Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Universidad Nacional Autónoma de México
Instituto de Física y Matemáticas

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

TESIS:
Álgebras C^* generadas por el plano complejo cuántico

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Ismael Farid Cohen Puerta

Asesor: Dr. Elmar Wagner

Morelia, Michoacán - agosto de 2012.

Índice general

Agradecimientos

A Dios por ser gran parte de mi inspiración. A mis compañeros y profesores del posgrado por ayudarme a crecer tanto en la academia. A mi familia por su apoyo absoluto. Al profesor Elmar, por brindarme grandes cimientos académicos y su guía incondicional durante este proceso de maestría. A Liliana, quien ha sido mi amparo, compañia y prosperidad.

INTRODUCCIÓN

No existe una definición rigurosa y universalmente aceptada del término *espacio cuántico*. Sin embargo generalmente se entiende como ciertas deformaciones de objetos clásicos asociados a grupos algebraicos. Podemos ilustrar lo anterior a través de un ejemplo.

Tomamos el álgebra de los polinomios en dos variables x e y sobre un campo K, denotada por $K[x, y]$. Podemos entender $K[x, y]$ como el álgebra generada por x e y con la relación $xy = yx$. Consideramos ahora para cada $q \in K$ el álgebra asociada $K_q[x, y]$ generada por x, y y la relación $xy = qyx$. De esta forma la familia $K_q[x, y]$ de álgebras parametrizadas por $q \in K$, son deformaciones del álgebra inicial en el sentido de que la multiplicación depende del parámetro q.

También podemos considerar otro tipo de deformaciones. El álgebra C^* dada por un producto cruzado

$$C \cong C_0([0, \infty)) \rtimes C(\mathbb{S}^1),$$

se puede considerar como una deformación del cilindro $[0, \infty) \times \mathbb{S}^1$. Esta deformación nos permite definir un colapsamiento de la sección $\{0\} \times \mathbb{S}^1$, en el cilindro, a un punto. Este proceso de colapsamiento coincide con un álgebra C^* que representa las funciones continuas que tienden a 0 en el infinito sobre el espacio cuántico $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$.

La compactación por un punto del objeto obtenido equivale a un álgebra C^* denotada por $C(\mathbb{S}^2_q)$, que representa las funciones continuas sobre una $2-$esfera cuántica $\mathbb{S}^2_q$.

Se puede demostrar que $C(\mathbb{S}^2_q)$ tiene la misma K-teoría que la esfera $\mathbb{S}^2$ y el mismo apareamiento de índices, esto lo podemos obtener calculando el número de giros del haz lineal cuántico [**16**].

Como punto de partida para la obtención de este resultado, el presente trabajo demuestra cuales son las álgebras C^* generadas por representaciones del espacio complejo cuántico $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$, en el sentido de la teoría de Woronowicz para álgebras C^* generadas por elementos no acotados. Siendo $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ el álgebra * generada por la relación

$$ww^* = qw^*w,$$

con $q \in (0, 1)$.

Además exponemos una clasificación de las representaciones de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ sobre espacios de Hilbert. En el mismo sentido se presenta una clasificación de la acción del álgebra Rep $(\mathcal{A}, H)$, como una suma directa sobre cierta partición de H, siendo $\mathcal{A}$ el álgebra C^* generada por $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ y H el espacio de Hilbert $L^2([0,\infty), \mathfrak{B}[0,\infty), \mu_q)$ donde μ_q es una medida q-invariante sobre la σ-álgebra de Borel de $[0,\infty)$ denotada por $\mathfrak{B}[0,\infty)$.

La C^*-álgebra $\mathcal{A}$, se genera mediante la descomposición polar $\pi = U|\pi|$ del operador de multiplicación $\pi : D \to H$ dado por

$$\pi(f)(x) := qxf(qx),$$

el cual se define sobre cierto subespacio D, denso en H. Se demuestra que $\mathcal{A}$ satisface

$$\mathcal{A} = \overline{\left\{ \sum_{k=m}^{n} f_k(|\pi|)U^k : \quad m, n \in \mathbb{Z},\ m \leq n,\ f_k \in C_0([0,\infty)) \right\}}.$$

Capítulo 1

Preliminares

1. Conceptos básicos de álgebras C^*

Definición 1. *Un álgebra A, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con una operación binaria o producto, que satisface asociatividad y distribución con respecto a la suma, tanto por derecha como por izquierda. Es decir, dados $a, b, c \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ se cumple*

1. $(ab)c = a(bc)$,
2. $a(b + c) = ab + ac$,
3. $(a + b)c = ac + bc$,
4. $(\alpha a)b = \alpha(ab) = a(\alpha b)$.

Ejemplo 1. *El conjunto $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ de las matrices cuadradas de dimensión $n \times n$ es un álgebra sobre $\mathbb{C}$, con la multiplicación de matrices.*

Definición 2. *Un espacio vectorial V se dice normado, si existe una función $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}^+$ tal que dados $a, b \in V$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se cumple*

1. $||a|| \geq 0$,
2. $||a|| = 0$ *si y solo si* $a = 0$,
3. $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$,
4. $||\lambda a|| = |\lambda|\, ||a||$.

Ejemplo 2. $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{C}^n$ *son espacios vectoriales normados con la norma euclidiana.*

Definición 3. *Un álgebra A es normada, si es espacio vectorial normado con cierta norma $||\cdot|| : A \to \mathbb{R}^+$, tal que para todo $a, b \in A$ se cumple*

$$||ab|| \leq ||a||\, ||b||.$$

Ejemplo 3. *Consideramos los espacios euclideanos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, el conjunto de operadores lineales $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es un álgebra normada con la norma*

$$||A|| := \sup_{||x||\leq 1} ||Ax||,$$

para todo $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (ver [**13**]*, pág. 223).*

Definición 4. *Decimos que un álgebra A es de Banach, si A es álgebra normada y completa, es decir, toda sucesión de Cauchy en A converge a un elemento en A.*

Definición 5. *Un álgebra A se dice álgebra *, si A es un álgebra sobre $\mathbb{C}$ con una involución lineal conjugada denotada por *. Esto es, existe un mapeo $* : A \to A$, tal que para todo $a, b \in A$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$ se satisface*

1. $(a + b)^* = a^* + b^*$,
2. $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$,
3. $a^{**} = a$,
4. $(ab)^* = b^* a^*$.

Es muy común nombrar al elemento a^* como el adjunto de a.

Definición 6. *Decimos que A es un álgebra C^*, si A es un álgebra * de Banach y para todo $a \in A$ se cumple la condición C^*, es decir*

$$||a||^2 = ||a^* a||.$$

Ejemplo 4. *Sea H un espacio de Hilbert, el álgebra de todos los operadores acotados sobre H,*

$$B(H) := \{A : H \to H \mid \ ||A|| := \sup_{||x||=1} ||Ax|| < \infty\}$$

es un álgebra C^* con la operación adjunto usual como involución. Esto se sigue de la ya conocida identidad

$$||f^* f|| = \sup_{||x||=1} |\langle f^* f x \ , \ x\rangle| = \sup_{||x||=1} |\langle f x \ , \ f x\rangle| = ||f||^2.$$

Ejemplo 5. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto. Luego el conjunto $C_0(X)$ conformado por las funciones continuas $f : X \to \mathbb{C}$ tales que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, es un álgebra C^*, con las siguientes operaciones, para $f,\ g \in C_0(X)$ definimos*

1. $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$, *como el producto.*
2. $f^*(x) := \overline{f(x)}$, *como la involución (donde la barra indica el conjugado complejo).*
3. $||f||_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty$, *como la norma.*

Ciertas propiedades se siguen fácilmente de la definición de álgebra C^*, como por ejemplo si $a \in A$, entonces

$$||a||^2 = ||a^* a|| \leq ||a^*||\ ||a||.$$

Luego $||a|| \leq ||a^*|| \leq ||a^{**}|| = ||a||$, por lo tanto $||a|| = ||a^*||$. Seguiremos mostrando propiedades asociadas a estas estructuras.

Definición 7. *Decimos que un álgebra A tiene unidad, si existe* $1 \in A$ *tal que* $a1 = 1a = a$ *para todo* $a \in A$.

A veces es conveniente denotar la unidad en A por I o I_A. Es fácil mostrar que la unidad en A es única siempre que esta exista y si A es no trivial entonces $I \neq 0$. Además si A tiene estructura de álgebra C^*, entonces

$$I^* a = (a^* I)^* = a^{**} = a.$$

Luego por la unicidad tenemos $I = I^*$. Esto implica que $\|I\|^2 = \|I^* I\| = \|I\|$, es decir, $\|I\| = 1$ en álgebras C^* no triviales. En cambio en álgebras de Banach solo tenemos $\|I\| = \|I^2\| \leq \|I\|^2$, es decir, $1 \leq \|I\|$.

Definición 8. *Sea A un álgebra* C^**, luego:*

1. *Decimos que* $a \in A$ *es autoadjunto si* $a^* = a$.
2. *Decimos que* $n \in A$ *es normal si* $n^* n = nn^*$.
3. *Decimos que* $u \in A$ *es unitario si* $u^* u = uu^* = 1$.

A veces es muy conveniente el hecho que el álgebra A en donde se trabaje tenga unidad. En álgebras sin unidad, siempre podemos crear una extensión con unidad. Esta extensión es $\hat{A} = A \oplus \mathbb{C}$ con las siguientes operaciones:

1. $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$,
2. $(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$,
3. $\|(a, \lambda)\| = \sup_{\|b\| \leq 1} \|ab + \lambda b\|$.

Notamos que en este caso, nuestra unidad coincide con el elemento $(0, 1)$. Así tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1. *Toda álgebra* C^* *sin unidad A, está inmersa en una* C^**-álgebra* $\hat{A}$ *como un ideal maximal de codimensión uno.*

Definición 9. *Si A es un álgebra y* $B \subseteq A$*, decimos que B es un subálgebra de A, si es un subespacio vectorial de A cerrado bajo el producto.*

Definición 10. *A las subálgebras cerradas bajo involución, las llamaremos subálgebras *.*

Podemos mostrar que toda subálgebra * de una álgebra C^* cerrada en la topología inducida por la norma, tiene estructura de álgebra C^*.

Definición 11. *Sean A y B álgebras. Decimos que una función $\tau : A \to B$ es un homomorfismo, si $\tau(a + \lambda b) = \tau(a) + \lambda\tau(b)$ y $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$ para todo $a, b \in A$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Si A y B son álgebras con unidad, para que τ sea homomorfismo, exigiremos además que $\tau(I_A) = I_B$.*

Definición 12. *Sean A y B álgebras *. Un homomorfismo *, es un homomorfismo de álgebras τ que preserva la involución, es decir, $\tau(a^*) = \tau(a)^*$. Si A y B son álgebras * con unidad, para que τ sea homomorfismo *, exigiremos también que $\tau(I_A) = I_B$.*

1.1. Completación C^*.

Supongamos que A es un álgebra sobre $\mathbb{C}$, dotada con una norma y una involución que satisfacen la condición C^*. Luego para que A sea un álgebra C^* sólo le falta cumplir la condición de espacio de Banach.

Todo espacio normado V tiene una completación a un espacio de Banach $\overline{V}$, de tal forma que V es denso en $\overline{V}$. Para esta construcción de $\overline{V}$, consideramos el conjunto V_c de todas la sucesiones de Cauchy en V y definimos la relación

$$x_n \sim y_n \text{ si } \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

La completación satisface $\overline{V} = (V_c/\sim)$ y cada $v \in V$ es asociado a la sucesión constante $(v, v, \ldots) \in V_c$ cuya clase de equivalencia es un elemento en $\overline{V}$.

Como A es un álgebra normada, es un espacio vectorial normado. Por tanto existe su completación a un álgebra de Banach $\overline{A}$. Dado que A tiene un involución que satisface la condición C^*, entonces su completación es un álgebra C^*, esto se sigue de la continuidad del producto y la involución, que se derivan a su vez de las definiciones 3 y 6.

1.2. El espectro en álgebras C^*.

Definición 13. *Sea A un álgebra con unidad. Un elemento $a \in A$ se dice invertible, si existe $b \in A$ tal que $ab = ba = I_A$.*

Definición 14. *Sea A un álgebra de Banach con unidad. Para todo $a \in A$, definimos el espectro de a, notado por $sp\,(a)$, como el conjunto*

$$sp\,(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ a - \lambda I \ \text{no es invertible en } A\}.$$

Llamamos resolvente de $a \in A$, al conjunto dado por $\rho(a) = \mathbb{C} \setminus sp\,(a)$.

Se sabe que los siguiente resultados se satisfacen.

Lema 1. *Sea A un álgebra de Banach con unidad. Para todo $a \in A$, se tiene que $\|a\|$ acota al conjunto $sp\,(a)$.*

Teorema 1. *(Teorema de Gelfand)*
$sp\ (a)$ es compacto y no vacio, para todo elemento a en un álgebra de Banach con unidad.

A la siguiente propiedad se le conoce como la propiedad polinómica espectral.

Lema 2. *Sean A un álgebra de Banach con unidad, $a \in A$ y p un polinomio. Entonces*

$$sp\ (p(a)) = p(sp\ (a)).$$

1.3. Elementos positivos.

La definición de elemento positivo, es motivada por la siguiente propiedad de elementos autoadjuntos, cuya demostración podemos encontrar en [**1**], pág. 9.

Proposición 2. *Sea A un álgebra C^* y $a \in A$. Si $a = a^*$, entonces $sp\ (a)$ es real.*

Definición 15. *Sea A un álgebra *. Un elemento $a \in A$, se dice positivo si $a = a^*$ y $sp\ (a) \subseteq [0, \infty)$. Si un elemento $a \in A$ es positivo, entonces escribiremos $a \geq 0$.*

Como propiedades favorables de los elementos positivos para nuestro trabajo, podemos mencionar las siguientes.

Lema 3. *Sean A un álgebra C^* y $a, b \in A$, entonces*

1. *$a^*a \geq 0$,*
2. *si a y b son positivos, entonces $a + b$ es positivo.*

Los elementos positivos de un álgebra *, además determinan un orden parcial sobre los elementos autoadjuntos de la *-álgebra A, dado por:

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad b - a \text{ es positivo.}$$

Los siguientes resultados sobre los elementos positivos se deducen del cálculo funcional sobre álgebras C^*.

Lema 4. *Si $a = a^*$ en una C^*-álgebra A, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$a \geq 0$,*
2. *$a = b^2$, para algún b autoadjunto en A,*
3. *$\|\lambda I - a\| \leq \lambda$, para todo $\lambda \geq \|a\|$,*
4. *$\|\lambda I - a\| \leq \lambda$, para algún $\lambda \geq \|a\|$.*

Teorema 2. *Todo elemento positivo de un álgebra C^*, tiene una única raiz cuadrada positiva.*

El concepto de *unidad aproximada* sobre un álgebra C^* será de mucho provecho para la obtención de nuestros proximos resultados. Para esta noción introducimos las siguientes definiciones.

Definición 16. *Decimos que un conjunto J con un orden parcial $\preceq$ es un conjunto dirigido, si para cada par de elementos $\alpha, \beta \in J$ existe un elemento $\omega \in J$ que satisface $\alpha \preceq \omega$ y $\beta \preceq \omega$.*

Definición 17. *Sea X un espacio topológico. Una red en X es una función $f : J \to X$, donde J es un conjunto dirigido.*

Si $\alpha \in J$ se denota por lo general a la imagen $f(\alpha) \in X$ por x_α. A la propia red f se le denota por comodidad por $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ o simplemente por (x_α) si está bien definido el conjunto de índices.

Definición 18. *Decimos que la red (x_α) converge al punto $x \in X$ si para cada entorno U de x, existe $\alpha \in J$ tal que si $\alpha \preceq \beta$ entonces $x_\beta \in U$.*

Utilizaremos la notación $\lim\limits_{\alpha \in J} x_\alpha = x$ para dar a entender que la red (x_α) converge al punto x.

Definición 19. *Una unidad aproximada en un álgebra de Banach A, es una red $(e_\alpha)_{\alpha \in J}$ la cual es acotada y satisface*

$$\lim_{\alpha \in J} e_\alpha\, a = \lim_{\alpha \in J} a\, e_\alpha = a \quad \textit{para todo } a \in A.$$

El siguiente resultado lo podemos encontrar en [**1**], pág. 11.

Teorema 3. *En toda álgebra C^*, existe por lo menos una unidad aproximada.*

2. Operadores no Acotados

En los años comprendidos entre 1920 y 1930, se vio la necesidad de dar rigurosidad matemática a la mecánica cuántica. Esta teoría fue desarrollada por John von Neumann [**15**] y Marshall Stone [**14**]. Sus principales aplicaciónes, a parte de la mecánica cuántica, se dirigen al estudio de las ecuaciónes en derivadas parciales.

2.1. Definiciones Básicas. Sea H espacio de Hilbert. Un operador en H es una transformación lineal T donde su dominio Dom (T) y su imágen $R(T) \subseteq H$ son subespacios lineales de H. Decimos que el operador T es acotado, si el supremo sup $|Tx|$ tomado sobre todo $x \in$ Dom (T) con $|x| = 1$ es finito; en caso contrario decimos que T es no acotado. Un operador T es densamente definido si su dominio es denso en H, esto es, $\overline{\text{Dom}\,(T)} = H$ donde la barra indica la cerradura en la topología inducida por la norma. El gráfico (o grafo) de un operador T se define como el subconjunto $G(T)$ de $H \oplus H$, tal que $(a, b) \in G(T)$ si y sólo si $a \in$ Dom (T) y $b = T(a)$. Diremos que T es un operador cerrado si $G(T)$ es un espacio cerrado en $H \oplus H$. Estos tipos de operadores poseen propiedades favorables para nuestro interés, las cuales serán mostradas más adelante.

Si $S,\ T$ son operadores en H tales que $\mathrm{Dom}\,(S) \subseteq \mathrm{Dom}\,(T)$ y $S(h) = T(h)$ para todo $h \in \mathrm{Dom}\,(S)$, diremos que T es una extensión de S y lo notamos como $S \subseteq T$. Dos operadores $S,\ T$ son iguales si S extiende a T y T extiende a S.

Las operaciones algebraicas que se realizan con operadores acotados, se pueden definir también para operadores no acotados, prestando especial atención en los dominios. Si $S,\ T$ son operadores en H consideramos los operadores:

1. $S+T$ definido por $(S+T)(h) = S(h) + T(h)$ y $\mathrm{Dom}\,(S+T) = \mathrm{Dom}\,(S) \cap \mathrm{Dom}\,(T)$.
2. ST definido por $ST(h) = S(T(h))$ y $\mathrm{Dom}\,(ST) = \{x \in \mathrm{Dom}\,(T) : Tx \in \mathrm{Dom}\,(S)\}$.
3. Si T inyectivo, podemos definir T^{-1} tal que $\mathrm{Dom}\,(T^{-1}) = \mathrm{Ran}\,(T),\ \mathrm{Ran}\,(T^{-1}) = \mathrm{Dom}\,(T)$ y $T^{-1}T = I_{\mathrm{Dom}\,(T)},\ TT^{-1} = I_{R(T)}$.

Es claro que $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Nuestro siguiente objetivo es asociar a un operador T su adjunto T^* en H. Definimos el domínio del operador T^* como el conjunto de todos los $y \in H$ tales que el funcional lineal $x \to \langle T(x),\ y\rangle$ sobre $\mathrm{Dom}\,(T)$ es acotado. Si $\mathrm{Dom}\,(T)$ es denso en H podemos extender este funcional de forma continua a H, por tanto existe un único $T^*(y) \in H$ tal que

$$\langle T(x),\ y\rangle = \langle x,\ T^*(y)\rangle \text{ para todo } x \in \mathrm{Dom}\,(T) \text{ y } y \in \mathrm{Dom}\,(T^*).$$

De esta manera, solo podemos definir el operador adjunto de forma única para operadores densamente definidos, además se comprueba que efectivamente T^* es un operador en H.

Se puede mostrar que si $T,\ S,\ TS$ son operadores densamente definidos en H, entonces $S^*T^* \subseteq (TS)^*$, además si $T \in B(H)$ entonces $S^*T^* = (TS)^*$. Un operador T densamente definido se denomina simétrico si $T \subseteq T^*$, y si $T = T^*$ decimos que T es autoadjunto.

A continuación presentamos algunos resultados sobre operadores densamente definidos sobre un espacio de Hilbert H, para su demostración consultar [**12**] y [**9**]. Definamos $V : H \oplus H \to H \oplus H$ por $V(a,\ b) = (-b, a)$, es claro que V es una transformación lineal sobre $H \oplus H$ y $V^2 = -I_{H^2}$

Lema 5. *Sea T operador densamente definido sobre H, entonces:*

1. $G(T^*) = [V(G(T))]^{\perp}$.
2. *El operador T^* es cerrado, en particular cada operador autoadjunto es cerrado.*
3. *Si además T es un operador cerrado, entonces Dom (T^*) es denso en H y $T^{**} = T$.*

Para cada operador T sobre H, definimos el conjunto resolvente de T como el conformado por todos aquellos $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que el operador $T - \lambda I : \mathrm{Dom}\,(T) \to H$ es biyectivo y su inverso $(T - \lambda I)^{-1}$ es un operador acotado. El complemento de la resolvente de T es llamado espectro de T y se denota por $\mathrm{sp}\,(T)$.

Algunas propiedades que satisface el espectro de un operador son las siguientes.

- $\overline{\lambda} \in \mathrm{sp}\,(T^*)$, para todo $\lambda \in \mathrm{sp}\,(T) \backslash \{0\}$.
- $\lambda^m \in \mathrm{sp}\,(T^m)$, para todo $\lambda \in \mathrm{sp}\,(T)$.

3. Teorema Espectral para operadores no acotados

Definición 20. *Sean $\mathfrak{M}$ una σ-álgebra sobre un conjunto Ω y H un espacio de Hilbert. Una resolución de la identidad o medida espectral sobre $\mathfrak{M}$, es una aplicación $E : \mathfrak{M} \to B(H)$ tal que para todo $A,\ B,\ M \in \mathfrak{M}$ satisface*

- $E(\emptyset) = 0,\ \ E(\Omega) = I$,
- $E(M) = E^2(M) = E^*(M)$,
- $E(A \cap B) = E(A)E(B)$,
- *si* $A \cap B = \emptyset$, *entonces* $E(A \cup B) = E(A) + E(B)$,
- *para todo* $x,\ y \in H$, $E_{x,y}(M) := \langle E(M)x,\ y\rangle$ *es una medida compleja sobre* $\mathfrak{M}$.

Cuando $\mathfrak{M}$ es la colección de los conjuntos de Borel de un espacio de Hausdorff localmente compacto, se suele pedir que las medidas $E_{x,y}$ sean Borel regulares.

Teorema 4. *Sea E una resolución de la identidad sobre un espacio medible* $(\Omega,\ \mathfrak{M})$.

- *A cada función medible $f : \Omega \to \mathbb{C}$ le corresponde un único operador $\Psi(f)$ cerrado densamente definido en H, con dominio* $D_f = \left\{ x \in H : \int_\Omega |f(z)|^2 dE_{x,x}(z) < \infty \right\}$ *y satisface*

$$\langle \Psi(f)x,\ y\rangle = \int_\Omega f dE_{x,y},\quad x \in D_f,\ y \in H. \tag{1}$$

- $\Psi(f)^* = \Psi\left(\bar{f}\right)$ *y* $\Psi(f)^*\Psi(f) = \Psi(|f|^2) = \Psi(f)\Psi(f)^*$.

Por comodidad en la notación, lo anteriror lo resumimos por

$$\Psi(f) = \int_\Omega f(\lambda) dE(\lambda).$$

Para su demostración consultar [**12**], pág. 348.

El siguiente teorema será de gran utilidad en nuestros próximos estudios, puesto que nos da una representación de operadores autoadjuntos mediante una integral sobre el espectro. Este teorema se conoce como teorema espectral para operadores no acotados.

Teorema 5. *(Teorema Espectral)*
A cada operador autoadjunto T en H le corresponde una única resolución de la identidad E sobre los conjuntos de Borel de la recta real hasta $B(H)$, tal que

$$\langle T(x),\ y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_{x,y}(\lambda),\ x \in Dom\,(T),\ y \in H,$$

además $E(sp\ (T)) = I$; a E se le denomina descomposición espectral de T.

La demostración se encuentra en [**12**], pág. 353.

Un operador $T : H \to H$ densamente definido se denomina positivo si y sólo si T es autoadjunto y su espectro esta contenido en $[0,\ \infty)$; se puede mostrar que si el operador T es positivo entonces $\langle T(x), x\rangle \geq 0$.

Proposición 3. *Si $A \geq 0$, existe un único $B \geq 0$ autoadjunto tal que $B^2 = A$.*

La demostración de este resultado se encuentra en [**12**], pág. 355.

Para la resolución espectral E asociada al operador T autoadjunto, podemos definir el operador $\Psi(f)$ sobre las funciones medible f sobre $\mathbb{R}$, y por convención escribiremos

$$f(T) := \Psi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE(\lambda) = \int_{\mathrm{sp}\,(T)} f(\lambda)\, dE(\lambda). \tag{2}$$

En general se cumple que $\Psi(f)\Psi(g) \subseteq \Psi(fg)$ y $\Psi(fg) = \overline{\Psi(f)\Psi(g)}$.

3.1. Descomposición Polar para Operadores no acotados. Por el teorema 5.1.9 de [**9**] tenemos para un operador T cerrado y densamente definido en H, se cumple que T^*T es autoadjunto y $(T^*T + \lambda I)^{-1} \in B(H)$ siempre que $\lambda > 0$, esto es, $\mathrm{sp}\,(T^*T) \subseteq [0,\ \infty)$. Así podemos aplicar el teorema espectral al operador T^*T y de esta forma definir el módulo de T como el operador positivo y autoadjunto

$$|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}},$$

donde $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$ esta dado por la ecuación (2), este operador nos permitirá hacer una conveniente descomposición del operador T. Antes debemos hacer la siguiente definición

Definición 21. *Sea H un espacio de Hilbert, una isometría parcial es una transformación lineal acotada $V : H \to H$ que actúa isométricamente sobre el complemento ortogonal de su espacio nulo, es decir $V \restriction_{ker\, V^{\perp}}$, la restricción de V al conjunto $(ker\, V)^{\perp}$ es una isometría.*

El siguiente resultado lo podemos encontrar en [**3**], pág. 97. Este último será utilizado muy frecuentemente en los siguientes capítulos.

Teorema 6. *(Descomposición Polar)*
Para cada operador cerrado densamente definido T en H con módulo $|T|$, tenemos Dom $|T|$ = Dom T y $\| \, |T|(x) \, \| = \|T(x)\|$. Además existe una única isometría parcial U con Ker (U) = Ker (T) que satisface $T = U|T|$. En particular $U^*U|T| = |T|$, $U^*T = |T|$ y $UU^*T = T$.

Para su demostración también podemos consultar [**9**]. Notemos que si $T = U|T|$ es la descomposición polar del operador cerrado densamente definido T, como $\overline{\text{Ran } (T^*)} = (\text{Ker } (T))^{\perp}$ entonces U es una isometría de $\overline{\text{Ran } (T^*)} = \overline{\text{Ran } (|T|)}$ a $\overline{\text{Ran } (T)} = (\text{Ker } (T^*))^{\perp}$, de esta forma U es unitario si y sólo si T y T^* son inyectivos, puesto que en este caso $\{0\}^{\perp} = (\text{Ker } (T^*))^{\perp} = (\text{Ker } (T))^{\perp} = H$.

Capítulo 2

Una clasificación de representaciones de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$

El álgebra siguiente juega un papel importante en la teoría de grupos cuánticos (ver [**6**]).

Definición 22. *Definimos el plano complejo cuántico $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ como el álgebra *, generada por los elementos w y w^* con la relación $ww^* = qw^*w$; donde $q \in (0,1)$ es una constante arbitrariamente elegida.*

Para entender a $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ como un álgebra de operadores, se estudia la teoría de representaciones asociadas.

Definición 23. *Una representación de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ sobre un espacio de Hilbert H, es un operador $\pi : Dom\, \pi \subseteq H \to H$ cerrado densamente definido y satisface la igualdad de operadores:*

$$\pi\pi^* = q\pi^*\pi. \tag{3}$$

Diremos además que π es inyectivo, si $Ker\, \pi = \{0\}$.

Nota 1. *Notamos que la buena definición del operador π^* para una representación π, se deriva de que π es densamente definido sobre el espacio H.*

Observamos que dada una representación π de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ sobre un espacio de Hilbert H, el operador $|\pi|^2 := \pi^*\pi$ es positivo, por tanto existe una única raiz cuadrada $|\pi| = \sqrt{\pi^*\pi}$ que es positiva. De la misma manera podemos definir el operador positivo $|\pi^*|^2 = \pi\pi^*$ y luego $|\pi^*| = \sqrt{\pi\pi^*}$. Cabe anotar que estos operadores satisfacen $\mathrm{Dom}\, \pi = \mathrm{Dom}\, |\pi|$ y $\mathrm{Dom}\, \pi^* = \mathrm{Dom}\, |\pi^*|$, esto por el teorema de descomposición polar.

De las afirmaciones anteriores, el resultado inmediato a enunciar es el siguiente.

Lema 6. *Toda representación π de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ sobre un espacio de Hilbert H, satisface*

$$Dom\, \pi = Dom\, \pi^*.$$

Demostración: Por el teorema de la descomposición polar y la definición de $|\pi|$ tenemos

$$\mathrm{Dom}\, \pi = \mathrm{Dom}\, |\pi| = \mathrm{Dom}\, \sqrt{\pi^*\pi} = \mathrm{Dom}\, \sqrt{\pi\pi^*} = \mathrm{Dom}\, |\pi^*| = \mathrm{Dom}\, \pi^*,$$

lo cual demuestra nuestra afirmación ■

Recordemos que en el teorema de la descomposición polar el operador cerrado y densamente definido J tiene una expresión $J = V|J|$, con V unitario, es decir, $VV^* = V^*V = 1$, siempre que J y J^* sean inyectivos.

En lo que sigue, π será una representación de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ sobre un espacio de Hilbert dado, con descomposición polar $\pi = U|\pi|$. Por comodidad en la notación, escribiremos $D = \mathrm{Dom}\,\pi = \mathrm{Dom}\,\pi^*$.

Proposición 4. *Toda representación π de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ sobre un espacio de Hilbert H, induce una descomposición de H de la forma $H = H_0 \oplus H_1$; donde $H_0 = Ker\,|\pi|$ y $H_1 = H_0^{\perp}$. Además π y π^* son invariantes sobre H_0 y H_1. Adicionalmente se cumple $Ker\,\pi \restriction_{H_1} = Ker\,\pi^* \restriction_{H_1} = \{0\}$.*

Demostración: Veamos que $\mathrm{Ker}\,\pi$ es cerrado sobre H. Sea $x \in \overline{\mathrm{Ker}\,\pi}$, luego existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathrm{Ker}\,\pi$ que converge a x. Es claro que $\{(x_n, \pi x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión en el gráfico de π notado por $G(\pi)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,\ \pi x_n) = (x, \lim_{n\to\infty} \pi x_n) = (x, 0) \in G(\pi),$$

ya que π es cerrado. Por definición de $G(\pi)$, lo anterior implica que $x \in D$ y $\pi x = 0$, por tanto $x \in \mathrm{Ker}\,\pi$. Luego $\mathrm{Ker}\,\pi$ es cerrado.

Mostremos ahora que $\mathrm{Ker}\,\pi = \mathrm{Ker}\,|\pi|$. Sea $x \in \mathrm{Ker}\,\pi$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \pi x, \pi x\rangle \\ &= \langle \pi^*\pi x, x\rangle \\ &= \langle |\pi|^2 x, x\rangle \\ &= \langle |\pi| x, |\pi| x\rangle. \end{aligned}$$

Luego $\|\, |\pi| x\,\|^2 = 0$, lo cual implica que $x \in \mathrm{Ker}\,|\pi|$, pues $|\pi|x = 0$. Recíprocamente, si $x \in \mathrm{Ker}\,|\pi|$ entonces

$$\begin{aligned} \pi x &= U|\pi|x \\ &= U0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

La última igualdad se tiene por la linealidad del operador U. Luego se tiene $\mathrm{Ker}\,\pi = \mathrm{Ker}\,|\pi|$. Entonces $\mathrm{Ker}\,|\pi|$ es un subconjunto cerrado en H. De esta forma

$$H = \mathrm{Ker}\,|\pi| \ \oplus\ (\mathrm{Ker}\,|\pi|)^{\perp} = H_0 \oplus H_1,$$

donde $H_0 := \mathrm{Ker}\,|\pi|$ y $H_1 := (\mathrm{Ker}\,|\pi|)^{\perp}$, pues la última igualdad se satisface para subespacios cerrados en un espacio de Hilbert, en este caso $\mathrm{Ker}\,|\pi|$.

Ahora mostremos que π y π^* son invariantes sobre H_0. Para esto primero demostraremos que $\operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Ker}\pi^*\pi$. El lema 6 nos permite trabajar sobre los dominios enunciados a continuación. Sea $x \in \operatorname{Ker}(\pi^*\pi)$, observamos que

$$0 = \langle \pi^*\pi x, x\rangle = \langle \pi x, \pi x\rangle = \|\pi x\|^2.$$

Como H es un espacio normado, entonces $\pi x = 0$ y así $x \in \operatorname{Ker}\pi$, luego $\operatorname{Ker}(\pi^*\pi) \subseteq \operatorname{Ker}\pi$. Recíprocamente, es claro que $\operatorname{Ker}\pi \subseteq \operatorname{Ker}\pi^*\pi$. De esta manera $\operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Ker}\pi^*\pi$.

Por lo anterior, se tiene que

$$\operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Ker}\pi^*\pi = \operatorname{Ker}\pi\pi^* = \operatorname{Ker}\pi^*. \tag{4}$$

De esta forma si $x \in H_0$, entonces $0 = \pi x = \pi^* x \in H_0$. Es decir, π y π^* son invariantes sobre H_0.

Por otro lado, dado que $\operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Ker}\pi^*$, entonces $H_1 = (\operatorname{Ker}\pi)^\perp = (\operatorname{Ker}\pi^*)^\perp$, luego si $x \in H_1 \cap D$ y $k \in H_0$, entonces

$$\langle k, \pi x\rangle = \langle \pi^* k, x\rangle = \langle 0, x\rangle = 0.$$

Luego $\pi x \in H_1 = (\operatorname{Ker}\pi)^\perp$. De la misma forma

$$\langle k, \pi^* x\rangle = \langle \pi k, x\rangle = \langle 0, x\rangle = 0,$$

es decir, $\pi^* x \in H_1 = H_0^\perp$ ∎

Nota 2. *Otra forma de mostrar la descomposición de H como la suma directa entre el Kernel de π y su complemento ortogonal, es utilizando el teorema espectral sobre $|\pi|$. La resolución espectral E, inducida por $|\pi|$ satisface que $\operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Ker}|\pi| = E(\{0\})H$, luego $\operatorname{Ker}|\pi|$ es cerrado.*

Nota 3. *La ecuación (4), nos dice que si π es un operador inyectivo entonces π^* también lo es. Luego su descomposición polar $\pi = U|\pi|$ satisface que U es unitario.*

El siguiente resultado nos permite, en cierto sentido, reducir el dominio de las representaciones de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$.

Lema 7. *Toda representación π de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ sobre un espacio de Hilbert H, satisface que $\pi\restriction_{D\cap H_1}$ es cerrado, donde $H_1 = (\operatorname{Ker}\pi)^\perp$.*

Demostración: Por comodidad en la notación hagamos $\hat{\pi} = \pi\restriction_{D\cap H_1}$. Sea $(x,y) \in \overline{G(\hat{\pi})}$, entonces existe una sucesión $\{(x_n, \hat{\pi}x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $G(\hat{\pi})$ tal que $x_n \to x$ y $\hat{\pi}x_n \to y$. Como $x_n \in D$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $\{(x_n, \hat{\pi}x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión en $G(\pi)$. Al ser π cerrado, tenemos que $(x,y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, \hat{\pi}x_n) \in G(\pi)$, esto es, $x \in D$ y $y = \pi x$. Ahora veamos que $x \in H_1$, pues H_1 es cerrado, $x_n \in H_1$.

Esto implica que $x \in D \cap H_1$ y $\pi x \in H_1$, entonces $(x, y) = (x, \pi x) \in G(\hat{\pi})$. De esta forma concluimos que $\pi\restriction_{D\cap H_1}$ es cerrado ■

Ahora recordamos que $|\pi| = \sqrt{\pi^*\pi}$ es un operado positivo y autoadjunto. Entonces aplicando el teorema espectral, existe una única resolución espectral E definida sobre el conjunto de los borelianos de $[0, \infty)$, notado por $\mathfrak{B}([0, \infty))$, y valuada en $\mathrm{B}(H)$ que satisface

$$|\pi| = \int_{[0,\infty)} \lambda \; dE(\lambda),$$

lo cual se entiende como

$$\langle |\pi| x, y\rangle = \int_{[0,\infty)} \lambda \; dE_{x,y}(\lambda),$$

para todo $x \in \operatorname{Dom}|\pi|$ y $y \in H$. Además la resolución espectral E define un isomorfismo isométrico ϑ de la C^*-álgebra $L^\infty(\operatorname{sp}|\pi|)$ hasta $\mathrm{B}(H)$ donde

$$L^\infty(\operatorname{sp}|\pi|) = \{f : \operatorname{sp}|\pi| \to \mathbb{C} \mid \; f \text{ es Borel medible y } \operatorname{ess\,sup}(f) < \infty\},$$

y se define

$$\|f\| = \operatorname{ess\,sup}(f) := \operatorname{ínf}\{c \in (0, \infty) : \; E_{h,h}(\{x \in [0, \infty) : \; |f(x)| \geq c\}) = 0 \text{ para todo } h \in H\}.$$

Además ϑ satisface que

1. $\vartheta(f) := f(|\pi|) = \int_{[0,\infty)} f(\lambda) \; dE(\lambda)$, esto es,

$$\langle \vartheta(f) x, y\rangle = \int_{[0,\infty)} f(\lambda) \; dE_{x,y}(\lambda),$$

   para cualesquiera $x, y \in H$.
2. Para toda función simple $s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_{W_k}$; donde X_{W_k} es la función característica sobre W_k en los borelianos, se cumple $\vartheta(s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k E(W_k)$.

De esta manera escogiendo $s = X_{[a,b)}$, se tiene entonces

$$\begin{aligned}
\langle E[a,b)x, y\rangle &= \langle \vartheta(X_{[a,b)})x \, , \; y\rangle \\
&= \int_{[0,\infty)} X_{[a,b)}(\lambda)\, dE_{x,y}(\lambda) \\
&= \int_{[a,b)} dE_{x,y}(\lambda).
\end{aligned}$$

Por lo tanto escribimos $E[a,b) = \int_{[a,b)} dE(\lambda)$.

Ahora podemos utilizar el teorema espectral para demostrar que la restricción de π al subespacio H_1 denotada por $\hat{\pi}$, es un operador densamente definido, lo cual implica que $\hat{\pi}^*$ también es densamente definido.

Lema 8. *$D \cap H_1$ es denso en H_1.*

Demostración: Sea $|\pi| = \int_{[0,\infty)} \lambda \, dE(\lambda)$. Observamos que $H_0 = \operatorname{Ker} |\pi| = E(\{0\})H$ y por lo tanto $H_1 = E((0,\infty))$. Para todo $h \in H_1$ definimos $h_n := E((0,n))h \in H_1$. Observamos que

$$
\begin{aligned}
E_{h_n,h_n}([n,\infty)) &= \langle\, E([n,\infty))h_n,\ h_n \,\rangle \\
&= \langle\, E([n,\infty))E((0,n))h,\ E((0,n))h \,\rangle \\
&= \langle\, E([n,\infty) \cap (0,n))h,\ E((0,n))h \,\rangle \\
&= \langle\, E(\emptyset)h,\ E((0,n))h \,\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,\infty)} \lambda^2 \, dE_{h_n,h_n}(\lambda) &= \int_{[0,n)} \lambda^2 \, dE_{h_n,h_n}(\lambda) \\
&\leq n^2 \int_{[0,n)} dE_{h_n,h_n}(\lambda) \\
&= n^2 \int_{[0,\infty)} dE_{h_n,h_n}(\lambda) \\
&= n^2 \|h_n\|^2 < \infty.
\end{aligned}
$$

De esta forma tenemos que $h_n \in D$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $E_{h,h}(\{0\}) = 0$ para todo $h \in H$, $0 \leq 1 - X_{(0,n)}(\lambda) \leq 1$ y $\lim_{n\to\infty} 1 - X_{(0,n)}(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in (0,\infty)$, donde $X_{(0,n)}$ es la función característica de $(0,n)$. Así por el teorema de Lebesgue de convergencia dominada tenemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|h - h_n\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \|\,(1 - E((0,n)))\,h\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle\, (1 - E((0,n)))h,\ h \,\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} (1 - X_{(0,n)}(\lambda)) \, dE_{h,h}(\lambda) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} (1 - X_{(0,n)}(\lambda)) \, dE_{h,h}(\lambda) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h$. Como $h_n \in D \cap H_1$, entonces $D \cap H_1$ es denso en H_1 ∎

Hemos demostrado con esto que $\hat{\pi}$ es cerrado densamente definido. Es claro además que $\pi^* \restriction_{H_1} \subseteq \hat{\pi}^*$. Sea $v \in \operatorname{Dom} \hat{\pi}^*$, para todo $h \in D$ escribimos $h = h_0 + h_1$, donde $h_0 = E(\{0\})h \in H_0$ y $h_1 = E((0,\infty))h \in D \cap H_1$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle\, \pi h,\ v\rangle &= \langle\, \pi(h_0 + h_1),\ v\rangle \\ &= \langle\, \hat{\pi} h_1,\ v\rangle \\ &= \langle\, h_1,\ \hat{\pi}^* v\rangle \\ &= \langle\, h_0 + h_1,\ \hat{\pi}^* v\rangle, \end{aligned}$$

la última ecuación porque $\hat{\pi}^* v \in H_1$. Entonces $v \in \operatorname{Dom} \pi^*$ y $\pi^* v = \hat{\pi}^* v$. De esta forma $\pi^* \restriction_{H_1} = \hat{\pi}^*$. Finalmente tenemos que $(\hat{\pi}\hat{\pi}^* - q\hat{\pi}^*\hat{\pi})h = (\pi\pi^* - q\pi^*\pi)h = 0$, para todo $h \in D \cap H_1 = \operatorname{Dom} \hat{\pi} = \operatorname{Dom} \hat{\pi}^*$. De esta manera se satisface la siguiente afirmación.

Corolario 1. *$\hat{\pi}$ define una representación inyectiva de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ sobre H_1.*

Los siguientes resultados juegan un papel muy importante en el desarrollo de nuestro resultado.

Lema 9. *Sean π una representación inyectiva de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $\pi = U|\pi|$ su descomposición polar y E la resolución espectral inducida por $|\pi|$. Entonces:*

1. *$|\pi|^2 = q^{-n} U^n |\pi|^2 U^{*n}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*
2. *$|\pi| = q^{-\frac{n}{2}} U^n |\pi| U^{*n}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración: En principio observamos que

$$\begin{aligned} |\pi|^2 &= \pi^*\pi \\ &= q^{-1}\pi\pi^* \\ &= q^{-1}(U|\pi|)(|\pi|U^*) \\ &= q^{-1}U|\pi|^2U^*, \end{aligned}$$

es decir, $|\pi|^2 = q^{-1}U|\pi|^2U^*$. Ahora si $n \in \mathbb{N}$ y suponiendo que $q^{-(n-1)}U^{n-1}|\pi|^2U^{*(n-1)} = |\pi|^2$, procedemos por inducción y tenemos

$$\begin{aligned} q^{-n}U^n|\pi|^2U^{*n} &= q^{-(n-1)}U^{n-1}(q^{-1}U|\pi|^2U^*)U^{*(n-1)} \\ &= q^{-(n-1)}U^{n-1}(|\pi|^2)U^{*(n-1)} \\ &= |\pi|^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, se cumple que

$$\begin{aligned}(q^{-\frac{1}{2}}U|\pi|U^*)^2 &= q^{-1}(U|\pi|)(U^*U)(|\pi|U^*) \\ &= q^{-1}U|\pi|^2U^* \\ &= |\pi|^2,\end{aligned}$$

Esto pues el operador U es unitario. Luego por la unicidad de la raiz cuadrada, se tiene que $|\pi| = q^{-\frac{1}{2}}U|\pi|U^*$. Ahora si $n \in \mathbb{N}$ y $q^{-\frac{n-1}{2}}U^{n-1}|\pi|U^{*(n-1)} = |\pi|$, entonces por inducción

$$\begin{aligned}q^{-\frac{n}{2}}U^n|\pi|U^{*n} &= q^{-\frac{n-1}{2}}U^{n-1}(q^{-\frac{1}{2}}U|\pi|U^*)U^{*(n-1)} \\ &= q^{-\frac{n-1}{2}}U^{n-1}(|\pi|)U^{*(n-1)} \\ &= |\pi|.\end{aligned}$$

La demostración correspondiente al caso $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, se obtiene multiplicando U^{-n} por izquierda y $U^{*(-n)}$ por derecha. Esto completa la prueba ■

En adelante dado un espacio topológico X, denotaremos por $\mathfrak{B}(X)$ a la σ-álgebra de los conjuntos de Borel sobre X. Durante el desarrollo del trabajo, iremos haciendo cambios de variable sobre integrales que dependen de medidas espectrales. La justificación de estos cambios de variable se encuentra en los resultados que enunciamos a continuación.

Proposición 5. *Sean π una representación inyectiva de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ sobre un espacio de Hilbert H, $\pi = U|\pi|$ su descomposición polar y E la resolución espectral inducida por $|\pi|$. Entonces $UEU^* : \mathfrak{B}([0,\infty)) \to B(H)$ definida por $(UEU^*)(M) := UE(M)U^*$, es una medida espectral sobre* $[0,\infty)$.

Demostración: Veamos que UEU^* es resolución de la identidad. Por las propiedades de E como medida espectral mencionadas anteriormente deducimos

- $(UEU^*)(\emptyset) = UE(\emptyset)U^* = U0U^* = 0.$
- $(UEU^*)[0,\ \infty) = UE([0,\ \infty))U^* = UU^* = I.$
- $(UEU^*)^2(M) = UE(M)(U^*U)E(M)U^* = UE(M)^2U^* = UE(M)U^* = (U^*)^*E(M)^*U^* = (UE(M)U^*)^* = ((UEU^*)(M))^*.$
- Sean W y W' en los borelianos sobre $[0,\ \infty)$, entonces

$$\begin{aligned}(UEU^*)(W \cap W') &= UE(W \cap W')U^* = UE(W)E(W')U^* \\ &= (UE(W)U^*)(UE(W')U^*) = UEU^*(W)\ UEU^*(W').\end{aligned}$$

- Si $W \cap W' = \emptyset$, tenemos

$$\begin{aligned}(UEU^*)(W \cup W') &= UE(W \cup W')U^* = U(E(W) + E(W'))U^* \\ &= UE(W)U^* + UE(W')U^* = UEU^*(W) + UEU^*(W')\end{aligned}$$

- Sean $x,\ y \in H$, veamos que $(UEU^*)_{x,y}$ es una medida sobre los borelianos de $[0,\ \infty)$, definida como $(UEU^*)_{x,y}(M) := \langle (UE(M)U^*)x,\ y\rangle$. Para esto notemos

$$(UEU^*)_{x,y}(M) = \langle (UE(M)U^*)x,\ y\rangle = \langle E(M)\ U^*x,\ U^*y\rangle = E_{U^*x,U^*y}(M).$$

Luego $(UEU^*)_{x,y} = E_{U^*x,U^*y}$, así $(UEU^*)_{x,y}$ es una medida de Borel.

De lo anterior concluimos que UEU^* es una medida espectral sobre los borelianos de $[0,\ \infty)$ ■

Proposición 6. *Sean π una representación inyectiva de $O(\mathbb{C}_q)$ sobre un espacio de Hilbert H, $\pi = U|\pi|$ su descomposición polar y E la resolución espectral inducida por $|\pi|$. Si $f : sp\ |\pi| \to \mathbb{C}$ es un elemento en $L^\infty(sp\ |\pi|)$, entonces*

$$U \int_{[0,\infty)} f(\lambda)\ dE(\lambda)\ U^* = \int_{[0,\infty)} f(\lambda)\ d(UEU^*)(\lambda).$$

Demostración: Sea $s(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k X_{A_k}(x)$ una función simple sobre $[0,\infty)$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)} s(\lambda)\ d(UEU^*)(\lambda) &= \sum_{k=1}^{n} a_k(UEU^*)(A_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k UE(A_k)U^* \\ &= U\left(\sum_{k=1}^{n} a_k E(A_k)\right)U^* = U \int_{[0,\infty)} s(\lambda)\ dE(\lambda)\ U^*.\end{aligned}$$

Sea f Borel medible, entonces existe una sucesión de funciones simples Borel medibles s_n que converge a f puntualmente y $|s_n(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in [0,\infty)$ y $n \in \mathbb{N}$. Luego por teorema de convergencia dominada tenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_{[0,\infty)} f(\lambda)\, d(UEU^*)\, x, y \right\rangle &= \int_{[0,\infty)} f(\lambda)\, d(UEU^*)_{x,y}(\lambda) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} s_n(\lambda)\, d(UEU^*)_{x,y}(\lambda) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle \int_{[0,\infty)} s_n(\lambda)\, d(UEU^*)\, x, y \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle U \int_{[0,\infty)} s_n(\lambda)\, dE\, U^* x, y \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle \int_{[0,\infty)} s_n(\lambda)\, dE\, U^* x,\ U^* y \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} s_n(\lambda)\, dE_{U^*x,\ U^*y}(\lambda) \\
&= \int_{[0,\infty)} f(\lambda)\, dE_{U^*x,\ U^*y}(\lambda) \\
&= \left\langle \int_{[0,\infty)} f(\lambda)\, dE\, U^* x,\ U^* y \right\rangle \\
&= \left\langle U \int_{[0,\infty)} f(\lambda)\, dE\, U^*\, x,\ y \right\rangle.
\end{aligned}$$

Esto completa la prueba ■

Proposición 7. *Sean T un operador positivo autoadjunto y P la resolución espectral inducida por T, esto es, $T = \int_{[0,\infty)} \lambda\, dP(\lambda)$. Sea X un espacio topológico y $f : X \to [0,\infty)$ un homeomorfismo, entonces $P_f : \mathfrak{B}(X) \to B(H)$ definida por $P_f(M) := P(f(M))$ es una medida espectral sobre X.*

Demostración: Sea $f : X \to [0,\infty)$ un homeomorfismo. Definimos $P_f : \mathfrak{B}(X) \to B(H)$ por $P_f(M) := P(f(M))$. Notamos que P_f esta bien definida, pues f^{-1} es una función medible. Mostremos que P_f es medida espectral. Por las propiedades de f como homeomorfismo, deducimos que

- $P_f(\emptyset) = P(f(\emptyset)) = P(\emptyset) = 0.$
- $P_f(X) = P(f(X)) = P([0,\infty)) = I.$

- Para todo $M \in \mathfrak{B}(X)$ se cumple que
$$P_f(M)^2 = P(f(M))^2 = P(f(M))) = P(f(M)))^*.$$
- Sean $W, W' \in \mathfrak{B}(X)$, luego
$$P_f(W \cap W') = P(f(W) \cap f(W')) = P(f(W))P(f(W')) = P_f(W)P_f(W').$$
- Sean $W,\ W'$ borelianos disjuntos en X, entonces
$$P_f(W \cup W') = P(f(W) \cup f(W')) = P(f(W)) + P(f(W')) = P_f(W) + P_f(W').$$
- Para todo $x, y \in H,\ (P_f)_{x,y}(M) := \langle P_f(M)x,\ y\rangle$ es una medida compleja sobre $\mathfrak{B}(X)$ pues $M \mapsto \langle P(f(M))x,\ y\rangle$ lo es.

De lo anterior, concluimos que P_f es una medida espectral ■

Proposición 8. *Sean T un operador positivo autoadjunto y P la resolución espectral inducida por T, esto es, $T = \int\limits_{[0,\infty)} \lambda\, dP(\lambda)$. Sean X un espacio topológico y $f : X \to [0,\infty)$ un homeomorfismo, entonces para todo $g : X \to \mathbb{C}$ borel medible se cumple*
$$\int\limits_X g(\lambda)\, dP_f(\lambda) = \int\limits_{[0,\infty)} g \circ f^{-1}(\lambda)\, dP(\lambda).$$

Demostración: Es claro que $g \circ f^{-1} : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ es Borel medible.

Sea $s(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\, X_{A_k}(x)$ una función simple sobre X, entonces $s(f^{-1}(x)) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_{A_k}(f^{-1}(x))$. Sabemos que $f^{-1}(x) \in A_k$ si y sólo si $x \in f(A_k)$, de esta forma $X_{A_k}(f^{-1}(x)) = X_{f(A_k)}(x)$. Por tanto
$$\int\limits_{[0,\infty)} s(f^{-1}(\lambda))\, dP(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} a_k P(f(A_k)),$$
además
$$\int\limits_X s(\lambda)\, dP_f(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} a_k P_f(A_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k P(f(A_k)),$$
luego $\int\limits_X s(\lambda)\, dP_f(\lambda) = \int\limits_{[0,\infty)} s(f^{-1}(\lambda))\, dP(\lambda)$.

Sea $g : X \to \mathbb{C}$ medible, entonces existe una sucesión creciente s_n de funciones simples tales que $|s_n(\lambda)| \leq |g(\lambda)|$ y $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(\lambda) = g(\lambda)$ para todo $\lambda \in X$.

Sean $v, w \in \mathrm{Dom}\,(g \circ f^{-1})(T) = \left\{h \in H : \int\limits_{[0,\infty)} |g(f^{-1}(\lambda))|^2\, dP_{h,h}(\lambda) < \infty\right\}$. Aplicando teorema de Lebesgue de convergencia dominada obtenemos por lo anterior

$$
\begin{aligned}
\left\langle v, \left(\int_X g(\lambda)\, dP_f(\lambda) \right) w \right\rangle &= \int_X g(\lambda)\, d(P_f)_{v,w}(\lambda) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X s_n(\lambda)\, d(P_f)_{v,w}(\lambda) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} s_n(f^{-1}(\lambda))\, dP_{v,w}(\lambda) \\
&= \int_{[0,\infty)} g(f^{-1}(\lambda))\, dP_{v,w}(\lambda) \\
&= \left\langle v, \left(\int_X g \circ f^{-1}(\lambda)\, dP(\lambda) \right) w \right\rangle,
\end{aligned}
$$

entonces $\left(\int_X g(\lambda)\, dP_f(\lambda) \right) w = \left(\int_X g \circ f^{-1}(\lambda)\, dP(\lambda) \right) w$ para todo $w \in \mathrm{Dom}\,(g \circ f^{-1})(T)$. Además para todo $M \subseteq X$ de Borel se tiene

$$(P_f)_{w,w}(M) = \langle w,\ P_f(M)w \rangle = \langle w,\ P(f^{-1}(M))w \rangle = P_{w,w}(f^{-1}(M)).$$

Luego $\int_X |g(\lambda)|^2\ d(P_f)_{w,w}(\lambda) < \infty$ si y sólo si $\int_{[0,\infty)} |g \circ f^{-1}(\lambda)|^2\ dP_{w,w}(\lambda) < \infty$, por lo tanto $\mathrm{Dom} \left(\int_X g(\lambda)\, dP_f(\lambda) \right) = \mathrm{Dom} \left(\int_{[0,\infty)} g \circ f^{-1}(\lambda)\, dP(\lambda) \right)$. Entonces

$$\int_X g(\lambda)\, dP_f(\lambda) = \int_{[0,\infty)} g \circ f^{-1}(\lambda)\, dP(\lambda) \quad \blacksquare$$

Por comodidad en la notación, escribiremos $E_f(\lambda) = E(f(\lambda))$. En los siguientes resultados trataremos de hacer más explicita la acción de U como un *desplazamiento* o *shift*, entre ciertos subconjuntos de H.

Lema 10. *Sean π una representación inyectiva de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ sobre un espacio de Hilbert H, $\pi = U|\pi|$ su descomposición polar y E la resolución espectral inducida por $|\pi|$. Entonces $E(\lambda) = UEU^*(q^{\frac{1}{2}}\lambda)$ sobre* $[0, \infty)$.

Demostración: Por lema 9 en el caso que $n = 1$, tenemos que $|\pi| = q^{-\frac{1}{2}} U|\pi|U^*$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\infty)} \lambda \ dE(\lambda) &= |\pi| \\
&= q^{-\frac{1}{2}} U|\pi|U^* \\
&= q^{-\frac{1}{2}} U\left(\int_{[0,\infty)} \lambda \ dE(\lambda) \right) U^* \\
&= \int_{[0,\infty)} q^{-\frac{1}{2}}\lambda \ d(UEU^*)(\lambda) \\
&= \int_{[0,\infty)} \tau \ d(UEU^*)(q^{\frac{1}{2}}\tau) \\
&= \int_{[0,\infty)} \lambda \ d(UEU^*)(q^{\frac{1}{2}}\lambda),
\end{aligned}$$

lo anterior haciendo $\tau = q^{-\frac{1}{2}}\lambda$. Como la resolución espectral de

$$|\pi| = \int_{[0,\infty)} \lambda \ dE(\lambda) = \int_{[0,\infty)} \lambda \ d(UEU^*)(q^{\frac{1}{2}}\lambda),$$

es única, concluimos que $E(\lambda) = UEU^*(q^{\frac{1}{2}}\lambda)$, como queriamos ■

Nota 4. *Podemos mostrar por inducción, que el lema anterior implica que para todo $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que $U^n E(q^{\frac{n}{2}} M) U^{*n} = E(M)$.*

Corolario 2. *Sean π una representación inyectiva de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ sobre un espacio de Hilbert H, $\pi = U|\pi|$ su descomposición polar y E la resolución espectral inducida por $|\pi|$. Entonces para todo intervalo $[a, b)$ contenido en $[0, \infty)$, y todo $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que*

$$U^n E[q^{\frac{n}{2}} a, q^{\frac{n}{2}} b) U^{*n} = E[a, b).$$

Demostración: Aplicando directamente el lema anterior, con $M = [a, \ b)$ ■

Proposición 9. *Sean π una representación inyectiva de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ sobre un espacio de Hilbert H, $\pi = U|\pi|$ su descomposición polar y E la resolución espectral inducida por $|\pi|$. Entonces*

$$U : E[q^{\frac{1}{2}} a, q^{\frac{1}{2}} b)H \to E[a, b)H,$$

es un isomorfismo isométrico con inverso

$$U^* : E[a, b)H \to E[q^{\frac{1}{2}} a, q^{\frac{1}{2}} b)H.$$

Demostración: Sea $h \in H$, entonces

$$\begin{aligned} U^*E[a,b)h &= U^*E[a,b)UU^*h \\ &= E[q^{\frac{1}{2}}a, q^{\frac{1}{2}}b)U^*h \\ &\in E[q^{\frac{1}{2}}a, q^{\frac{1}{2}}b)H. \end{aligned}$$

Lo anterior utilizando el lema 9 y teniendo en cuenta que $U^*h \in H$.

Análogamente, tenemos que:

$$\begin{aligned} UE[q^{\frac{1}{2}}a, q^{\frac{1}{2}}b)h &= UE[q^{\frac{1}{2}}a, q^{\frac{1}{2}}b)U^*Uh \\ &= E[a,b)Uh \\ &\in E[a,b)H. \end{aligned}$$

Además, $UU^*h = h$ para todo $h \in E([a,b))H$ y $UU^*h' = h'$ para todo $h' \in E([q^{\frac{1}{2}}a, q^{\frac{1}{2}}b))H$. Esto completa nuestra demostración ■

A continuación se presenta el resultado más importante de esta sección, la clasificación de representaciones inyectivas π de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$.

Teorema 7. *(Clasificación de representaciones de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$)*
Sean π una representación inyectiva de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ sobre un espacio de Hilbert H, $\pi = U|\pi|$ su descomposición polar y E la resolución espectral inducida por $|\pi|$. Entonces:

1. *Existen subespacios cerrados E_n de H tales que $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} E_n$ con $E_n \cong E_0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*
2. *Existe un operador positivo $A \in B(E_0)$, con $sp\, A \subseteq [\sqrt{q}, 1]$ y 1 no es valor propio de A, tal que*

$$|\pi| = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{n}{2}} U^{*n}\, A\, U^n,$$

   sobre $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} E_n$.
3. *Se cumple que $E_n = \{v_n := U^{*n}v : \; v \in E_0\}$, de esta forma para todo $v_n \in E_n$ se satisface*

$$\pi v_n = q^{\frac{n}{2}}(Av)_{n-1}.$$

Demostración: Es claro que la colección $\{[q^{\frac{n+1}{2}}, q^{\frac{n}{2}})\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una partición de $(0,\infty)$. Por propiedades de la medida espectral E tenemos que

$$\begin{aligned} H &= E[0,\infty)H \\ &= E\left(\{0\}\right)H \oplus E(0,\infty)H \\ &= E(\{0\})H \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} E[q^{\frac{n+1}{2}}, q^{\frac{n}{2}})H \\ &= \operatorname{Ker}|\pi| \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} E[q^{\frac{n+1}{2}}, q^{\frac{n}{2}})H, \end{aligned}$$

donde la anterior igualdad se da pues $E(\{0\})H = \operatorname{Ker}|\pi| = \operatorname{Ker}\pi$. Dado que $\operatorname{Ker}\pi = \{0\}$ se cumple

$$H = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} E[q^{\frac{n+1}{2}}, q^{\frac{n}{2}})H.$$

Queremos hacer afirmaciones sobre el operador U^n para $n \in \mathbb{Z}$. Para esto primero observamos que si $n \in \mathbb{N}$, aplicando el corolario 2 al boreliano $[q^{\frac{n}{2}}, q^{\frac{n-1}{2}}) \subseteq [0,\infty)$, se tiene $UE[q^{\frac{n+1}{2}}, q^{\frac{n}{2}})U^* = E[q^{\frac{n}{2}}, q^{\frac{n-1}{2}})$, entonces por proposición 9 se cumple que

$$U : E[q^{\frac{n+1}{2}}, q^{\frac{n}{2}})H \to E[q^{\frac{n}{2}}, q^{\frac{n-1}{2}})H,$$

es un isomorfismo isométrico con inverso

$$U^* : E[q^{\frac{n}{2}}, q^{\frac{n-1}{2}}) \to E[q^{\frac{n+1}{2}}, q^{\frac{n}{2}})H.$$

Definiendo $E_n := E[q^{\frac{n+1}{2}}, q^{\frac{n}{2}})H$, lo anterior implica que $U^* : E_n \to E_{n+1}$ y $U : E_n \to E_{n-1}$ están bien definidos y son unitarios.

Dado que U es un isomorfismo isométrico, entonces U^n también lo es. Esto implica $E_n \cong E_0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. De esta manera quedan bien definidos $U^n : E_n \to E_0$ y su inverso $U^{*n} : E_0 \to E_n$. Además

$$E_n = \{v_n = U^{*n}v : \ v \in E_0\} = U^{*n}E_0,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Notemos que si $h \in E[q^{\frac{1}{2}}, 1)H$, entonces $h = E[q^{\frac{1}{2}}, 1)h$. De hecho, tenemos $h = E[q^{\frac{1}{2}}, 1)v$ para algún $v \in H$, pero $E[q^{\frac{1}{2}}, 1) = \left(E[q^{\frac{1}{2}}, 1)\right)^2$. Luego $h = E[q^{\frac{1}{2}}, 1)v = \left(E[q^{\frac{1}{2}}, 1)\right)^2 v = E[q^{\frac{1}{2}}, 1)h$.

Consideremos ahora $h \in E_n$. Entonces por la partición hecha sobre H, ya sabemos que existe $v \in E_0$ tal que $h = U^{*n}v$. Definamos

$$A := \int_{[\sqrt{q},1)} \lambda \, dE(\lambda).$$

Notamos que A satisface todas las propiedades mencionadas en el enunciado del teorema. Además por lema 8 y como $v \in E_0$ se cumple que

$$
\begin{aligned}
|\pi| h &= |\pi| U^{*n} v \\
&= U^{*n} (U^n |\pi| U^{*n}) v \\
&= U^{*n} (q^{\frac{n}{2}} |\pi|) v \\
&= q^{\frac{n}{2}} U^{*n} \int\limits_{[0,\infty)} \lambda \ dE(\lambda) \ v \\
&= q^{\frac{n}{2}} U^{*n} \int\limits_{[0,\infty)} \lambda \ dE(\lambda) \, E[q^{\frac{1}{2}}, 1) v \\
&= q^{\frac{n}{2}} U^{*n} \int\limits_{[0,\infty)} \lambda \ dE(\lambda) \int\limits_{[0,\infty)} X_{[q^{\frac{1}{2}},1)}(\lambda) \ dE(\lambda) \ v \\
&= q^{\frac{n}{2}} U^{*n} \int\limits_{[0,\infty)} \lambda X_{[q^{\frac{1}{2}},1)}(\lambda) \ dE(\lambda) \ v \\
&= q^{\frac{n}{2}} U^{*n} \int\limits_{[q^{\frac{1}{2}},1)} \lambda \ dE(\lambda) \ U^n h \\
&= q^{\frac{n}{2}} U^{*n} A U^n h.
\end{aligned}
$$

Es decir $|\pi| h = q^{\frac{n}{2}} U^{*n} A U^n h$ para todo $h \in E_n$. Por definición de la suma directa de operadores lo anterior implica

$$
|\pi| = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{n}{2}} U^{*n} \ A \ U^n,
$$

sobre $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} E_n$. Adicionalmente,

$$
\begin{aligned}
\pi v_n &= U |\pi| U^{*n} v \\
&= U \ q^{\frac{n}{2}} U^{*n} \ A \ U^n \ U^{*n} v \\
&= q^{\frac{n}{2}} U^{*(n-1)} \ A \ v \\
&= q^{\frac{n}{2}} \ (A \ v)_{n-1} \, .
\end{aligned}
$$

Esto termina la prueba ■

Capítulo 3

Álgebras C^* generadas por representaciones del plano complejo cuántico

1. Una representación concreta de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$

Aplicando el siguiente teorema, cuya demostración podemos consultar en [**11**], pág. 227, observamos que el operador A definido en el teorema 7, es un operador unitariamente equivalente a una suma directa de operadores de multiplicación.

Teorema 8. *Sea T un operador autoadjunto y acotado sobre un espacio de Hilbert separable H. Entonces T es unitariamente equivalente a una suma directa de operadores de multiplicación, esto es, existen medidas $\{\mu_n\}_{n=1}^{N}$ ($N = 1, 2, \cdots, \infty$) sobre $sp\ T$ y un operador unitario V*

$$V : H \to \bigoplus_{n=1}^{N} L^2(sp\ T,\ \mu_n),$$

tal que

$$(VTV^*\psi)_n(\lambda) = \lambda\psi_n(\lambda),$$

donde escribimos $\psi \in \bigoplus_{n=1}^{N} L^2(sp\ T,\ \mu_n)$ como la N-tupla $(\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \ldots)$.

Lo anterior sugiere que consideremos $\mathcal{H}$ como el espacio de Hilbert $L_2([0,\infty), \mathfrak{B}[0,\infty),\ \mu_q)$, donde $\mathfrak{B}[0,\infty)$ es la σ-álgebra de Borel sobre $[0,\infty)$ y una medida μ_q la cual consideraremos q-invariante, es decir, para todo $M \in \mathfrak{B}[0,\infty)$ se cumple que $\mu_q(M) = \mu_q(qM)$. En lo que sigue adoptaremos la notación $\mathcal{H} = L_2([0,\infty))$ para dar a entender el espacio de Hilbert anteriormente descrito, sobre este espacio se trabajará para definir nuestra representación de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$.

Podemos construir μ_q de la siguiente forma. Sea μ una medida de Borel sobre $[q, 1)$. Sabemos que $(0,\infty)$ se puede expresar como $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [q^{n+1}, q^n)$. Por tanto para cada $M \in \mathfrak{B}[0,\infty)$ tenemos que

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} M_n \cup (\{0\} \cap M)\,,$$

donde los $M_n := [q^{n+1}, q^n) \cap M$ forman una familia disjunta.

Notemos que $q^{-n}M_n \subseteq [q, 1)$ y es un conjunto de Borel en $[q, 1)$. En consecuencia $\mu(q^{-n}M_n)$ está bien definido. Podemos considerar $\mu_q(\{0\}) = \alpha$, donde $\alpha \in [0,\infty)$. En este sentido, damos la definición

$$\mu_q(M_n) := \mu(q^{-n}M_n) \quad \text{y} \quad \mu_q(M) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu_q(M_n) + \mu_q(\{0\} \cap M).$$

Por esta construcción, se tiene que μ_q es una medida de Borel sobre $[0, \infty)$.

Mostremos que μ_q es q-invariante. Dado $M \in \mathfrak{B}[0, \infty)$, consideramos $N = q^k M$ para $k \in \mathbb{Z}$. Luego como antes $N = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} N_n \cup (\{0\} \cap N)$ y $\mu_q(N_n) = \mu([q, 1) \cap q^{-n+k}M)$. De esta forma, para todo $k \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$\begin{aligned} \mu_q(M) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu([0, 1) \cap q^{-n}M) + \mu_q(\{0\} \cap M) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu([0, 1) \cap q^{-n+k}M) + \mu_q(\{0\} \cap q^k M) \\ &= \mu_q(q^k M). \end{aligned}$$

Notamos así que estas medidas q-invariantes, están determinadas por su reestricción al intervalo $[q, 1)$ y su valor $\mu_q(\{0\})$. Por comodidad en la notación escribiremos $\mu = \mu_q$.

Consideremos el operador $Q : \mathcal{H} \to \mathfrak{M}$, donde $\mathfrak{M}$ es el conjunto de funciones μ medibles, el cual a cada $f \in \mathcal{H}$ le asigna $Q(f)x := xf(x)$. El siguiente resultado nos brinda un dominio de definición para nuestra representación.

Lema 11. *El conjunto $D := \{f \in \mathcal{H} : \; Q(f) \in \mathcal{H}\}$ es denso en $\mathcal{H}$.*

Demostración: Sea $f \in \mathcal{H}$ y definamos para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ como

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x) & x \in [0, 1], \\ e^{-\frac{x}{n}} f(x) & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Notemos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Además $|f_n(x)| \le |f(x)|$ para todo $x \in [0, \infty)$ y $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte

$$\begin{aligned} \int_{[0,\infty)} |f_n(x)|^2 \, d\mu &= \int_{[0,1]} |f(x)|^2 \, d\mu + \int_{[1,\infty)} e^{-\frac{2x}{n}} |f(x)|^2 \, d\mu \\ &\le \int_{[0,1]} |f(x)|^2 \, d\mu + \int_{[1,\infty)} |f(x)|^2 \, d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f_n \in \mathcal{H}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En adición

$$\begin{aligned} \int_{[0,\infty)} x^2 |f_n(x)|^2 \, d\mu &= \int_{[0,1]} x^2 |f(x)|^2 \, d\mu + \int_{[1,\infty)} x^2 e^{-\frac{2x}{n}} |f(x)|^2 \, d\mu \\ &\le \int_{[0,1]} |f(x)|^2 \, d\mu + c \int_{[1,\infty)} |f(x)|^2 \, d\mu < \infty, \end{aligned}$$

donde c es una constante real positiva. Luego $f_n \in D$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Aplicando teorema de convergencia dominada

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\infty)} |f_n(x)|^2 \, d\mu = \int\limits_{[0,\infty)} \lim_{n\to\infty} |f_n(x)|^2 \, d\mu = \int\limits_{[0,\infty)} |f(x)|^2 \, d\mu.$$

De esto concluimos que $\{f_n\}$ converge a f en $\mathcal{H}$. Por tanto D es denso en $\mathcal{H}$ $\blacksquare$

Hasta aquí hemos dado la construcción de los conjuntos que necesitamos para exponer una representación de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$. Definamos el operador $\pi : D \to \mathcal{H}$ por

$$\pi f(x) := qxf(qx).$$

Lema 12. *El operador π es cerrado densamente definido y su adjunto $\pi^* : D \to \mathcal{H}$ satisface $\pi^*(f)(x) = xf(q^{-1}x)$.*

Demostración: Notamos que el adjunto π^* está bien definido, pues π es densamente definido. Sean $f, g \in D$, dado que μ es q-invariante tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \pi f(x), g(x)\rangle &= \langle qxf(qx), g(x)\rangle \\
&= \int\limits_{[0,\infty)} \overline{qxf(qx)}\, g(x) \; d\mu(x) \\
&= \int\limits_{[0,\infty)} \overline{f(qx)}\, qxg(x) \; d\mu(x) \\
&= \int\limits_{[0,\infty)} \overline{f(\tau)}\, \tau g(q^{-1}\tau) \; d\mu(q^{-1}\tau) \\
&= \int\limits_{[0,\infty)} \overline{f(\tau)}\, \tau g(q^{-1}\tau) \; d\mu(\tau) \\
&= \langle f(\tau), \tau g(q^{-1}\tau)\rangle,
\end{aligned}$$

entonces $\pi^* : \operatorname{Dom} \pi^* \to \mathcal{H}$ satisface que $D \subseteq \operatorname{Dom} \pi^*$ y está definido con unicidad sobre D como $\pi^* f(x) = xf(q^{-1}x)$ para todo $f \in D$, ya que D es denso.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el operador $X_{[0,\,n]} \in B(\mathcal{H})$, definido por $X_{[0,\,n]}(f)(x) = X_{[0,\,n]}(x)f(x)$, donde $X_{[0,\,n]}(x)$ representa la función característica del intervalo $[0,\; n]$ valuada en $x \in [0, \infty)$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{[0,\infty)} \left|x\mathcal{X}_{[0,\,n]}(x)f(x)\right|^2\, d\mu(x) &= \int\limits_{[0,n]} |xf(x)|^2\, d\mu(x)\\
&\le n^2 \int\limits_{[0,n]} |f(x)|^2\, d\mu(x) < \infty,
\end{aligned}$$

luego para cada $n \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathcal{H}$ tenemos que $\mathcal{X}_{[0,\,n]}\, f \in D$. Además $\mathcal{X}^*_{[0,\,n]} = \mathcal{X}_{[0,\,n]}$, entonces para todo $g \in D$ y $f \in \mathrm{Dom}\,(\pi^*)$

$$\begin{aligned}
\langle g,\ \pi^*\left(\mathcal{X}_{[0,\,n]}f\right)\rangle &= \langle \pi(g),\ \mathcal{X}_{[0,\,n]}f\rangle\\
&= \int\limits_{[0,n]} \overline{qx\, g(qx)}\, f(x)\ d\mu(x)\\
&= \int\limits_{[0,\infty)} \overline{qx\, \mathcal{X}_{[0,q^{-1}n]}(qx)\, g(qx)}\, f(x)\ d\mu(x)\\
&= \langle \pi\left(\mathcal{X}_{[0,\,q^{-1}n]}g\right),\ f\rangle\\
&= \langle \mathcal{X}_{[0,\,q^{-1}n]}\,(g)\,,\ \pi^*(f)\rangle\\
&= \langle g,\ \mathcal{X}_{[0,\,q^{-1}n]}\pi^*(f)\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\pi^*\mathcal{X}_{[0,\,n]} = \mathcal{X}_{[0,\,q^{-1}n]}\pi^*$ sobre $\mathrm{Dom}\,\pi^*$. Dado que para cada $f \in \mathrm{Dom}\,\pi^*$ se tiene $\|\pi^*(f)\| < \infty$, entonces por el teorema de convergencia monótona y la forma como actúa π^* sobre D tenemos

$$\begin{aligned}
\|\pi^*(f)\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{X}_{[0,n]}\pi^*(f)\|^2\\
&= \lim_{n\to\infty} \|\pi^*\mathcal{X}_{[0,n]}(f)\|^2\\
&= \lim_{n\to\infty} \|x\,(\mathcal{X}_{[0,n]}f)(q^{-1}x)\|^2\\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\infty)} \mathcal{X}_{[0,\,n]}(q^{-1}x)\, |xf(q^{-1}x)|^2 d\mu(x)\\
&= \lim_{n\to\infty} q \int\limits_{[0,\infty)} \mathcal{X}_{[0,\,qn]}(x)\, |xf(x)|^2 d\mu(x)\\
&= q \int\limits_{[0,\infty)} |xf(x)|^2 d\mu(x),
\end{aligned}$$

de esta forma tenemos que $Q(f) \in \mathcal{H}$. Esto implica que $f \in D$ y así $\mathrm{Dom}\,\pi^* = \mathrm{Dom}\,\pi = D$.

Notemos que π^{**} está bien definido, pues π^* es cerrado con dominio denso en $\mathcal{H}$. Como $\pi^{**} = \overline{\pi}$, se tiene que $\pi^{**} = \pi$ sobre D.

Recordemos que el operador $X_{[0,\,n]} \in B(\mathcal{H})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sabemos además que $\pi^* X_{[0,\,n]} = X_{[0,\,q^{-1}n]}\pi^*$ sobre Dom π^*, entonces para $f \in \operatorname{Dom} \pi^{**}$ y todo $g \in D$ se tiene

$$\begin{aligned}
\langle g,\ \pi^{**}\left(X_{[0,\,n]}f\right)\rangle &= \langle \pi^*(g),\ X_{[0,\,n]}f\rangle = \langle X_{[0,\,n]}\pi^*(g),\ f\rangle \\
&= \langle \pi^*\left(X_{[0,\,qn]}g\right),\ f\rangle = \langle X_{[0,\,qn]}g,\ \pi^{**}(f)\rangle \\
&= \langle g,\ X_{[0,\,qn]}\pi^{**}(f)\rangle.
\end{aligned}$$

Como $\|\pi^{**}f\| < \infty$ y $X_{[0,\,n]}f \in D$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\pi^{**}(f)\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \|X_{[0,\,qn]}\pi^{**}\ (f)\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|\pi^{**}X_{[0,n]}(f)\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \|qx(X_{[0,n]}f)(qx)\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} X_{[0,\,n]}(x)|xf(x)|^2 d\mu(x) \\
&= \int_{[0,\infty)} |xf(x)|^2 d\mu(x),
\end{aligned}$$

de esta forma $f \in D$. Por tanto

$$\operatorname{Dom} \pi^{**} = \operatorname{Dom} \pi = D,$$

es decir, $\pi^{**} = \pi$. Entonces π es un operador cerrado ■

Lema 13. *El operador π es inyectivo si y sólo si $\mu(\{0\}) = 0$.*

Demostración: Supongamos que $\mu(\{0\}) = 0$ y sea $f \in \mathcal{H}$ tal que $f \in \operatorname{Ker} \pi$, entonces $\pi f = 0$ en $\mathcal{H}$, esto es, $\pi(f)x = qxf(qx) = 0$ en casi todo punto de $[0,\infty)$. Por lo tanto $f = 0$ en casi todo punto de $(0,\infty)$, pero $\{0\}$ tiene medida cero entonces $f = 0$ en casi todo punto de $[0,\infty)$.

Por otra parte si $\operatorname{Ker} \pi = \{0\}$, consideremos la función $X_{\{0\}} \in \mathcal{H}$ y notemos que $Q(X_{\{0\}}) = 0 \in \mathcal{H}$, entonces $X_{\{0\}} \in D$. Además $\pi(X_{\{0\}}) = 0$ en $\mathcal{H}$ luego $X_{\{0\}} \in \operatorname{Ker} \pi$, es decir, $X_{\{0\}} = 0$ en $\mathcal{H}$ y así $X_{\{0\}}(x) = 0$ en casi todo punto de $[0,\infty)$. De esto inferimos $\mu(\{0\}) = 0$ ■

Supondremos en adelante que $\mu(\{0\}) = 0$, entonces el operador π es inyectivo. Sabemos que π tiene una única descomposición polar dada por $\pi = U|\pi|$, donde U es un operador unitario con dominio $\mathcal{H}$ y $|\pi|$ es un operador positivo con dominio D, esto porque π es un operador inyectivo densamente definido y cerrado.

Lema 14. *La descomposición polar $\pi = U|\pi|$ satisface que $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ está dado por $U(f)(x) = f(qx)$ y $|\pi| : D \to \mathcal{H}$ está dado por $|\pi|(f)(x) = xf(x)$.*

Demostración: Definamos $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por $Vf(x) := f(qx)$. Sean $f, h \in \mathcal{H}$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle Vf, Vh\rangle &= \int_{[0,\infty)} \overline{f(qx)}\, h(qx)\ d\mu(x) \\
&= \int_{[0,\infty)} \overline{f(u)}\, h(u)\, d\mu(q^{-1}u) \\
&= \int_{[0,\infty)} \overline{f(u)}\, h(u)\, d\mu(u) \\
&= \langle f, h\rangle,
\end{aligned}$$

esto se deduce haciendo $u = qx$ y porque μ es q-invariante. Notamos que Ran $V = H$, pues V es inyectivo. Concluimos así que V es un operador unitario sobre $\mathcal{H}$.

Consideremos ahora el operador $W : D \to \mathcal{H}$, definido por $Wf(x) := xf(x)$. Nuevamente para $f, h \in D$ se tiene

$$\langle\ Wf(x),\ h(x)\ \rangle = \langle\ xf(x),\ h(x)\ \rangle = \langle\ f(x),\ xh(x)\ \rangle = \langle\ f(x),\ W^*h(x)\ \rangle,$$

entonces $D \subseteq \text{Dom } W^*$ y $W = W^*$ sobre D.

Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $X_{[0,\ n]}f \in D$ para todo $f \in \mathcal{H}$. Ahora notemos que para todo $g \in D$ y $f \in \text{Dom } W^*$ se cumple

$$\begin{aligned}
\langle g,\ W^*\left(X_{[0,\ n]}f\right)\rangle &= \langle W(g),\ X_{[0,\ n]}f\rangle \\
&= \int_{[0,n]} \overline{xg(x)}\ f(x)\ d\mu(x) \\
&= \int_{[0,\infty)} \overline{xX_{[0,n]}(x)g(x)}\ f(x)\ d\mu(x) \\
&= \langle W\left(X_{[0,\ n]}g\right),\ f\rangle \\
&= \langle\left(X_{[0,\ n]}g\right),\ W^*(f)\rangle \\
&= \langle g,\ X_{[0,\ n]}W^*(f)\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $W^*X_{[0,\ n]} = X_{[0,\ n]}W^*$ sobre Dom W^*. Como para cada $f \in \text{Dom } W^*$ se satisface $\|W^*(f)\| < \infty$, tenemos por el teorema de convergencia monótona

$$
\begin{aligned}
\|W^*(f)\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \|X_{[0,n]}W^*(f)\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \|W^*X_{[0,n]}(f)\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \|x\,(X_{[0,n]}f)(x)\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\infty)} X_{[0,\,n]}(x)|xf(x)|^2 d\mu(x) \\
&= \int\limits_{[0,\infty)} |xf(x)|^2 d\mu(x),
\end{aligned}
$$

lo cual implica que $Q(f) \in \mathcal{H}$ y así $f \in D$. Luego Dom $W^* \subseteq D$, de donde concluimos $D =$ Dom W^* y W es un operador autoadjunto.

Veamos ahora que sp $W \subseteq [0,\infty)$. Sea $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [0,\infty)$, queremos verificar que $W - \lambda I : D \to \mathcal{H}$ tiene inverso. Si $f,\ h \in D$ son tales que $(W-\lambda I)f = (W-\lambda I)h$ en $\mathcal{H}$, luego $(W-\lambda I)f(x) = (W-\lambda I)h(x)$ para casi todo $x \in [0,\infty)$. Entonces $(x-\lambda)f(x) = (x-\lambda)h(x)$ y así $f(x) = h(x)$ para casi todo $x \in [0,\infty)$, pues $x - \lambda > 0$. Luego $f = h$ en $\mathcal{H}$, lo cual implica que Ker $(W-\lambda I) = \{0\}$.

Ahora definamos $\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por

$$\psi(f)(x) := \frac{f(x)}{x-\lambda}.$$

Como $x - \lambda > 0$ se tiene que ψ esta bien definida. Además para todo $f \in D$ y $g \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\psi(W-\lambda I)f = f \quad \text{y} \quad (W-\lambda I)\psi\, g = g,$$

entonces $\psi = (W-\lambda I)^{-1}$. Notamos que $|x-\lambda| \geq |\lambda|$, luego si $\|f\| = 1$ entonces

$$
\begin{aligned}
\|\psi\, f\|^2 &= \int\limits_{[0,\infty)} |\psi\, f|^2\, d\mu = \int\limits_{[0,\infty)} \left|\frac{f(x)}{x-\lambda}\right|^2\, d\mu(x) \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|^2} \int\limits_{[0,\infty)} |f(x)|^2\, d\mu(x) = \frac{1}{|\lambda|^2}.
\end{aligned}
$$

Luego $\sup\limits_{\|f\|=1} \|\psi\, f\| \leq \frac{1}{\lambda^2} < \infty$. De esta manera, $\psi = (W-\lambda I)^{-1}$ es acotado. En consecuencia $W - \lambda I$ es invertible. Por lo tanto sp $W \subseteq [0,\infty)$, es decir, W es un operador positivo.

Observamos además que para todo $f \in D$ se tiene

$$VWf(x) = V(xf(x)) = qxf(qx) = \pi f(x),$$

esto es, $\pi = VW$. Por la unicidad de la descomposición polar concluimos que $U = V$ y $|\pi| = W$, es decir, $Uh(x) = h(qx)$ para todo $h \in \mathcal{H}$ y $|\pi| f(x) = xf(x)$ para todo $f \in D$ ■

Notemos ahora que para todo $f \in D$ se satisface $\pi\pi^*(f)(x) = \pi(xf(q^{-1}x)) = qx\ (qxf(x)) = q^2x^2f(x)$. Por otro lado $\pi^*\pi(f)(x) = \pi^*(qxf(qx)) = x(xf(x)) = x^2f(x)$. Por todo lo anterior podemos concluir que el operador π es una representación de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_{q^2})$ sobre $\mathcal{H}$. Dado que q^2 permanece en el intervalo $(0, 1)$, podemos afirmar sin perdida de generalidad lo siguiente.

Teorema 9. *El operador π es una representación de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L_2([0,\infty))$.*

2. Un álgebra C^* asociada al plano complejo cuántico

Sea X un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, definimos $C(X)$, $C_b(X)$ y $C_0(X)$ como el álgebra de las funciones continuas complejo valuadas sobre X, la subálgebra de las funciones acotadas en $C(X)$ y la subálgebra de funciones en $C_b(X)$ que se anulan al infinito, respectivamente.

Sabemos que el operador $\pi : D \to \mathcal{H}$ dado por $\pi(f)(x) = qxf(qx)$, es una representación inyectiva de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = (L_2[0,\infty),\ \mathfrak{B}[0,\infty),\ \mu)$ donde μ es una medida q-invariante. Demostraremos en la proposición 14, que si $M \subseteq [0,\infty)$ es un Borel medible entonces

$$\mu(M \cap ([0,\infty) \setminus \operatorname{sp}|\pi|)) = 0.$$

Ahora aplicando el teorema espectral al operador $|\pi|$, existe una resolución espectral E sobre $\operatorname{sp}|\pi|$, la cual se extiende sobre $[0,\infty)$ de tal forma que si $M \subseteq [0,\infty)$ es medible entonces $E(M \cap ([0,\infty) \setminus \operatorname{sp}|\pi|)) = 0$ y satisface que $|\pi| = \int_{[0,\infty)} \lambda\, dE(\lambda)$. Además para todo

$$f \in L^\infty([0,\infty)) = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{C} \mid f \text{ es Borel medible sobre } [0,\infty) \text{ y } \operatorname{ess\,sup}(f) < \infty\},$$

con

$$\|f\| = \operatorname{ess\,sup}(f) := \operatorname{ínf}\{c \in (0,\infty) : E_{x,x}(\{t \in (0,\infty) : |f(t)| \geq c\}) = 0 \text{ para todo } x \in H\},$$

se satisface que la aplicación $f \to f(|\pi|)$ es un isomorfismo isométrico a su rango, donde

$$f(|\pi|) := \int_{[0,\infty)} f(\lambda)\ dE(\lambda).$$

Notamos inmediatamente que $C_b([0,\infty)) \subseteq L^\infty([0,\infty))$. Por comodidad en la notación y sin temor a confusión de los resultados, observamos que se adopta la misma notación para la medida espectral inducida por $|\pi|$ que en el capítulo anterior.

El siguiente resultado nos brinda una relación entre el operador π y la medida q-invariante μ con la que se construye el espacio $\mathcal{H}$. Nuestra medida q-invariante la podemos escoger de tal forma que su soporte satisface $\operatorname{supp}\mu = [0,\infty)$, por ejemplo si la restricción de μ al intervalo $[q,\ 1)$ está dada por la medida de Lebesgue. La situación anterior describe el caso más importante para nuestro interes de aplicación, pues el álgebra C^* que vamos a construir se desea interpretar como una deformación del cilindro $[0,\infty)\times\mathbb{S}^1$. Observemos que

Proposición 10. *supp* $\mu = sp\,|\pi|$.

Demostración: Si $\lambda \notin \operatorname{supp}\mu$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu[(\lambda-\delta,\lambda+\delta)] = 0.$$

Definamos $T_\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ por $T_\lambda(x) = \frac{1}{x-\lambda}$ si $x \notin (\lambda-\delta,\lambda+\delta)$ y $T_\lambda(x) = 0$ si $x \in (\lambda-\delta,\lambda+\delta)$. De esta manera tenemos que T_λ es acotado.

Ahora definimos el operador T de $\mathcal{H}$ al conjunto de la funciones medibles sobre $[0,\infty)$ como la multiplicación en los complejos

$$T(f)(x) := T_\lambda(x)f(x).$$

De esta manera se satisface que $(|\pi|-\lambda I)T(f)(x) = (|\pi|-\lambda I)T_\lambda(x)f(x)$ y así

$$(|\pi|-\lambda I)T(f)(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin (\lambda-\delta,\lambda+\delta), \\ 0 & x \in (\lambda-\delta,\lambda+\delta). \end{cases}$$

En consecuencia $(|\pi|-\lambda I)T(f)(x) = f(x)$ en casi toda parte. Esto implica que $(|\pi|-\lambda I)T = I$ y análogamente $T(|\pi|-\lambda I) = I$. Así $\lambda \notin \operatorname{sp}|\pi|$, es decir, $\operatorname{sp}|\pi| \subseteq \operatorname{supp}\mu$.

Por otra parte, si $\lambda \in \operatorname{supp}\mu$ y $\mu(\{\lambda\}) \neq 0$ definimos

$$X_{\{\lambda\}}(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \lambda, \\ 1 & x = \lambda. \end{cases}$$

Luego tenemos que

$$\|X_{\{\lambda\}}\|^2 = \int_{[0,\infty)} X_{\{\lambda\}}\, d\mu = \mu(\{\lambda\}) \neq 0,$$

esto es, $0 \neq X_{\{\lambda\}} \in \mathcal{H}$. Ahora para todo $x \in [0,\infty)$ tenemos

$$(|\pi|-\lambda I)X_{\{\lambda\}}(x) = \begin{cases} x-\lambda & x \in \{\lambda\}, \\ 0 & x \notin \{\lambda\}. \end{cases}$$

De esta forma $(|\pi|-\lambda I)X_{\{\lambda\}}(x) = 0$ para todo x. Entonces $(|\pi|-\lambda I)X_{\{\lambda\}} = 0$ en $\mathcal{H}$ y por esto se deduce que $X_{\{\lambda\}} \in \operatorname{Ker}(|\pi|-\lambda I)$, es decir, $\lambda \in \operatorname{sp}|\pi|$.

Sea ahora $\lambda \in \operatorname{supp}\mu$ y $\mu(\{\lambda\}) = 0$. Luego para todo $\epsilon > 0$ tenemos $\mu((\lambda-\epsilon,\ \lambda+\epsilon)) \neq 0$, definamos

$$X_{\lambda,\,n}(x) := \begin{cases} \left(\mu\left(\lambda-\frac{1}{n},\ \lambda+\frac{1}{n}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} & x \in \left(\lambda-\frac{1}{n},\ \lambda+\frac{1}{n}\right), \\ 0 & x \notin \left(\lambda-\frac{1}{n},\ \lambda+\frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

Entonces

$$\|X_{\lambda,\,n}\|^2 = \frac{1}{\mu\left(\lambda - \frac{1}{n},\ \lambda + \frac{1}{n}\right)} \int\limits_{\left(\lambda-\frac{1}{n},\ \lambda+\frac{1}{n}\right)} d\mu = 1,$$

además

$$\|(|\pi| - \lambda I)X_{\lambda,\,n}\|^2 = \frac{1}{\mu\left(\lambda - \frac{1}{n},\ \lambda + \frac{1}{n}\right)} \int\limits_{\left(\lambda-\frac{1}{n},\ \lambda+\frac{1}{n}\right)} |x-\lambda|^2\, d\mu \leq \frac{1}{n^2}\frac{1}{\mu\left(\lambda - \frac{1}{n},\ \lambda + \frac{1}{n}\right)} \int\limits_{\left(\lambda-\frac{1}{n},\ \lambda+\frac{1}{n}\right)} d\mu \leq \frac{1}{n^2}.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|((|\pi| - \lambda I))^{-1}(|\pi| - \lambda I)X_{\lambda,\,n}\|}{\|(|\pi| - \lambda I)X_{\lambda,\,n}\|} \geq \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

por tanto el operador $((|\pi|-\lambda I))^{-1}$ no puede ser acotado, esto es $\lambda \in \operatorname{sp}|\pi|$. Concluimos que $\operatorname{supp}\mu = \operatorname{sp}|\pi|$, esto termina la prueba ■

En lo que sigue supondremos que $\operatorname{supp}\mu = [0,\infty)$. Recordemos ahora que π es un operador cerrado densamente definido e inyectivo, con descomposición polar dada por $\pi = U|\pi|$. Definamos el conjunto

$$C := \left\{ \sum_{k=m}^{n} f_k(|\pi|)U^k \,:\, m,n \in \mathbb{Z},\ m \leq n,\ f_k \in C_0\left([0,\ \infty)\right) \right\} \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H}).$$

Ahora notamos que si $f \in C_0[0,\infty)$ y $k \in \mathbb{Z}$, entonces por proposición 6 y lema 10 se tiene

$$\begin{aligned}
U^k f(|\pi|) &= \left(U^k \int\limits_{[0,\ \infty)} f(\lambda)dE(\lambda)U^{*k} \right) U^k \\
&= \int\limits_{[0,\ \infty)} f(\lambda)d\left(U^k E U^{*k}\right)(\lambda)U^k \\
&= \int\limits_{[0,\ \infty)} f(\lambda)dE(q^{-\frac{k}{2}}\lambda)U^k \\
&= \int\limits_{[0,\ \infty)} f(q^{\frac{k}{2}}\lambda)dE(\lambda)U^k \\
&= f(q^{\frac{k}{2}}|\pi|)U^k \in C.
\end{aligned}$$

La última relación se deduce de $f(q^{\frac{k}{2}}x) \in C_0[0,\infty)$. Ahora notamos que

$$f_k(|\pi|)U^k f_j(|\pi|)U^j = f_k(|\pi|)f_j(q^{\frac{k}{2}}|\pi|)U^{k+j} \in C,$$

de esta manera se tiene que C es un álgebra. Observamos también que

$$(f_k(|\pi|)U^k)^* = U^{-k}\,\overline{f}_k(|\pi|) = \overline{f}_k(q^{-\frac{k}{2}}|\pi|)U^{-k}.$$

Así $c^* \in C$ para cada $c \in C$, pues C se compone de sumas finitas de elementos $f_k(|\pi|)U^k$, luego C es un álgebra *. Definamos la C^*-álgebra $\mathcal{A} = \overline{C}$, es decir

$$\mathcal{A} = \overline{\left\{ \sum_{k=m}^{n} f_k(|\pi|)U^k \,:\, m, n \in \mathbb{Z},\ m \leq n,\ f_k \in C_0\left([0,\ \infty)\right) \right\}}.$$

3. Álgebras C^* generadas por operadores no acotados

A continuación se exponen los hechos y resultados de la teoría de Woronowicz, más relacionados con nuestro trabajo. En caso que no se cite referencia distinta, para la demostración de los resultados afirmados en esta sección podemos consultar [**17**].

Definición 24. *Sea H un espacio de Hilbert separable, definimos $C^*(H)$ como el conjunto de todas las subálgebras C^* no degeneradas de $B(H)$. Decimos que la C^*-álgebra $\mathcal{A} \subseteq B(H)$, es no degenerada si $\mathcal{A}H := \{ah :\ a \in A,\ h \in H\}$ es denso en H.*

Definición 25. *Sea H un espacio de Hilbert y $\mathcal{A} \in C^*(H)$; un operador $a \in B(H)$ se dice multiplicador de $\mathcal{A}$, si $a\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}a$ están contenidos en $\mathcal{A}$. Denotamos este conjunto por*

$$M(\mathcal{A}) = \{a \in B(H) :\ a\mathcal{A},\ \mathcal{A}a \subseteq \mathcal{A}\}.$$

Se verifica también que $M(\mathcal{A})$ es una subálgebra C^* de $B(H)$ y $I_{B(H)} \in M(\mathcal{A})$. Además $\mathcal{A}$ es ideal esencial de $M(\mathcal{A})$, esto es, $\mathcal{A}$ es ideal de $M(\mathcal{A})$ y si se cumple que $m \in M(\mathcal{A})$ y $ma = 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$ entonces $m = 0$. Vale la pena resaltar el siguiente resultado.

Proposición 11. *$M(\mathcal{A})$ es el álgebra C^* más grande que contiene a $\mathcal{A}$ como un ideal esencial.*

Definición 26. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*, un elemento $a \in M(\mathcal{A})$ se dice positivo sobre sp $\mathcal{A}$, si $0 \leq a$ y $a\mathcal{A}$ es denso en $\mathcal{A}$.*

Definición 27. *Sea T un operador cerrado densamente definido actuando sobre un espacio de Hilbert H, definimos la z-transformada de T como el operador $z_T = z(T) = T(1 + T^*T)^{-\frac{1}{2}}$.*

El operador z_T contiene toda la información de T, en el sentido que

$$T = z_T(I - z_T^* z_T)^{-\frac{1}{2}}.$$

Se puede demostrar que $\|T\| < \infty$ si y solo si $\|z_T\| < 1$.

Definición 28. *Sea H un espacio de Hilbert, $A \in C^*(H)$ y T un operador cerrado densamente definido actuando sobre H. Decimos que T es afiliado a A y escribimos $T \in A^\eta$, si $z_T \in M(A)$ y $z_T^* z_T < I$ sobre sp A.*

Destacamos los siguientes resultados de la teoría de Woronowicz.

Proposición 12. *Si T es afiliado a la C^*-álgebra $\mathcal{A}$, entonces T^* y T^*T también lo son.*

Proposición 13. *Los multiplicadores de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$, son los únicos elementos acotados afiliados a $\mathcal{A}$.*

Vale la pena mencionar también que todo operador cerrado densamente definido sobre un espacio de Hilbert H, es afiliado al álgebra $CB(H)$ de todos los operadores compactos sobre H.

Definición 29. *Rep($\mathcal{A}, H$) denotará el conjunto de todas las representaciones no degeneradas de $\mathcal{A}$ en H. Por definición $\phi \in Rep(\mathcal{A}, H)$ si y solo si $\phi : \mathcal{A} \to B(H)$ es un *-homomorfismo tal que $\phi(\mathcal{A})H$ es denso en H.*

Se tienen los siguientes resultados concernientes a representaciones de álgebras C^*.

Proposición 14. *Toda representación $\phi \in Rep(\mathcal{A}, H)$, admite una única extensión a un $*$-homomorfismo $\phi : M(\mathcal{A}) \to B(H)$.*

Usando la propiedad $\phi(z_T) = z_{\phi(T)}$ para todo $T \in M(\mathcal{A})$, se extiende la acción de la representación ϕ a los elementos afiliados de $\mathcal{A}$ de la siguiente forma, si $T \in \mathcal{A}^\eta$ entonces $z_T \in M(\mathcal{A})$ y existe un único operador cerrado densamente definido S actuando sobre H tal que $\phi(z_T) = z_S$. Diremos que S es la ϕ-imagén de T y escribiremos $S = \phi(T)$. Esto significa que la ϕ-imagen de un elemento afiliado T estará dada por

$$\phi(T) = z^{-1}(\phi(z(T))). \tag{*}$$

4. Una clasificación del conjunto Rep($\mathcal{A}, H$)

Recordamos que el operador $\pi : D \to \mathcal{H}$ dado por $\pi(f)(x) = qxf(qx)$, es una representación de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = (L_2[0,\infty),\ \mathfrak{B}[0,\infty),\ \mu)$ donde μ es una medida q-invariante. Tenemos en cuenta también que nuestra C^*-álgebra $\mathcal{A}$ está definida por

$$\mathcal{A} = \overline{\left\{ \sum_{k=m}^{n} f_k(|\pi|)U^k :\ m, n \in \mathbb{Z},\ m \le n,\ f_k \in C_0([0,\ \infty)) \right\}}.$$

En caso que no se especifique algo distinto en adelante H representará un espacio de Hilbert y supondremos que $\varphi \in \mathrm{Rep}(\mathcal{A}, H)$. Sabemos que la representación φ es un $*$-homomorfismo y se puede extender al conjunto $\mathrm{M}(\mathcal{A})$ por

$$\varphi(m)(\varphi(a)h) := \varphi(ma)h,$$

para todo $m \in \mathrm{M}(\mathcal{A})$, $a \in \mathcal{A}$ y $h \in H$, ya que por definición $\mathrm{Rep}(\mathcal{A}, H)$ el conjunto $\{\varphi(a)h : \ a \in \mathcal{A},\ h \in H\}$ es denso en H.

Lema 15. *Para toda $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ continua y acotada se tiene que $f(|\pi|)$ y $g(|\pi|)$ conmutan y $f(|\pi|)g(|\pi|) = fg(|\pi|)$.*

Demostración: Como las funciones f y g son acotadas se tiene $f(|\pi|),\ g(|\pi|) \in B(\mathcal{H})$. Luego

$$\mathrm{Dom}\ f(|\pi|) = \mathrm{Dom}\ g(|\pi|) = \mathcal{H}.$$

Por tanto se cumple

$$f(|\pi|)g(|\pi|) = \int\limits_{[0,\infty)} f(\lambda)\, dE(\lambda) \int\limits_{[0,\infty)} g(\lambda)\, dE(\lambda) = \int\limits_{[0,\infty)} f(\lambda)g(\lambda)\, dE(\lambda) = fg(|\pi|).$$

Para la demostración de lo anterior puede consultar [**12**], pág. 350. Luego se tiene

$$\begin{aligned} f(|\pi|)g(|\pi|) &= \int\limits_{[0,\infty)} f(\lambda)\, dE(\lambda) \int\limits_{[0,\infty)} g(\lambda)\, dE(\lambda) \\ &= \int\limits_{[0,\infty)} f(\lambda)g(\lambda)\, dE(\lambda) \\ &= \int\limits_{[0,\infty)} g(\lambda)f(\lambda)\, dE(\lambda) \\ &= \int\limits_{[0,\infty)} g(\lambda)\, dE(\lambda) \int\limits_{[0,\infty)} f(\lambda)\, dE(\lambda) \\ &= g(|\pi|)f(|\pi|), \end{aligned}$$

como esperabamos ■

En este momento comenzamos a encontrar relaciones entre la teoría espectral de operadores no acotados y la teoría de álgebras generadas por estos.

Proposición 15. *Para toda función continua $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$, se tiene que $f(|\pi|) \in \mathcal{A}^{\eta}$.*

Demostración: Sean $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ y $c = g(|\pi|)U^k \in C$. Definamos $h : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ por

$$h(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1 + |f(x)|^2}} g(x),$$

luego tenemos que h es continua sobre $[0, \infty)$. Además como $\frac{f(x)}{\sqrt{1+|f(x)|^2}}$ es acotada, entonces $h \in C_0[0, \infty)$. Por lema 15 la z-transformada de $f(|\pi|)$ actúa del siguiente modo

$$z(f(|\pi|))c = \left(\frac{f(|\pi|)}{\sqrt{1 + |f(|\pi|)|^2}} g(|\pi|) \right) U^k = h(|\pi|)U^k.$$

En consecuencia $z(f(|\pi|))c \in C$, pues h es continua, acotada y se anula en el infinito. Por otro lado

$$cz(f(|\pi|)) = \left(z(\overline{f}(|\pi|))c^*\right)^* \in C,$$

puesto que C es un álgebra *. Así $cz(f(|\pi|))$, $z(f(|\pi|))c \in C$ para todo $c \in C$, pues C se compone de sumas finitas de elementos $g(|\pi|)U^k$.

Por otra parte, si $a \in \mathcal{A}$ entonces existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en C, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Entonces

$$z(f(|\pi|))a = z(f(|\pi|)) \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} z(f(|\pi|))a_n,$$

esto último pues el producto de operadores acotados es continuo. Como $z(f(|\pi|))a_n \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $z(f(|\pi|))a \in \mathcal{A}$ por ser límite de una sucesión en C. Luego $z(f(|\pi|))a \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathcal{A}$. De forma análoga podemos mostrar que $az(f(|\pi|)) \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Así concluimos

$$z(f(|\pi|)) \in \mathrm{M}(\mathcal{A}).$$

Por otra parte, el lema 15 y el teorema espectral implican

$$\begin{aligned} I - z(f(|\pi|))^* z(f(|\pi|)) &= I - \frac{\bar{f}(|\pi|)}{\sqrt{1 + |f(|\pi|)|^2}} \frac{f(|\pi|)}{\sqrt{1 + |f(|\pi|)|^2}} \\ &= I - \frac{|f(|\pi|)|^2}{1 + |f(|\pi|)|^2} \\ &= \int_{[0,\infty)} 1 - \frac{|f(\lambda)|^2}{1 + |f(\lambda)|^2} \, dE(\lambda) \\ &= \int_{[0,\infty)} \frac{1}{1 + |f(\lambda)|^2} \, dE(\lambda) \\ &= \frac{I}{I + |f(|\pi|)|^2}. \end{aligned}$$

Claramente $I - z(f(|\pi|))^* z(f(|\pi|)) > 0$.

Ahora veamos que $\frac{I}{I+|f(|\pi|)|^2}\mathcal{A}$ es denso sobre $\mathcal{A}$. Sea $\rho_n \in C_0[0, \infty)$, definida por $\rho_n(t) = 1$ para $t \in [0, n]$, $0 \leq \rho_n(t) \leq 1$ para $t \in (n, n + 1)$ y $\rho_n(t) = 0$ para $t \geq n + 1$. De esta forma tenemos que $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una unidad aproximada en $C_0[0,\infty)$. Definamos también $\psi_n : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ por $\psi_n(t) := (1 + |f(t)|^2)\rho_n(t)$, entonces $\psi_n \in C_0[0,\infty)$. Sea $g \in C_0[0,\infty)$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+|f(t)|^2}\psi_n(t)g(t) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(t)g(t) = g(t).$$

Escojamos ahora $c = \sum_{k=m}^{p} g_k(|\pi|)U^k \in C$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+|f(|\pi|)|^2}\psi_n(|\pi|)\sum_{k=m}^{p} g_k(|\pi|)U^k = \sum_{k=m}^{p} g_k(|\pi|)U^k \in C,$$

esto implica que

$$\mathcal{A} = \overline{C} \subseteq \overline{\frac{I}{I+|f(|\pi|)|^2}C} \subseteq \overline{\frac{I}{I+|f(|\pi|)|^2}\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}.$$

Y así $\frac{I}{I+|f(|\pi|)|^2}\mathcal{A}$ es un subconjunto denso de $\mathcal{A}$. Luego $f(|\pi|) \in \mathcal{A}^\eta$ para toda f continua sobre $[0,\infty)$ por definición de elemento afiliado, dada en la definición 28 ■

Por lo anterior, dada cualquier representación $\varphi \in \text{Rep}(\mathcal{A}, H)$ tiene sentido hablar de $\varphi(f(|\pi|))$ para toda f en $C[0,\infty)$ dada por (*). De forma muy parecida a la proposición anterior podemos mostrar

Corolario 3. *$U \in M(\mathcal{A})$, $z(\pi) \in M(\mathcal{A})$, $z(|\pi|) \in M(\mathcal{A})$, $\pi \in \mathcal{A}^\eta$ y $|\pi| \in \mathcal{A}^\eta$.*

Demostración: Notemos que para cada $c = \sum_{k=m}^{n} f_k(|\pi|)U^k$, se cumple

$$\begin{aligned} Uc &= U\left(\sum_{k=m}^{n} f_k(|\pi|)U^k\right) = \sum_{k=m}^{n} U f_k(|\pi|)U^k \\ &= \sum_{k=m}^{n} f_k(q^{-\frac{1}{2}}|\pi|)U^{k+1} \in C, \end{aligned}$$

luego $UC \subseteq C$. Además $U\mathcal{A} = U\overline{C} \subseteq \overline{UC} \subseteq \overline{C} = \mathcal{A}$. De forma análoga se demuestra que $\mathcal{A}U \subseteq \mathcal{A}$, por tanto $U \in \mathrm{M}(\mathcal{A})$.

Para el segundo resultado observamos

$$z(\pi) = \pi(1+\pi^*\pi)^{-\frac{1}{2}} = U|\pi|(1+|\pi|^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Notamos que

$$\begin{aligned} |\pi|(1+|\pi|^2)^{-\frac{1}{2}} &= \int_{[0,\infty)} \lambda \; dE(\lambda) \int_{[0,\infty)} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \; dE(\lambda) \\ &= \int_{[0,\infty)} \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \; dE(\lambda). \end{aligned}$$

Como la función $id : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ dada por $id(x) = x$ es continua, concluimos por la proposición 15 que

$$z(|\pi|) = z(id(|\pi|)) = \frac{|\pi|}{\sqrt{1 + |\pi|^2}} \in \mathrm{M}(\mathcal{A}).$$

Además dado que M($\mathcal{A}$) es un álgebra *, lo anterior implica que

$$z(\pi) = U \frac{|\pi|}{\sqrt{1 + |\pi|^2}} = Uz(|\pi|) \in \mathrm{M}(\mathcal{A}).$$

Ahora verifiquemos $\pi \in \mathcal{A}^\eta$. Ya sabemos que $z(\pi) \in \mathrm{M}(A)$, mostremos que $z(\pi)^* z(\pi) < I$ sobre sp $\mathcal{A}$. Observamos que

$$z(\pi)^* z(\pi) = \left(U \frac{|\pi|}{\sqrt{1 + |\pi|^2}} \right)^* U \frac{|\pi|}{\sqrt{1 + |\pi|^2}} = \frac{|\pi|^2}{1 + |\pi|^2}.$$

Luego por teorema espectral se cumple que

$$\begin{aligned} I - z(\pi)^* z(\pi) &= I - \frac{|\pi|^2}{1 + |\pi|^2} \\ &= \int\limits_{[0,\infty)} 1 - \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} \ dE(\lambda) \\ &= \int\limits_{[0,\infty)} \frac{1}{1 + \lambda^2} \ dE(\lambda) \\ &= \frac{I}{I + |\pi|^2}. \end{aligned}$$

Claramente tenemos que $I - z(\pi)^* z(\pi) = \frac{I}{I + |\pi|^2} > 0$. Procediendo análogamente a la proposición 15 tenemos el resultado ■

De esta forma dada cualquier $\varphi \in \mathrm{Rep}(\mathcal{A}, H)$, $\varphi(z(|\pi|))$ es un operador bien definido en B(H) pues $z(|\pi|) \in \mathrm{M}(\mathcal{A})$. Además este operador es autoadjunto ya que la extensión $\varphi : \mathrm{M}(\mathcal{A}) \to \mathrm{B}(H)$ es un $*$-homomorfismo y $z(|\pi|)$ es autoadjunto. Como sp $|\pi| \subseteq [0, \infty)$ y $|\pi|$ es no acotado, se tiene que sp $z(|\pi|) \subseteq [0, 1]$ (ver [**17**]). De esta manera aplicamos el teorema espectral y concluimos que existe una resolución espectral F_φ de $\varphi(z(|\pi|))$ sobre $[0, 1]$ tal que

$$\varphi(z(|\pi|)) = \int\limits_{[0,1]} t \, dF_\varphi(t) \quad \text{y} \quad F_\varphi(\{1\}) = 0. \tag{5}$$

Por otra parte, dado que $|\pi| \in \mathcal{A}^\eta$ este posee una φ-imágen, la cual satisface por ecuación (*)

$$\begin{aligned}\varphi(|\pi|) &= z^{-1}\left(\varphi(z(|\pi|))\right)\\ &= \frac{\varphi(z(|\pi|))}{\sqrt{1-\varphi(z(|\pi|))^2}}\\ &= \int\limits_{[0,1)} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dF_\varphi(t)\\ &= \int\limits_{[0,\infty)} \lambda\, dF_\varphi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right),\end{aligned}$$

lo anterior haciendo $t = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ y aplicando proposición 8. Es decir

$$\varphi(|\pi|) = \int\limits_{[0,\infty)} \lambda\, dF_\varphi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right). \tag{6}$$

En la demostración de nuestro resultado principal se hace necesario, considerar un conjunto denso en $C_b([0,\infty])$ siendo $[0,\infty] = [0,\infty) \cup \{\infty\}$ la compactación por un punto o compactación de Alexandroff del intervalo $[0,\infty)$, por tal motivo, enunciamos el siguiente resultado debido a los matemáticos Karl Weierstrass y Marshall H. Stone.

Teorema 10. *(Teorema de Stone-Weierstrass)*
Sea X espacio compacto y sea $C(X)$ el álgebra de las funciones continuas complejo valuadas sobre X. Sea A subalgebra de $C(X)$, la cual satisface las siguientes propiedades

1. *Para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*
2. *La función constante $1 \in A$.*
3. *El conjugado de los elementos de A permanece en A.*

Entonces A es un espacio denso en $C(X)$.

Para nuestros argumentos de densidad, consideremos la función $\xi \in C_b([0,\infty])$ definida como

$$\xi(t) := \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \tag{**}$$

Tomemos $\mathcal{P} := \{p(\xi) : p \text{ es un polinomio con coeficientes en } \mathbb{C}\}$, como $\xi \in C[0,\infty]$ entonces $\mathcal{P} \subseteq C[0,\infty]$.

Notemos que la función ξ es estríctamente creciente sobre el intervalo $[0,\infty]$, por tanto separa puntos en este intervalo compacto. De esto concluimos que $\mathcal{P}$ separa puntos de $[0,\infty]$. Además la función constante 1 pertenece a $\mathcal{P}$, en consecuencia, el teorema de Stone-Weierstrass nos dice que el conjunto $\mathcal{P}$ es denso en $C[0,\infty]$.

Por otra parte, sabemos que la función ξ esta acotada por 1 sobre $[0, \infty]$, así para cada $p(t) := \sum_{k=1}^{m} a_k \xi(t)^k \in \mathcal{P}$, tenemos por desigualdad triangular

$$\begin{aligned} |p(t)| &= \left| \sum_{k=1}^{m} a_k \xi(t)^k \right| \leq \sum_{k=1}^{m} |a_k| \, |\xi(t)^k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} |a_k| := M_p, \end{aligned}$$

donde M_p es una constante que depende únicamente de los coeficientes de cada polinimio. Por tanto los elementos de $\mathcal{P}$ son acotados, lo cual nos dice $\mathcal{P} \subset C_b[0, \infty]$. En consecuencia $p(|\pi|) \in B(\mathcal{H})$.

Proposición 16. *Sea $\varphi \in Rep(\mathcal{A}, H)$, F_φ la resolución de la identidad asociada a $\varphi(z(|\pi|))$, esto es*

$$\varphi(z(|\pi|)) = \int_{[0,1]} \lambda \, dF_\varphi(\lambda).$$

si $f \in C[0, \infty]$, entonces

$$\varphi(f(|\pi|)) = \int_{[0,1]} f\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right) dF_\varphi(\lambda).$$

Demostración: Sea $f \in C[0, \infty]$, por proposición 15 tenemos que $\{g(|\pi|) : g \in C[0, \infty)\} \subseteq \mathcal{A}^\eta$, esto quiere decir que $\varphi(f(|\pi|)) = z^{-1}\varphi(z(f(|\pi|)))$ esta bien definida.

Dado que el conjunto $\mathcal{P}$ es denso en $C[0, \infty]$, existe una sucesión de polinomios $\{p_n(\xi)\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a f en $C[0, \infty]$. De esta manera tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0, \infty]} |f(x) - p_n(\xi(x))| \\ &= \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0, \infty]} \left| f(\xi^{-1}(\xi(x))) - p_n(\xi(x)) \right| \\ &= \lim_{n \to \infty} \sup_{t \in [0, 1]} \left| f(\xi^{-1}(t)) - p_n(t) \right| \\ &= \lim_{n \to \infty} \sup_{t \in [0,1]} \left| f\left(\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \right) - p_n(t) \right|, \end{aligned}$$

esto ya que ξ es un homeomorfismo de espacios topológicos con inverso $\xi^{-1} : [0, 1] \to [0, \infty]$ dada por $\xi^{-1}(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$.

Como $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\ \infty]} |f(x) - p_n(\xi(x))| = 0$, además $\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \left| f\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) - p_n(t)\right| = 0$ y φ es un homomorfismo sobre M($\mathcal{A}$) tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi(f(|\pi|)) &= \lim_{n\to\infty} \varphi(p_n(\xi(|\pi|))) = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(p_n\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} p_n\left(\varphi\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} p_n(t)\, dF_\varphi(t) \\
&= \int_{[0,1]} f\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) dF_\varphi(t).
\end{aligned}$$

como queriamos mostrar ■

Proposición 17. *Sea $\varphi \in Rep(\mathcal{A}, H)$, F_φ la resolución de la identidad asociada a $\varphi(z(|\pi|))$. Sea $K_\varphi : \mathfrak{B}[0,\infty) \to B(H)$ definido por $K_\varphi(M) := F_\varphi(\xi(M))$ para todo $M \in \mathfrak{B}[0,\infty)$, donde ξ está definida por la ecuación (**). Entonces*

$$\varphi(|\pi|) = \int_{[0,\ \infty)} \lambda\, dK_\varphi(\lambda).$$

Demostración: Por la definición φ sobre $\mathcal{A}^\eta$ y proposición 8 tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi(|\pi|) &= z^{-1}(\varphi(z(|\pi|))) \\
&= z^{-1}\left(\varphi\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)\right) \\
&= \int_{[0,\ 1)} z^{-1}(t)\, dF_\varphi(t) \\
&= \int_{[0,\ 1)} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dF_\varphi(t) \\
&= \int_{[0,\infty)} \lambda\, dF_\varphi(\xi(\lambda)) \\
&= \int_{[0,\infty)} \lambda\, dK_\varphi(\lambda),
\end{aligned}$$

esto completa la prueba ■

Corolario 4. *Sea $\varphi \in Rep(\mathcal{A}, H)$, entonces para todo $f \in C[0,\infty]$ tenemos $\varphi(f(|\pi|)) = f(\varphi(|\pi|))$.*

Demostración: Sea F_φ la resolución de la identidad asociada a $\varphi(z(|\pi|))$. Por las proposiciones 8, 16 y 17 tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi(f(|\pi|)) &= \int_{[0,\ 1)} f\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right) dF_\varphi(\lambda) \\
&= \int_{[0,\ \infty)} f(t)\, dF_\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \\
&= \int_{[0,\ \infty)} f(t)\, dK_\varphi\,(t)) \\
&= f(\varphi(|\pi|)),
\end{aligned}$$

lo cual deseabamos mostrar ■

Corolario 5. *Sea $\varphi \in Rep(\mathcal{A}, H)$, F_φ la resolución de la identidad asociada a $\varphi(z(|\pi|))$. Luego para todo $f \in C_b[0,\ \infty)$, se satisface $\varphi(f(|\pi|)) = f(\varphi(|\pi|))$.*

Demostración: Sea $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_0([0,\ \infty))$ una unidad aproximada tal que $0 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \leq \cdots \leq 1$ y $\psi(x) = 1$ para todo $x \in [0,\ n]$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x) = 1$ para todo $x \in [0, \infty)$.
Luego para todo $h \in H$ se cumple por teorema de Lebesgue de convergencia monótona

$$\lim_{n\to\infty} \|h - \psi_n(\varphi(|\pi|))h\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\ \infty)} |1-\psi_n(t)|^2\, d\left(K_\varphi\right)_{h,h}(t) = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(f(|\pi|))h &= \lim_{n\to\infty} \varphi\,(f(|\pi|))\ \psi_n(\varphi(|\pi|))h \\
&= \lim_{n\to\infty} \varphi\,(f(|\pi|))\ \varphi(\psi_n(|\pi|))h \\
&= \lim_{n\to\infty} \varphi\big(f(|\pi|)\ \psi_n(|\pi|)\big)h \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_{[0,\infty)} f(t)\psi_n(t)\, dK_\varphi\right) h \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_{[0,\infty)} f(t)\, dK_\varphi\right)\left(\int_{[0,\infty)} \psi_n(t)\, dK_\varphi\right) h \\
&= f(\varphi(|\pi|))h \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición 18. *Sea $\varphi \in Rep(A, H)$, F_φ la resolución de la identidad asociada a $\varphi(z(|\pi|))$, luego para toda función continua $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$, tenemos $\varphi(f(|\pi|)) = f(\varphi(|\pi|))$.*

Demostración: Sea $f \in C([0,\infty))$, entonces por teorema espectral aplicado al operador $\varphi(|\pi|)$ tenemos

$$f(\varphi(|\pi|)) = \int\limits_{[0,\infty)} f(t)dK_\varphi.$$

Por la definición de la representación φ sobre los operadores afiliados a $\mathcal{A}$ y de la proposición 15 tenemos $\varphi(f(|\pi|)) = z^{-1}\varphi\left(\frac{f(|\pi|)}{\sqrt{1+|f(|\pi|)|^2}}\right)$. Por otra parte, como la función $\xi \circ f$ es acotada observamos por el corolario anterior

$$\varphi\left(\frac{f(|\pi|)}{\sqrt{1+|f(|\pi|)|^2}}\right) = \frac{f(\varphi(|\pi|))}{\sqrt{1+|f(\varphi(|\pi|))|^2}},$$

en consecuencia

$$\varphi(f(|\pi|)) = z^{-1}\left(\frac{f(\varphi(|\pi|))}{\sqrt{1+|f(\varphi(|\pi|))|^2}}\right).$$

Además la función $g(t) := \xi^{-1}\left(\frac{f(t)}{\sqrt{1+|f(t)|^2}}\right)$ es continua, así obtenemos

$$\begin{aligned} z^{-1}\left(\frac{f(\varphi(|\pi|))}{\sqrt{1+|f(\varphi(|\pi|))|^2}}\right) &= \int\limits_{[0,\infty)} z^{-1}\left(\frac{f(t)}{\sqrt{1+|f(t)|^2}}\right) dK_\varphi(t) \\ &= \int\limits_{[0,\infty)} z^{-1}\circ z\,(f(t))\,dK_\varphi(t) \\ &= \int\limits_{[0,\infty)} f(t)dK_\varphi(t) \\ &= f(\varphi(|\pi|)), \end{aligned}$$

luego $\varphi(f(|\pi|)) = f(\varphi(|\pi|))$ ■

La proposición 18 no es trivial, ya que la imagen de la funciones continuas no acotadas bajo la representación φ está definida por inversa de la z-transformada y esta no es lineal ni multiplicativa.

Proposición 19. *Sean $\varphi \in Rep(\mathcal{A}, H)$ y $f \in C_b[0,\ \infty)$, entonces*

$$\varphi(U)\varphi(f(|\pi|))\varphi(U^*) = f(q^{\frac{1}{2}}\varphi(|\pi|)) \quad y \quad q^{-\frac{1}{2}}\varphi(U)\varphi(|\pi|)\varphi(U^*) = \varphi(|\pi|).$$

Demostración: Recordemos que $\varphi(|\pi|) = \int\limits_{[0,\ \infty)} t\, dK_\varphi(t)$. Por tanto de la proposición 6

$$\varphi(U)\varphi(|\pi|)\varphi(U^*) = \int\limits_{[0,\ \infty)} t\, d(\varphi(U)K_\varphi\varphi(U^*))(t) \quad \text{y} \quad q^{\frac{1}{2}}\varphi(|\pi|) = \int\limits_{[0,\infty)} q^{\frac{1}{2}} t\, dK_\varphi(t).$$

De esta forma basta mostrar que $\varphi(U)K_\varphi\varphi(U^*)(t) = K_\varphi(q^{-\frac{1}{2}}t)$. Como $U,\ U^*,\ z(|\pi|) \in M(A)$ y φ es una $*$-representación tenemos por la proposición 8 y el corolario 5 que

$$\begin{aligned}
\varphi(U)\varphi(z(|\pi|))\varphi(U^*) &= \varphi\left(U\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}U^*\right) \\
&= \varphi\left(\frac{\sqrt{q}\,|\pi|}{\sqrt{1+q|\pi|^2}}\right) \\
&= \int_{[0,\ \infty)} \frac{\sqrt{q}\,t}{\sqrt{1+qt^2}}\,dK_\varphi \\
&= \int_{[0,\ 1)} \lambda\,dK_\varphi\left(q^{-\frac{1}{2}}\xi^{-1}(\lambda)\right).
\end{aligned}$$

Por otra parte, de la proposición 6 se tiene

$$\begin{aligned}
\varphi(U)\varphi(z(|\pi|))\varphi(U^*) &= \varphi(U)\int_{[0,\ \infty)} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dK_\varphi(t)\,\varphi(U^*) \\
&= \int_{[0,\ \infty)} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,d\left(\varphi(U)K_\varphi\varphi(U^*)\right)(t) \\
&= \int_{[0,1)} \lambda\,d\left(\varphi(U)K_\varphi\varphi(U^*)\right)\left(\xi^{-1}(\lambda)\right).
\end{aligned}$$

Ahora por la unicidad de la resolución espectral, concluimos $\varphi(U)\,K_\varphi\,\varphi(U^*)(\xi^{-1}(\lambda)) = K_\varphi(q^{-\frac{1}{2}}\xi^{-1}(\lambda))$ para todo $\lambda \in [0,\ 1]$. Como ξ^{-1} es un homeomorfismo, obtenemos que sobre $[0,\ \infty)$ se satisface $\varphi(U)K_\varphi\varphi(U^*)(z) = K_\varphi(q^{-\frac{1}{2}}z)$. Luego por el corolario 5, para todo $f \in C_b[0,\ \infty)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi(U)\varphi(f(|\pi|))\varphi(U^*) &= \varphi(U)\int_{[0,\infty)} f(t)\,dK_\varphi(t)\,\varphi(U^*) \\
&= \int_{[0,\ \infty)} f(t)\,d(\varphi(U)\,K_\varphi\,\varphi(U^*))(t) \\
&= \int_{[0,\ \infty)} f(t)\,dK_\varphi(q^{-\frac{1}{2}}t) \\
&= \int_{[0,\ \infty)} f(q^{\frac{1}{2}}\,t)\,dK_\varphi(t) \\
&= \varphi\left(f(q^{\frac{1}{2}}\,|\pi|)\right).
\end{aligned}$$

Observamos además por proposición 18

$$
\begin{aligned}
\varphi(U)\varphi(|\pi|)\varphi(U^*) &= \varphi(U) \int_{[0,\ \infty)} \lambda \, dK_\varphi(\lambda) \ \ \varphi(U^*) \\
&= \int_{[0,\ \infty)} \lambda \, d\Big(\varphi(U)K_\varphi\varphi(U^*)\Big)(\lambda) \\
&= \int_{[0,\ \infty)} \lambda \, dK_\varphi(q^{-\frac{1}{2}}\lambda) \\
&= q^{\frac{1}{2}} \int_{[0,\ \infty)} \lambda \, dK_\varphi(\lambda) \\
&= q^{\frac{1}{2}}\varphi(|\pi|) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Proposición 20. *Sea $\varphi \in Rep(\mathcal{A}, H)$. Entonces $\varphi(\pi) = \varphi(U|\pi|) = \varphi(U)\varphi(|\pi|)$.*

Demostración: Por definición de φ sobre $\mathcal{A}^\eta$ se satisface

$$\varphi(\pi) = \varphi(U|\pi|) = z^{-1}(\varphi(z(U|\pi|))) = z^{-1}\left(\varphi\left(U|\pi|\frac{1}{\sqrt{1+|\varphi|^2}}\right)\right),$$

como $U, z(|\pi|) \in M(\mathcal{A})$ podemos afirmar por proposición 18 que

$$
\begin{aligned}
\varphi(U|\pi|) &= z^{-1}\left(\varphi(U)\varphi\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)\right) \\
&= \varphi(U)\varphi\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\varphi\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)\varphi(U)^*\varphi(U)\varphi\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)}} \\
&= \varphi(U)\varphi\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\varphi\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)^2}} \\
&= \varphi(U)\int_{[0,\infty)} \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \, dK_\varphi(\lambda) \int_{[0,\ \infty)} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}}} \, dK_\varphi(\lambda) \\
&= \varphi(U)\int_{[0,\infty)} \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}}} \, dK_\varphi(\lambda) \\
&= \varphi(U)\int_{[0,\infty)} \lambda dK_\varphi(\lambda) \\
&= \varphi(U)\varphi(|\pi|),
\end{aligned}
$$

lo cual deseabamos mostrar ■

Veamos que F_φ induce una partición de H de forma muy parecida a la inducida por E en el capítulo 2. Recordamos que la función $\xi : [0,\infty) \to [0,\ 1)$ está dada por $\xi(t) := \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, luego tenemos que ξ es una función estrictamente creciente. Además

$$\xi[q^{\frac{n+1}{2}}, q^{\frac{n}{2}}) = \left[\frac{q^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{1+q^{n+1}}}, \frac{q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+q^n}}\right)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Como la colección $\{[q^{\frac{n+1}{2}}, q^{\frac{n}{2}})\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forma una partición de $(0,\infty)$, entonces la colección $\left\{\left[\frac{q^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{1+q^{(n+1)}}}, \frac{q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+q^n}}\right)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una partición de $(0,\ 1)$ y por las propiedades de F_φ como medida espectral tenemos que

$$H = \operatorname{Ker} \varphi(z(|\pi|)) \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} F_\varphi \left[\frac{q^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{1+q^{(n+1)}}}, \frac{q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+q^n}}\right) H. \tag{7}$$

Nuestro siguiente propósito será dar una clasificacion de Rep $(\mathcal{A}, H)$. Para esto trataremos de ser fieles a la construcción realizada en el capítulo 2. En este sentido, ya hemos mostrado que

$$\varphi(|\pi|) = q^{-\frac{1}{2}}\varphi(U)\varphi(|\pi|)\varphi(U^*).$$

Sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que $\operatorname{Ker} \varphi(z(|\pi|)) = \{0\}$. Los siguientes resultados están enfocados a evidenciar la acción del operador $\varphi(U)$ como un *desplazamiento* o *shift* sobre los elementos que conforman la partición de H dada en la ecuación (7).

Lema 16. *Para toda $\varphi \in Rep(\mathcal{A}, H)$, la resolución espectral F_φ asociada a $\varphi(z(|\pi|))$, satisface sobre* $[0, 1)$ *que*

$$\varphi(U)F_\varphi\varphi(U^*)\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) = F_\varphi\left(\frac{q^{-\frac{1}{2}}\lambda}{\sqrt{1+q^{-1}\lambda^2}}\right).$$

Demostración: Sabemos por ecuación (6) que $\varphi(|\pi|) = \int_{[0,\infty)} \lambda\, dF_\varphi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)$. Como $\varphi(U)$ es un operador unitario y aplicando la proposición 19 tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\varphi(|\pi|) &= q^{-\frac{1}{2}}\varphi(U)\varphi(|\pi|)\varphi(U^*) \\
&= q^{-\frac{1}{2}}\varphi(U) \int_{[0,\infty)} \lambda\, dF_\varphi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) \varphi(U^*) \\
&= \int_{[0,\infty)} q^{-\frac{1}{2}}\lambda\, d\Big(\varphi(U)F_\varphi\varphi(U^*)\Big)\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) \\
&= \int_{[0,\infty)} t\, d\Big(\varphi(U)F_\varphi\varphi(U^*)\Big)\left(\frac{q^{\frac{1}{2}}t}{\sqrt{1+qt^2}}\right),
\end{aligned}$$

donde la última igualdad la obtenemos haciendo $t = q^{-\frac{1}{2}}\lambda$. Por la unicidad de la resolución de la identidad tenemos que

$$\varphi(U)F_{\varphi}\varphi(U^*)\left(\frac{q^{\frac{1}{2}}\lambda}{\sqrt{1+q\lambda^2}}\right) = F_{\varphi}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right).$$

De donde se concluye

$$\varphi(U)F_{\varphi}\varphi(U^*)\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) = F_{\varphi}\left(\frac{q^{-\frac{1}{2}}\lambda}{\sqrt{1+q^{-1}\lambda^2}}\right) \quad \blacksquare$$

Lema 17. *Sea $\varphi \in Rep(\mathcal{A}, H)$ y F_{φ} la resolución de la identidad asociada a $\varphi(z(|\pi|))$. Entonces para todo intervalo de la forma $\left[\frac{q^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{1+q^{(n+1)}}}, \frac{q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+q^n}}\right) \subseteq [0,1)$, se cumple que*

$$F_{\varphi}\left(\left[\frac{q^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{1+q^{(n+1)}}}, \frac{q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+q^n}}\right)\right) = \varphi(U)F_{\varphi}\left(\left[\frac{q^{\frac{n+2}{2}}}{\sqrt{1+q^{(n+2)}}}, \frac{q^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{1+q^{n+1}}}\right)\right)\varphi(U^*).$$

Demostración: Observamos que, por el lema 11 se cumple

$$\begin{aligned}
F_{\varphi}\left(\left[\frac{q^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{1+q^{(n+1)}}}, \frac{q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+q^n}}\right)\right) &= \int\limits_{\left[\frac{q^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{1+q^{(n+1)}}}, \frac{q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+q^n}}\right)} dF_{\varphi}(\lambda) \\
&= \int\limits_{[q^{n+1}, q^n)} dF_{\varphi}\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}\right) \\
&= \int\limits_{[q^{n+1}, q^n)} d\Big(\varphi(U)F_{\varphi}\varphi(U^*)\Big)\left(\frac{q^{\frac{1}{2}}\sqrt{t}}{\sqrt{1+qt}}\right) \\
&= \varphi(U)\left(\int\limits_{\left[\frac{q^{\frac{n+2}{2}}}{\sqrt{1+q^{(n+2)}}}, \frac{q^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{1+q^{n+1}}}\right)} d\Big(F_{\varphi}\Big)(t)\right)\varphi(U^*) \\
&= \varphi(U)F_{\varphi}\left(\left[\frac{q^{\frac{n+2}{2}}}{\sqrt{1+q^{(n+2)}}}, \frac{q^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{1+q^{n+1}}}\right)\right)\varphi(U^*).
\end{aligned}$$

Lo anterior haciendo los cambios de variable $\lambda = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}$ y $t = \frac{\sqrt{qt}}{\sqrt{1+qt}}$. Esto completa la prueba $\blacksquare$

El siguiente resultado expone la recurrencia inducida por los operadores $\varphi(U)$ y $\varphi(U^*)$.

Proposición 21. *Sea $\varphi \in Rep(\mathcal{A}, H)$ y F_φ la resolución de la identidad asociada a $\varphi(z(|\pi|))$. Entonces*

$$\varphi(U) : F_\varphi\left[\frac{q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+q^n}}, \frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{1+q^{n-1}}}\right)H \to F_\varphi\left[\frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{1+q^{n-1}}}, \frac{q^{\frac{n-2}{2}}}{\sqrt{1+q^{n-2}}}\right)H,$$

es un isomorfismo isométrico con inverso

$$\varphi(U^*) : F_\varphi\left[\frac{q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+q^n}}, \frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{1+q^{n-1}}}\right)H \to F_\varphi\left[\frac{q^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{1+q^{n+1}}}, \frac{q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+q^{n}}}\right)H.$$

Demostración: Sea $h \in F_\varphi\left[\frac{q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+q^n}}, \frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{1+q^{n-1}}}\right)H$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(U)h &= \varphi(U)F_\varphi\left[\frac{q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+q^n}}, \frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{1+q^{n-1}}}\right)\varphi(U)^*\varphi(U)h \\
&= F_\varphi\left[\frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{1+q^{n-1}}}, \frac{q^{\frac{n-2}{2}}}{\sqrt{1+q^{n-2}}}\right)\varphi(U)h \\
&\in F_\varphi\left[\frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{1+q^{n-1}}}, \frac{q^{\frac{n-2}{2}}}{\sqrt{1+q^{n-2}}}\right)H,
\end{aligned}$$

Donde la última relación se satisface porque $\varphi(U)h \in H$. De forma análoga se muestra que para todo $h \in F_\varphi\left[\frac{q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+q^n}}, \frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{1+q^{n-1}}}\right)H$ se cumple que $\varphi(U)^*h \in F_\varphi\left[\frac{q^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{1+q^{n+1}}}, \frac{q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+q^n}}\right)H$ ■

Por corolario 3 se deduce que para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tiene $U^k \in \mathrm{M}(\mathcal{A})$. En la partición inducida por F_φ sobre H, llamemos

$$F_n := F_\varphi\left[\frac{q^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{1+q^{n+1}}}, \frac{q^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+q^n}}\right)H$$

Luego podemos dar, análogamente al capítulo 2, una clasificación de *-representaciones de la C^*-álgebra $\mathcal{A}$ sobre H como se afirma a continuación.

Teorema 11. *(Clasificación de Rep $(\mathcal{A}, H)$)*
Sea $\varphi \in Rep(\mathcal{A}, H)$, F_φ la resolución de la identidad asociada a $\varphi(z(|\pi|))$ y F_n los subespacios cerrados que conforman la partición de H inducida por F_φ. Entonces existe un operador positivo A_φ que cumple

$$\varphi(|\pi|) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{n}{2}}\varphi(U)^{*n}A_\varphi\, \varphi(U)^n.$$

sobre $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} F_n$. Además φ está determinada por

$$\varphi\left(\sum_{k=m}^{n} f_k(|\pi|)U^k\right) = \sum_{k=m}^{n} f_k(\varphi(|\pi|))\, \varphi(U)^k,$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$ *y* $f_k \in C_0[0,\infty)$ *para todo* $m \leq k \leq n$.

Demostración: Por la proposición 16 y la definición de $\mathcal{A}$, toda $\varphi \in \text{Rep}(\mathcal{A}, H)$ satisface

$$\varphi(z(|\pi|)) = \int_{[0,1]} \lambda \, dF_\varphi(\lambda).$$

Definamos $A_\varphi = \int_{[\sqrt{q},1)} t \, dF_\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$. Ahora sea $h_n \in F_n$ para cierto $n \in \mathbb{Z}$. Entonces existe un único $v \in F_0$ que cumple $v = \varphi(U)^n h_n$. Luego tenemos que $h_n = \varphi(U)^* h_{n-1} = \varphi(U)^{*n} v$.

Observemos que por ecuación (6) y lema 16 que

$$\begin{aligned}
\varphi(|\pi|)h_n &= \varphi(|\pi|)\varphi(U)^{*n}\, v \\
&= \varphi(U)^{*n}\,(\varphi(U)^n \varphi(|\pi|)\varphi(U)^{*n}\,)\, v \\
&= \varphi(U)^{*n}\left(\varphi(U)^n \int_{[0,\infty)} t\, dF_\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\varphi(U)^{*n}\right) v \\
&= \varphi(U)^{*n} \int_{[0,\infty)} t\, d(\varphi(U)^n F_\varphi \varphi(U)^{*n})\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) F_\varphi\left[\frac{q^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+q}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) v \\
&= \varphi(U)^{*n} \int_{[0,\infty)} t\, dF_\varphi\left(\frac{q^{-\frac{n}{2}} t}{\sqrt{1+q^{-n}t^2}}\right) \int_{[\sqrt{q},1)} dF_\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) v \\
&= \varphi(U)^{*n} \int_{[0,\infty)} q^{\frac{n}{2}} t\, dF_\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \int_{[\sqrt{q},1)} dF_\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) v \\
&= \varphi(U)^{*n} \int_{[0,\infty)} q^{\frac{n}{2}} t\, X_{[\sqrt{q},1)}(t)\, dF_\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) v \\
&= q^{\frac{n}{2}}\varphi(U)^{*n} \int_{[\sqrt{q},1)} t\, dF_\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) v \\
&= q^{\frac{n}{2}}\varphi(U)^{*n} A_\varphi\, \varphi(U)^n\, h.
\end{aligned}$$

Lo anterior pues $v \in F_0$. Hemos demostrado así que

$$\varphi(|\pi|) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{n}{2}}\varphi(U)^{*n} A_\varphi\, \varphi(U)^n.$$

La afirmación $\varphi\left(\sum_{k=m}^{n} f_k(|\pi|)U^k\right) = \sum_{k=m}^{n} f_k(\varphi(|\pi|))\, \varphi(U)^k$, se sigue por el corolario 4 y el hecho de que $U^k \in \text{M}(\mathcal{A})$ ■

5. Un álgebra C^* generada según Woronowicz por el plano complejo cuántico

A continuación presentamos algunos resultados adicionales de la teoría de Woronowicz que necesitamos para nuestro trabajo.

Definición 30. *Sea H un espacio de Hilbert. Sean A y B álgebras C^*, tales que $B \in C^*(H)$. Decimos que ϕ es un morfismo de A en B, si $\phi \in Rep(A, H)$ y $\phi(A)B$ es denso en B. El conjunto de todos los morfismos de A en B será denotado por $Mor(A, B)$.*

Lema 18. *Sean A y B álgebras C^* y H un espacio de Hilbert. Conforme a la notación anterior se cumple que:*

1. *$Rep(A, H) = Mor(A, CB(H))$.*
2. *Para todo $\phi \in Mor(A, B)$, se tiene que si $T \in A^\eta$ entonces $\phi(T) \in B$.*

Definición 31. *Sea A un álgebra C^* y $T_1, \ldots, T_n$ elementos afiliados con A. Decimos que A está generada por $T_1, \ldots, T_n$, según Woronowicz, si para todo espacio de Hilbert H, toda $B \in C^*(H)$ y toda $\phi \in Rep(A, H)$, se tiene que: Si $\phi(T_i) \in B^\eta$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces $\phi \in Mor(A, B)$.*

El siguiente resultado, es la pieza fundamental en el obtención de nuestro resultado.

Teorema 12. *Sea A una álgebra C^* y $T_1, \ldots, T_n$ elementos afiliados con A. El subconjunto de $M(A)$, compuesto por todos los elementos de la forma $(1 + T_i^* T_i)^{-1}$ y $(1 + T_i T_i^*)^{-1}$ para $i = 1, \ldots, n$, será notado por Γ. Si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$T_1, \ldots, T_n$ separan representaciones de A, es decir, si $\varphi_1, \varphi_2 \in Rep(A, H)$ y $\varphi_1 \neq \varphi_2$, entonces $\varphi_1(T_i) \neq \varphi_2(T_i)$ para algún $i = 1, \ldots, n$*
2. *Existen elementos $r_1, \ldots, r_m \in \Gamma$ tales que $r_1 \cdots r_m \in A$*

Entonces A está generada según Woronowicz por $T_1, \ldots, T_n$.

El estudio hasta aquí realizado va enfocado la obtención de la esfera a partir del cilindro. Dado que la C^*-álgebra

$$\mathcal{A} = \overline{\left\{ \sum_{k=m}^{n} f_k(|\pi|)U^k : \ m \leq n, \ m, n \in \mathbb{Z}, \ f_k \in C_0([0, \infty)) \right\}}.$$

se puede interpretar como una deformación del cilindro, el logro principal de este trabajo es mostrar que este álgebra se obtiene a partir de nuestra representación del plano complejo cuántico dada por el operador $\pi : D \to \mathcal{H}$ sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L_2[0, \infty)$. Disponemos hasta aquí de resultados suficientes para demostrar nuestro teorema principal.

Teorema 13. *La representación de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ sobre $\mathcal{H} = (L_2[0,\infty),\ \mathfrak{B}[0,\infty),\ \mu)$ dada por π genera, en el sentido de Woronowicz, a la C^*-álgebra $\mathcal{A}$.*

Demostración: Por corolario 3 sabemos que $\pi \in \mathcal{A}^\eta$. Veamos ahora que π separa representaciones de $\mathcal{A}$. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Rep}(\mathcal{A}, H)$ elementos tales que $\varphi_1(\pi) = \varphi_2(\pi)$. Sabemos que $\varphi_i(\pi) := z^{-1}(\varphi_i(z(\pi)))$, de esta forma se deduce que

$$\varphi_1\left(\pi\frac{1}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right) = \varphi_2\left(\pi\frac{1}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right). \tag{8}$$

Sabemos que $\pi = U|\pi|$, entonces

$$\pi\frac{1}{\sqrt{1+|\pi|^2}} = U\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}} = Uz(|\pi|).$$

Del corolario 3 tenemos que $z(|\pi|) \in \mathrm{M}(A)$, además como U es un elemento en $\mathrm{M}(A)$, luego para $i \in \{1,\ 2\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi_i\left(\pi\frac{1}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right) &= \varphi_i\left(U\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)\\
&= \varphi_i(U)\,\varphi_i\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right).
\end{aligned}$$

Como φ_i es un *-homomorfismo sobre $\mathrm{M}(\mathcal{A})$ tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi_i(U)\varphi_i(U)^* &= \varphi_i(U)\varphi_i(U^*) = \varphi_i(UU^*)\\
&= \varphi_i(I) = I\\
&= \varphi_i(U^*U) = \varphi_i(U)\varphi_i(U^*)\\
&= \varphi_i(U)^*\varphi_i(U),
\end{aligned}$$

esto es $\varphi_i(U)$ es un operador unitario. Además como $z(|\pi|)^* = z(|\pi|^*) = z(|\pi|)$, luego

$$\begin{aligned}
\varphi_i\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)^2 &= \varphi_i\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)\varphi_i(U^*U)\,\varphi_i\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)\\
&= \varphi_i\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)\varphi_i(U)^*\,\varphi_i(U)\,\varphi_i\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)\\
&= \left[\varphi_i(U)\varphi_i\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)\right]^*\left[\varphi_i(U)\varphi_i\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)\right]\\
&= \left[\varphi_i\left(\pi\frac{1}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)\right]^*\left[\varphi_i\left(\pi\frac{1}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)\right].
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\varphi_i\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right) = \left|\varphi_i\left(\pi\frac{1}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)\right|.$$

Así el operador $\varphi_i\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right)$ es positivo. De la ecuación (8) tenemos

$$\varphi_1(U)\varphi_1\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right) = \varphi_1\left(\pi\frac{1}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right) = \varphi_2\left(\pi\frac{1}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right) = \varphi_2(U)\varphi_2\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right).$$

Como la descomposición polar es única, los anteriores argumentos sobre φ_1, φ_2 implican que

$$\varphi_1(U) = \varphi_2(U) \quad \text{y} \quad \varphi_1\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right) = \varphi_2\left(\frac{|\pi|}{\sqrt{1+|\pi|^2}}\right). \tag{9}$$

Notemos que $\xi(|\pi|) = z(|\pi|)$, luego por el corolario 3 tenemos $\xi(|\pi|) \in M(\mathcal{A})$. Como este espacio es una subálgebra de $B(H)$, tenemos que para cada $p(\xi) \in \mathcal{P}$, $p(\xi(|\pi|)) \in M(A)$, donde

$$\mathcal{P} := \{p(\xi) : p \text{ es un polinomio con coeficientes en } \mathbb{C}\}.$$

En consecuencia tiene sentido considerar la imagen de $p(\xi(|\pi|))$ a través de φ_i. Además sabemos que $\mathcal{P}$ es un subconjunto denso en $C_b[0,\infty]$. Sea $f \in C_b[0,\infty]$, por tanto existe una sucesión $\{p_n(\xi)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}$ tal que $p_n(\xi)(t)$ converge en $C_b[0,\infty]$ a f. Aplicando convergencia uniforme sobre compactos tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} p_n(\xi(|\pi|)) &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\ \infty)} p_n(\xi(\lambda))\, dE(\lambda) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\ \infty]} p_n(\xi(\lambda))\, dE(\lambda) \\
&= \int_{[0,\ \infty]} \lim_{n\to\infty} p_n(\xi(\lambda))\, dE(\lambda) \\
&= \int_{[0,\ \infty]} f(\lambda)\, dE(\lambda) \\
&= f(|\pi|),
\end{aligned}$$

donde $|\pi| = \int_{[0,\infty)} \lambda\, dE(\lambda)$. Como las representaciones φ_i son continuas y lineales sobre $M(A)$, tenemos

$$\varphi_i\left(f(|\pi|)\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi_i\left(p_n(\xi(|\pi|))\right) = \lim_{n\to\infty} p_n\left(\varphi_i(\xi(|\pi|))\right).$$

Por tanto para cada $f \in C_b[0,\infty]$ se satisface que existe una sucesión de polinimios p_n tales que

$$\varphi_i\left(f(|\pi|)\right) = \lim_{n\to\infty} p_n\left(\varphi_i(\xi(|\pi|))\right). \tag{10}$$

De esta forma por la ecuación (10) se cumple que

$$\begin{aligned}\varphi_1\left(f(|\pi|)\right) &= \lim_{n\to\infty} p_n\left(\varphi_1(\xi(|\pi|))\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} p_n\left(\varphi_2(\xi(|\pi|))\right)\\ &= \varphi_2\left(f(|\pi|)\right).\end{aligned}$$

Como $\varphi_1(U) = \varphi_2(U)$ y $\varphi_1\left(f(|\pi|)\right) = \varphi_2\left(f(|\pi|)\right)$, concluimos que $\varphi_1(c) = \varphi_2(c)$ para todo $c \in C$. Ahora para cada $a \in \mathcal{A}$, existe $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ tal que

$$a = \lim_{n\to\infty} c_n$$

y por la continuidad de las representaciones $\varphi_1,\ \varphi_2$

$$\begin{aligned}\varphi_1(a) &= \lim_{n\to\infty} \varphi_1(c_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi_2(c_n)\\ &= \varphi_2(a).\end{aligned}$$

Es decir, $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Hemos así demostrado que π separa representaciones. Luego la C^*-álgebra $\mathcal{A}$ está generada según Woronowicz por π por el teorema 12, ya que separa representaciones y $\frac{1}{1+\pi^*\pi} \in \mathcal{A}$ ■

Bibliografía

[1] K. Davidson, C^*-Algebras by examples. American Mathematical Society, Providence, 1996.

[2] J. Dixmier, Les C^*-algébres et leurs representations. Gauthier Villars, Paris, 1967.

[3] R. Douglas. Banach algebra techniques in operator theory. Academic Press, Texas, 1972.

[4] N. Dunford, J. Schwartz, Linear operators: Spectral theory. Wiley, New York, 1988.

[5] R. Kadison, J. Ringrose, Fundamentals of the theory of operator algebras. American Mathematical Society, Providence, 1992.

[6] K. Klimyk, K. Schmüdgen, Quantum groups and theory representations. Springer, Berlin, 1997.

[7] E. Kreyszig, Introductory analysis functional with applications. Wiley, Toronto, 1989.

[8] J. R. Munkres, Topology. Prentice Hall, Cambridge, 2000.

[9] G. Pedersen, Analysis Now. Springer, New York, 1989.

[10] G. Pedersen, C^*-algebras and their automorphism groups. Academic Press, London, 1979.

[11] M. Reed, B. Simon, Methods of modern mathematical physics. Academic Press, San Diego, 1980.

[12] W. Rudin, Functional analysis. McGraw-Hill, Singapore, 1991.

[13] W. Rudin, Principles of mathematical analysis. McGraw-Hill, California, 1953.

[14] M. Stone, Linear transformations in Hilbert spaces and their applications to analysis. AMS. Colloquium Publications, 1932.

[15] J. Von Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Functionaloperatoren. Rev. Math. Ann. 102, 1929.

[16] E. Wagner, I. Cohen, A quantum 2-sphere generated by the quantum complex plane. En preparación.

[17] S. Woronowicz, C^*-algebras generated by unbounded elements. Reviews in Mathematical Physics, Volume 7, 1995.