anillos, indexada por los abiertos de una topología, que cumplen ser compatibles con las restricciones de gavillas. Además, para un elemento $p \in X$, el morfismo ϕ siempre induce un homomorfismo entre los anillos de gérmenes de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\phi_p : \mathcal{F}_p &\rightarrow \mathcal{G}_p \\ [(U, s)] &\mapsto [(U, \phi_U(s))]\end{aligned}$$

De esta construcción se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_p \arrow[r, "\phi_p"'] & \mathcal{G}_p \end{tikzcd}$$

para cualquier abierto U de X que contiene a p donde la aplicación entre $\mathcal{F}(U)$ y $\mathcal{F}_p$ que hace conmutar el diagrama es tal que a s lo manda en $[(U, s)]$ y la que va de $\mathcal{G}(U)$ en $\mathcal{G}_p$ actúa de manera similar.

Definición 1.23. Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ gavillas sobre el espacio topológico X y sea $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de gavillas.

1. El morfismo de gavillas φ es **inyectivo** si para todo $p \in X$, el homomorfismo inducido φ_p es inyectivo.
2. El morfismo de gavillas φ es **sobreyectivo** si para todo $p \in X$ el homomorfismo inducido φ_p es sobreyectivo.

Se tiene que ser cuidadoso al hablar de la sobreyectividad de un morfismo de gavillas, ya que si un morfismo de gavillas ϕ es sobreyectivo no implica que los homomorfismos de anillos ϕ_U lo sean, donde U es un abierto de X. En el caso de la inyectividad se tiene que un morfismo de gavillas ϕ es inyectivo, si y sólo si para todo abierto U de X los homomorfismos de anillos ϕ_U son inyectivos.

Teniendo una gavilla de anillos $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X definimos el morfismo identidad $id_{\mathcal{F}}$ de tal manera que para todo abierto U de X $id_{\mathcal{F}(U)} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ es el homomorfismo identidad. Y en caso de tener dos morfismos de gavillas $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ y $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$, donde $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son gavillas de anillos sobre el espacio topológico X, se define el morfismos de gavillas composición $\varphi \circ \phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$ de tal manera que para todo abierto U de X se tiene el homomorfismo de anillos $(\varphi \circ \phi)_U = \varphi_U \circ \phi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$.

Definición 1.24. Un morfismo de gavillas $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un **isomorfismo** si existe un morfismo de gavillas $g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ tal que $g \circ f = id_{\mathcal{F}}$ y $f \circ g = id_{\mathcal{G}}$.

Teorema 1.25. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ gavillas sobre un espacio topológico X y sea $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo entre ellas. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *El morfismo f es un isomorfismo de gavillas.*
2. *Para todo abierto U de X el homomorfismo de anillos $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es un isomorfismo.*
3. *Para todo $p \in X$ el homomorfismo de anillos inducido $f_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ es un isomorfismo.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 3. Suponiendo que f es un isomorfismo de gavillas, se tiene que existe un morfismo $g : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ tal que $g \circ f = id_{\mathcal{F}}$ y $f \circ g = id_{\mathcal{G}}$, teniendo que para todo $p \in X$ los homomorfismos de anillos inducidos f_p y g_p cumplen que $g_p \circ f_p = id_{\mathcal{F}_p}$ y $f_p \circ g_p = id_{\mathcal{G}_p}$, así, para todo $p \in X$ tenemos que el homomorfismo de anillos f_p es un isomorfismo.

3. $\Rightarrow$ 2. Si ahora lo que se tiene es que para todo $p \in X$ el homomorfismo de anillos inducido $f_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ es un isomorfismo, entonces probaremos que para todo abierto U de X el homomorfismo de anillos $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es un isomorfismo. En efecto, sea $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s \in Ker(f_U)$, es decir $f_U(s) = 0_{\mathcal{G}(U)}$ o bien, para todo $p \in U$ se tiene que $f_p([(U,s)]) = [(U, f_U(s))] = [(U, 0_{\mathcal{G}(U)})]$ y como f_p es un isomorfismo de anillos se sigue que $Ker(f_p) = \{[(X, 0_{\mathcal{F}(X)})]\}$, por lo tanto $s = 0_{\mathcal{F}(U)}$. En conclusión f_U es un homomorfismo inyectivo. Lo que sigue es verificar si f_U es sobreyectivo. Dado $t \in \mathcal{G}(U)$, para $p \in U$ podemos decir que $[(U,t)] \in \mathcal{G}_p$ y como f_p es sobreyectivo se sigue que existe un abierto V_p de X que contiene a p y contenido en U y existe s^p en $\mathcal{F}(V_p)$ tales que $[(V_p, s^p)] \in \mathcal{F}_p$ y $f_p([(V_p, s^p)]) = [(V_p, f_{V_p}(s^p))] = [(V_p, t|_{V_p})]$, es decir existe un abierto W_p de X que con tiene a p y contenido en V_p de tal manera que $\rho_{\mathcal{G}}{}^{V_p}_{W_p}(f_{V_p}(s^p)) = \rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{W_p}(t)$, teniendo así una familia de secciones $(s^q)_{q \in V_p}$, una familia de abiertos $(V_q)_{q \in U}$ y una cubierta abierta $(W_q)_{q \in U}$ de U, donde $s^q \in \mathcal{F}(V_q)$ para cada $q \in U$ y tal que para todo $q \in U$ se tiene que $\rho_{\mathcal{G}}{}^{V_q}_{W_q}(f_{V_q}(s^q)) = f_{W_q}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{V_q}_{W_q}(s^q))) = \rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{W_q}(t)$. Como $\mathcal{F}$ es una gavilla de anillos existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{V_p}(s) = s^p$ y cumple que $f_U(s) = t$. Por lo tanto f_U es sobreyectivo. Más aún el homomorfismo de anillos f_U es un isomorfismo.

2. $\Rightarrow$ 1. Partiendo del morfismo de gavillas f, ya que para todo abierto U de X se tiene un isomorfismo de anillos $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, tenemos que existe $f_U^{-1} : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(U)$ tal que $f_U \circ f_U^{-1} = id_{\mathcal{G}(U)}$ y $f_U^{-1} \circ f_U = id_{\mathcal{F}(U)}$, donde $f_U \circ f_U^{-1} = (f \circ f^{-1})_U$ y $f_U^{-1} \circ f_U = (f^{-1} \circ f)_U$, considerando f^{-1} como el morfismo de gavillas de la Definición 1.24 se concluye que el morfismo de gavillas f es un isomorfismo. ❏

2.3. El Kernel, la Imagen y el Cociente. En general siempre que tenemos un homomorfismo de anillos, $g : A \to B$ se tiene que el kernel de g denotado por $Ker(g)$ es un ideal de A y también la imagen de g denotada por $Im(g)$ es un subanillo de B, así al tener dos gavillas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ sobre un espacio topológico X y un morfismo entre ellas $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, se sigue que para cada abierto U de X tenemos un homomorfismo de anillos $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ con el que podemos darnos una idea de cómo es que vamos a definir a la gavilla kernel y la pregavilla imagen dando paso a la pregavilla cociente.

Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ gavillas de anillos sobre un espacio topológico X. Dado un morfismo de gavillas $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ se hacen las siguientes construcciones:

1. **El kernel del morfismo** f denotado por $Kerf$ es tal que para todo abierto U de X se tiene que $Kerf(U) = Ker(f_U)$ y ρ_{Kerf} es la restricción de la gavilla $\mathcal{F}$, así $Kerf$ es una gavilla de grupos sobre X. En efecto, $Kerf(U)$ es un grupo para todo abierto U de X, pues $Ker(f_U)$ es subgrupo de $\mathcal{F}(U)$, además como el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{G}}{}_V^U"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "f_V"'] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, para los abiertos U, V de X tales que $V \subseteq U$, dado $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que s está en $Kerf(U)$, se tiene que $\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s) \in Kerf(V)$, pues $f_V(\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s)) = \rho_{\mathcal{G}}{}_V^U(f_U(s)) = 0_{\mathcal{G}(V)}$ y así $\rho_{Kerf}{}_V^U(Kerf(U)) \subseteq Kerf(V)$. Además, $Kerf$ cumple con los siguientes incisos:

   a) $Kerf(\emptyset) = \{0\}$, pues, por definición $f_\emptyset : \mathcal{F}(\emptyset) \to \mathcal{G}(\emptyset)$.

   b) Sea U un abierto de X, se tiene que $\rho_{Kerf}{}_U^U = \rho_{\mathcal{F}}{}_U^U = id_{\mathcal{F}(U)} = id_{Kerf(U)}$.

   c) Sean U, V, W abiertos de X tales que $W \subseteq V \subseteq U$ y sea $s \in Kerf(U)$. Se tiene que $\rho_{Kerf}{}_W^V \circ \rho_{Kerf}{}_V^U(s) = \rho_{\mathcal{F}}{}_W^V \circ \rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s) = \rho_{\mathcal{F}}{}_W^U(s)$. Así, $Kerf$ es una pregavilla.

   Ahora, sean U un abierto de X y $(U_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta de U, tenemos que:

   d) Dado $s \in Kerf(U)$ tal que para todo $i \in I$ se tiene que $\rho_{Kerf}{}_{U_i}^U(s) = \rho_{\mathcal{F}}{}_{U_i}^U(s) = 0_{\mathcal{F}(U_i)}$ y como $\mathcal{F}$ es una gavilla tenemos que $s = 0_{\mathcal{F}(U)} = 0_{Kerf(U)}$.

   e) Sea $(s_i)_{i\in I}$ una familia de secciones tal que para todo $i \in I$ se tiene que $s_i \in Kerf(U_i)$ y además para todo $i, j \in I$ se cumple que $\rho_{Kerf}{}_{U_i\cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{Kerf}{}_{U_i\cap U_j}^{U_j}(s_j)$, así $\rho_{\mathcal{F}}{}_{U_i\cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{\mathcal{F}}{}_{U_i\cap U_j}^{U_j}(s_j)$ y como $\mathcal{F}$ es una gavilla existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$, para todo $i \in I$. Sólo falta verificar que $s \in Kerf(U)$. Recuerde que f es morfismo de gavillas por lo que el siguiente diagrama conmuta para todo $i \in I$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}}{}_{U_i}^U"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{G}}{}_{U_i}^U"] \\ \mathcal{F}(U_i) \arrow[r, "f_{U_i}"'] & \mathcal{G}(U_i) \end{tikzcd}$$

   de donde se sigue que $f_{U_i} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}_{U_i}^U(s) = f_{U_i}(s_i) = 0_{\mathcal{F}(U_i)}$. Así, $\rho_{\mathcal{G}}{}_{U_i}^U \circ f_U(s) = 0_{\mathcal{G}(U_i)}$ y en conclusión $s \in Kerf(U)$.

En definitiva, $Kerf$ es una gavilla de grupos abelianos sobre el espacio topológico X.

2. **La imagen del morfismo** f denotada Imf es tal que $Imf(U) = Im(f_U)$ para todo abierto U de X, donde f_U es un homomorfismo de anillos y ρ_{Imf} es la restricción de la gavilla $\mathcal{G}$, es decir, para los abiertos U, V de X tales que $V \subseteq U$ se tiene que ${\rho_{Imf}}_V^U = {\rho_{\mathcal{G}}}_V^U$. La imagen del morfismo f es una pregavilla, ya que $Imf(U)$ es un anillo, para todo abierto U de X, pues $Im(f_U)$ es subanillo de $\mathcal{G}(U)$, también, si V, U son abiertos de X, entonces ${\rho_{Imf}}_V^U = {\rho_{\mathcal{G}}}_V^U$ y como f es morfismo entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ se tiene que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "{\rho_{\mathcal{F}}}_V^U"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "{\rho_{\mathcal{G}}}_V^U"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "f_V"'] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

es conmutativo y que ${\rho_{Imf}}_V^U : Imf(U) \to Imf(V)$ es un homomorfismo de anillos. Además, Imf cumple con los siguientes incisos:

a) $Imf(\emptyset) = \{0\}$, pues $Imf(\emptyset) = Im(f_\emptyset)$ y $f_\emptyset : \mathcal{F}(\emptyset) \to \mathcal{G}(\emptyset)$.

b) Para todo abierto U de X, se tiene que ${\rho_{Imf}}_U^U = {\rho_{\mathcal{G}}}_U^U = id_{\mathcal{G}(U)} = id_{Imf(U)}$.

c) Sean U, V, W abiertos del espacio topológico X tales que $W \subseteq V \subseteq U$ y sea $r \in Imf(U)$. Se tiene que ${\rho_{Imf}}_W^V \circ {\rho_{Imf}}_V^U(r) = {\rho_{\mathcal{G}}}_W^V \circ {\rho_{\mathcal{G}}}_V^U(r) = {\rho_{\mathcal{G}}}_W^U(r) = {\rho_{Imf}}_W^U(r)$.

En conclusión Imf es una pregavilla de grupos abelianos.

La construcción de la gavilla cociente la postergaremos para estudiar los anillos de gérmenes de la gavilla kernel y de la pregavilla imagen.

En el caso de la gavilla $Kerf$ para p en X se tiene que $(Kerf)_p = Ker(f_p)$, donde f_p es el homomorfismo de anillos dado por

$$\begin{aligned} f_p : \mathcal{F}_p &\to \mathcal{G}_p \\ s_p &\mapsto f_p(s_p) \end{aligned}$$

Sea $s_p = [(U, s)] \in \mathcal{F}_p$, con U es un abierto de X que contiene a p y s un elemento en $Kerf(U)$. En efecto, se tiene que $[(U, f_U(s))] = [(X, 0_{\mathcal{G}(X)})]$, pues $s \in Kerf(U)$ y por lo tanto $s_p \in Ker(f_p)$, así, se tiene que $(Kerf)_p \subseteq Ker(f_p)$ para todo $p \in X$. Ahora la otra contención $Ker(f_p) \subseteq (Kerf)_p$. Sea $s_p \in Ker(f_p)$, es decir, $s_p = [(U, s)]$, donde U es un abierto de X que contiene a p y $s \in \mathcal{F}(U)$, tal que $f_p(s_p) = [(U, f_U(s))] = [(X, 0_{\mathcal{G}(X)})]$. Por lo tanto existe un abierto W_p de X, contenido en U y que contiene a p, tal que $(f_U(s))|_{W_p} = 0_{\mathcal{G}(W_p)}$. Además, $U = \bigcup_{p \in U} W_p$ y como $\mathcal{G}$ es gavilla se tiene que $f_U(s) = 0_{\mathcal{G}(U)}$, por lo tanto $Ker(f_p) \subseteq (Kerf)_p$, para todo $p \in X$. En conclusión $(Kerf)_p = Ker(f_p)$.

De manera similar para la pregavilla imagen de el morfismo f se tiene $(Imf)_p = Im(f_p)$ para todo p en X: si $s_p = [(V_p, s)] \in (Imf)_p$, donde V_p es un abierto de X que contiene a p y $s \in Imf(V_p)$ entonces existe $r \in \mathcal{F}(V_p)$, de tal manera que $f_{V_p}(r) = s$. Consideramos $r_p = [(V_p, r)]$, se sigue que $f_p(r_p) = [(V_p, f_{V_p}(r))] = [(V_p, s)] = s_p$, así $s_p \in Im(f_p)$, de donde se tiene que $(Imf)_p \subseteq Im(f_p)$ para todo $p \in X$. Para la otra contención consideramos $s_p = [(V_p, s)] \in Im(f_p)$, donde V_p es un abierto de X que contiene a p y $s \in \mathcal{G}(V_p)$, pues $Im(f_p)$ es un subgrupo de $\mathcal{G}_p$, así, existe $r_p = [(U_p, r)] \in \mathcal{F}_p$, donde U_p es un abierto de X que contiene a p y $r \in \mathcal{F}(U_p)$ tal que $f_p(r_p) = s_p$. Por lo tanto $[(U_p, f_{U_p}(r))] = [(V_p, s)]$ teniendo que existe un abierto W_p contenido en $U_p \cap V_p$, que contiene a p y tal que $(f_{U_p}(r))|_{W_p} = s|_{W_p}$ y como f es morfismo de gavillas tenemos que $s|_{W_p} \in Imf_{W_p}$, de esta manera $s_p = [(V_p, s)] = [(W_p, s|_{W_p})] \in (Imf)_p$ y por lo tanto $Im(f_p) = (Imf)_p$.

La siguiente definición la ocuparemos en la construcción de la gavilla cociente.

Definición 1.26. Sea $\mathcal{F}$ una gavilla de anillos sobre un espacio topológico X. Un **ideal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{F}$** es tal que $\mathcal{I}(U)$ es un ideal de $\mathcal{F}(U)$ para todo abierto U de X y es compatible con la restricción $\rho_{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$.

Lo siguiente que haremos es ver que le pasa al cociente de una gavilla anillos y un ideal de dicha gavilla. Sea $\mathcal{F}$ una gavilla de anillos sobre un espacio topológico X y sea $\mathcal{I}$ un ideal de $\mathcal{F}$, el cociente $\left(\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}}\right)^-$ es tal que $\left(\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}}\right)^-(U) = \dfrac{\mathcal{F}(U)}{\mathcal{I}(U)}$ para todo abierto U de X y si se tienen dos abiertos $V \subseteq U$ se define $\rho_{(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}})^-}{}^U_V$ como:

$$\begin{array}{rcl} \rho_{(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}})^-}{}^U_V : \dfrac{\mathcal{F}(U)}{\mathcal{I}(U)} & \to & \dfrac{\mathcal{F}(V)}{\mathcal{I}(V)} \\ s + \mathcal{I}(U) & \mapsto & \rho_{\mathcal{F}}{}^U_V(s) + \mathcal{I}(V) \end{array}$$

Se sigue que $\left(\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}}\right)^-$ es una pregavilla de anillos, ya que cumple con los siguientes incisos:

1. $\rho_{(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}})^-}(\emptyset) = \{0\}$, ya que $\rho_{(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}})^-}(\emptyset) = \dfrac{\mathcal{F}(\emptyset)}{\mathcal{I}(\emptyset)} = \dfrac{\{0\}}{\{0\}} = \{0\}$.
2. Para todo abierto U de X, se tiene que $\rho_{(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}})^-}{}^U_U : \dfrac{\mathcal{F}(U)}{\mathcal{I}(U)} \to \dfrac{\mathcal{F}(U)}{\mathcal{I}(U)}$ y claramente se cumple que $\rho_{(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}})^-}{}^U_U = id_{\frac{\mathcal{F}(U)}{\mathcal{I}(U)}}$.
3. Sean U, V y W abiertos de X tales que $W \subseteq V \subseteq U$ y sea $s \in \mathcal{F}(U)$, se tiene que $\rho_{(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}})^-}{}^V_W \circ \rho_{(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}})^-}{}^U_V(s + \mathcal{I}(U)) = \rho_{(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}})^-}{}^V_W(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_V(s) + \mathcal{I}(V)) = \rho_{\mathcal{F}}{}^V_W(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_V(s)) + \mathcal{I}(W) = \rho_{\mathcal{F}}{}^U_W(s) + \mathcal{I}(W)$. Por otro lado $\rho_{(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}})^-}{}^U_W(s + \mathcal{I}(U)) = \rho_{\mathcal{F}}{}^U_W(s) + \mathcal{I}(W)$. Por lo tanto, $\rho_{(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}})^-}{}^U_W = \rho_{(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}})^-}{}^V_W \circ \rho_{(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}})^-}{}^U_V$.

En conclusión, el cociente $\left(\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}}\right)^-$ es una pregavilla de grupos abelianos. Esto da paso a la definición del cociente de una gavilla de anillos con un ideal.

DEFINICIÓN 1.27. Sea $\mathcal{I}$ un ideal de la gavilla de anillos $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X. Con notaciones de la presente sección, $\left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}}\right)^{-}$ es la **pregavilla cociente de $\mathcal{F}$ por $\mathcal{I}$**.

Ahora estudiemos que pasa con el anillo de gérmenes de la pregavilla $\left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}}\right)^{-}$.

LEMA 1.28. *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla de anillos sobre el espacio topológico X y sea $\mathcal{I}$ un ideal de $\mathcal{F}$. Se sigue que $\left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}}\right)^{-}_{p} \cong \frac{\mathcal{F}_p}{\mathcal{I}_p}$, para todo $p \in X$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $p \in X$. Consideramos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \phi : \frac{\mathcal{F}_p}{\mathcal{I}_p} &\rightarrow \left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}}\right)^{-}_{p} \\ s_p + \mathcal{I}_p &\mapsto [(U, s + \mathcal{I}(U))] \end{aligned}$$

Se verifica que ϕ es homomorfismo de anillos. En efecto, sean $s_p = [(U, s)]$ y $t_p = [(V, t)]$ elementos en $\mathcal{F}_p$. Se sigue que $\phi((s_p + \mathcal{I}_p) + (t_p + \mathcal{I}_p)) = \phi((s_p + t_p) + \mathcal{I}_p) = [(U \cap V, (s|_{U\cap V} + t|_{U\cap V}) + \mathcal{I}(U \cap V))] = [(U, s + \mathcal{I}(U))] + [(V, t + \mathcal{I}(V))] = \phi(s_p + \mathcal{I}_p) + \phi(t_p + \mathcal{I}_p)$, de manera análoga se verifica que $\phi((s_p + \mathcal{I}_p) \times (t_p + \mathcal{I}_p)) = \phi(s_p + \mathcal{I}_p) \times \phi(t_p + \mathcal{I}_p)$ y además se observa que $\phi(1_p + \mathcal{I}_p) = [(U, 1_{\mathcal{F}(U)} + \mathcal{I}(U))]$. Ahora consideramos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \psi : \left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}}\right)^{-}_{p} &\rightarrow \frac{\mathcal{F}_p}{\mathcal{I}_p} \\ [(U, s + \mathcal{I}(U))] &\mapsto s_p + \mathcal{I}_p \end{aligned}$$

Se verifica que ψ es un homomorfismo de anillos. En efecto, sean $[(U, s+\mathcal{I}(U))]$, $[(V, t+\mathcal{I}(V))]$ elementos de $\left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}}\right)^{-}_{p}$. Así, $\psi([(U, s + \mathcal{I}(U)]+[(V, t + \mathcal{I}(V))]) = \psi([(U \cap V, (s|_{U\cap V} + t|_{U\cap V}) + \mathcal{I}(U \cap V))])$ $= (s|_{U\cap V} + t|_{U\cap V})_p + \mathcal{I}_p = (s_p + t_p) + \mathcal{I}_p = (s_p + \mathcal{I}_p) + (t_p + \mathcal{I}_p) = \psi([(U, s+\mathcal{I}(U))]) + \psi([(V, t+\mathcal{I}(V))])$, de manera análoga se verifica que $\psi([(U, s + \mathcal{I}(U)]\times[(V, t + \mathcal{I}(V))]) = \psi([(U, s+\mathcal{I}(U))])\times\psi([(V, t+\mathcal{I}(V))])$ y además se tiene que $\psi([(U, 1_{\mathcal{F}(U)} + \mathcal{I}(U))]) = 1_p + \mathcal{I}_p$. Ya con ambas aplicaciones veamos que pasa con la composición de los homomorfismos de anillos ϕ y ψ. Sea $(s_p + \mathcal{I}_p) \in \frac{\mathcal{F}_p}{\mathcal{I}_p}$, se sigue que, $\psi \circ \phi(s_p + \mathcal{I}_p) = \psi(\phi(s_p + \mathcal{I}_p)) = \psi([(U, s + \mathcal{I}(U))]) = s_p + \mathcal{I}_p$. Por otro lado, para $[(U, s + \mathcal{I}(U))] \in \left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}}\right)^{-}_{p}$, se tiene que, $\phi \circ \psi([(U, s + \mathcal{I}(U))]) = \phi(\psi([(U, s + \mathcal{I}(U))])) = \phi(s_p + \mathcal{I}_p) = [(U, s + \mathcal{I}(U))]$. En ambos casos la composición es la identidad, por lo que ψ es el homomorfismo inverso de ϕ. En conclusión, el anillo $\frac{\mathcal{F}_p}{\mathcal{I}_p}$ es isomorfo al anillo $\left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}}\right)^{-}_{p}$. ❏

La introducción a la Teoría de Gavillas termina con la definición de las sucesiones exactas de gavillas.

Definición 1.29. Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ gavillas de anillos sobre un espacio topológico X y los morfismos de gavillas $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $g : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$. La **sucesión**

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

es **exacta de gavillas** si para todo $p \in X$, se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_p \xrightarrow{f_p} \mathcal{G}_p \xrightarrow{g_p} \mathcal{H}_p \longrightarrow 0\ ,$$

es exacta de anillos.

3. El Espacio de Zariski de un Anillo

La siguiente herramienta que vamos a usar, más sencilla que la de la sección anterior pero no menos importante es el espacio de Zariski de un anillo.

Sea A un anillo. El conjunto de los ideales primos del anillos A lo denotaremos por $Spec(A)$ y el espacio de Zariski de A, es el conjunto $Spec(A)$ dotado de la topología de Zariski. A continuación se hace la construcción de dicha topología y se estudian algunas de sus propiedades.

Siempre es posible considerar a $Spec(A) \neq \emptyset$, la prueba de ello es el siguiente lema.

Lema 1.30. *Sea A un anillo, se cumple que* $Spec(A) \neq \emptyset$.

Demostración. Por definición de anillo consideramos A como un anillo conmutativo con unidad, así $A \neq \{0\}$ y por lo tanto el conjunto $\Gamma = \{I \in \partial A : I \neq A\}$ no es vacío. Además, la inclusión $(\subseteq)$ es una relación de orden en Γ, pues verifica que:

- La relación $\subseteq$ es reflexiva: para todo ideal J de A, tenemos que $J \subseteq J$.
- La relación $\subseteq$ es antisimétrica: para los ideales J, K de A, tales que $J \subseteq K$ y $K \subseteq J$ se tiene que $J = K$.
- La relación $\subseteq$ es transitiva: en efecto, sean J, K y L elementos de Γ, tales que $J \subseteq K$ y $K \subseteq L$, se sigue de inmediato que $J \subseteq L$.

Ahora, sea Λ un conjunto no vacío y sea $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia totalmente ordenada de elementos en Γ, se quiere probar que dicha familia tiene una cota superior $J \in \Gamma$. Como candidato se propone $J = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$.

Primero verificamos que J está en Γ, se tiene que $J \neq \emptyset$, pues, para cada $\lambda \in \Lambda$, $I_\lambda \neq \emptyset$. Además, $(J, +)$ es subgrupo de $(A, +)$ ya que;

- 0_A es elemento de J, en efecto, para todo $\lambda \in \Lambda$ se sabe que I_λ es ideal, teniendo que 0_A es elemento de I_λ para todo $\lambda \in \Lambda$ y por lo tanto 0_A está en J.
- Para x, y elementos en J se tiene que $x - y$ es un elemento de J, pues, como x, y son elementos de J, existen λ, γ en Λ tales que $x \in I_\lambda$ e $y \in I_\gamma$, y como $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia totalmente ordenada, sin perdida de generalidad tenemos que, $I_\lambda \subseteq I_\gamma$. Así, $x \in I_\gamma$ y como I_γ es un subgrupo de $(A, +)$ se tiene que $x-y$ es elemento de I_γ. Por lo tanto $x-y$ es elemento de J.

Una vez que obtenemos que $(J, +)$ es subgrupo de $(A, +)$, hay que verificar que J es un ideal de A, para ello consideramos un elemento a en A y un elemento x en J. Por ser x elemento de J, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in I_\lambda$ y por ser I_λ un ideal de A, se tiene que ax es elemento de I_λ, de donde se sigue que ax está en J y por lo tanto J es un ideal de A. Sólo falta probar que $J \neq A$, para tener que J es un elemento de Γ. Supongamos lo contrario $J = A$, esto equivale a que $1_A \in J$, es decir $1_A \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$. Así, existe $\gamma \in \Lambda$ tal que $1_A \in I_\gamma$, lo cual es equivalente a que exista $\gamma \in \Lambda$ tal que $I_\gamma = A$, lo cual es una contradicción y por lo tanto $J \neq A$, en conclusión $J \in \Gamma$. Lo siguiente es probar que J es cota superior de $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$: sea $\gamma \in \Lambda$ se tiene que $I_\gamma \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, es decir, $I_\gamma \subseteq J$ teniendo que J es cota superior de $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Aplicando el lema de Zorn, se tiene que existe m en Γ tal que m es maximal. Veamos que m es un ideal maximal de A. Sea L un ideal propio de A tal que $m \subseteq L$. Se quiere probar que $m = L$. Por ser L ideal propio de A se tiene que L es elemento de Γ y como $m \subseteq L$ por ser m un elemento maximal de Γ sigue que $m = L$. Por lo tanto $Max(A) \neq \emptyset$ y ya que $Max(A) \subseteq Spec(A)$ se concluye que $Spec(A) \neq \emptyset$. ❑

En $Spec(A)$ definimos los conjuntos $V(I) = \{p \in Spec(A) : I \subseteq p\}$, donde I es un ideal de A, con estos conjuntos haremos la construcción de la topología de Zariski.

TEOREMA 1.31. *Sea A un anillo. Si consideramos los conjuntos $V(I)$ como los cerrados de $Spec(A)$, entonces $Spec(A)$ cumple ser un espacio topológico conocido como el* **espacio de Zariski** *del anillo A.*

DEMOSTRACIÓN. Se verifica que $Spec(A)$ es un espacio topológico al considerar los conjuntos $V(I)$ como cerrados, donde I es un ideal de A.

1. $\emptyset$ y $Spec(A)$ son elementos de la topología.
   - $Spec(A)$ está, basta considerar el ideal $\{0_A\}$, ya que todo ideal primo lo contiene. Así, $V(\{0\}) = Spec(A)$.
   - El vacío está, basta considerar A como el ideal, ya que por definición, todo ideal primo es distinto del anillo total. Así, $V(A) = \emptyset$.

2. La intersección arbitraria de cerrados es un cerrado. Se sabe que una suma arbitraria de ideales es también un ideal, por lo que basta probar $\bigcap_{j\in L} V(I_j) = V\left(\sum_{j\in L} I_j\right)$, donde $L \neq \emptyset$ y para todo $j \in L$ tenemos que I_j es un ideal de A. Sea $\mathfrak{p} \in Spec(A)$, se tiene que $\mathfrak{p} \in \bigcap_{j\in L} V(I_j)$ si y sólo si para todo j en L, $\mathfrak{p} \in V(I_j)$, es decir, para todo j en L se tiene que $I_j \subseteq \mathfrak{p}$, de donde se sigue que $\sum_{j\in L} I_j \subseteq \mathfrak{p}$ y por lo tanto $\mathfrak{p} \in V\left(\sum_{j\in L} I_j\right)$. Así, $\bigcap_{j\in L} V(I_j) = V\left(\sum_{j\in L} I_j\right)$.
3. Unión finita de cerrados es un cerrado. Es suficiente hacer la prueba para dos cerrados. Sean I, J ideales de un anillo A, se tiene que $V(I) \bigcup V(J) = V(IJ)$. En efecto, IJ está en I y a su vez IJ está en J, por lo que $V(I) \subseteq V(IJ)$ y $V(J) \subseteq V(IJ)$, de donde obtenemos que $V(I) \bigcup V(J) \subseteq V(IJ)$.
   Ahora sea $\mathfrak{p} \in Spec(A)$, si $\mathfrak{p} \in V(IJ)$ entonces $IJ \subseteq \mathfrak{p}$. Así $I \subseteq \mathfrak{p}$ o $J \subseteq \mathfrak{p}$, es decir, $\mathfrak{p} \in V(I)$ o $\mathfrak{p} \in V(J)$ por lo tanto $\mathfrak{p} \in V(I) \bigcup V(J)$. Teniendo así ambas contenciones y con ello la igualdad.

En conclusión $Spec(A)$ es un espacio topológico. ❏

Ejemplo 1.32. Considerando el anillo $\mathbb{Z}$ se sabe que el conjunto de los ideales de $\mathbb{Z}$ está definido por: $\{n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} : n \in \mathbb{Z}_+\} := \partial\mathbb{Z}$ y también se sabe que el conjunto de sus ideales primos se define como $Spec(\mathbb{Z}) = \{\{0\}\} \bigcup \{p\mathbb{Z} \in \partial\mathbb{Z} : p - primo\}$.

Estudiando un poco la topología de Zariski de $Spec(\mathbb{Z})$, se tiene que $V(\{0_{\mathbb{Z}}\}) = Spec(\mathbb{Z})$ y para $n \in \mathbb{N}$ se considera $V(n\mathbb{Z})$, si $\mathfrak{p} \in V(n\mathbb{Z})$, digamos que es de la forma $\mathfrak{p} = p\mathbb{Z}$ para algún p primo. Se tiene que $n\mathbb{Z} \subseteq p\mathbb{Z}$. Es decir, p divide a n y como $\mathbb{Z}$ es un dominio de factorización única, se sigue que $n = \mu p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$, donde $\mu \in \{1, -1\}$, $s, r_1, \ldots, r_s$ son elementos en $\mathbb{N}$ y $p_1, \ldots, p_s$ son primos en $\mathbb{N}$. Luego, $p \in \{p_1, \ldots, p_s\}$ y por lo tanto $V(n\mathbb{Z}) = \{p_1\mathbb{Z}, \ldots, p_s\mathbb{Z}\}$.

Dado un anillo A, es suficiente un ideal de A para definir un cerrado en el espacio de Zariski del anillo A, por lo que para cualquier $a \in A$ definimos el abierto $D(a) = Spec(A) \setminus V(Aa)$. Se dice que $D(a)$ es el abierto básico de $Spec(A)$ asociado al elemento a en A. Además, para un elemento $\mathfrak{p} \in (Spec(A) \setminus V(Aa))$, es decir $\mathfrak{p}$ en $Spec(A)$ y $\mathfrak{p} \notin V(Aa)$ se sigue por definición que $Aa \nsubseteq \mathfrak{p}$, así $a \notin \mathfrak{p}$ y por lo tanto para todo a en A el abierto básico $D(a)$ asociado al elemento a también se puede definir como $D(a) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) : a \notin \mathfrak{p}\}$. La siguiente proposición aclara el por qué del nombre de abiertos básicos.

Proposición 1.33. *Sea $Spec(A)$ el espacio de Zariski de un anillo A. La familia $(D(a))_{a\in A}$, es una base de abiertos para la topología de Zariski del espacio $Spec(A)$.*

Demostración. Sea U un abierto de $Spec(A)$, es decir de la forma $U = Spec(A) \setminus V(I)$ para algún ideal I de A. Se tienen los siguientes casos.

- Si $U = \emptyset$, basta considerar 0_A, pues se sabe que $D(0) = \emptyset$.
- Si $U \neq \emptyset$, entonces se considera $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ tal que $\mathfrak{p} \in U$, es decir $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ e $I \nsubseteq \mathfrak{p}$. Es decir, $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ y existe $a \in I$ tal que $a \notin \mathfrak{p}$, por lo tanto $\mathfrak{p} \in D(a)$ y así $\mathfrak{p} \in \bigcup_{a \in I} D(a)$.

  En conclusión,
$$U = \bigcup_{a \in I} D(a).$$

Así, cualquier abierto en $Spec(A)$ se puede escribir como una unión de abiertos de la forma $D(a)$. Por lo tanto la familia $(D(a))_{a \in A}$ es una base de la topología de Zariski de $Spec(A)$. ❏

En la siguiente proposición se estudian abiertos básicos correspondientes a elementos muy particulares en un anillo.

Proposición 1.34. *Sea A un anillo y $a \in A$. Se tienen los siguientes resultados.*

- $D(a) = \emptyset$ *si y sólo si* $a \in Nil(A)$.
- $D(a) = Spec(A)$ *si y sólo si* $a \in U(A)$.

Demostración.

- Sea $a \in A$, tal que $D(a) = \emptyset$. Se tiene que $D(a) = \emptyset$, si y sólo si $V(Aa) = Spec(A)$, si y sólo si $Spec(A) \subset V(Aa)$, pues la otra contención siempre se tiene. Así, para todo $\mathfrak{p}$ en $Spec(A)$ se tiene que $Aa \subseteq \mathfrak{p}$, es decir, para todo $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ se sigue que $a \in \mathfrak{p}$ y por lo tanto, $a \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in Spec(A)} \mathfrak{p}$. Así, $a \in Nil(A)$.
- Sea $a \in A$ tal que $D(a) = Spec(A)$, así, $V(Aa) = \emptyset$. Por lo tanto, no existe $\mathfrak{p}$ en $Spec(A)$ tal que $Aa \subseteq \mathfrak{p}$, lo cual pasa si y sólo si $Aa = A$. Por lo tanto, $a \in U(A)$.

Como casos particulares, si $a = 0_A$, entonces $D(0_A) = \emptyset$ y en el caso que $a = 1_A$, se tiene que $D(1_A) = Spec(A)$. ❏

Veamos quiénes son los abiertos básicos del Ejemplo 1.32. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Si $p\mathbb{Z} \in D(n)$. Por definición, $p\mathbb{Z} \in (Spec(\mathbb{Z}) \setminus V(n\mathbb{Z}))$. Es decir, $p\mathbb{Z} \in Spec(\mathbb{Z})$ y $n\mathbb{Z} \nsubseteq p\mathbb{Z}$. Por lo tanto p no divide a n y como $\mathbb{Z}$ es dominio de factorización única se tiene que $n = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}$, donde $r_1, \dots, r_s$ son elementos de $\mathbb{N}$ y $p_1, \cdots, p_s$ primos en $\mathbb{Z}$. Así, tenemos que $p \notin \{p_1, \dots, p_s\}$ y por lo tanto $D(n) = Spec(A) \setminus \{p_1\mathbb{Z}, \dots, p_s\mathbb{Z}\}$. En este caso se tiene que todos los abiertos de la topología son básicos, además, podemos decir que $D(1) = D(-1) = Spec(\mathbb{Z})$ y también que $D(0) = \emptyset$.

Ejemplo 1.35. Considerando como anillo el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, se sabe que el conjunto de sus ideales es $\partial\mathbb{R} = \{\{0\}, \mathbb{R}\}$ y que el conjunto de ideales primos es $Spec(\mathbb{R}) = \{\{0\}\}$. Además, ya que para todo x en $\mathbb{R}$ se tiene que x es una unidad o bien x es el cero, los abiertos que se tienen son $D(0) = \emptyset$ y en caso que $x \neq 0$ se tiene el abierto $D(x) = Spec(\mathbb{R}) = \{\{0\}\}$. Con este ejemplo hemos ilustrado cuál es el comportamiento de la topología de Zariski si consideramos un campo.

Ejemplo 1.36. Ahora consideramos el anillo de polinomios en una variable y coeficientes en los números complejos, $\mathbb{C}[x]$. Sabemos que $\mathbb{C}[x]$ es dominio de factorizacón única y como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado los ideales primos que son generados por elementos irreducibles son los polinomios de grado uno, por lo tanto $Spec(\mathbb{C}[x]) = \{\{0\}\} \bigcup \{\langle x - \alpha\rangle | \alpha \in \mathbb{C}\}$. Sabemos que el vacío es el abierto asociado a los elementos nilpotentes del anillo, en este caso el polinomio nulo. Y para un polinomio $f(x) \in (\mathbb{C}[x] \setminus \{0\})$, tenemos que $\mathfrak{p} \in D(f(x))$ es equivalente a que $f(x) \notin \mathfrak{p}$, por lo que $\mathfrak{p} = \{0\}$ siempre es un elemento de $D(f(x))$ y si $\mathfrak{p}$ es de la forma $\langle x-\alpha\rangle$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$, tener que $f(x) \notin \langle x - \alpha\rangle$ es equivalente a que α no es raíz de $f(x)$, pues $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado. En conclusión, el abierto $D(f(x))$ es el ideal cero, más el conjunto de todos los ideales primos de la forma $\langle x - \beta\rangle$, donde β no es raíz de $f(x)$.

Ejemplo 1.37. Consideramos el anillo de polinomios con coeficientes en los números reales, $\mathbb{R}[x]$, al igual que en el ejemplo anterior, estudiamos los polinomios irreducibles, para lo cual tenemos el siguiente lema.

Lema 1.38. *Los polinomios irreducibles en* $\mathbb{R}[x]$*, son los polinomios de grado uno y los polinomios de grado dos de la forma* $x^2 + bx + c$*, donde* $b, c \in \mathbb{R}$ *y tales que* $b^2 - 4c < 0$.

Demostración. Sea $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio irreducible, si el grado de $f(x)$ es uno no hay nada que probar. Suponiendo que $f(x)$ es de la forma $f(x) = a_0x^d + a_1x^{d-1} + \cdots + a_{d-1}x + a_d$, donde $d > 1$, se tiene que $a_d \neq 0$, de lo contrario tendríamos que $f(x) = x(a_0x^{d-1} + \cdots + a_{d-1})$, lo cual es una contradicción. Más aún, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(\alpha) \neq 0$ de no ser así $f(x)$ se podría factorizar. Ahora, como $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$, se tiene que $f(x)$ tiene todas sus raíces en $\mathbb{C}$, consideramos una, es decir, consideramos $\beta \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ tal que $f(\beta) = 0$. Se observa que también el conjugado de β es una raíz de $f(x)$, ya que podemos escribir

$$\overline{f(\beta)} = \overline{0} = \overline{(\beta)^d + a_1(\beta)^{d-1} + \cdots + a_{d-1}\beta + a_d} = (\overline{\beta})^d + a_1(\overline{\beta})^{d-1} + \cdots + a_{d-1}\overline{\beta} + a_d = f(\overline{\beta}) = 0,$$

esto nos dice que las raíces en $\mathbb{C}$ vienen por parejas, de donde se concluye que d es par y por lo tanto se puede factorizar como $f(x) = (x-\beta)(x-\overline{\beta}) \cdot r(x) = (x^2 - (\beta+\overline{\beta})x + |\beta|^2) \cdot r(x)$, donde $\beta + \overline{\beta}$ y $|\beta|^2$ están en $\mathbb{R}$. Como los coeficientes de $f(x)$ están en $\mathbb{R}$, se sigue que $r(x)$ debe de tener coeficientes en $\mathbb{R}$, o se contradice la naturaleza de $f(x)$, pues tendría coeficientes en $\mathbb{C}$, además, $f(x)$ es irreducible, por lo que $r(x)$ sólo puede ser una constante. Sin perdida de generalidad $f(x) = x^2 - (\beta + \overline{\beta})x + |\beta|^2$, suponiendo que $\beta = \alpha + yi$, donde $\alpha, y \in \mathbb{R}$, al etiquetar los coeficientes de $f(x)$ como $b = -(\beta + \overline{\beta})$ y $c = |\beta|^2$, tenemos que $b^2 - 4c = 4\alpha^2 - 4(\alpha^2 + y^2) < 0$, por lo tanto $b^2 - 4c < 0$. ❑

Del Lema 1.38 tenemos que el espacio de Zariski de $\mathbb{R}[x]$ es

$$Spec(\mathbb{R}[x]) = \{\{0\}\} \bigcup \{\langle x - \alpha \rangle : \alpha \in \mathbb{R}\} \bigcup \{\langle x^2 + bx + c \rangle : b, c \in \mathbb{R} \text{ y } b^2 - 4c < 0\}.$$

Lo que viene es una propiedad de los abiertos básicos de la topología.

Lema 1.39. *Sea a un elemento de un anillo A. El abierto básico $D(a)$ asociado a a es casi compacto.*

Demostración. Sea $(U_i)_{i \in I}$ una cubierta de abiertos para $D(a)$ en $Spec(A)$, donde $I \neq \emptyset$. Por ser $(D(x))_{x \in A}$ una base para la topología de Zariski, suponemos que para cada $i \in I$ que $U_i = D(b_i)$, para algún $b_i \in A$ y así, consideramos $D(a) \subseteq \bigcup_{i \in I} D(b_i)$. Como $D(a) \subseteq \bigcup_{i \in I} D(b_i)$, se tiene que $(Spec(A) \setminus V(Aa)) \subseteq \bigcup_{i \in I}(Spec(A) \setminus V(Ab_i))$ lo que implica que $\bigcap_{i \in I} V(Ab_i) \subseteq V(Aa)$. De esto se sigue que $V\left(\sum_{i \in I} Ab_i\right) \subseteq V(Aa)$, si y sólo si $\sqrt{Aa} \subseteq \sqrt{\sum_{i \in I} Ab_i}$. Así, $a \in \sqrt{\sum_{i \in I} Ab_i}$, esto es, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a^m \in \sum_{i \in I} Ab_i$, es decir, existen $\mu_1, \ldots, \mu_r$ elementos de A y m, r elementos de $\mathbb{N}$ tales que $a^m = \mu_1 b_1 + \cdots + \mu_r b_r$ y por lo tanto a es un elemento de $\sum_{i=1}^{r} Ab_i$ para algún $r \in \mathbb{N}$, teniendo así que $Aa \subseteq \sqrt{\sum_{i=1}^{r} Ab_i}$, para algún $r \in \mathbb{N}$. Luego $\sqrt{Aa} \subseteq \sqrt{\sum_{i=1}^{r} Ab_i}$, para algún $r \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $V\left(\sum_{i=1}^{r} Ab_i\right) \subseteq V(Aa)$, para algún $r \in \mathbb{N}$ lo cual implica que $\bigcap_{i=1}^{r} V(Ab_i) \subseteq V(Aa)$ para algún $r \in \mathbb{N}$. Así, $(Spec(A) \setminus V(Aa)) \subseteq \left(Spec(A) \setminus \bigcup_{i=1}^{r} V(Ab_i)\right)$, donde $r \in \mathbb{N}$. Por lo tanto como $D(a) \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} D(b_i)$ donde $r \in \mathbb{N}$ concluimos que $D(a)$ es casi compacto. ❑

Corolario 1.40. *Sea A anillo. El espacio topológico $Spec(A)$ es casi compacto.*

Demostración. Es suficiente considerar cualquier unidad del anillo A, por ejemplo 1_A, ya que por el Teorema 1.39 $Spec(A) = D(1_A)$, que es el abierto básico asociado a 1_A el cual es casi compacto. Es decir $Spec(A)$ es casi compacto. ❑

Otra cosa que nos interesa es la relación que se obtiene entre dos espacios de Zariski, partiendo de un homomorfismo anillos, es decir, a partir de una pareja de anillos y un homomorfismo entre ellos, estudiaremos que pasa con sus espacios de Zariski. Sean A, B anillos, f un homomorfismo entre ellos y $\mathfrak{q} \in Spec(B)$, tenemos que $f^{-1}(\mathfrak{q}) \in Spec(A)$. En efecto, ya que cumple con lo siguiente: $0_A \in f^{-1}(\mathfrak{q})$, pues $0_B \in \mathfrak{q}$. Sean $a, c \in A$ tales que $a, c \in f^{-1}(\mathfrak{q})$, de donde se tiene que $f(a), f(b) \in \mathfrak{q}$ y como $\mathfrak{q}$ es ideal $f(a) - f(b) \in \mathfrak{q}$, por ser f un homomorfismo de anillos obtenemos que $f(a) - f(b) = f(a - b) \in \mathfrak{p}$ concluyendo que $(a - b) \in f^{-1}(\mathfrak{q})$. Además, si $ac \in f^{-1}(\mathfrak{q})$ entonces $a \in f^{-1}(\mathfrak{q})$ o $c \in f^{-1}(\mathfrak{q})$ ya que $f(ac) = f(a)f(c) \in \mathfrak{q}$, así, $f(a) \in \mathfrak{q}$ o $f(c) \in \mathfrak{q}$ y por lo tanto $a \in f^{-1}(\mathfrak{q})$ o $c \in f^{-1}(\mathfrak{q})$. En conclusión, $f^{-1}(\mathfrak{q})$ es un ideal primo de A.

Proposición 1.41. *Sean A, B anillos y $f : A \to B$ un homomorfismo entre ellos. La aplicación f^* definida como*

$$\begin{aligned} f^* : Spec(B) &\to Spec(A) \\ \mathfrak{q} &\mapsto f^*(\mathfrak{q}) = f^{-1}(\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. Sean $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \in Spec(B)$ tales que $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$ y sea $x \in A$, se tiene que $x \in f^{-1}(\mathfrak{q})$, si y sólo si $f(x) \in \mathfrak{q}$, como $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$, se tiene que $f(x) \in \mathfrak{q}'$. Así, $x \in f^{-1}(\mathfrak{q}')$ y por lo tanto f^* está bien definida. Para probar que f^* es continua basta probar que la preimagen de un abierto básico de $Spec(A)$ es un abierto de $Spec(B)$. Sean $a \in A$ y $\mathfrak{q} \in Spec(B)$ tales que $\mathfrak{q} \in (f^*)^{-1}(D(a))$, es decir, $f^{-1}(\mathfrak{q}) \in D(a)$, esto es equivalente a que $a \notin f^{-1}(\mathfrak{q})$. Así, $f(a) \notin \mathfrak{q}$ y por lo tanto $\mathfrak{q} \in D(f(a))$. En conclusión la preimagen de un abierto básico en $Spec(A)$ es un abierto de $Spec(B)$, más aún, para el abierto básico $D(a) \in Spec(A)$, $(f^*)^{-1}(D(a)) = D(f(a))$. ❏

Proposición 1.42. *Sean A, B anillos, $f : A \to B$ un homomorfismo entre ellos e I un ideal de A. Se tiene que $(f^*)^{-1}(V(I)) = V(f(I) \cdot B)$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{q}$ un ideal primo de B tal que $\mathfrak{q}$ está en $(f^*)^{-1}(V(I))$, donde f^* es la función definida en la proposición anterior, se sigue que $f^*(\mathfrak{q})$ está en $V(I)$, esto pasa si y sólo si $I \subseteq f^*(\mathfrak{q})$, es decir $I \subseteq f^{-1}(\mathfrak{q})$. Luego, $f(I) \subseteq \mathfrak{q}$ y por lo tanto $\mathfrak{q} \in V(f(I) \cdot B)$. Así, para el cerrado $V(I)$ en $Spec(A)$ se tiene que, $(f^*)^{-1}(V(I)) = V(f(I) \cdot B)$ es decir, la preimagen de el cerrado $V(I) \in Spec(A)$ bajo f^* es el cerrado en $Spec(B)$ asociado al ideal generado en B por $f(I)$. ❏

Proposición 1.43. *Sean A, B anillos, $f : A \to B$ un morfismo entre ellos, $f^* : Spec(B) \to Spec(A)$ la aplicación continua antes definida y J un ideal de B. La cerradura de la imagen bajo*

f^* del cerrado $V(J)$ de $Spec(B)$ es igual a el cerrado asociado al ideal $f^{-1}(J)$, es decir, $\overline{f^*(V(J))} = V(f^{-1}(J))$.

Demostración. Sea J un ideal de B. $\overline{f^*(V(J))} = V(f^{-1}(J))$, en efecto:

- $\overline{f^*(V(J))} \subseteq V(f^{-1}(J))$. Ya que la cerradura de un cerrado es un cerrado, basta probar que $f^*(V(J)) \subseteq V(f^{-1}(J))$. Sea $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ tal que $\mathfrak{p} \in f^*(V(J))$, así, existe $\mathfrak{q} \in Spec(B)$ tal que $\mathfrak{q} \in V(J)$ y $\mathfrak{p} = f^*(\mathfrak{q})$, es decir, existe $\mathfrak{q} \in Spec(B)$ tal que $J \subseteq \mathfrak{q}$ y $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$, consecuentemente $f^{-1}(J) \subseteq \mathfrak{p}$ o lo que es igual, $\mathfrak{p} \in V(f^{-1}(J))$. Por lo tanto $f^*(V(J)) \subseteq V(f^{-1}(J))$.
- $V(f^{-1}(J)) \subseteq \overline{f^*(V(J))}$. Si $V(f^{-1}(J)) = \emptyset$ nada a probar. Suponiendo que $V(f^{-1}(J)) \neq \emptyset$ consideramos $p \in Spec(A)$ tal que $p \in V(f^{-1}(J))$. Lo que haremos para probar que $p \in \overline{f^*(V(J))}$ es probar que para cada $a \in A$ tal que $p \in D(a)$ se tiene que $(D(a) \cap f^*(V(J))) \neq \emptyset$. Tomamos a en A tal que $p \in D(a)$, sabemos que $f^{-1}(J) \subseteq p$ de donde se sigue que $\sqrt{f^{-1}(J)} = f^{-1}(\sqrt{J})$ y como $a \in p$ se sigue que $a \notin f^{-1}(\sqrt{J})$, así, $f(a)$ esta en $\sqrt{J}$. Además, $\sqrt{J} = \bigcap_{t \in V(J)} t$, por lo que existe $q \in Spec(B)$ tal que $J \subseteq q$ y $f(a) \notin q$ y así $f^{-1}(\sqrt{(J)}) \subseteq f^{-1}(q)$ y $a \notin f^{-1}(q)$, teniendo que $f^{-1}(q) \in D(a)$ y además, ya que $f^{-1}(q) = f^*(q) \in f^*(V(J))$ se sigue que $(D(a) \cap f^*(V(J))) \neq \emptyset$. Finalmente, como a era un elemento arbitrario tal que $p \in D(a)$ tenemos que $p \in \overline{f^*(V(J))}$ y de este modo $V(f^{-1}(J)) \subseteq \overline{f * (V(J))}$.

En conclusión, tenemos que $\overline{f^*(V(J))} = V(f^{-1}J)$. ❑

Proposición 1.44. *Sean A, B anillos y $f : A \to B$ un homomorfismo entre ellos. Si f es sobreyectivo, entonces la aplicación inducida f^* es un homeomorfismo entre $Spec(B)$ y el cerrado $V(Ker(f))$.*

Demostración. Como $f : A \to B$ es sobreyectivo, para todo $\mathfrak{q} \in Spec(B)$, tenemos que existe $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ tal que $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$. Más aún, para todo $\mathfrak{q} \in Spec(B)$ tenemos que $0_B \in \mathfrak{q}$, es decir, dado $a \in A$ tal que $a \in Ker(f)$, se tiene que $f(a) = 0_B \in \mathfrak{q}$, por lo tanto $a \in f^{-1}(\mathfrak{q})$ para todo $\mathfrak{q} \in Spec(B)$. Así, $Ker(f) \subseteq f^*(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, es decir, para todo $\mathfrak{q} \in Spec(B)$ tenemos que $f^*(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p} \in V(Ker(f))$ y por lo tanto $f^*(Spec(B)) \subseteq V(Ker(f))$. Además $f(Ker(f)) = \{0_B\}$ por lo que para todo $\mathfrak{q} \in Spec(B)$ se tiene que $f(Ker(f)) \subseteq \mathfrak{q}$ de donde se sigue que $Ker(f) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{q})$ para todo $\mathfrak{q} \in Spec(B)$ por lo tanto $V(Ker(f)) \subseteq f^*(Spec(B))$ y con ello $f^*(Spec(B)) = V(Ker(f))$. Así, tenemos la aplicación

$$\begin{aligned} \widetilde{f^*} : Spec(B) &\to V(Ker(f)) \\ \mathfrak{q} &\mapsto f^*(\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

que es una aplicación continua pues f^* lo es. Además se verifica lo siguiente: $\widetilde{f^*}$ es inyectiva. Sean $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ elementos en $Spec(B)$ tales que $f^*(\mathfrak{q}) = f^*(\mathfrak{q}')$ y sea $b \in \mathfrak{q}$, por ser f sobreyectiva existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$, lo que implica que $a \in f^{-1}(\mathfrak{q}) = f^*(\mathfrak{q}) = f^*(\mathfrak{q}')$ y por lo tanto $b = f(a) \in \mathfrak{q}'$, teniendo que $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}'$. De manera análoga $\mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{q}$. También se tiene que $\widetilde{f^*}$ es sobreyectiva ya que $\widetilde{f^*}(Spec(B)) = V(Ker(f))$. Lo siguiente para tener que $\widetilde{f^*}$ es un homeomorfismo entre $Spec(B)$ y $V(Ker(f))$, es probar que $\widetilde{f^*}^{-1}$ es continua, la prueba se hace verificando que $\widetilde{f^*}$ es una aplicación cerrada. Sea J un ideal en B, por la Proposición 1.43 sabemos que $f^*(V(J)) \subseteq V(f^{-1}(J))$.
Recíprocamente, sea $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ tal que $\mathfrak{p} \in V(f^{-1}(J))$, es decir $f^{-1}(J) \subseteq \mathfrak{p}$ y como J es un ideal de B contiene al cero de B, así se tiene que $Ker(f) \subseteq f^{-1}(J)$ y por lo tanto $Ker(f) \subseteq \mathfrak{p}$, teniendo que existe $\mathfrak{q} \in Spec(B)$ tal que $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$, luego $f(f^*(\mathfrak{q})) = \mathfrak{q}$, pues f es sobreyectiva. En consecuencia $f(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q} \in Spec(B)$ con $f^*(f(\mathfrak{p})) = f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ y tal que $J \subseteq f(\mathfrak{p})$. Por lo tanto $\mathfrak{p} \in f^*(V(J))$ y así $V(f^{-1}(J)) \subseteq f^*(V(J))$. ❑

4. Gavillas sobre *Spec*(A)

Lo siguiente que haremos es mezclar las herramientas de las secciones pasadas: la localización, las gavillas y el espacio de Zariski, para obtener como resultado un tipo especial de gavillas, las cuales serán el objeto de estudio de la presente sección.

Considerando un anillo A y la topología de Zariski en $Spec(A)$ se define la aplicación $O_{Spec(A)}$, la cual actúa sobre los abiertos de $Spec(A)$ de tal manera que $O_{Spec(A)}(\emptyset) = \{0\}$ y en caso de tener un abierto U no vacío de $Spec(A)$, del conjunto de funciones $\left\{ f : U \to \prod_{\mathfrak{q} \in U} A_{\mathfrak{q}} \right\}$ consideramos $O_{Spec(A)}(U)$ como aquellas que cumplen las siguientes condiciones:

1. Para todo elemento p de U, $f(p)$ está en A_p.
2. Para todo elemento p de U, existe un abierto V de $Spec(A)$ que contiene a p y contenido en U y existen a y b en A, de tal manera que para todo $q \in V$ se cumple que $q \in D(b)$ y $s(q) = \dfrac{a}{b} \in A_q$.

Si además consideramos la restricción usual de funciones como la aplicación ρ, se tiene que $O_{Spec(A)}$ es una gavilla de anillos sobre el espacio topológico $Spec(A)$.

Definición 1.45. Sea A un anillo, con notaciones anteriores, $O_{Spec(A)}$ es la **gavilla estructural de *Spec* (A)**.

Dos de las propiedades fundamentales de la gavilla estructural se enuncian en el siguiente teorema.

Teorema 1.46. *Sea A un anillo. Se cumple que:*

1. *El anillo de gérmenes $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A),p}$ es isomorfo a A_p, para todo $p \in Spec(A)$.*
2. *El anillo $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(f))$ es isomorfo a A_f, para todo $f \in A$.*

A continuación generalizaremos la gavilla estructural de $Spec(A)$ con la construcción de la tilde de un módulo, sin embargo es posible revisar la prueba de que $\mathcal{O}_{Spec(A)}$ es una gavilla y del Teorema 1.46 en [**5**].

Definición 1.47. Sea $\mathcal{O}_X$ una gavilla de anillos sobre un espacio topológico X: Una gavilla de grupos $\mathcal{F}$ sobre X es una **gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos** si para cada abierto U de X el grupo $\mathcal{F}(U)$ tiene estructura de $\mathcal{O}_X(U)$-módulo y para cualesquier abiertos U, V de X tales que $V \subseteq U$ el homomorfismo de módulos ${\rho_{\mathcal{F}}}^U_V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ junto con el homomorfismo de anillos ${\rho_{\mathcal{O}_X}}^U_V : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ son compatibles con el producto $\cdot$ en $\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U)$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d, "{\rho_{\mathcal{O}_X}}^U_V \times {\rho_{\mathcal{F}}}^U_V"'] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "{\rho_{\mathcal{F}}}^U_V"] \\
\mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{F}(V) \arrow[r] & \mathcal{F}(V)
\end{tikzcd}$$

donde U, V son abiertos de X tales que $V \subseteq U$.

Tratando de emular la definición anterior construimos la tilde de un módulo. Sea M un módulo sobre un anillo A, queremos una gavilla de $\mathcal{O}_{Spec(A)}$-módulos sobre el espacio topológico $Spec(A)$, por lo que tomamos la aplicación $\widetilde{M}$ que actúa sobre abiertos de $Spec(A)$ de la siguiente manera: $\widetilde{M}(\emptyset) = \{0\}$ y en el caso $U \neq \emptyset$ en $Spec(A)$ consideramos como $\widetilde{M}(U)$ el conjunto de funciones $\left\{ s : U \to \prod_{q \in U} M_q \right\}$ que cumplen las siguientes condiciones:

1. Para todo $p \in U$, $s(p) \in M_p$.
2. Para todo $p \in U$, existe un abierto V de $Spec(A)$ que contiene a p y contenido en U y existen $m \in M$ y $t \in A$ tales que:
   a) $V \subseteq D(t)$ y
   b) para todo $q \in V$, $s(q) = \dfrac{m}{t}$ en M_q .

Se considera a la restricción usual de funciones como $\rho_{\widetilde{M}}$ y el producto por elementos de $\mathcal{O}_{Spec(A)}$ se define para todo abierto U de $Spec(A)$, $\lambda \in \mathcal{O}_{Spec(A)}(U)$ y $s \in \widetilde{M}(U)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \lambda \cdot s : U &\to \prod_{q \in U} M_q \\ p &\mapsto \lambda(p) \cdot s(p) \end{aligned}$$

Se tiene que $\widetilde{M}$ es una gavilla de $\mathcal{O}_{Spec(A)}$-módulos sobre espacio de Zariski del anillo A, ya que $(\widetilde{M}(U), +)$ es un subgrupo del grupo abeliano de funciones entre U y $\prod_{q\in U} M_q$, donde la operación suma es la puntual de funciones y se verifican los siguientes incisos:

1. $\widetilde{M}(\emptyset) = \{0\}$, por construcción.
2. Para todo abierto U de $Spec(A)$ y $s \in \widetilde{M}(U)$ se tiene que $\rho_U^U(s) = s = id_{\widetilde{M}(U)}(s)$.
3. Sean U, V y W abiertos de $Spec(A)$ tales que $W \subseteq V \subseteq U$, como ρ es la restricción usual de funciones se tiene de inmediato que $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$.
   Para los incisos restantes, considerando un abierto U de X y una cubierta abierta $(U_i)_{i\in I}$ de U se tiene lo siguiente:
4. Dado $s \in \widetilde{M}(U)$, tal que $s|_{U_i} = 0_{\widetilde{M}(U_i)}$ para todo $i \in I$, se tiene que existe i en I para todo p en U, tal que $p \in U_i$, por lo tanto, $s(p) = s|_{U_i}(p) = 0_{\widetilde{M}(U_i)}$, para todo p en U. Así, $s = 0_{\widetilde{M}(U)}$.
5. Sea $(s_i)_{i\in I}$ una familia de secciones tal que $s_i \in \widetilde{M}(U_i)$ para todo $i \in I$ y $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ para todo i, j en I, se tiene que existe una sección s en $\widetilde{M}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$. En efecto, para todo q en U existe $j \in I$ tal que $q \in U_j$, basta considerar la sección s en $\widetilde{M}(U)$ como $s(q) = s_j(q)$, donde $s_j \in \widetilde{M}(U_j)$.

Por lo tanto $\widetilde{M}$ es una gavilla de grupos abelianos, la cual verifica los siguientes requisitos para el producto:

1. El producto $\cdot$ está bien definido. En efecto, sean U un abierto de $Spec(A)$, $\lambda \in \mathcal{O}_{Spec(A)}(U)$ y $s \in \widetilde{M}(U)$, para todo $p \in U$ se tiene que $\lambda(p) \cdot s(p)$ es elemento de M_p, ya que $\lambda(p) \in A_p$, $s(p) \in M_p$ y M_p es un A_p-módulo. Si también se tienen $\mu \in \mathcal{O}_{Spec(A)}(U)$ y $r \in \widetilde{M}(U)$ son tales que $\lambda = \mu$ y $s = r$, se sigue que $\lambda(p) = \mu(p)$ y $s(p) = r(p)$, para todo $p \in U$, por lo tanto $\lambda(p) \cdot s(p) = \mu(p) \cdot r(p)$ para todo $p \in U$ ya que el el producto en M_p está bien definido. En conclusión, $\lambda \cdot s = \mu \cdot r$.
   Para los incisos restantes, en donde se muestran las condiciones del producto de un módulo, consideramos $U \in Spec(A)$, $p \in U$, λ, μ en $\mathcal{O}_{Spec(A)}(U)$ y s, r en $\widetilde{M}(U)$.
2. $\lambda \cdot (s + r) = \lambda \cdot s + \lambda \cdot r$. Pues, $(\lambda \cdot (s + r))(p) = \lambda(p) \cdot (s + r)(p) = \lambda(p) \cdot (s(p) + r(p))$
   $= (\lambda(p) \cdot s(p)) + (\lambda(p) \cdot r(p)) = (\lambda \cdot s)(p) + (\lambda \cdot r)(p)$.
3. $(\lambda+\mu)\cdot s = (\lambda\cdot s)+(\mu\cdot s)$. En efecto, $((\lambda+\mu)\cdot s)(p) = (\lambda+\mu)(p)\cdot s(p) = (\lambda(p)+\mu(p))\cdot s(p))$
   $= (\lambda(p) \cdot s(p)) + (\mu(p) \cdot s(p)) = (\lambda \cdot s)(p) + (\mu \cdot s)(p)$.
4. $\lambda \cdot (\mu \cdot s) = (\lambda \cdot \mu) \cdot s$. Ya que, $(\lambda \cdot (\mu \cdot s))(p) = \lambda(p) \cdot ((\mu \cdot s)(p)) = \lambda(p) \cdot (\mu(p) \cdot s(p))$
   $= (\lambda(p) \cdot \mu(p)) \cdot s(p)) = (\lambda \cdot \mu)(p) \cdot s(p)) = ((\lambda \cdot \mu) \cdot s)(p)$.
5. $1_{\mathcal{O}_{Spec(A)}(U)} \cdot s = s$. Pues, $(1_{\mathcal{O}_{Spec(A)}(U)} \cdot s)(p) = 1_{\mathcal{O}_{Spec(A)}(U)}(p) \cdot s(p) = 1_{A_p} \cdot s(p) = s(p)$.

Por lo tanto para todo abierto U de $Spec(A)$ se tiene que $\widetilde{M}(U)$ es un módulo sobre $\mathcal{O}_{Spec(A)}(U)$. Lo que sigue es probar si hay compatibilidad entre las restricciones y el producto escalar: sean U y V abiertos del espacio topológico $Spec(A)$ tales que $V \subseteq U$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{Spec(A)}(U) \times \widetilde{M}(U) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{O}_{Spec(A)}}{}^{U}_{V} \times \rho_{\widetilde{M}}{}^{U}_{V}"'] & \widetilde{M}(U) \arrow[d, "\rho_{\widetilde{M}}{}^{U}_{V}"] \\
\mathcal{O}_{Spec(A)}(V) \times \widetilde{M}(V) \arrow[r] & \widetilde{M}(V)
\end{tikzcd}$$

En efecto, ya que para $\lambda \in \mathcal{O}_{Spec(A)}(U)$ y $s \in \widetilde{M}(U)$, se tiene que $(\rho_{\mathcal{O}_{Spec(A)}}{}^{U}_{V} \times \rho_{\widetilde{M}}{}^{U}_{V})(\lambda, s) = (\rho_{\mathcal{O}_{Spec(A)}}{}^{U}_{V}(\lambda), \rho_{\widetilde{M}}{}^{U}_{V}(s))$ y haciendo el producto escalar obtenemos $\rho_{\mathcal{O}_{Spec(A)}}{}^{U}_{V}(\lambda) \cdot \rho_{\widetilde{M}}{}^{U}_{V}(s)$, lo cual es igual a $\rho_{\widetilde{M}}{}^{U}_{V}(\lambda \cdot s)$, pues para $p \in U$, tenemos que $(\lambda|_V \cdot s|_V)(p) = \lambda|_V(p) \cdot s|_V(p) = \lambda(p) \cdot s(p) = (\lambda \cdot s)(p) = (\lambda \cdot s)|_V(p)$. Por lo tanto, el diagrama es conmutativo y en conclusión $\widetilde{M}$ es una gavilla de $\mathcal{O}_{Spec(A)}$-módulos sobre el espacio de Zariski del anillo A. Esto da nacimiento a la siguiente definición.

Definición 1.48. Sea M un módulo sobre un anillo A, con notaciones anteriores $\widetilde{M}$ es una gavilla de $\mathcal{O}_{Spec(A)}$-módulos sobre el espacio de Zariski de A.

De la misma manera que se construyó el anillo de gérmenes para una pregavilla de anillos, se construye el módulo de gérmenes para la gavilla de $\mathcal{O}_{Spec(A)}$-módulos $\widetilde{M}$, es decir, consideraremos el mismo conjunto, la misma relación de equivalencia y haremos el mismo cociente. Así, sean M un módulo sobre un anillo A, $\widetilde{M}$ su gavilla de $\mathcal{O}_{Spec(A)}$- módulos sobre $Spec(A)$ y p un elemento en $Spec(A)$, definimos $\widetilde{M}_p := \{[(U, s)] : U \text{ abierto de } Spec(A), p \in U \text{ y } s \in \widetilde{M}(U)\}$, con operación suma definida como: $[(U, s)] + [(V, r)] = [(U \cap V, s|_{U\cap V} + r|_{U\cap V})]$, donde U y V son abiertos de $Spec(A)$ que contienen a p y s, r secciones de $\widetilde{M}(U)$ y $\widetilde{M}(V)$ respectivamente, tenemos que $(\widetilde{M}_p, +)$ es un grupo. El producto por elementos de $\mathcal{O}_{Spec(A),p}$ se define como: $[(U, \lambda)] \cdot [(V, s)] = [(U \cap V, \lambda|_{U\cap V} \cdot s|_{U\cap V})]$, donde U y V son abiertos de $Spec(A)$ que contienen a p, λ es un elemento de $\mathcal{O}_{Spec(A)}(U)$ y s está en $\widetilde{M}(V)$, este producto dota a $\widetilde{M}_p$ con una estructura de $\mathcal{O}_{Spec(A),p}$-módulo. También sabemos que $\mathcal{O}_{Spec(A),p}$ tiene una estructura de A-módulo dada por el homomorfismo de anillos $\phi : A \to \mathcal{O}_{Spec(A),p}$, tal que $\phi(a) = [(Spec(A), \lambda)]$ para todo $a \in A$, donde $\lambda \in \mathcal{O}_{Spec(A)}(Spec(A))$ cumple para todo $q \in Spec(A)$ que $\lambda(q) = \dfrac{a}{1_A} \in A_q$, lo que también da a $\widetilde{M}_p$ una estructura de A-módulo de la siguiente manera, $a \cdot [(U, s)]) = \phi(a) \cdot [(U, s)] = [(Spec(A), \lambda)] \cdot [(U, s)] = [(U, \lambda|_U \cdot s)]$, suponiendo que $s(q) = \dfrac{m}{t} \in M_q$ para todo $q \in Spec(A)$ se tiene de la propiedad local que $(\lambda|_U \cdot s)(q) = \dfrac{am}{t} \in M_q$. En particular si como A-módulo tomamos al anillo A se tiene que $\widetilde{A} = \mathcal{O}_{Spec(A)}$.

Teorema 1.49. *Sean M un módulo sobre un anillo A y p un elemento en $Spec(A)$. Existe un A_p-isomorfismo entre M_p y $\widetilde{M}_p$.*

Demostración. Consideramos la aplicación φ,

$$\begin{array}{rcl} \varphi : M & \to & \widetilde{M}_p \\ m & \mapsto & \varphi(m) = [(Spec(A), s)] \end{array}$$

donde $s \in \widetilde{M}(Spec(A))$ se define como $s : Spec(A) \to \prod_{p \in Spec(A)} M_p$, tal que $s(q) = \frac{m}{1_A} \in M_q$, para todo $q \in Spec(A)$. Se puede observar que, por construcción s es una sección de $\widetilde{M}(Spec(A))$ y se da por hecho que φ está bien definida. Lo primero es verificar que φ es una aplicación A-lineal. Por hipótesis tenemos que el dominio y el codominio de φ son A-módulos. Ahora, sean a, b en A y m, n en M, tenemos que $\varphi(am + bn) = [(Spec(A), \lambda s + \mu r)]$, donde $\lambda, \mu \in \mathcal{O}_{Spec(A)}(Spec(A))$ y $s, r \in \widetilde{M}(Spec(A))$, tales que para todo $p \in Spec(A)$ $(\lambda s + \mu r)(p) = \frac{a \cdot m + b \cdot n}{1_A} \in M_p$. Por otro lado, tenemos que $a \cdot \varphi(m) + b \cdot \varphi(n) = [(Spec(A), \lambda)] \cdot [(Spec(A), s)] + [(Spec(A), \mu)] \cdot [(Spec(A), r)] = [(Spec(A), \lambda s + \mu r)]$. Por lo tanto φ es una aplicación A-lineal. Para poder hacer uso de la propiedad universal de la localización, es necesario verificar que se cumple con la condición $\star$ del Teorema 1.7. Es decir, para todo $t \in (A \setminus p)$, hay que verificar que la aplicación A-lineal,

$$\begin{array}{rcl} \phi_t : \widetilde{M}_p & \to & \widetilde{M}_p \\ [(U, r)] & \mapsto & \phi_t([(U, r)]) = t \cdot [(U, r)] \end{array}$$

es biyectiva. Para ello basta definir

$$\begin{array}{rcl} \psi_t : \widetilde{M}_p & \to & \widetilde{M}_p \\ [(U, s)] & \mapsto & \left[\left(D(t), \widetilde{\frac{1}{t}}\right)\right] \cdot [(U, r)] \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\frac{1}{t}} : D(t) & \to & \prod_{q \in D(t)} M_q \\ r & \mapsto & \frac{1}{t} \end{array}$$

considerando $[(U, r)] \in \widetilde{M}_p$ donde $r \in M(U)$ es tal que $r(q) = \frac{m}{g} \in M_q$ para todo $q \in U$, tenemos que $\psi_t \circ \phi_t([(U, r)]) = \psi_t(t \cdot [(U, r)])) = \left[\left(D(t), \widetilde{\frac{1}{t}}\right)\right] \cdot (t \cdot [(U, r)]) = [(D(t), \widetilde{\frac{1}{t}} \cdot t|_{D(t)} \cdot r|_{D(t)})]$, se observa que $\widetilde{\frac{1}{t}} \cdot t|_{D(t)} \cdot r|_{D(t)}(q) = \frac{t}{t} \cdot \frac{m}{g} \in M_q$ para todo $q \in D(t)$, teniendo así a $[(D(t), r)]$ que es igual a

$[(U,r)]$, por ello es que $\phi_t \circ \psi_t$ es la identidad de $\widetilde{M}_p$. De manera análoga se prueba que $\phi_t \circ \psi_t = id_{\widetilde{M}_p}$. Ya que se cumple la condición de la biyectividad de ϕ_t, aplicamos la propiedad universal de la localización para módulos obtenemos el homomorfismo $\widetilde{\varphi}$ de A-módulos, donde $\widetilde{\varphi} : M_p \to \widetilde{M}_p$ y $t \cdot \widetilde{\varphi}\left(\frac{m}{t}\right) = \varphi(m)$, para todo m en M y t en $(A \setminus p)$. Más aún, $\widetilde{\varphi}$ es A_p-lineal. Recordemos de la propiedad universal de la localización que $\widetilde{\varphi}\left(\frac{m}{t}\right) = \psi_t(\varphi(m))$. Luego verificaremos que $\widetilde{\varphi}$ es un isomorfismo.

- El homomorfismo $\widetilde{\varphi}$ es inyectivo. Sean m en M y t en $(A \setminus p)$, tales que $\frac{m}{t}$ está en $Ker(\widetilde{\varphi})$, es decir, $\widetilde{\varphi}\left(\frac{m}{t}\right) = 0_{\widetilde{M}_p}$, recuerde que tenemos la igualdad $\varphi(m) = t \cdot \widetilde{\varphi}\left(\frac{m}{t}\right)$, de donde se obtiene que $\varphi(m) = [(Spec(A), s)] = \left[\left(Spec(A), 0_{\widetilde{M}(Spec(A))}\right)\right]$ y por lo tanto para todo $q \in Spec(A)$ se tiene que $s(q) = \frac{m}{1_A} = \frac{0}{1_A} \in M_p$, de donde se sigue que $m = 0$. Así, se concluye que $\frac{m}{t} = \frac{0}{t} = \frac{0}{1_A}$.
- El homomorfismo $\widetilde{\varphi}$ es sobreyectivo. Dado $[(U,r)] \in \widetilde{M}_p$, donde U es un abierto de $Spec(A)$ que contiene a p y r una sección de $\widetilde{M}(U)$, se tiene que para todo q en U (en particular para p), existen V_q abierto de $Spec(A)$ que contiene a q y contenido en U, m_q en M y t_q en $(A \setminus p)$, tales que para todo q' en V_q $r(q') = \frac{m_q}{t_q} \in M_{q'}$. Así, consideramos a $\frac{m_p}{t_p}$ como candidato a preimagen de $[(U,r)]$, tenemos que $\widetilde{\varphi}\left(\frac{m_p}{t_p}\right) = [(U,r)]$ si y sólo si $\left[\left(D(t_p), \frac{m_p}{t_p}\right)\right] = [(U,r)]$, es decir, si existe $V \subseteq (D(t_p) \cap U)$, con $p \in V$ tal que $r(q) = \frac{m_p}{t_p} \in M_q$, para todo q en V. Tomando $V = V_p$, tenemos que $r(q) = \frac{m_p}{t_p}$, para todo q en V_p y con ello $\widetilde{\varphi}$ es sobreyectiva.

En conclusión, $\widetilde{\varphi}$ es un A-isomorfismo entre M_p y $\widetilde{M}_p$. ❑

Lema 1.50. *Sean f y g elementos de un anillo A. Si para los abiertos básicos asociados a dichos elementos se tiene que $D(g) \subseteq D(f)$, entonces existen $m \in \mathbb{Z}_+$ y $\mu \in A$ tal que $g^m = \mu f$.*

Demostración. Sean f y g elementos de A, tales que $D(g) \subseteq D(f)$, se sigue que $V(Af) \subseteq V(Ag)$, lo cual equivale a tener que, $\sqrt{Ag} \subseteq \sqrt{Af}$, por lo tanto g es un elemento de $\sqrt{Af}$. Es decir, existen $m \in \mathbb{Z}_+$ y $\mu \in A$, tales que $g^m = \mu f$. ❑

Lema 1.51. *Sean f un elemento no nilpotente de un anillo A y s un elemento de $\widetilde{M}(D(f))$. Si p es un elemento del abierto $D(f)$, existen elementos g en A y m en M tales que, $p \in D(g) \subseteq D(f)$ y $s(q) = \frac{m}{g} \in M_q$, para todo q en $D(g)$.*

Demostración. Por ser s una sección de $\widetilde{M}(D(f))$, existen un abierto $V_p \subseteq D(f)$, tal que p está en V_p y n en M y t en A, tales que, para todo q en V_p, t no es elemento de q y $s(q) = \dfrac{n}{t}$ en M_q. Además, V_p no es vacío, pues p está en V_p y como $(D(x))_{x\in A}$ es una base de la topología de Zariski de $Spec(A)$, existe h en A tal que p está en $D(h)$ y $D(h) \subseteq V_p$. Así, $D(h) \subseteq D(f)$ y $s(q) = \dfrac{n}{t} \in M_q$, para todo q en $D(h)$, pues $D(h) \subseteq V_q$, también para todo q en V_p, se tiene que t no está en q, por lo que q está en $D(t)$ y así, $V_p \subseteq D(t)$ y de $D(h) \subseteq V_p$, además de que $D(h) \subseteq D(t)$ y por el lema anterior, existe r en $\mathbb{Z}_+$ y μ en A, tal que $h^r = \mu t$. Así, $\mu \notin D(h)$ de lo contrario $\mu f = h^r$ estaría en q, pues, si $r = 0$, entonces $1_A \in q$, absurdo. Si $r \in \mathbb{N}$, entonces $h^r \in q$, por lo que $h \in q$, absurdo, ya que $q \in D(h)$. Por lo tanto, para cualquier $q \in D(h) \subseteq V_p$, se tiene que $s(q) = \dfrac{n}{t} = \dfrac{\mu n}{\mu t} = \dfrac{\mu n}{h^r} \in A_q$. Denotando por g a h^r y por m al elemento μn, se tiene que $s(q) = \dfrac{m}{g} \in M_q$, ya que $D(g) = D(h^r) = D(h)$, para todo $q \in D(g)$. ❑

Teorema 1.52. *Sean M un módulo sobre un anillo A y f un elemento de A. Existe un A_f-isomorfismo entre M_f y $\widetilde{M}(D(f))$.*

Demostración. Sea f un elemento de A. Consideramos

$$\begin{aligned} \psi : M &\to \widetilde{M}(D(f)) \\ m &\mapsto \psi(m) \end{aligned}$$

donde $\psi(m)$ es la sección de $\widetilde{M}(D(f))$, definida como $\psi(m) : D(f) \to \prod\limits_{q\in D(f)} \in M_q$, tal que $\psi(m)(p)$ es un elemento de M_p para todo p en $D(f)$. Se observa que $\psi(m)$ es una sección de $\widetilde{M}(D(f))$, más aún, se asume sin prueba, que ψ está bien definida y es una aplicación A-lineal.
Ahora, considerando el conjunto multiplicativo $S = \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$, verificaremos que se cumple la condición $\star$ del Teorema 1.7, para ello basta probar que la aplicación A-lineal inducida por f en $\widetilde{M}(D(f))$ y definida como

$$\begin{aligned} \phi : \widetilde{M}(D(f)) &\to \widetilde{M}(D(f)) \\ r &\mapsto \phi(r) = \frac{f}{1_A} \cdot r \end{aligned}$$

es biyectiva. Recuerde que para todo $p \in D(f)$ sabemos que $f \notin p$ y por eso para todo $p \in D(f)$ se tiene que $f \in (A \setminus p)$, así, tomamos la siguiente aplicación A- lineal:

$$\begin{aligned} \phi' : \widetilde{M}(D(f)) &\to \widetilde{M}(D(f)) \\ r &\mapsto \phi(r) = \frac{1_A}{f} \cdot r \end{aligned}$$

la cual claramente es la inversa de ϕ. Por lo tanto la aplicación A-lineal ϕ es biyectiva. Teniendo la condición $\star$, aplicamos la propiedad universal de la localización para módulos (Teorema 1.7) y obtenemos el homomorfismo de módulos

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\psi} : M_f & \to & \widetilde{M}(D(f)) \\ \dfrac{m}{f^n} & \mapsto & \widetilde{\psi}\left(\dfrac{m}{f^n}\right) : D(f) \to \displaystyle\prod_{q \in D(f)} M_q \\ & & \qquad\qquad r \;\; \mapsto \;\; \dfrac{m}{f^n} \end{array}$$

Lo siguiente es verificar que $\widetilde{\psi}$ es un isomorfismo.

- El homomorfismo $\widetilde{\psi}$ es inyectivo. Para $m \in M$ y $n \in \mathbb{Z}_+$ tales que $\dfrac{m}{f^n} \in Ker\widetilde{\psi}$, se sigue que $\widetilde{\psi}\left(\dfrac{m}{f^n}\right) = 0_{\widetilde{M}(D(f))}$, es decir, $\widetilde{\psi}\left(\dfrac{m}{f^n}\right)(r) = \dfrac{0_M}{1_A} \in M_r$ para todo $r \in D(f)$. Así, se tiene que $f^n \cdot \widetilde{\psi}\left(\dfrac{m}{f^n}\right) = 0_{\widetilde{M}(D(f))} = \psi(m)$, es decir, existe $\mu_r \in (A \setminus r)$ tal que $\mu_r m = 0_M$ para todo $r \in D(f)$. Se sigue que μ_r está en el aniquilador de m y como $\mu_r \notin r$, tenemos que $r' inV(Ann(m))$, así, $V(Ann(m)) \cap D(f) = \emptyset$ por lo que $V(Ann(m)) \subseteq V(Af)$. De manera equivalente se tiene que $\sqrt{Af} \subseteq \sqrt{Ann(m)}$ y por lo tanto $f \in \sqrt{Ann(m)}$. Esto es, existe $t \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^t \in Ann(m)$, obteniendo que $\dfrac{m}{f^n} = \dfrac{f^t m}{f^t f^n} = \dfrac{0_M}{f^{t+n}} = \dfrac{0_M}{1_A} \in M_f$.
- El homomorfismo $\widetilde{\psi}$ es sobreyectivo. Sean r una sección de $\widetilde{M}(D(f))$ y p un elemento de $D(f)$. Por el Lema 1.51 existen m_p en M y g_p en A tales que $D(g_p) \subseteq D(f)$ y para todo $q \in D(g_p)$ se tiene que $r(q) = \dfrac{m_p}{g_p} \in M_q$, de inmediato se obtiene que $D(f) = \displaystyle\bigcup_{p \in D(f)} D(g_p)$ y como $D(f)$ es casi compacto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $D(f) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} D(g_{p_i})$. Con el objeto de simplificar la notación renombramos $g_{p_i} = g_i$ y $a_{p_i} = a_i$. También sabemos que $D(g_i) \cap D(g_j) = D(g_i g_j)$ para todo i, j en $\{1, \ldots, k\}$, por lo que se cumple para todo $q \in D(g_i g_j)$ que $r(q) = \dfrac{m_i}{g_i} = \dfrac{m_j}{g_j} \in M_q$, esto implica que $\dfrac{g_j m_i - g_i m_j}{g_i g_j} = 0_{M_q}$ para todo $q \in D(g_i g_j)$. Ahora, considerando la sección $\alpha : D(g_i g_j) \to \displaystyle\prod_{a \in D(g_i g_j)} M_q$, tal que para todo $q \in D(g_i g_j)$ se tiene que $\alpha(q) = \dfrac{g_j m_i - g_i m_j}{g_i g_j} \in M_q$, como ya sabemos que $\widetilde{\psi}_{ij} : D(g_i g_j) \to \displaystyle\prod_{p \in D(g_i g_j)} M_p$ es una sección de $\widetilde{M}(D(g_i g_j))$ y además ϕ es una aplicación inyectiva considerando el caso particular de $f = g_i g_j$, así, para todo elemento q en $D(g_i g_j)$, tenemos que $\dfrac{g_j m_i - g_i m_j}{g_i g_j} = 0_{M_{g_i g_j}}$. Por lo tanto, existe $n_{ij} \in \mathbb{Z}_+$ tal que $(g_i g_j)^{n_{ij}}(g_j m_i - g_i m_j) = 0_{M_{g_i g_j}}$ para todo i, j en $\{1, \ldots, k\}$.

Si tomamos N igual al máximo de los n_{ij} obtenemos que $g_j^{N+1}(g_i^N m_i) - g_i^{N+1}(g_j^N m_j) = 0_M$, por lo tanto, $r(q) = \dfrac{m_i}{g_i} = \dfrac{g_i^N m_i}{g_i^N g_i} \in M_q$, para todo $q \in D(g_i') = D(g_i^{N+1}) = D(g_i)$. Renombrando $g_j^{N+1} = g_j'$, $(g_i^N m_i) = m_i'$, $g_i^{N+1} = g_i'$ y $(g_j^N m_j) = m_j'$, como $D(f) = \bigcup_{i=1}^{k} D(g_i) = \bigcup_{i=1}^{k} D(g_i')$, existen l en $\mathbb{Z}_+$ y $\mu_1, \ldots, \mu_k$ elementos de A tales que $f^l = \mu_1 g_1 + \cdots + \mu_k g_k$. Tomando $m = \sum_{i=1}^{k} \mu_i m_i'$, obtenemos que $g_i' m = f^l m_i'$ para toda $i \in \{1, \ldots k\}$ y consecuentemente $\dfrac{m}{f^l} = \dfrac{m_j'}{g_j'} \in M_q$, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$ y para todo $q \in D(g_j')$. Por lo tanto, la preimagen de r es $\dfrac{m}{f^l}$.

En conclusión, el módulo $\widetilde{M}(D(f))$ es isomorfismo a M_f. $\square$

Capítulo 2

Espacios Anillados y Localmente Anillados

Describir una inmersión cerrada entre espacios anillados es nuestro objetivo, para ello el primer paso es definir un espacio anillado y lo siguiente es tener claro el concepto de morfismo entre espacios anillados. La estructura que seguiremos para este capítulo es la siguiente: estudiaremos la gavilla imagen directa, definiremos un espacio anillado y posteriormente un morfismos entre espacios anillados, luego se define un espacio localmente anillado y los morfismos entre ellos.

1. Gavilla Imagen Directa

Por el resto de esta sección $\mathcal{F}$ será una gavilla de anillos sobre un espacio topológico X y $\varphi : X \to Y$ será una aplicación continua. A partir de $\mathcal{F}$ y φ haremos la construcción de la imagen directa de la gavilla de anillos $\mathcal{F}$ bajo φ, $\varphi_*(\mathcal{F})$ sobre Y, definida como: $\varphi_*(\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(\varphi^{-1}(V))$ para cada abierto V de Y y que tiene por restricción $\rho_{\varphi_*(\mathcal{F})}{}_Z^W = \rho_{\mathcal{F}}{}_{\varphi^{-1}(Z)}^{\varphi^{-1}(W)}$ para cualesquier abiertos W y Z de Y tales que $Z \subseteq W$. En efecto, se cumplen las siguientes propiedades:

1. Es claro que $\varphi_*(\mathcal{F})(V)$ tiene una estructura algebraica de anillo para cada abierto V de Y.
2. $\varphi_*(\mathcal{F})(\emptyset) = \mathcal{F}(\varphi^{-1}(\emptyset)) = \mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$.
3. Para cualquier abierto V de Y se sigue que $\rho_{\varphi_*(\mathcal{F})}{}_V^V = \rho_{\mathcal{F}}{}_{\varphi^{-1}(V)}^{\varphi^{-1}(V)} = id_{\mathcal{F}(\varphi^{-1}(V))} = id_{\varphi_*(\mathcal{F})(V)}$.
4. Para cualesquier abiertos U, V y W de Y tales que $W \subseteq V \subseteq U$, se satisfacen las siguientes igualdades: $\rho_{\varphi_*(\mathcal{F})}{}_W^V \circ \rho_{\varphi_*(\mathcal{F})}{}_V^U = \rho_{\mathcal{F}}{}_{\varphi^{-1}(W)}^{\varphi^{-1}(V)} \circ \rho_{\mathcal{F}}{}_{\varphi^{-1}(V)}^{\varphi^{-1}(U)} = \rho_{\mathcal{F}}{}_{\varphi^{-1}(W)}^{\varphi^{-1}(U)} = \rho_{\varphi_*(\mathcal{F})}{}_W^U$.
5. Ahora, sean U un abierto de Y y $(U_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta de U, donde I es un conjunto no vacío. Se tiene que $(\varphi^{-1}(U_i))_{i\in I}$ es una cubierta abierta de $\varphi^{-1}(U)$, pues φ es continua.
   a) Sea $s \in \varphi_*(\mathcal{F})(U)$ tal que $\rho_{\varphi_*(\mathcal{F})}{}_{U_i}^U(s) = 0_{\varphi_*(\mathcal{F})(U_i)}$ para todo $i \in I$. Así, se tiene que $\rho_{\mathcal{F}}{}_{\varphi^{-1}(U_i)}^{\varphi^{-1}(U)}(s) = \rho_{\varphi_*(\mathcal{F})}{}_{U_i}^U(s) = 0_{\varphi_*(\mathcal{F})(U_i)} = 0_{\mathcal{F}(\varphi^{-1}(U_i))}$. Luego, como $(\varphi^{-1}(U_i))_{i\in I}$ es una cubierta abierta de $\varphi^{-1}(U)$ y $\mathcal{F}$ es una gavilla se sigue que $s = 0_{\mathcal{F}(\varphi^{-1}(U))} = 0_{\varphi_*(\mathcal{F})(U)}$.
   b) Sea $(s_i)_{i\in I}$ una familia de secciones de $\varphi_*(\mathcal{F})$ tales que $s_i \in \varphi_*(\mathcal{F})(U_i)$ para todo $i \in I$ y de modo que $\rho_{\varphi_*(\mathcal{F})}{}_{U_i\cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{\varphi_*(\mathcal{F})}{}_{U_i\cap U_j}^{U_j}(s_j)$ para cualesquier i, j en I, es decir, $\rho_{\mathcal{F}}{}_{\varphi^{-1}(U_i\cap U_j)}^{\varphi^{-1}(U_i)}(s_i) = \rho_{\varphi_*(\mathcal{F})}{}_{U_i\cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{\varphi_*(\mathcal{F})}{}_{U_i\cap U_j}^{U_j}(s_j) = \rho_{\mathcal{F}}{}_{\varphi^{-1}(U_i\cap U_j)}^{\varphi^{-1}(U_j)}(s_j)$ para todo $i, j \in I$. Así, existe $s \in \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U))$ tal que $\rho_{\mathcal{F}}{}_{\varphi^{-1}(U_i)}^{\varphi^{-1}(U)}(s) = s_i$ para todo $i \in I$. Por consiguiente, existe s en $\varphi_*(\mathcal{F})(U)$ tal que $\rho_{\varphi_*(\mathcal{F})}{}_{U_i}^U(s) = s_i$ para todo $i \in I$.

Esto da pie a la siguiente definición.

Definición 2.1. Sean $\mathcal{F}$ una gavilla de anillos sobre el espacio topológico X y $\varphi : X \to Y$ una aplicación continua, con las notaciones de la presente sección, $\varphi_*(\mathcal{F})$ es la **gavilla imagen directa de $\mathcal{F}$ bajo** φ sobre el espacio topológico Y.

Lo siguiente es estudiar los anillos de gérmenes de $\varphi_*(\mathcal{F})$. Una respuesta parcial y satisfactoria se encuentra en el resultado que presentamos a continuación.

Teorema 2.2. *Sea $\varphi : X \to Y$ un homeomorfismo entre un espacio topológico X y un cerrado de un espacio topológico Y. Para cada gavilla de anillos $\mathcal{F}$ sobre X y para cada q en Y, se tiene que*

$$\varphi_*(\mathcal{F})_q = \begin{cases} \{0\} & , \textit{si } q \notin \varphi(X). \\ \mathcal{F}_p & , \textit{si } q = \varphi(p), \textit{ para cierto } p \textit{ en } X. \end{cases}$$

Demostración. Sean $\mathcal{F}$ una gavilla de anillos sobre X y $q \in Y$, suponiendo que $q \notin \varphi(X)$ consideramos $[(V, s)] \in \varphi_*(\mathcal{F})_q$, donde V es un abierto de Y que contiene a q y $s \in \varphi_*(\mathcal{F})(V)$. Tenemos que $[(V, s)] = [(V \cap (Y \setminus \varphi(X)), s|_{V\cap(Y\setminus\varphi(X))})]$, pues $Y \setminus \varphi(X)$ es un abierto, así, sin perdida de generalidad podemos suponer que $V \subseteq (Y \setminus \varphi(X))$ y esto implica que $\varphi^{-1}(V)$ está contenido en $\varphi^{-1}(Y \setminus \varphi(X))$. Se observa que $\varphi^{-1}(Y \setminus \varphi(X)) = \emptyset$ de lo contrario si $\varphi^{-1}(Y \setminus \varphi(X)) \neq \emptyset$, entonces existe $r \in X$ tal que $r \in \varphi^{-1}(Y \setminus \varphi(X))$ y así tenemos que $\varphi(r) \in \varphi(X) \cap (Y \setminus \varphi(X))$, lo cual es absurdo. Como $\varphi^{-1}(Y \setminus \varphi(X)) = \emptyset$ se sigue que $\varphi^{-1}(V) = \emptyset$ y consecuentemente $s = 0_{\mathcal{F}(\varphi^{-1}(V))} = 0_{\varphi_*(\mathcal{F})(V)}$. Por lo tanto $[(V, s)] = [(V, 0_{\varphi_*(\mathcal{F})(V)})] = 0_{\varphi_*(\mathcal{F})_q}$ y en conclusión $\varphi_*(\mathcal{F})_q = \{0\}$.

Ahora, suponiendo que $q = \varphi(p)$ para algún p en X consideramos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rcl} g : \varphi_*(\mathcal{F})_q & \to & \mathcal{F}_p \\ {[(V, s)]} & \to & [(\varphi^{-1}(V), s)] \end{array}$$

Dicha asignación verifica las siguientes propiedades:

1. La aplicación g está bien definida. Sean V y W abiertos de Y, que contienen a q y sean $s \in \varphi_*(\mathcal{F})(V)$ y $t \in \varphi_*(\mathcal{F})(W)$ tales que $[(V, s)] = [W, t)]$. Así, existe un abierto Z de Y tal que $q \in Z$, $Z \subseteq (V \cap W)$ y $\rho_{\varphi_*(\mathcal{F})}{}^V_Z(s) = \rho_{\varphi_*(\mathcal{F})}{}^W_Z(t)$. Basta considerar el abierto $\varphi^{-1}(Z)$ de X para tener que $[(\varphi^{-1}(V), s)] = [(\varphi^{-1}(W), t)]$ pues $\varphi^{-1}(Z)$ es un abierto de X que contiene a p, está contenido en $(\varphi^{-1}(V) \cap \varphi^{-1}(W))$ y además $\rho_{\mathcal{F}}{}^{\varphi^{-1}(V)}_{\varphi^{-1}(Z)}(s) = \rho_{\mathcal{F}}{}^{\varphi^{-1}(W)}_{\varphi^{-1}(Z)}(t)$.
2. La aplicación g es un homomorfismo de anillos. Sean V y W abiertos de Y que contienen a q y sean $s \in \varphi_*(\mathcal{F})(V)$ y $t \in \varphi_*(\mathcal{F})(W)$, para la suma se tiene que: $g([(V, s)] + [(W, t)]) = g([(V \cap W, \rho_{\varphi_*(\mathcal{F})}{}^V_{V\cap W}(s) + \rho_{\varphi_*(\mathcal{F})}{}^W_{V\cap W}(t))]) = [(\varphi^{-1}(V \cap W), \rho_{\mathcal{F}}{}^{\varphi^{-1}(V)}_{\varphi^{-1}(V\cap W)}(s) + \rho_{\mathcal{F}}{}^{\varphi^{-1}(W)}_{\varphi^{-1}(V\cap W)}(t))] =$

$[(\varphi^{-1}(V), s)] + [(\varphi^{-1}(W), t)]$. De manera análoga se verifica el producto. Además, ya que $\varphi([(Y, 1_{\varphi_*(\mathcal{F})(Y)})]) = [(\varphi^{-1}(Y), 1_{\mathcal{F}(\varphi^{-1}(Y))})] = [(X, 1_X)]$, se tiene que g es un homomorfismo de anillos.

3. El homomorfismo g es inyectivo. Sea V un abierto de Y que contiene a q y sea $s \in \varphi_*(\mathcal{F})(V)$ de tal manera que $[(V, s)] \in Kerg$. Así, $[(\varphi^{-1}(V), s)] = [(X, 0_{\mathcal{F}(X)})]$ y por lo tanto existe un abierto W en X que contiene a p tal que $W \subseteq \varphi^{-1}(V)$ y $\rho_{\mathcal{F}}{}_W^{\varphi^{-1}(V)}(s) = 0_{\mathcal{F}(W)}$. Luego, como φ es un homeomorfismo entre X y un cerrado de Y, existe un abierto Z de Y que contiene a q de tal manera que $\varphi(W) = (Z \cap \varphi(X))$, el cual cumple que $W = \varphi^{-1}(\varphi(W)) = \varphi^{-1}(Z \cap \varphi(X)) = \varphi^{-1}(Z) \cap \varphi^{-1}(\varphi(X)) = \varphi^{-1}(Z)$. De este modo, considerando al abierto $Z \cap V$ se asegura la igualdad $[(V, s)] = [(Y, 0_{\varphi_*(\mathcal{F})(Y)})]$: en efecto, $Z \cap V$ es un abierto de Y que contiene a q y además $\rho_{\varphi_*(\mathcal{F})}{}_{Z \cap V}^{V}(s) = \rho_{\mathcal{F}}{}_{\varphi^{-1}(Z \cap V)}^{\varphi^{-1}(V)}(s) = \rho_{\mathcal{F}}{}_{\varphi^{-1}(Z \cap V)}^{\varphi^{-1}(Z)}(\rho_{\mathcal{F}}{}_{\varphi^{-1}(Z)}^{\varphi^{-1}(V)}(s)) = \rho_{\mathcal{F}}{}_{\varphi^{-1}(Z \cap V)}^{\varphi^{-1}(Z)}(\rho_{\mathcal{F}}{}_{W}^{\varphi^{-1}(V)}(s)) = 0_{\varphi_*(\mathcal{F})(Z \cap V)}$.
4. El homomorfismo g es sobreyectivo. Sea U un abierto de X que contiene a p y sea s un elemento de $\mathcal{F}(U)$. Se quiere probar que existen un abierto V de Y que contiene q y una sección $t \in \varphi_*(\mathcal{F})(V)$ tales que $g([(V, t)]) = [(U, s)]$. Como φ es un homeomorfismo entre X y un cerrado de Y, existe un abierto Z de Y que contiene a q de tal manera que $\varphi(U) = (Z \cap \varphi(X))$. Luego, con argumentos análogos al inciso anterior se tiene que $U = \varphi^{-1}(Z)$, lo cual implica que $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(\varphi^{-1}(Z)) = \varphi_*(\mathcal{F})(Z)$. Como $s \in \varphi_*(\mathcal{F})(Z)$ se sigue que $[(Z, s)] \in \varphi_*(\mathcal{F})_q$, además satisface que $g([(Z, s)]) = [(\varphi^{-1}(Z), s)] = [(U, s)]$.

En definitiva g es un isomorfismo de anillos. ❑

2. Espacios Anillados

En lo que resta del trabajo nos enfocaremos en las gavillas de anillos la cuales nos permiten definir los espacios anillados que son los objetos que estudiaremos en esta sección. Durante su estudio daremos algunos ejemplos, definiremos el concepto de morfismo entre ellos y construiremos un ejemplo de un morfismo entre una clase particular de espacios anillados.

Definición 2.3. Un **espacio anillado** es un par $(X, \mathcal{O}_X)$, donde X es un espacio topológico y $\mathcal{O}_X$ es una gavilla de anillos sobre X.

En seguida algunos ejemplos de espacios anillados.

Ejemplo 2.4. Sean A un anillo y X un espacio topológico. Para cada elemento p en X se puede construir la gavilla rascacielos de A en p (ver el Ejemplo 1.21) y por lo tanto tenemos el espacio anillado (X, A_X^p).

EJEMPLO 2.5. Sean A un anillo y X un espacio topológico. Vamos a construir una gavilla de anillos C_X sobre X de la siguiente manera: asignamos $C_X(\emptyset, A) = \{0\}$, $C_X(U, A) = \{f : U \to A | f \text{ es continua}\}$ para cada abierto no vacío U de X y como ρ_{C_X} consideramos la restricción usual de funciones (aquí A está dotado de la topología discreta). Claramente C_X es una pregavilla, pues $C_X(\emptyset, A) = \{0\}$ por construcción y ρ_{C_X} es la restricción usual de funciones. Para las dos propiedades restantes consideramos un abierto U de X y $(U_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta de U, donde I es un conjunto no vacío.

- Sea $f \in C_X(U, A)$ tal que $\rho_{C_X}{}^U_{U_i}(f) = 0_{C_X(U_i,A)}$ para todo $i \in I$. Ya que para todo $p \in X$ existe $i \in I$ tal que $p \in U_i$ y como $f(p) = \rho^U_{U_i}(f)(p) = 0_A$ se concluye que $f = 0_{C_X(U,A)}$.
- Sea $(f_i)_{i\in I}$ una familia de secciones de C_X de tal manera que $f_i \in C_X(U_i, A)$ para todo $i \in I$ y además $\rho_{C_X}{}^{U_i}_{U_i\cap U_j}(f_i) = \rho_{C_X}{}^{U_j}_{U_i\cap U_j}(f_j)$ para cualesquier $i, j \in I$. Definimos la asignación $f : U \to A$ tal que para todo $p \in X$ se tiene que $f(p) = f_i(p)$, donde $i \in I$ satisface que $p \in U_i$. Observamos que f está bien definida: en efecto, sea $p \in X$ tal que $p \in U_i \cap U_j$, donde $i, j \in I$, de este modo $f_i(p) = \rho_{C_X}{}^{U_i}_{U_i\cap U_j}(f_i)(p) = \rho_{C_X}{}^{U_j}_{U_i\cap U_j}(f_j)(p) = f_j(p)$. Además, probaremos que f es una aplicación continua. Ya que la topología de A es la discreta para $a \in A$ tenemos que $f^{-1}(a) = f^{-1}(a) \bigcap U = f^{-1}(a) \bigcap \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} \left(f^{-1}(a) \bigcap U_i\right) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(a)$, donde f_i es continua para todo $i \in I$ y por lo tanto para todo $i \in I$ se tiene que $f_i^{-1}(a)$ es un abierto de U , así, se sigue que $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(a)$ es un abierto de U.

En conclusión, C_X es una gavilla de anillos y por lo tanto (X, C_X) es un espacio anillado.

Otro ejemplo de espacio anillado es el construido a partir de las funciones holomorfas.

EJEMPLO 2.6. Sea $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ el espacio topológico obtenido al considerar como topología la topología usual. Se define $\mathcal{O}^h$ para un abierto $U \in \mathbb{C}^*$ de la siguiente manera: $\mathcal{O}^h(\emptyset) = \{0\}$ y si $U \neq \emptyset$, entonces se tiene $\mathcal{O}^h(U) = \{f : U \to \mathbb{C} | f \text{ es holomorfa}\}$, el cual es un anillo al tomar como suma y producto los usuales de funciones. Además, como restricción tomamos la usual de funciones. Se sigue que $\mathcal{O}^h$ es una pregavilla, ya que $\mathcal{O}^h(\emptyset) = \{0\}$ por construcción y ρ es es la restricción usual de funciones, además para cualquier abierto U de $\mathbb{C}^*$ y una cubierta abierta $(U_i)_{i\in I}$ de U, donde I es un conjunto no vacío, se verifican los siguientes incisos:

- Sea $f \in \mathcal{O}^h$ tal que $\rho_{\mathcal{O}^h}{}^U_{U_i}(f) = 0_{\mathcal{O}^h(U_i)}$ para todo $i \in I$. Se sigue que $f = 0_{\mathcal{O}^h}$, pues dado $z \in U$ existe $i \in I$ tal que $z \in U_i$ y $f(z) = \rho_{\mathcal{O}^h}{}^U_{U_i}(f)(z) = 0_{\mathcal{O}^h(U_i)}$.
- Sea $(f_i)_{i\in I}$ una familia de secciones donde $f_i \in \mathcal{O}^h(U_i)$ para todo $i \in I$ y tal que $\rho_{\mathcal{O}^h}{}^{U_i}_{U_i\cap U_j}(f_i) = \rho_{\mathcal{O}^h}{}^{U_j}_{U_i\cap U_j}(f_j)$ para todo $i, j \in I$. Definimos $f : U \to \mathbb{C}$ como $f(z) = f_i(z)$, con $i \in I$ de tal manera que $z \in U_i$. Se tiene que f está bien definida, pues para $z \in (U_i \cap U_j)$ se sigue

que $f_i(z) = \rho_{\mathcal{O}^h}{}^{U_i}_{U_i\cap U_j}(f_i(z)) = \rho_{\mathcal{O}^h}{}^{U_j}_{U_i\cap U_j}(f_j(z)) = f_j(z)$, lo único que falta probar es que f es holomorfa, pero es claro ya que por definición de f se tiene que $f(z) = f_i(z)$ con $i \in I$ tal que $z \in U_i$, donde f_i es holomorfa para toda $i \in I$. Por lo tanto f es holomorfa.

Se concluye que $\mathcal{O}^h$ es una gavilla de anillos y en conclusión $(\mathbb{C}^*, \mathcal{O}^h)$ es un espacio anillado.

Definición 2.7. Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ espacios anillados. Un **morfismo** $(\varphi, \varphi^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ entre espacios anillados es tal que $\varphi : X \to Y$ es una aplicación continua y $\varphi^\# : \mathcal{O}_Y \to \varphi_*(\mathcal{O}_X)$ es un morfismo de gavillas sobre Y.

Después de la definición de morfismo entre espacios anillados viene un ejemplo con una clase especial de espacios anillados.

Ejemplo 2.8. Sea $\phi : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Con la Definición 1.45 tomamos las gavillas de anillos $\mathcal{O}_{Spec(B)}$ y $\mathcal{O}_{Spec(A)}$ y así, consideramos los espacios anillados $(Spec(B), \mathcal{O}_{Spec(B)})$ y $(Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$. Ahora daremos un morfismo $(\varphi, \varphi^\#) : (Spec(B), \mathcal{O}_{Spec(B)}) \to (Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$, aquí φ es la aplicación ϕ^* obtenida en la Proposición 1.41.

$$\begin{aligned} \varphi : Spec(B) &\to Spec(A) \\ \mathfrak{q} &\mapsto \varphi(\mathfrak{q}) = \phi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

y $\varphi^\#$ se define de la siguiente manera: sea U un abierto de $Spec(A)$

$$\begin{aligned} \varphi^\#_U : \mathcal{O}_{Spec(A)}(U) &\to \varphi_*(\mathcal{O}_{Spec(B)})(U) \\ s &\mapsto \varphi^\#_U(s) : \varphi^{-1}(U) \to \prod_{\mathfrak{r}\in\varphi^{-1}(U)} B_{\mathfrak{r}} \\ &\qquad\qquad \mathfrak{q} \mapsto \varphi^\#_U(s)(\mathfrak{q}) = \widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}(s \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)}(\mathfrak{q})) \end{aligned}$$

El homomorfismo $\widetilde{\phi_{\mathfrak{q}'}} : A_{\phi^{-1}(\mathfrak{q}')} \to B_{\mathfrak{q}'}$ lo construimos para cualquier $\mathfrak{q}' \in Spec(B)$ tomando la composición del homomorfismo natural $i^B_{B\setminus\mathfrak{q}'}$ con el homomorfismo ϕ, de donde obtenemos el homomorfismo de anillos $\phi_{\mathfrak{q}'} : A \to B_{\mathfrak{q}'}$, como $A \setminus \phi^{-1}(\mathfrak{q}')$ es un conjunto multiplicativo de A y $\phi_{\mathfrak{q}'}(\alpha)$ es una unidad en $B_{\mathfrak{q}'}$ para toda $\alpha \in (A \setminus \phi^{-1}(\mathfrak{q}'))$ (pues $\phi(\alpha) \notin \mathfrak{q}'$), aplicando la propiedad universal de la localización para anillos (Proposición 1.13) tenemos que existe el homomorfismo $\widetilde{\phi_{\mathfrak{q}'}} : A_{\phi^{-1}(\mathfrak{q}')} \to B_{\mathfrak{q}'}$ de anillos de tal manera que para cada $a \in A$ y $\alpha \in (A \setminus \varphi^{-1}(\mathfrak{q}))$ se satisface la igualdad $\widetilde{\phi_{\mathfrak{q}'}}\left(\dfrac{a}{\alpha}\right) = \dfrac{\phi(a)}{\phi(\alpha)}$. Se tiene que $\varphi^\#_U(s)$ está en $\mathcal{O}_{Spec(B)}(\varphi^{-1}(U))$: si s en $\mathcal{O}_{Spec(A)}(U)$, considerando $\mathfrak{q} \in \varphi^{-1}(U)$, como $\varphi(\mathfrak{q})$ está en U tenemos que $s \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)}(\mathfrak{q}) = s(\varphi(\mathfrak{q})) \in A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})}$ y así, existe un abierto $W_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})}$ en $Spec(A)$ que contiene a $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ y contenido U, además existen elementos $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ y $\alpha \in (A \setminus \varphi^{-1}(\mathfrak{q}))$ tales que para todo $r \in W_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})}$,

$\mathfrak{r} \in D(\alpha)$ y $s(\varphi(\mathfrak{r})) = \dfrac{a}{\alpha} \in A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{r})}$. Luego, como φ es continua tenemos que $\varphi^{-1}(W_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})})$ es un abierto de $Spec(B)$. Más aún $\mathfrak{q} \in \varphi^{-1}(U)$ y además para todo $\mathfrak{r}'$ en $\varphi^{-1}(W_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})})$ se tiene que $\mathfrak{r}'$ está en $D(\phi(\alpha))$ y $\varphi^{\#}_U(s)(\mathfrak{r}') = \widetilde{\phi_{\mathfrak{r}'}}((s \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)})(\mathfrak{r}')) = \widetilde{\phi_{\mathfrak{r}'}}(s(\varphi(\mathfrak{r}'))) = \dfrac{\phi(a)}{\phi(\alpha)}$. Por lo tanto $\varphi^{\#}_U(s)$ es un elemento de $\varphi_*(\mathcal{O}_{Spec(B)})(U)$. En seguida verificamos que $\varphi^{\#}_U$ está bien definida, sean s y t en $\mathcal{O}_{Spec(A)}(U)$ tales que $s = t$, como $\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}(\mathfrak{q}) \in U$ se tiene que $s(\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}(\mathfrak{q})) = t(\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}(\mathfrak{q}))$, de donde se sigue que $\widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}((s \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)})(\mathfrak{q})) = \widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}((t \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)})(\mathfrak{q}))$ ya que $\widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}$ está bien definida y por lo tanto $\varphi^{\#}_U(s)(\mathfrak{q}) = \varphi^{\#}_U(t)(\mathfrak{q})$. Lo siguiente es ver que $\varphi^{\#}_U$ es un homomorfismo de anillos. Sean s, t en $\mathcal{O}_{Spec(A)}(U)$ y sea $\mathfrak{q}$ un elemento en $\varphi^{-1}(U)$, para la suma tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi^{\#}_U(s+t)(\mathfrak{q}) &= \widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}((s+t) \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)}(\mathfrak{q})) \\
&= \widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}((s(\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}(\mathfrak{q}))) + (t(\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}(\mathfrak{q})))) \\
&= \widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}(s(\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}(\mathfrak{q}))) + \widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}(t(\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}(\mathfrak{q}))) \\
&= \varphi^{\#}_U(s)(\mathfrak{q}) + \varphi^{\#}_U(t)(\mathfrak{q}).
\end{aligned}$$

De manera análoga se prueba que $\varphi^{\#}_U(s \cdot t)(\mathfrak{q}) = \varphi^{\#}_U(s)(\mathfrak{q}) \cdot \varphi^{\#}_U(t)(\mathfrak{q})$ y como también tenemos que $\varphi^{\#}_U(1_{\mathcal{O}_{Spec(A)}(U)})(\mathfrak{q}) = \widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}((1_{\mathcal{O}_{Spec(A)}(U)} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)})(\mathfrak{q})) = \dfrac{\varphi(1_A)}{\varphi(1_A)} = \dfrac{1_B}{1_B}$, para todo $\mathfrak{q} \in \varphi^{-1}(U)$, se concluye que $\varphi^{\#}_U$ es un homomorfismo de anillos. Para que $\varphi^{\#}$ sea un morfismo de gavillas solamente falta probar la compatibilidad con las restricciones de gavillas, es decir, dados U y V abiertos de $Spec(A)$ tales que $V \subseteq U$, falta probar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{Spec(A)}(U) \arrow[r, "\varphi^{\#}_U"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{O}_{Spec(A)}}{}^{U}_{V}"'] & \mathcal{O}_{Spec(B)}(\varphi^{-1}(U)) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{O}_{Spec(B)}}{}^{\varphi^{-1}(U)}_{\varphi^{-1}(V)}"] \\
\mathcal{O}_{Spec(A)}(V) \arrow[r, "\varphi^{\#}_V"'] & \mathcal{O}_{Spec(B)}(\varphi^{-1}(V))
\end{tikzcd}$$

En efecto, sea s en $\mathcal{O}_{Spec(A)}(U)$, evaluando $\rho_{\mathcal{O}_{Spec(B)}}{}^{\varphi^{-1}(U)}_{\varphi^{-1}(V)} \circ \varphi^{\#}_U(s) : \varphi^{-1}(V) \to \prod_{\mathfrak{q} \in \varphi^{-1}(V)} B_{\mathfrak{q}}$ en un elemento $\mathfrak{q}$ de $\varphi^{-1}(V)$ tenemos que $\rho_{\mathcal{O}_{Spec(B)}}{}^{\varphi^{-1}(U)}_{\varphi^{-1}(V)} \circ \varphi^{\#}_U(s)(\mathfrak{q}) = \widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}((s \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)})(\mathfrak{q}))$, mientras que al evaluar $\varphi^{\#}_V \circ \rho_{\mathcal{O}_{Spec(A)}}{}^{U}_{V}(s) : \varphi^{-1}(V) \to \prod_{\mathfrak{q} \in \varphi^{-1}(V)} B_{\mathfrak{q}}$ en $\mathfrak{q}$ se tiene que $\varphi^{\#}_V \circ \rho_{\mathcal{O}_{Spec(A)}}{}^{U}_{V}(s)(\mathfrak{q}) = \widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}((s \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)})(\mathfrak{q}))$, así, se sigue que $\rho_{\mathcal{O}_{Spec(B)}}{}^{\varphi^{-1}(U)}_{\varphi^{-1}(V)} \circ \varphi^{\#}_U(s) = \varphi^{\#}_V \circ \rho_{\mathcal{O}_{Spec(A)}}{}^{U}_{V}(s)$. Ya que ambas funciones tienen mismo dominio, codominio y regla de asignación, el diagrama anterior es conmutativo y se tiene que $\varphi^{\#}$ es un morfismo de gavillas. En conclusión, $(\varphi, \varphi^{\#}) : (Spec(B), \mathcal{O}_{Spec(B)}) \to (Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$ es un morfismo de espacios anillados.

Se debe aclarar que al tener un morfismo $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ entre espacios anillados se tiene que ser cuidadoso al hablar del homomorfismo de anillos inducido de $f^{\#}$ para todo $q \in Y$,

$$\begin{array}{rcl} f_q^{\#} : \mathcal{O}_{Y,q} & \to & f_*(\mathcal{O}_X)_q \\ [(V, s)] & \mapsto & [(V, f_U^{\#}(s)] \end{array}$$

pues no siempre se tiene la certeza de que q tenga una preimagen. Por esta razón solamente nos vamos a interesar en los puntos de X, pues para estos puntos tenemos el homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{rcl} \alpha_p : f_*(\mathcal{O}_X)_{f(p)} & \to & \mathcal{O}_{X,p} \\ [(U, s)] & \mapsto & [(f^{-1}(U), s)] \end{array}$$

obteniendo de manera natural $f_p^{\#} = \alpha_p \circ \varphi^{\#}_{\varphi(p)}$ como

$$\begin{array}{rcl} f_p^{\#} : \mathcal{O}_{Y,f(p)} & \to & \mathcal{O}_{X,p} \\ [(U, s)] & \mapsto & [(f^{-1}(U), f_U^{\#}(s))] \end{array}$$

La situación planteada se describe en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{Y,f(p)} \arrow[r, "f^{\#}_{f(p)}"] \arrow[rr, bend right, "f_p^{\#}"'] & f_*(\mathcal{O}_X)_{f(p)} \arrow[r, "\alpha_p"] & \mathcal{O}_{X,p} \end{tikzcd}$$

Cabe mencionar que en algunos libros como [**6**] y [**7**] se sobreentiende quién es el homomorfismo de anillos $f_p^{\#}$.

Aclarado lo del morfismo de gavillas, pasamos nuestro estudio a la composición de morfismos entre espacios anillados. Sean $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ y $(g, g^{\#}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ morfismos entre espacios anillados. Sabemos que la composición de aplicaciones continuas es una aplicación continua, en particular tenemos el resultado para $g \circ f : X \to Z$, además, para todo abierto U de Z se tienen los homomorfismos de anillos $g_U^{\#} : \mathcal{O}_Z(U) \to g_*(\mathcal{O}_Y)(U)$ y $f^{\#}_{g^{-1}(U)} : \mathcal{O}_Y(g^{-1}(U)) \to f_*(\mathcal{O}_X)(g^{-1}(U))$; como $f_*(\mathcal{O}_X)(g^{-1}(U))$ es igual a $\mathcal{O}_X(f^{-1}(g^{-1}(U)))$ y $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ es un abierto de X, se sigue que $f_*(\mathcal{O}_X)(g^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(g^{-1}(U))) = \mathcal{O}_X((g \circ f)^{-1}(U)) = (g \circ f)_*(\mathcal{O}_X)(U)$. Por lo tanto, la composición de los morfismos entre espacios anillados $(g, g^{\#}) \circ (f, f^{\#})$, es el morfismo de espacios anillados $(g \circ f, (g \circ f)^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$, de tal manera que para todo abierto U de Z el homomorfismo de anillos $(g \circ f)_U^{\#}$ esta definido como $f^{\#}_{g^{-1}(U)} \circ g_U^{\#} : \mathcal{O}_Z(U) \to (g \circ f)_*(\mathcal{O}_X)(U)$. Ahora podemos definir qué es un isomorfismo entre espacios anillados.

Definición 2.9. El morfismo entre espacios anillados $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ es un **isomorfismo** si existe un morfismo $(g, g^{\#}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ tal que $(f, f^{\#}) \circ (g, g^{\#}) = (id_Y, id_{\mathcal{O}_Y})$ y $(g, g^{\#}) \circ (f, f^{\#}) = (id_X, id_{\mathcal{O}_X})$.

Teorema 2.10. *Sean* $(X, \mathcal{O}_X)$ *y* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *espacios anillados. Un morfismo de espacios anillados* $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *es un isomorfismo si y sólo si* f *es un homeomorfismo y* $f^\#$ *es un isomorfismo de gavillas.*

Demostración. Supongamos que $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ es un isomorfismo de espacios anillados, así, existe un morfismo de espacios anillados $(g, g^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ de tal manera $(g, g^\#) \circ (f, f^\#) = (id_X, id_{\mathcal{O}_X})$ y $(f, f^\#) \circ (g, g^\#) = (id_Y, id_{\mathcal{O}_Y})$, es decir $g \circ f = id_X$, $(g \circ f)^\# = id_{\mathcal{O}_X}$, $f \circ g = id_Y$ y $(f \circ g)^\# = id_{\mathcal{O}_Y}$. Como $g \circ f = id_X$ y $f \circ g = id_Y$, se sigue de inmediato que f es un homeomorfismo entre X y Y, lo siguiente es verificar que $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X)$ es un isomorfismo de gavillas, para ello es necesario exhibir un morfismo de gavillas $h^\# : f_*(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_Y$ tal que $f^\# \circ h^\# = id_{f_*(\mathcal{O}_X)}$ y $h^\# \circ f^\# = id_{\mathcal{O}_Y}$, el cual definimos como $h^\#_V = g^\#_{f^{-1}(V)}$ para todo abierto V de Y, no hace falta verificar que $h^\#$ es un morfismo de gavillas ya que $g^\#$ lo es. Así, para un abierto V de Y, tenemos que $(h^\# \circ f^\#)_V = h^\#_V \circ f^\#_V = g^\#_{f^{-1}(V)} \circ f^\#_V = id_{\mathcal{O}_Y(V)}$. De manera análoga se prueba que $(f^\# \circ h^\#)_V = id_{\mathcal{O}_Y(V)}$.

Ahora la otra implicación, suponiendo que se tiene un homeomorfismo $f : X \to Y$ y un isomorfismo de gavillas $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X)$, probaremos que $(f, f^\#)$ es un isomorfismo de espacios anillados, es decir, exhibiremos un morfismo $(h, h^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ tal que $(h, h^\#) \circ (f, f^\#) = (id_X, id_{\mathcal{O}_X})$ y $(f, f^\#) \circ (h, h^\#) = (id_Y, id_{\mathcal{O}_Y})$. Como f es un homeomorfismo se sigue que f^{-1} es una aplicación continua y por ello consideramos $h = f^{-1}$, así, se tiene que $h \circ f = id_X$ y $f \circ h = id_Y$. Luego, como $f^\#$ es isomorfismo de gavillas existe $g^\# : f_*(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_Y$, así, para todo abierto U de Y tomamos $h^\#_U = g^\#_{f(U)} : \mathcal{O}_X(f^{-1}(f(U))) \to \mathcal{O}_Y(f(U))$. Como $g^\#$ es morfismo de gavillas tenemos que $h^\#$ también lo es. Por lo que $(h \circ f)^\#_U = f^\#_{h^{-1}(U)} \circ h^\#_U = f^\#_{h^{-1}(U)} \circ g^\#_{f(U)} = id_{\mathcal{O}_X(U)}$, para todo abierto U de X, por lo tanto $(h, h^\#) \circ (f, f^\#) = (id_X, id_{\mathcal{O}_X})$ y $(f, f^\#) \circ (h, h^\#) = (id_Y, id_{\mathcal{O}_Y})$. De manera análoga se prueba que $(f \circ h)^\#_U = id_{\mathcal{O}_Y(U)}$ para todo abierto U de X. En conclusión $(f, f^\#)$ es un isomorfismo de espacios anillados. ❑

3. Espacios Localmente Anillados

Una clase especial de espacios anillados son los localmente anillados, en algunos de ellos como en el caso del espacio anillado $(Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$ construido en el Ejemplo 2.8 es posible tener control sobre el ideal maximal para cada anillo local $\mathcal{O}_{Spec(A),p}$, donde p está en $Spec(A)$ (véase Teorema 1.46).

Definición 2.11. Un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es **localmente anillado**, si $\mathcal{O}_{X,p}$ es un anillo local para todo p en X.

La siguiente proposición será útil para caracterizar los anillos locales.

Proposición 2.12. *Sea A un anillo, A es local si y sólo si el conjunto de elementos de A que no son unidades forman un ideal en A.*

Demostración. Sea A un anillo local de ideal maximal $\mathfrak{m}$, probaremos que $(A\setminus\mathcal{U}(A)) = \mathfrak{m}$. Se tiene que $\mathfrak{m} \subseteq (A\setminus\mathcal{U}(A))$ o de lo contrario $1_A \in \mathfrak{m}$, lo cual es una contradicción, ahora la otra contención, sea $a \in (A \setminus \mathcal{U}(A))$, como $Aa \neq A$ tenemos que $aA \subseteq \mathfrak{m}$, así, $a \in \mathfrak{m}$ y por lo tanto $(A \setminus \mathcal{U}(A)) \subseteq \mathfrak{m}$.

Recíprocamente, si $A\setminus\mathcal{U}(A)$ es un ideal de A, probaremos que A es un anillo local de ideal maximal $A \setminus \mathcal{U}(A)$. Sea $\mathfrak{n}$ un ideal maximal de A, como $\mathfrak{n}$ no contiene unidades, tenemos que $\mathfrak{n} \subseteq (A\setminus\mathcal{U}(A))$ y además como $\mathfrak{n}$ es un ideal maximal concluimos que $\mathfrak{n} = (A \setminus \mathcal{U}(A))$. ❏

Ejemplo 2.13. Sean A un campo y X un espacio topológico. El espacio anillado (X, C_X) (ver Ejemplo 2.5) cumple ser localmente anillado, ya que $C_{X,p}$ es un anillo local para todo $p \in X$. En efecto, por la Proposición 2.12 basta probar para todo $p \in X$ que $(C_{X,p} \setminus \mathcal{U}(C_{x,p})) = \{[(U, f)] \in C_{X,p} : f = 0_{C_X(U,A)}\} := \mathcal{I}_p$ es un ideal en $C_{X,p}$. Sea $[(U, f)] \in (C_{X,p} \setminus \mathcal{I}_p)$, ya que U es un abierto de X que contiene a p y $f \in C_X(U, A)$ tal que $f(p) \neq 0_A$, se sigue que existe un abierto V de X que contiene a p y contenido en U tal que $f(V) \subseteq (A \setminus \{0_A\})$. En V se tiene definida la función continua $\dfrac{1_A}{f}$, así, $[(U, f)] \cdot \left[\left(V, \dfrac{1_A}{f}\right)\right] = 1_{C_{X,p}}$ y por lo tanto $(C_{X,p} \setminus \mathcal{I}_p) \subseteq \mathcal{U}(C_{X,p})$. Ahora la otra contención, sea $[(U, f)] \in \mathcal{U}(C_{X,p})$, es decir, existen un abierto V de X que contiene a p y $g \in C_X(V, A)$ de tal manera que $[(U, f)] \cdot [(V, g)] = [(U \cap V, f|_{U\cap V} \cdot g|_{U\cap V})] = 1_{C_X(X,A)}$, por lo que $f(p) \neq 0_A$ teniendo que $[(U, f)] \in (C_{X,p} \setminus \mathcal{I}_p)$ y así, $\mathcal{U}(C_{X,p}) \subseteq (C_{X,p} \setminus \mathcal{I}_p)$, por lo tanto $\mathcal{U}(C_{X,p}) = (C_{X,p} \setminus \mathcal{I}_p)$. Luego $(C_{X,p} \setminus \mathcal{U}(C_{X,p})) = \mathcal{I}_p$, que claramente es un ideal y en conclusión (X, C_X) es un espacio localmente anillado.

Definición 2.14. Sean A y B anillos locales de ideales maximales $\mathfrak{m}_A$ y $\mathfrak{m}_B$ respectivamente. **Un homomorfismo de anillos** $\phi : A \to B$ **es local** si $\phi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$.

Ya con la anterior definición damos paso a los morfismos entre espacios localmente anillados.

Definición 2.15. Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ espacios localmente anillados. Un morfismo $(\varphi, \varphi^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ entre espacios anillados es un **morfismo entre espacios localmente anillados** si el homomorfismo de anillos inducido $\varphi^{\#}_p : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ es local para todo p en X.

Ejemplo 2.16. Sea $\phi : A \to B$ un homomorfismo de anillos. El morfismo entre espacios anillados $(\varphi, \varphi^{\#}) : (Spec(B), \mathcal{O}_{Spec(B)}) \to (Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$ (véase Ejemplo 2.8) es entre espacios localmente anillados, pues el homomorfismo de anillos $\widetilde{\phi}_{\mathfrak{q}}$ es local, para todo $\mathfrak{q} \in Spec(B)$, donde $(\phi^{-1}(\mathfrak{q})A_{\phi^{-1}(\mathfrak{q})})$ y $\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$ son los ideales maximales de $A_{\phi^{-1}(\mathfrak{q})}$ y de $B_{\mathfrak{q}}$ respectivamente. En efecto,

$(\widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}^{-1}(\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}})) \subseteq (\phi^{-1}(\mathfrak{q})A_{\phi^{-1}(\mathfrak{q})})$ se tiene ya que $\phi^{-1}(\mathfrak{q})A_{\phi^{-1}(\mathfrak{q})}$ es un ideal maximal. Recíprocamente, dados $a \in \phi^{-1}(\mathfrak{q})$ y $\alpha \notin \phi^{-1}(\mathfrak{q})$, se sigue que $\phi(a) \in \mathfrak{q}$ y $\phi(\alpha) \notin \mathfrak{q}$, por lo que $\dfrac{\phi(a)}{\phi(\alpha)} \in \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$, es decir $\widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}\left(\dfrac{a}{\alpha}\right) \in \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$, de esta manera $\dfrac{a}{\alpha} \in (\widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}^{-1}(\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}))$ y así $(\phi^{-1}(\mathfrak{q})A_{\phi^{-1}(\mathfrak{q})}) \subseteq (\widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}^{-1}(\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}))$, por lo tanto $(\phi^{-1}(\mathfrak{q})A_{\phi^{-1}(\mathfrak{q})}) = \widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}^{-1}(\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}})$. Además, para todo $\mathfrak{q} \in Spec(B)$ tenemos que el homomorfismo de anillos $\varphi^{\#}_{\mathfrak{q}} : \mathcal{O}_{Spec(A),\phi^{-1}(\mathfrak{q})} \to \mathcal{O}_{Spec(B),\mathfrak{q}}$ es local. En efecto, por el Teorema 1.45 se cumple que $\mathcal{O}_{Spec(A),\phi^{-1}(\mathfrak{q})} \cong A_{\phi^{-1}(\mathfrak{q})}$ y $\mathcal{O}_{Spec(B),\mathfrak{q}} \cong B_{\mathfrak{q}}$, suponiendo que f y g son los respectivos isomorfismos se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{Spec(A),\phi^{-1}(\mathfrak{q})} \arrow[r, "\varphi^{\#}_{\mathfrak{q}}"] & \mathcal{O}_{Spec(B),\mathfrak{q}} \arrow[d, "g"] \\
A_{\phi^{-1}(\mathfrak{q})} \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}"'] & B_{\mathfrak{q}}
\end{tikzcd}$$

Ahora, si $\mathfrak{m}_{A,\phi^{-1}(\mathfrak{q})}$ y $\mathfrak{m}_{B,\mathfrak{q}}$ son los ideales maximales de $\mathcal{O}_{Spec(A),\phi^{-1}(\mathfrak{q})}$ y $\mathcal{O}_{Spec(B),\mathfrak{q}}$ respectivamente, entonces $(\varphi^{\#}_{\mathfrak{q}})^{-1}(\mathfrak{m}_{B,\mathfrak{q}}) = \mathfrak{m}_{A,\phi^{-1}(\mathfrak{q})}$. En efecto, $g(\mathfrak{m}_{B,\mathfrak{q}}) = \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$, ya que g es un isomorfismo y probamos que $\widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}$ es un homomorfismo local de anillos por lo que la igualdad $\widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}}^{-1}(\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}) = \phi^{-1}(\mathfrak{q})A_{\phi^{-1}(\mathfrak{q})}$ es verdadera, además $f(\phi^{-1}(\mathfrak{q})A_{\phi^{-1}(\mathfrak{q})}) = \mathfrak{m}_{A,\phi^{-1}(\mathfrak{q})}$, pues f es un isomorfismo. Así, obtenemos que $\varphi^{\#}_{\mathfrak{q}}$ es un homomorfismo local de anillos, ya que $\varphi^{\#}_{\mathfrak{q}} = g^{-1} \circ \widetilde{\phi_{\mathfrak{q}}} \circ f^{-1}$. En conclusión tenemos que $(\varphi, \varphi^{\#})$ es un morfismo de espacios localmente anillados.

Capítulo 3

Las Inmersiones Cerradas entre Espacios Anillados

Durante este capítulo primero estudiaremos un par de gavillas cruciales para entender mejor el comportamiento de las inmersiones cerradas, la gavilla asociada y la imagen inversa de una gavilla bajo una aplicación continua. Luego seguiremos con las inmersiones cerradas, que son una clase particular de morfismo entre espacios anillados y en la última sección demostraremos cuál es la estructura que tiene una inmersión cerrada.

1. La Gavilla Asociada

Siempre que tengamos una pregavilla que no sea una gavilla haremos uso de la siguiente construcción conocida como la gavilla asociada.

A partir de una pregavilla de anillos $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X construiremos $\mathcal{F}^+$ de tal manera que para cualquier abierto U de X se tiene que $\mathcal{F}^+(U) = \{0\}$ si $U = \emptyset$ y en caso contrario $\mathcal{F}^+(U)$ es el conjunto de aplicaciones entre U y $\prod_{p \in U} \mathcal{F}_p$, de modo que para una aplicación $s : U \to \prod_{p \in U} \mathcal{F}_p$ en $\mathcal{F}^+(U)$ se mantienen los siguientes incisos:

1. Para todo p en U, $s(p)$ está en $\mathcal{F}_p$.
2. Dado p en U existen un abierto V_p de X contenido en U, que contiene a p y una sección $t_{V_p} \in \mathcal{F}(V_p)$ tales que $s(q) = [(V_p, t_{V_p})]$, para todo $q \in V_p$.

Como restricciones $\rho_{\mathcal{F}^+}$ tomamos las restricciones usuales de funciones. Sin mucho esfuerzo se puede verificar que $\mathcal{F}^+$ es una pregavilla de anillos, ya que para todo abierto U de X sabemos que $(\mathcal{F}^+(U), +, \times)$ es un anillo además por construcción $\mathcal{F}^+(\emptyset) = \{0\}$ y la restricción $\rho_{\mathcal{F}^+}$ por ser la usual de funciones cumple las condiciones dos y tres de pregavilla. Para verificar que $\mathcal{F}^+$ cumple con las condiciones restantes para ser una gavilla, consideramos un abierto U de X y una cubierta abierta $(U_i)_{i \in I}$ del abierto, donde I es un conjunto no vacío:

1. Sea s una sección de $\mathcal{F}^+(U)$ tal que $\rho_{\mathcal{F}^+}{}^{U}_{U_i}(s) = 0_{\mathcal{F}^+(U_i)}$, así, para todo q en U, $s(q) = [(U_j, 0_{\mathcal{F}^+(U_j)})]$, donde $j \in I$ es tal que $q \in U_j$, V_q es el abierto de X que contiene a q

y está contenido en U, obtenido de la propiedad dos de la gavilla asociada junto con el elemento t_{V_q} en $\mathcal{F}(V_q)$, teniendo que $s(q) = 0_{\mathcal{F}_q}$ para todo $q \in U$ y por lo tanto $s = 0_{\mathcal{F}^+(U)}$.

2. Sea $(s_i)_{i\in I}$ una familia de secciones tales que $s_i \in \mathcal{F}^+(U_i)$ para todo $i \in I$ y de tal manera que $\rho_{\mathcal{F}^+}{}^{U_i}_{U_i\cap U_j}(s_i) = \rho_{\mathcal{F}^+}{}^{U_j}_{U_i\cap U_j}(s_j)$, para cualesquiera i, j en I. Definimos como s la siguiente aplicación $s : U \to \prod_{q\in U} \mathcal{F}_q$, que a cada $q \in U$ le asigna $s(q) = s_i(q)$, donde $i \in I$ cumple que $q \in U_i$. Observe que por construcción s está bien definida y cumple con las condiciones para ser una sección en $\mathcal{F}^+(U)$.

Por lo tanto $\mathcal{F}^+$ es una gavilla de anillos y así pasamos a la siguiente definición.

Definición 3.1. Sea $\mathcal{F}$ una pregavilla de anillos sobre un espacio topológico X. Con notaciones en la presente sección, $\mathcal{F}^+$ es la **gavilla asociada** a la pregavilla $\mathcal{F}$ sobre X.

Con la gavilla $\mathcal{F}^+$ viene la aplicación θ entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^+$ la cual se define para un abierto U de X de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \theta_U : \mathcal{F}(U) &\to \mathcal{F}^+(U) \\ s &\mapsto \theta_U(s) : U \to \prod_{r\in U} \mathcal{F}_r \\ &\qquad\qquad q \mapsto \theta_U(s)(q) = [(U, s)] \end{aligned}$$

Se tiene que $\theta_U(s)(q) \in \mathcal{F}^+(U)$ pues la condición uno es evidente y para cumplir los requisitos de la condición dos basta tomar cualquier abierto V de X que contenga a p y contenido en U y como sección $s|_V$. Recordemos que denotamos $[(U, s)] = s_q$. Sean $s, t \in \mathcal{F}(U)$, suponiendo que $s = t$, se sigue que $\theta_U(s)$ y que $\theta_U(t)$ tienen el mismo domino, codominio y además para todo $p \in U$ se cumple que $\theta_U(s)(p) = s_p = t_p = \theta_U(t)(p)$, por lo que también tienen la misma regla de asignación y así θ está bien definida. Si suponemos que s no necesariamente es igual a t y que $p \in U$, entonces para la suma tenemos que $\theta_U(s+t)(p) = (s+t)_p = s_p+t_p = \theta_U(s)(p)+\theta_U(t)(p)$, de manera análoga se verifica el producto y como $\theta_U(1_{\mathcal{F}(U)})(p) = [(U, 1_{\mathcal{F}(U)})] = 1_{\mathcal{F}_p}$ resulta que θ_U es un homomorfismo de anillos. También se tiene que θ es compatible con las restricciones de las pregavillas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^+$, es decir, al considerar los abiertos U y V de X tales que $V \subseteq U$ se sigue que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\theta_U"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}}{}^U_V"'] & \mathcal{F}^+(U) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}^+}{}^U_V"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\theta_V"'] & \mathcal{F}^+(V) \end{tikzcd}$$

es conmutativo: en efecto, sean $s \in \mathcal{F}(U)$ y $p \in V$, se tiene que $(\rho_{\mathcal{F}^+}{}^U_V \circ \theta_U(s))(p) = \rho_{\mathcal{F}^+}{}^U_V([(U,s)]) = [(V, \rho_{\mathcal{F}}{}^U_V(s))]$ y que $(\theta_V \circ \rho_{\mathcal{F}}(s))(p) = \theta_V(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_V(s))(p) = [(V, \rho_{\mathcal{F}}{}^U_V(s))]$. Por lo tanto θ es un morfismo de pregavillas. La última propiedad de θ se tiene del siguiente lema.

Lema 3.2. *Con notaciones en la presente sección, se tiene que el homomorfismo de anillos $\theta_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}^+_p$ inducido por θ es un isomorfismo para cualquier elemento p de X.*

Demostración. Sea p un elemento de X, recuerde que el homomorfismo de anillos θ_p es tal que $\theta_p([(U,s)]) = [(U, \theta_U(s))]$, donde $[(U,s)] \in \mathcal{F}_p$. Se tiene que θ_p cumple lo siguiente:

- θ_p es inyectivo. Sea $s_p = [(U,s)] \in \mathcal{F}_p$ tal que $s_p \in Ker(\theta_p)$. Como $\theta_p(s_p) = [(U, \theta_U(s))] = 0_{\mathcal{F}^+_p}$ existe un abierto W de X tal que $p \in W \subseteq U$ y $\rho_{\mathcal{F}^+}{}^U_W(\theta_U(s)) = 0_{\mathcal{F}^+(W)}$, así, para todo $q \in W$ se tiene que $\rho_{\mathcal{F}^+}{}^U_W(\theta_U(s))(q) = (\theta_W(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_W(s)))(q) = 0_{\mathcal{F}^+_p}$. Como en particular $\theta_W(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_W(s)))(q) = [(W, \rho_{\mathcal{F}}{}^U_W(s)]$ se sigue que $[(U,s)] = [(X, 0_{\mathcal{F}(X)})]$.
- θ_p es sobreyectivo. Sea $[(U,t)] \in \mathcal{F}^+_p$, por la propiedad dos de la gavilla asociada existen un abierto V_p de X que contiene a p contenido en U y $t_{V_p} \in \mathcal{F}(V_p)$ tales que para todo $q \in V_p$ se tiene que $t(q) = [(V_p, t_{V_p})]$, así, consideramos $[(V_p, t_{V_p})]$ como preimagen de $[(U,t)]$. En efecto, $\theta_p([(V_p, t_{V_p})]) = [(V_p, \theta_{V_p}(t_{V_p}))]$ es igual a $[(U,t)]$, ya que V_p es un abierto de X que contiene a p y $\rho_{\mathcal{F}^+}{}^U_{V_p}(t) = \theta_{V_p}(t_{V_p})$.

Por lo tanto θ_p es un isomorfismo de anillos. ❏

En el caso de $\mathcal{F}$ sea una gavilla se observa que $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^+$.

El siguiente teorema que probaremos es conocido como la propiedad universal de la gavilla asociada.

Teorema 3.3 (Propiedad Universal de la Gavilla Asociada). *Sea $\mathcal{F}$ una pregavilla de anillos sobre un espacio topológico X y $\mathcal{F}^+$ su gavilla asociada. Si $\mathcal{G}$ es una gavilla sobre X y $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de pregavillas, entonces existe un único morfismo de gavillas $\phi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ que cumple la igualdad $\phi = \phi^+ \circ \theta$ donde θ es el morfismo de pregavillas entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^+$.*

Demostración. Es necesario exhibir la aplicación ϕ^+. Sean U un abierto de X y $s \in \mathcal{F}^+(U)$, por la propiedad dos de la gavilla asociada $\mathcal{F}^+$, para $p \in U$ existe un abierto V_p de X que contiene a p y que esta contenido en U y existe $t_{V_p} \in \mathcal{F}(V_p)$ tales que $s(p) = [(V_p, t_{V_p})] = (t_{V_p})_p$. Luego, se tiene que $(V_p)_{p \in U}$ es una cubierta abierta de U y tenemos una familia de secciones $(\phi_{V_p}(t_{V_p}))_{p \in U}$ con $\phi_{V_p}(t_{V_p}) \in \mathcal{G}(V_p)$ para todo $p \in U$. Queremos extender dicha familia a una sección en $\mathcal{G}(U)$, por lo que probaremos que la familia se comporta bien en la intersección de dos abiertos de la cubierta. Sean p y q en U. Si $V_p \cap V_q = \emptyset$, nada a probar. De lo contrario, dado $r \in V_p \cap V_q$ se tiene que $s(r) = [(V_p \cap V_q, \rho_{\mathcal{F}}{}^{V_p}_{V_p\cap V_q}(t_{V_p}))] = [(V_p \cap V_q, \rho_{\mathcal{F}}{}^{V_q}_{V_p\cap V_q}(t_{V_q}))]$, por lo que $\rho_{\mathcal{G}}{}^{V_p}_{V_p\cap V_q}(\phi_{V_p}(t_{V_p}))(r) = (\phi_{V_p\cap V_q}(t_{V_p}|_{V_p\cap V_q}))(r) = (\phi_{V_p\cap V_q}(t_{V_q}|_{V_p\cap V_q}))(r) = \rho_{\mathcal{G}}{}^{V_q}_{V_p\cap V_q}(\phi_{V_q}(t_{V_q}))(r)$ y como $\mathcal{G}$ es una gavilla existe $t \in \mathcal{G}(U)$ tal que para todo V_p que contiene a p se satisface la igualdad $\rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{V_p}(t) = \phi_{V_p}(t_{V_p})$, así, para cada abierto U de X se define $\phi^+_U : \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{G}(U)$, tal que $\phi^+_U(s) = t$.

Ahora probaremos que la aplicación ϕ^+_U está bien definida. Sean $s, t \in \mathcal{F}^+(U)$ tales que $s = t$ se tiene para todo $p \in U$ que $\phi^+_U(s)(p) = (\phi^+_U(s))_p = \phi_p(s(p)) = \phi_p(t_p) = (\phi^+_U(t))_p = \phi^+_U(t)(p)$. Luego, suponiendo que s no necesariamente es igual a t, para todo $p \in U$ la suma cumple que

$$\begin{aligned}
\phi^+_U(s+t)(p) &= \phi^+_U(s+t)_p \\
&= \phi_p((s+t)(p)) \\
&= \phi_p(s(p)) + \phi_p(t(p)) \\
&= (\phi^+_U(s))_p + (\phi^+_U(t))_p \\
&= (\phi^+_U(s))(p) + (\phi^+_U(t))(p)
\end{aligned}$$

De manera análoga se verifica el producto y como para todo $p \in U$ se cumple que $\phi^+_U(1_{\mathcal{F}^+(U)})(p) = (\phi^+_U(1_{\mathcal{F}(U)}))_p = (\phi_p(1_p)) = 1_p$, se concluye que ϕ^+_U es un homomorfismo de anillos para todo abierto U de X. Además, si tomamos dos abiertos U, W de X tales que $W \subseteq U$, se sigue que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^+(U) \arrow[r, "\phi^+_U"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}^+}{}^{U}_{W}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{W}"] \\
\mathcal{F}^+(W) \arrow[r, "\phi^+_W"'] & \mathcal{G}(W)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. En efecto, sea $s \in \mathcal{F}^+(U)$ siguiendo un lado del diagrama tenemos $\rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{W}(\phi^+_U(s))$ y para cada $p \in W$ tenemos que $\rho_{\mathcal{G}}{}^{U}_{W}(\phi^+_U(s))(p) = \phi^+_V(s)(p) = (\phi^+_U(s))_p = \phi_p(s(p))$, mientras que por el otro lado se tiene que $\phi^+_W(\rho_{\mathcal{F}^+}{}^{U}_{W}(s))(p) = \phi^+_W(s|_W)(p) = (\phi^+_U(s))_p = \phi_p(s(p))$. Por lo tanto ϕ^+ es un morfismo de gavillas. Lo siguiente es probar que $\phi = \phi^+ \circ \theta$, es decir, para todo abierto U de X probaremos que $\phi_U = \phi^+_U \circ \theta_U$. Sea $s \in \mathcal{F}(U)$ y $p \in U$, se tiene la siguiente igualdad $\phi^+_U(\theta_U(s))(p) = \phi^+_U(\theta_U(s)(p)) = (\phi_U(\theta_U(s)))_p = \phi_p(\theta_U(s)(p)) = \phi_U(s(p)) = \phi_U(s)(p)$.

Lo último que mostraremos es que el morfismo ϕ^+ es único. Supongamos que existe otro morfismo de gavillas $\varphi : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ tal que $\phi = \varphi \circ \theta$, el cual induce el homomorfismo de anillos $\phi_p = \varphi_p \circ \theta_p = \phi^+_p \circ \theta_p$ para todo $p \in X$. Debido a que θ_p es isomorfismo tenemos la siguiente igualdad $\varphi_p = \phi^+_p$ para todo $p \in X$ y así $\varphi = \phi^+$. ❑

Una consecuencia de la propiedad universal de la gavilla $\mathcal{F}^+$ asociada a la pregavilla $\mathcal{F}$ sobre el espacio topológico X (Teorema 3.3) es la unicidad de θ y de $\mathcal{F}^+$ salvo isomorfismos. Supongamos que existen otra gavilla $\mathcal{E}$ y otro morfismo $\vartheta : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ que cumplen las condiciones de la propiedad universal. Aplicando el Teorema 3.3 de manera adecuada obtenemos que $\vartheta = \vartheta^+ \circ \theta$ y $\theta = \theta^+ \circ \vartheta$ de donde se sigue que $\theta = \theta^+ \circ (\vartheta^+ \circ \theta) = (\theta^+ \circ \vartheta^+) \circ \theta$, así, para todo $p \in X$ tenemos que $\theta_p = (\theta_p^+ \circ \vartheta_p^+) \circ \theta_p$ y como θ_p es isomorfismo de anillos se sigue que $id_{\mathcal{F}_p^+} = \theta_p^+ \circ \vartheta_p^+$. De manera análoga $\vartheta_p^+ \circ \theta_p^+ = id_{\mathcal{E}_p}$. Por lo tanto θ y $\mathcal{F}^+$ son únicos. En el caso que la pregavilla $\mathcal{F}$ ya sea una gavilla se tiene que $\mathcal{F}^+ \cong \mathcal{F}$.

Observación 3.4. Con el único fin de seguir la notación usual (misma que en los libros [**4**], [**6**] y [**7**]), dada una gavilla de anillos $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X y un ideal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{F}$, denotaremos por $\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}}$ a la gavilla cociente y a la pregavilla por $\left(\dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{I}}\right)^-$.

2. La Imagen Inversa de una Gavilla

En la presente sección $\mathcal{G}$ será una gavilla de anillos sobre un espacio topológico Y y $f : X \to Y$ será una aplicación continua. Lo que haremos a partir de $\mathcal{G}$ es construir una gavilla de anillos sobre X usando para ello la aplicación f, el resultado es la gavilla imagen inversa de $\mathcal{G}$ bajo f.

Comenzamos la construcción de la imagen inversa de $\mathcal{G}$ bajo f considerando un abierto no vacío U de X con el cual definimos al conjunto $\Lambda_U = \{(V, s) : V$ es un abierto de $Y, f(U) \subseteq V$ y $s \in \mathcal{G}(V)\}$ y la relación $\sim$ de la siguiente manera: sean V_1, V_2 abiertos de Y tales que $f(U) \subseteq (V_1 \cap V_2)$ y sean $s_1 \in \mathcal{G}(V_1)$, $s_2 \in \mathcal{G}(V_2)$, se tiene que $(V_1, s_1) \sim (V_2, s_2)$ si y sólo si existe un abierto W de Y tal que $f(U) \subseteq W \subseteq (V_1 \cap V_2)$ y $s_1|_W = s_2|_W$.

Lema 3.5. *Con notaciones anteriores, la relación $\sim$ que se acaba de definir en el conjunto Λ_U, es de equivalencia.*

Demostración. Sean V, V_2 y V_3 abiertos del espacio topológico Y que contienen a $f(U)$ y sean $s \in \mathcal{G}(V)$, $s_2 \in \mathcal{G}(V_2)$ y $s_3 \in \mathcal{G}(V_3)$. Se cumple que

- La relación $\sim$ es reflexiva. Basta considerar $V = W$ ya que $f(U) \subseteq V$ y $s = s|_V$. Así, $(V, s) \sim (V, s)$.
- La relación $\sim$ es simétrica. En efecto, si $(V, s) \sim (V_2, s_2)$, entonces existe un abierto W de Y tal que $f(U) \subseteq W \subseteq (V \cap V_2)$ y $s|_W = s_2|_W$. Teniendo que W es un abierto de Y de modo que $f(U) \subseteq W \subseteq (V_2 \cap V)$ y $s_2|_W = s|_W$. Por lo tanto $(V_2, s_2) \sim (V, s)$.
- La relación $\sim$ es transitiva. Si $(V, s) \sim (V_2, s_2)$ y $(V_2, s_2) \sim (V_3, s_3)$, entonces existen los abiertos W_1 y W_2 de Y tales que $f(U) \subseteq W_1 \subseteq (V \cap V_2)$, $f(U) \subseteq W_2 \subseteq (V_2 \cap V_3)$, $s|_{W_1} = s_2|_{W_1}$ y $s_2|_{W_2} = s_3|_{W_2}$. Como $f(U) \subseteq (W_1 \cap W_2)$, al tomar $W = W_1 \cap W_2$ tenemos un abierto de

Y tal que $f(U) \subseteq W \subseteq (V \cap V_2 \cap V_3) \subseteq (V \cap V_3)$ y $s|_W = (s|_{W_1})|_W = (s_2|_{W_1})|_W = s_2|_W = (s_2|_{W_2})|_W = (s_3|_{W_2})|_W = s_3|_W$. Por lo tanto se tiene que $(V, s) \sim (V_3, s_3)$.

En conclusión $\sim$ es una relación de equivalencia. ❑

El lema anterior nos permite tomar el conjunto Λ_U y hacer el cociente con la relación $\sim$ para obtener $(f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U) := \dfrac{\Lambda_U}{\sim}$, se define la suma como $[(V, r)] + [(W, s)] = [(V \cap W, r|_{V\cap W} + s|_{V\cap W})]$, donde $[(V, r)]$, $[(W, s)]$, son elementos de $(f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U)$ y de manera muy parecida el producto se define como $[(V, r)] \cdot [(W, s)] = [(V \cap W, r|_{V\cap W} \cdot s|_{V\cap W})]$. Observamos que la suma está bien definida, ya que para los abiertos V, V_1, W, W_1 de Y, que contienen a $f(U)$ y $r \in \mathcal{G}(V)$, $r_1 \in \mathcal{G}(V_1)$, $s \in \mathcal{G}(W)$ y $s_1 \in \mathcal{G}(W_1)$, tales que, $V = V_1, W = W_1$ y $r = r_1, s = s_1$, como $V \cap W = V_1 \cap W_1$ y $r|_{V\cap W} = r_1|_{V\cap W}, s|_{V\cap W} = s_1|_{V\cap W}$, se tiene que $[(V, r)] + [(W, s)] = [(V \cap W, r|_{V\cap W} + s|_{V\cap W})] = [(V_1, r_1)] + [(W_1, s_1)]$, De manera análoga se verifica que el producto está bien definido.

Además se tiene que $((f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U), +, \cdot)$ es un anillo para todo abierto U de Y, pues la operación suma $+$ y el producto $\cdot$ son cerradas y se verifican los siguientes incisos:

1. La suma $+$ es asociativa. En efecto, sean V, V_2, V_3 abiertos del espacio topológico Y que contienen a $f(U)$ y sean $s \in \mathcal{G}(V)$, $s_2 \in \mathcal{G}(V_2)$ y $s_3 \in \mathcal{G}(V_3)$, se tiene que
$[(V, s)] + ([(V_2, s_2)] + [(V_3, s_3)]) = [(V, s)] + ([(V_2 \cap V_3, s_2|_{V_2\cap V_3} + s_3|_{V_2\cap V_3})]) =$
$[(V \cap (V_2 \cap V_3), s|_{V\cap(V_2\cap V_3)} + (s_2|_{V_2\cap V_3} + s_3|_{V_2\cap V_3})|_{V\cap(V_2\cap V_3)})]$ y como $\mathcal{G}(V \cap V_2 \cap V_3)$ es grupo abeliano, $s|_{V\cap(V_2\cap V_3)} + (s_2|_{V_2\cap V_3} + s_3|_{V_2\cap V_3})|_{V\cap(V_2\cap V_3)} = (s|_{V\cap V_2\cap V_3} + s_2|_{V\cap V_2\cap V_3}) + s_3|_{V\cap V_2\cap V_3}$. Así, tenemos la igualdad $[(V, s)] + ([(V_2 \cap V_3, s_2|_{V_2\cap V_3} + s_3|_{V_2\cap V_3})]) = [(V \cap V_2, s|_{V\cap V_2} + s_2|_{V\cap V_2})] + [(V_3, s_3)]$ y por lo tanto $[(V, s)] + ([(V_2, s_2)] + [(V_3, s_3)]) = ([(V, s)] + [(V_2, s_2)]) + [(V_3, s_3)]$.
2. Se tiene que $[(Y, 0_{\mathcal{G}(Y)})]$ es el cero de $(f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U)$.
3. Inversos Aditivos. Sea $[(V, s)] \in (f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U)$, basta considerar $[(V, -s)]$ como el inverso.
4. El grupo $((f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U), +)$ es abeliano ya que para todo abierto V de Y tal que $f(U) \subseteq V$ se tiene que $(\mathcal{G}(V), +)$ es un grupo abeliano.
5. El producto $\cdot$ es asociativo. La prueba es análoga a la de la suma.
6. El producto es distributivo con respecto de la suma. Es decir, para los abiertos V, V_2, V_3 del espacio topológico Y que contienen a $f(U)$ y las secciones s en $\mathcal{G}(V)$, s_2 en $\mathcal{G}(V_2)$ y s_3 en $\mathcal{G}(V_3)$, se tiene que $[(V, s)] \cdot ([(V_2, s_2)] + [(V_3, s_3)]) = ([(V, s)] \cdot [(V_2, s_2)]) + ([(V, s)] \cdot [(V_3, s_3)])$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
[(V, s)] \cdot ([(V_2, s_2)] + [(V_3, s_3)]) &= [(V, s)] \cdot ([(V_2 \cap V_3, s_2|_{V_2\cap V_3} + s_3|_{V_2\cap V_3})]) \\
&= [(V \cap (V_2 \cap V_3), s|_{V\cap(V_2\cap V_3)} \cdot (s_2|_{V_2\cap V_3} + s_3|_{V_2\cap V_3})|_{V\cap(V_2\cap V_3)}]) \\
&= [(V \cap V_2 \cap V_3, (s|_{V\cap V_2\cap V_3} \cdot s_2|_{V\cap V_2\cap V_3}) + (s|_{V\cap V_2\cap V_3} \cdot s_3|_{V\cap V_2\cap V_3})])
\end{aligned}
$$

$$= [(V \cap V_2, s|_{V\cap V_2} \cdot s_2|_{V\cap V_2})] + [(V \cap V_3, s|_{V\cap V_3} \cdot s_3|_{V\cap V_3})]$$
$$= ([(V, s)] \cdot [(V_2, s_2)]) + ([(V, s)] \cdot [(V_3, s_3)]).$$

7. El neutro mutiplicativo es $[(Y, 1_{\mathcal{G}(Y)})]$.

Por lo tanto, para todo abierto U de X, $((f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U), +, \cdot)$ es un anillo, con esto hemos obtenido una familia de anillos $((f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U))_{U\in X}$ indexada por los abiertos de X. Así, $(f^{-1}\mathcal{G})^{-}$, que es la imagen inversa de $\mathcal{G}$ bajo f se define sobre los abiertos de X como $(f^{-1}\mathcal{G})^{-}(\emptyset) = \{0\}$ y si $U \neq \emptyset$ entonces tenemos como antes $(f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U) = \dfrac{\Lambda_U}{\sim}$. Además, para los abiertos U, U' de X tales que $U' \subseteq U$ la restricción $\rho_{(f^{-1}\mathcal{G})^{-}}{}^{U}_{U'} : (f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U) \to (f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U')$ es tal que a $[(V, s)]$ lo manda a $[(V, s)]$, donde V es un abierto X que cumple que $f(U) \subseteq V$ y $s \in \mathcal{G}(V)$, se observa que $[(V, s)]$ está en $(f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U')$, ya que $U' \subseteq U$ implica que $f(U') \subseteq f(U)$ y por lo tanto $f(U') \subseteq V$. En este caso como la aplicación $\rho_{(f^{-1}\mathcal{G})^{-}}$ es casi la identidad no hace falta probar que está bien definida, sin embargo si es necesario demostrar que $\rho_{(f^{-1}\mathcal{G})^{-}}{}^{U}_{U'}$ es un homomorfismo de anillos: tomamos V y V_2 abiertos de Y tales que $f(U) \subseteq V, f(U) \subseteq V_2$, $s \in \mathcal{G}(V)$ y $s_2 \in \mathcal{G}(V_2)$, luego se tiene que $\rho_{(f^{-1}\mathcal{G})^{-}}{}^{U}_{U'}([(V, s)] + [(V_2, s_2)]) = \rho_{(f^{-1}\mathcal{G})^{-}}{}^{U}_{U'}([(V \cap V_2, s|_{V\cap V_2} + s_2|_{V\cap V_2})]) = [(V \cap V_2, s|_{V\cap V_2} + s_2|_{V\cap V_2})] = [(V, s)] + [(V_2, s_2)] = \rho_{(f^{-1}\mathcal{G})^{-}}{}^{U}_{U'}([(V, s)]) + \rho_{(f^{-1}\mathcal{G})^{-}}{}^{U}_{U'}([(V_2, s_2)])$. De manera análoga se verifica el producto y $\rho_{(f^{-1}\mathcal{G})^{-}}{}^{U}_{U'}([(Y, 1_{\mathcal{G}(Y)})]) = [(Y, 1_{\mathcal{G}(Y)})]$. En seguida se rectifica que $(f^{-1}\mathcal{G})^{-}$ cumple con las propiedades restantes para ser una pregavilla de anillos.

1. $(f^{-1}\mathcal{G})^{-}(\emptyset) = \{0\}$, por construcción.
2. Si U un abierto de X, entonces es claro que $\rho_{(f^{-1}\mathcal{G})^{-}}{}^{U}_{U} = id_{(f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U)}$, pues la restricción es casi como la identidad.
3. Sean U, U_2 y U_3 abiertos de X tales que $U_3 \subseteq U_2 \subseteq U$ y $[(V, s)] \in (f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U)$, donde V es un abierto de Y tal que $f(U) \subseteq V$ y $s \in \mathcal{G}(V)$. Tenemos que $\rho_{(f^{-1}\mathcal{G})^{-}}{}^{U_2}_{U_3} \circ \rho_{(f^{-1}\mathcal{G})^{-}}{}^{U}_{U_2}([(V, s)]) = \rho_{(f^{-1}\mathcal{G})^{-}}{}^{U_2}_{U_3}([(V, s)]) = [(V, s)] = \rho_{(f^{-1}\mathcal{G})^{-}}{}^{U}_{U_3}(([(V, s)]))$.

Lo anterior conlleva a la siguiente definición.

Definición 3.6. Sean $\mathcal{G}$ una gavilla de anillos sobre unl espacio topológico Y y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Con notaciones de la presente sección, la **imagen inversa de la gavilla $\mathcal{G}$ bajo** f denotada por $(f^{-1}\mathcal{G})^{-}$ es una pregavilla de anillos sobre el espacio topológico X.

El estudio de los gérmenes para la pregavilla $(f^{-1}\mathcal{G})^{-}$ se resume en el siguiente teorema.

Teorema 3.7. *Sean $\mathcal{G}$ una gavilla de anillos sobre un espacio topológico Y y $f : X \to Y$ una aplicación continua entre los espacios topológicos X y Y. Siguiendo con la notación de la sección se tiene que $(f^{-1}\mathcal{G})^{-}_p \cong \mathcal{G}_{f(p)}$ para todo $p \in X$.*

Demostración. Sea $p \in X$. Consideramos la asignación

$$\begin{array}{rcl} \phi : (f^{-1}\mathcal{G})^{-}_{p} & \to & \mathcal{G}_{f(p)} \\ [(U, [(V, s)])] & \mapsto & [(V, s)] \end{array}$$

Se observa que para $[(U, [(V, s)])] \in (f^{-1}\mathcal{G})^{-}_{p}$ se tiene que $\phi([(U, [(V, s)])]) = [(V, s)]$ es elemento de $\mathcal{G}_{f(p)}$ ya que $f(p) \in V$ y $s \in \mathcal{G}(V)$. En los siguientes puntos se muestra que la aplicación ϕ está bien definida y que es un isomorfismo de anillos.

- La aplicación ϕ está bien definida. Sean U y U' abiertos de X, $[(V, s)] \in (f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U)$ y $[(V' s')] \in (f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U')$ tales que $U = U'$ y $[(V, s)] = [(V', s')]$ en $(f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U)$, es decir existe $W \subseteq (V \cap V')$ tal que $s|_W = s'|_W$ en $\mathcal{G}(W)$. Como se tiene que $\phi([(U, [(V, s)])]) = [(V, s)]$ y que $\phi([(U', [(V', s')])]) = [(V', s')]$, por lo tanto ϕ está bien definida.
- La aplicación ϕ es un homomorfismo de anillos. Sean U y U' abiertos de X, $[(V, s)] \in (f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U)$ y $[(V' s')] \in (f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U')$, se tiene que

$$\begin{aligned} \phi([(U, [(V, s)])] + [(U', [(V', s')])]) &= \phi([(U \cap U', [(V, s)]|_{U \cap U'} + [(V', s')]|_{U \cap U'})]) \\ &= \phi([(U \cap U', ([(V, s)] + [(V', s')]))]) \\ &= [(V, s)] + [(V', s')] \\ &= \phi([(U, [(V, s)])]) + \phi([(U', [(V', s')])]). \end{aligned}$$

  De manera análoga se verifica el producto y como $\phi([X, [(Y, 1_{\mathcal{G}(Y)})]]) = [(Y, 1_{\mathcal{G}(Y)})]$ se cumple que ϕ es un homomorfismo de anillos.
- El homomorfismo de anillos ϕ es inyectivo. Sea $[(U, [(V, s)])]$ un elemento de $(f^{-1}\mathcal{G})^{-}_{p}$ tal que $[(U, [(V, s)])]$ está en $ker\phi$. Como se tiene que $\phi([(U, [(V, s)])]) = [(V, s)] = 0_{\mathcal{G}_{f(p)}}$ existe un abierto W de Y que contiene a $f(p)$ tal que $W \subseteq V$ y $\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{W}(s) = 0_{\mathcal{G}(W)}$. Para probar la siguiente igualdad $[(U, [(V, s)])] = [(U, [(Y, 0_{\mathcal{G}(Y)})])]$, consideramos al abierto $(U \cap f^{-1}(W))$ de X que contiene a p, cumple que $(U \cap f^{-1}(W)) \subseteq U$ y además $\rho_{(f^{-1}\mathcal{G})^{-}}{}^{U}_{U \cap f^{-1}(W)}([(V, s)]) = [(V, s)]$ es igual a $[(Y, 0_{\mathcal{G}(Y)})]$ en $(f^{-1}\mathcal{G})^{-}(U \cap f^{-1}(W))$ pues W es un abierto de Y que cumple que $f(U \cap f^{-1}(W)) \subseteq (f(U) \cap f(f^{-1}(W))) \subseteq (f(U) \cap W) \subseteq W \subseteq V$ y $\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{W}(s) = 0_{\mathcal{G}(W)}$. En conclusión se tiene que $[(U, [(V, s)])] = [(U, [(Y, 0_{\mathcal{G}(Y)})])]$.
- El homomorfismo ϕ es sobreyectivo. Sea $[(V, s)] \in \mathcal{G}_{f(p)}$, donde V un abierto de Y que contiene a $f(p)$ y $gos \in \mathcal{G}(V)$. Consideramos al abierto $f^{-1}(V)$ de X: dicho abierto contiene a p y como cumple que $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ y se tiene que $[(V, s)] \in (f^{-1}\mathcal{G})^{-}(f^{-1}(V))$. Luego, es claro que $\phi([(f^{-1}(V), [(V, s)])]) = [(V, s)]$.

Por lo tanto ϕ es un isomorfismo de anillos entre $(f^{-1}\mathcal{G})^{-}_{p}$ y $\mathcal{G}_{f(p)}$. ❑

Observación 3.8. Al igual que en la sección pasada con el único fin de seguir la notación estándar de libros como [**6**] y [**7**], dada una pregavilla $\mathcal{G}$ sobre un espacio topológico Y y una aplicación continua $f : X \to Y$, denotaremos por $f^{-1}\mathcal{G}$ a la gavilla asociada a la pregavilla $(f^{-1}\mathcal{G})^{-}$ y la llamaremos la imagen inversa de $\mathcal{G}$ bajo f.

3. Inmersiones Cerradas entre Espacios Anillados

En esencia, lo que vamos hacer después de estudiar las inmersiones cerradas entre espacios anillados es dar un tipo de clasificación para dichas inmersiones, pues se tiene la certeza que esto ayudará a un mejor entendimiento de las inmersiones cerradas entre esquemas.

De manera informal una inmersión cerrada es un morfismo entre espacios anillados en el que la aplicación continua entre los espacios topológicos es un homeomorfismo y el morfismo entre las gavillas es sobreyectivo. Sin más preámbulo tenemos la definición de una inmersión cerrada.

Definición 3.9. Un morfismo $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ entre espacios anillados es una **inmersión cerrada** si f es un homeomorfismo entre X y un cerrado de Y y para cualquier $p \in X$ el homomorfismo de anillos $f^{\#}_p : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ inducido de $f^{\#}$ es sobreyectivo.

Observe que siempre que tengamos un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ de manera trivial el morfismo identidad para $(X, \mathcal{O}_X)$ es un ejemplo de una inmersión cerrada, sin embargo no es un ejemplo interesante. A diferencia del morfismo identidad, el morfismo que a continuación presentamos es un ejemplo clásico y una buena motivación para estudiar las inmersiones cerradas entre espacios anillados.

Ejemplo 3.10. Sea I un ideal de un anillo A y sea $\Pi : A \to \dfrac{A}{I}$ el homomorfismo proyección. Siguiendo el proceso del Ejemplo 2.8 obtenemos el siguiente morfismo entre espacios anillados

$$(f, f^{\#}) : \left(Spec\left(\frac{A}{I}\right), \mathcal{O}_{Spec\left(\frac{A}{I}\right)}\right) \to (Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$$

en donde $f : Spec\left(\dfrac{A}{I}\right) \to Spec(A)$ es la aplicación continua inducida de Π y definida para todo $\mathfrak{q} \in Spec\left(\dfrac{A}{I}\right)$ por $f(\mathfrak{q}) = \Pi^{-1}(\mathfrak{q})$. Nótese que f es un homeomorfismo entre $Spec\left(\dfrac{A}{I}\right)$ y el cerrado $V(I)$ (ver Proposición 1.44). Ahora bien, $f^{\#} : \mathcal{O}_{Spec(A)} \to f_*\left(\mathcal{O}_{Spec\left(\frac{A}{I}\right)}\right)$ es el morfismo de gavillas donde para todo abierto U de $Spec(A)$ se define

$$\begin{aligned}
f^{\#}_U : \mathcal{O}_{Spec(A)}(U) &\to \mathcal{O}_{Spec\left(\frac{A}{I}\right)}(f^{-1}(U)) \\
s &\mapsto f^{\#}_U(s) : f^{-1}(U) \to \prod_{\mathfrak{r} \in f^{-1}(U)} \left(\frac{A}{I}\right)_{\mathfrak{r}} \\
&\qquad\qquad \mathfrak{q} \mapsto f^{\#}_U(s)(\mathfrak{q}) = \widetilde{\Pi_{\mathfrak{q}}}(s \circ f|_{f^{-1}(U)}(\mathfrak{q}))
\end{aligned}$$

donde $\widetilde{\Pi_{\mathfrak{q}'}} : A_{f(\mathfrak{q}')} \to \left(\dfrac{A}{I}\right)_{\mathfrak{q}'}$ con $\mathfrak{q}' = \dfrac{\mathfrak{p}}{I} \in Spec\left(\dfrac{A}{I}\right)$, es tal que $\widetilde{\Pi_{\mathfrak{q}'}}\left(\dfrac{a}{t}\right) = \dfrac{a}{t} + I_{\mathfrak{p}}$, para a en A y t en $(A \setminus f(\mathfrak{q}'))$. Recordemos también para todo elemento $\mathfrak{q}$ en $Spec\left(\dfrac{A}{I}\right)$ se induce el homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{rcl} f^{\#}_{\mathfrak{q}} : \mathcal{O}_{Spec(A),f(\mathfrak{q})} & \to & \mathcal{O}_{Spec(\frac{A}{I}),\mathfrak{q}} \\ [(U,s)] & \mapsto & [(f^{-1}(U), f^{\#}_{U}(s))] \end{array}$$

el cual se sabe es sobreyectivo, pues por el Teorema 1.46 se sabe que $\mathcal{O}_{Spec(A),f(\mathfrak{q})} \cong A_{f(\mathfrak{q})}$, que $\mathcal{O}_{Spec(\frac{A}{I}),\mathfrak{q}} \cong \left(\dfrac{A}{I}\right)_{\mathfrak{q}}$ y además que el homomorfismo entre ellos $\widetilde{\Pi_{\mathfrak{q}}}$ es sobreyectivo. Por lo tanto $(f, f^{\#})$ es una inmersión cerrada entre espacios anillados. Además, al tomar la gavilla $\widetilde{I}$ de I, tenemos que $\widetilde{I} \cong Kerf^{\#}$. En efecto, para ello consideramos $\mathfrak{q} \in Spec\left(\frac{A}{I}\right)$ y la siguiente sucesión de $\mathcal{O}_{Spec(A),f(\mathfrak{q})}$-módulos

$$0 \longrightarrow Kerf^{\#}_{\mathfrak{q}} \longrightarrow \mathcal{O}_{Spec(A),f(\mathfrak{q})} \longrightarrow \mathcal{O}_{Spec(\frac{A}{I}),\mathfrak{q}}$$

exacta a la izquierda, además sabemos que $\mathcal{O}_{Spec(A),f(\mathfrak{q})} \cong A_{f(q)}$ y $\mathcal{O}_{Spec(\frac{A}{I}),\mathfrak{q}} \cong \left(\dfrac{A}{I}\right)_{\mathfrak{q}}$ obteniendo el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Kerf^{\#}_{\mathfrak{q}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{Spec(A),f(\mathfrak{q})} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{Spec(\frac{A}{I}),\mathfrak{q}} \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & I_{f(\mathfrak{q})} \arrow[r] & A_{f(\mathfrak{q})} \arrow[r] & \left(\frac{A}{I}\right)_{\mathfrak{q}} \end{tikzcd}$$

de este diagrama se puede apreciar el siguiente isomorfismo de anillos $Kerf^{\#}_{f(\mathfrak{q})} \cong I_{f(\mathfrak{q})}$ y como $\widetilde{I}_{f(\mathfrak{q})} \cong I_{f(\mathfrak{q})}$ para todo $\mathfrak{q} \in Spec\left(\frac{A}{I}\right)$, tenemos que $Kerf^{\#}_{f(\mathfrak{q})} \cong \widetilde{I}_{f(\mathfrak{q})}$ para todo $\mathfrak{q} \in Spec\left(\frac{A}{I}\right)$ de donde se concluye que $Kerf^{\#} \cong \widetilde{I}$.

Este último ejemplo es posible generalizarlo para cualquier espacio anillado, pero antes de eso probaremos el siguiente lema.

LEMA 3.11. *Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado e $\mathcal{I}$ un ideal de $\mathcal{O}_X$. Se tiene que el conjunto $V(\mathcal{I}) = \{p \in X : \mathcal{I}_p \neq \mathcal{O}_{X,p}\}$ es un cerrado del espacio topológico X.*

DEMOSTRACIÓN. Se prueba que $X \setminus V(\mathcal{I})$ es un abierto de X. Si $(X \setminus V(\mathcal{I})) = \emptyset$ se tiene el resultado, pero si $(X \setminus V(\mathcal{I})) \neq \emptyset$ entonces consideramos $p \in (X \setminus V(\mathcal{I}))$ de donde se sigue que $\mathcal{I}_p = \mathcal{O}_{X,p}$ y por lo tanto $1_{\mathcal{O}_{X,p}} \in \mathcal{I}_p$. Así, existe un abierto U de X que contiene a p y una sección $s \in \mathcal{I}(U)$ tales que $[(X, 1_{\mathcal{O}_X(X)})] = [(U, s)]$ y consecuentemente existe un abierto V de X contenido en U y que contiene a p tal que $s|_V = 1_{\mathcal{O}_X(V)}$. De este modo existe un abierto V de X tal que $p \in V$ y $V \subseteq (X \setminus V(\mathcal{I}))$. Se concluye que $X \setminus V(\mathcal{I})$ es un abierto. ❑

Ejemplo 3.12. Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado e $\mathcal{I}$ un ideal de $\mathcal{O}_X$. En primer lugar consideramos la gavilla de anillos $\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}$ que es la gavilla asociada a la pregavilla cociente $\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^-$ sobre el espacio topológico X. Con el ideal $\mathcal{I}$ obtenemos el espacio topológico $V(\mathcal{I})$ considerando como topología la inducida de X: además como $V(\mathcal{I})$ es un cerrado de X (ver Lema 3.11) tomamos la inclusión $i : V(\mathcal{I}) \to X$ teniendo de manera clara que i es un homeomorfismo entre $V(\mathcal{I})$ y el cerrado $V(\mathcal{I})$ de X. Ahora bien, con el homeomorfismo i obtenemos la pregavilla imagen inversa $i^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^-$ y su gavilla asociada $i^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)$ ambas sobre $V(\mathcal{I})$, a la gavilla $i^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)$ algunas veces la denotaremos por $\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})}$. Como resultado tenemos el espacio anillado $(V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{I})})$. Para completar un morfismo entre espacios anillados lo siguiente es construir un morfismo de gavillas entre $\mathcal{O}_X$ y $i_*(\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})})$, digamos $i^\# : \mathcal{O}_X \to i_*(\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})})$, el cual construiremos en tres pasos.

Lo primero es considerar el morfismo de gavillas $\Pi : \mathcal{O}_X \to \dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}$ donde para todo abierto U de X definimos

$$\begin{array}{rcl} \Pi_U : \mathcal{O}_X(U) & \to & \dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(U) \\ s & \mapsto & \theta^1_U(\pi_U(s)) \end{array}$$

donde $\pi : \mathcal{O}_X \to \left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^-$ es el morfismo de pregavillas proyección y $\theta^1 : \left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^- \to \dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}$ es el morfismo de pregavillas que viene con la construcción de la gavilla asociada a la pregavilla cociente, ambos sobreyectivos y por lo tanto el homomorfismo de anillos Π_U es sobreyectivo. Con argumentos similares se tiene que también el homomorfismo de anillos inducido $\Pi_p : \mathcal{O}_{X,p} \to \left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)_p$ para todo p en X es sobreyectivo.

En segundo lugar consideramos la aplicación $\phi : \dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}} \to i_*\left(i^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^-\right)$ donde para cada abierto U de X, como $i_*\left(i^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^-\right)(U) = i^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^-(U \cap V(\mathcal{I}))$ definimos

$$\begin{array}{rcl} \phi_U : \dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(U) & \to & i^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^-(U \cap V(\mathcal{I})) \\ t & \mapsto & [(U, t)] \end{array}$$

Se sigue que ϕ_U es un homomorfismo de anillos para todo abierto U de X: sean s, t elementos en $\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(U)$, tales que $s = t$ se cumple claramente que $\phi_U(s) = [(U, s)] = [(U, t)] = \phi_U(t)$. Si suponemos que s no necesariamente es igual a t tenemos que $\phi_U(s + t) = [(U, s + t)] = [(U, s)] + [(U, t)] = \phi_U(s) + \phi_U(t)$, de manera análoga $\phi_U(s \cdot t) = \phi_U(s) \cdot \phi_U(t)$ y además se cumple que $\phi_U(1_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(U)}) = [(U, 1_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(U)})]$. Lo que sigue es probar que ϕ es compatible con las restricciones de $\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}$

y de $i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}$. En efecto, sean U y V abiertos de X tales que $V \subseteq U$ y sea s un elemento de $\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(U)$, se sigue que $\rho_{i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}}{}^{U}_{V} \circ \phi_U(s) = [(U,s)]$ en $i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}(V \cap V(\mathcal{I}))$ y que $\phi_V \circ \rho_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}}{}^{U}_{V}(s) = [(V, s|_V)]$ en $i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}(V \cap V(\mathcal{I}))$, además, $[(U,s)]$ es igual a $[(V, s|_V)]$ en $i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}(V \cap V(\mathcal{I}))$, para ello basta considerar el abierto V ya que $i(V \cap V(\mathcal{I})) = (V \cap V(\mathcal{I})) \subseteq V \subseteq (V \cap U)$ y $\rho_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}}{}^{U}_{V}(s) = \rho_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}}{}^{V}_{V}(s|_V)$. Por lo tanto, como el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "\rho_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}}{}^{U}_{V}"'] & i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}(U \cap V(\mathcal{I})) \arrow[d, "\rho_{i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}}{}^{U\cap V(\mathcal{I})}_{V\cap V(\mathcal{I})}"] \\
\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(V) \arrow[r, "\phi_V"'] & i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}(V \cap V(\mathcal{I}))
\end{tikzcd}$$

concluimos que $\phi : \frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}} \to i_*\left(i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}\right)$ es un morfismo de pregavillas. Recordemos que de manera natural ϕ induce un homomorfismo entre los anillos de gérmenes

$$\begin{array}{rcl}\phi_p : \left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)_p & \to & \left(i_*\left(i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}\right)\right)_p \\ {[(U,s)]} & \mapsto & [(U, \phi_U(s))]\end{array}$$

para cualquier p en X el cual estudiaremos a continuación. Sea $p \in X$.

- Si $p \in (X \setminus V(\mathcal{I}))$, entonces tenemos por definición que $\mathcal{O}_{X,p} = \mathcal{I}_p$ y como $\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)_p \cong \frac{\mathcal{O}_{X,p}}{\mathcal{I}_p}$ (ver el Lema 1.28) se tiene que $\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)_p = \{0\}$. Por otro lado, aplicando el Teorema 2.2 en el codominio de ϕ_p, se sigue que $\left(i_*\left(i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}\right)\right)_p = \{0\}$ (pues $p \in (X \setminus V(\mathcal{I}))$), teniendo el homomorfismo nulo, $\phi_p : \{0\} \to \{0\}$.
- Si $p \in V(\mathcal{I})$, entonces el homomorfismo de anillos ϕ_p cumple con los siguientes incisos:
  1. El homomorfismo de anillos ϕ_p es inyectivo. En efecto, sea $[(U,s)] \in \left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)_p$ tal que $[(U,s)] \in Ker\phi_p$. Se tiene que: $\phi_p([(U,s)]) = 0_{\left(i_*\left(i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}\right)\right)_p}$ si y sólo si $[(U, \phi_U(s))] =$

$[(X, 0_{\left(i_*\left(i^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^-\right)\right)(X)})]$, si y sólo si existe un abierto W de X que contiene a p y contenido en U tal que $\rho_{i_*\left(i^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^-\right)}{}^U_W(\phi_U(s)) = 0_{i_*\left(i^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^-\right)(W)}$, si y sólo si existe un abierto W de X que contiene a p y contenido en U tal que $\rho_{i^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^-}{}^{U\cap V(I)}_{W\cap V(I)}([(U,s)]) = [(U,s)] = 0_{i^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^-(W\cap V(I))}$, si y sólo si existe un abierto W de X que contiene a p y contenido en U y además existe un abierto Z de X tal que $(W \cap V(I)) \subseteq Z \subseteq U$ y $\rho_{\frac{O_X}{I}}{}^U_Z(s) = 0_{\frac{O_X}{I}(Z)}$. Se concluye que $[(U,s)] = [(Z, s|_Z)] = [(Z, 0_{\frac{O_X}{I}(Z)})]$ y por lo tanto ϕ_p es un homomorfismo de anillos inyectivo.

2. El homomorfismo de anillos ϕ_p es sobreyectivo. Sea $[(U,t)] \in \left(i_*\left(i^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^-\right)\right)_p$, donde U es un abierto de X que contiene a p y $t \in i_*\left(i^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^-\right)(U) = i^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^-(U \cap V(I))$, es decir U es un abierto de X que contiene a p y $t = [(W,s)]$ donde W es un abierto de X tal que $(U \cap V(I)) \subseteq W$ y $s \in \frac{O_X}{I}(W)$. Así, como preimagen de $[(U,t)]$ consideramos a $[(U \cap W, s|_{U\cap W})]$: dicho elemento esta en $\left(\frac{O_X}{I}\right)_p$ y tenemos que $\phi_p([(U \cap W, s|_{U\cap W})]) = [(U\cap W, \phi_{U\cap W}(s|_{U\cap W}))] = [(U,t)]$, esto ya que $U\cap W$ es un abierto de X que contiene a p y $\rho_{i^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^-}{}^{U\cap V(I)}_{U\cap W\cap V(I)}([(U \cap W, s|_{U\cap W})]) = [(U \cap W, s|_{U\cap W})]$ es igual a $[(U,s)]$ en $i^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^-(U \cap W \cap V(I))$, pues $(U \cap W \cap V(I)) \subseteq (U \cap W)$ y $\rho_{\frac{O_X}{I}}{}^{U\cap W}_{U\cap W}(s|_{U\cap W}) = \rho_{\frac{O_X}{I}}{}^{U}_{U\cap W}(s)$.

En conclusión ϕ_p es un isomorfismo de anillos para todo $p \in V(I)$.

Del estudio que acabamos de hacer tenemos que para todo $p \in X$, el homomorfismo de anillos ϕ_p es un isomorfismo.

Por último consideraremos la aplicación $\psi : i_*\left(i^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^-\right) \to i_*\left(i^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)\right)$ donde cada abierto U de X se define

$$\begin{array}{rcl}\psi_U : i^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^-(U \cap V(I)) & \to & i^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)(U \cap V(I)) \\ {[(W,t)]} & \mapsto & \theta^2_{U\cap V(I)}([(W,t)])\end{array}$$

θ^2 es el morfismo entre $i^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)^-$ y su gavilla asociada $i^{-1}\left(\frac{O_X}{I}\right)$. Se afirma que ψ_U es homomorfismo de anillos para todo abierto U de X, pues $\theta^2_{U\cap V(I)}$ lo es, por la misma razón se tiene que para los abiertos U y U' de X tales que $U' \subseteq U$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}(U \cap V(\mathcal{I})) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d, "\rho_{i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}\ U'\cap V(\mathcal{I})}^{U\cap V(\mathcal{I})}"'] & i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)(U \cap V(\mathcal{I})) \arrow[d, "\rho_{i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)\ U'\cap V(\mathcal{I})}^{U\cap V(\mathcal{I})}"] \\
i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}(U' \cap V(\mathcal{I})) \arrow[r, "\psi_{U'}"'] & i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)(U' \cap V(\mathcal{I}))
\end{tikzcd}$$

Lo siguiente a estudiar es el homomorfismo de anillos inducido

$$\begin{array}{rcl}
\psi_p : \left(i_*\left(i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}\right)\right)_p & \to & \left(i_*\left(i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)\right)\right)_p \\
{[(U,t)]} & \mapsto & [(U,\psi_U(t))]
\end{array}$$

para todo p en X. Sea $p \in X$.

- Si $p \in (X \setminus V(\mathcal{I}))$, entonces $\left(i_*\left(i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)\right)\right)_p = \{0\} = \left(i_*\left(i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}\right)\right)_p$ (ver Teorema 2.2), tenemos que $(W \cap V(\mathcal{I})) = \emptyset$ y como $i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}(\emptyset) = \{0\}$, se tiene $\left(i_*\left(i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}\right)\right)_p = \{0\}$. Así, $\phi_p : \{0\} \to \{0\}$.
- En el caso que p sea elemento de $V(\mathcal{I})$, dado un abierto U de X que contiene a p y $t \in i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}(U \cap V(\mathcal{I}))$, es decir t es de la forma $[(V, s)]$ para cierto abierto V de X, tal que $(U \cap V(\mathcal{I})) \subseteq V$ y cierto $s \in \frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}(V)$ y para todo $p \in V(\mathcal{I})$ tenemos que ψ_p es un isomorfismo de anillos ya que θ_p^2 lo es (ver Lema 3.2).

Hemos probado que para todo $p \in X$ el homomorfismo de anillos ψ_p es un isomorfismo.

En definitiva, obtuvimos el morfismo de gavillas sobreyectivo Π y los morfismos de pregavillas ϕ y ψ tales que para todo $p \in X$ inducen los isomorfismos de anillos ϕ_p y ψ_p respectivamente. Al componer los últimos dos morfismos tenemos como resultado $\varphi = \psi \circ \phi : \frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}} \to i_*(\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})})$, el cual es un isomorfismo de gavillas. Finalmente tomamos el morfismo Π y lo componemos con φ para tener el morfismo sobreyectivo de gavillas $i^\# := \varphi \circ \Pi : \mathcal{O}_X \to i_*(\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})})$, dicha situación se ilustra con el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X \arrow[r, "\Pi"] \arrow[rr, bend right, "i^{\#}"'] & \dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}} \arrow[r, "\varphi"] & i_*(\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})}) \end{tikzcd}$$

Así, hemos construido un morfismo $i^{\#} : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{V(\mathcal{I})}$ de gavillas de tal manera que para todo $p \in V(\mathcal{I})$ el homomorfismo de anillos inducido $i^{\#}_p$ es sobreyectivo, en conclusión $(i, i^{\#})$ es una inmersión cerrada.

4. Estructura de una Inmersión Cerrada entre Espacios Anillados

Una de las motivaciones que nos embarco en la búsqueda de cómo clasificar para las inmersiones cerradas fue el Ejemplo 3.12. Antes de enunciar y demostrar el último teorema, el cual es la cúspide de este trabajo, daremos una caracterización de las inmersiones cerradas entre espacios anillados y probaremos el teorema que da la clasificación.

Lema 3.13. *Sea $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo entre espacios anillados tal que f es un homeomorfismo entre X y un cerrado de Y. El morfismo $(f, f^{\#})$ es una inmersión cerrada si, y sólo si $f^{\#}$ es un morfismo sobreyectivo de gavillas.*

Demostración. Partiendo de que $f^{\#}$ es un morfismo sobreyectivo de gavillas tenemos que para todo $q \in Y$ el homomorfismo de anillos $f^{\#}_q$ es sobreyectivo, en particular si $f(p) = q \in f(X)$ para algún $p \in X$ se tiene que $f^{\#}_p : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ es un homomorfismo de anillos sobreyectivo y por lo tanto $(f, f^{\#})$ es una inmersión cerrada.

Supongamos ahora que $(f, f^{\#})$ es una inmersión cerrada. Dado $q \in Y$ se tienen los siguientes casos:

- Si $q \in (Y \setminus f(X))$, entonces $f_*(\mathcal{O}_X)_q \cong \{0\}$ (ver Teorema 2.2) y por lo tanto $f^{\#}_q : \mathcal{O}_{Y,q} \to \{0\}$ es un homomorfismo de anillos sobreyectivo.
- Si $q \in f(X)$, entonces existe $p \in X$ tal que $f(p) = q$, además $f^{\#}_p : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ es un homomorfismo sobreyectivo de anillos y como $\mathcal{O}_{X,p} \cong f_*(\mathcal{O}_X)_q$, podemos concluir que $f^{\#}_q$ es un homomorfismo de anillos sobreyectivo.

En definitiva, para todo $q \in Y$ el homomorfismo de anillos inducido $f^{\#}_q$ es sobreyectivo y por lo tanto $f^{\#}$ es un morfismo sobreyectivo de gavillas. ❏

El Teorema 3.14 nos dice que es posible factorizar una inmersión cerrada entre espacios anillados con un isomorfismo de espacios anillados y otro morfismo, este otro morfismo resulta ser el construido en el Ejemplo 3.12, el cual por excelencia es una inmersión cerrada.

Teorema 3.14 (Clasificación de Inmersiones Cerradas entre Espacios Anillados). *Dada una inmersión cerrada* $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *entre espacios anillados, siempre existen un ideal* $\mathcal{J}$ *de* $\mathcal{O}_Y$ *y un isomorfismo* $(h, h^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (V(\mathcal{J}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{J})})$ *entre espacios anillados tales que* $(f, f^{\#}) = (i, i^{\#}) \circ (h, h^{\#})$*, donde* $(i, i^{\#})$ *es la inmersión cerrada inducida por el ideal* $\mathcal{J}$*.*

Demostración. Sea $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ una inmersión cerrada entre espacios anillados. Sabemos que $f^{\#}$ es un morfismo de gavillas sobreyectivo (ver Lema 3.13) por lo que tenemos la siguiente sucesión de gavillas exacta:

$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^{\#}} f_*(\mathcal{O}_X) \longrightarrow 0$$

Se puede intuir que como candidato a ideal de $\mathcal{O}_Y$ tomaremos $ker f^{\#} = \mathcal{J}$ y lo primero que haremos con él es completar la sucesión anterior a la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^{\#}} f_*(\mathcal{O}_X) \longrightarrow 0,$$

donde el morfismo entre $\mathcal{J}$ y $\mathcal{O}_Y$ es la inclusión que denotaremos por ι. Se sigue que $\dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}} \cong f_*(\mathcal{O}_X)$, obteniendo así el isomorfismo de gavillas $\widetilde{f^{\#}} : \dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}} \to f_*(\mathcal{O}_X)$. Además, tomando el cerrado $V(\mathcal{J})$ de Y, para un elemento $q \in Y$ se sigue que $q \in V(\mathcal{J})$ si y sólo si $\mathcal{O}_{Y,q} \neq \mathcal{J}_q$, es decir, $\dfrac{\mathcal{O}_{Y,q}}{\mathcal{J}_q} \neq \{0\}$, si y sólo si $f_*(\mathcal{O}_X)_q \neq \{0\}$, equivalentemente si $q \in f(X)$ (ver Teorema 2.2). Por lo tanto $f(X) = V(\mathcal{J})$. La última igualdad de conjuntos nos lleva a construir el homeomorfismo $h : X \to V(\mathcal{J})$ entre X y $V(\mathcal{J})$ que a cada elemento $p \in X$ le asigna $h(p) = f(p)$. Ahora, para tener un morfismo $(h, h^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (V(\mathcal{J}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{J})})$ entre espacios anillados falta construir un morfismo de gavillas $h^{\#} : \mathcal{O}_{V(\mathcal{J})} \to h_*(\mathcal{O}_X)$, donde $\mathcal{O}_{V(\mathcal{J})} = i^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)$ con $i : V(\mathcal{J}) \to Y$ la inclusión. El morfismo $h^{\#}$ lo vamos a obtener aplicando la propiedad universal de la gavilla asociada, así, construimos al morfismo de pregavillas $h^{\#-} : i^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)^{-} \to h_*(\mathcal{O}_X)$ de la siguiente forma: para cada abierto W de Y definimos

$$\begin{aligned} h^{\#-}_{W\cap V(\mathcal{J})} : i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)^{-} (W \cap V(\mathcal{J})) &\to h_*(\mathcal{O}_X)(W \cap V(\mathcal{J})) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(W)) \\ [(Z, s)] &\mapsto \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(Z)}_{f^{-1}(W)}(\widetilde{f^{\#}}_Z(s)) \end{aligned}$$

Observemos que Z es un abierto de Y tal que $(W \cap V(\mathcal{J}))$, $f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(Z)$ pues $f^{-1}(W) = f^{-1}(W \cap f(X)) = f^{-1}(W \cap V(\mathcal{J})) \subseteq f^{-1}(Z)$. Lo siguiente es verificar que $h^{\#-}_{W\cap V(\mathcal{J})}$ está bien definida, para ello tomamos $[(Z, s)], [(T, t)] \in i^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)(W \cap \mathcal{J})$ tales que $[(Z, s)] = [(T, t)]$, es decir existe un abierto Σ de Y tal que $(W \cap V(\mathcal{J})) \subseteq \Sigma \subseteq (Z \cap T)$ y $\rho_{\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}}{}^{Z}_{\Sigma}(s) = \rho_{\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}}{}^{T}_{\Sigma}(t)$. Al aplicar $h^{\#-}_{W\cap V(\mathcal{J})}$

tenemos $\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(Z)}_{f^{-1}(W)}(\widetilde{f^{\#}}_Z(s))$ y $\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(T)}_{f^{-1}(W)}(\widetilde{f^{\#}}_T(t))$ respectivamente. Para poder tener la igualdad entre ellos veremos el comportamiento de sus gérmenes, así, dado $q \in f^{-1}(W)$, consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}(Z) \arrow[r, "\widetilde{f^{\#}}_Z"] \arrow[d, "\rho_{\frac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{J}}}{}^{Z}_{\Sigma}"'] & h_*(\mathcal{O}_X)(Z) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(Z)}_{f^{-1}(\Sigma)}"] \\
\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}(\Sigma) \arrow[r, "\widetilde{f^{\#}}_\Sigma"] \arrow[d] & h_*(\mathcal{O}_X)(\Sigma) \arrow[d] \\
\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)_q \arrow[r, "\widetilde{f^{\#}}_q"] & h_*(\mathcal{O}_X)_q
\end{tikzcd}$$

Sea s, siguiendo el diagrama por un lado se tiene que $\widetilde{f^{\#}}_q([(\Sigma, s|_\Sigma)])$ es igual a $(\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(Z)}_{f^{-1}(\Sigma)} \circ \widetilde{f^{\#}}_Z(s))_q$. Considerando un diagrama análogo al anterior cambiando para t se tiene que $\widetilde{f^{\#}}_q([(\Sigma, t|_\Sigma)]) = (\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(T)}_{f^{-1}(\Sigma)} \circ \widetilde{f^{\#}}_T(t))_q$. Como $\widetilde{f^{\#}}_q$ está bien definida y $[(\Sigma, s|_\Sigma)] = [(\Sigma, t|_\Sigma)]$ tenemos la igualdad $(\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(Z)}_{f^{-1}(W)}(\widetilde{f^{\#}}_Z(s)))_q = (\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(T)}_{f^{-1}(W)}(\widetilde{f^{\#}}_T(t)))_q$, luego, como q fue arbitrario en $f^{-1}(W)$ concluimos que $h^{\#-}_{W\cap V(\mathcal{J})}([(Z, s)]) = h^{\#-}_{W\cap V(\mathcal{J})}([(T, t)])$ y por lo tanto $h^{\#-}_{W\cap V(\mathcal{J})}$ está bien definida. En seguida probaremos que $h^{\#-}_{W\cap V(\mathcal{I})}$ es un homomorfismo de anillos, para esto basta recordar que $\rho_{\mathcal{O}_X}$ y $\widetilde{f^{\#}}$ son familias de homomorfismos de anillos. Además, dados abiertos U y W de Y tales que $W \subseteq U$, se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)^{-}(U\cap V(\mathcal{J})) \arrow[r, "h^{\#-}_{U\cap V(\mathcal{J})}"] \arrow[d, "\rho_{i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)^{-}}{}^{U\cap V(\mathcal{J})}_{W\cap V(\mathcal{J})}"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(U)}_{f^{-1}(W)}"] \\
i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)^{-}(W\cap V(\mathcal{J})) \arrow[r, "h^{\#-}_{W\cap V(\mathcal{J})}"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(W))
\end{tikzcd}$$

pues para $[(Z, s)] \in i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)^{-}(U\cap V(\mathcal{J}))$ tenemos $\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(U)}_{f^{-1}(W)} \circ h^{\#-}_{W\cap V(\mathcal{J})}([(Z, s)]) = \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(Z)}_{f^{-1}(W)}(\widetilde{f^{\#}}_Z(s))$, mientras que $h^{\#-}_{W\cap V(\mathcal{J})} \circ \rho_{i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)^{-}}{}^{U\cap V(\mathcal{J})}_{W\cap V(\mathcal{J})}([(Z, s)]) = h^{\#-}_{W\cap V(\mathcal{J})}([(Z, s)]) = \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(Z)}_{f^{-1}(W)}(\widetilde{f^{\#}}_Z(s))$. En conclusión $h^{\#-}$ es un morfismo de pregavillas. Aplicando la propiedad universal de la gavilla asociada tenemos que existe un morfismo de gavillas $h^{\#} : i^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right) \to h_*(\mathcal{O}_X)$ de tal manera que $h^{\#-} = h^{\#} \circ \theta^3$, donde $\theta^3 : i^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)^{-} \to i^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)$ es el morfismo de pregavillas que viene con la gavilla asociada a la pregavilla $i^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}}\right)^{-}$. Probaremos que $h^{\#}$ es un isomorfismo de gavillas, para ello es necesario recordar el isomorfismo de gavillas $\varphi : \dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}} \to i_*\left(i^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)\right)$ del Ejemplo 3.12 que es igual a $\psi \circ \phi$, así, recordemos que para todo abierto W de Y se tienen los siguientes homomorfismos de anillos:

$$\begin{aligned}
&\phi_W : \frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}(W) \to i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)^{-}(W \cap V(\mathcal{J}))\\
&\psi_W : i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)^{-}(W \cap V(\mathcal{J})) \to i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)(W \cap V(\mathcal{J}))\\
&\widetilde{f^{\#}}_W : \frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}} \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(W))\\
&\varphi_W : \frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}(W) \to i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)(W \cap V(\mathcal{J}))
\end{aligned}$$

los cuales de manera natural inducen el siguiente diagrama que denotaremos por ♣.

$$\begin{tikzcd}
\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}(W) \arrow[rr, "\widetilde{f^{\#}}_W"] \arrow[d, "\varphi_W"'] & & \mathcal{O}_X(f^{-1}(W)) \\
i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)(W \cap V(\mathcal{J})) \arrow[urr, "h^{\#}_{W\cap V(\mathcal{J})}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Lo siguiente es verificar que el diagrama ♣ es un diagrama conmutativo para ello, descomponemos dicho diagrama de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}(W) \arrow[d, "\phi_W"'] \arrow[dr, "\widetilde{f^{\#}}_W"] \arrow[dd, bend right=60, "\varphi_W"'] & \\
i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)^{-}(W \cap V(\mathcal{J})) \arrow[r, "h^{\#-}_{W\cap V(\mathcal{J})}"] \arrow[d, "\psi_W"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(W)) \\
i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)(W \cap V(\mathcal{J})) \arrow[ur, "h^{\#}_{W\cap V(\mathcal{J})}"'] &
\end{tikzcd}$$

Este último diagrama es conmutativo: en efecto la parte de la izquierda conmuta por construcción, si $s \in \frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}(W)$ entonces se tiene que $h^{\#-}_{W\cap V(\mathcal{J})} \circ \phi_W(s) = h^{\#-}_{W\cap V(\mathcal{J})}([(W, s)]) = \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{f^{-1}(W)}_{f^{-1}(W)}(\widetilde{f^{\#}}_W(s)) = \widetilde{f^{\#}}_W(s)$ por lo que la parte superior de la derecha del diagrama conmuta. La parte restante también es conmutativa ya que $\psi_W = \theta^2_{W\cap V(\mathcal{J})}$ y esta parte del diagrama corresponde al diagrama inducido de la propiedad universal de la gavilla asociada que es conmutativo. Así, obtenemos que el diagrama total conmuta. En conclusión, el diagrama ♣ es conmutativo para todo abierto W de Y, es decir, se tiene que $\widetilde{f^{\#}}_W = h^{\#}_{W\cap V(\mathcal{J})} \circ \varphi_W$. Como $\widetilde{f^{\#}}_W$ y φ_W son isomorfismos de anillos, se sigue que $h^{\#}_{W\cap V(\mathcal{J})}$ es un isomorfismo de anillos concluyendo así que $h^{\#}$ es un isomorfismo de gavillas. Por último, dado un abierto W de Y, tenemos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y(W) \arrow[d, "\Pi_W"'] \arrow[dr, "f^{\#}_W"] \arrow[dd, bend right=60, "i^{\#}_W"'] & \\
\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}(W \cap V(\mathcal{J})) \arrow[r, "\widetilde{f^{\#}_W}"] \arrow[d, "\varphi_W"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(W)) \\
i^{-1}\left(\frac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{J}}\right)(W \cap V(\mathcal{J})) \arrow[ur, "h^{\#}_{W\cap V(\mathcal{J})}"'] &
\end{tikzcd}$$

el cual se obtiene con el diagrama ♣ que acabamos de probar que conmuta y el diagrama conmutativo obtenido del Ejemplo 3.12. De esta manera, tenemos que se cumple que $f^{\#}_W = h^{\#}_{W \cap V(\mathcal{J})} \circ i^{\#}_W$. En definitiva dada una inmersión cerrada $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ entre espacios anillados, para el ideal $Ker f^{\#} = \mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_Y$ tenemos el isomorfismo $(h, h^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (V(\mathcal{J}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{J})})$ entre espacios anillados tal que $(f, f^{\#}) = (i, i^{\#}) \circ (h, h^{\#})$. ❑

Observación 3.15. Este resultado nos permite decir que una inmersión cerrada entre espacios anillados $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ queda parametrizada por un ideal de $\mathcal{O}_Y$.

Bibliografía

[1] Atiyah M. F. and Macdonald I. G. *Introduction to conmutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mill, S. A., Ont.1969. ix+128 pp.

[2] Bourbaki N. *Commutative algebra*. Chapters 1-7. Translated from the French. Reprint of the 1989 English translation. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998. xxiv+625 pp.

[3] Zariski O. and Samuel P. *Commutative algebra. Vol. II.*. Reprint of the 1960 edition. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 29. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. x+414 pp.

[4] Eisenbud D. and Harris J. *The geometry of schemes*. Graduate Texts in Mathematics, 197. Springer-Verlag, New York, 2000. x+294 pp.

[5] Frías Medina J. B. *Sobre el carácter algebraico de los morfismos de esquemas afines*. Tesis de Licenciatura, Universidad de Colima. Colima, Col. Julio 2010.

[6] Hartshorne R. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. xvi+496 pp.

[7] Liu Q. *Algebraic geometry and arithmetic curves*. Translated from the French by Reinie Erné. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 6. Oxford Science Publications. Oxford University Press, Oxford, 2002. xvi+576 pp.

[8] Eisenbud D. *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, New York, 1995. xvi+785 pp.

Índice alfabético