



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO
Y
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS UNAM-UMSNH

Introducción a la Geometría Combinatoria

T E S I S A

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

TERESA PATIÑO CÁRDENAS

Director: Dra. María Luisa Pérez Seguí

MORELIA, MICHOACÁN - AGOSTO DE 2012.

Índice

1. Introducción	II
2. Convexidad	1
2.1. Subespacios afines	1
2.2. Conjuntos convexos, combinaciones convexas	2
3. Geometría Combinatoria	5
3.1. Teorema de Radon	5
3.2. Teorema de Helly	6
3.3. Teorema de Carathéodory	10
4. Aplicaciones	11
4.1. Aplicaciones del teorema de Helly	11
4.2. Aplicaciones del teorema de Carathéodory	16
Bibliografía	22

1. Introducción

Los conjuntos convexos son el objeto de estudio de la geometría convexa. Desde la antigüedad han aparecido resultados esporádicos acerca de convexidad en la literatura matemática. Se cree que la primera mención explícita de convexidad fue hecha por Arquímedes, en el libro *Sobre la esfera y el círculo*.

El estudio de estos objetos se incrementó en el siglo XIX con investigaciones sistemáticas, con los trabajos de Cauchy, Steiner, Brunn y Minkowski.

Klee escribió lo siguiente:

“El estudio de los conjuntos convexos es una rama de la geometría, análisis y álgebra lineal que tiene numerosas conexiones con otras áreas de las matemáticas y sirve para unificar muchos fenómenos matemáticos aparentemente diversos. También es relevante en varias áreas de la ciencia y la tecnología.”

Durante el siglo XX se entendió más la relación de la geometría convexa con otras ramas de las matemáticas y matemáticas aplicadas.

Algunas áreas en donde se utiliza son geometría diferencial, geometría Riemanniana, análisis funcional, cálculo de variaciones, teoría de control, optimización, teoría de la medida geométrica, desigualdades, series de Fourier, probabilidad y física matemática.

Este trabajo es una pequeña introducción a la Geometría Combinatoria. Los teoremas base son el Teorema de Radon, el Teorema de Carathéodory y el Teorema de Helly.

En la primera sección introduciremos los conceptos con los cuales trabajaremos. Veremos también algunas propiedades de los objetos que describiremos.

La segunda sección se centra en las demostraciones de los teoremas mencionados. Los teoremas llegan a ser bastante intuitivos después de haber entendido los conceptos dados en la primera sección.

En la tercera sección veremos aplicaciones de estos teoremas.

En la literatura hay muchas generalizaciones de los teoremas de Radon, Helly y Carathéodory. Algunas de ellas son en la dimensión, en las características de los conjuntos con los que se trabaja u otras. En ocasiones las generalizaciones utilizan técnicas no combinatorias (por ejemplo, de homología) y se salen del espíritu de este trabajo.

2. Convexidad

En esta sección veremos nociones geométricas básicas tales como subespacios afines en \mathbb{R}^n . Éstas son indispensables para el estudio principal de este trabajo.

2.1. Subespacios afines

Una línea arbitraria en \mathbb{R}^2 no necesariamente es un subespacio vectorial; debe contener al origen para serlo. Las líneas en general las llamamos **subespacios afines** de \mathbb{R}^2 . Formalmente, los **subespacios afines** en \mathbb{R}^n son conjuntos de la forma $x + V$ donde $x \in \mathbb{R}^n$ y V es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n .

Consideremos un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$.

Definición 2.1. A la intersección de todos los subespacios afines que contienen a X le llamamos el **casco afín** de X , o el conjunto **generado afínmente** por X .

Otra forma de entender esta definición es de la siguiente manera: Sea $X = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$. Trasladamos todo el conjunto por $-a_0$, así que a_0 cae en el origen de coordenadas; entonces tomamos todas las combinaciones lineales de estos elementos trasladados, es decir, obtenemos expresiones de la forma

$$s_0(a_0 - a_0) + s_1(a_1 - a_0) + \dots + s_m(a_m - a_0),$$

y de nuevo trasladando este conjunto de todas las combinaciones lineales por $+a_0$ tenemos $s_1(a_1 - a_0) + s_2(a_2 - a_0) + \dots + s_m(a_m - a_0) + a_0 = s_1a_1 + s_2a_2 + \dots + s_ma_m + (1 - s_1 - s_2 - \dots - s_m)a_0$, donde, para $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $s_i \in \mathbb{R}$.

Entonces las **combinaciones afines** del conjunto $a_0, a_2, \dots, a_m \subset \mathbb{R}^n$ son expresiones de la forma

$$t_0a_0 + t_1a_1 + \dots + t_ma_m \quad \text{donde} \quad \sum_{i=0}^m t_i = 1 \text{ y, para } i \in \{0, 1, \dots, m\}, \quad t_i \in \mathbb{R}$$

(pues observemos que para $i \in \{1, \dots, m\}$, $t_i = s_i$ y $t_0 = 1 - s_1 - s_2 - \dots - s_m$).

Definición 2.2. Decimos que el conjunto $\{a_0, a_2, \dots, a_m\}$ es *afínmente dependiente* si alguno de los elementos puede ser escrito como una combinación afín de los demás; es decir, si existen números reales t_0, t_1, \dots, t_m no todos cero tales que $t_0a_0 + t_1a_1 + \dots + t_ma_m = 0$ y $t_0 + t_1 + \dots + t_m = 0$.

Si a_0 puede ser escrito como combinación afín de los demás tendremos que $a_0 = t_1a_1 + t_2a_2 + \dots + t_ma_m$, con $t_1 + t_2 + \dots + t_m = 1$; entonces si $t_0 = -1$ tenemos que $t_0a_0 + t_1a_1 + \dots + t_ma_m = 0$ y $t_0 + t_1 + \dots + t_m = 0$.

Tenemos que la dependencia afín de $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ es equivalente a la dependencia lineal de los m vectores $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_m - a_0$. Por lo tanto, el máximo número de elementos afínmente independientes en \mathbb{R}^n es $n + 1$.

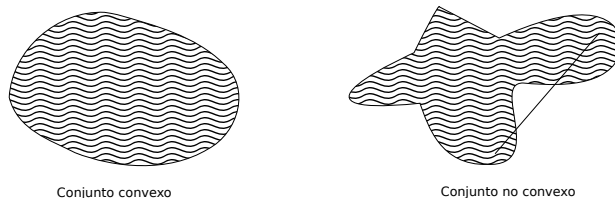
2.2. Conjuntos convexos, combinaciones convexas

En esta sección veremos definiciones básicas de convexidad y algunas propiedades.

Definición 2.3. (Conjunto convexo) Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si y sólo si para cualesquiera dos elementos $x, y \in C$ el segmento $[x, y]$ está contenido en C . Es decir,

$$[x, y] := \{tx + (1 - t)y : t \in [0, 1]\} \subset C.$$

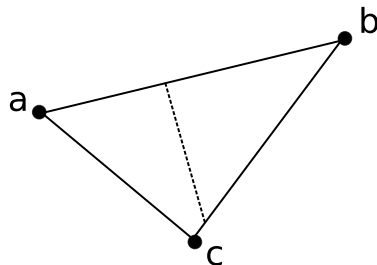
En la figura siguiente vemos ejemplos de un conjunto convexo y un conjunto no convexo.



Los conjuntos convexos han sido considerados desde la antigüedad como objeto de estudio. Pero, como dijo Ball,

“Aunque la propiedad de convexidad se formula fácilmente, los cuerpos convexos poseen una estructura sorprendentemente rica.”

Ejemplo 2.4. Pensemos en el siguiente caso. Consideremos a, b, c puntos no colineales en el plano; el conjunto $\{tx + (1 - t)y : t \in [0, 1], x, y \in \{a, b, c\}\}$ es el conjunto que forman los lados del triángulo con vértices a, b y c



el cual no es convexo, pues, por ejemplo, los elementos de la línea punteada no están en el conjunto. Debemos agregar todo el interior del triángulo para obtener un conjunto convexo.

Definición 2.5. Decimos que $x \in \mathbb{R}^n$ es **combinación convexa** de $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ si existen $t_1, t_2, \dots, t_m \in \mathbb{R}$ no negativos tales que $x = t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_mx_m$ y $t_1 + \dots + t_m = 1$.

Observación 2.6. Un conjunto convexo es cerrado bajo combinaciones convexas de sus elementos.

Demostración: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Haremos inducción sobre el número de elementos de A en las combinaciones convexas. Para dos elementos de A , el resultado es cierto por la definición de convexidad. Supongamos que para cierta $k \geq 3$ todas las combinaciones convexas de $k - 1$ elementos de A están en A .

Sean $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ y $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ tales que $t_1 + t_2 + \dots + t_k = 1$ y para $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $t_i \geq 0$. Veamos que $a := t_1a_1 + t_2a_2 + \dots + t_ka_k \in A$.

Sea $t = 1 - t_k$. Entonces

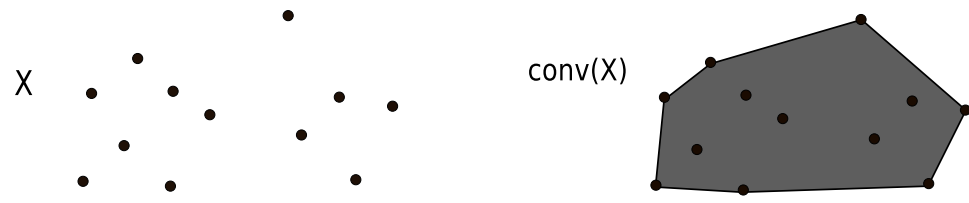
$$a = t(t'_1a_1 + t'_2a_2 + \dots + t'_{k-1}a_{k-1}) + t_ka_k,$$

donde para $i \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$, $t'_i = \frac{t_i}{t}$. Notemos que $t'_1 + t'_2 + \dots + t'_{k-1} = 1$, así $t'_1a_1 + t'_2a_2 + \dots + t'_{k-1}a_{k-1}$ es elemento de A y como $t + t_k = 1$, a es elemento de A . ■

Es fácil convencerse de que la intersección arbitraria de conjuntos convexas es convexa por definición de convexidad.

Definición 2.7. El **casco convexo** de un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$, que denotamos como $\text{conv}(X)$, es la intersección de todos los subconjuntos convexas en \mathbb{R}^n que contienen a X .

Gráficamente lo pensamos de la siguiente forma



Proposición 2.8. Dado $x \in X$, $x \in \text{conv}(X)$ si, y sólo si, existen x_1, x_2, \dots, x_n elementos de X y números reales no negativos t_1, t_2, \dots, t_m con $t_1 + t_2 + \dots + t_m = 1$ tales que $x = t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_mx_m$, es decir

$$\text{conv}(X) = \{t_1x_1 + \dots + t_mx_m : \forall i, x_i \in X, t_i \geq 0, t_1 + \dots + t_m = 1\}.$$

Demostración: “ \supseteq ”: Cada combinación convexa de elementos de X debe pertenecer a $\mathbf{conv}(X)$ pues $\mathbf{conv}(X)$ es cerrado bajo combinaciones convexas.

“ \subseteq ”: Veamos que el conjunto de las combinaciones convexas contiene a X y éstas forman un conjunto convexo: Llamemos S al conjunto de las combinaciones convexas de elementos de X . Es fácil ver que $X \subseteq S$ pues, para cada i , $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 1x_i + \cdots + 0x_n = x_i$ es elemento de S . Además S es convexo porque combinación de combinaciones convexas es convexa. ■

Dados A y B conjuntos definimos su **suma** como el conjunto $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Observación: La suma de dos conjuntos convexas es un conjunto convexo.

Demostración: Sean A y B convexas. Sean $a_1 + b_1$ y $a_2 + b_2$ en $A + B$. Entonces, para $t \in [0, 1]$, $t(a_1 + b_1) + (1 - t)(a_2 + b_2) = [ta_1 + (1 - t)a_2] + [tb_1 + (1 - t)b_2]$ que está en $A + B$, por lo tanto $A + B$ es convexo. ■

3. Geometría Combinatoria

Los teoremas que veremos en esta sección son algunos de los más importantes de la geometría discreta. Aunque todos ellos son igualmente importantes, el Teorema de Helly se ha estudiado más, tal vez porque además de su interpretación geométrica, es el más representativo de toda una clase de resultados conocidos como los *Teoremas de Tipo Helly*, los cuales responden a la siguiente formulación general:

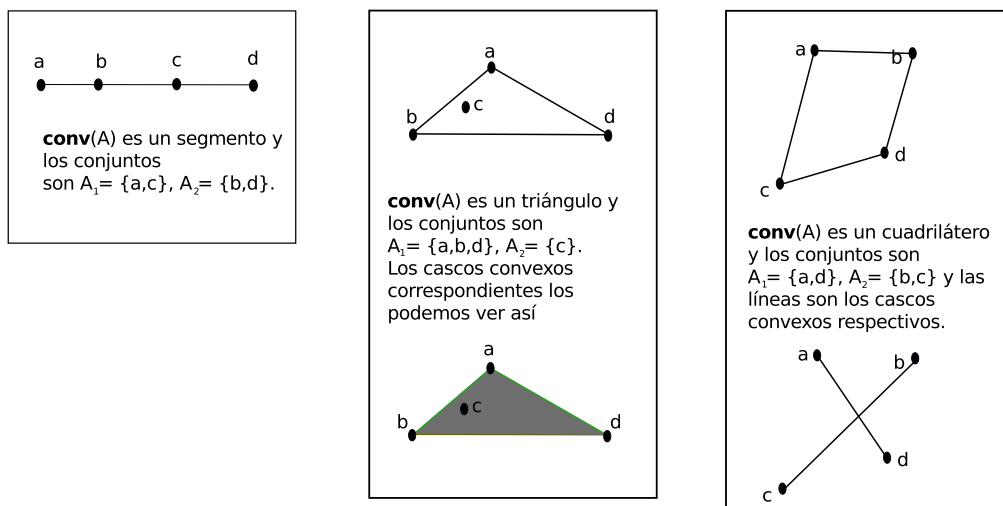
Sea \mathcal{F} una familia de conjuntos y sea r un entero positivo. Si r conjuntos cualesquiera de \mathcal{F} satisfacen la propiedad P , entonces toda la familia \mathcal{F} verifica la propiedad P .

3.1. Teorema de Radon

Teorema 3.1. (Teorema de Radon) Sea A un conjunto con al menos $n + 2$ elementos en \mathbb{R}^n . Entonces existen dos subconjuntos ajenos de A , A_1 y A_2 , tales que $A = A_1 \cup A_2$ y

$$\text{conv}(A_1) \cap \text{conv}(A_2) \neq \emptyset.$$

Antes de presentar la demostración general, consideremos como ejemplo el caso $n = 2$. Sea A un conjunto con 4 puntos en el plano. Entonces A se puede partir en dos subconjuntos A_1 y A_2 de manera que $\text{conv}(A_1) \cap \text{conv}(A_2) \neq \emptyset$. Para probar esto analicemos todas las posibilidades para las maneras en que pueden estar los puntos:



En cada caso pudimos encontrar los subconjuntos de puntos tales que sus cascos convexos se intersectan.

Lo que observamos, y que nos dice el teorema de Radon es que, en este ejemplo, uno de los puntos cae en el triángulo determinado por los otros 3, o el segmento determinado por un par de ellos intersecta al determinado por el otro par de elementos.

La demostración general es sencilla, en el sentido que sólo hacemos uso de definiciones que además, como vimos, llegan a ser intuitivas.

Demostración: Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+2}\}$. Este conjunto de puntos es afinmente dependiente, así que existen números reales t_1, t_2, \dots, t_{n+2} , no todos cero, tales que $t_1 + t_2 + \dots + t_{n+2} = 0$ y $t_1 a_1 + t_2 a_2 + \dots + t_{n+2} a_{n+2} = 0$.

Sin pérdida de generalidad t_1, \dots, t_k son mayores que cero y t_{k+1}, \dots, t_{n+2} menores que cero (existen pues la suma debe ser cero y no todos son cero). Veamos que $A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ y $A_2 = \{a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n\}$ son los conjuntos que buscamos. Debemos probar que la intersección de sus cascos convexos es no vacía:

Para ello sea

$$S = \sum_{i=1}^k t_i = - \sum_{i=k+1}^{n+2} t_i.$$

Definimos

$$x = \sum_{i=1}^k \frac{t_i}{S} a_i,$$

es decir, $x \in \mathbf{conv}(A_1)$. Como

$$0 = \sum_{i=1}^{n+2} t_i a_i = \sum_{i=1}^k t_i a_i + \sum_{i=k+1}^{n+2} t_i a_i,$$

también se tiene que

$$x = \sum_{i=k+1}^{n+2} \frac{-t_i}{S} a_i.$$

Así $x \in \mathbf{conv}(A_1) \cap \mathbf{conv}(A_2)$. ■

3.2. Teorema de Helly

A partir del Teorema de Radon puede deducirse el Teorema de Helly, un resultado fundamental y típico de la Geometría Combinatoria de conjuntos convexos. La primera demostración de este teorema fue publicada por Radon en 1921, a quien Helly había enviado su enunciado ocho años antes. En 1923, Helly da a conocer su propia demostración del resultado.

Este es el enunciado del teorema:

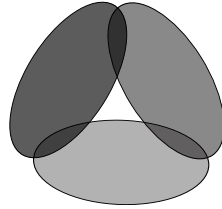
Teorema 3.2 (Helly). Sean C_1, C_2, \dots, C_m conjuntos convexos en \mathbb{R}^n con $m \geq n + 1$. Si la intersección de cualesquiera $n + 1$ de esos conjuntos es no vacía, entonces la intersección de todos los C_i es no vacía.

Antes de ver la demostración del teorema hagamos algunas observaciones y ejemplos que nos muestran que las condiciones en el teorema no se pueden debilitar.

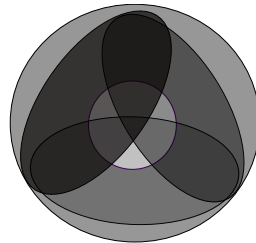
Observemos primero que para $n = 1$ el teorema dice que si cualesquiera dos segmentos (o rayos) de un conjunto de $m \geq 2$ segmentos se intersectan, entonces todos se intersectan.

Ahora veamos ejemplos para $n = 2$, debilitando algunas de las hipótesis.

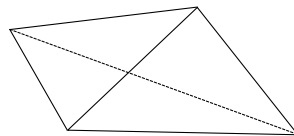
El siguiente es un ejemplo en el plano de 3 conjuntos convexos que se intersectan 2 a 2 y cuya intersección es vacía (aquí $n + 1 = 3 > 2$).



El siguiente es un ejemplo en el plano de 4 conjuntos no todos convexos que se intersectan 3 a 3 y cuya intersección es vacía (aquí los C_i no son convexos).



Ahora podemos ver en \mathbb{R}^3 4 convexos (triángulos rellenos) que se intersectan 3 a 3 (cada 3 se intersectan en algún vértice de la figura) y cuya intersección es vacía (aquí $n + 1 = 4 > 3$). :



Además de estas restricciones en la forma de los conjuntos y en la propiedad importante de tener como hipótesis que cada $n + 1$ conjuntos se intersectan, notemos que si la familia de conjuntos no es finita, el teorema falla:

En la familia $\mathcal{F} = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ de intervalos reales, todos los elementos de la familia se intersectan 2 a 2; de hecho, cualquier subconjunto finito de la familia tiene intersección no vacía, pero la familia completa tiene intersección vacía.

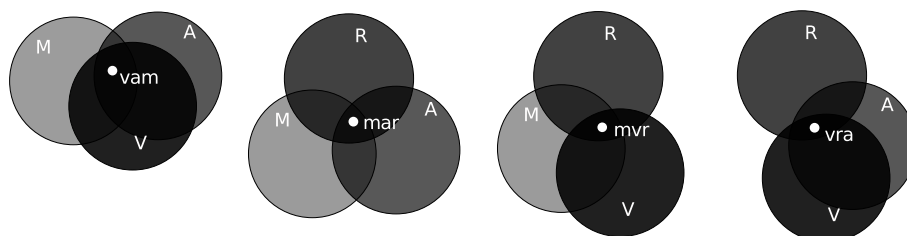
Podríamos pensar que el problema está en que los elementos de la familia no eran cerrados, ya que en el ejemplo, si tomamos intervalos cerrados, entonces 0 sí estaría en cada uno de los elementos de la familia. Sin embargo, en \mathbb{R} la familia $\mathcal{F} = \{[n, \infty) : n \in \mathbb{N}\}$ también tiene intersección vacía, todos son cerrados y 2 a 2 se intersectan.

Lo que falla realmente en los dos casos anteriores es que los conjuntos no son compactos. Al final de esta sección generalizaremos el Teorema de Helly para conjuntos compactos.

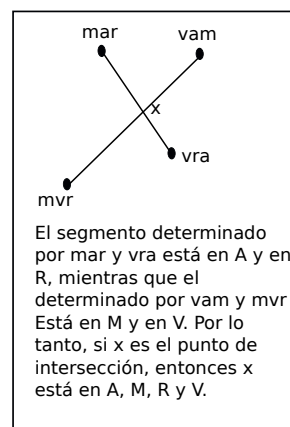
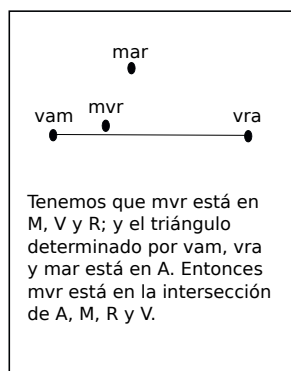
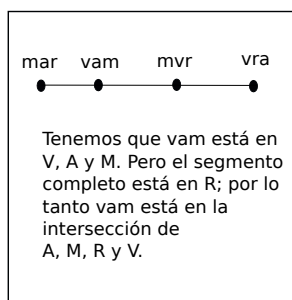
Hemos mencionado que la demostración del Teorema de Helly no es complicada haciendo uso del Teorema de Radon. También dijimos que este no es el único método, pero sólo expondremos éste aquí.

Es útil darnos una idea de la demostración general dando una demostración de un caso particular para $n = 2$, pues además se ilustrará suficientemente bien el procedimiento a seguir.

Tomemos 4 conjuntos convexos en el plano: Sean A, M, R y V conjuntos convexos que se intersectan 3 a 3 en el plano. Tomemos los elementos $vam \in V \cap A \cap M$, $mar \in M \cap A \cap R$, $mvr \in M \cap V \cap R$ y $vra \in V \cap R \cap A$:



Por tanto, como en la ilustración que hicimos del teorema de Radon, tenemos 4 puntos en el plano; haciendo una correspondencia entre los elementos a, b, c y d de la ilustración con los elementos mar, vam, mvr y vra , tenemos las siguientes posibilidades (sin pérdida de generalidad):



Demostración: Ahora sí, veamos la demostración general. Usaremos el teorema de Radon. Haremos inducción sobre el número de conjuntos convexos.

Consideremos conjuntos C_1, C_2, \dots, C_m que satisfacen las condiciones del teorema. Para $m = n + 1$ el resultado se sigue inmediatamente, así que supongamos $m \geq n + 2$.

Ya que $m - 1 \geq n + 1$ y aplicando hipótesis de inducción, tenemos que cualesquiera $m - 1$ de estos C_i tienen intersección no vacía.

Para cada i fijemos un elemento de la siguiente forma: $a_i \in \bigcap_{j \neq i} C_j$ y consideremos el conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+2}\}$.

Sin pérdida de generalidad, aplicando el Lema de Radon, conseguimos

$$x \in \mathbf{conv}(\{a_1, \dots, a_k\}) \cap \mathbf{conv}(\{a_{k+1}, \dots, a_{n+2}\})$$

Veamos que x está en la intersección de todos los C_i . Para $i = 1, 2, \dots, m$ consideremos C_i . Sin pérdida de generalidad $i \geq k + 1$ (posiblemente $i > n + 2$). Entonces $\{a_1, \dots, a_k\} \subset C_i$ pues $i \geq k + 1$ y a_i es el único elemento de A que no pertenece a C_i . Pero C_i es convexo así que $\mathbf{conv}(\{a_1, \dots, a_k\}) \subset C_i$ y entonces $x \in C_i$. ■

Ahora veamos la generalización del Teorema de Helly. Este teorema no será simplemente geométrico como lo fue el anterior, también será topológico. Tenemos que recordar algunas propiedades que nos serán útiles.

Definición 3.3 (Propiedad de intersección finita). Una familia de conjuntos $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in I}$ tiene la propiedad de intersección finita si para cada subfamilia finita y no vacía de \mathcal{F} , la intersección de sus elementos es no vacía, es decir, si para cada $\emptyset \neq J \subset \mathcal{F}$ finito

$$\bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset.$$

Necesitamos también la siguiente equivalencia de espacio compacto de la cual, por ser muy conocida, no pondremos demostración.

Proposición 3.4. Un espacio topológico X es compacto si, y sólo si, toda familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.

Teorema 3.5. (versión infinita del teorema de Helly) Sea \mathcal{F} una familia arbitraria de conjuntos convexos y compactos en \mathbb{R}^n . Si la intersección de cualesquiera $n + 1$ de esos conjuntos es no vacía, entonces la intersección de todos los conjuntos de \mathcal{F} es no vacía.

Demostración: Tomemos K un elemento arbitrario de \mathcal{F} . Ahora consideremos la familia \mathcal{F}' cuyos elementos son de la forma $F' = K \cap F$, para $F \in \mathcal{F}$.

Por el Teorema de Helly, la intersección de cualquier familia finita de elementos de \mathcal{F}' es no vacía.

Ahora aplicamos la proposición 3.4 para obtener que la intersección de los elementos de \mathcal{F}' es no vacía y, por tanto, también es no vacía la intersección de los elementos de \mathcal{F} .

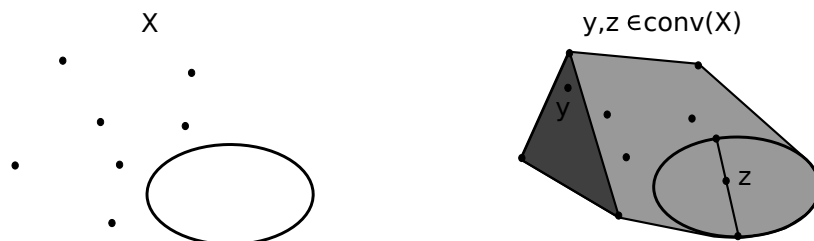
■

3.3. Teorema de Carathéodory

Teorema 3.6. (Teorema de Carathéodory)

Dado un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se tiene que cada elemento de $\mathbf{conv}(X)$ es una combinación convexa de a lo más $n + 1$ elementos de X .

Como en otras ocasiones, antes de proceder a la demostración del teorema analicemos lo que nos dice, por ejemplo, en el plano. Si $X \subset \mathbb{R}^2$, el teorema de Carathéodory nos dice que cada punto de $\mathbf{conv}(X)$ debe ser, o un punto de X , o un punto en el segmento que une dos puntos de X , o estar en el interior de un triángulo cuyos vértices son elementos de X , etc.



Demostración: Sea $y \in \mathbf{conv}(X)$. Existen $x_i \in X$ y $t_i \in \mathbb{R}$ tales que $y = \sum_{i=1}^m t_i x_i$ y $\sum_{i=1}^m t_i = 1$. Supongamos que y no puede ser expresado con menos que m elementos de X y que $m \geq n + 2$; llegaremos a una contradicción. Como el máximo número de elementos afínmente independientes en \mathbb{R}^n es $n + 1$ y $m \geq 2$, existen s_1, \dots, s_m , no todos cero, tales que $\sum_{i=1}^m s_i x_i = 0$ y $\sum_{i=1}^m s_i = 0$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $s_m \neq 0$. Entonces

$$x_m = \frac{1}{s_m}(s_1 x_1 + \dots + s_{m-1} x_{m-1}).$$

Como $\sum_{i=1}^m s_i = 0$, la suma de los coeficientes en la última expresión para x_m es 1.

Sustituyendo tenemos

$$y = \sum_{i=1}^m t_i x_i = \sum_{i=1}^{m-1} t_i x_i + t_m \frac{1}{s_m}(s_1 x_1 + \dots + s_{m-1} x_{m-1})$$

y hemos encontrado una expresión para y que usa menos que m elementos de X , lo que es una contradicción. Por tanto, $m \leq n + 1$. ■

4. Aplicaciones

Como aplicaciones del Teorema de Radon tenemos el Teorema de Helly y el Teorema de Carathéodory.

No expondremos aplicaciones sencillas del Teorema de Radon, de hecho, es difícil encontrarlas. El Teorema de Radon recibió menos atención que los teoremas de Helly y Carathéodory. Para más aplicaciones de este Teorema se puede consultar [5].

Veamos ahora aplicaciones de los Teoremas de Helly y de Carathéodory.

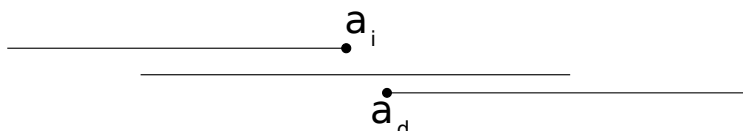
4.1. Aplicaciones del teorema de Helly

Empezaremos viendo un resultado que, aunque no es consecuencia del Teorema de Helly, se encuentra muy relacionado.

Proposición 4.1. Sean \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 dos familias finitas de segmentos sobre la línea real tales que dado un segmento de \mathcal{L}_1 y uno de \mathcal{L}_2 éstos se intersectan; entonces una de las dos familias tiene intersección no vacía.

Demostración: Supongamos que los segmentos de la familia \mathcal{L}_1 tienen intersección vacía y veamos que todos los elementos de la familia \mathcal{L}_2 sí se intersectan.

Coloreemos los elementos de \mathcal{L}_1 de rojo y los de \mathcal{L}_2 de verde. De los extremos derechos de todos los segmentos rojos tomemos el que esté más a la izquierda y llamémosle a_i , y de los extremos izquierdos tomemos el que esté más a la derecha y llamémosle a_d .



Observemos que el intervalo $[a_i, a_d]$ es no vacío, pues si lo fuera, querría decir que los extremos derechos de todos los segmentos rojos están más a la derecha que todos los extremos izquierdos, es decir, todos los segmentos rojos se intersectarían.

Como cada segmento verde intersecta a todos los rojos, cada segmento verde contiene al segmento $[a_i, a_d]$. ■

Proposición 4.2. Sea S un conjunto de n puntos en el plano. Si cada tres puntos de S están contenidos en un disco de radio 1, entonces S está contenido en un disco de radio 1.

Demostración: Tomemos los discos de radio 1 centrados en cada uno de los elementos de S . Probaremos que cada tres de estos discos se intersectan.

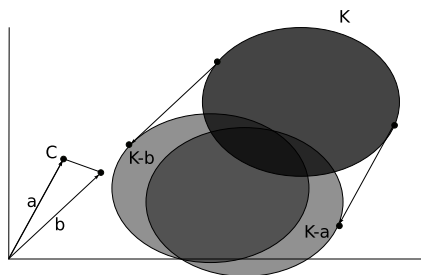
Tomemos tres discos A , B y C con respectivos centros a , b y c . Recordemos que a , b y c deben estar contenidos en un disco de radio 1; llamémosle X a ese disco. Entonces el centro x de X debe estar a distancia menor o igual que 1 de a , b y c ; por lo tanto x pertenece a A , B y C .

Tenemos entonces que, por el teorema de Helly, el conjunto de todos los discos tiene intersección no vacía, pues los estamos considerando en el plano. Entonces, tomando un elemento x en la intersección, notamos que éste debe estar a distancia menor o igual que 1 de cada elemento de S . Este elemento es el centro de un círculo que encierra o contiene a todos los elementos de S . ■

El siguiente resultado generaliza el Teorema de Helly.

Proposición 4.3. Teorema de Klee. Sea $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ con $m \geq n + 1$, una familia de conjuntos convexos en \mathbb{R}^n y sea C un conjunto convexo en \mathbb{R}^n . Si para cada $n + 1$ miembros de \mathcal{K} existe un trasladado de C contenido en la intersección de ellos, entonces existe un trasladado de C contenido en la intersección de todos los elementos de \mathcal{K} .

Demostración: Para $K \in \mathcal{K}$ tomemos el conjunto $K' = \{x \in \mathbb{R}^n : x + C \subseteq K\}$, donde $x + C$ lo definimos como el conjunto $\{x + c : c \in C\}$. Como ilustración, la siguiente figura muestra un ejemplo en el que C es un segmento.



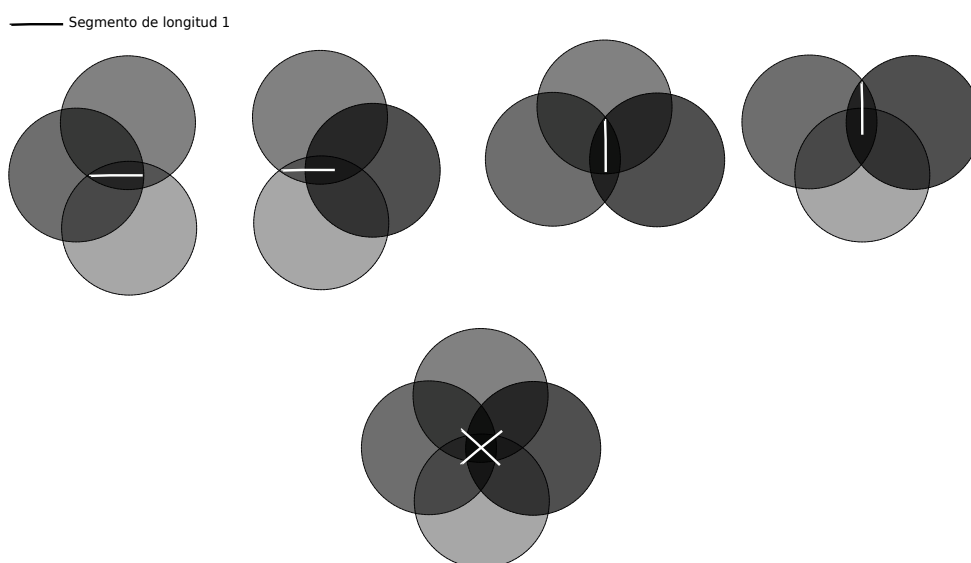
Veamos que $K' = \bigcap_{c \in C} (K - c)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
 x \in K' &\Leftrightarrow \forall c \in C, x + c \in K \\
 &\Leftrightarrow \forall c \in C, \exists k \in K, x + c = k \\
 &\Leftrightarrow \forall c \in C, \exists k \in K, x = k - c \\
 &\Leftrightarrow \forall c \in C, x \in K - c.
 \end{aligned}$$

De aquí tenemos que K' es convexo.

Luego, como para cualesquiera $n+1$ elementos de \mathcal{K} hay un trasladado de C contenido en todos ellos, digamos $x_0 + C$, entonces este x_0 está en los K' 's correspondientes y estos son $n+1$; entonces, si hacemos $\mathcal{K}' = \{K'_1, K'_2, \dots, K'_m\}$ tenemos que el Teorema de Helly aplica en esta familia. Luego, existe un punto x en la intersección de todos los elementos de \mathcal{K}' , y este punto cumple que para $K \in \mathcal{K}$, $x + C$ está contenido en K . ■

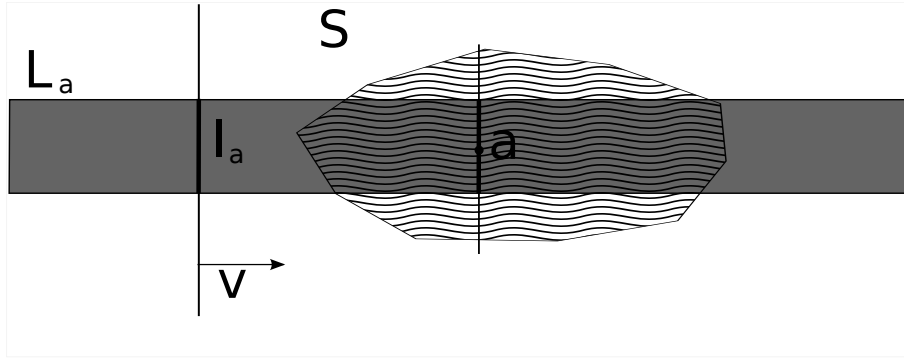
Nota: En el Teorema de Klee, es importante que sean trasladados de un convexo y no sólo conjuntos congruentes al convexo. Por ejemplo los 4 convexos del plano dibujados a continuación cumplen que la intersección de cada 3 de ellos contiene un segmento de longitud 1, pero la intersección de los cuatro no contiene ningún segmento de longitud 1.



Proposición 4.4. Sea S un conjunto convexo y acotado en \mathbb{R}^2 y sea $v \in \mathbb{R}^2$. Si para cualesquiera dos elementos a y b de S existe una línea l paralela a v tal que los reflejados de a y de b respecto a l también pertenecen a S , entonces S tiene un único eje de simetría paralelo a v .

Demostración: Sin pérdida de generalidad supongamos que $v = (1, 0)$.

Para cada $a \in S$ consideremos el conjunto L_a que consta de todas las líneas horizontales l tales que el reflejado de a respecto a l está en S . Luego sea I_a la intersección de L_a con la línea $x = a$ obviamente I_a es convexo, pues S lo es. Así que la intersección de L_a con la línea $x = 0$ es I_a pero trasladado, así que también es convexo. Por tanto, ahora podemos considerar a I_a como la intersección de L_a con la línea $x = 0$ y estar seguros de que es convexo.



Si para todos los $a \in S$ resultara que los I_a correspondientes se intersectan dos a dos, aplicando el teorema de Helly, habría un punto $(0, y_0)$ tal que la línea $y = y_0$ intersectaría a todos los L_a , y entonces esta línea sería el eje de simetría.

Tomemos a y b en S y consideremos L_a y L_b . Por hipótesis, existe una línea horizontal l tal que los reflejados respecto a l también pertenecen a S , es decir, $l \in L_a \cap L_b$, si l es la línea $y = t$, para algún $t \in \mathbb{R}$, entonces $t \in I_a \cap I_b$, como queríamos.

Para ver que es único supondremos lo contrario y llegaremos a una contradicción. Sean l_1 y l_2 ejes de simetría de S . Como ambas son horizontales y distintas consideremos su distancia d . Sea a_1 en l_1 , como l_2 es eje de simetría, el reflejado de a_1 que llamaremos a_2 estará también en S , a una distancia $2d$ de a_1 . Luego, el reflejado de a_2 respecto de l_1 , a_3 también está en S , a una distancia $2d$ de a_1 , luego a_4 el reflejado de a_3 respecto de l_2 está a una distancia $5d$ de a_1 , etc. Siguiendo este razonamiento encontramos elementos en S alejados de a_1 tanto como queramos, contradiciendo que S es acotado verticalmente. ■

Nota: En la proposición anterior se podría haber pedido que S estuviera acotado en la dirección perpendicular al vector v , por ejemplo para $v = (1, 0)$, que S fuera acotado verticalmente.

Proposición 4.5. Sea K un tetraedro en \mathbb{R}^3 con caras A_1, A_2, A_3 y A_4 , y sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Entonces $T(A_1) \cap T(A_2) \cap T(A_3) \cap T(A_4) \neq \emptyset$.

Primero un lema.

Lema 4.6. La imagen de un conjunto convexo bajo una transformación lineal es un convexo.

Demostración: Sea C conjunto convexo y T una transformación lineal. Sean $T(a)$ y

$T(b)$ en la imagen de C . Tenemos queda

$$\begin{aligned}
 \{tT(a) + (1-t)T(b) : t \in [0, 1]\} &= \{T(ta) + T((1-t)b) : t \in [0, 1]\} \\
 &= \{T(ta + (1-t)b) : t \in [0, 1]\} \\
 &= T(\{ta + (1-t)b : t \in [0, 1]\}) \\
 &\subset T(C).
 \end{aligned}$$

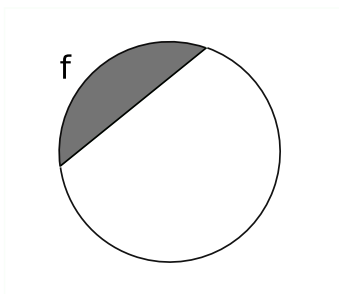
Entonces $T(C)$ es convexo. ■

Demostración de la proposición 4.5:

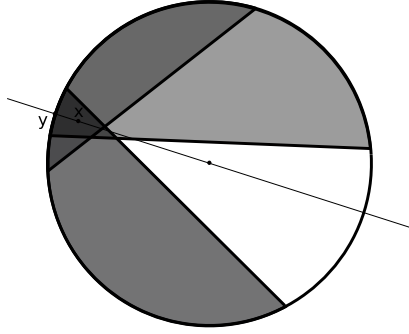
Tenemos que las caras del tetraedro en \mathbb{R}^3 se intersectan 3 a 3. Como T es lineal manda convexos en convexos y las intersecciones se siguen conservando. Entonces tenemos 4 convexos en \mathbb{R}^2 que se intersectan 3 a 3. El resultado nos lo da el teorema de Helly. ■

Proposición 4.7. Sea F una familia de arcos circulares cerrados todos menores que un semicírculo y todos sobre el mismo círculo. Si cada 3 arcos se intersectan, entonces todos se intersectan.

Demostración: Sea f un elemento de F . Construyamos el casco convexo de f , el cual se ve de la siguiente forma:



Luego, ya que cada 3 arcos se intersectan y están en el plano, por el teorema de Helly estos convexos también se intersectan en un punto x . Veamos que hay un punto de intersección de todos los convexos construidos que además está sobre el círculo. Si x no está sobre el círculo, tomemos la línea que une al centro del círculo y a x . Ésta intersecta al círculo y a todos los convexos construidos. De hecho, intersecta a todos estos elementos en un único punto y que está sobre el círculo. ■



Proposición 4.8. Sea F una familia de arcos circulares cerrados, todos menores que un tercio de círculo unitario y todos sobre el mismo círculo. Si cada dos de los arcos se intersectan, entonces todos se intersectan.

Demostración: Consideremos f y g elementos de F . La unión de ellos cubre estrictamente menos que dos tercios de todo el perímetro del círculo, así que cualquier otro arco de círculo h no podrá cubrir el arco sobrante, que mide más de un tercio de círculo. Entonces el punto opuesto al punto medio de la intersección de f y g no está en ninguno de los elementos de F .

Proyectamos el círculo sobre la recta real mediante proyección estereográfica, de manera que x corresponda con el punto al infinito. Así conseguimos hacer corresponder los arcos circulares cerrados con intervalos compactos en \mathbb{R} . Aquí aplicamos el Teorema de Helly (la versión infinita), pues cada dos de estos intervalos compactos se intersectan, por tanto, todos se intersectan en \mathbb{R} y sus correspondientes se intersectan sobre el círculo. ■

4.2. Aplicaciones del teorema de Carathéodory

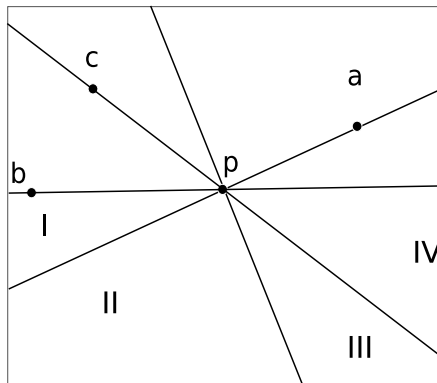
Proposición 4.9. Sean A , B y C conjuntos de puntos en el plano y sea p un punto contenido en $\text{conv}(A) \cap \text{conv}(B) \cap \text{conv}(C)$. Entonces existen $x \in A$, $y \in B$ y $z \in C$ tal que $p \in \text{conv}(x, y, z)$.

Demostración: Por el Teorema de Carathéodory p es combinación convexa de a lo más 3 elementos de cada uno de A , B y C , así que, sin pérdida de generalidad podemos suponer que A , B y C tienen, cada uno, a lo más 3 elementos.

Supongamos que el resultado es falso y sea $a \in A$.

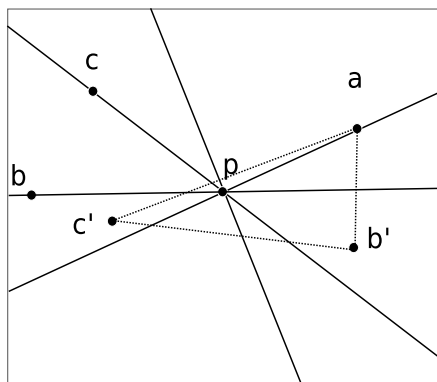
Consideremos la línea l_a que pasa por a y por p (si $a = p$ tomando cualquier elemento en B y cualquiera en C , p estará en el casco convexo de ellos). Luego tracemos la línea t_a perpendicular a l_a por p ; esta última determina dos semiplanos (cerrados) y forzosamente existen $b \in B$ y $c \in C$ en el semiplano contrario al que contiene a a . Como estamos suponiendo falso el resultado, b y c están del mismo lado con respecto a l_a .

Supongamos además que el ángulo que forma la recta l_b , que pasa por b y por p , es mínimo con respecto a todos los puntos de B . Entonces tenemos el plano dividido en regiones, llamemos I, II, III, IV, V y VI a las regiones marcadas en la figura determinadas por las rectas l_a , t_a , l_b y l_c (con esta última la recta que pasa por c y por p).



Por la minimalidad en la elección de b , el interior de I no tiene puntos de B .

Observemos además que no hay puntos de C en ninguna de las regiones II, III y IV pues con a y b se formaría un triángulo que contiene a p , contrario a nuestra suposición. Por la misma razón no hay puntos de B ni en II ni en III. Entonces, como $p \in \text{conv}(B)$ existe $b' \in B \cap IV$. Análogamente existe $c' \in C \cap I$. La situación es la siguiente:



Entonces $p \in \text{conv}(\{a, b', c'\})$ porque p pertenece a los siguientes semiplanos: el determinado por ac' que contiene a b' , el determinado por ab' que contiene a c' y el determinado por $b'c'$ que contiene a a' . Esto contradice nuestra suposición, con lo que completamos la demostración. ■

Proposición 4.10. Sean x y y dos puntos en el plano y contenidos en un pentágono convexo. Si los vértices del pentágono forman el conjunto A , entonces existen 4 elementos de A tal que el cuadrilátero formado contiene a x y a y .

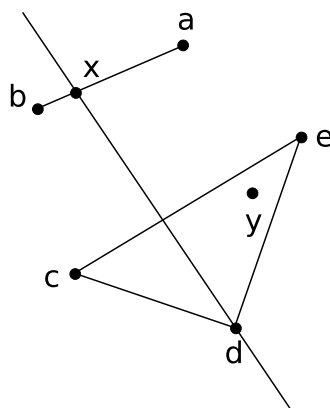
Demostración: Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$. Por teorema de Carathéodory, tanto x como y son combinación convexa de a lo más 3 elementos de A .

Tenemos los siguientes casos:

- x es combinación convexa de exactamente 2 elementos de A , digamos a y b .
 - y es combinación convexa de 2 elementos de A y es claro.
 - y es combinación convexa de 3 elementos de A .

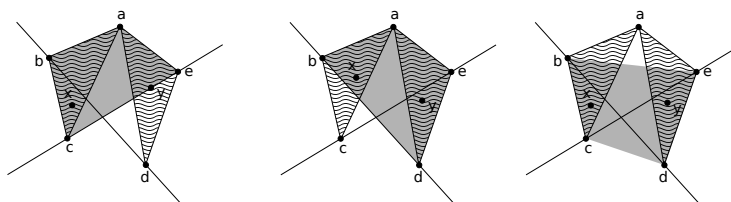
Si a o b son parte de la combinación convexa que forma a y , es claro.

Si y es combinación convexa de c, d y e . Como en la figura siguiente, trazamos la línea que pasa por x y el punto opuesto al lado $[a, b]$. Nos fijamos en qué lado de esta línea queda y y digamos que queda en el mismo lado que c y d (como en la figura). El cuadrilátero buscado es $abde$.



- x es combinación convexa de exactamente 3 elementos de A , al igual que y .
 - Supongamos que x es combinación convexa de α, β y γ y que y lo es de α', β' y γ' . Si los triángulos correspondientes comparten un lado, el resultado es claro, pues la unión de los dos triángulos forma un cuadrilátero y que contiene a x y a y .
 - Si los triángulos α, β y γ , y α', β' y γ' , no comparten un lado tenemos esencialmente dos casos:

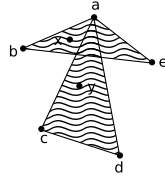
Caso 1: $x \in \text{conv}(\{a, b, c\})$, $y \in \text{conv}(\{a, e, d\})$ como se ve en la figura siguiente.



Al trazar las rectas ec y bd analizamos las regiones donde quedan x y y .

De la figura queda claro cómo proceder.

Caso 2: $x \in \mathbf{conv}(\{a, b, c\})$, $y \in \mathbf{conv}(\{a, c, d\})$. Este caso es claro pues se reduce a los anteriores (por ejemplo en la figura también $x \in \mathbf{conv}(\{a, b, c\})$).



Proposición 4.11. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Entonces $\mathbf{conv}(K)$ es compacto.

Demostración: Sea

$$A = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0\}.$$

Entonces A es acotado pues para cada i , $x_i \in [0, 1]$; y es cerrado por las condiciones $x_i \geq 0$.

El conjunto $A \times K^{n+1}$ es compacto. Definamos $f : \mathbb{R}^{n+1} \times (\mathbb{R}^n)^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$f(x_0, \dots, x_n, r_0, \dots, r_n) = \sum_{i=0}^n x_i r_i.$$

Aplicando f a $A \times K^{n+1}$ conseguimos todas las combinaciones convexas de elementos de K .

Como f es continua, $f(A \times K^{n+1})$ es compacto. ■

Como veremos la siguiente aplicación del Teorema de Carathéodory es realmente el Teorema de Helly con una restricción más, los conjuntos además de ser convexos, son compactos. Esto no se queda ahí. Los Teoremas de Radon, Carathéodory y Helly son equivalentes, en el sentido de que podemos obtener cualquiera de ellos haciendo uso de cualquiera de los otros dos. De hecho, esta última aplicación del Teorema de Carathéodory es una prueba incompleta de que el Teorema de Carathéodory implica el Teorema de Helly.

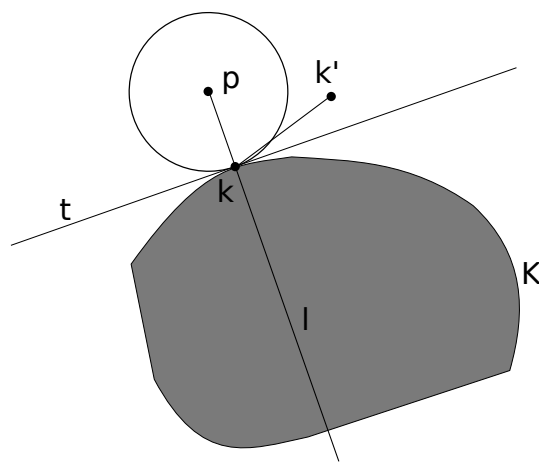
Proposición 4.12. Sean K_1, K_2, \dots, K_m conjuntos convexos y compactos en \mathbb{R}^n , con $m \geq n + 1$. Si la intersección de cualesquiera $n + 1$ de esos conjuntos es no vacía, entonces la intersección de todos los K_i es no vacía.

Primero necesitamos un lema.

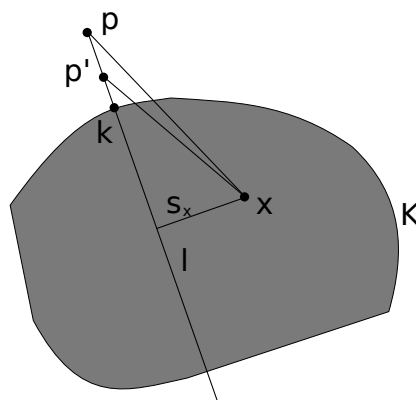
Lema 4.13. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ convexo y compacto, y sea $p \in \mathbb{R}^n - K$. Existe $p' \in \mathbb{R}^n$ tan cerca como se quiera de p tal que todo elemento de K está más cerca de p' que de p .

Demostración: Por ser K compacto, tomemos la distancia $d > 0$ de p a K . Sea $k \in K$ tal que $|k - p| = d$. Consideremos ahora la línea l que pasa por p y por k y llamemos t a la línea perpendicular a l que pasa por k .

Tenemos que K está contenido en el semiplano (cerrado) que determina t y contrario al que está p . Si no fuera así y $k' \in K$ estuviera en el semiplano determinado por t en el que se encuentra p (ver la figura), entonces, por ser K convexo, el segmento $[k, k']$ estaría completamente contenido en K , pero hay elementos en ese segmento que están dentro del círculo con centro p y radio d . lo que no es posible.



Tomemos sobre el segmento $[p, k]$ un elemento p' distinto de p y de k . Veamos que cualquier elemento de K está más cercano a p' que a p . Sea $x \in K$. Sea s_x el segmento que va de x a l perpendicularmente; es claro que el segmento $[p, x]$ es más grande que el segmento $[p', x]$, y así, x está más cerca a p' que a p . ■



Demostración de la proposición 4.12: Supongamos que la intersección de todos es vacía.

Consideremos la función $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida como

$$\delta(x) = \max\{d(x, K_i) : i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

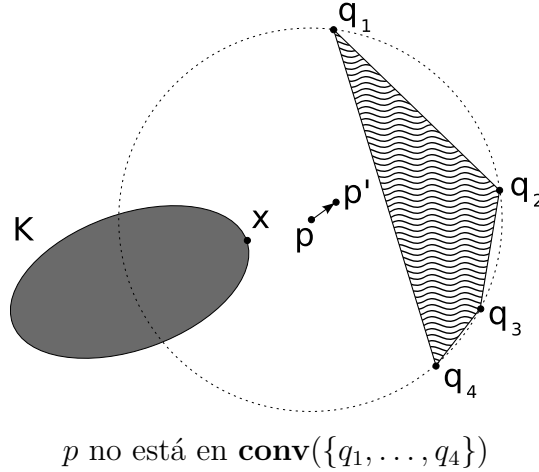
Como todos los K_i son cerrados, d está bien definida y por lo tanto δ está bien definida y es continua. Además,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \delta(x) = \infty,$$

así que como $\delta(x) \geq 0$, podemos ver que δ alcanza su mínimo, digamos que en p . Ya que la intersección es vacía, $\delta(p) > 0$, pues si fuera 0, entonces p estaría en la intersección de todos, lo que estamos suponiendo que no pasa.

Ahora, sin pérdida de generalidad supongamos que, para $i \in \{1, \dots, t\}$, $\delta(p) = d(p, K_i)$, con $t \leq m$. Tomemos, para cada $i \in \{1, \dots, t\}$, $q_i \in K_i$ tal que $\delta(p) = |p - q_i|$. Observemos que como K_i es convexo, q_i es único con esta propiedad.

Afirmamos que $p \in \mathbf{conv}(\{q_1, \dots, q_t\})$. Si no fuera así (viendo la figura siguiente podemos tener algo de intuición) movemos a p en una dirección en la que p' ya esté más cerca a cada elemento de $\mathbf{conv}(\{q_1, \dots, q_t\})$, y de tal manera que para $i \in \{t+1, \dots, m\}$, se siga cumpliendo que $d(p', K_i) < \delta(p)$. Podemos usar el lema 4.13 ya que $\mathbf{conv}(\{q_1, \dots, q_t\})$ es convexo y compacto.



Así pudimos disminuir $\delta(p)$ al mover p , acercándolo a $\mathbf{conv}(\{q_1, \dots, q_t\})$, lo cual es una contradicción a que p fuera mínimo de δ , por lo tanto $p \in \mathbf{conv}(\{q_1, \dots, q_t\})$. Por el Teorema de Carathéodory podemos tomar sólo $n + 1$ de ellos, y entonces suponer que $t \leq n + 1$ y p es combinación convexa de los q_i 's.

Consideremos a los K_i correspondientes a los q_i . Estos son a lo más $n + 1$ que, por hipótesis, se deben intersectar. Sea $y \in \bigcap_{i=1}^t K_i$.

Tenemos que el ángulo ypq_i es estrictamente menor que $\pi/2$, puesto que q_i es el punto más cercano a p de K_i , y y es un punto cualquiera en K_i . Pero entonces, tomando el hiperplano perpendicular a py que pasa por p , todo q_i está del mismo lado que y , contradiciendo el hecho de que p es combinación convexa de los q_i 's. ■

Bibliografía

- [1] DANZER, L., GRÜNBAUM, B. y KLEE, V., *Helly's theorem and its relatives, Convexity, Proc. Symp. Pure Math.*, **7**, American Mathematical Society págs. 101–179, 1963.
- [2] JESÚS JERÓNIMO CASTRO *Geometría Discreta, Universidad Autónoma de Querétaro*, 2011.
- [3] JIŘÍ MATOUŠEK, *Introduction to Discrete Geometry, Lecture Notes, Department of Applied Mathematics, Charles University Malostranské nám 25, 118 00, Praha 1, Czech Republic*, 2003.
- [4] PETER M. GRUBER, *Convex and Discrete Geometry, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics , Institute of Discrete Mathematics and Geometry, Vienna University of Technology*, 2007.
- [5] B. B. PETERSON, *The Geometry of Radon's Theorem, The American Mathematical Monthly*, Vol. 79, No. 9, págs. 949-963, Noviembre 1972.