LOS Ψ-ESPACIOS

Mario Arciga Alejandre

Asesor de Tesis: Dr. Michael Hrušák

06-2005

*

Agradecimientos

Agradezco de forma muy especial a mis padres,

Maria Guadalupe Alejandre Hernández,
Patricio Arciga Razo,

por su apoyo incondicional y la entereza transmitida.

Por supuesto, agradezco también la enorme paciencia de mi asesor,

Michael Hrušák.

Y finalmente quiero agradecer a mis profesores[1],

Gerardo Tinóco Ruiz,
Maria Luisa Pérez Seguí,
Salvador García Ferreira,

por tantos conocimientos que he aprendido de ellos a lo largo de mi formación académica.

Mario Arciga Alejandre
Morelia, Michoacán, verano del 2005.

[1]estricto orden alfabético

Índice general

Introducción

EL PRESENTE TRABAJO tiene por objetivo mostrar la versatilidad que los Ψ-espacios tienen, principalmente, en temas de la topología general. Prácticamente no existe un compendio de resultados elementales, de forma más o menos ordenada, acerca de las familias casi ajenas y los Ψ-espacios, este hecho motiva aun más el que se haya escogido este interesante tema para tesis. Sirviendo de este modo (es lo que se pretende) como un buen acercamiento a tales temas, que además, son punto de partida de técnicas modernas de la teoría de conjuntos como lo es la combinatoria infinita. El tema de los Ψ-espacios es demasiado extenso y por lo tanto imposible de presentarlo de forma caval en un trabajo como este. Nos centraremos básicamente en dos asuntos; el teorema de Simon del primer capítulo junto con su consecuencia (el capítulo 4) y los hiperespacios de Ψ-espacios en el capítulo 5, concretamente nos interesa la pseudocompacidad de estos hiperespacios.

Ya sea para dar un ejemplo de cierto espacio topológico usando familias casi ajenas maximales (MAD), contra-ejemplos o ayudando en la construcción de algún resultado, las familias casi ajenas se presentan como una perfecta herramienta para su solución, en muchos de los casos de bella simplicidad.

Esta tesis se basa principalmente en los artículos [12], [13] y otro próximo en publicarse cuyo autor es el asesor de esta tesis. No hay resultado alguno, original de mi parte, en este trabajo. El único mérito (si es que lo hay) es el haber escrito las demostraciones de forma asequible para un mayor número de posibles interesados en estos temas.

Para entender la totalidad de la presente tesis no se presuponen conocimientos que van más allá de los cursos básicos de teoría de conjuntos y topología que cualquier alumno pude tomar en la carrera de matemáticas de nivel licenciatura, aun así, he incluido varias de las definiciones y resultados conocidos en el apéndice (incluidas algunas demostraciones de

los resultados cuya prueba no es demasiado técnica o poco ilustrativa) al final de los 5 capítulos que componen este trabajo. Quizás, el concepto menos familiar es el de los cardinales pequeños no numerables como $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{h}$ y $non(\mathcal{M})$ que aparecen en la parte final del último capítulo. Incluí un pequeño apartado en el apéndice A dedicado a estos cardinales.
He tratado de presentar las demostraciones de los resultados aquí expuestos de la manera más clara y detallada posible. Al avanzar en el contenido, reviso cada resultado por sencillo que este sea, inclusive en algunos casos repitiendo argumentos anteriores, para que en lo posible, el lector no se detenga a verificar afirmaciones por su cuenta. Ocasionalmente aparecen notas al pie, algunas veces para hacer un comentario al respecto, pero en la mayoría de las veces para aclarar alguna afirmación hecha durante cierta demostración.

La tesis se compone de 5 capítulos;

En el primer capítulo se introduce el concepto de familia casi ajena como punto de partida para prácticamente todo lo posterior, nos interesaremos de forma especial en las familias casi ajenas maximales. Veremos una forma más fuerte del teorema de Ramsey de la combinatoria infinita donde aparecen las familias casi ajenas maximales y finalmente presentamos el teorema de Simon, teorema que nos servirá para el resultado principal del capitulo 4.

En el segundo capítulo hablamos de los Ψ-espacios, construidos a partir de familias casi ajenas, y de algunas propiedades topológicas que nos interesarán para los capítulos que siguen.

En el capítulo 3 está dedicado al problema de Moore, problema considerado por más de 50 años el más importante de la topología general, hablaremos de los espacios de Moore y algunos resultados en ZFC que tienen que ver con la respuesta a este problema.

Para el capítulo 4, como una consecuencia del teorema de Simon del primer capítulo, presentamos el ejemplo de un espacio Hausdorff, compacto y Fréchet cuyo cuadrado no es Fréchet.

El capítulo 5 es el más extenso y el objetivo es complementar la respuesta parcial que hay a una pregunta acerca los hiperespacios, concretamente la pregunta que Ginsburg hizo por el año 1975 fue: *¿Hay alguna relación entre la pseudocompacidad de los espacios* $X^\omega, X, X^2, \ldots$ *y la pseudocompacidad del hiperespacio* $exp(X)$, lo que se hace en este capítulo es probar que es consistente la existencia de un X, tal que X^ω es pseudocompacto y el hiperespacio $exp(X)$ no lo es (teorema 5.31). También es consistente la existencia de un espacio X donde ambos; X^ω y $exp(X)$ son pseudocompactos (teorema 5.24).

Al final de estos capítulos hay dos apéndices, en los cuales encontrará nociones básicas de la teoría de conjuntos y de la topología que ocuparemos a lo largo de la tesis.

𝔗 Mario Arciga Alejandre
27-06-2005

Capítulo 1

Combinatoria de las Familias Casi Ajenas.

YA desde este capítulo haremos notar en las ultimas dos secciones lo útiles que resultan las familias casi ajenas para obtener resultados de la teoría de conjuntos, después del capítulo 2 veremos además cómo estas familias son la base de varios resultados interesantes de la topología general.

En las primeras dos secciones veremos algunas de las propiedades más básicas de las familias casi ajenas que necesitaremos, quizás debería revisar el apéndice para recordar ciertas nociones elementales de la teoría de conjuntos como lo son los filtros e ideales que serán tratados a lo largo de este capítulo.

1.1. Preliminares

Notación 1.1 *Sea X un conjunto y κ un número cardinal, denotaremos por $[X]^\kappa$ y $[X]^{<\kappa}$ a los conjuntos de todos los subconjuntos de X con cardinal igual y menor que κ respectivamente, esto es,*

$$[X]^\kappa := \{Z \subseteq X : |Z| = \kappa\}, \ \ [X]^{<\kappa} := \{Z \subseteq X : |Z| < \kappa\}.$$

Notación 1.2 *Sean A, B conjuntos, decimos que A* ***está casi contenido en*** *B si $|A \setminus B| < \omega$, en este caso escribimos $A \subseteq^* B$, $A =^* B$ denota el hecho de que $A \subseteq^* B$ y $B \subseteq^* A$.*

Definición 1.3 *Decimos que $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es una* **Familia Casi Ajena**[1] (**AD**[2]) *si $|\mathcal{A}| \geq \omega$ y para todo par de elementos X, Y distintos de $\mathcal{A}$ se tiene que $|X \cap Y| < \omega$.*

Una forma sencilla de construir una familia casi ajena es como sigue (para una función $f : A \to B$ y un $X \subseteq A$ denotamos por $f[X]$ al conjunto imagen de X, esto es, $f[X] = \{b \in B : \text{existe } x \in X \text{ tal que } f(x) = b\}$):

Ejemplo 1.4 *La familia $\mathcal{A} = \{f[\mathbb{Q} \cap [i, i+1)] : i \in \mathbb{Z}\} \subseteq [\omega]^\omega$ es una familia casi ajena, donde $f : \mathbb{Q} \to \omega$ es cualquier función biyección, $[i, i+1) = \{r \in \mathbb{R} : i \leq r < i+1\}$. De hecho, la intersección de cada par distinto de elementos de $\mathcal{A}$ es vacía.*

La siguiente es notación estándar de conjuntos asociados a una familia casi ajena.

Definición 1.5 *Sea $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia AD y sea $X \in [\omega]^\omega$ definamos los siguientes conjuntos.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \restriction X &= \{A \cap X : A \in \mathcal{A} \ \ y \ \ |A \cap X| = \omega\}. \\
\mathcal{I}(\mathcal{A}) &= \{Y \in \mathcal{P}(\omega) : \ \textit{existe } \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \textit{ finito tal que } Y \subseteq^* \bigcup \mathcal{B}\}. \\
\mathcal{I}^+(\mathcal{A}) &= \mathcal{P}(\omega) \setminus \mathcal{I}(\mathcal{A}). \\
\mathcal{I}^{++}(\mathcal{A}) &= \{X : |\mathcal{A} \restriction X| \geq \omega\}. \\
\mathcal{I}^*(\mathcal{A}) &= \{X : \omega \setminus X \in \mathcal{I}(\mathcal{A})\}.
\end{aligned}$$

Si $f : A \to B$ es una función y $Z \subseteq A$, entonces definimos la función $f \restriction Z : Z \to B$ como $(f \restriction Z)(x) = f(x)$ para toda $x \in Z$. Ésta es la función f restringida al conjunto Z.

Observación 1.6 *Si $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia AD entonces $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ es un ideal basado en ω. Y por lo tanto $\mathcal{I}^*(\mathcal{A})$ es un filtro en ω, además por ser $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ un ideal, $\omega \setminus X \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$ implica $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ por lo que $\mathcal{I}^*(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia AD. $\emptyset \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$, $\omega \notin \mathcal{I}(\mathcal{A})$ pues el vacío es casi contenido en cualquier conjunto y la unión finita de elementos de $\mathcal{A}$ nunca puede ser ω por ser $\mathcal{A}$ familia casi ajena. Si $X, Y \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$

[1] Ésta es la definición más importante de toda la tesis, prácticamente en todos los teoremas aquí presentados aparecerá alguna familia casi ajena.

[2] Del inglés almost disjoint.

entonces existen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ subconjuntos finitos de $\mathcal{A}$ que casi cubren[3] a X y Y respectivamente, es claro que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ casi cubre a $X \cup Y$, así que $X \cup Y \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Si $X \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$ y $Y \subseteq X$ el mismo $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ que casi cubre a X, casi cubre a Y, de modo que $Y \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Esto demuestra que $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ es un ideal basado en ω. $\mathcal{I}^*(\mathcal{A})$ es un filtro basado en ω pues es el dual del que hemos demostrado que es un ideal $\mathcal{I}(\mathcal{A})$. Si $\omega \setminus X \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$ y suponemos que $X \notin \mathcal{I}^+(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\omega) \setminus \mathcal{I}(\mathcal{A})$ entonces $X \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$ y como $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ es un ideal entonces $\omega = \omega \setminus X \cup X \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$, contradicción!, así que $\mathcal{I}^*(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$. ☑

Proposición 1.7 *Para cada $\mathcal{A}$ familia AD, $\bigcap \mathcal{I}^*(\mathcal{A}) = \emptyset$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ familia AD. Todo conjunto finito de ω esta en $\mathcal{I}(\mathcal{A})$, así que todos los cofinitos están en $\mathcal{I}^*(\mathcal{A})$, pero la intersección de estos cofinitos es vacía, en particular $\bigcap_{n\in\omega}(\omega \setminus n) = \emptyset$, entonces $\bigcap \mathcal{I}^*(\mathcal{A}) = \emptyset$. ☑

Corolario 1.8 *Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ que extiende al filtro $\mathcal{I}^*(\mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es una familia AD, es un ultrafiltro libre.*

Demostración. $\mathcal{U}$ es ultrafiltro libre si y sólo si $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$ y $\bigcap \mathcal{U} \subseteq \bigcap \mathcal{I}^*(\mathcal{A}) = \emptyset$. ☑

1.2. Propiedades elementales acerca de las familias AD

Proposición 1.9 *Existe una familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ AD tal que $|\mathcal{A}| = 2^\omega$.*

Demostración. Para cada $r \in \mathbb{R}$ sea $A_r = \{q_n^r : n \in \omega\}$ una sucesión estrictamente creciente de números racionales que converja a r[4]. Como $|\mathbb{Q}| = \omega$ existe $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \omega$ biyección, entonces $\mathcal{A} = \{g[A_r] : r \in \mathbb{R}\}$ es una familia AD. En efecto, si $g[A_{r_1}], g[A_{r_2}] \in \mathcal{A}$ con $r_1 \neq r_2$, como $\mathbb{R}$ es T_2 existen U_{r_1}, U_{r_2} vecindades ajenas de $r_1,\ r_2$ respectivamente. Entonces $A_{r_i} \setminus U_{r_i}$ es

[3] Decimos que una familia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ casi cubre a $Y \subseteq X$ si $Y \subseteq^* \bigcup \mathcal{B}$.

[4] Hemos usado aquí el axioma de elección; cada $r \in \mathbb{R}$ determina un conjunto, el conjunto de sucesiones estrictamente crecientes de números racionales que convergen a éste r, claro es que cada uno de estos conjuntos es no vacío (de hecho es numerable), gracias al axioma de elección podemos elegir una secesión de cada conjunto determinado por r.

finito para $i = 1, 2$, de modo que $|A_{r_1} \cap A_{r_2}| < \omega$, como g es biyección tenemos que $|g[A_{r_1}] \cap g[A_{r_2}]| < \omega$ y puesto que $\mathcal{A}$ tiene la cardinalidad del continuo , $|\mathcal{A}| = 2^{\omega}$. ☑

Proposición 1.10 *Si $\mathcal{F} = \{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in I\}$ es una colección de familias AD anidadas, esto es, $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}_{\alpha+1}$ para cada $\alpha \in I$, entonces $\mathcal{A} = \bigcup \mathcal{F}$ es también una familia AD.*

Demostración. Para cada par de elementos $A, B \in \mathcal{A}$, existen $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ con $A \in \mathcal{A}_{\alpha_1},\ B \in \mathcal{A}_{\alpha_2}$. Sea $\alpha = \text{máx}\{\alpha_1,\ \alpha_2\}$, puesto que las familia de $\mathcal{F}$ son anidadas, $A, B \in \mathcal{A}_\alpha$, entonces $|A \cap B| < \omega$ por ser $\mathcal{A}_\alpha$ familia AD. ☑

Proposición 1.11 *Cada familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ AD se puede extender a una familia maximal (MAD).*[5]

Demostración. Sea $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia AD y sea $\mathcal{M} = \{\mathcal{B} \in [\omega]^\omega : \mathcal{B}$ es AD y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$ es claro que $(\mathcal{M}, \subseteq)$ es orden parcial, $\mathcal{M} \neq \emptyset$ pues $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$. Además toda cadena $\mathcal{C}$ de $(\mathcal{M}, \subseteq)$ tiene como cota superior a $\bigcup \mathcal{C}$. Por el Lema de Zorn $\mathcal{M}$ tiene un elemento maximal. ☑

Proposición 1.12 *Si $\mathcal{A}$ es una familia MAD entonces $\mathcal{I}^+(\mathcal{A}) = \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia MAD y sea $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$, entonces $X \notin \mathcal{I}(\mathcal{A})$, esto es, ninguna subfamilia finita de $\mathcal{A}$ casi cubre a X, puesto que $\mathcal{A}$ es maximal tenemos que $\omega \subseteq^* \bigcup \mathcal{A}$ (de no ser así, $\mathcal{A} \cup \{\omega \setminus \bigcup \mathcal{A}\}$ sería familia AD con $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{A} \cup \{\omega \setminus \bigcup \mathcal{A}\}$, contradiciendo el hecho de que $\mathcal{A}$ es maximal). Así que existe subfamilia infinita $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ tal que $X \subseteq^* \bigcup \mathcal{C}$ con $|X \cap A| = \omega$ para cada $A \in \mathcal{C}$, entonces $|\mathcal{A} \upharpoonright X| = |\mathcal{C}| \geq \omega$, esto es $X \in \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$. Hemos demostrado que $\mathcal{I}^+(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$.
Sea $X \in \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$ y supongamos que $X \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$, entonces existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ finito tal que

$$X \subseteq^* \bigcup \mathcal{B} \tag{1.1}$$

además podemos suponer que $|A \cap X| = \omega$ para cada $A \in \mathcal{B}$ (pues si hubiera un $A_0 \in \mathcal{B}$ con $|A \cap X| < \omega$ entonces también $X \subseteq^* \bigcup(\mathcal{B} \setminus \{A_0\})$). Ahora, como $\mathcal{A}$ es familia AD $|A \cap \bigcup \mathcal{B}| < \omega$ para cada $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, entonces de (1.1) tenemos que $|A \cap X| < \omega$ para cada $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. Esto implica

[5] Entiéndase maximal en el sentido de que si existe otra familia AD $\mathcal{A}' \subseteq [\omega]^\omega$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$, entonces necesariamente $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$.

que $|\mathcal{A} \upharpoonright X| < \omega$, es decir, $X \notin \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$, contradicción!. De modo que $X \notin \mathcal{I}(\mathcal{A})$, así que $X \in \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A})$. Esto demuestra que $\mathcal{I}^{++}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A})$ y así, $\mathcal{I}^{+}(\mathcal{A}) = \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$ en el caso de que $\mathcal{A}$ sea maximal.

Proposición 1.13 *Cada familia MAD $\mathcal{A}$ es no numerable.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia MAD. Supongamos que existe $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ MAD numerable. $\mathcal{A} = \{A_i : i \in \omega\}$, como $\mathcal{A}$ es familia AD, entonces para toda $n \in \omega \setminus \{0\}$

$$|A_n \cap (A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1})| = |(A_n \cap A_0) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n-1})| < \omega.$$

Y puesto que $|A_n| = \omega$, entonces existe $x_n \in A_n \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1})$ para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$. Sea

$$A' = \{x_n \in A_n \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}) : n \in \omega \setminus \{0\}\}.$$

Ya que $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \cap A_n = \emptyset$ para cada $n \in \omega$, tenemos que para toda $n \in \omega$ $|A' \cap A_n| \leq n$ entonces $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{A'\} \subseteq [\omega]^{\omega}$ es una familia AD y como $A' \notin \mathcal{A}$, es decir, $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{A}'$, contradicción! pues $\mathcal{A}$ es maximal, por lo tanto $\mathcal{A}$ es no numerable. ☑

1.3. El teorema de Ramsey

El siguiente lema es importante ya que se usará en un teorema posterior el cual es una versión más fuerte del teorema de Ramsey, además, lo usaremos para demostrar el teorema de Simon en la sección siguiente.

Lema 1.14 *Para toda $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ familia MAD y para toda sucesión decreciente $\{X_i : i \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A}) = \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$ existe $X \in \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A})$ tal que $X \setminus x \subseteq \bigcap_{j \leq x} X_j = X_x$ para toda $x \in X$*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia MAD y sea $\{X_i : i \in \omega\}$ sucesión decreciente de elementos de $\mathcal{I}^{+}(\mathcal{A})$. Por definición, si existen $A_0, A_1, \dots$ infinidad numerable de elementos distintos de $\mathcal{A}$ tales que $|X \cap A_k| = \omega$ para toda $k \in \omega$, entonces $X \in \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A}) = \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A})$, ésta última igualdad se da por ser $\mathcal{A}$ familia MAD. La idea es encontrar una cantidad infinita de elementos de $\mathcal{A}$ que tengan intersección no vacía con cada X_i, así, de esos elementos se escogerán de forma apropiada los elementos que formarán

a X. Sea $S_0 = \{x_i^0 : i \in \omega\} \subseteq \bigcup_{i\in\omega} X_i$ una sucesión de puntos tales que $x_i^0 \in X_i$ para toda $i \in \omega$. Puesto que $\mathcal{A}$ es maximal existe[6] $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $|A_0 \cap S_0| = \omega$. Ahora, sea $S_1 = \{x_i^1 : i \in \omega\} \subseteq \bigcup_{i\in\omega} X_i \setminus A_0$ una nueva sucesión[7] tal que $x_i^1 \in X_i$ para toda $i \in \omega$. Nuevamente existe $A_1 \in \mathcal{A} \setminus \{A_0\}$ tal que $|A_1 \cap S_1| = \omega$.
Seguimos de ésta manera, de tal forma que para cada nueva sucesión $S_n = \{x_i^n : i \in \omega\} \subseteq \bigcup_{i\in\omega} X_i \setminus \bigcup_{i<n} A_n$ existirá $A_n \in \mathcal{A} \setminus \{A_0, ..., A_{n-1}\}$ tal que $|A_n \cap S_n| = \omega$. Ahora, sea $x_0 = \text{mín}(A_0 \cap S_0)$, y así podemos conseguir los siguientes puntos:

$$\exists\ x_1 > x_0 \ \text{ tal que } \ x_1 \in A_1 \cap S_1 \cap X_{x_0+1},$$

$$\exists\ x_2 > x_1 \ \text{ tal que } \ x_2 \in A_0 \cap S_0 \cap X_{x_1+1},$$

$$\exists\ x_3 > x_2 \ \text{ tal que } \ x_3 \in A_1 \cap S_1 \cap X_{x_2+1},$$

$$\exists\ x_4 > x_3 \ \text{ tal que } \ x_4 \in A_2 \cap S_2 \cap X_{x_3+1},$$

$$\exists\ x_5 > x_4 \ \text{ tal que } \ x_5 \in A_0 \cap S_0 \cap X_{x_4+1},$$

$$\vdots$$

$$\exists\ x_{n+1} > x_n \ \text{ tal que } \ x_{n+1} \in A_{F(n+2)} \cap S_{F(n+2)} \cap X_{x_n+1}.$$

Donde $F : \omega \to \omega$ se define como sigue[8], sea $f : \omega \to \omega$, $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ función estrictamente creciente. Sea pues $F(n) = n - f(k)$ donde k es el único entero tal que $f(k) \leq n \leq f(k+1)$. Sea $X = \{x_i : i \in \omega\}$, es claro que $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ pues $|X \cap A_k| = \omega$ para toda $k \in \omega$, además si $x_m \in X \setminus x_r$ entonces $x_m \in X$, $x_m \geq x_r$, y $x_m \in A_{F(m+1)} \cap S_{F(m+1)} \cap X_{x_{m-1}+1}$ pero $X_{x_{m-1}+1} \subseteq X_{x_m} \subseteq X_{x_r}$ por lo que $x_m \in X_{x_r}$. De este modo $X \setminus x \subseteq X_x = \bigcap_{j\leq x} X_j$ para cada $x \in X$ y $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ porque $|X \cap A_n| = \omega$ para cada $n \in \omega$. ☑

Definición 1.15 *Sea $f : [\kappa]^\mu \to \rho$ una función donde κ, μ, ρ son numeros cardinales mayores que cero, decimos que $A \subseteq \kappa$ es **f-homogéneo** si $|f[A]^\mu| = 1$.*

---

[6]De no ser así, $\mathcal{A} \cup \{S_0\}$ seria familia AD con $S_0 \notin \mathcal{A}$ contradiciendo el hecho de que $\mathcal{A}$ es maximal.

[7]Note que $|X_i \setminus A_0| = \omega$ para toda $i \in \omega$ pues si suponemos que no, entonces existe $m \in \omega$ tal que $X_m \subseteq^* A_0$, como $X_m \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ entonces $\exists\ A \in \mathcal{A}\ A \neq A_0$ con $|X_m \cap A| = \omega$, así que $|A \cap A_0| = \omega$, contradicción!.

[8]Note que ésta función lo que hace es "visitar" a cada A_k una infinidad de veces.

El siguiente teorema fue probado por A. Mathias en su articulo [5] y es un fortalecimiento del famoso teorema de Ramsey.

Teorema 1.16 *Sea $\mathcal{A}$ una familia MAD y sea $f : [\omega]^2 \to 2$ una función, entonces existe $B \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ que es f-homogéneo.*

Demostración. Sean $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia AD y $f : [\omega]^2 \to 2$ una función. Extendamos el filtro $\mathcal{I}^*(\mathcal{A}) = \{X \in [\omega]^\omega : \omega \setminus X \in \mathcal{I}(\mathcal{A})\}$ a un ultrafiltro $\mathcal{U}$. Sean $X_n^0 = \{m \in \omega \setminus \{n\} : f(\{m, n\}) = 0\}$, $X_n^1 = \{m \in \omega \setminus \{n\} : f(\{m, n\}) = 1\}$. Puesto que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro libre (Corolario 1.8) y $X_n^0 \cup X_n^1 = \omega \setminus \{n\} \in \mathcal{U}$ [9] para cada $n \in \omega$ existe $i \in 2$ tal que $X_n^i = \{m \in \omega \setminus \{n\} : f(\{m, n\}) = i\} \in \mathcal{U}$.
Sea $g : \omega \to 2$ tal que $X_n^{g(n)} \in \mathcal{U}$, notemos[10] que además $X_n^{g(n)} \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$.
Puesto que $\{n \in \omega : g(n) = 0\} \cup \{n \in \omega : g(n) = 1\} = \omega$ entonces existe $\varepsilon \in 2$ tal que $Y := \{n \in \omega : g(n) = \varepsilon\} \in \mathcal{U}$, note que Y tiene que ser infinito pues $\mathcal{U}$ es ultrafiltro libre (obs. A.10).
Enumeremos los elementos de Y como $\{y_n : n \in \omega\}$ de tal forma que $y_n < y_{n+1}$ para todo $n \in \omega$. Sea

$$Z_0 = Y, \text{ y para cada } k \geq 1 \; Z_k = Y \cap \bigcap_{i<k} X_{y_i}^\epsilon$$

es una sucesión decreciente y además $Z_n \in \mathcal{U}$ para todo $n \in \omega$, entonces $Z_n \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ para todo $n \in \omega$.
Por lema anterior existe $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ tal que $X \setminus x \subseteq Z_x$ para todo $x \in X$.
Veamos que X es f-homogéneo. Sean x, y dos elementos distintos de X, sin perdida de generalidad $x < y$. Demostremos que $f(\{x, y\}) = \varepsilon$. Para esto basta demostrar que $y \in X_x^\varepsilon$. Pero

$$y \in X \setminus x + 1 \subseteq Z_{x+1} = Y \cap \bigcap_{i \leq x} X_{y_i}^\varepsilon.$$

Como $x \in X \setminus x \subseteq Z_x \subseteq Y$ entonces existe un $k \in \omega$ tal que $x = y_k$, además $k \leq x$. Entonces $\bigcap_{i \leq x} X_{y_i}^\varepsilon \cap Y \subseteq X_{y_k}^\varepsilon = X_x^\varepsilon$, por lo tanto $y \in X_x^\varepsilon$ y así $f(\{x, y\}) = \varepsilon$.
Es pues $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ el conjunto f-homogéneo que buscamos. ☑

[9] Véase observación A.10 y proposición A.14

[10] Si $X_n^{g(n)} \notin \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ entonces $X_n^{g(n)} \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$, por lo que $\omega \setminus X_n^{g(n)} \in \mathcal{I}^*(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{U}$ y así $\emptyset = \omega \setminus X_n^{g(n)} \cap X_n^{g(n)} \in \mathcal{U}$, contradicción!. Así pues $A \in \mathcal{U} \to A \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$.

Corolario 1.17 *Para toda función $f : \omega \to \omega$ existe $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ tal que $f \restriction X$ es constante o $f \restriction X$ es estrictamente creciente.*

Demostración. Sea $f : \omega \to \omega$ cualquier función y sea $\psi : [\omega]^2 \to 2$ función definida como sigue

$$\psi(\{x,y\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) < f(y) \text{ y } x < y \\ 1 & \text{si } f(x) \geq f(y) \text{ y } x < y. \end{cases}$$

Por teorema anterior, existe $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ que es ψ-homogéneo. Es decir $f \restriction X$ es estrictamente creciente o se cumple que para cada par $\{x,y\} \in [X]^2$, $f(x) \geq f(y)$. Bajo estas condiciones existe $N \in X$ tal que $f \restriction Y$ es constante donde $Y = \{x \in X : x \geq N\} \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ pues no puede haber una sucesión estrictamente creciente de numeros naturales. ☑

1.4. El teorema de Simon

Definición 1.18 *Una familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ AD es **maximal en ningún lado** si $\mathcal{A} \restriction X$ no es maximal para cada $X \in \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$*

El siguiente teorema es una versión un poco más general del teorema de Simon presentado en el articulo [13] por el año 1980. Usaremos este teorema para construir en el capítulo 4 dos espacios compactos, Hausdorff y Fréchet cuyo producto no es Fréchet, teorema clásico de la topología de conjuntos.

Teorema 1.19 Teorema de Simon
Para toda $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ familia MAD existen $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ y $\{\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1\}$ partición de $\mathcal{A} \restriction X$ tal que $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ son maximales en ningún lado.

Demostración. Sea $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ familia MAD.
Procedemos por contradicción i.e. suponemos para todo $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A}) = \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$ y para toda partición $\{\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1\}$ de $\mathcal{A} \restriction X$ existen $i \in 2$ y $Y \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A}_i)$, tal que $\mathcal{A}_i \restriction Y$ es familia MAD, además $Y \subseteq X$ pues $\mathcal{A}_i$ es una familia AD basada en X.
Procederemos de forma recursiva usando la suposición anterior. Etiquetemos los elementos de $\mathcal{A}$ usando funciones de 2^ω. Esto es $\exists Z \subseteq 2^\omega$ tal que

$$\mathcal{A} = \{A_f : f \in Z\}$$

Sean $\mathcal{A}_0^0 = \{A_f \in \mathcal{A} : f(0) = 0\}$ y $\mathcal{A}_1^0 = \{A_f \in \mathcal{A} : f(0) = 1\}$

Usando nuestra suposición inicial (paso 0):
Para $\omega \in \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A}) = \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A})$ y para $\{\mathcal{A}_0^0, \mathcal{A}_1^0\}$ partición de $\mathcal{A} \restriction \omega = \mathcal{A}$ existen $i_0 \in 2$ y $Y_0 \in \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A}_{i_0}^0) \subseteq \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A}),\ Y_0 \subseteq \omega$ tal que $\mathcal{A}_{i_0}^0 \restriction Y_0$ es familia MAD basada en Y_0.
Puesto que $\mathcal{A}_{i_0}^0 \restriction Y_0 \subseteq \mathcal{A} \restriction Y_0$ y $\mathcal{A}_{i_0}^0 \restriction Y_0$ es maximal entonces $\mathcal{A} \restriction Y_0 = \mathcal{A}_{i_0}^0 \restriction Y_0$. En particular esto implica que $|A \cap Y_0| < \omega$ para todo $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{i_0}^0$.
Sean ahora,

$$\mathcal{A}_0^1 = \{A_f \in \mathcal{A}_{i_0}^0 : f(1) = 0\},\ \ \mathcal{A}_1^1 = \{A_f \in \mathcal{A}_{i_0}^0 : f(1) = 1\}.$$

Nuevamente usamos nuestra suposición inicial (paso 1):
Para $Y_0 \in \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A})$ y para $\{\mathcal{A}_0^1 \restriction Y_0, \mathcal{A}_1^1 \restriction Y_0\}$ partición de $\mathcal{A} \restriction Y_0$ existen $i_1 \in 2$ y $Y_1 \in \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A}_{i_1}^1 \restriction Y_0) \subseteq \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A}),\ Y_1 \subseteq Y_0$ tal que $(\mathcal{A}_{i_1}^1 \restriction Y_0) \restriction Y_1 = \mathcal{A}_{i_1}^1 \restriction (Y_0 \cap Y_1) = \mathcal{A}_{i_1}^1 \restriction Y_1$ es familia MAD basada en Y_1.
Puesto que $\mathcal{A}_{i_1}^1 \restriction Y_1 \subseteq \mathcal{A} \restriction Y_1$ y $\mathcal{A}_{i_1}^1 \restriction Y_1$ es maximal entonces $\mathcal{A} \restriction Y_1 = \mathcal{A}_{i_1}^1 \restriction Y_1$. En particular esto implica que $|A \cap Y_1| < \omega$ para todo $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{i_1}^1$.

En el paso $k+1$:
Sean

$$\mathcal{A}_0^{k+1} = \{A_f \in \mathcal{A}_{i_k}^k : f(k+1) = 0\},\ \ \mathcal{A}_1^{k+1} = \{A_f \in \mathcal{A}_{i_k}^k : f(k+1) = 1\}.$$

Usamos nuestra suposición inicial:
Para $Y_k \in \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A})$ y para $\{\mathcal{A}_0^{k+1} \restriction Y_k, \mathcal{A}_1^{k+1} \restriction Y_k\}$ partición de $\mathcal{A} \restriction Y_k$. existen $i_{k+1} \in 2$ y $Y_{k+1} \in \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A}_{i_{k+1}}^{k+1} \restriction Y_k) \subseteq \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A}),\ Y_{k+1} \subseteq Y_k$ tal que $(\mathcal{A}_{i_{k+1}}^{k+1} \restriction Y_k) \restriction Y_{k+1} = \mathcal{A}_{i_{k+1}}^{k+1} \restriction Y_{k+1}$ es familia MAD basada en Y_{k+1}.
Puesto que $\mathcal{A}_{i_{k+1}}^{k+1} \restriction Y_{k+1} \subseteq \mathcal{A} \restriction Y_{k+1}$ y $\mathcal{A}_{i_{k+1}}^{k+1} \restriction Y_{k+1}$ es maximal entonces $\mathcal{A} \restriction Y_{k+1} = \mathcal{A}_{i_{k+1}}^{k+1} \restriction Y_{k+1}$. En particular esto implica que

$$|A \cap Y_{k+1}| < \omega \text{ para todo } A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{i_{k+1}}^{k+1}. \tag{1.2}$$

De ésta forma hemos conseguido una sucesión decreciente $\{Y_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A})$. Así por el lema 1.14 $\exists X \in \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A})$ tal que $X \subseteq^* Y_k$ para todo $k \in \omega$.

Sea $g \in 2^\omega$ definida por $g(n) = i_n$ para todo $n \in \omega$. Puesto que $X \in \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A})$ tenemos que $|A_f \cap X| = \omega$ para una infinidad de funciones $f \in Z \subseteq$

2^ω. Sea f una de estas funciones tal que $f \neq g$ entonces existe $n_0 \in \omega$ tal que $f(n_0) \neq g(n_0)$.
Puesto que $|A_f \cap X| = \omega$ y como $X \subseteq^* Y_k$ para todo $k \in \omega$ tenemos pues que

$$|A_f \cap Y_{n_0}| = \omega \tag{1.3}$$

Puesto que $f(n_0) \neq g(n_0)$ entonces $A_f \notin \mathcal{A}^{n_0}_{i_{n_0}} = \{A_f : f(n_0) = i_{n_0} = g(n_0)\}$. Así, por (1.2) tenemos que

$$|A_f \cap Y_{n_0}| < \omega \tag{1.4}$$

Tenemos una contradicción de (1.3) y (1.4). ☑

Capítulo 2

Ψ-espacios y sus propiedades.

2.1. Introducción

DURANTE este breve capítulo introduciremos los Ψ-espacios y veremos algunas propiedades topológicas que necesitaremos a lo largo de la tesis, la normalidad de estos espacios es tema aparte y a ello esta dedicado el siguiente capítulo. Usaremos algunos resultados conocidos de topología que puede revisar en el apéndice B.

Sea $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia AD, y démosle a $\Psi(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \cup \omega$ la siguiente topología inducida por las vecindades abiertas locales de los puntos:

- ☣ $\forall x \in \omega \quad \mathcal{N}_A = \{\{x\}\}$.
- ☣ $\forall A \in \mathcal{A}\ \mathcal{N}_A = \{\{A\} \cup (A \setminus F) : F \subseteq A, |F| < \omega\}$.

Verifiquemos que efectivamente tenemos una topología para $\Psi(\mathcal{A})$. Como $\emptyset \in [A]^{<\omega}$ tenemos

$$\bigcup_{x\in\omega}\{x\} \cup \bigcup_{A\in\mathcal{A},\ F\in[A]^{<\omega}} \{A \setminus F\} = \omega \cup \mathcal{A} = \Psi(\mathcal{A})$$

y si $x \in U \cap V$ donde U, V son vecindades abiertas de x en $\Psi(\mathcal{A})$ entonces tenemos los siguientes casos:
Caso 1 $x \in \omega$, entonces $x \in \{x\} \subseteq U \cap V$ para todos los casos posibles de las vecindades U y V.
Caso 2 $x \in \mathcal{A}$, entonces U y V son de la forma $U = \{x\} \cup (x \setminus F),\ V =$

$\{x\}\cup(x\setminus G)$ donde $\{F,G\}\subseteq[x]^{<\omega}$, entonces $x\in\{x\}\cup(x\setminus(F\cup G))\subset U\cap V$.

Así, dada una familia $\mathcal{A}\subseteq[\omega]^{\omega}$ AD podemos siempre hablar del *espacio* Ψ de $\mathcal{A}$ y lo denotamos por $\Psi(\mathcal{A})$.

2.2. Resultados elementales acerca de los Ψ-espacios.

Proposición 2.1 $\Psi(\mathcal{A})$ *es separable.*

Demostración. Veamos que ω es denso en $\Psi(\mathcal{A})$. Sea $x\in\Psi(\mathcal{A})$ y sea $U\in\mathcal{N}_x$. Si $x\in\omega$ entonces $U\cap\omega=\{x\}$. Si $x\in\mathcal{A}$ entonces $U=\{x\}\cup(x\setminus F)$ con $F\subseteq\omega,\ |F|<\omega$, así que, $U\cap\omega=x\setminus F\neq\emptyset$ pues $|x|=\omega$. Por lo tanto $\overline{\omega}=\Psi(\mathcal{A})$. ☑

Proposición 2.2 $\Psi(\mathcal{A})$ *es* $0\text{-}dimensional$.

Demostración. Vamos a probar que las vecindades básicas dadas en la definición de $\Psi(\mathcal{A})$ son cerradas. (Equivalencia con $\Psi(\mathcal{A})\setminus U$ es abierto.) Sea U una vecindad local, abierta en $\Psi(\mathcal{A})$, si $y\in\Psi(\mathcal{A})\setminus U$ entonces tenemos dos casos
Caso 1 $y\in\omega$, entonces $y\in\{y\}\subset\Psi(\mathcal{A})\setminus U$ para todos los casos posibles de la vecindad U.
Caso 2 $y\in\mathcal{A}$, entonces tenemos dos subcasos
Caso 2.1 $U=\{n\}\subset\omega$, en este caso $y\in\{y\}\cup(y\setminus\{n\})\subset\Psi(\mathcal{A})\setminus U$.
Caso 2.1 $U=\{A\}\cup(A\setminus F)$ con $A\neq y$ y $F\in[A]^{<\omega}$, en este caso $y\in\{y\}\cup(y\setminus(y\cap A))\subset\Psi(\mathcal{A})\setminus U$.

Entonces la base formada por las vecindades abiertas, locales de $\Psi(\mathcal{A})$ es una base de cerrado-abiertos. ☑

Proposición 2.3 $\Psi(\mathcal{A})$ *es* T_2.

Demostración. Sea $\{x,y\}\subseteq\Psi(\mathcal{A})$, $x\neq y$.
Caso 1. $\{x,y\}\subseteq\mathcal{A}$
Sea $F=x\cap y$ entonces $U_x=\{x\}\cup(x\setminus F)$ y $U_y=\{y\}\cup(y\setminus F)$ separan a x y a y respectivamente.
Caso 2. $\{x,y\}\subseteq\omega$

$\{x\}$ y $\{y\}$ son abiertos.
Caso 3. Sin perdida de generalidad $x \in \omega$ y $y \in \mathcal{A}$
Entonces $U_x = \{x\}$ y $U_y = \{y\} \cup (y \setminus \{x\})$ separan a x y a y respectivamente.
☑

Proposición 2.4 $\Psi(\mathcal{A})$ *es loc. comp.*

Demostración. Como $\Psi(\mathcal{A})$ es T_2 basta demostrar que $\forall x \;\; \exists\, U \in \mathcal{N}_x$ con $\overline{U}$ compacta. Sea $x \in \Psi(\mathcal{A})$, si $x \in \omega$ es inmediato pues $U = \{x\}$ es abierto y cerrado, así $\overline{\{x\}} = \{x\}$ y claramente $\{x\}$ es compacto, si $x \in \mathcal{A}$ sea $V \in \mathcal{N}_x$, puesto que V es cerrado $\overline{V} = V = \{x\} \cup (x \setminus F_1)$ con $F_1 \subset x$ finito y sea $\mathcal{O}$ una cubierta abierta de $\overline{V}$, existe $U \in \mathcal{O}$ tal que $x \in U$, como U es abierto existe $F_2 = \{n_1, n_2, ..., n_m\} \subset x$ tal que $x \in \{x\} \cup (x \setminus F_2) \subseteq U$, sea $U_i \in \mathcal{O}$ tal que $n_i \in U_i$, $i = 1, ..., m$, entonces $\{U, U_1, U_2, ..., U_m\}$ es una subcubierta abierta de $\mathcal{O}$ para $\overline{V}$. ☑

Corolario 2.5 $\Psi(\mathcal{A})$ *es completamente regular.*

Demostración. Sabemos que Hausdorff y localmente compacto implica completamente regular, o si lo prefiere también Hausdorff y 0-dimensional implica completamente regular, vea apéndice B, teorema B.3. ☑

Proposición 2.6 $\Psi(\mathcal{A})$ *es* 1^{er} *numerable.*

Demostración. Para toda $x \in \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_x = \{\{x\} \cup (x \setminus n) : n \in \omega\}$ es claramente una base local numerable, si $x \in \omega$ entonces $\{\{x\}\}$ es una base local numerable de x.

Proposición 2.7 $\Psi(\mathcal{A})$ *no es numerablemente compacto.*

Demostración. Por teorema B.6 del apéndice B basta con ver que $\mathcal{A} \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ no tiene puntos de acumulación lo cual es inmediato de definición de las vecindades para puntos en $\mathcal{A}$. ☑

Proposición 2.8 *Los siguientes son equivalentes*

1. $\Psi(\mathcal{A})$ *es* 2^{do} *numerable.*
2. $\Psi(\mathcal{A})$ *es metrizable.*
3. $\Psi(\mathcal{A})$ *es hereditariamente Lindelöf.*

4. *$\mathcal{A}$ es numerable.*

Demostración. $(1 \leftrightarrow 2)$ De la proposición 2.2 y el corolario 2.5 sabemos que $\Psi(\mathcal{A})$ es separable y regular (de hecho completamente regular), entonces por teorema B.7 del apéndice B (teorema de "metrización"de Urysohn) $\Psi(\mathcal{A})$ es segundo numerable si y sólo si es metrizable.

$(1 \to 4)$ Si un espacio topológico X es segundo numerable entonces de cualquier base $\mathcal{B}$ de X se puede extraer una base numerable $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ para X, si suponemos que $|\mathcal{A}| > \omega$ entonces es imposible obtener una base numerable de la base $\{\{A\} \cup (A \setminus n) : A \in \mathcal{A},\ n \in \omega \cap A\} \cup \omega$ para $\Psi(\mathcal{A})$, por lo tanto $|\mathcal{A}| \leq \omega$.

$(4 \to 1)$ Si $\mathcal{A}$ es numerable, $\{\{A\} \cup (A \setminus n) : A \in \mathcal{A},\ n \in \omega \cap A\} \cup \omega$ es base numerable para $\Psi(\mathcal{A})$.

$(4 \to 3)$ $\forall\ Z \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ Z es numerable, así, si $\mathcal{O}$ es una cubierta abierta para A entonces $\forall a \in A\ \exists U_a \in \mathcal{O}$ tal que $a \in U_a$ entonces $\mathcal{U} = \{U_a \in \mathcal{O} | a \in A\}$ es una subcubierta de $\mathcal{O}$ numerable.

$(3 \to 4)$ Si $\mathcal{A}$ no es numerable entonces para $\mathcal{A} \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ la cubierta abierta $\{\{A\} \cup A : A \in \mathcal{A}\}$ para $\mathcal{A}$ no tiene subcubierta numerable, entonces $\Psi(\mathcal{A})$ no es hereditariamente Lindelöf. ☑

Capítulo 3

El problema de Moore.

3.1. Introducción

La normalidad de los Ψ-espacios se hace un poco más complicada que las otras propiedades topológicas vistas en el capítulo anterior, además de ser parte de un teorema que responde al famoso problema de Moore.

Los espacios de Moore son la abstracción de un espacio métrico. Estos espacios se llaman así en honor a R. L. Moore quien los introdujo por el año 1932.
Para una familia $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y un $x \in X$ usamos la notación $St(x,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$, llamado el conjunto **estrella** de x respecto a la familia $\mathcal{U}$.[1]

Definición 3.1 *Un **desarrollo** para un espacio topológico X es una familia $\{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$ donde cada $\mathcal{U}_i$ es una cubierta abierta de X tal que si $x \in X$, entonces $\{St(x,\mathcal{U}_i) : i \in \omega\}$ es una base local en x. Un **espacio de Moore** es un espacio regular que tiene un desarrollo.*

Proposición 3.2 *Todo espacio métrico es espacio de Moore.*

Demostración. Sea (E, d) espacio métrico, si $B(x, r)$ denota la bola de radio r centrada en $x \in E$, i.e. $B(x, r) = \{y \in E : d(y, x) < r\}$, entonces la familia de los $\mathcal{U}_i = \{B(x, 1/r) : x \in E\}$ para cada $i \in \omega$ componen un

[1] St es la abreviación de la palabra Star, estrella, del inglés.

desarrollo para el espacio E. Es claro que cada $\mathcal{U}_i$ es una cubierta abierta para E. Ahora, si tomamos un $x \in E$,

$$St(x, \mathcal{U}_i) = \bigcup_{y \in B(x,1/i)} B(y, 1/i) = B(x, 2/i).$$

Entonces $\{St(x, \mathcal{U}_i) : i \in \omega\}$ es una base local de x. ☑

Por el año 1933 un estudiante de Moore anuncio la siguiente pregunta:

¿Es metrizable cualquier espacio de Moore que es además normal?.

Moore conjeturó que la respuesta es afirmativa. Por más de 50 años, el problema de Moore fue considerado como el problema más importante de la topología general. Después se demostró que el problema de Moore es independiente de los axiomas de ZFC,[2] fue en 1937 cuando Jones hizo los primeros intentos en demostrar el problema de Moore agregando la hipótesis $2^\omega < 2^{\omega_1}$ a ZFC, en ese año, se conoce el famoso Lema de Jones, el cual dice (agregando esa hipotesis) que todo espacio de Moore, normal y separable es metrizable.
El siguiente teorema es la respuesta a la pregunta de Moore para el caso de espacios separables

Teorema 3.3 *Los siguientes son equivalentes:*

1. *Existe un espacio normal, separable y Moore pero no metrizable.*

2. *Existen Q-conjuntos.*

3. *Existe un $\Psi(\mathcal{A})$ normal con $\mathcal{A}$ familia MAD.*

En particular, en este capítulo demostraremos $2. \Leftrightarrow 3.$ Veremos algunas equivalencias de normalidad en Ψ-espacios y no es difícil demostrar que $\Psi(\mathcal{A})$ es un espacio de Moore:

Proposición 3.4 $\Psi(\mathcal{A})$ *es un espacio de Moore.*

[2]Esto es, tal pregunta no se puede responder usando solamente los axiomas de ZFC.

Demostración. Por corolario (2.5) $\Psi(\mathcal{A})$ es regular. Sea $\mathcal{U}_n = \{\{A\} \cup (A \setminus n) : A \in \mathcal{A}\} \cup \{\{m\} : m \in \omega \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}}(A \setminus n)\}$. Entonces la familia $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ es un desarrollo para $\Psi(\mathcal{A})$. Es claro que cada $\mathcal{U}_n$ es una cubierta abierta para $\Psi(\mathcal{A})$, demostremos que para cada $x \in \Psi(\mathcal{A})$ $B_x = \{St(x, \mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$ es una base local para x.
Sea $x \in \Psi(\mathcal{A})$, tenemos dos casos:

Caso 1 $x \in \omega$:
Para $n = x + 1$, $x \notin \bigcup_{A \in \mathcal{A}}(A \setminus n)$ y por lo tanto $St(x, \mathcal{U}_{x+1}) = \{x\}$, entonces B_x es base local para x pues $\{x\} \in B_x$ es abierto.

Caso 2 $x \in \mathcal{A}$:
En este caso $St(x, \mathcal{U}_n) = \{\{x\} \cup (x \setminus n)\}$, entonces $B_x = \{\{x\} \cup (x \setminus n) : n \in \omega\}$ y es también claro que B_x es una base local para x. ☑

Empecemos definiendo el concepto de "separador" para una familia casi ajena, nos servirá para dar una equivalencia de normalidad en los Ψ-espacios.

3.2. Separadores de una familia AD

Definición 3.5 *Sea $\mathcal{A}$ una familia AD, sea $S \subseteq \omega$. Decimos que S es un **separador** de $\mathcal{A}$ si para toda $A \in \mathcal{A}$ tenemos que $A \subseteq^* S$ o $A \subseteq^* \omega \setminus S$.
S es un **separador trivial** si $\exists \mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ con $S =^* \bigcup \mathcal{B}$.*

Proposición 3.6 *Las siguientes son separadores para cualquier familia AD $\mathcal{A}$.*

1. *ω y $\emptyset$.*
2. *A para cualquier $A \in \mathcal{A}$*
3. *$R =^* S$ para cualquier S separador de $\mathcal{A}$.*
4. *$S \cap S'$, $S \cup S'$ y $S \setminus S'$ para cualesquiera S y S' separadores de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ familia AD.

1. Para toda $A \in \mathcal{A}$, $A \subseteq \omega$ y $A \subseteq \omega \setminus \emptyset$
2. Sea $B \in \mathcal{A}$, si $B = A$ entonces $B \subseteq^* A$, si $B \neq A$ entonces $B \cap A =^* \emptyset$ por lo tanto $B \subseteq^* \omega \setminus A$.

3. Sea $A \in \mathcal{A}$, como $R =^* S$ existen $G_1, G_2 \in [\omega]^{<\omega}$, con $R \setminus S = G_1$ y $S \setminus R = G_2$. Si $A \subseteq^* S$ entonces $A \setminus R \subseteq^* S \setminus R = G_2$ entonces $A \subseteq^* R$. Si $A \subseteq^* \omega \setminus S$ entonces $A \setminus (\omega \setminus R) \subseteq^* (\omega \setminus S) \setminus (\omega \setminus R) = R \setminus S = G_1$, por lo tanto $A \subseteq^* \omega \setminus R$ y así, R es un separador de $\mathcal{A}$.

4. Hagamos sólo el caso $S \cap S'$ los otros son análogos, F y G denotan elementos de $[\omega]^{<\omega}$, sea $A \in \mathcal{A}$
   Caso 1 $A \setminus S = F$ y $A \setminus S' = G$.
   Entonces $A \setminus (S \cap S') = F \cup G$ por lo tanto $A \subseteq^* S \cap S'$.
   Caso 2 $A \cap S = F$ o $A \cap S' = G$.
   Entonces $A \cap (S \cap S') = F \cap G$ por lo tanto $A \subseteq^* \omega \setminus (S \cap S')$, así, $S \cap S'$ es un separador de $\mathcal{A}$.

Ahora damos una equivalencia de normalidad para los espacios $\Psi(\mathcal{A})$.

3.3. Normalidad en los Ψ-espacios.

Proposición 3.7 *$\Psi(\mathcal{A})$ es normal $\Leftrightarrow$ $\forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ existe S separador de $\mathcal{A}$ tal que $\forall A \in \mathcal{B}$ $A \subseteq^* S$ y para toda $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, $A \subseteq^* \omega \setminus S$.*

Demostración. $(\rightarrow)$ Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ como $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ son cerrados ajenos existen $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}, \mathcal{U}_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}}$ abiertos ajenos que los separan respectivamente. Sea $S = \mathcal{U}_{\mathcal{B}} \cap \omega$, demostremos que S separa a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. Sea $A \in \mathcal{B}$ como $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ es abierto existe $F \in [\omega]^{<\omega}$ tal que $\{A\} \cup (A \setminus F) \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$, entonces $A \setminus F \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{B}} \cap \omega = S$ por lo tanto $A \subseteq^* S$.
Sea $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, como $\mathcal{U}_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}}$ es abierto existe $G \in [\omega]^{<\omega}$ tal que $\{A\} \cup (A \setminus G) \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}}$ entonces $A \setminus G \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}} \cap \omega$, como $\mathcal{U}_{\mathcal{B}} \cap \mathcal{U}_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}} = \emptyset$ entonces $\mathcal{U}_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}} \cap \omega \subseteq \omega \setminus (\mathcal{U}_{\mathcal{B}} \cap \omega) = \omega \setminus S$, por lo tanto $A \setminus G \subseteq \omega \setminus S$, de modo que $A \subseteq^* \omega \setminus S$.
Así, S es un separador de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$.

$(\leftarrow)$ Sean $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ dos cerrados ajenos. Los podemos escribir como

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{B}_1 \cup N_1 \;\; y \;\; \mathcal{F}_2 = \mathcal{B}_2 \cup N_2$$

donde $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{A}$ y $N_1, N_2 \subseteq \omega$.
Si $\mathcal{B}_1 = \emptyset$ o $\mathcal{B}_2 = \emptyset$ entonces $\Psi(\mathcal{A})$ es normal pues en el caso de que $\mathcal{B}_1 = \emptyset$ entonces $\mathcal{F}_1 \subseteq N_1$ y $\mathcal{F}_2 \subseteq \Psi(\mathcal{A}) \setminus N_1$, similar si $\mathcal{B}_2 = \emptyset$.

Supongamos pues que $\mathcal{B}_1 \neq \emptyset \neq \mathcal{B}_2$, por hipótesis para $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{A}$ existe $S \subseteq \omega$ separador tal que $\forall A \in \mathcal{B}_1 \;\; A \subseteq^* S$ y $\forall A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}_1 \;\; \mathcal{A} \subseteq^* \omega \setminus S$. Sea

$$\mathcal{U} = \mathcal{F}_1 \cup (S \setminus N_2) = \mathcal{B}_1 \cup (N_1 \cup (S \setminus N_2)),$$

demostremos que $\mathcal{U}$ es abierto y cerrado, sea $x \in \mathcal{U}$, si $x \in N_1 \cup (S \setminus N_2) \subseteq \omega$ entonces $\{x\}$ es abierto y $x \in \{x\} \subseteq \mathcal{U}$. Si $x \in \mathcal{B}_1$ entonces por hipótesis $x \subseteq^* S$ i.e., existe $F \in [\omega]^{<\omega}$ con

$$x \setminus F \subseteq S \tag{3.1}$$

ahora, $|x \cap N_2| < \omega$ pues de no ser así $\mathcal{A} \setminus \mathcal{F}_2$ no seria abierto, por lo tanto existe $G \in [\omega]^{<\omega}$ con $(x \setminus G) \cap N_2 = \emptyset$, es decir,

$$x \setminus G \subseteq \omega \setminus N_2 \tag{3.2}$$

de (3.1) y (3.2) se sigue que $x \setminus (F \cup G) \subseteq S \setminus N_2$, entonces $x \in \{x\} \cup (x \setminus (F \cup G)) \subseteq \mathcal{B}_1 \cup (S \setminus N_2) \subseteq \mathcal{U}$, donde $\{x\} \cup (x \setminus (F \cup G))$ es un abierto básico, vecindad de x, por lo tanto $\mathcal{U}$ es abierto.
Ahora,

$$\Psi(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{U} = (\Psi(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{F}_1) \cap (\omega \setminus (S \setminus N_2)),$$

es intersección de dos abiertos ya que $\mathcal{F}_1$ es cerrado y $\omega \setminus (S \setminus N_2)$ es abierto por ser subconjunto de ω, por lo tanto $\mathcal{U}$ es un cerrado.
Así, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{A} \setminus \mathcal{U}$ son abiertos ajenos que separan a $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ respectivamente, esto es, $\Psi(\mathcal{A})$ es normal. ☑

Corolario 3.8 *Si $\mathcal{A}$ es una familia AD se cumplen.*

- ☣ $2^{|\mathcal{A}|} > 2^{\omega} \rightarrow \Psi(\mathcal{A})$ *no es normal.*
- ☣ $\mathcal{A}$ *es MAD* $\rightarrow \Psi(\mathcal{A})$ *no es normal.*

Demostración.

- ☣ Sea $\mathcal{S} = \{S \subseteq \omega : S$ es separador de $\mathcal{A}\}$ sea $F : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A})$ con $F(S) = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq^* S\}$ tenemos que $|\mathcal{S}| \leq 2^{\omega}$ y por hipótesis $|\mathcal{P}(\mathcal{A})| = 2^{|\mathcal{A}|} > 2^{\omega}$. Entonces F no es sobre, por lo tanto existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tal que ningún separador de $\mathcal{A}$ separa a $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, entonces por la proposición anterior $\Psi(\mathcal{A})$ no es normal.

☣ Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ con $|\mathcal{B}| = \omega$. Queremos probar que no existe S separador de $\mathcal{A}$ que separe a $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, supongamos que si existe dicho separador S, enumeremos a $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} = \{A_n : n \in \omega\}$ y sean

$$\begin{array}{rcl} x_0 & \in & S \cap A_0 \\ x_1 & \in & S \cap A_1 \setminus A_0 \\ x_2 & \in & S \cap A_2 \setminus A_0 \cup A_1 \\ & \vdots & \\ x_n & \in & S \cap A_n \setminus \bigcup_{m<n} A_m \end{array}$$

Sea $A = \{x_n : n \in \omega\} \subseteq S$ y por lo tanto $|A \cap B| < \omega$ para toda $B \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ y por construcción $|A_n \cap A| < \omega$ para toda $n \in \omega$, de modo que $\mathcal{A}$ no puede ser maximal ya $\mathcal{A} \cup \{A\}$ es familia AD con $A \notin \mathcal{A}$. Contradicción. Por lo tanto $\Psi(\mathcal{A})$ no es normal.

☑

3.4. El teorema de Luzin

Uno de los primeros resultados sobre familias casi ajenas fue el siguiente teorema de N. Luzin. El teorema dice, en particular, que en ZFC hay Ψ-espacios de cardinalidad ω_1 que no son normales.

Teorema 3.9 (LUZIN) *Existe una familia AD $\mathcal{A}$, $|\mathcal{A}| = \omega_1$ tal que para cada $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in [\mathcal{A}]^{\omega_1}$ ajenos, no existe S separador de $\mathcal{A}$ que separe a $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$.*

Demostración. Construiremos de forma recursiva una familia $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq [\omega]^\omega$ AD con la siguiente propiedad:

$$\forall \alpha < \omega_1 \ \forall n \in \omega \text{ el conjunto } \{\beta < \alpha : |A_\alpha \cap A_\beta| \leq n\} \text{ es finito.} \tag{3.3}$$

Después supondremos la existencia de dichos separadores para llegar a una contradicción con ésta última propiedad de $\mathcal{A}$.
Los primeros ω A_α los definimos simplemente como una partición de ω en pedazos infinitos [3], esto es $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ con $A_n \cap A_m = \emptyset$ para todo $m, n \in \omega$, $m \neq n$ y $\bigcup_{n\in\omega} A_n = \omega$.
Sea α, $\omega \leq \alpha < \omega_1$, suponemos que ya hemos construido $\{A_\beta : \beta < \alpha\}$ y

[3] Esto lo podemos hacer gracias a que existe una biyección entre $\omega \times \omega$ y ω.

queremos construir A_α, puesto que $\beta < \alpha < \omega_1$ entonces $\{A_\beta : \beta < \alpha\}$ es numerable y lo podemos escribir como

$$\{A_\beta : \beta < \alpha\} = \{C_n : n \in \omega\}.$$

Del hecho que $C_n \cap C_m \in [\omega]^{<\omega}$ para cualesquiera $m, n \in \omega$ con $m \neq n$, para cada $k \in \omega$ podemos conseguir $F_k \in [\omega]^{<\omega}$ tal que

1. $|F_k| \geq k + 1$,
2. $F_k \subseteq C_k \setminus \bigcup_{i<k} C_i$.

Hacemos $A_\alpha = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ y sea $\beta < \alpha$, entonces $A_\beta = C_{n_0}$ para algún $n_0 \in \omega$ y

$$A_\beta \cap A_\alpha = C_{n_0} \cap \bigcup_{i\in\omega} F_i \subseteq \bigcup_{i\leq n_0} F_i$$

por lo tanto $A_\alpha \cap A_\beta =^* \emptyset$, además,

$$F_{n_0} \subseteq C_{n_0} \cap \bigcup_{i\leq n_0} F_i \subseteq A_\beta \cap \bigcup_{i\in\omega} F_i = A_\beta \cap A_\alpha,$$

de modo que

$$|A_\beta \cap A_\alpha| \geq n_0 + 1. \tag{3.4}$$

esto nos garantiza que para cada $\beta < \alpha$ y para cada $n \in \omega$ $\{\beta < \alpha : |A_\beta \cap A_\alpha| \leq n\}$ es finito[4], hemos pues conseguido una familia AD $\mathcal{A}$ como queríamos.
Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ no numerables ajenas y supongamos que existe S que separa a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, de modo que

$$\forall B \in \mathcal{B} \qquad B \subseteq^* S, \tag{3.5}$$

$$\forall C \in \mathcal{C} \qquad C \subseteq^* \omega \setminus S. \tag{3.6}$$

Puesto que $\forall A \in \mathcal{B}$ existe $F_A \in [\omega]^{<\omega}$ con $A \setminus S = F_A$ y como $|[\omega]^{<\omega}| = \omega$ y $|\mathcal{B}| > \omega$ entonces por el principio de las casillas existen $F \in [\omega]^{<\omega}$ y $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ no numerable tal que

$$\forall B \in \mathcal{B}' \quad B \subseteq S \cup F, \tag{3.7}$$

[4]Sea $\gamma_k < \alpha$ con $A_{\gamma_k} = C_k$, entonces por ecuación (3.4) $|A_{\gamma_k} \cap A_k| \geq k+1$, por lo tanto $\{\beta < \alpha : |A_\beta \cap A_\alpha| \leq n\} \subseteq \{\gamma_k : k \leq n-1\}$.

Como $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{C}$ son no numerables existe $\alpha < \omega_1$ tal que $A_\alpha \in \mathcal{C}$ y $Z = \{\beta < \alpha : A_\beta \in \mathcal{B}'\}$ es infinito,[5] de ecuación (3.6) existe un finito $G \subset \omega$ tal que

$$A_\alpha \subseteq (\omega \setminus S) \cup G. \tag{3.8}$$

Entonces, de ecuación (3.7), para cada $\beta \in Z$

$$A_\beta \cap A_\alpha \subseteq [S \cup F] \cap [(\omega \setminus S) \cup G] \subseteq F \cup G. \tag{3.9}$$

Digamos que $|F \cup G| = n \in \omega$, entonces $|\{\beta < \alpha : |A_\beta \cap A_\alpha| \leq n\}| = |Z| = \omega$, contradiciendo la propiedad (3.3) que le dimos a $\mathcal{A}$. ☑

3.5. Subárboles de $2^{<\omega}$

En este apartado nos restringiremos a una clase natural de familias casi ajenas donde normalidad se puede caracterizar de manera particularmente sencilla. Primero introducimos un poco de notación.

Denotamos por 2^n al conjunto de todas las funciones con dominio $n \in \omega$ y codominio 2, esto es,

$$2^n = \{\sigma : n \to 2\}.$$

Definamos además

$$2^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} 2^n.$$

Este conjunto lo podemos representar por un árbol binario como el de la figura 3.1 Cada nodo de un nivel l representa las distintas funciones que podemos tener con dominio l.
La linea de abajo, en ésa figura, representa el conjunto 2^ω, conjunto de las funciones con dominio ω y codominio 2.

Así, el árbol entero será $2^{<\omega} \cup 2^\omega$. Ayudados de este conjunto podemos darle una topología a 2^ω como sigue.[6]

[5]Como $|\mathcal{B}'| > \omega$, tomamos $Z = \{\beta < \alpha : A_\alpha \in \mathcal{B}'\}$ infinito numerable, como $|\mathcal{C}| > \omega$ y Z es numerable existe $\alpha \geq \sup Z$ con $A_\alpha \in \mathcal{C}$.

[6]Ésta topología coincide con la topología producto en 2^ω. Si $U = 2^{\omega \setminus F} \times \prod_{i \in F} U_i$ es un abierto básico en la topología producto de 2^ω, donde cada U_i es un abierto del espacio discreto 2 y F un finito de ω. Sea $g \in U$, entonces con $N = \max F$, $\{f \in 2^\omega : f \restriction N = g \restriction N\} \subseteq U$. Reciprocamente, si $V = \{f \in 2^\omega : f \restriction N = g \restriction N\}$ es una vecindad abierta en la recién topología de 2^ω, donde $N \in \omega$. Sea $f \in V$ y sea $U = 2^{\omega \setminus F} \times \prod_{i \in F} U_i$ vecindad de f en la topología producto, donde $F = N$. Entonces $U \subseteq V$.

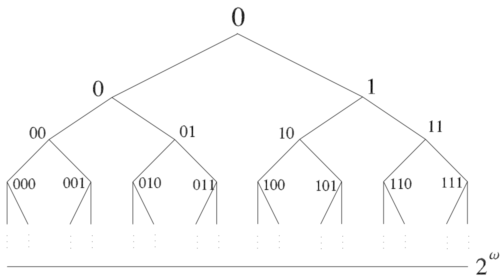

Figura 3.1: El nodo 101 representa a la función $\sigma : 3 \to 2$ tal que $\sigma(0) = 1,\ \sigma(1) = 0,\ \sigma(2) = 1$. Para cada $\sigma \in 2^{<\omega}$, $\sigma : n \to\ 2$ existe una infinidad de funciones $f \in 2^\omega$ tales que $f \restriction n = \sigma$.

$U \subseteq 2^\omega$ es vecindad básica de $g \in 2^\omega \Leftrightarrow$ existe $N \in \omega$ tal que

$$U = \{f \in 2^\omega : f \restriction N = g \restriction N\}.$$

Estos básicos se ven como pequeños "conos" con el vértice sobre $g \restriction N \in 2^{<\omega}$ en el nivel N del árbol y con base en U.
Note además que dados dos básicos U, V estos son ajenos o alguno esta contenido en el otro. Esto implica que los abiertos básicos también son cerrados.

Para un $f \in 2^\omega$ definamos A_f como el conjunto de todas las funciones que son todas las posibles restricciones de f, esto es:

Notación 3.10 *Para un $f \in 2^\omega$ usamos: $A_f = \{f \restriction n : n \in \omega\} \subseteq 2^{<\omega}$. Además, para un $X \subseteq 2^\omega$ infinito, $\mathcal{A}_X = \{A_f : f \in X\} \subseteq [2^{<\omega}]^\omega$.*

Proposición 3.11 *Para cualquier conjunto infinito $X \subseteq 2^\omega$, $\mathcal{A}_X \subseteq [2^{<\omega}]^\omega$ es una familia casi ajena[7] basada en $2^{<\omega}$.*

Demostración. Sea $X \subseteq 2^\omega$ infinito y sean $A_f,\ A_g$ dos elementos distintos de $\mathcal{A}_X$, entonces $f \neq g$, esto es, existe $N \in \omega$, $N > 0$ tal que $f(N) \neq g(N)$ esto implica que $f \restriction n \neq g \restriction n$ para cada $n \geq N$, entonces $|A_f \cap A_g| \leq N$. ☑

[7]En nuestra definición de familia casi ajena ésta es subconjunto de $[\omega]^\omega$, note que $|2^{<\omega}| = \omega$.

Definición 3.12 *Un conjunto infinito $X \subseteq 2^\omega$ es un **Q-conjunto** si para cada $Y \subseteq X$, Y se escribe como unión numerable de cerrados en X (Y es F_σ en X).*

De forma análoga, como lo hicimos con $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$, le podemos asociar una topología ($\Psi(\mathcal{A}_X) := \mathcal{A}_X \cup 2^{<\omega}$) a la familia $\mathcal{A}_X$, para un $X \subseteq 2^\omega$.

Para $\sigma \in 2^{<\omega}$ los puntos serán aislados, para $A_f \in \mathcal{A}_X$ tenemos $\mathcal{N}_{A_f} = \{\{A_f\} \cup (A_f \setminus F) : F \in [A_f]^{<\omega}\}$.

Teorema 3.13 *$\Psi(\mathcal{A}_X)$ es normal $\Leftrightarrow$ X es Q-conjunto.*

Demostración. ($\rightarrow$) Sea $Y \subseteq X$ entonces $\mathcal{A}_Y \subseteq \mathcal{A}_X$, como $\Psi(\mathcal{A}_X)$ es normal, por la proposición (3.7), existe $S \subseteq 2^{<\omega}$ que separa a $\mathcal{A}_Y$ de $\mathcal{A}_X \setminus \mathcal{A}_Y$. Sin perdida de generalidad supongamos que para todo $A_f \in \mathcal{A}_Y$ (ó $\forall f \in Y$) $A_f \subseteq^* S$ y para todo $A_f \in \mathcal{A}_X \setminus \mathcal{A}_Y$ (ó $\forall f \in X \setminus Y$) $A_f \subseteq^* 2^{<\omega} \setminus S$.
En este caso

$$\begin{aligned}
Y &= \{f \in X : A_f \in \mathcal{A}_Y\} = \{f \in X : A_f \subseteq^* S\} \\
&= \{f \in X : \exists n \in \omega\, \forall k > n\, (f \restriction k \in S)\} \\
&= \bigcup_{n\in\omega} \bigcap_{k>n} \{f \in X : f \restriction k \in S\} \\
&= \bigcup_{n\in\omega} \bigcap_{k>n} \bigcup_{\sigma \in 2^k \cap S} \{f \in X : f \restriction k = \sigma\}
\end{aligned}$$

Donde $\{f \in X : f \restriction k = \sigma\}$ es un básico, por lo tanto, cerrado-abierto, así, Y es unión numerable de cerrados, entonces X es Q-conjunto.

($\leftarrow$) Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_X$ entonces $\mathcal{B} = \mathcal{A}_Y$ para algún $Y \subseteq X$, $Y = \{f \in X : A_f \in \mathcal{B}\}$. Como X es un Q-conjunto entonces $Y = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ y $X \setminus Y = \bigcup_{n\in\omega} H_n$ con F_n, H_n cerrados de X.
Definamos de forma recursiva los siguientes conjuntos

$$A_0 = \{f \restriction n : f \in F_0,\ n \in \omega\} \subseteq 2^{<\omega}.$$

$$B_0 = \{f \restriction n : f \in H_0,\ n \in \omega\} \setminus A_0.$$

y para $k \in \omega$

$$A_{k+1} = \{f \upharpoonright n : f \in F_{k+1},\ n \in \omega\} \setminus \bigcup_{j \leq k} B_j.$$

$$B_{k+1} = \{f \upharpoonright n : f \in H_{k+1},\ n \in \omega\} \setminus \bigcup_{j \leq k+1} A_j.$$

Afirmación:

$$S = \bigcup_{k \in \omega} A_k \text{ es un separador de } \mathcal{A} \text{ que separa a } \mathcal{B} \text{ de } \mathcal{A}_X \setminus \mathcal{B}.$$

Tenemos que demostrar que $A_f \subseteq^* S$ para cualquier $A_f \in \mathcal{B}$ además $A_f \subseteq^* 2^{<\omega} \setminus S$ para cualquier $A_f \in \mathcal{A}_X \setminus \mathcal{B}$.
Demostremos sólo la primer parte, la segunda es similar.
Sea $A_f \in \mathcal{B}$ entonces $f \in Y = \bigcup_{j \in \omega} F_j$. Tenemos que demostrar que $\exists N \in \omega$ tal que $f \upharpoonright k \in S = \bigcup_{j \in \omega} A_j$ para toda $k > N$. Sea $n_0 = \min\{m : f \in F_m\}$, entonces, es suficiente demostrar que existe $N \in \omega$ tal que $f \upharpoonright k \in A_{n_0}$ para toda $k > N$. Pero $f \upharpoonright k \in A_{n_0}$ si y sólo si $f \upharpoonright k \notin \bigcup_{j<n_0} B_j$ por lo que definitivamente habrá que demostrar que

$$\exists N \in \omega \text{ tal que } f \upharpoonright k \notin \bigcup_{j<n_0} B_j \text{ para toda } k > N.$$

Como $f \in Y$ entonces $f \notin \bigcup_{j \in \omega} H_j$, así, $f \notin \bigcup_{j<n_0} H_j \subseteq X \setminus Y$, cada H_j es cerrado por lo que $H := \bigcup_{j<n_0} H_j$ es un cerrado en X entonces existe $V \subseteq X \setminus H$ vecindad de f, esto es, existe $N \in \omega$ tal que

$$V = \{g \in 2^\omega : g \upharpoonright N = f \upharpoonright N\}.$$

De ésta forma, si $g \in 2^\omega$ es tal que $g \upharpoonright N = f \upharpoonright N$ entonces $g \notin H$ pues $V \subseteq X \setminus H$. Entonces si $k > N$ y $g \in 2^\omega$ es tal que $g \upharpoonright N = f \upharpoonright N \rightarrow g \notin H_j$ para toda $j < n_0$.
Así pues, si $k > N$ y $j < n_0 \rightarrow f \upharpoonright k \notin B_j$. Entonces

$$f \upharpoonright k \notin \bigcup_{j<n_0} B_j \text{ para toda } k > N,$$

esto es a lo que queríamos llegar. ☑

La siguiente proposición dice, que los Ψ-espacios del tipo $\Psi(\mathcal{A}_X)$ generan de forma proyectiva a todos los Ψ-espacios que ya conocíamos.

Proposición 3.14 *Para cada $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ familia AD existe $X \subseteq 2^\omega$ y existe $f : \Psi(\mathcal{A}_X) \to \Psi(\mathcal{A})$ función continua, sobre, tal que $f \upharpoonright \mathcal{A}_X$ es inyectiva.*

Demostración. Sea $X = \{\chi_A \in 2^\omega : A \in \mathcal{A}\}$.
Donde $\chi_A : \omega \to 2$ es la función característica, se define como:

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin A, \\ 1 & \text{si } a \in A. \end{cases}$$

Ahora, sea $f : \Psi(\mathcal{A}_X) \to \Psi(\mathcal{A})$ tal que

$f(A_{\chi_A}) = A$ para todo $A_{\chi_A} \in \mathcal{A}_X$ y

$$f(\sigma) = \begin{cases} \max\{n \in \omega : \sigma(n) = 1\} & \text{si es posible,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \qquad \text{para todo } \sigma \in 2^{<\omega}$$

Afirmación: f es sobre:
Para $A \in \mathcal{A} \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ $f(A_{\chi_A}) = A$ donde $A_{\chi_A} \in \Psi(\mathcal{A}_X)$.
Para $n \in \omega \subseteq \Psi(\mathcal{A})$. Sea $\sigma : n+1 \to 2$ tal que $\sigma(n) = 1$. Así $\sigma \in \Psi(\mathcal{A}_X)$ y $f(\sigma) = n$.

Afirmación: $f \upharpoonright \mathcal{A}_X$ es inyectiva.
Sean $A_{\chi_A}, A_{\chi_B} \in \mathcal{A}_X$ tales que $f(A_{\chi_A}) = f(A_{\chi_B})$ entonces $A = B$ por lo que $A_{\chi_A} = A_{\chi_B}$.

Afirmación: f es continua.
Basta probar que la imagen inversa de las vecindades es abierta. Sea $n \in \omega \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ entonces

$$f^{-1}(\{n\}) = \{\sigma \in 2^{<\omega} : n = \max\{k \in dom(\sigma) : \sigma(k) = 1\}\} \subseteq 2^{<\omega}$$

es abierto pues $2^{<\omega}$ es discreto.

Ahora, sea $A \in \mathcal{A} \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ entonces para un finito $F \subseteq A$

$$f^{-1}(\{A\} \cup A \setminus F) = f^{-1}(\{A\}) \cup f^{-1}(A \setminus F)$$
$$= f^{-1}(\{A\}) \cup \bigcup_{n \in A \setminus F} f^{-1}(\{n\}) = \{A_{\chi_A}\} \cup$$
$$\bigcup_{n \in A \setminus F} \left[\{\sigma \in 2^{n+1} : \sigma(n) = 1\} \cup \bigcup_{k > n+1} \bigcap_{n < j < k} \{\sigma \in 2^k : \sigma(n) = 1, \sigma(j) = 0\} \right]$$

$$= \{A_{\chi_A}\} \cup \bigcup_{n \in A \setminus F} \{\sigma \in 2^{n+1} : \sigma(n) = 1\} \cup \mathcal{C}$$

donde $\mathcal{C} = \bigcup_{n \in A \setminus F} \bigcup_{k > n+1} \bigcap_{n < j < k} \{\sigma \in 2^k : \sigma(n) = 1, \sigma(j) = 0\}$ es un subconjunto de $2^{<\omega}$ y por lo tanto abierto.

Note ahora que $n \in A \setminus F$ implica $\chi_A \restriction (n+1) \in \{\sigma \in 2^{n+1} : \sigma(n) = 1\}$, así que,

$$\{\chi_A \restriction (n+1) : n \in A \setminus F\} \subseteq \bigcup_{n \in A \setminus F} \{\sigma \in 2^{n+1} : \sigma(n) = 1\}. \tag{3.10}$$

Pero

$$\{\chi_A \restriction (n+1) : n \in A \setminus F\} =$$
$$\{\chi_A \restriction (n+1) : n \in A\} \setminus \{\chi_A \restriction (n+1) : n \in F\} = A_{\chi_A} \setminus G,$$

donde G es un finito de $2^{<\omega}$. Entonces de eq. (3.10)

$$A_{\chi_A} \setminus G \subseteq \bigcup_{n \in A \setminus F} \{\sigma \in 2^{n+1} : \sigma(n) = 1\}.$$

De modo que podemos escribir

$$f^{-1}(\{A\} \cup (A \setminus F)) = \{A_{\chi_A}\} \cup \left[(A_{\chi_A} \setminus G) \cup \bigcup_{n \in A \setminus F} \{\sigma \in 2^{n+1} : \sigma(n) = 1\} \right] \cup \mathcal{C},$$

donde $\{A_{\chi_A}\} \cup (A_{\chi_A} \setminus G)$ es un abierto básico de $\Psi(\mathcal{A}_X)$, el resto un subconjunto de $2^{<\omega}$ y por lo tanto abierto también en $\Psi(\mathcal{A}_X)$. ☑

Capítulo 4

Espacios de Fréchet

PARA este capítulo construiremos un par de espacios Hausdorff, compactos y Fréchet tales que su producto no es Fréchet. En tal construcción nos ayudaremos de una familia MAD y del teorema (1.19) del primer capitulo. Dicho problema fue resuelto por Petr Simon en su artículo [13] por el año 1980.

4.1. Preliminares

Definición 4.1 *Un espacio topológico X es **Fréchet** si para cualquier subconjunto no vacío $Y \subseteq X$ y cualquier punto $y \in \overline{Y}$ existe una sucesión $\{y_n : n \in \omega\} \subseteq Y$ que converge a este punto y.*

Definición 4.2 *Un espacio topológico X es **Fréchet en $\mathbf{x} \in \boldsymbol{X}$** si para cualquier $Y \subseteq X$ tal que $x \in \overline{Y}$ existe sucesión $\{y_n : n \in \omega\} \subseteq Y$ que converge a este punto x.*

Se sigue inmediato de las definiciones anteriores:

Proposición 4.3 *X es Fréchet $\Leftrightarrow$ X es Fréchet en cualquier $x \in X$.*

Denotemos por $F(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cup \omega \cup \{*\}$ a la compactación por un punto[1] de $\Psi(\mathcal{A})$. A los espacios del tipo $F(\mathcal{A})$ a veces se les llama "los compactos de Franklin".

[1] Ver teorema (B.10).

Lema 4.4 *$F(\mathcal{A})$ es Fréchet $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ es maximal en ningún lado.*

Demostración. ($\rightarrow$) Sea $M \in \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$ y veamos que $\mathcal{A} \restriction M$ no es maximal. Como $M \in \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$, existen $A_0, A_1, ...$ elementos distintos de $\mathcal{A}$ tales que $|A_k \cap M| = \omega$ para cada $k \in \omega$, por lo que $* \in \overline{M}$ pues cualquier vecindad del punto $*$ solo deja fuera a un numero finito de elementos de $\mathcal{A}$. Entonces por ser $F(\mathcal{A})$ Fréchet existe $S = \{s_i : i \in \omega\} \subseteq M$ sucesión que converge a $*$. Entonces

$$|S \cap A| < \omega \text{ para toda } A \in \mathcal{A}.^2 \tag{4.1}$$

Por lo que $S \neq M \cap A$ para cualquier $A \in \mathcal{A}$,[3] esto es

$$S \notin \mathcal{A} \restriction M. \tag{4.2}$$

Además por afirmación (4.1) tenemos

$$|S \cap (M \cap A)| \leq |S \cap A| < \omega \;\text{ para toda } A \in \mathcal{A} \tag{4.3}$$

Así, por las afirmaciones (4.2) y (4.3) tenemos que $\mathcal{A} \restriction M \cup \{S\}$ es una familia AD y $\mathcal{A} \restriction M \subsetneq \mathcal{A} \restriction M \cup \{S\}$. Por lo que $\mathcal{A} \restriction M$ no puede ser maximal.

($\leftarrow$) Por proposición (4.3), basta probar que $F(\mathcal{A})$ es Fréchet en todos sus puntos.
Sean $x \in F(\mathcal{A})$ y $M \subseteq F(\mathcal{A})$ tal que $x \in \overline{M}$, queremos encontrar una sucesión de puntos en M que converja a x. Escribimos

$$M = M_\omega \cup M_\mathcal{A} \cup M_*$$

donde $M_\omega = M \cap \omega$, $M_\mathcal{A} = M \cap \mathcal{A}$ y $M_* = M \cap \{*\}$, algunos de los cuales pudieran ser vacíos. Y puesto que "la cerradura de la unión es igual a la union de la cerradura", tenemos que

$$\overline{M} = \overline{M_\omega} \cup \overline{M_\mathcal{A}} \cup \overline{M_*}$$

[2]Si existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $|S \cap A_0| = \omega$, entonces $U = \mathcal{A} \setminus \{A_0\} \cup (\omega \setminus A_0) \in \mathcal{N}_*$ y $|S \setminus U| = |S \cap A_0| = \omega$, lo cual implica que S no converge a $*$, contradicción!.

[3]Si existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $S = M \cap A_0$, entonces usando afirmación (4.1) para ese A_0 tenemos $|S| = |M \cap A_0| = |(M \cap A_0) \cap A_0| < \omega$, contradicción!, una sucesión que es constante o eventualmente constante de elementos de ω no converge al punto $*$.

Note ahora que, de la definición de cerradura para un conjunto y la topología de que tiene el espacio de Franklin $F(\mathcal{A})$, tenemos las siguientes observaciones:
Si el conjunto $\{A \in \mathcal{A} : |A \cap M_\omega| = \omega\}$ es infinito, entonces

$$\overline{M_\omega} = M_\omega \cup \{A \in \mathcal{A} : |A \cap M_\omega| = \omega\} \cup \{*\}, \tag{4.4}$$

y para el caso en que $|\{A \in \mathcal{A} : |A \cap M_\omega| = \omega\}| < \omega$

$$\overline{M_\omega} = M_\omega \cup \{A \in \mathcal{A} : |A \cap M_\omega| = \omega\}. \tag{4.5}$$

También, si $|M_\mathcal{A}| \geq \omega$, entonces

$$\overline{M_\mathcal{A}} = M_\mathcal{A} \cup \{*\}, \tag{4.6}$$

para el caso $|M_\mathcal{A}| \geq \omega$

$$\overline{M_\mathcal{A}} = M_\mathcal{A} \tag{4.7}$$

y siempre

$$\overline{M_*} = M_*. \tag{4.8}$$

Ahora, tenemos 3 posibilidades para x:

Caso 1 $x \in \omega$
Puesto que además $x \in \overline{M}$ necesariamente $x \in \overline{M_\omega}$ y por ecuación (4.4) o (4.5) $x \in M_\omega$ por tanto la sucesión constante e igual a x funciona.

Caso 2 $x \in \mathcal{A}$
Entonces tenemos 2 posibilidades $x \in \overline{M_\omega}$ o $x \in \overline{M_\mathcal{A}}$. Si sucede que $x \in \overline{M_\omega}$ entonces $|x \cap M_\omega| = \omega$. Etiquetamos éste conjunto y lo tomamos como la sucesión que buscamos $S = \{x_n : n \in \omega\} = x \cap M_\omega \subseteq M$, es claro que para toda vecindad V de x, $S \subseteq^* V$ por lo tanto S converge a x.
Ahora, si pasa que $x \in \overline{M_\mathcal{A}}$ entonces por ecuación (4.6) o ((4.7)) $x \in M_\mathcal{A} \subseteq M$ y la sucesión constante funciona.

Caso 3 $x = *$
Además vamos a suponer que $x \notin M$ (Claro esta que si $x \in M$, tomamos la sucesión constante igual a x). De ésta forma $M = M_\omega \cup M_\mathcal{A}$ y tenemos 2 posibilidades:
Caso 3.1 $x \in \overline{M_\omega}$
En este caso tenemos que $|\{A \in \mathcal{A} : |A \cap M_\omega| = \omega\}| \geq \omega$ i.e. $M_\omega \in \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$.

Como $\mathcal{A}$ es maximal en ningún lado, en particular $\mathcal{A} \restriction M_\omega$ no es maximal, esto es, existe $S \in [\omega]^\omega$ tal que

$$|S \cap A| < \omega \text{ para cada } A \in \mathcal{A}. \tag{4.9}$$

Veamos que S converge a $*$. Sea $V \in \mathcal{N}_*$ puesto que $\Psi(\mathcal{A}) \setminus V$ tiene que ser compacto, se tiene $|(\Psi(\mathcal{A}) \setminus V) \cap \mathcal{A}| < \omega$, así que V es de la forma[4]

$$V = \Psi(\mathcal{A}) \setminus \left[\{A_0, ..., A_n\} \cup (\bigcup_{i \leq n} A_i \cup F) \right], \tag{4.10}$$

donde $A_0, ..., A_n$ son elementos distintos de $\mathcal{A}$ y F es un finito de ω. De la afirmación (4.9) tenemos

$$|S \cap (\bigcup_{i \leq n} A_i \cup F)| < \omega,$$

y entonces $S \subseteq^* V$.
Caso 3.2 $x \in \overline{M_\mathcal{A}}$
En este caso $|M_\mathcal{A}| \geq \omega$, tomemos una sucesión $S = \{A_n : n \in \omega\}$ de elementos distintos de $M_\mathcal{A} \subseteq M$, sabemos que cada V vecindad de $*$ tiene la forma (4.10), entonces $S \subseteq^* V$. ☑

4.2. Un espacio T_2, compacto y Fréchet cuyo cuadrado no es Fréchet.

Sea $\mathcal{A}$ una familia MAD. Por teorema (1.19) existe $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ y una partición $\{\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1\}$ de $\mathcal{A} \restriction X$ maximales en ningún lado. Puesto que $\mathcal{A}$ es maximal también lo es $\mathcal{A} \restriction X$.

Por lema anterior (4.4) $F(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}_0 \cup \omega \cup \{*_0\}$ y $F(A_1) = \mathcal{A}_1 \cup \omega \cup \{*_1\}$ son Fréchet, compactos y por supuesto Hausdorff. Demostremos ahora que su producto no puede ser Fréchet.

Proposición 4.5 *Sean $D = \{(n, n) : n \in \omega\}$, $x = \{(*_0, *_1)\}$. Entonces $x \in \overline{D}$ y no existe sucesión $\{d_i : i \in \omega\} \subseteq D$ que converja a x.*

[4]Conjuntos de la forma $\{A_0, ..., A_n\} \cup (\bigcup_{i \leq n} A_i \cup F)$ donde $A_i \in \mathcal{A}$ para cada $i \leq n$ y $F \subseteq \omega \setminus \bigcup_{i \leq n} A_i$ es finito, son el tipo de los compactos más grandes que hay en los Ψ-espacios.

Demostración. Demostremos primero que $x \in \overline{D}$. Sea $V \in \mathcal{N}_x$, $V = V_0 \times V_1$ donde $V_i \in \mathcal{N}_{*_i}$, $i \in 2$.

Puesto que cada V_i tiene la forma de la ecuación (4.10) vista en la prueba del lema anterior, $\omega \setminus (V_0 \cap \omega) \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_0), \omega \setminus (V_1 \cap \omega) \in \mathcal{I}(\mathcal{A}_1)$. Existen pues $A_0^0, A_1^0, ...A_r^0 \in \mathcal{A}_0$, $A_0^1, A_1^1, ..., A_s^1 \in \mathcal{A}_1$ tales que

$$\omega \setminus (V_0 \cap \omega) \subseteq^* \bigcup_{i \leq r} A_i^0, \quad \omega \setminus (V_1 \cap \omega) \subseteq^* \bigcup_{i \leq s} A_i^1$$

Entonces

$$\omega \setminus \left(\bigcup_{i \leq r} A_i^0 \cup \bigcup_{i \leq s} A_i^1 \right) \subseteq^* (V_0 \cap \omega) \cap (V_1 \cap \omega). \tag{4.11}$$

Pero $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}_1$ son familias casi ajenas, así que $|\omega \setminus (\bigcup_{i \in r} A_i^0 \cup \bigcup_{i \in s} A_i^1)| = \omega$, entonces, de expresión (4.11) $(V_0 \cap \omega) \cap (V_1 \cap \omega) \neq \emptyset$ por lo que $D \cap V \neq \emptyset$. Hemos demostrado que $x \in \overline{D}$.

Ahora supongamos que existe sucesión $S = \{(n_k, n_k) : k \in \omega\}$ en D que converge a x (note que $|S| = \omega$ pues una sucesión constante o eventualmente constante no converge a x) para llegar a una contradicción. Puesto que $\mathcal{A} \restriction X = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$ es maximal, existe $A \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$ tal que $|A \cap \pi_1(S)^5| = \omega$, de modo que

$$|(A \times \omega) \cap S| = \omega. \tag{4.12}$$

Sin perdida de generalidad, supongamos que $A \in \mathcal{A}_0$ y consideremos la siguiente vecindad de x

$$U = (\mathcal{A}_0 \setminus \{A\} \cup (\omega \setminus A) \cup \{*_0\}) \times F(\mathcal{A}_1) \in \mathcal{N}_x.$$

Entonces $(A \times \omega) \cap U = \emptyset$, así, de ecuación (4.12) es claro que $|S \setminus U| = \omega$. Por lo que S no converge a x, contradicción!. ☑

[5] $\pi_1 : \omega \times \omega \to \omega$ es la función proyección en la primer coordenada, en este caso $\pi_1(S) = \pi_2(S) = \{n_k : k \in \omega\}$

Capítulo 5

Hiperespacios de Ψ-espacios

5.1. Introducción

UN HIPERESPACIO $exp(X)$ de un espacio topologíco X es simplemente el conjunto de todos los cerrados de X salvo el vacío. Con alguna de las topologías que se le pueden dar a este espacio, uno de los problemas fundamentales en la teoría de los hiperespacios, estudiados en la topología general[1], es el saber que propiedades del espacio se pueden transferir al hiperespacio y viceversa. Por ejemplo hay un famoso teorema de Vietoris y E. Michael [7], el cual dice: *X es compacto si y sólo si $exp(X)$ es compacto*, hay más ejemplos de este tipo en [8], [9] y [10].
Por el año 1975 J. Ginsburg [11] planteo la siguiente pregunta; *¿Hay alguna relación entre la pseudocompacidad de $X^\omega, X, X^2, ...$ y la de $exp(X)$?.*, Ginsburg responde parcialmente: *Si $exp(X)$ es pseudocompacto, entonces X^n también lo es, para cada $n \in \omega$*, otra respuesta parcial de J. Cao, T. Noruga y A. Tomita es: *Para un X Hausdorff y homogéneo: Si $exp(X)$ es pseudocompacto entonces X^ω es también pseudocompacto*. En este capítulo se verá además, que es consistente el hecho de que; existe un X tal que X^ω es pseudocompacto pero $exp(X)$ no lo es (teorema 5.31), también es consistente que exista un X tal que ambos X^ω y $exp(X)$ sean pseudocompactos (teorema 5.24).
En la última sección hablamos un poco de selecciones, presentamos un

[1]En la teoría de los continuos, un hiperespacio de un continuo X (espacio métrico, compacto y conexo) es el conjunto de los subconjuntos de X con alguna o varias propiedades topológicas, comúnmente a este hiperespacio se le da la topología inducida por la métrica de Hausdorff y los problemas referidos a los hiperespacios están relacionados con las propiedades topológicas directas que pueden tener éstos.

particular resultado de [12] que usa el teorema de Ramsey visto en el primer capítulo.

5.2. Preliminares

Definición 5.1 *Sea X un espacio topológico, el* ***hiperespacio de*** X *es el conjunto de todos los subconjuntos cerrados, no vacíos de X.*
Denotamos a éste por $exp(X)$.[2]

Hay varias maneras de dar una topología para un hiperespacio, nosotros consideraremos a éste espacio con la topología de Vietoris.

Definición 5.2 *Para un hiperespacio $exp(X)$, la* ***topología de Vietoris*** *es generada por conjuntos sub-básicos de la forma*

$$U^+ = \langle U \rangle := \{F \in exp(X) : F \subseteq U\}$$
$$V^- = \langle X; V \rangle := \{F \in exp(X) : F \cap V \neq \emptyset\}$$

donde $U, V \subseteq X$ son abiertos no vacíos.

Un abierto básico lo denotamos así,

$$\begin{aligned} \langle U; V_0, ..., V_n \rangle &= U^- \cap V_0^+ \cap ... \cap V_n^+ \\ &= \{F \in exp(X) : F \subseteq U, F \cap V_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \leq n\}, \end{aligned}$$

donde $U, V_0, ..., V_n$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X.

Si (X, d) es métrico acotado (i.e. existe $M \in \omega$ tal que para cada $x, y \in X$, $d(x, y) < M$) otra topología posible para $exp(X)$ es la inducida por la métrica $h : exp(X) \times exp(X) \to \mathbb{R}$

$$h(A, B) = \sup_{x \in A \cup B} [d'(x, A) + d'(x, B)]$$

donde la distancia de un punto a un cerrado G se define como

$$d'(x, G) = \inf_{g \in G} d(x, g)$$

[2] A veces se utiliza también la notación 2^X, nosotros siempre utilizaremos $exp(X)$ para referirnos al hiperespacio de X para evitar la confusión con el espacio de la topología producto.

Vamos a necesitar de $\exp(\Psi(\mathcal{A}))$ que sea T_1, demostremos que de hecho es T_2.

Proposición 5.3 *Si X es regular entonces $exp(X)$ es T_2.*

Demostración. Sean $A, B \in exp(X)$, $A \neq B$, sin perdida de generalidad existe $a \in A \setminus B$ y $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in X \setminus U \subseteq X \setminus B$, entonces $B \in \langle U \rangle$, $A \in \langle X; X \setminus B \rangle$ y claramente $\langle U \rangle \cap \langle X; X \setminus B \rangle = \emptyset$ ☑

Del capitulo 2 sabemos que $\Psi(\mathcal{A})$ es completamente regular, entonces tenemos el siguiente corolario

Corolario 5.4 *exp($\Psi(\mathcal{A})$) es T_2.*

Definición 5.5 *Sea X un espacio topológico, $D \subseteq X$, $|D| = \omega$ es* ***secuencialmente compacto relativo a*** *X (Abreviamos sec. comp. rel.) si cualquier sucesión en D tiene una subsucesión convergente en X.*

Definición 5.6 *Sea X un espacio topológico, $D \subseteq X$, $|D| = \omega$ es* ***numerablemente compacto relativo a*** *X (Abreviamos num. comp. rel.) si cualquier sucesión en D tiene un punto de acumulación en X.*

Es claro que si D es secuencialmente compacto relativo a X entonces D es ademas numumerablemente compacto relativo a X, pero no siempre se da la otra implicación.

Proposición 5.7 *Sea X primero numerable, si D es denso en X y sec. comp. rel. a X entonces X es pseudocompacto.*

Demostración. Supongamos que no es cierto, esto es, existe una función continua no acotada $f : X \to \mathbb{R}$. Sin perdida de generalidad suponemos que f es no acotada "por arriba."
Entonces para toda $n \in \omega$ el abierto $f^{-1}[(n, \infty)]$ es no vacío.[3] Y puesto que $\overline{D} = X$ entonces para cada $n \in \omega$

$$f^{-1}[(n, \infty)] \cap D \neq \emptyset$$

i.e. $\forall n \in \omega$ $\exists m > n$ y $\exists d_n \in D$ tal que $f(d_n) = m$.

[3] (r, ∞) denota el conjunto $\{r \in \mathbb{R} : r > n\} \subseteq \mathbb{R}$.

Es claro que podemos conseguir una sucesión $S = \{d_n : n \in \omega\} \subseteq D$ tal que $f(S) = \{f(d_n) : n \in \omega\} \subseteq \mathbb{R}$ es sucesión de enteros estrictamente creciente y no acotada.
Ahora, puesto que D es sec. comp. rel. a X existen $\{d_{n_k} : k \in \omega\}$ subsucesión de S y $x_0 \in X$ tal que $d_{n_k} \longrightarrow x_0$,[4] ya que X es primero numerable y f continua, entonces $f(d_{n_k}) \longrightarrow f(x_0)$, contradicción!, pues $f(S)$ es no acotada. ☑

Proposición 5.8 *Si $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es familia MAD entonces ω es sec. comp. rel. a $\Psi(\mathcal{A})$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia MAD y sea $S = \{m_n : n \in \omega\} \subseteq \omega$ sucesión (suponemos que $|S| = \omega$ pues es claro que una sucesión constante o eventualmente constante siempre tiene subsucesión convergente, de hecho las mismas sucesiones son convergentes), como $\mathcal{A}$ es maximal entonces existe un $A \in \mathcal{A}$ tal que $|S \cap A| = \omega$, de ésta forma, es claro que la subsucesión $S \cap A$ de S converge a A. ☑

Como ω es denso en $\Psi(\mathcal{A})$, por proposiciones (5.7) y (5.8) tenemos que

Proposición 5.9 *El espacio $\Psi(\mathcal{A})$ es pseudocompacto si y sólo si $\mathcal{A}$ es familia MAD.*

Demostración. ($\longleftarrow$) Se sigue del hecho de que ω es denso en $\Psi(\mathcal{A})$ y de las 2 proposiciones anteriores (5.7) y (5.8).

($\longrightarrow$) Procederemos por contradicción, suponemos que $\mathcal{A}$ no es maximal, i.e.

$$\text{existe } A_0 \in [\omega]^\omega \text{ tal que } |A_0 \cap A| < \omega \text{ para cualquier } A \in \mathcal{A}. \tag{5.1}$$

Sea $f : \mathcal{A} \cup \omega \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in \mathcal{A} \cup (\omega \setminus A_0) \\ x & si \quad x \in A_0. \end{cases}$$

Claro esta que f es no acotada. Basta probar que f es continua para llegar a una contradicción. sea $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto, si $0 \notin U$; entonces $f^{-1}[U] \subseteq$

[4]Pensamos en la definición usual de convergencia; $x_n \longrightarrow x$ si para cualquier $U \in \mathcal{N}_x$ existe $N \in \omega$ tal que $x_n \in U$ para toda $n > N$,

$A_0 \subseteq \omega$ es abierto pues los puntos de ω son aislados,[5] si $0 \in U$; entonces $f^{-1}[U] = \mathcal{A} \cup (\omega \setminus A_0) \cup \{x \in A_0 : f(x) \in U\}$ es abierto por (5.1). Así que f continua y además no acotada, contradicción! pues $\Psi(\mathcal{A})$ es pseudocompacto. ☑

La siguiente observación es inmediata de la definición de la topología producto.

Observación 5.10 *Sea X espacio topológico. Si $D \subseteq X$ es denso en X, entonces $D^\omega \subseteq X^\omega$ es denso en X^ω. D^ω y X^ω considerados con la topología producto.*

Proposición 5.11 *Si X es primero numerable entonces X^ω también lo es.*

Demostración. Para cada $x \in X$ sea $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ base local numerable. Es inmediato ver que para cada $f \in X^\omega$, $f : \omega \to X$

$$\mathcal{B}_f = \{\prod_{i \in G} U_i \times X^{\omega \setminus G} : G \in [\omega]^{<\omega},\ U_j \in \mathcal{B}_{f(j)} \text{ para cada } j \in G\},$$

es base local para f y como $|[\omega]^{<\omega}| = \omega$ (la siguiente función es inyectiva: $f : [\omega]^{<\omega} \to \omega$, $f(\{n_0, ..., n_m\}) = 2^{n_0} 3^{n_1} \cdots p(m)^{n_m}$, donde $p(j)$ es el j-ésimo primo) dicha base es numerable. ☑

Del capítulo 1 sabemos que $\Psi(\mathcal{A})$ es primero numerable, tenemos pues el siguiente corolario

Corolario 5.12 *$\Psi(\mathcal{A})^\omega$ es primero numerable.*

Vamos a probar que ω^ω es sec. comp. rel. a $\exp(\Psi(\mathcal{A}))$ para así, con el corolario anterior y la proposición (5.7) concluir que $\Psi(\mathcal{A})^\omega$ es pseudocompacto si $\mathcal{A}$ es maximal.

Proposición 5.13 *ω^ω es sec. comp. rel. a $\Psi(\mathcal{A})$.*

Demostración. Sea $S = \{f_n : n \in \omega\}$ sucesión en ω^ω, pensamos a cada f_n como una función con dominio y codominio ω.
Usaremos la proposición (5.8) para cada proyección de la sucesión.

[5]Puede ser que $f^{-1}[U] = \emptyset$, en todo caso siempre es abierto.

Para $S_0 = \{f_n(0) : n \in \omega\} \subseteq \omega$ existe $I_0 \in [\omega]^\omega$ tal que $\{f_n(0) : n \in I_0\}$ es subsucesión convergente de S_0. Digamos que converge a $x_0 \in \omega$.
Para $S_1 = \{f_n(1) : n \in I_0\} \subseteq \omega$ existe $I_1 \in [\omega]^\omega$, $I_1 \subseteq I_0$ tal que $\{f_n(1) : n \in I_1\}$ es subsucesión convergente de S_1. Digamos que converge a $x_1 \in \omega$.
Para $S_{k+1} = \{f_n(k+1) : n \in I_k\} \subseteq \omega$, $k > 0$ existe $I_{k+1} \in [\omega]^\omega$, $I_{k+1} \subseteq I_k$ tal que $\{f_n(k+1) : n \in I_{k+1}\}$ es subsucesión convergente de S_{k+1}. Digamos que converge a $x_{k+1} \in \omega$.

Hemos conseguido una sucesión decreciente $\{I_n : n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$. Tomemos un a_n en cada I_n y sea $I = \{a_n : n \in \omega\}$, es claro que $I \subseteq^* I_n$ para cada $n \in \omega$. Sea $f : \omega \to \omega$ definida por $f(n) = x_n$ para cada $n \in \omega$. Probemos que $\{f_n : n \in I\}$ es subsucesión de S que converge a f. Sea

$$U = \prod_{i \in F} U_i \times \Psi(\mathcal{A})^{\omega \setminus F} = U_{i_0} \times ... \times U_{i_m} \times \Psi(\mathcal{A})^{\omega \setminus F}$$

vecindad de f, donde $F = \{i_0, ..., i_m\} \in [\omega]^{<\omega}$.
Para cada U_{i_k} existe un $N_k \in \omega$ tal que $f_n(i_k) \in U_{i_k}$ para cada $n \in I_{i_k}$, $n > N_k$.
Ya que $I \subseteq^* I_{i_k}$ para cada $k \leq m$ entonces para cada U_{i_k} existe un $M_k \in \omega$ tal que $f_n(i_k) \in U_{i_k}$ para cada $n \in I$, $n > M_k$.
Sea $M = \text{máx}\{M_k : k \leq m\}$, es inmediato que para cada $k \leq m$ $f_n(i_k) \in U_{i_k}$ para cada $n \in I$, $n > M$. Y por lo tanto, $f_n \in U$ para cada $n \in I$, $n > M$, esto es, $\{f_n : n \in I\}$ converge a f. ☑

Teorema 5.14 *El espacio $\Psi(\mathcal{A})^\omega$ con la topología producto es pseudocompacto siempre que $\mathcal{A}$ sea familia MAD.*

Demostración. Es consecuencia de las proposiciones (5.7), (5.13) y el corolario (5.12).

5.3. Pseudocompacidad de $exp(\Psi(\mathcal{A}))$

Veamos ahora algunos lemas que nos ayudarán a probar el teorema principal de este capítulo, referentes a la topología de Vietoris.

Definición 5.15 *Denotaremos por **Fin** al conjunto de todos los subconjuntos finitos no vacíos de ω. i.e.*

$$Fin = [\omega]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$$

Lema 5.16 *Fin es un subconjunto denso de puntos aislados de* $exp(\Psi(\mathcal{A}))$.

Demostración. Note que siempre hay un finito (un elemento de Fin) en cualquier abierto $\langle U; V_0, ..., V_n \rangle$ distinto del vacío, se sigue pues que $\overline{Fin} = exp(\Psi(\mathcal{A}))$.
Ahora, para un $F = \{n_0, ..., n_m\} \in Fin$ el abierto que lo aísla es precisamente ese finito

$$\langle F; \{n_0\}, ..., \{n_m\} \rangle = \{F\}.$$

☑

Lema 5.17 *Sea X un espacio topológico T_1 y supongamos que $D \subseteq X$ es un denso infinito con sus puntos aislados. Entonces los siguientes son equivalentes*

1. *X es pseudocompacto.*
2. *D es num. comp. rel. a X.*

Demostración. $(\rightarrow)$ Supongamos que no es cierto. Sea $S \in [D]^\omega$ que no tiene puntos de acumulación en X.
Demostremos primero que $X \setminus S$ es abierto.
Sea $x \in X \setminus S$, como S no tiene puntos de acumulación en X existe $U \in \mathcal{N}_x$ tal que $|U \cap S| < \omega$, digamos $U \cap S = \{s'_0, ..., s'_n\}$. Entonces, como cada punto es cerrado, $U \setminus \{s'_0, ..., s'_n\}$ es un abierto contenido en $X \setminus S$, de ésta forma se tiene que $X \setminus S$ es abierto.
Enumeremos a S, $S = \{s_n : n \in \omega\}$ y definamos la siguiente función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in X \setminus S \\ n & \text{si } x \in S, \ x = s_n. \end{cases}$$

Claramente es no acotada. Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto, si $0 \notin U$; entonces $f^{-1}[U] \subseteq S \subseteq D$ es abierto pues los puntos de D son aislados,[6] si $0 \in U$; entonces $f^{-1}[U] = (X \setminus S) \cup \{x \in S : f(x) \in U\}$ es abierto pues $X \setminus S$ es abierto.
Así que f es continua, no acotada. Contradicción pues X es pseudocompacto.

$(\leftarrow)$ Supongamos que no es cierto, i.e existe $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua no acotada.
De forma similar que en la demostración de la proposición (5.7) tenemos

[6] Puede ser que $f^{-1}[U] = \emptyset$, en todo caso siempre es abierto.

que existe $S = \{d_n : n \in \omega\} \subseteq D$ sucesión tal que $f(S) = \{f(d_n) : n \in \omega\} \subseteq \mathbb{R}$ es sucesión estrictamente creciente y no acotada.
Puesto que D es num. comp. rel. a X, existe $x \in X$ punto de acumulación de S. Entonces como X es T_1 tenemos que

$$\forall\, U \in \mathcal{N}_x \ \ |U \cap S| = \omega.^7 \tag{5.2}$$

Sea $V = \{r \in \mathbb{R} : f(x) - 1 < r < f(x) + 1\}$ una vecindad de $f(x)$, como $f(S)$ es estrictamente creciente y no acotada entonces $|V \cap f(S)| < \omega$, pero por (5.2) tenemos que $|f^{-1}[V] \cap S| = \omega$. Contradicción, por lo tanto X es pseudocompacto. ☑

Introducimos ahora algo de notación para simplificar la formulación del lema que sigue. Para el resto de la sección $\mathcal{A}$ denota una familia casi ajena maximal.

Notación 5.18 *Dados sucesión $Y = \{F_n : n \in \omega\} \subseteq Fin$, $F \in exp(\Psi(\mathcal{A}))$ y $A \subseteq \omega$ tenemos la siguiente notación:*

- ☣ $I_A^Y = \{n \in \omega : A \cap F_n \neq \emptyset\}$,
- ☣ $M_A^Y = \{n \in \omega : F_n \subseteq A\}$,
- ☣ $\mathcal{F}_F^Y = \{I_{A\setminus k}^Y : A \in F \cap \mathcal{A},\ k \in \omega\} \cup \{I_{\{n\}}^Y : n \in F \cap \omega\}$.

Definición 5.19 *Una familia $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ es **centrada** si $\bigcap F$ es infinito para cualquier $F \subseteq \mathcal{F}$ finito, no vacio.*

Lema 5.20 *Dados $Y = \{F_n : n \in \omega\} \subseteq Fin$ sucesión y $F \in exp(\Psi(\mathcal{A}))$, los siguientes son equivalentes*

- ☣ *F es un punto de acumulación de Y.*
- ☣ *$\mathcal{F}_F^Y$ es centrada y para todo $P \subseteq \omega$ uno de los siguientes pasa:*
  1. *$(F \cap \omega) \setminus P \neq \emptyset$,*
  2. *existe un $A \in F \cap \mathcal{A}$ tal que $A \setminus P$ es infinito,*

[7] Si existiera $V \in \mathcal{N}_x$ tal que $V \cap S = \{s_1, ..., s_n\}$ entonces $\{x\} = V \setminus \{s_1, ..., s_n\}$ sería abierto contradiciendo el hecho de que $x \in S'$.

3. $\mathcal{F}_F^Y \cup \{M_P^Y\}$ *es centrada.*

Demostración. $(\rightarrow)$ Suponemos que F es punto de acumulación de $Y = \{F_n : n \in \omega\}$ sucesión de Fin. Sea $Q \subseteq \mathcal{F}_F^Y$, Q finito, entonces

$$Q = \{I_{A_0 \setminus k_0}^Y, ..., I_{A_n \setminus k_n}^Y, ..., I_{\{n_0\}}^Y, ..., I_{\{n_m\}}^Y\}$$

donde $A_i \in F \cap \mathcal{A}$, $k_i \in \omega$ para cada $i \leq n$ y $n_i \in F \cap \omega$ para cada $j \leq m$. Sea

$$U = \langle \Psi(\mathcal{A}); \{A_0\} \cup (A_0 \setminus k_0), ..., \{A_n\} \cup (A_n \setminus k_n), \{n_0\}, ..., \{n_m\}\rangle,$$

es una vecindad abierta de F, como $F \in Y'$ y $exp(\Psi(\mathcal{A}))$ es T_1 entonces

$$|U \cap Y| = \omega$$

esto es, existe $I \in [\omega]^\omega$ tal que $U \cap Y = \{F_i : i \in I\}$. De ésta forma, para cada $i \in I$

$$(A_j \setminus k_j) \cap F_i \neq \emptyset \text{ siempre que } j \leq n \;\; y \;\; \{n_l\} \cap F_i \neq \emptyset \text{ siempre que } l \leq m$$

Entonces, de la definición de I_A^Y, para cada $i \in I$

$$i \in I_{A_j \setminus k_j}^Y \text{ para cada } j \leq n \;\; e \;\; i \in I_{\{n_l\}}^Y \text{ para cada } l \leq m$$

Así pues,

$$\bigcap Q = \bigcap_{j \leq n} I_{A_j \setminus k_j}^Y \cap \bigcap_{l \leq m} I_{\{n_l\}}^Y = I$$

es infinito.

Ahora, sea $P \subseteq \omega$, suponemos que no se cumplen (1) ni (2) y demostremos que (3) es cierto.

De $\neg$ (1) y $\neg$ (2) tenemos que

$$F \cap \omega \subseteq P \text{ y } \forall A \in F \cap \mathcal{A} \;\; A \subseteq^* P$$

Esto implica que $V = P \cup (F \cap \mathcal{A})$ es abierto en $\Psi(\mathcal{A})$ que contiene a F. Para demostrar que $\mathcal{F}_F^Y \cup \{M_P^Y\}$ es centrada haremos lo mismo que hicimos al demostrar que $\mathcal{F}_F^Y$ es centrada pero en la vecindad de F en lugar de usar $\Psi(\mathcal{A})$ usaremos V. Sea $\mathcal{F} \in [\mathcal{F}_F^Y \cup \{M_P^Y\}]^{<\omega}$, entonces

$$\mathcal{F} = \{I^Y_{A_0 \setminus k_0}, ..., I^Y_{A_n \setminus k_n}, ..., I^Y_{\{n_0\}}, ..., I^Y_{\{n_m\}}, M_P^Y\}^8$$

donde $A_i \in F \cap \mathcal{A}$, $k_i \in \omega$ para cada $i \leq n$ y $n_i \in F \cap \omega$ para cada $j \leq m$. Sea

$$W = \langle P \cup (F \cap \mathcal{A}); \{A_0\} \cup (A_0 \setminus k_0), ..., \{A_n\} \cup (A_n \setminus k_n), \{n_0\}, ..., \{n_m\} \rangle,$$

es una vecindad de F, como $F \in Y'$ y $exp(\Psi(\mathcal{A}))$ es T_1 entonces

$$|W \cap Y| = \omega$$

esto es, existe $J \in [\omega]^\omega$ tal que para cada $i \in J$

☣ $F_i \subseteq P \cup (F \cap \mathcal{A})$,

☣ $(A_j \setminus k_j) \cap F_i \neq \emptyset$ para cada $j \leq n$ y

☣ $\{n_l\} \cap F_i \neq \emptyset$ para cada $l \leq m$

Esto implica que para cada $i \in J$

☣ $i \in M_P^Y$,

☣ $i \in I^Y_{A_j \setminus k_j}$ para cada $j \leq n$ y

☣ $i \in I^Y_{\{n_l\}}$ para cada $l \leq m$.

Entonces

$$\bigcap \mathcal{F} = M_P^Y \cap \bigcap_{j \leq n} I^Y_{A_j \setminus k_j} \cap \bigcap_{l \leq m} I^Y_{\{n_l\}} = J$$

es infinito.

$(\leftarrow)$ Sea

$$U = \langle V; \{A_0\} \cup (A_0 \setminus k_0), ..., \{A_n\} \cup (A_n \setminus k_n), \{n_0\}, ...\{n_m\} \rangle$$

una típica vecindad abierta de F donde V es abierto de $\Psi(\mathcal{A})$ que contiene a F, entonces existe $q \subseteq n$ tal que

[8] Claro esta que el caso no trivial es cuando $M_P^Y \in \mathcal{F}$.

$A_l \in F$ para cada $l \in q$,

$\exists r_l \in (A_l \setminus k_l) \cap F$ para cada $l \in n \setminus q$ y

$n_l \in F$ para cada $l \leq m$.
Si $P = V \cap \omega \subseteq \omega$, como $F \subseteq V$ entonces

$$F \cap \omega \setminus P = \emptyset, \tag{5.3}$$

y puesto que V es abierto entonces

$$\forall A \in F \cap \mathcal{A}\ |A \setminus P| < \omega. \tag{5.4}$$

Así pues, se tiene que $\mathcal{F}_F^Y \cup \{M_{V\cap\omega}^Y\}$ es centrada. Como $I_{A_i\setminus k_i}^Y, I_{\{r_j\}}^Y, I_{\{n_l\}}^Y \in \mathcal{F}_F^Y$ para cada $i \in q$, $j \in n \setminus q$ y $l \leq m$, existe $I \in [\omega]^\omega$ tal que

$$\bigcap_{i\in q} I_{A_i\setminus k_i}^Y \cap \bigcap_{j\in n\setminus q} I_{\{r_i\}}^Y \cap \bigcap_{l<m} I_{\{n_l\}}^Y \cap \{p \in \omega : F_p \subseteq V \cap \omega\} = I.$$

Por lo que $U \cap Y = \{F_i : i \in I\}$. Es pues F punto de acumulación de Y. ☑

Para el caso en que la sucesión Y sus elementos sean ajenos a pares[9] el lema anterior se simplifica;

Corolario 5.21 *Sea $Y = \{F_n : n \in \omega\}$ sucesión de conjuntos ajenos a pares en Fin, si F es punto de acumulación de Y entonces*

1. *$F \cap \omega = \emptyset$ y además*
2. *La familia $\{I_A^Y : A \in F\} \cup \{M_P^Y\}$ es centrada para cada $P \subseteq \omega$ tal que $A \subseteq^* P$ para todo $A \in F$.*

Demostración. Si suponemos que existe $n \in F \cap \omega$ entonces $U = \langle \Psi(\mathcal{A}); \{n\}\rangle$ es vecindad de F, pero como los elementos de Y son ajenos a pares entonces $|U \cap Y| \leq 1$, contradicción! pues $F \in Y'$. Entonces $F \cap \omega = \emptyset$. Ahora, por lema anterior $\mathcal{F}_F^Y \cup \{M_P^Y\}$ es centrada (y por lo tanto $\{I_A^Y : A \in F\} \cup \{M_P^Y\}$) si y sólo si $F \in Y'$, $(F \cap \omega) \setminus P = \emptyset$ y $|A \setminus P| < \omega$ para cada $A \in F \cap \mathcal{A}$. Esto es cierto pues $F \cap \omega = \emptyset$ y $A \subseteq^* P$ para cada $A \in F = F \cap \mathcal{A}$. ☑

[9]Esto es, $F_n \cap F_m = \emptyset$ para cada $n \neq m$.

Definición 5.22 *Decimos que $A \in [\omega]^\omega$ es una **pseudointersección** para una familia $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$, si $A \subseteq^* F$ para cada $F \in \mathcal{F}$.*
*El **número de pseudointersección** $\mathfrak{p}$ se define como el cardinal mínimo de una familia centrada $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ sin pseudointersección, esto es $\kappa < \mathfrak{p} \Leftrightarrow$*

$$\forall \mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega \text{ centrada y } |\mathcal{F}| \leq \kappa\ \exists A \in [\omega]^\omega \text{ tal que } A \subseteq^* F \text{ para todo } F \in \mathcal{F}$$

Notación 5.23 *Al cardinal de 2^ω lo denotamos por $\mathfrak{c}$.*

El teorema que viene a continuación solo es cierto si aceptamos la hipótesis de que $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, hipótesis consistente e independiente del sistema ZFC. Despues veremos que bajo otra hipotesis distinta, existe una familia MAD $\mathcal{A}$ tal que $exp(\Psi(\mathcal{A}))$ no es pseudocompacto.[10]

Teorema 5.24 ($\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$) *El hiperespacio $exp(\Psi(\mathcal{A}))$ es pseudocompacto para cada $\mathcal{A}$ familia MAD.*

Demostración. Por lemas (5.16) , (5.17) y proposición (5.3) basta probar que para cualquier $Y = \{F_n : n \in \omega\}$ sucesión en Fin existe un punto de acumulación en $exp(\Psi(\mathcal{A}))$.

Sea pues $Y = \{F_n : n \in \omega\} \subseteq Fin$ sucesión y sea $\langle P_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\rangle$ enumeración de $[\omega]^\omega$ [11] donde cada $P \subseteq \omega$ aparece $\mathfrak{c}$ veces i.e. $\forall P \in [\omega]^\omega$ existe $I \in [\mathfrak{c}]^\mathfrak{c}$ tal que $\forall \alpha \in I\ P = P_\alpha$ (Esto es posible pues $|\mathfrak{c}| = |\mathfrak{c} \times \mathfrak{c}|$) y además $P_0 = \omega$.
Queremos construir una familia $\langle E_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\rangle$ con las siguientes propiedades:

1. $E_\alpha \subseteq \Psi(\mathcal{A})$,
2. $|E_\alpha| \leq |\alpha| + \omega$,

[10] Los 9 axiomas de Zermelo-Frankel junto con el axioma de elección que se ven en el primer curso de Teoría de Conjuntos.
Consistente quiere decir que con ZFC no es posible demostrar que $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{c}$.
Independiente quiere decir que con ZFC no es posible demostrar que $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. Véase [15].
[11] $|[\omega]^\omega| = 2^\omega$ pues la siguiente función es inyectiva:
$f : [\omega]^\omega \to 2^\omega$, $f(A) = g$, donde $g : \omega \to 2$ es $g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in A, \\ 1 & \text{si } n \notin A. \end{cases}$
y es claro que $|2^\omega| \leq |[\omega]^\omega|$.
O si lo prefiere, del hecho de que $|[\omega]^{<\omega}| = \omega$, $[\omega]^\omega \cup [\omega]^{<\omega} = \mathcal{P}(\omega)$ y $|\mathcal{P}(\omega)| = |2^\omega|$.

3. Si $\alpha < \beta$ entonces $E_\alpha \subseteq E_\beta$,
4. $\mathcal{F}_\alpha = \{I^Y_{A\setminus k} : A \in E_\alpha \cap \mathcal{A}, k \in \omega\} \cup \{I^Y_{\{m\}} : m \in E_\alpha \cap \omega\}$ es centrada,
5. Alguna de las siguientes ocurre

   a) $(E_\alpha \setminus P_\alpha) \cap \omega \neq \emptyset$,
   b) Existe $A \in E_\alpha \cap \mathcal{A}$ tal que $|A \setminus P_\alpha| = \omega$,
   c) $\mathcal{F}_\alpha \cup \{M^Y_{P_\alpha}\}$ es centrada.

Construyamos de manera recursiva los $E'_\alpha s$. Hacemos $E_0 = \emptyset$ y verificamos que satisfaga las propiedades:
Las propiedades 1., 2. y 3. se satisfacen de manera inmediata, $\mathcal{F}_0 = \emptyset$ es centrada por lo que 4. también se satisface y de 5. Se cumple *c*), pues $\mathcal{F}_0 \cup \{M^Y_\omega\} = \{\omega\}$ es centrada.

Suponemos que ya hemos construido $\langle E_\beta : \beta < \alpha < \mathfrak{c}\rangle$, con las propiedades arriba mencionadas, queremos a partir de éstas definir a E_α.
Puesto que para cada $\beta < \alpha$ $\mathcal{F}_\beta$ es centrada entonces también lo es $\mathcal{F} := \langle\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{F}_\beta\rangle$ [12] y recíprocamente; si $\mathcal{F}$ es centrada entonces también lo es $\mathcal{F}_\beta$ para cada $\beta < \alpha$. Tenemos los siguientes 2 casos:

☣ $\mathcal{F} \cup \{M^Y_{P_\alpha}\}$ es centrada
Entonces hacemos
$$E_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} E_\beta.$$

Verificamos que satisfaga las propiedades:
Las propiedades 1. y 3. son inmediatas, 2. se verifica fácil usando inducción transfinita sobre α, 4. es además inmediato pues por 3. los $E'_\beta s$ son centrados y de 5. se cumple *c*) ya que suponemos que $\mathcal{F} \cup \{M^Y_{P_\alpha}\}$ es centrada.

☣ $\mathcal{F} \cup \{M^Y_{P_\alpha}\}$ no es centrada.
Puesto que $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ es centrada y $|\mathcal{F}| < \mathfrak{c} = \mathfrak{p}$, entonces de la definición de $\mathfrak{p}$ tenemos que existe $I \in [\omega]^\omega$ tal que $I \subseteq^* F$ para cada

[12] Para g conjunto $\langle g\rangle$ es la familia de los subconjuntos finitos de g, i.e. $\langle g\rangle = \{\bigcap_{G\in H} G : H \in [g]^{<\omega}\}$. No confundir con el abierto $\langle U\rangle = U^+$ de $exp(\Psi(\mathcal{A}))$.

$F \in \mathcal{F}$.
Ahora, como $\mathcal{F} \cup \{M^Y_{P_\alpha}\}$ no es centrada entonces $|I \cap M^Y_{P_\alpha}| < \omega$.
Para $J = I \setminus M^Y_{P_\alpha} \in [\omega]^\omega$ tenemos que

$$J \subseteq^* F \text{ para cada } F \in \mathcal{F}, \text{ además } J \cap M^Y_{P_\alpha} = \emptyset. \tag{5.5}$$

Tenemos los siguientes 2 subcasos:

- Existe $m \in \omega \setminus P_\alpha$ tal que $|\{n \in J : m \in F_n\}| = \omega$.
  En este caso hacemos

  $$E_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} E_\beta \cup \{m\}$$

  Vemos que se satisfacen las propiedades:
  las propiedades 1., 2. y 3. se satisfacen de manera inmediata, demostremos que la propiedad 4. se satisface, para esto, sea

  $$G = \{I^Y_{A_0}, ...I^Y_{A_i}, I^Y_{\{m_0\}}, ..., I^Y_{\{m_j\}}, I^Y_{\{m\}}\} \in [\mathcal{F}_\alpha]^{<\omega}.$$

  Tenemos que

  $$I^Y_{\{m\}} = \{n \in \omega : m \in F_n\} \supseteq \{n \in J : m \in F_n\}$$

  y como

  $$\{n \in J : m \in F_n\} \subseteq J \subseteq^* F \text{ para cada } F \in \mathcal{F}$$

  Entonces

  $$\{n \in J : m \in F_n\} \subseteq^* \bigcap_{l\leq i} I^Y_{A_l\setminus k_l} \cap \bigcap_{l\leq j} I^Y_{\{m_l\}}$$

  Así pues

  $$|\bigcap G| = |\bigcap_{l\leq i} I^Y_{A_l\setminus k_l} \cap \bigcap_{l\leq j} I^Y_{\{m_l\}} \cap I^Y_{\{m\}}| \geq |\{n \in J : m \in F_n\}| = \omega.$$

  De la propiedad 5. se cumple *a*), ya que $m \in (E_\alpha \setminus P_\alpha) \cap \omega$.

- Para cada $m \in \omega \setminus P_\alpha$ $|\{n \in J : m \in F_n\}| < \omega$.
  Puesto que de 5.5 tenemos que $J \cap M^Y_{P_\alpha} = \emptyset$ entonces para toda $n \in J$ existe $k \in F_n \setminus P_\alpha$ y puesto que cada F_n es finito entonces

$$|\bigcup_{n \in J} F_n \setminus P_\alpha| = \omega$$

Ya que $\mathcal{A}$ es maximal existe $A \in \mathcal{A}$ tal que

$$|A \cap (\bigcup_{n \in J} F_n \setminus P_\alpha)| = \omega \tag{5.6}$$

Hacemos en este caso

$$E_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} E_\beta \cup \{A\}.$$

Verificamos que se cumplan las propiedades:
Las propiedades 1., 2. y 3. se satisfacen de forma inmediata, demostremos que la propiedad 4. se satisface, para esto, sea

$$G = \{I^Y_{A_0}, ... I^Y_{A_i}, I^Y_{\{m_0\}}, ..., I^Y_{\{m_j\}}, I^Y_{A \setminus k}\} \in [\mathcal{F}_\alpha]^{<\omega}.$$

Tenemos que

$$I^Y_{A \setminus k} = \{n \in \omega : (A \setminus k) \cap F_n \neq \emptyset\} \supseteq \{n \in J : A \cap F_n \neq \emptyset\}$$

por eq. (5.6) tenemos que $|A \cap \bigcup_{n \in J} F_n| = \omega$ y como cada F_n es finito tenemos que

$$|\{n \in J : A \cap F_n \neq \emptyset\}| = \omega$$

además

$$\{n \in J : A \cap F_n \neq \emptyset\} \subseteq J \subseteq^* F \text{ para cada } F \in \mathcal{F}.$$

Entonces

$$\{n \in J : A \cap F_n \neq \emptyset\} \subseteq^* \bigcap_{l \leq i} I^Y_{A_l \setminus k_l} \cap \bigcap_{l \leq j} I^Y_{\{m_l\}}.$$

Así pues

$$|\bigcap G| = |\bigcap_{l \leq i} I^Y_{A_l \setminus k_l} \cap \bigcap_{l \leq j} I^Y_{\{m_l\}} \cap I^Y_{A \setminus k}| \geq |\{n \in J : A \cap F_n \neq \emptyset\}| = \omega.$$

De 5. se verifica *b*) pues $|A \setminus P_\alpha| = \omega$ por eq. (5.6).

Hemos pues conseguido la familia $T = \langle E_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\rangle$ con las propiedades pedidas. Sea

$$E = \overline{\bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} E_\alpha} \tag{5.7}$$

Ahora, demostremos que E es punto de acumulación de Y en el hiperespacio $exp(\Psi(\mathcal{A}))$, por lema (5.20) basta con probar lo siguiente:
$\mathcal{F}_E^Y$ es centrada y para cada $P \subseteq \omega$ pasa alguna de las siguientes:

- $(E \cap \omega) \setminus P \neq \emptyset$.
- *Existe un* $A \in E \cap \mathcal{A}$ *tal que* $|A \setminus P| = \omega$.
- $\mathcal{F}_E^Y \cup \{M_P^Y\}$ *es centrada.*

Note que lo anterior se cumple para $\bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} E_\alpha$, pero dicho conjunto no tenemos la garantía de que sea cerrado (y por tanto que esté en el hiperespacio $exp(\Psi(\mathcal{A}))$).
$\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} \mathcal{F}_\alpha$ es centrada por las propiedades 3 y 4 de la familia T.
Como los puntos de ω son aislados entonces

$$E \setminus \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} E_\alpha \subseteq \mathcal{A}. \tag{5.8}$$

Además si $A \in E \setminus \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} E_\alpha$ entonces de la definición de cerradura, para cada $k \in \omega$, $(\{A\} \cup (A \setminus k)) \cap \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} E_\alpha \cap \omega \neq \emptyset$
Esto es

$$\forall A \in E \setminus \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} E_\alpha,\ \forall k \in \omega \quad (A \setminus k) \cap \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} E_\alpha \cap \omega \neq \emptyset$$

Entonces

$$\forall A \in E \setminus \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} E_\alpha,\ \forall k \in \omega\ \ \exists m \in \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} E_\alpha \text{ tal que } I_{\{m\}}^Y \subseteq I_{A\setminus k}^Y. \tag{5.9}$$

Tenemos pues que

$$\text{Para toda } F \in \mathcal{F}_E^Y \text{ existe } G \in \mathcal{F} \text{ tal que } G \subseteq F.$$

Por lo que no tenemos que preocuparnos por los elementos de $E \setminus \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} E_\alpha$, de este modo $\mathcal{F}_E^Y$ es centrada porque $\mathcal{F}$ lo es.
Sea ahora $P \subseteq \omega$ y supongamos que $\mathcal{F}_E^Y \cup \{M_P^Y\}$ no es centrada, entonces

existen $A_0, ..., A_i \in E \cap \mathcal{A}$, $k_0, ..., k_i \in \omega$, $m_0, ..., m_j \in E \cap \omega \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} E_\alpha \cap \omega$ tales que

$$|\bigcap_{l\leq i} I^Y_{A_l \setminus k_l} \cap \bigcap_{l\leq j} I^Y_{m_l} \cap M^Y_P| < \omega. \tag{5.10}$$

Si acaso tenemos que algún $A_t \in E \setminus \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} E_\alpha$ entonces reemplazamos a éste por el $m'_t \in \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} E_\alpha$ tal que $I^Y_{\{m'_t\}} \subseteq I^Y_{A_t \setminus k_t}$ de ecuación (5.9).
Entonces podemos, sin perdida de generalidad, suponer que existen $A_0, ..., A_i \in \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} E_\alpha \cap \mathcal{A}$, $k_0, ..., k_i \in \omega$ y $m_0, ..., m_j \in \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} E_\alpha \cap \omega$ tales que

$$|\bigcap_{l\leq i} I^Y_{A_l \setminus k_l} \cap \bigcap_{l\leq j} I^Y_{m_l} \cap M^Y_P| < \omega.$$

Sea $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $A_0, ..., A_j, m_0, ..., m_j \in E_\alpha$, ya que cada P_α aparece $\mathfrak{c}$-veces en la enumeración, existe $\beta < \alpha$ tal que

$$P_\beta = P. \tag{5.11}$$

Los E_α son crecientes (propiedad (3)), entonces $A_0, ..., A_j, m_0, ..., m_j \in E_\beta$, de este modo, por propiedad (5) de E_β, $\mathcal{F}_\beta \cup \{M^Y_{P_\beta}\}$ no es centrada y por lo tanto

$$(E_\beta \setminus P_\beta) \cap \omega \neq \emptyset \vee \exists A \in E_\beta \cap \mathcal{A} \text{ tal que } |A \setminus P_\beta| = \omega.$$

Pero los E_α's son centradas, $P_\beta = P$ y $E_\beta \subseteq E$, entonces

$$(E \setminus P) \cap \omega \neq \emptyset \vee \exists A \in E \cap \mathcal{A} \text{ tal que } |A \setminus P| = \omega,$$

como pedíamos. ☑

Veremos ahora que podemos agregar una nueva hipótesis, por su puesto consistente e independiente a ZFC, con la cual, podemos demostrar que existe una familia casi ajena maximal $\mathcal{A}$ tal que $exp(\Psi(\mathcal{A}))$ no es pseudocompacto. Con esto concluimos que existen "extensiones de ZFC"en las cuales tenemos los siguientes resultados:
$(\mathfrak{p} = \mathfrak{c})$, para cada $\mathcal{A}$ familia MAD:

$$\Psi(\mathcal{A})^\omega \text{ y } exp(\Psi(\mathcal{A})) \text{ son pseudocompactos.}$$

$(non(\mathcal{M}) > \mathfrak{h})$, existe $\mathcal{A}$ familia MAD tal que:

$$\Psi(\mathcal{A})^\omega \text{ es pseudocompacto pero } exp(\Psi(\mathcal{A})) \text{ no lo es.}$$

Hacemos un par de definiciones previas a la definición del cardinal $\mathfrak{h}$, llamado **número de distributividad** y el $non(\mathcal{M})$, llamado cardinal **non-meager**.

Definición 5.25 *Decimos que una familia $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ es **densa** si para cada $X \in [\omega]^\omega$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq^* X$.*

Definición 5.26 *Decimos que una familia $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ es **abierta** si para cada $F \in \mathcal{F}$ y cada $X \in [\omega]^\omega$, si $X \subseteq^* X$, entonces $X \in \mathcal{F}$.*

Definición 5.27 *Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $D \subseteq X$ decimos que es **denso en ninguna parte** si $Int(\overline{D}) = \emptyset$, donde $Int(T)$ es el **interior** de T, esto es, $Int(T) = \{x \in T :$ existe vecindad V abierta de x con $V \subseteq T\}$.*

Definición 5.28 *Sea X un espacio topológico. Decimos que un subconjunto $D \subseteq X$ es de **primera categoría** si D es la union numerable de conjuntos nunca densos.*

Definición 5.29

$$\mathfrak{h} = \text{mín}\{|\mathcal{D}| : \begin{array}{l} \mathcal{D} \textit{ es un conjunto de familias densas y abiertas} \\ \textit{en } [\omega]^\omega \textit{ con } \bigcap \mathcal{D} = \emptyset\}. \end{array}$$

$$non(\mathcal{M}) = \{|X| : X \subseteq 2^\omega \textit{ tal que } X \textit{ no es de primera categoria}\}.$$

Se sabe que $\mathfrak{h} \leq non(\mathcal{M})$ y se sabe además que la desigualdad estricta es consistente e independiente de ZFC. Del teorema (A.28) y lema (A.27) del apéndice B, podemos ahora demostrar el siguiente teorema, el cual complementa al teorema anterior, primero vemos el siguiente lema.

Lema 5.30 *Sea $T \subseteq [\omega]^\omega$ una familia como en el teorema (A.28) del apéndice A. Existe una familia MAD $\mathcal{A} \subseteq [\triangle]^\omega$ ($\triangle = \{(m,n) \in \omega \times \omega : n \leq m\}$) tal que:*

1. *$A \in \mathcal{A}$ es la gráfica de una función parcial, esto es, $A \in [\triangle]^\omega$ y siempre que $(m,n), (m,n') \in A$ entonces $n = n'$.*
2. *$dom(A) \in T$ para cada $A \in \mathcal{A}$ ($dom(A) = \pi_1(A)$).[13]*
3. *Si $A \neq B$, entonces $dom(A) \neq dom(B)$.*

[13] π_i es la función proyección en la i-ésima coordenada, en este caso; $\pi_1(A) = \{m \in \omega : \exists n \in \omega\ (m,n) \in A\}$.

Demostración. Sea $T \subseteq [\omega]^\omega$ familia como en el teorema (A.28). Sea $\{X_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ una enumeración de los elementos de $[\triangle]^\omega$. Vamos a construir la familia $\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} \mathcal{A}_\alpha$, $\mathcal{A}_\alpha = \{A_\beta : \beta \leq \alpha\} \subseteq \mathcal{P}(\triangle)$ familia AD. Como $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}_\alpha$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, entonces por proposición (1.10) también $\mathcal{A}$ será una familia AD. Construyamos tal familia de forma recursiva, que cumpla con las siguientes propiedades para cada α:

i) $|\mathcal{A}_\alpha| \leq |\alpha| + \omega$,

ii) A_β es la gráfica de una función parcial en $[\triangle]^\omega$ para cada $\beta \leq \alpha$.

iii) $dom(A_\beta) \in T \setminus \{dom(A_\gamma) : \gamma < \beta\}$ para cada $\beta \leq \alpha$.

iv) Existe $\beta \leq \alpha$ tal que $|X_\alpha \cap A_\beta| = \omega$.

De *ii*) tendremos la propiedad $1.$, por *iii*) tendremos $2.$ y $3.$, *iv*) nos garantizará que la familia $\mathcal{A}$ sea MAD, pues nos dice que no podemos agregar a ningún X_α a nuestra familia, sin que deje ésta de ser casi ajena y *i* es únicamente para garantizar que podemos seguir en cada paso de la recursión.

De la segunda propiedad de la familia T del teorema (A.28), existe $B \in T$ tal que $B \subseteq^* \pi_1(X_0)$, existe pues $F \subseteq B$ finito con $B \setminus F \subseteq \pi_1(X_0)$. Entonces hacemos

$$\mathcal{A}_0 = \{A_0\}, \tag{5.12}$$

donde

$$A_0 = \{(m, n) : m \in B \setminus F,\ n = \min\{t : (m, t) \in X_0\}\} \cup \{(m, 0) : m \in F\}. \tag{5.13}$$

Así, $|\mathcal{A}_0| = 1 \leq 0 + \omega$ y es claro que A_0 es la gráfica de una función parcial, también $dom(A_0) = B \in T$ y como $B \setminus F \subseteq \pi_1(X_0)$, tenemos que $A_0 \subseteq^* X_0$, por lo tanto $X_0 \cap A_0 =^* A_0$, pero $|A_0| = |B| = \omega$ ($B \in T \subseteq [\omega]^\omega$), así que, $|X_0 \cap A_0| = \omega$.

Suponemos que para cada $\beta < \alpha$ ya hemos conseguido $\mathcal{A}_\beta = \{A_\gamma : \gamma \leq \beta\}$ familia casi ajena con las propiedades *i*), *ii*), *iii* y *iv*), queremos decir ahora quien será A_α. Tenemos los siguientes 2 casos:

Caso 1 Existe algún $\beta < \alpha$ tal que $|X_\alpha \cap A_\beta| = \omega$.
En este caso hacemos $\mathcal{A}_\alpha = \emptyset$.

Caso 2 $|X_\alpha \cap A_\beta| < \omega$ para cada $\beta < \alpha$.
Nuevamente de la segunda propiedad de la familia T, tenemos que existe $S \in T$ con $S \subseteq^* \pi_1(X_\alpha)$. De la observación (A.29) del apéndice A, ya que $|\{A_\beta : \beta < \alpha\}| < \mathfrak{c}$, existe un $S' \subseteq^* S$, $S' \in T$ tal que

$$|S' \cap \pi_1(A_\beta)| < \omega \text{ para cada } \beta < \alpha. \tag{5.14}$$

Puesto que $S' \subseteq^* S \subseteq^* \pi_1(X_\alpha)$, escogemos un $H \subseteq S'$ finito tal que

$$S' \setminus H \subseteq \pi_1(X_\alpha). \tag{5.15}$$

Hacemos

$$A_\alpha = \{(m,n) : m \in S' \setminus H,\ n = \text{mín}\{t : (m,t) \in X_\alpha\}\} \cup \{(m,0) : m \in H\}, \tag{5.16}$$

y

$$\mathcal{A}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta \cup \{A_\alpha\}. \tag{5.17}$$

De nueva cuenta, es claro que $|\mathcal{A}_\alpha| \leq |\alpha| + \omega$, también es claro que A_α es la gráfica de una función parcial, además $dom(A_\alpha) = S' \in T$ y puesto que $S' \setminus H \subseteq \pi_1(X_\alpha)$, tenemos que $A_\alpha \subseteq^* X_\alpha$, por lo tanto $X_\alpha \cap A_\alpha =^* A_\alpha$, pero $|A_\alpha| = |S'| = \omega$ ($S' \in T \subseteq [\omega]^\omega$), así que, $|X_\alpha \cap A_\alpha| = \omega$.
Hemos, de ésta forma, conseguido la familia MAD con las propiedades pedidas. ☑

Listos estamos para ver el último teorema de ésta sección.

Teorema 5.31 ($\mathfrak{h} < non(\mathcal{M})$) *Existe una familia MAD $\mathcal{A}$ tal que $exp(\Psi(\mathcal{A}))$ no es pseudocompacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \subseteq [\triangle]^\omega$ familia MAD como en el lema anterior. Demostremos que $exp(\Psi(\mathcal{A}))$ no es pseudocompacto.[14]
Sea $F_n = \{(n,k) : k \leq n\}$, cada F_n es un cerrado y finito en $\Psi(\mathcal{A})$, sea

[14] Al espacio $\Psi(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \cup \triangle$ le damos la topología de manera similar a como ya lo hemos hecho. $\triangle$ es abierto, discreto y una vecindad abierta, básica de $f \in \mathcal{A}$ es de la forma $f \cup (f \setminus H)$, donde H es un finito de $\triangle$.

$Y = \{F_n : n \in \omega\}$ una sucesión en $exp(\Psi(\mathcal{A}))$. Note que Fin, el conjunto de todos los finitos de $\triangle$, es un denso de puntos aislados en $exp(\Psi(\mathcal{A}))$.[15] Para ver que $exp(\Psi(\mathcal{A}))$ no es pseudocompacto, según el lema (5.17), basta con demostrar que Y no tiene punto de acumulación. Demostremos esto último por contradicción, supongamos que existe $F \in exp(\Psi(\mathcal{A}))$ punto de acumulación de Y, del corolario (5.21) tenemos que $F \cap \omega = \emptyset$, es decir, $F \subseteq \mathcal{A}$. Hay 2 casos para la cardinalidad de F:

Caso 1 $|F| < non(\mathcal{M})$:
Por lema (A.27) existe $f \in \{f \in \omega^\omega : \forall n \in \omega\ f(n) \leq n\} \subseteq \mathcal{P}(\triangle)$ tal que

$$|f \cap g| < \omega \text{ para cada } g \in F. \tag{5.18}$$

Entonces

$$U = F \cup (\triangle \setminus f) \text{ es un abierto en } \Psi(\mathcal{A}). \tag{5.19}$$

Pero cada F_n tiene intersección no vacía con f, entonces $F_n \nsubseteq U$ para cada $n \in \omega$, esto es, $Y \cap U^+ = \emptyset$, contradicción!, pues F es punto de acumulación de Y.

Caso 2 $|F| \geq non(\mathcal{M})$ y entonces $|F| > \mathfrak{h}$
Recordemos que $F \subseteq \mathcal{A}$ y que para cada $f \in \mathcal{A}\ dom(f) \in T$, entonces

$$K = \{S : S = dom(f), f \in F\} \subseteq T \text{ y } |K| = |F| > \mathfrak{h}.$$

De la propiedad 3. del arbol T (teorema A.28), existen $S_1, S_2 \in K$ tales que $|S_1 \cap S_2| < \omega$ (S_1 y S_2 estan en ramas distintas), es decir, existen $f_1, f_2 \in F$ y $n \in \omega$ tales que

$$dom(f_1) \cap dom(f_2) \subseteq n. \tag{5.20}$$

Sea

$$U = \langle \Psi(\mathcal{A}); \{f_1\} \cup (f_1 \setminus n \times n), \{f_2\} \cup (f_2 \setminus n \times n)\rangle. \tag{5.21}$$

Es claro que U es vecindad básica, abierta de F, pero, por ecuación (5.20) $(f_1 \setminus n \times n) \cap (f_2 \setminus n \times n) = \emptyset$ y por lo tanto $F_n \notin U$ para cada $n \in \omega$, entonces $Y \cap U^+ = \emptyset$, contradicción!.
Tenemos pues que F no es punto de acumulación de Y, entonces el hiperespacio $exp(\Psi(\mathcal{A}))$ no es pseudocompacto. ☑

[15] La demostración de esto es la misma que se hizo en el lema (5.16)

5.4. Selecciones sobre Ψ-espacios

El estudio de selecciones continuas en espacios topológicos fue iniciado por E. Michael allá por el año 1950 y a partir de entonces se han estudiado en la topología general, presentamos en ésta sección solamente un resultado en cuya demostración se utiliza el teorema de Ramsey (1.16) del primer capítulo.

Definición 5.32 *Decimos que un espacio topológico X admite una* ***selección continua*** *(o simplemente selección) si existe una función continua $\phi : exp(X) \to X$ tal que $\phi(F) \in F$ para cada $F \in exp(X)$.*[16] *Suponiendo que X es T_1, a $[X]^2 \subseteq exp(X)$ démosle la topología inducida por el hiperespacio, de ésta manera decimos además que X tiene una* ***selección débil*** *si existe función continua $\phi : [X]^2 \to X$ tal que $\phi(\{x, y\}) \in \{x, y\}$ para cada $\{x, y\} \in [X]^2$.*

Obsérvese que un espacio topológico X tiene una selección débil si y sólo si existe función continua $\varphi : X^2 \to X$ tal que $\varphi(\{x, y\}) = \varphi(\{y, x\}) \in \{x, y\}$, donde X^2 tiene la topología producto.

Teorema 5.33 *El espacio topológico $\Psi(\mathcal{A})$ no tiene selección débil para ninguna $\mathcal{A}$ familia MAD.*

Demostración. Supongamos que no es cierto, i.e., existe $\phi : [\Psi(\mathcal{A})]^2 \to \Psi(\mathcal{A})$ una selección débil y sea $f : [\omega]^2 \to 2$ como

$$f(\{x, y\}) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \ \phi(\{m, n\}) = \max\{m, n\} \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Del teorema de Ramsey (1.16) existe $B \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ f-homogéneo. Sean A_1, A_2 dos elementos distintos de $\mathcal{A}$ tales que $|A_1 \cap B| = |A_2 \cap B| = \omega$ y demostremos que ϕ no es continua en $\{A_0, A_1\}$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\phi(\{A_0, A_1\}) = A_0$ y bastara demostrar que para la vecindad abierta básica $\{A_0\} \cup A_0$ de A_0, no existe vecindad abierta U de $\{A_0, A_1\}$ tal que $\phi(U) \subseteq \{A_0\} \cup A_0$.
Sea U vecindad abierta de $\{A_0, A_1\}$. Entonces U contiene a un básico de la forma $V = \langle \{A_0, A_1\} \cup ((A_0 \cup A_1) \setminus F); \{A_0\} \cup (A_0 \setminus F), \{A_1\} \cup (A_1 \setminus F) \rangle$ para algún finito $F \subseteq \omega$.
Caso 1 $f([B]^2) = 0$. Sea $n \in (A_1 \cap B) \setminus A_0$ tal que $n > \max F$ y sea $m > n$

[16] $exp(X)$ es el hiperespacio de X con la topología de Vietoris.

tal que $m \in (A_0 \cap B) \setminus A_1$, entonces $\{m, n\} \in V$, como $\{m, n\} \in B$ y $f([B]^2) = 0$ entonces $\phi(\{m, n\}) = n \notin A_0$, de modo que $\phi(V) \nsubseteq \{A_0\} \cup A_0$, así, $\phi(U) \nsubseteq \{A_0\} \cup A_0$.
Caso 2 $f([B]^2) = 1$. Escogemos al contrario, esto es, sea $n \in (A_0 \cap B) \setminus A_1$ con $n > \max F$ y sea $m \in (A_1 \cap B) \setminus A_0$, entonces $\{m, n\} \in V$ y en este caso $\phi(\{m, n\}) = m \notin A_0$, así que $\phi(U) \nsubseteq \{A_0\} \cup A_0$. ☑

Apéndice A

Algunas nociones básicas de la teoría de conjuntos.

MUCHOS de los siguientes resultados y definiciones se encuentran en la mayoría de los libros de teoría de conjuntos, por lo que sólo se demostrarán algunos de los resultados aquí mencionados

A.1. El lema de Zorn

Definición A.1 *Sea un conjunto X no vacío y sea R una relación ($R \subseteq X \times X$) tal que*

1. *Para todo $x \in X$, xRx*[1]*, R es reflexiva.*
2. *Para todo $x, x' \in X$, xRx' y $x'Rx$ implica $x = x'$, R es antisimétrica.*
3. *Para todo $x, x', x'' \in X$, xRx y $x'Rx''$ implica xRx'', R es transitiva.*

Entonces al par (X, R) se le llama ***conjunto parcialmente ordenado.***

Definición A.2 *Sea (X, R) un conjunto parcialmente ordenado y sea $Y \subseteq X$, decimos que Y es una* ***cadena en*** *(X, R) si para todo $y, y' \in Y$, yRy' o $y'Ry$. Decimos que $x_0 \in X$ es una* ***cota superior*** *para Y si para todo $y \in Y$, yRx_0, llamamos a un $y_0 \in Y$* ***elemento maximal*** *de Y en el orden R, si no existe $y \in Y$ tal que y_0Ry y $y_0 \neq y$.*

[1]Para una relación R, xRy es una forma abreviada para decir que $(x, y) \in R$.

Lema A.3 LEMA DE KURATOWSKI-ZORN
Cualquier conjunto parcialmente ordenado y no vacío en el cual toda cadena tiene una cota superior tiene elemento maximal.

A.2. Filtros, ultrafiltros e ideales

Definición A.4 *Sea X un conjunto no vacío, decimos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un* ***filtro*** *basado en X (o sobre X) si se cumplen:*

- ☣ $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$.
- ☣ *Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.*
- ☣ *Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B \subseteq X$ entonces $B \in \mathcal{F}$.*

Ejemplo A.5 *Sea X un conjunto no vacío infinito, entonces la colección de subconjuntos cofinitos de X es un filtro en $\mathcal{P}(X)$.*

Definición A.6 *Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un* ***filtro maximal*** *o* ***ultrafiltro*** *sobre X si es un filtro y cualquier otro filtro $\mathcal{F}'$ sobre X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ se tiene que $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.*

Definición A.7 *Un filtro $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es* ***principal*** *si existe $p \in X$ tal que $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : p \in A\}$. Un filtro principal es siempre un filtro maximal, llamamos a éste* ***ultrafiltro principal.***

Definición A.8 *Llamamos* ***ultrafiltro libre*** *a cualquier ultrafiltro que no sea principal.*

De la definición anterior es inmediata la siguiente observación:

Observación A.9 *$\mathcal{U}$ es un ultra filtro libre $\Leftrightarrow \bigcap \mathcal{U} = \emptyset$.*

Observación A.10 *Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un ultrafiltro libre, entonces $X \setminus F \in \mathcal{U}$ para cada $F \in [X]^{<\omega}$ y por lo tanto $F \notin \mathcal{U}$ para todo $F \in [X]^{<\omega}$.*

Demostración. Sea $p \in X$, como $\mathcal{U}$ es libre existe $A \in \mathcal{U}$, $A \neq X$ tal que $p \notin A$ entonces $A \subseteq X \setminus \{p\}$ así que $X \setminus \{p\} \in \mathcal{U}$, puesto que $\mathcal{U}$ es cerrado bajo intersecciones se sigue que $X \setminus F \in \mathcal{U}$ para cada $F \in [X]^{<\omega}$

Proposición A.11 *Sea $F = \{\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{P}(X) : i \in I\}$ una colección de filtros basados en $X \neq \emptyset$, entonces $\bigcap F$ es un filtro sobre X.*

Demostración. $\emptyset \notin \bigcap F$ y $X \in \bigcap F$ pues $\emptyset \notin \mathcal{F}_i$ y $X \in \mathcal{F}_i$ para toda $i \in I$.
Sean $A, B \in \bigcap F$, esto es, $A, B \in \mathcal{F}_i$ para toda $i \in I$, por lo que $A \cap B \in \mathcal{F}_i$ para toda $i \in I$, entonces $A \cap B \in \bigcap F$.
Si $A \in \bigcap F$ y existe B tal que $A \subseteq B \subseteq X$, entonces $A \in \mathcal{F}_i$ para toda $i \in I$, como B es tal que $A \subseteq B \subseteq X$, se tiene que $B \in \mathcal{F}_i$ para toda $i \in I$, esto es, $B \in \bigcap F$. ☑

Proposición A.12 *Sea $C = \{\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{P}(X) : i \in I\}$ una cadena*[2] *de filtros basados en $X \neq \emptyset$, entonces $\bigcup C$ es un filtro sobre X.*

Demostración. $\emptyset \notin \bigcup C$ y $X \in \bigcup C$ pues $\emptyset \notin \mathcal{F}_i$ y $X \in \mathcal{F}_i$ para toda $i \in I$.
Si $A, B \in \bigcup C$ entonces $A \in \mathcal{F}_i,\ B \in \mathcal{F}_j$ para algunos $i, j \in I$. Sin perdida de generalidad supongamos que $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$. Así $A, B \in \mathcal{F}_j$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_j$ esto es $A \cap B \in \bigcup C$.
Si $A \in \bigcup C$ y existe B tal que $A \subseteq B \subseteq X$ entonces $A \in \mathcal{F}_i$ para algún $i \in I$ y como B es tal que $A \subseteq B \subseteq X$ entonces $B \in \mathcal{F}_i$ para algún $i \in I$ entonces $B \in \bigcup C$. ☑

Teorema A.13 *Todo filtro se puede extender a un ultrafiltro.*

Demostración. Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, sea además $\mathcal{O} = \{\mathcal{G} : \mathcal{G}$ es un filtro sobre X y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}$, $\mathcal{O} \neq \emptyset$ pues $\mathcal{F} \in \mathcal{O}$, demos a éste conjunto el orden de la contención, $(\mathcal{O}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, y para cualquier cadena $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}$ el filtro $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior. Entonces se satisface las condiciones del lema de Zorn, por lo que $\mathcal{O}$ tiene un elemento maximal, el cual es un ultrafiltro que extiende a $\mathcal{F}$. ☑

Proposición A.14 *Los siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{U}$ es ultrafiltro en X.*

[2] Dados 2 filtros de C uno de ellos esta contenido en el otro.

2. *Si* $A \cup B \in \mathcal{U}$ *entonces* $A \in \mathcal{U}$ *o* $B \in \mathcal{U}$.

3. *Para toda* $\{A_n : n < m\}$ *partición de* X $\exists n$ *tal que* $A_n \in \mathcal{U}$.

4. *Para toda* $A \in \mathcal{U}$ *y cada* $B \subseteq A$*, tenemos que* $B \in \mathcal{U}$ *ó* $A \setminus B \in \mathcal{U}$.

Demostración. Demostremos un poco más de lo necesario.
$(1 \to 2)$ Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \cup B \in \mathcal{U}$ y supongamos que $A \notin \mathcal{U}$ y $B \notin \mathcal{U}$.
Sea
$$\mathcal{U}' = \{Y \subseteq X : A \cup Y \in \mathcal{U}\}$$
Si $Y \in \mathcal{U}$, entonces $Y \cup A \in \mathcal{U}$, entonces $Y \in \mathcal{U}'$ y así $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$. Puesto que $B \in \mathcal{U}' \setminus \mathcal{U}$ entonces $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{U}'$. Basta con demostrar que $\mathcal{U}'$ es filtro pues esto contradice el hecho de que $\mathcal{U}$ es maximal.
Es claro que $\emptyset \notin \mathcal{U}'$ y $X \in \mathcal{U}'$ pues $A \cup \emptyset = A \notin \mathcal{U}$ y $A \cup X = X \in \mathcal{U}$.
Sean $Y, Z \in \mathcal{U}'$, entonces $A \cup Y, A \cup Z \in \mathcal{U}$, entonces $(A \cup Y) \cap (A \cup Z) = A \cup (Y \cap Z) \in \mathcal{U}$, entonces $Y \cap Z \in \mathcal{U}'$.
Finalmente si $Y \in \mathcal{U}'$ y existe $B \subseteq X$ tal que $Y \subseteq B$, entonces $A \cup Y \in \mathcal{U}$ y también $A \cup Y \subseteq A \cup B \in \mathcal{U}$ por lo que $B \in \mathcal{U}'$. Es pues $\mathcal{U}'$ un filtro.

$(2 \to 1)$ Suponemos que para un filtro $\mathcal{U}$ en X se cumple que si $A \cup B \in \mathcal{U}$ entonces $A \in \mathcal{U}$ o $B \in \mathcal{U}$. Pemostremos que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro.
Sea $\mathcal{U}'$ un filtro tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ y sea $Y \in \mathcal{U}'$ entonces $Y \subseteq X$ por lo que $Y \in \mathcal{U}$ o $X \setminus Y \in \mathcal{U}$, puesto que $X \setminus Y \notin \mathcal{U}'$ y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ entonces $X \setminus Y \notin \mathcal{U}$ y así, necesariamente $Y \in \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$, esto es, $\mathcal{U}$ es filtro maximal.

$(2 \to 3)$ Sea $\{A_n : n < m\}$ partición de X. Como $A_0 \cup \left[\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right] = X \in \mathcal{U}$, entonces $A_0 \in \mathcal{U}$ o $\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i \in \mathcal{U}$ si $A_0 \in \mathcal{U}$ ya acabamos, y si $\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i \in \mathcal{U}$ estamos en el caso inicial con un índice menos, puesto que el conjunto de indices es finito tenemos que terminar en no más de m pasos para conseguir un $A_k \in \mathcal{U}$.

$(3 \to 2)$ Supongamos que $A \cup B \in \mathcal{U}$ entonces $\{A, B \setminus A, X \setminus (A \cup B)\}$ es una partición de X. Puesto que $X \setminus (A \cup B) \notin \mathcal{U}$ entonces $A \in \mathcal{U}$ o $B \setminus A \in \mathcal{U}$. Si $A \in \mathcal{U}$ ya acabamos y si $B \setminus A \in \mathcal{U}$ entonces $B \setminus A \subseteq B \in \mathcal{U}$.

$(2 \to 4)$ Sea $A \in \mathcal{U}$ y sea $B \subseteq A$ puesto que $B \cup X \setminus B = X \in \mathcal{U}$ entonces $B \in \mathcal{U}$ o $X \setminus B \in \mathcal{U}$. Si $B \in \mathcal{U}$ ya acabamos y si $X \setminus B \in \mathcal{U}$ entonces

$A \cap (X \setminus B) = A \setminus B \in \mathcal{U}$.

$(4 \to 2)$ Sea $A \cup B \in \mathcal{U}$, como $A \subseteq A \cup B$, entonces $A \in \mathcal{U}$ ó $A \cup B \setminus A \in \mathcal{U}$. Si $A \in \mathcal{U}$ ya acabamos y en el otro caso $B \setminus A = (A \cup B) \setminus A \in \mathcal{U}$, entonces $B \setminus A \subseteq B \in \mathcal{U}$. ☑

Proposición A.15 *Sea X un conjunto infinito. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro libre basado en X, entonces $|A| \geq \omega$ para toda $A \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Supongamos que no, i.e. $\exists A \in \mathcal{U}$ con $1 < |A| < \omega$ (A no puede ser un solo punto porque $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro libre). Sea $A_0 \in \mathcal{U}$ tal que $1 < |A_0| < |A|$ para toda $A \in \mathcal{U}$ y escojamos un $Z_0 \in \mathcal{U}$ tal que

$$|Z_0 \cap A_0| \leq |Z \cap A_0| \text{ para cada } Z \in \mathcal{U}. \tag{A.1}$$

Entonces tenemos que $\{B \subseteq X : Z_0 \cap A_0 \subseteq B\} = \mathcal{U}$.[3] Pero un conjunto así no puede ser maximal ya que para un $a \in Z_0 \cap A_0$ ($|Z_0 \cap A_0| > 1$ pues $\mathcal{U}$ es ultrafiltro libre), $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cup \{Z_0 \cap A_0 \setminus \{a\}\}$ es filtro con $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{U}'$ pues $Z_0 \cap A_0 \setminus \{a\} \notin \mathcal{U}$, contradicción!, pues $\mathcal{U}$ no sería un ultrafiltro. ☑

Proposición A.16 *Sea X conjunto infinito, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro libre basado en X, entonces para toda $A \in \mathcal{U}$, $A \setminus F \in \mathcal{U}$ para cualquier F conjunto finito.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{U}$ y supongamos que no, i.e. $A \setminus F \notin \mathcal{U}$ implica $X \setminus (A \setminus F) = (X \setminus A) \cup F \in \mathcal{U}$, como $A \in \mathcal{U}$, entonces $A \cap [(X \setminus A) \cup F] \in \mathcal{U}$, entonces $A \cap F \in \mathcal{U}$ contradiciendo la proposición anterior. ☑

Definición A.17 *Sea X un conjunto no vacío, decimos que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un **ideal** basado en X (o sobre X) si se cumplen:*

- ☣ $\emptyset \in \mathcal{I}$, $X \notin \mathcal{I}$.
- ☣ *Si $A, B \in \mathcal{I}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$.*
- ☣ *Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$ entonces $B \in \mathcal{I}$.*

Observación A.18 *Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X entonces el dual $\mathcal{F}^* = \{A \subseteq X : X \setminus A \in \mathcal{F}\}$ es un ideal en X. El dual de un ideal es además un filtro.*

[3] De la definición de filtro $\{B \subseteq X : Z_0 \cap A_0 \subseteq B\} \subseteq \mathcal{U}$, sea $Y \in \mathcal{U}$ y supongamos que $Z_0 \cap A_0 \nsubseteq Y$, entonces $|(Z_0 \cap Y) \cap A_0| = |(Z_0 \cap A_0) \cap Y| < |Z_0 \cap A_0|$, contradicción! con afirmación (A.1), por lo tanto $\mathcal{U} \subseteq \{B \subseteq X : Z_0 \cap A_0 \subseteq B\}$

A.3. Ordinales y cardinales

Definición A.19 *Un conjunto α es un **ordinal** si satisface ambas condiciones*

- ☣ *Si $x \in \alpha$, entonces $x \subseteq \alpha$*
- ☣ *Si $x, y \in \alpha$, entonces $x \in y$ ó $y \in x$ ó $x = y$*

La clase de todos los ordinales, denotada por ON, está bien ordenada por la inclusion, por lo que todo ordinal es igual al conjunto de todos los ordinales más chicos que él.

Teorema A.20 *Cualquier conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.*

Para todo $\alpha \in ON$ el conjunto $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ es un ordinal y es llamado el sucesor inmediato de α. Los ordinales que no son de la forma $\alpha + 1$ son llamados ordinales límites.

Definición A.21 *El ordinal infinito más pequeño es denotado por $\boldsymbol{\omega}$ y es conocido como el conjunto de los números naturales.*

Cada subconjunto $A \subseteq ON$ tiene un supremo y un ínfimo, a saber: $\sup A = \bigcup A$ e $\inf A = \bigcap A$.

Definición A.22 *Un ordinal $\kappa \in ON$ es llamado un **cardinal** si para cada $\alpha < \kappa$ no existe función inyectiva $f : \alpha \to \kappa$.*

Teorema A.23 *Para todo conjunto A existe un único cardinal κ tal que existe biyección $f : A \to \kappa$, en este caso escribimos $|A| = \kappa$. En este caso decimos que A tiene **cardinalidad** κ.*

Definición A.24 *Decimos que dos conjuntos A y B tienen la misma **cardinalidad** si existe un cardinal κ tal que $|A| = \kappa = |B|$. Decimos que un conjunto F es **finito** si $|F| = n$ para algún $n \in \omega$, en caso contrario decimos que X es **infinito**. Si X tiene cardinalidad igual que ω, decimos que X es **numerable**.*

Existen algunos cardinales asociados con ω que aparecen de forma natural para responder a preguntas relacionadas con los conceptos de compacidad, un ejemplo es el cardinal $\mathfrak{h}$ llamado **número de distributividad** que aparece en la respuesta a la pregunta: ¿cuándo el producto de espacios secuencialmente compactos[4] es secuencialmente compacto?. Veamos unas cuantas definiciones previas antes de dar la definición de este cardinal $\mathfrak{h}$ y otros 2 que se usan en el capítulo 5.

Definición A.25 *Sea $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia, decimos que $A \in [\omega]^\omega$ es una **pseudointersección** de la familia $\mathcal{F}$, si $A \subseteq F$ para cada $F \in \mathcal{F}$. Decimos que la familia $\mathcal{F}$ es **centrada** si $\bigcap \mathcal{G}$ es infinito para cada subfamilia no vacía $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. La familia $\mathcal{F}$ es llamada **densa** si para cada $X \in [\omega]^\omega$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq^* X$. Y finalmente decimos que la familia $\mathcal{F}$ es **abierta** si para cada $F \in \mathcal{F}$ y cada $X \in [\omega]^\omega$, si $X \subseteq^* F$, entonces $X \in \mathcal{F}$.*

El cardinal $\mathfrak{p}$ es llamado **número de pseudointersección**, éste y $\mathfrak{h}$ se definen como sigue:

Definición A.26

$$\mathfrak{p} = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \textit{ es una subfamilia centrada de } [\omega]^\omega \textit{ sin pseudointersección}\} \tag{A.2}$$

$$\mathfrak{h} = \min\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \textit{ es un conjunto de familias densas y abiertas en } [\omega]^\omega \textit{ con } \bigcap \mathcal{D} = \emptyset\}. \tag{A.3}$$

Para el lema siguiente $\mathbf{\Gamma} := \{f \in \omega^\omega : \forall n \in \omega\ f(n) \leq n\}$

Lema A.27 *$non(\mathcal{M}) = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \mathbf{\Gamma}$ y para cada $f \in \mathbf{\Gamma}$ existe un $g \in \mathcal{F}$ tal que $|f \cap g| = \omega\}$.*

Esto es $\kappa < non(\mathcal{M})$ si y sólo si

$$\forall \mathcal{F} \subseteq \mathbf{\Gamma} \textit{ familia con } |\mathcal{F}| = \kappa,\ \exists f \in \mathbf{\Gamma} \textit{ tal que } \forall g \in \mathcal{F}\ |f \cap g| < \omega.$$

Teorema A.28 *Existe una familia $T \subseteq [\omega]^\omega$ tal que*

1. *T es un árbol bajo $\subseteq^*$ $(\forall A, B \in T,\ A \subseteq^* B,\ B \subseteq^* A$ ó $|A \cap B| < \omega)$.*
2. *T es base de $[\omega]^\omega$ $(\forall A \in [\omega]^\omega\ \exists B \in T$ tal que $B \subseteq^* A)$.*

[4] Un espacio topológico X es secuencialmente compacto si cualquier sucesión en X tiene una subsucesión convergente.

3. *La altura de T es $\mathfrak{h}$ ($\forall A \in T$ $|\{B \in T : A \subseteq^* B\}| < \mathfrak{h}$).*

4. *Para cada $A \in T$ $|succ(A)| = \mathfrak{c}$, ($succ(A) = \{B \in T : B \subseteq^* A\}$, los sucesores de A en el árbol).*

Note que la última propiedad nos dice: "para cada $A \in T$ existen $\mathfrak{c}$ ramas distintas abajo del nodo A", esto es:

Observación A.29 *Sea T una familia como en el teorema anterior. Para cada $A \in T$ existe $\{B_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq T$ tal que:*

☣ *$B_\alpha \subseteq^* A$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, (esto es; $\{B_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq succ(A)$, "cada B_α esta abajo del nodo A").*

☣ *$|B_\alpha \cap B_\beta|$ para cada $\alpha \neq \beta$. (esto es; "cada B_α esta en una rama distinta")*

A.4. Textos de referencia para teoría de conjuntos

Los siguientes son algunos de los libros donde se pueden consultar las demostraciones de los teoremas de éste apéndice.

☞ Fernando Hernández H. *Teoría de conjuntos*, Aportaciones matemáticas, 1998.

☞ N. Bourbaki. *Elements of mathematics. Theory set*, Addison-Wesley, 1968.

☞ N. Brunner. *The axiom of choice in topology*, Notre Dame J. Formal Logic 24 (1983) 305-317.

☞K. Kuratowski, A. Mostowski, *Set theory and Logic.* Studies in Logic and Foundations of Mathematics, North-Holland, 1968.

☞Kenneth Kunen, *Set Theory -An introduction to independence proofs.* North-Holland, New York, 1980.

☞W. W. Confort, S Negrepontis. *The theory of ultrafiltres*, Springer-Verlag, 1974

☞H. B. Ederton. *Elements of Set Theory*, Academic Press, 1977

Apéndice B

Algunas nociones básicas de topología.

COMO en el apéndice anterior, los teoremas aquí contenidos se encuentran en la mayoría de los títulos de topología general, puede consultar su demostración en los textos de referencia citados al final de éste apéndice.

B.1. Definiciones

Definición B.1 *Sea X un espacio topológico*

1. *$Y \subseteq X$ es* ***denso*** *en X si $\overline{Y} = X$.*

2. *$\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de abiertos en X es una* ***base local*** *de $x \in X$ si para cada U vecindad abierta de x existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $x \in V \subseteq U$.*

3. *X es* ***primero numerable*** *si para cada $x \in X$ existe una base local numerable de x.*

4. *X es* ***segundo numerable*** *si X tiene una base numerable.*

5. *X es* ***separable*** *si existe un subconjunto $Y \subseteq X$ denso y numerable.*

6. *X es* ***0-dimensional*** *si tiene una base de cerrados-abiertos.*

7. $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *es una* ***cubierta abierta*** *para* $Y \subseteq X$ *si* $\mathcal{O}$ *es una colección de abiertos de* X *tales que* $Y \subseteq \bigcup \mathcal{O}$*, decimos además que* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$ *es una* ***subcubierta*** *de* $\mathcal{O}$ *para* Y *si* $\mathcal{U}$ *es a su vez una cubierta abierta para* Y.

8. X *es* ***compacto*** *si toda cubierta abierta de* X *tiene una subcubierta finita.*

9. X *es* ***Lindelöf*** *si toda cubierta abierta de* X *tiene una subcubierta numerable, decimos que es* ***hereditariamente Lindelöf*** *si cualquier subespacio de* X *es Lindelöf.*

10. X *es* ***localmente compacto*** (*loc. comp.*) *si para toda* $x \in X$ *existe* E *compacto y* $V \in \mathcal{N}_x$ *con* $V \subseteq E$.

11. X *es* ***completamente regular*** $(T_{3\frac{1}{2}})$ *si para cada* $x \in X$ *y* $U \in \mathcal{N}_x$ *existe una función continua* $f : X \to [0, 1]$ *tal que* $f(x) = 0$ *y* $f[U] = 1$.

12. X *es* ***normal*** *si para cada par de cerrados ajenos* $F, G \subseteq X$ *existen abiertos ajenos* $U, V \subseteq X$ *tales que* $F \subseteq U$ *y* $G \subseteq V$.

13. X *es* ***numerablemente compacto*** *(num. comp.) si cada cubierta abierta numerable de* X *tiene una subcubierta finita.*

14. X *es* ***pseudocompacto*** *si toda función continua* $f : X \to \mathbb{R}$ *es acotada.*

B.2. Teoremas y proposiciones

Proposición B.2 *Un espacio topológico* T_2 X *es loc. comp. si y sólo si para toda* $x \in X$ *existe* $V \in \mathcal{N}_x$ *tal que* $\overline{V}$ *es compacto.*

Teorema B.3 *Un espacio topológico* T_2 *y localmente compacto es completamente regular* $(T_{3\frac{1}{2}})$.

Teorema B.4 *En un espacio métrico* X *son equivalentes.*

1. X *es separable.*

2. X *es Lindelöf.*

3. X *es* 2^{do} *numerable.*

Proposición B.5 *Si* X *es num. comp. Entonces* X *es pseudocompacto.*

Teorema B.6 *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes*

1. *X es numerablemente compacto.*

2. *Cada subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.*

3. *X No tiene subespacios discretos cerrados infinitos.*

Teorema B.7 DE "METRIZACIÓN"DE URYSŎHN
En un espacio topológico X T_0, los siguientes son equivalentes

1. *X es regular y segundo numerable.*

2. *X es separable y metrizable.*

Definición B.8 *Decimos que (K, h) es una **compactación** de un espacio topológico X si.*

1. *K es compacto Hausdorff.*

2. *$h : X \to K$ es un encaje (i.e. $h : X \to h[X]$ es homeomorfismo.)*

3. *$h[X]$ es denso en K.*

Observación B.9 *Si X tiene una compactación entonces X es completamente regular Hausdorff. i.e. X es $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Teorema B.10 COMPACTACIÓN POR UN PUNTO
Si un espacio topológico X que es localmente compacto, Hausdorff y no compacto, entonces el siguiente espacio es una compactación por un punto de X:

$$\boldsymbol{A}(X) := X \cup \{*\}, \quad * \notin X$$

cuyas vecindades son: Para los puntos de X las que ya tenia y $V \in \mathcal{N}_* \Leftrightarrow * \in V$ y $X \setminus V$ es compacto.
A $\boldsymbol{A}(X)$ se le conoce como la compactación de Alexandroff.

B.3. Textos de referencia para topología

Los siguientes son algunos de los libros donde se pueden consultar las demostraciones de los teoremas de éste apéndice.

☞ Engelking, R. *General Topology*, Berlin, Heldermann Verlag, 1989.

☞ García-Maynez, A. y Tamariz, A. *Topología General*, México, Porrúa, 1988.

☞ Nagata, J. *Modern General topology*, Amsterdam, North-Holland, 1985.

☞ Willard S., *General Topology*, Adisson-Wesley, 1970

☞ Lipschutz S., *Topología General. Teoría y Problemas*, McGraw-Hill (serie Schaum). 1970.

☞ J.Margalef, E. Outerelo, J.L.Pinilla: *Topología* (5 vol.) Ed. Alambra, 1975-1982.

☞K. Janich, *Topology.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag.

Índice alfabético

Bibliografía

[1] G. Artico, U. Marconi, J. Pelant, L. Rotter and M. Tkachenco, *Seletions and suborderability*, (Preprint).

[2] B. Balcar, J. Dočkálková and P. Simon, *Almost disjoint families of countable sets,* Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Finite and Infinite sets **37** (1984), 59-88.

[3] E.K. van Douwen, *Mappings from hyperspaces and convergent sequences,*Topology Appl. **34** (1990), 35-45.

[4] E. van Douwen, *The integers and topology,* In K. Kunen, J. Vaughn, editors, Handbook of Set Theoric Topology (1984), North-Holland, 111-167.

[5] A. R. D. Mathias, *Happy families,* Ann. Math. Logic **12** (1977), 59-111.

[6] J. van Mill and E. Wattel, *Selections and orderability,*Proc. AMS **83** (1981), 601-605.

[7] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets,* Trans. AMS **71** (1951), 152-182.

[8] G. Beer, *Topologies on closed and closed convex sets*. Kluwer Academic, Dordrecht, 1993.

[9] L'. Holá, H. P. Künzi, *Properties related to compactness in hyperspaces*. Topology Proc. 23 (1998) 191-205.

[10] J. Keesling, *Normality and properties related to compactness in hyperspaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970) 760-766.

[11] J. Ginsburg, V. Saks, *Some results on the countable compactness and pseudocompactness of hyperspaces*. Canad. J. Math. 27 (1975) 1394-1399.

[12] M. Hrušák, P.J. Szeptycki, A. H. Tomita., *Selections on Ψ-spaces*. Univ. Carolinae 42,1(2001)763-769.

[13] Simon P., *A compact Fréchet space whose square is not Fréchet*. Comment. Math. Univ. Carolinae 21 (1980),749-753.

[14] Mrówka S., *Some set-theoric constructions in topology*. Fund. Math 94(1977),83-92.

[15] Kenneth Kunen, *Set Theory -An introduction to independence proofs.* North-Holland, New York, 1980.

[16] K. Kuratowski, A. Mostowski, *Set theory and Logic.* Studies in Logic and Foundations of Mathematics, North-Holland, 1968.