

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

TESIS

Aplicación de la Ecuación de Desviación de Geodésicas
a la Detección de Ondas Gravitacionales

Omar Champo Jiménez

agosto de 2005

Agradecimientos

Antes que todo agradezco a DIOS por darme la oportunidad de presentar este trabajo de tesis, a mi Madre Estela Jiménez por darme todo su Amor incondicional y toda la vida estaré agradecido por tener una Mamá como ella, a mis hermanos Elvia y Germán que siempre me han apoyado, así como la ayuda que recibí de mi asesor y amigo Víctor.

A MI MADRE

Índice general

1. Introducción	6
2. Ondas Gravitacionales	9
2.1. Teoría Linealizada de la Gravedad	10
2.1.1. Transformaciones de Norma y Transformación de Coordenadas en la Teoría Linealizada	12
2.2. Ondas Planas	17
2.2.1. La Norma Transversa y de Traza Nula	18
2.2.2. Polarización de Ondas Planas	19
3. El Trompo Relativista	22
3.1. Constricciones	23
3.2. Formalismo Lagrangiano para un Trompo Libre	24
3.3. Interacción Gravitacional de un Trompo	29
4. Obtención de la Ecuación de Desviación de Geodésicas para el Trompo Relativista	36
4.1. Ecuación de Desviación de Geodésicas	37
4.2. Ecuación de Desviación para un Trompo Relativista	40
4.3. La Ecuación de Desviación de Geodésica del Trompo Relativista y Ondas Gravitacionales	44
5. Ecuación de Desviación del Trompo Relativista y Pulsares	50
5.1. Radiación Gravitacional	51
5.2. Generación de Ondas Gravitacionales	52
5.3. Pulsares	55
5.3.1. El Pulsar Binario PSR 1913+16	57
5.4. Solución de la Ecuación de Geodésicas para el Trompo Relativista	58

5.5. Ecuación de Desviación de Geodésicas para el Trompo Relativista y el Pulsar PSRB 1913+16	62
6. Conclusiones	67

Índice de figuras

5.1. Pulsar Binario PSRB 1913+16.	65
6.1. Lisa (Antena Espacial de Interferometría Láser).	69

Capítulo 1

Introducción

La Relatividad General es uno de los más grandes desarrollos científicos de la humanidad. Esta teoría fue propuesta por el Dr. Albert Einstein a principios del siglo pasado y ha superado la mayoría de las pruebas experimentales a las que ha sido sometida. Una última prueba es la demostración directa de la existencia de las llamadas ondas gravitacionales, tema que es la principal motivación de este trabajo de tesis.

Es por eso que en este trabajo de tesis, haremos una revisión de la Teoría Linealizada de la Relatividad General, la Teoría del Trompo Relativista (Teoría de Hanson-Regge), generalización de la Ecuación de Desviación de Geodésicas y la aplicación de ésta a la detección de ondas gravitacionales.

Con el descubrimiento del pulsar binario de Hulse y Taylor [10] en 1974, se hizo evidente, indirectamente, la existencia de las ondas gravitacionales. Con los datos que se han tomado de las observaciones en radio que llegan de ese sistema a la Tierra, el período de rotación cambia con el tiempo; lo que produce una precesión del periastro [1, 10] dado que el sistema pierde energía en forma de radiación gravitacional.

Una propuesta alternativa para la detección de ondas gravitacionales surge con el estudio de objetos con espín, es decir, aquellos objetos con momentum angular intrínseco [6, 8]; que pueden ser perturbados por la radiación gravitacional lo cual se verá reflejado en las señales que nos llegarán a la Tierra, tal como en el caso de los pulsares.

Para llevar a cabo nuestro análisis, revisaremos en el **Capítulo 2** la Teoría Linealizada de la Relatividad General, que consiste en linealizar las ecuaciones de Einstein al permitir perturbaciones del espacio-tiempo en el tensor métrico $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de espacio-tiempo plano de Minkowski y $h_{\mu\nu}$ es una perturbación, la cual se

considera muy pequeña en magnitud comparada con la métrica de Minkowski, *i.e.* $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Estas ecuaciones de campo tienen como solución en el mejor y más simplificado de los casos las ondas planas monocromáticas con dos modos de polarización.

Luego tornaremos nuestro análisis al estudio del Trompo Relativista como un sistema aislado y su interacción con campos gravitacionales. Dicha revisión se llevará a cabo en el **Capítulo 3**. cabe mencionar que en esta revisión se considera al objeto rotante como un ente aislado en interacción con un campo de fondo.

Posteriormente, revisaremos una novedosa propuesta que incluye la posibilidad de estudiar la Ecuación de Desviación de Geodésicas para un par de objetos rotantes en un fondo gravitacional. Esta propuesta permite entonces ver al sistema binario como un posible detector de ondas gravitacionales a partir del acoplamiento entre el espín y la onda gravitacional. El formalismo usado para la obtención de la Ecuación de Desviación de Geodésicas es tan general que incluye la posibilidad de ver al sistema binario en interacción con radiación gravitacional sin importar su origen. Este análisis se llevará a cabo en el **Capítulo 4**.

El **Capítulo 5** está dedicado a la aplicación de la Ecuación de Desviación de Geodésicas para Trompos Relativistas al caso de un sistema binario general. En particular se dan datos, estimaciones numéricas para el sistema binario de Hulse y Taylor [10]. También podemos tener como otro caso particular, la solución de esta Ecuación de Geodésicas para el Trompo Relativista siendo la Tierra el objeto rotante de prueba. Después de analizar las perturbaciones que intervienen al paso de una onda gravitacional, originadas en un sistema binario (por ejemplo), resulta que las perturbaciones sobre la Tierra son extremadamente pequeñas para poder ser detectadas. De este modo, es posible afirmar que sólo cerca de los objetos radiantes es posible medir o estimar mediante perturbaciones la fuerza y los efectos de la radiación gravitacional.

Finalmente, en la sección de **Conclusiones** daremos un resumen general de la obra.

Capítulo 2

Ondas Gravitacionales

INTRODUCCIÓN

En este Capítulo revisaremos las llamadas ondas gravitacionales, sus propiedades físicas y matemáticas. Las ondas gravitacionales fueron predichas por Einstein en 1916 y aún no han sido detectadas directamente, sólo se han observado sus efectos indirectamente en el pulsar binario PSRB 1913+16 de Hulse y Taylor [10].

Es por ésto interesante comprender la naturaleza y origen astrofísico de tales ondas así como la posibilidad de detectarlas de manera alterna. A lo largo de este trabajo de tesis, suponemos que existe previo conocimiento de parte del lector de Relatividad General.

2.1. Teoría Linealizada de la Gravedad

Las ecuaciones de campo de Einstein para el tensor $G_{\mu\nu}$ se escriben como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

son un conjunto de ecuaciones muy compacto en el cual se ha hecho uso del lenguaje geométrico y que a simple vista dista de ser un conjunto de ecuaciones diferenciales para el tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

Como es usual en la física, es conveniente hacer simplificar de alguna forma este conjunto de ecuaciones. Tal es el caso de un campo gravitacional débil que se desvía ligeramente de un campo gravitacional con fondo plano (espacio de Minkowski) de la forma:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (2.2)$$

en una situación de campo débil, el campo se puede expandir en potencias de $h_{\mu\nu}$, usando un marco de coordenadas donde la Ec.(2.2) sigue siendo válida, y sin mucha pérdida de exactitud, nos podemos quedar con los términos lineales. El formalismo resultante es frecuentemente llamado "La Teoría Linealizada de la Gravedad".

En, realidad, lo anterior es equivalente a decir que la Relatividad General Linealizada se obtiene linealizando el espacio-tiempo. Cabe destacar que se puede regresar de la teoría lineal a la Relatividad General imponiendo consistencia entre las ecuaciones de campo linealizadas y las ecuaciones de movimiento.

Ahora nuestra atención se enfoca en obtener la teoría linealizada a partir de la Relatividad General, adaptando la Ec.(2.2) para las componentes de la métrica. De esta manera los coeficientes de conexión covariante están dados por:

$$\Gamma_{\mu\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}), \quad (2.3)$$

de manera que si subimos un índice, obtenemos la siguiente multiplicación :

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\beta\gamma}, \quad (2.4)$$

esta expresión se conoce como el símbolo de Christoffel de segunda especie. Cuando expresamos $g_{\mu\nu}$ en términos de la métrica de perturbación $h_{\mu\nu}$, nos expresa que las Γ 's están

dados por:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h_{\alpha\nu,\beta} + h_{\beta\nu,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}) = \frac{1}{2}(h_{\alpha}{}^\mu{}_{,\beta} + h_{\beta}{}^\mu{}_{,\alpha} - h_{\alpha\beta}{}^{,\mu}). \quad (2.5)$$

De donde la última expresión nos brinda una convención para tales símbolos. De aquí se aprende una regla para las expresiones que dependen de la métrica: la gimnasia de subir y bajar índices se lleva a cabo con $\eta^{\mu\nu}$, y no con $g^{\mu\nu}$. El tensor de Riemann que en términos de Γ 's está expresado en la forma:

$$R^\beta_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^\beta_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\beta_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\beta_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\beta_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\alpha}, \quad (2.6)$$

adopta, después de realizar la linealización en $h_{\mu\nu}$, la forma:

$$R^\beta_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^\beta_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\beta_{\mu\alpha,\nu} = \frac{1}{2}(h_{\nu}{}^\beta{}_{,\mu\alpha} + h_{\mu\alpha}{}^\beta{}_{,\nu} - h_{\mu\nu}{}^\beta{}_{,\alpha} - h_{\alpha}{}^\beta{}_{,\mu\nu}). \quad (2.7)$$

De manera similar, tenemos que el tensor de Ricci está dado por:

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\alpha}, \quad (2.8)$$

y expresando a orden lineal en potencias de $h_{\mu\nu}$ la Ec.(2.8) obtenemos:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} = \frac{1}{2}(h_{\mu}{}^\alpha{}_{,\nu\alpha} + h_{\nu}{}^\alpha{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha - h_{,\mu\nu}), \quad (2.9)$$

donde hemos definido

$$h \equiv h^\alpha{}_\alpha = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}. \quad (2.10)$$

Después de esta reducción formamos el escalar de curvatura $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ a orden lineal, y de las ecuaciones de Einstein $2G_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu}$ se obtiene:

$$h_{\mu\alpha,\nu}{}^\alpha + h_{\nu\alpha,\mu}{}^\alpha - h_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^\beta) = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

El número de términos ha aumentado de $R_{\mu\nu}$ Ec.(2.9) a $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ Ec.(2.11), sin embargo, se puede introducir los "potenciales gravitacionales" $\bar{h}_{\mu\nu}$ como

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \quad (2.12)$$

Donde la barra indica una operación correspondiente a la anterior sobre cualquier tensor simétrico.

De manera que $G_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu}$ es a primer orden en $h_{\mu\nu}$, como consecuencia $\bar{\bar{h}}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ y entonces $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$. Con esta notación las ecuaciones de campo linealizado llegan a ser:

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha, \nu}{}^\alpha + \bar{h}_{\nu\alpha, \mu}{}^\alpha = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

El primer término de estas ecuaciones linealizadas es el d'Alembertiano usual de espacio plano, mientras que los demás términos sirven para mantener invariante la norma.

Donde el d'Alembertiano está definido como $\square \equiv -\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta$.

2.1.1. Transformaciones de Norma y Transformación de Coordenadas en la Teoría Linealizada

Para tener completez con la formulación de la Teoría Linealizada de la Gravedad introducimos estos importantes conceptos y nociones.

Las Ecuaciones Básicas de la Teoría Linealizada

Estas ecuaciones son escritas en cualquier sistema de coordenadas casi globalmente de Lorentz y son las ecuaciones:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1,$$

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_\nu + \bar{h}_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_\mu = 16\pi T_{\mu\nu}.$$

Hay dos tipos diferentes de transformación de coordenadas que conectan sistemas unos con otros que son casi globalmente de Lorentz, estos son: transformaciones globales de Lorentz y transformaciones infinitesimales de coordenadas.

1.- Transformaciones Globales de Lorentz:

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_{\alpha'} x^{\alpha'}, \quad \Lambda^\mu{}_{\alpha'} \Lambda^\nu{}_{\beta'} \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha'\beta'}. \quad (2.14)$$

estas transforman los coeficientes de la métrica vía:

$$\eta_{\alpha'\beta'} + h_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}} g_{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_{\alpha'} \Lambda^\nu{}_{\beta'} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = \eta_{\alpha'\beta'} + \Lambda^\mu{}_{\alpha'} \Lambda^\nu{}_{\beta'} h_{\mu\nu}.$$

Así, $h_{\mu\nu}$ de igual manera que $\bar{h}_{\mu\nu}$ se transforman como las componentes de un tensor en el espacio-tiempo plano dado por:

$$h_{\alpha'\beta'} = \Lambda^\mu{}_{\alpha'} \Lambda^\nu{}_{\beta'} h_{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

2.- Transformaciones infinitesimales de coordenadas (creación de rizos ondulatorios en los sistemas coordenados):

$$x^{\mu'}(\varphi) = x^{\mu}(\varphi) + \xi^{\mu}(\varphi). \quad (2.16)$$

Donde $\xi^{\mu}(\varphi)$ son cuatro funciones arbitrarias suficientemente pequeñas para dejar $|h_{\mu'\nu'}| \ll 1$.

La transformación infinitesimal de esta clase hace pequeños cambios en las formas funcionales de escalares, vectores y campos tensoriales. Estos pequeños cambios se pueden ignorar en la mayoría de las cantidades excepto en la métrica, donde a causa de una pequeña desviación de $\eta_{\mu\nu}$ se indica que contiene toda la información de la gravedad. La ley de transformación tensorial para la métrica es:

$$g_{\rho'\sigma'}[x^{\alpha'}(\varphi)] = g_{\mu\nu}[x^{\alpha}(\varphi)] \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\sigma'}},$$

dada la ley de transformación Ec.(2.16) y la siguiente expresión:

$$g_{\mu\nu}[x^{\alpha}(\varphi)] = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}[x^{\alpha}(\varphi)].$$

De aquí, que las funciones de transformación de la métrica en el nuevo sistema ($x^{\mu'}$) y viejo sistema (x^{μ}) de coordenadas están relacionados por:

$$h_{\mu\nu}^{nuevo} = h_{\mu\nu}^{viejo} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}, \quad (2.17)$$

considerando que la forma funcional de todos los demás escalares, vectores, y tensores son inalterados; ésto es dentro de la prescición de la Teoría Linealizada.

Para la transformación de norma dada por la Ec.(2.16) como hemos visto, se obtiene la Ec.(2.17), de manera que se puede imponer la condición de norma

$$\bar{h}'^{\mu\alpha}_{,\alpha} = 0, \quad (2.18)$$

sólo si

$$\xi^{\mu,\alpha}{}_{,\alpha} = 0. \quad (2.19)$$

Estas condiciones de norma son los tensores análogos de la norma de Lorentz $A^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0$ de la teoría electromagnética. Así que las ecuaciones de campo de la Ec.(2.13) se reducen a

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

La condición de norma Ec.(2.18), las ecuaciones de campo Ec.(2.20), y la definición de la métrica

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}, \quad (2.21)$$

son las ecuaciones fundamentales de la Teoría Linealizada de la Relatividad General escritas en la norma de Lorentz.

Transformación de Norma e Invariancia de Norma

En teoría linealizada se considera usualmente la Ec.(2.17) como transformación de norma local, análogamente para

$$A_{\mu}^{nuevo} = A_{\mu}^{viejo} + \psi_{,\mu}, \quad (2.22)$$

de la teoría electromagnética. El hecho de que la transformación de norma gravitacional no afecte la forma funcional de escalares, vectores, o tensores se llama "Invariancia de norma".

Dado que si nos apoyamos en un cálculo confiable se muestra la invariancia de norma del campo electromagnético,

$$F_{\mu\nu}^{nuevo} = A_{\nu,\mu}^{nuevo} - A_{\mu,\nu}^{nuevo} = A_{\nu,\mu}^{viejo} + \psi_{,\nu\mu} - A_{\mu,\nu}^{viejo} - \psi_{,\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{viejo}. \quad (2.23)$$

De igual manera si nos apoyamos en un cálculo similar, nos muestra la invariancia de norma del tensor de Riemman

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}^{nuevo} = R_{\mu\nu\alpha\beta}^{viejo}. \quad (2.24)$$

Tal invariancia de norma fue ya garantizada del hecho de que $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ son las componentes de un tensor, y son esencialmente los mismos si se calcula en un marco ortonormal $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \eta_{\mu\nu}$, en las viejas coordenadas donde $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{viejas}$ o en las nuevas coordenadas donde $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{nuevas}$.

La condición de norma y la ecuaciones de campo dada por las Ecs. (2.18) y (2.20) de la teoría linealizada son parecidas a las ecuaciones de la teoría electromagnética en la norma de Lorentz y el espacio-tiempo plano

$$A^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0, \quad (2.25)$$

$$-A^{\mu}{}_{,\alpha}{}^{\alpha} = 4\pi j^{\mu}. \quad (2.26)$$

Se diferencian tan sólo por un índice extra, como podemos ver $h^{\mu\nu}$ con A^{μ} , $T^{\mu\nu}$ con j^{μ} , consecuentemente se puede inferir mucho desde el punto de vista de la analogía de la teoría electromagnética con la Teoría Linealizada de la Relatividad General. Las ecuaciones de campo Ec.(2.20) deben tener soluciones de onda gravitacional. Así el análogo de las ondas planas electromagnéticas:

$$A^x = A^x(t - z), \quad A^y = A^y(t - z), \quad A^z = 0, \quad A^0 = 0,$$

serán las ondas planas gravitacionales, dadas por

$$\bar{h}^{xx} = \bar{h}^{xx}(t - z), \quad \bar{h}^{xy} = \bar{h}^{xy}(t - z), \quad \bar{h}^{yy} = \bar{h}^{yy}(t - z), \quad \bar{h}^{\mu 0} = \bar{h}^{\mu z} = 0, \quad (2.27)$$

para toda μ , para el caso de ondas monocromáticas viajeras en el eje z .

2.2. Ondas Planas

Las soluciones más simples de las ecuaciones linealizadas $\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha = \bar{h}_{\mu}{}^\alpha{}_{,\alpha} = 0$ que se interpretan como la solución de una onda monocromática son:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \Re[A_{\mu\nu}e^{ik_\alpha x^\alpha}], \quad (2.28)$$

la expresión $\Re[A_{\mu\nu} \exp ik_\alpha x^\alpha]$ no es más que la parte real de la expresión anterior o tomar la parte real; donde $A_{\mu\nu}$ es la amplitud y k_μ es el vector de onda, son constantes que satisfacen:

$$k_\alpha k^\alpha = 0, \quad (\vec{k} \text{ es un vector nulo}), \quad (2.29)$$

$$A_{\mu\alpha} k^\alpha = 0, \quad (\vec{A} \text{ ortogonal a } \vec{k}), \quad (2.30)$$

estas expresiones se derivan de las condiciones $\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha = 0$ y $\bar{h}_{\mu}{}^\alpha{}_{,\alpha} = 0$, respectivamente. Claramente esta solución describe una onda con frecuencia:

$$w \equiv k^0 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.31)$$

la cual se propaga con la velocidad de la luz y dirección del vector de onda:

$$\vec{k} = \left(\frac{1}{\omega}\right)(k_x, k_y, k_z). \quad (2.32)$$

La amplitud $A_{\mu\nu}$ pareciera tener seis componentes (10 componentes menos 4 constricciones de ortogonalidad $A_{\mu\alpha}k^\alpha = 0$). Pero este tensor se debe de reducir a los 2 grados de libertad del campo gravitacional y no a seis.

2.2.1. La Norma Transversa y de Traza Nula

Si seleccionamos un 4 vector velocidad \vec{u} no como algún evento si no considerando la misma \vec{u} a través de todo el espacio-tiempo (desde el punto de vista de la relatividad especial).

Debido a una transformación de norma se impone la condición

$$A_{\mu\nu}u^\nu = 0, \quad (2.33)$$

Éstas son solamente tres constricciones sobre $A_{\mu\nu}$ y no cuatro debido a que una de ellas satisface la Ec.(2.30), $k^\mu(A_{\mu\nu}u^\nu) = 0$, como una cuarta restricción se usa una transformación de norma dada para obtener:

$$A^\mu{}_\mu = 0. \quad (2.34)$$

Así, obtenemos 8 constricciones en total, $A_{\mu\alpha}u^\alpha = A_{\mu\alpha}k^\alpha = A^\alpha{}_\alpha = 0$, sobre las componentes de la amplitud; y el sistema de coordenadas (norma) es ahora fijo. De esta manera las 2 principales componentes libres de $A_{\mu\nu}$ representan los dos grados de libertad (2 polarizaciones) en la onda plana gravitacional.

Es de ayuda reiterar que las 8 constricciones $A_{\mu\alpha}u^\alpha = A_{\mu\alpha}k^\alpha = A^\alpha{}_\alpha = 0$ en un marco de Lorentz donde $u^0 = 1, u^j = 0$ tal que en una forma donde k^α no aparece explícitamente:

$$h_{\mu 0} = 0, \quad \text{i.e. las componentes espaciales de } h_{ik} \text{ no son cero,} \quad (2.35)$$

$$h_{kj,j} = 0. \quad \text{i.e. las componentes espaciales son de divergencia nula,} \quad (2.36)$$

$$h_{kk} = 0, \quad \text{i.e. las componentes espaciales tienen traza-nula.} \quad (2.37)$$

Aquí se ve que estas condiciones de norma son lineales en $h_{\mu\nu}$. Cualquier tensor simétrico satisfaciendo las Ecs. (2.35), (2.36) y (2.37) se dice que es un tensor transverso y de traza-nula. Transverso dado que es puramente espacial ($h_{0\mu}$) y, si se piensa como una onda, es transverso a su propia dirección de propagación ($h_{ij,j} = h_{ij}k_j$); y de traza nula porque $h_{kk} = 0$.

La norma especial en la cual $h_{\mu\nu}$ se reduce a sus partes transversa de traza-nula es llamada la TT o simplemente norma transversa de traza-nula, las condiciones (2.35), (2.36) y (2.37) definen esta norma que pueden ser resumidas como $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{TT}$.

2.2.2. Polarización de Ondas Planas

La desviación de Geodésicas en la dirección transversa mejora la definición para estudiar y caracterizar la polarización de ondas planas. Considérese un plano, en el cual se tiene ondas gravitacionales propagándose en la dirección z , dado que las constricciones $h_{0\mu}^{TT} = 0$, $h_{ij,j}^{TT} \equiv ik_j h_{ij}^{TT} = 0$ y $h_{kk}^{TT} = 0$, nos muestra que solamente las componentes no nulas de $h_{\mu\nu}^{TT}$ son:

$$h_{xx}^{TT} = -h_{yy}^{TT} = \Re[A_+ e^{-iw(t-z)}], \quad (2.38)$$

$$h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT} = \Re[A_\times e^{-iw(t-z)}]. \quad (2.39)$$

Las amplitudes A_+ y A_\times representan 2 modos independientes de polarización. Como en las ondas planas electromagnéticas, así que para ondas planas gravitacionales, se puede resolver una onda, en términos de 2 componentes linealmente polarizadas, o alternatively en términos de 2 componentes circularmente polarizadas.

Para ondas linealmente polarizadas, los vectores de polarización unitarios de la teoría electromagnética son e_x y e_y . Una carga de prueba que es golpeada por una onda plana con vector de polarización e_x oscila en la dirección x relativa a un marco inercial; y similarmente para e_y . Por analogía, los tensores de polarización lineales unitarios para ondas gravitacionales son:

$$e_+ = e_x \otimes e_x - e_y \otimes e_y \quad (2.40)$$

$$e_\times = e_x \otimes e_y + e_y \otimes e_x. \quad (2.41)$$

La onda plana (2.38) y (2.39), cuando $A_\times = 0$ tiene polarización e_+ , puede ser escrito como

$$h_{jk} = \Re[A_+ e^{-iw(t-z)} e_{+jk}]. \quad (2.42)$$

El efecto de alterar la separación geodésica entre dos partículas de prueba depende de la dirección de su separación.

Para ver los efectos en todas las direcciones en seguida, considere un anillo circular de partículas de prueba en el plano transversal (x, y) rodeando una partícula central, cuando la onda plana dada por la onda plana anterior (con la polarización e_+) pasa, deforma lo que fue un anillo dando como resultado en el propio marco de referencia de la partícula central, estar dentro de una elipse con ejes en las direcciones x y y que pulsa hacia dentro y hacia afuera.

Una onda de polarización e_x deforma el anillo en un ángulo de 45 grados de los ejes x y y . Para ondas circularmente polarizadas, el vector de polarización unitario de la teoría electromagnética son:

$$e_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x + ie_y), \quad (2.43)$$

$$e_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x - ie_y). \quad (2.44)$$

Similarmente, los tensores de polarización circular de la teoría gravitacional son:

$$e_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ + ie_x), \quad (2.45)$$

$$e_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ - ie_x). \quad (2.46)$$

Una partícula de prueba que es golpeada por una onda electromagnética de polarización e_R se mueve alrededor de un círculo en la dirección contraria de las manecillas del reloj; para e_L que se mueve en círculos en la dirección de las manecillas del reloj. Similarmente para una onda gravitacional de polarización e_R rota la deformación del anillo de una partícula de prueba en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

Capítulo 3

El Trompo Relativista

INTRODUCCIÓN

En este Capítulo revisaremos la teoría de Hansson-Regge, sobre la formulación del trompo relativista, como un sistema aislado para posteriormente estudiar el caso en el que interactúa con un campo gravitacional obteniéndose las ecuaciones de movimiento que se utilizarán en el próximo Capítulo.

3.1. Constricciones

La descripción del trompo relativista se describe principalmente por cantidades tensoriales de invarianza relativista 4-dimensional (dada sus velocidades, lineal, angular; momentum lineal, y espín). Sin embargo, dichos tensores tienen más grados de libertad que el sistema involucrado y por consiguiente las constricciones deben ser impuestas sobre éstos tensores para que puedan ser identificables con las apropiadas variables físicas del trompo relativista. Las constricciones sobre los tensores de momentum y velocidad, son muy similares a las constricciones sobre las que se han usado para partículas sin espín.

Las ecuaciones de restricción para el espín y velocidad angular han presentado dificultades, por lo que se hace más interesante tratarlos nuevamente en esta teoría del trompo.

Consideremos un tensor antisimétrico $S^{\mu\nu}$. Donde $S^{\mu\nu}$ tiene seis componentes independientes, pero con sólo tres de ellos se puede describir la rotación del trompo. Para librarse de los grados de libertad extra del espín, hay dos tipos diferentes de restricción que se han propuesto, los cuales son:

$$S^{\mu\nu}U_\nu = 0, \quad (3.1)$$

y

$$S^{\mu\nu}P_\nu = 0, \quad (3.2)$$

dichas constricciones expuestas serán referidas como la restricción de Pirani [18] y Tulczyjew [21] respectivamente. Donde U_ν es la velocidad lineal y P_ν es el momentum lineal, Ecs. (3.1) y (3.2) respectivamente.

Historicamente hablando la Ec. (3.1) referida a Pirani, fue introducida por Frenkel (llamada la condición de Frenkel) para el mismo fin, 33 años más tarde el modelo mencionado es desarrollado por Barut [26] en el que describe los grados de libertad internos del sistema; donde la Ec. (3.1) se sigue cumpliendo, sin embargo en este modelo del trompo relativista [20] se considera la Ec. (3.2) en que los límites no relativistas se tiene solamente 3 grados de libertad del espín, la diferencia esencial entre las Ecs. (3.1) y (3.2) radica en la forma en que se puede mover libremente la partícula.

Este hecho significa que la restricción de Pirani no es demasiado restrictiva, por lo que permite soluciones con más de seis grados de libertad; lo cual no nos permitiría asociar cantidades físicas del sistema a los grados de libertad extras que describe un trompo, ya que para el movimiento de un trompo se necesitarían tan sólo seis grados de libertad (tres para traslación y tres para rotación).

Por consiguiente, evitaremos usar la constricción de Pirani Ec. (3.1).

Ahora si nos quedamos con la Ec. (3.2) de Tulczyjew, se mostrará que esta constricción es apropiada a adoptar porque implicaría que un trompo libre no se mueve en el marco en reposo del momentum. La norma asociada (y relaciones invariantes) para la velocidad angular serán vistas en la siguiente sección.

3.2. Formalismo Lagrangiano para un Trompo Libre

Describiremos un trompo libre con las variables $x^\mu(\tau), e^\mu_{(\alpha)}(\tau)$, donde x^μ son las cuatro coordenadas de la posición del trompo en el espacio-tiempo de Minkowski. Ahora, $e^\mu_{(\alpha)}$ representan cuatro vectores atados al trompo para describir su rotación y τ es un parámetro cualquiera en la línea del mundo del trompo (el índice α lleva por nombre la de un vector y tiene por característica que no es tensorial, luego μ es un índice tensorial, ejemplo: $e^2_{(\alpha)}$ significa la componente 2 de la tétrada del vector time-like).

Los 4 vectores $e_{(\alpha)}$ constituyen un marco completamente ortonormal

$$\eta_{\mu\nu} e^\mu_{(\alpha)} e^\nu_{(\beta)} = \eta_{(\alpha\beta)}, \quad (3.3)$$

$$\eta^{(\alpha\beta)} e^\mu_{(\alpha)} e^\nu_{(\beta)} = \eta^{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

Donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo de Minkowski que se representa por: $\eta_{(\alpha\beta)} = \eta^{(\alpha\beta)} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ además de ser una matriz invariante.

Por consiguiente, sólo seis de las 16 componentes de la tétrada de vectores son independientes, y estas se pueden identificar por φ^N con $N = 1, \dots, 6$.

Por otro lado se define ahora las velocidades lineal y angular; U^μ , $\omega^{\mu\nu}$ por:

$$U^\mu = \dot{x}^\mu, \quad (3.5)$$

$$\omega^{\mu\nu} = \eta^{(\alpha\beta)} e^\mu_{(\alpha)} \dot{e}^\nu_{(\beta)} = -\omega^{\nu\mu}, \quad (3.6)$$

donde el punto significa diferenciación con respecto a τ . La antisimetría de $\omega^{\mu\nu}$ se sigue de la misma relación (3.4) lo cual implica que la velocidad angular tiene sólo seis componentes independientes. Para propósitos variacionales, es de ayuda definir el tensor antisimétrico $\delta\theta^{\mu\nu}$ y $\delta e^\mu_{(\alpha)}$ por:

$$\delta\theta^{\mu\nu} = \eta^{(\alpha\beta)} e^\mu_{(\alpha)} \delta e^\nu_{(\beta)} = -\delta\theta^{\nu\mu}, \quad (3.7)$$

y

$$\delta e^\mu_{(\alpha)} = \delta\theta^{\mu\nu} e_{\nu(\beta)}, \quad (3.8)$$

utilizando las dos relaciones (3.7) y (3.8) en la variación del tensor de la velocidad angular Ec. (3.6), se obtiene:

$$\delta\omega^{\mu\nu} = \delta\theta^{\mu\nu} + \omega^{\mu\lambda} \delta\theta_\lambda{}^\nu - \delta\theta^{\mu\lambda} \omega_\lambda{}^\nu, \quad (3.9)$$

estas ecuaciones son importantes porque cuando se hace una variación al lagrangiano; se utilizan y como consecuencia, se obtienen las ecuaciones de movimiento.

Ahora se definen los cuatro invariantes

$$\begin{cases} a_1 &= U_\mu U^\mu = u^2 \\ a_2 &= \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \equiv \omega \cdot \omega \\ a_3 &= U_\mu \omega^{\mu\nu} \omega_{\nu\lambda} U^\lambda \equiv U \omega \omega U \\ a_4 &= \det \omega = \frac{1}{2} (\omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}^*)^2 \equiv \frac{1}{16} (\omega \cdot \omega^*)^2 \end{cases} \quad (3.10)$$

donde

$$\omega^{*\mu\nu} = \left(\frac{1}{2}\right)\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\omega_{\lambda\rho},$$

con $\epsilon^{0123} = +1$.

El lagrangiano propuesto para el trompo esférico relativista, libre, es de la forma

$$L_0 = \sqrt{a_1}\mathcal{L}\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1^2}, \frac{a_4}{a_1^2}\right). \quad (3.11)$$

Donde se observa que el lagrangiano tiene potencia 1 en sus argumentos y depende solamente de las velocidades lineal y angular; por tanto aseguran invariancia de reparametrización bajo el cambio del parámetro $\hat{\tau} = \hat{\tau}(\tau)$.

El momentum lineal P^μ y espín $S^{\mu\nu}$ se definen por

$$\begin{cases} P^\mu &= -\frac{\partial L_0}{\partial U_\mu} &= -2U^\mu L_1 - 2\omega^{\mu\nu}\omega_{\nu\lambda}U^\lambda L_3 \\ S^{\mu\nu} &= -\frac{\partial L_0}{\partial \omega_{\mu\nu}} &= -4\omega^{\mu\nu}L_2 - 2(U^\mu\omega^{\nu\lambda}U_\lambda - U^\nu\omega^{\mu\lambda}U_\lambda)L_3 - \frac{1}{2}\omega^{*\mu\nu}(\omega \cdot \omega^*)L_4 \end{cases} \quad (3.12)$$

donde hemos hecho la abreviación

$$L_i(a_1, a_2, a_3, a_4) = \left(\frac{\partial}{\partial a_i}\right)L_0(a_1, a_2, a_3, a_4). \quad (3.13)$$

Las ecuaciones de movimiento para variaciones arbitrarias $\delta x_\mu, \delta \theta_{\mu\nu}$ se obtienen con la ayuda de las ecuaciones (3.9) y (3.12)

$$\dot{P}^\mu = 0, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
\dot{S}^{\mu\nu} &= S^{\mu\lambda}\omega_\lambda{}^\nu - \omega^{\mu\lambda}S_\lambda{}^\nu \\
&= P^\mu U^\nu - U^\mu P^\nu.
\end{aligned}
\tag{3.15}$$

De estas ecuaciones, y la constricción de Tulczyjew Ec. (3.2), se obtiene

$$0 = (S^{\mu\nu}P_\nu) = \dot{S}^{\mu\nu}P_\nu + S^{\mu\nu}\dot{P}_\nu = \dot{S}^{\mu\nu}P_\nu = (P^\mu U^\nu - P^\nu U^\mu)P_\nu, \tag{3.16}$$

de aquí, U es paralelo a P y $U^i = 0$ en el marco donde $P^i = 0$. De este modo; el trompo esta en reposo en el marco de reposo del momento cuando se escoge la constricción de Tulczyjew.

Vemos que entre P^μ y $S^{\mu\nu}$ hay 10 componentes independientes, pero sabemos que solamente se necesitan 6 componentes que concuerden con las componentes físicas; 3 componentes para rotaciones y tres para traslaciones, lo que ésto nos indica es la prescencia de una constricción más, para librarnos de las otras componentes no físicas del sistema, dado, que si el trompo está en reposo consideraremos las siguientes ecuaciones para restringir este movimiento

$$P^a = 0, (a = 1, 2, 3), \tag{3.17}$$

y

$$S^{\mu 0} = 0, \tag{3.18}$$

en la Ec. (3.17), el momentum lineal del objeto rotante es cero, excepto la componente en el tiempo, y en la Ec. (3.18) el espín del momentum angular tendrá solamente tres grados de libertad, dado el resultado anterior, solamente se eliminan 3 de los 7 grados de libertad de las ecuaciones, P^0 y S^{ij} para el trompo, lo que nos hace considerar una condición más, para eliminar el grado de libertad restante.

Dado que $P^0 = E$ en la definición del 4-vector de energía-momentum y dada la expresión de la energía como $E = \frac{\vec{P}^2}{2m}$ se puede imponer una constricción de manera que involucre la

componente temporal del momentum lineal, similar a P^0 , pero más general, como indica la siguiente ecuación

$$(P^0)^2 - f\left(\frac{1}{2}S^{ij}S_{ij}\right) = 0, \quad (3.19)$$

en la cual, de ésta última constricción se ve que f depende del sistema mismo. De esta manera tenemos las dos siguientes constricciones Ecs. (3.18) y (3.19) en forma covariante para el trompo en reposo,

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu}P_\nu &= 0, \\ P^\mu P_\mu - f\left(\frac{1}{2}S^{ij}S_{ij}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Esta teoría tiene dos principales clases de constricciones, como acabamos de ver (ecuación anterior), la segunda ecuación de la Ec. (3.20) es atribuída a Regge [20]:

$$P_\mu P^\mu = f\left(\frac{1}{2}S^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\right),$$

y la otra es:

$$\det S = \left(\frac{1}{16}\right)(S^{\mu\nu}S_{\mu\nu}^*)^2 = 0. \quad (3.21)$$

En la Ec. (3.20) referida a Regge, como ya vimos se fija la norma en el tiempo y en la segunda constricción Ec. (3.21) se usa para obtener

$$e^\mu_{(0)} = \frac{P^\mu}{M}, \quad (3.22)$$

donde

$$P_\mu P^\mu = -M^2, \quad (3.23)$$

(M es la masa del trompo en reposo).

La segunda ecuación de la Ec. (3.20) es la ecuación de trayectoria y contiene una función de una sola variable.

Dado que pudieran estar relacionados los objetos celestes con sus propiedades tales como la masa y el momentum angular, tal como lo pensó Regge en su función más simple de trayectoria para un trompo relativista esférico, como lo indica la siguiente expresión

$$H \equiv P^\mu P_\mu + \frac{1}{2r^2} S^{\mu\nu} S_{\mu\nu} + m_0^2 = 0, \quad (3.24)$$

donde r y m_0 son dos constantes que determinan las propiedades del sistema, de aquí que bien se pudiera tomar la función de la Ec. (3.20) como:

$$f\left(\frac{1}{2} S^{\mu\nu} S_{\mu\nu}\right) = -\frac{1}{2r^2} S^{\mu\nu} S_{\mu\nu} - m_0^2. \quad (3.25)$$

3.3. Interacción Gravitacional de un Trompo

A partir de la sección 3.2 veremos de manera similar la interacción para un trompo relativista en un campo gravitacional, y de acuerdo al principio general de covariancia.

Para estudiar las interacciones gravitacionales de un trompo primero se obtendrá las ecuaciones de movimiento del espín usando relatividad general. Tenemos que las ecuaciones del trompo libre se ven modificadas por la introducción de la métrica $g_{\mu\nu}$ de espacio-tiempo Riemanniano y de acuerdo al principio de equivalencia estas serán validas en un marco inercial local.

Donde la métrica va como:

$$\eta^{(\alpha\beta)} e^\mu_{(\alpha)} e^\nu_{(\beta)} = g^{\mu\nu}(x^\gamma), \quad (3.26)$$

las velocidades son:

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (3.27)$$

y

$$\omega^{\mu\nu} = \eta^{(\alpha\beta)} e^\mu_{(\alpha)} \frac{De^\nu_{(\beta)}}{D\tau} = -\omega^{\nu\mu}. \quad (3.28)$$

Donde $(\frac{D}{D\tau})$ significa derivada covariante en el tiempo dada la expresión siguiente:

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} = \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha U^\beta. \quad (3.29)$$

Donde A^μ es cualquier vector y $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ es el símbolo de Christoffel.

Con analogía a la ecuación (3.7) tenemos:

$$\delta\theta^{\mu\nu} = \eta^{(\alpha\beta)} e^\mu_{(\alpha)} De^\nu_{(\beta)} = -\delta\theta^{\nu\mu}. \quad (3.30)$$

Donde D significa variación covariante a lo largo de la línea del mundo del trompo, definida como

$$DA^\mu = \delta A^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha \delta x^\beta, \quad (3.31)$$

para cualquier vector A^μ .

Aquí también, $\delta\theta^{\mu\nu}$ y la velocidad angular $\omega^{\mu\nu}$ son tensores antisimétricos vía la Ec. (3.26). Las 4 invariantes que vimos en la sección anterior ahora se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
a_1 &= g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \\
a_2 &= g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\omega^{\mu\alpha}\omega^{\nu\beta} \\
a_3 &= g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}g_{\rho\lambda}U^\mu\omega^{\nu\alpha}\omega^{\beta\rho}U^\lambda, \\
a_4 &= g_{\mu\nu}g_{\rho\tau}g_{\alpha\beta}g_{\lambda\delta}\omega^{\delta\mu}\omega^{\nu\rho}\omega^{\tau\alpha}\omega^{\beta\lambda}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Ahora, estas nuevas cantidades invariantes se sustituirán por las otorgadas en la Ec. (3.10) en el lagrangiano L_0 , tanto P^μ como $S^{\mu\nu}$ se definen de igual manera que en la sección anterior.

En cuanto al equivalente de la ecuación (3.9), si usamos las ecuaciones (3.28), (3.30) y aplicando $\frac{D}{D\tau}$, D a los tensores $\delta\theta^{\mu\nu}$ y $\omega^{\mu\nu}$ respectivamente se llegan a las siguientes igualdades

$$\frac{D}{D\tau}\delta\theta^{\mu\nu} = \eta^{(\alpha\beta)}\frac{De^\mu_{(\alpha)}}{D\tau}De^\nu_{(\beta)} + \eta^{(\alpha\beta)}e^\mu_{(\alpha)}\frac{D}{D\tau}De^\nu_{(\beta)}, \tag{3.33}$$

y

$$D\omega^{\mu\nu} = \eta^{(\alpha\beta)}De^\mu_{(\alpha)}\frac{De^\nu_{(\beta)}}{D\tau} + \eta^{(\alpha\beta)}e^\mu_{(\alpha)}D\frac{De^\nu_{(\beta)}}{D\tau}, \tag{3.34}$$

así restando (3.33) a (3.34) obtenemos

$$\begin{aligned}
D\omega^{\mu\nu} &= \frac{D}{D\tau}\delta\theta^{\mu\nu} + \eta^{(\alpha\beta)}De^\mu_{(\alpha)}\frac{De^\nu_{(\beta)}}{D\tau} - \eta^{(\alpha\beta)}\frac{De^\mu_{(\alpha)}}{D\tau}De^\nu_{(\beta)} \\
&\quad + \eta^{(\alpha\beta)}e^\mu_{(\alpha)}\left[D\frac{De^\nu_{(\beta)}}{D\tau} - \frac{D}{D\tau}De^\nu_{(\beta)}\right],
\end{aligned} \tag{3.35}$$

el último término de la ecuación anterior no se anula, porque no conmuta más bien la identificamos según la definición (véase Análisis Tensorial de I. Sokolnikoff) del tensor de Riemann,

$$R^{\nu}_{\rho\alpha\beta} \equiv [D \frac{De^{\nu}_{(\beta)}}{D\tau} - \frac{D}{D\tau} De^{\nu}_{(\beta)}],$$

ésta última igualdad nos lleva a

$$D\omega^{\mu\nu} = \frac{D(\delta\theta^{\mu\nu})}{D\tau} + \omega^{\mu\lambda}\delta\theta_{\lambda}^{\nu} - \delta\theta^{\mu}_{\lambda}\omega^{\lambda\nu} + g^{\mu\rho}R^{\nu}_{\rho\alpha\beta}\delta x^{\alpha}U^{\beta} \quad (3.36)$$

Tenemos también que (3.33) y (3.34) deben satisfacer

$$\frac{D}{D\tau}\delta\theta^{\mu\nu} = \frac{d}{d\tau}(\delta\theta^{\mu\nu}) + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\delta\theta^{\alpha\nu}U^{\beta} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\delta\theta^{\alpha\mu}U^{\beta}, \quad (3.37)$$

y

$$D\omega^{\mu\nu} = \delta\omega^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\nu}\delta x^{\beta} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\mu}\delta x^{\beta}, \quad (3.38)$$

que son importantes para las ecuaciones de movimiento.

La ecuación (3.36) tiene un papel importante en cuanto a la variación del lagrangiano, para conseguir las ecuaciones de movimiento de manera que el método es el mismo, esto es, por el principio de Hamilton, hacer variaciones a nuestra acción $S = \int L_0 d\tau$ para obtener:

$$\frac{DP^{\mu}}{D\tau} = -\frac{1}{2}R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}U^{\nu}S^{\alpha\beta}, \quad (3.39)$$

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{D\tau} = S^{\mu\lambda}\omega_{\lambda}^{\nu} - \omega^{\mu\lambda}S_{\lambda}^{\nu}, \quad (3.40)$$

o

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{D\tau} = P^\mu U^\nu - U^\mu P^\nu, \quad (3.41)$$

donde P^μ y $S^{\mu\nu}$ estan definidas por (3.12).

De la Ec. (3.9), se ve inmediatamente que el espín $S^2 = \frac{1}{2}S^{\mu\nu}S_{\mu\nu}$ se conserva antes que se imponga cualquier constricción sobre el tensor de espín.

Adoptaremos aquí las mismas constricciones, como las que se usaron en la sección anterior para el espacio-tiempo plano, esto es, téndremos

$$\begin{cases} S^{\mu\nu} P_\nu & = 0 \\ e^\mu_{(0)} & = \frac{P^\mu}{M} \\ P^\mu P_\mu - f(\frac{1}{2}S_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}) & = 0 \\ x^0 - \tau & = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

que serán las constricciones sobre (3.39) y (3.41).

Se puede mostrar que $P^\mu P_\mu = -M^2$ y $S^2 = \frac{1}{2}S^{\mu\nu}S_{\mu\nu}$ son constantes de movimiento.

La energía del trompo y el momentum angular se conservan y pueden ser interpretadas como la suma de la energía de una partícula puntual más una interacción dipolar debido al espín y al momento angular total, esto es la suma del momento angular más el espín.

Se puede mostrar que una formulación equivalente para obtener las ecuaciones de movimiento, es proponer el lagrangiano

$$L = -U_\mu P^\mu - \frac{1}{2}S^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2}(P^\mu P_\mu + \frac{1}{2r^2}S^{\mu\nu}S_{\mu\nu} + m^2) + \lambda\lambda_\mu S^{\mu\nu}P_\nu, \quad (3.43)$$

donde λ, λ_μ son multiplicadores de Lagrange, dado este lagrangiano podemos hacer variaciones tanto a los multiplicadores como a las otras cantidades, éstas son:

$$\begin{aligned} \delta P^\mu & \rightarrow -U^\mu + \lambda P^\mu + \lambda\lambda_\mu S^{\mu\nu} = 0, \\ \delta S^{\mu\nu} & \rightarrow -\omega_{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2r^2}S^{\mu\nu} + \lambda(\lambda^\mu P^\nu - \lambda^\nu P^\mu) = 0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}\delta\lambda &\rightarrow P^\mu P_\mu + \frac{1}{2r^2} S^{\mu\nu} S_{\mu\nu} + m^2 = 0, \\ \delta\lambda_\mu &\rightarrow S^{\mu\nu} P_\mu = 0,\end{aligned}$$

si multiplicamos la ecuación

$$-\omega_{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2r^2} S^{\mu\nu} + \lambda(\lambda^\mu P^\mu - \lambda_\nu P^\nu) = 0,$$

por $S_{\mu\nu}$ y usamos la constricción $S^{\mu\nu} P_\nu = 0$, obtenemos:

$$-\omega^{\mu\nu} S_{\mu\nu} + \frac{\lambda}{r^2} S^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = 0. \quad (3.45)$$

Ahora, si multiplicamos la primera expresión Ec. (3.45) por P_μ tenemos $\lambda = \frac{U^\mu P_\mu}{P^\alpha P_\alpha}$ y como se puede tomar el parámetro como el tiempo propio, entonces $U^\mu U_\mu = -1$ y $\lambda = -\frac{1}{m}$, de aquí nos resulta que:

$$\begin{aligned}-S^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} &= \frac{1}{mr^2} S^{\mu\nu} S_{\mu\nu}, \\ &= \frac{2}{mr^2} S^2,\end{aligned} \quad (3.46)$$

donde $S^2 = \frac{1}{2} S^{\mu\nu} S_{\mu\nu}$. Si reemplazamos $\omega_{\mu\nu} = -\frac{1}{2mr^2} S_{\mu\nu}$ en la ecuación anterior vemos que hay una identidad, entonces podemos suponer que:

$$\begin{aligned}W^2 \equiv \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} &= \frac{1}{m^2 r^4} \left(\frac{1}{2} S^{\mu\nu} S_{\mu\nu} \right), \\ &= \frac{1}{m^2 r^4} S^2.\end{aligned} \quad (3.47)$$

Tal cantidad se llama frecuencia del sistema.

Se puede mostrar que si la geometría tiene un vector de killing ξ_μ , entonces hay una cantidad conservada C_ξ asociado al mismo definido por

$$C_\xi = P^\mu \xi_\mu - \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu}, \quad (3.48)$$

donde ; denota derivada covariante, y los vectores de Killing satisfacen:

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0.$$

Si derivamos este resultado, tenemos

$$\dot{C}_\xi = \frac{DP^\mu}{D\tau} \xi_\mu + P^\mu \frac{D\xi_\mu}{D\tau} - \frac{1}{2} \frac{DS^{\mu\nu}}{D\tau} \xi_{\mu;\nu} - \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \frac{D\xi_{\mu;\nu}}{D\tau},$$

y dada la expresión

$$\frac{D\xi_{\mu;\nu}}{D\tau} = \xi_{\mu;\nu;\sigma} U^\sigma,$$

además de fijarnos en el tensor de Riemann, finalmente usando las ecuaciones (3.39) y (3.41), tenemos:

$$\dot{C}_\xi = 0.$$

Estas constantes se pueden determinar a partir de los vectores de killing y de las condiciones iniciales del sistema, esto es una vez que se hallan encontrado las ecuaciones de movimiento. Sin embargo solo considereraremos algunas ecuaciones de este capítulo, que entre las más importantes son las Ecs. (3.1), (3.2), (3.39) y (3.41).

Capítulo 4

Obtención de la Ecuación de Desviación de Geodésicas para el Trompo Relativista

INTRODUCCIÓN

Se revisará lo que es la Ecuación de Desviación de Geodésicas (EDG) para partículas que caen en un campo gravitacional, de esta manera se analiza la separación de una con respecto a la otra a través de una pequeña cantidad, la cual es llamada vector fideucal. Introduciendo el espín del objeto, se apropia esta misma idea sobre la desviación del espín en el cual se obtiene lo que es la Ecuación de Desviación del Trompo Relativista (EDTR), que es una generalización de la Ecuación de Desviación de Geodésicas cuando el objeto tiene espín.

4.1. Ecuación de Desviación de Geodésicas

Es bien conocido que la Ecuación de Desviación de Geodésicas (EDG) para partículas sin espín juega un papel importante en la búsqueda para detectores de ondas gravitacionales [1, 2]. De hecho, se sabe actualmente que en todos los proyectos, se utiliza ésta para detectar ondas gravitacionales, incluyendo Ligo [3], Virgo [4] y Lisa [5] que tienen como raíz bases físicas en tal ecuación. Sin embargo, hace algún tiempo, en las referencias [7] y [8] se propuso usar las Ecuaciones de Movimiento del trompo relativista (EMTR) [9] en lugar de la ecuación de Desviación de Geodésicas (EDG) para el mismo propósito. Se puede observar que el movimiento de un trompo relativista se relaciona con algún objeto vía fuerzas gravitacionales y así relacionando también al tensor de Riemann tal como lo es para el caso de dos partículas sin espín.

Algunos métodos pueden ser usados para obtener la Ecuación de Desviación de Geodésicas que ahora lo designaremos como EDG (Ecuación de Desviación de Geodésicas). Para este nuevo método, sin embargo resulta más conveniente seguir el método en la referencia [17] enfatizando que los cálculos que se harán son más específicos que los de la referencia [17]. Considérese una partícula puntual de la cual su trayectoria se describe por las coordenadas $x^\mu(\tau)$, donde τ es el parámetro de tiempo propio. La ecuación de geodésicas es

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (4.1)$$

aquí, $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x)$ son los símbolos de Christoffel.

La ecuación (4.1) puede ser escrita en una forma más compacta como

$$\frac{D^2 x^\mu}{D\tau^2} = 0, \quad (4.2)$$

donde $\frac{D}{D\tau}$ denota derivada covariante con respecto a τ y $\frac{D^2 x^\mu}{D\tau^2} = \frac{D}{D\tau} \left(\frac{Dx^\mu}{D\tau} \right)$.

Nótese que desde que las coordenadas x^μ son campos escalares se tiene que $\frac{Dx^\mu}{D\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau}$.

Una partícula puntual cerca debe satisfacer una ecuación de geodésicas. Si usamos las coordenadas $x'^\mu(\tau)$ para describir la posición de tal partícula cercana tenemos

$$\frac{d^2 x'^\mu}{d\tau^2} + \Gamma'^\mu_{\alpha\beta}(x') \frac{dx'^\alpha}{d\tau} \frac{dx'^\beta}{d\tau} = 0, \quad (4.3)$$

queriendo decir cercano, que las coordenadas se pueden escribir como

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x), \quad (4.4)$$

con $|\xi^{\mu}|$ una cantidad muy pequeña.

A primer orden en ξ^{μ} tenemos

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(x + \xi) = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(x) + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta,\lambda}\xi^{\lambda}, \quad (4.5)$$

con $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta,\lambda} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}}$.

Así usando (4.4) y (4.5) se encuentra que la ecuación (4.3) llega a ser

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{d^2 \xi^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} + 2\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{d\xi^{\beta}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta,\lambda} \xi^{\lambda} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} = 0, \quad (4.6)$$

en virtud de (4.1), vemos que el primer y el tercer término de (4.6) se pueden dejar fuera.

De aquí, la expresión (4.6) se reduce a

$$\frac{d^2 \xi^{\mu}}{d\tau^2} + 2\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{d\xi^{\beta}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta,\lambda} \xi^{\lambda} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} = 0, \quad (4.7)$$

se puede escribir la ecuación (4.7) en forma covariante. Para este propósito primero escribimos (4.7) en la forma

$$\frac{d^2 \xi^{\mu}}{d\tau^2} + 2\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{d\xi^{\beta}}{d\tau} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta,\lambda} \xi^{\lambda} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau}, \quad (4.8)$$

ahora, si sumamos a ambos lados de (4.8) la siguiente expresión

$$\Gamma^\mu_{\alpha\lambda,\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\lambda + \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\alpha\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\lambda - \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\lambda, \quad (4.9)$$

obtenemos de la ecuación (4.8)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{d\xi^\beta}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda,\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\lambda + \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\alpha\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\lambda - \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\lambda = \\ -R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \xi^\lambda \frac{dx^\beta}{d\tau}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde $R^\mu_{\alpha\lambda\beta}$ es el tensor de Riemann de curvatura,

$$R^\mu_{\alpha\lambda\beta} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\lambda} - \Gamma^\mu_{\alpha\lambda,\beta} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\alpha\lambda}, \quad (4.11)$$

usando (4.1), notamos que el quinto término del lado izquierdo de (4.10) se puede escribir como

$$-\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\lambda = \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} \xi^\lambda, \quad (4.12)$$

substituyendo este resultado dentro de (4.10), se puede ver después que (4.10) se puede escribir en forma covariante de la siguiente manera

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} = -R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \xi^\lambda \frac{dx^\beta}{d\tau}. \quad (4.13)$$

La cual es, por supuesto, la famosa Ecuación de Desviación de Geodésicas (EDG) para un par de partículas cayendo muy cercanas una de la otra en caída libre en el fondo de un campo gravitacional.

4.2. Ecuación de Desviación para un Trompo Relativista

Las ecuaciones de movimiento de un trompo relativista moviéndose en el fondo de un campo gravitacional son:

$$\frac{D^2 P^\mu}{D\tau^2} = -\frac{1}{2} R^\mu{}_{\alpha\lambda\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta}, \quad (4.14)$$

y

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{D\tau} = 0. \quad (4.15)$$

Aquí $S^{\mu\nu}$ es el momento angular interno (o el tensor de espín) por unidad de masa del trompo que satisface las constricciones de Pirani [18] $S^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau} = 0$. Es importante mencionar que las Ecs. (4.14) y (4.15) se pueden derivar de manera diferente o de diferentes métodos [9]. Quizás uno de los más interesantes es la formulación lagrangiana debido a Rietdijk-Holten [27], Galvao-Teitelboim [19] y Hojman [20]. En el trabajo de Rietdijk-Holten-Galvao y Teitelboim el espín del trompo se describe por las variables x^μ y $\theta^\mu(\mu)$, donde $\theta^\mu(\mu)$ son variables que no conmutan. Mientras que en el formalismo de Hojman la rotación del trompo se describen por los cuatro vectores $e^\mu{}_{(\alpha)}(\tau)$ en ambos casos el correspondiente lagrangiano es un invariante de Poincaré. Una de las ventajas de la formulación Lagrangiana es que permite usar el principio variacional y asegurar la consistencia de las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, la principal motivación para desarrollar el formalismo lagrangiano para el trompo es usar el método de restricción Hamiltoniano de Dirac para cuantizar el sistema, un aspecto importante de esta construcción es que es más conveniente considerar las constricciones de Tulczyjew [21] $S^{\mu\nu} P_\nu = 0$, donde P_ν , es el momento lineal del trompo, más que las constricciones de Pirani. Como un resultado del momento lineal, en general, P_ν resulta no ser paralelo a la velocidad $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$. Sin embargo esta diferencia es muy incómoda y dependiente de norma. Para una propuesta práctica las constricciones de Tulczyjew y Pirani se consideran lo mismo, así las ecuaciones reducidas de movimiento se ven como las Ecs. (4.14) y (4.15). Una observación final es que

la Ec. (4.14) se puede entender como el análogo de la ecuación geodésica y de hecho se reduce a la Ec. (4.1) cuando el tensor de espín $S^{\mu\nu}$ se anula.

Después de comparar las Ecs. (4.13) y (4.14) se nota una gran similitud. Pero de hecho éstas ecuaciones son muy diferentes en el sentido de que la Ec. (4.13) se refiere a un par de partículas puntuales cercanas mientras que la Ec. (4.14) se asocia justamente con un solo sistema físico: un trompo relativista. No obstante esta similitud fue usada como una inspiración para proponer que la Ec. (4.13) se usara para detectar ondas gravitacionales, la Ec. (4.14) también pudiera servir para ese propósito. Más allá de entender las diferencias entre los dos sistemas, las partículas puntuales y el trompo relativista, es ahora cuando se necesita derivar el análogo a la Ec. (4.13) para un par de trompos relativistas muy cercanos. Para este propósito seguimos el método de la sección anterior pero usando la ecuación de movimiento del trompo relativista (4.14) en lugar de la Ec. (4.1).

Un trompo cercano debe satisfacer las correspondientes ecuaciones de movimiento

$$\frac{d^2 x'^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma'^{\mu}_{\alpha\beta}(x') \frac{dx'^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx'^{\beta}}{d\tau} = -\frac{1}{2} R'^{\mu}_{\alpha\lambda\beta}(x') \frac{dx'^{\alpha}}{d\tau} S'^{\lambda\beta}. \quad (4.16)$$

Consideremos ahora una perturbación de la forma

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x), \quad (4.17)$$

y

$$S'^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}_{,\alpha} \xi^{\alpha}(x). \quad (4.18)$$

Substituyendo (4.17) y (4.18) en (4.16) y expresiones similares para Γ y R , nos enfocamos ahora en la siguiente expresión

$$\begin{aligned} & \frac{d^2(x^{\mu} + \xi^{\mu})}{d\tau^2} + \left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(x) + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta,\lambda} \xi^{\lambda} \right) \frac{d(x^{\alpha} + \xi^{\alpha})}{d\tau} \frac{d(x^{\beta} + \xi^{\beta})}{d\tau} = \\ & -\frac{1}{2} \left(R^{\mu}_{\alpha\lambda\beta}(x) + R^{\mu}_{\alpha\lambda\beta,\sigma} \xi^{\sigma} \right) \left(\frac{d(x^{\alpha} + \xi^{\alpha})}{d\tau} \right) \left(S^{\lambda\beta} + S^{\lambda\beta}_{,\gamma} \xi^{\gamma} \right), \end{aligned} \quad (4.19)$$

si nos restringimos a primer orden en ξ^μ . Obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{d\xi^\beta}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\lambda} \xi^\lambda \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \\ & -\frac{1}{2} [R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta} + R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta} + R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta}_{,\gamma} \xi^\gamma + R^\mu_{\alpha\lambda\beta,\sigma} \xi^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta}], \end{aligned} \quad (4.20)$$

y usando (4.14), la ecuación se simplifica a

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{d\xi^\beta}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\lambda} \xi^\lambda \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \\ & -\frac{1}{2} [R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta} + R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta}_{,\gamma} \xi^\gamma + R^\mu_{\alpha\lambda\beta,\sigma} \xi^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta}], \end{aligned} \quad (4.21)$$

resulta ser más conveniente escribir esta ecuación como

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{d\xi^\beta}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta,\lambda} \xi^\lambda \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \\ & -\frac{1}{2} [R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta} + R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta}_{,\gamma} \xi^\gamma + R^\mu_{\alpha\lambda\beta,\sigma} \xi^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta}], \end{aligned} \quad (4.22)$$

el siguiente paso es escribirla en forma covariante. Para este propósito, como se hizo en la sección anterior, sumamos en ambos lados de la Ec. (4.22) la siguiente expresión

$$\Gamma^\mu_{\alpha\lambda,\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\lambda + \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\alpha\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\lambda - \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\lambda, \quad (4.23)$$

y de esta manera tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^\sigma_{\alpha\lambda,\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\lambda + \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\alpha\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\lambda - \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\lambda \\ & = -R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \xi^\lambda \frac{dx^\beta}{d\tau} - \frac{1}{2} [R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta} + R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta}_{;\gamma} \xi^\gamma + R^\mu_{\alpha\lambda\beta,\sigma} \xi^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta}] \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde hemos usado la definición del tensor de Riemann $R^\mu_{\alpha\lambda\beta}$.

De acuerdo con la Ec. (4.12), y usando (4.14), nos fijamos que en el quinto término del lado izquierdo de la Ec. (4.24) nos lleva a

$$-\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\lambda = \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} \xi^\lambda + \frac{1}{2} \Gamma^\mu_{\sigma\gamma} \xi^\gamma R^\sigma_{\alpha\lambda\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta}, \quad (4.25)$$

substituyendo la Ec. (4.25) dentro de (4.24), y como aprendimos que la Ec. (4.24) se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} + \frac{1}{2} \Gamma^\mu_{\sigma\gamma} \xi^\gamma R^\sigma_{\alpha\lambda\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta} = -R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \xi^\lambda \frac{dx^\beta}{d\tau} \\ & - \frac{1}{2} [R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta} + R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta}_{;\gamma} \xi^\gamma + R^\mu_{\alpha\lambda\beta,\sigma} \xi^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta}], \end{aligned} \quad (4.26)$$

ahora, dado que

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} [R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta} + R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta}_{;\gamma} \xi^\gamma + R^\mu_{\alpha\lambda\beta,\sigma} \xi^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta}] = \frac{1}{2} \Gamma^\mu_{\sigma\gamma} \xi^\gamma R^\sigma_{\alpha\lambda\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta} \\ & - \frac{1}{2} [R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{D\xi^\alpha}{D\tau} S^{\lambda\beta} + R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta}_{;\gamma} \xi^\gamma + R^\mu_{\alpha\lambda\beta;\sigma} \xi^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta}], \end{aligned} \quad (4.27)$$

de aquí, para cualquier tensor contravariante A^μ definimos la derivada covariante como $A^\mu_{;\sigma} = A^\mu_{,\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\gamma} A^\gamma$. Sin embargo el resultado (4.27) parece ser confiable, pero no es trivial ya que hay muchos términos involucrados tal que al final desaparecen dejando el resultado (4.27).

Finalmente usando la Ec. (4.27), la expresión (4.26) llega a ser

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} = -R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \xi^\gamma \frac{dx^\beta}{d\tau} - \frac{1}{2} [R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{D\xi^\alpha}{D\tau} S^{\lambda\beta} + R^\mu_{\alpha\lambda\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta}_{;\gamma} \xi^\gamma + R^\mu_{\alpha\lambda\beta;\sigma} \xi^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^{\lambda\beta}]. \quad (4.28)$$

La cual es la forma covariante de la Ecuación de Desviación del Trompo Relativista (EDTR). Claramente, la Ec. (4.28) se reduce a (4.13) cuando el tensor de espín $S^{\lambda\beta}$ se anula. Sin embargo, la Ec. (4.28) es una extensión de (4.13). Uno de los rasgos atractivos de la Ec. (4.28) es que el espín del momento angular $S^{\lambda\beta}$ del trompo aparece acoplado a la gravedad vía el tensor de curvatura de Riemman $R^\mu_{\alpha\lambda\beta}$, parece razonable pensar que esta característica puede mejorar una mejor descripción de las propiedades de la geometría de curvatura. En particular, veremos en el siguiente capítulo que EDTR se puede emplear para estudiar las diferentes propiedades de las ondas gravitacionales.

4.3. La Ecuación de Desviación de Geodésica del Trompo Relativista y Ondas Gravitacionales

Investigaremos en esta sección las consecuencias de la ecuación (4.28) para el caso de las ondas gravitacionales. Empezaremos por ver brevemente como la Ec. (4.13) se usa para este caso particular.

Consideremos una onda gravitacional en el espacio plano, para este caso, la métrica se puede escribir como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.29)$$

tal como vimos en el capítulo 2. Aquí, $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski y $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. En la norma transversa de traza-nula tenemos

$$\begin{aligned} h_{0\mu} &= 0, \\ h_{ij,j} &= 0, \\ h^\mu{}_\mu &= 0, \end{aligned} \tag{4.30}$$

con los índices $i, j, \dots etc$ corriendo de 1 a 3. Las ecuaciones de campo gravitacional de Einstein implican que h_{ij} satisfacen la ecuación de onda

$$\square^2 h_{ij} = 0 \tag{4.31}$$

Donde $\square^2 = \partial^\mu \partial_\mu$ es el D'Alambertiano. Considerando la norma dada en (4.30), las componentes de espacio-tiempo del tensor de Riemman R_{i0j0} tiene la forma simple

$$R_{i0j0} = -\frac{1}{2} h_{ij,00}. \tag{4.32}$$

Usando (4.30), tenemos que h_{ij} se puede escribir como

$$h_{ij} = A_+ e_{ij}^+ + A_\times e_{ij}^\times, \tag{4.33}$$

siguiendo la notación que vimos en el capítulo 2, A_+ y A_\times son dos amplitudes independientes sin dimensión, e_{ij}^+ y e_{ij}^\times son los tensores de polarización. Para una onda viajando en la dirección z solamente las componentes que no se anulan de e_{ij} son

$$e_{xx}^+ = e_{yy}^+ \quad \text{y} \quad e_{xy}^\times = e_{yx}^\times, \tag{4.34}$$

y en este caso A_+ y A_\times resultan ser funciones solamente de $t - z$.

En un marco de referencia propio tenemos $x^0 = \tau$, $x^i = 0$, así que $\frac{dx^0}{d\tau} = 1$ y $\frac{dx^i}{d\tau} = 0$. En este marco de referencia encontramos que (4.13) llega a ser

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -R^i_{0j0}\xi^j, \quad (4.35)$$

usando (4.32), podemos describir (4.35) como

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = \frac{1}{2}h^i_{j,00}\xi^j, \quad (4.36)$$

con $h^i_j = \delta^{ik}h_{kj}$, y para una onda propagándose en la dirección z , (4.35) implica

$$\frac{d^2\xi^z}{dt^2} = 0, \quad (4.37)$$

así como

$$\frac{d^2\xi^a}{dt^2} = \frac{1}{2}h^a_{b,00}\xi^b, \quad (4.38)$$

donde los índices latinos a, b, \dots , etc corren de 1 a 2. La Ec. (4.38) nos dice que solamente la separación de dos partículas puntuales cercanas en la dirección transversa son significantes.

Si ahora nos direccionamos en el problema y a saber, estamos interesados en aplicar un método similar como el que acabamos de ver para el caso de un sistema con dos trompos relativistas muy cercanos. Para este propósito consideramos la Ec. (4.28) en un marco de referencia propio. Tenemos

$$\frac{d^2\xi^\mu}{dt^2} = -R^\mu_{0k0}\xi^k - \frac{1}{2}\left[R^\mu_{\alpha kl}\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}S^{kl} + R^\mu_{0kl}S^{kl}_{,\gamma}\xi^\gamma + R^\mu_{0kl,\sigma}\xi^\sigma S^{kl}\right], \quad (4.39)$$

donde usamos el hecho de que $S^{0\mu} = 0$ debido a las constricciones de Tulczyjew-Pirani $S^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau} = 0$.

Usando las simetrías del tensor de curvatura se puede encontrar que la componente del tiempo de la Ec. (4.39) es

$$\frac{d^2\xi^0}{dt^2} = -\frac{1}{2}R^0{}_{jkl} \frac{d\xi^j}{dt} S^{kl}, \quad (4.40)$$

mientras que las componentes espaciales llegan a ser

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi^i}{dt^2} = & -R^i{}_{0k0} \xi^k - \frac{1}{2}[R^i{}_{0kl} \frac{d\xi^0}{dt} S^{kl} + R^i{}_{0kl} S^{kl}{}_{,0} \xi^0 + R^i{}_{0kl,0} \xi^0 S^{kl}] \\ & - \frac{1}{2}[R^i{}_{jkl} \frac{d\xi^j}{dt} S^{kl} + R^i{}_{0kl} S^{kl}{}_{,j} \xi^j + R^i{}_{0kl,j} \xi^j S^{kl}]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Deseamos ahora aplicar las Ecs. (4.40) y (4.41) para el caso particular de una onda plana propagándose en la dirección z . Resulta ser conveniente escribir los índices i, j, \dots , etc como (a, z) . Con esta notación (4.40) se puede escribir como

$$\frac{d^2\xi^0}{dt^2} = -R^0{}_{azb} \frac{\xi^a}{dt} S^{zb}, \quad (4.42)$$

donde usamos el hecho de que solamente las componentes no nulas del tensor de curvatura de Riemann son:

$$R_{zazb} = R_{0a0b} = -R_{0azb} = -\frac{1}{2}h_{ab,00}. \quad (4.43)$$

Mientras que la Ec. (4.41) da

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = & - R^i{}_{0b0} \xi^b - [R^i{}_{0zb} \frac{d\xi^0}{dt} S^{zb} + R^i{}_{0zb} S^{zb}{}_{,0} \xi^0 + R^i{}_{0zb,0} \xi^0 S^{zb}] \\
& - \frac{1}{2} [R^i{}_{0ab} \frac{d\xi^0}{dt} S^{ab} + R^i{}_{0ab} S^{ab}{}_{,0} \xi^0 + R^i{}_{0ab,0} \xi^0 S^{ab}] \\
& - [R^i{}_{z bz} \frac{d\xi^z}{dt} S^{bz} + R^i{}_{0bz} S^{bz}{}_{,z} \xi^z + R^i{}_{0bz,z} \xi^z S^{bz}] \\
& - \frac{1}{2} [R^i{}_{z ab} \frac{d\xi^z}{dt} S^{ab} + R^i{}_{0ab} S^{ab}{}_{,z} \xi^z + R^i{}_{0ab,z} \xi^z S^{ab}] \\
& - [R^i{}_{abz} \frac{d\xi^a}{dt} S^{bz} + R^i{}_{0bz} S^{bz}{}_{,a} \xi^a + R^i{}_{0bz,a} \xi^a S^{bz}] \\
& - \frac{1}{2} [R^i{}_{abc} \frac{d\xi^a}{dt} S^{bc} + R^i{}_{0bc} S^{bc}{}_{,a} \xi^a + R^i{}_{0bc,a} \xi^a S^{bc}].
\end{aligned} \tag{4.44}$$

La componente z de la Ec. (4.44) es

$$\frac{d^2\xi^z}{dt^2} = -R^z{}_{azb} \frac{d\xi^a}{dt} S^{zb}, \tag{4.45}$$

donde hemos usado (4.43), y las componentes x e y son

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\xi^a}{dt^2} = & -R^a{}_{0b0} \xi^b - [R^a{}_{0bz} \frac{d\xi^0}{dt} S^{bz} + R^a{}_{0bz} S^{bz}{}_{,0} \xi^0 + R^a{}_{0bz,0} \xi^0 S^{bz}] \\
& - [R^a{}_{z bz} \frac{d\xi^z}{dt} S^{bz} + R^a{}_{0bz} S^{bz}{}_{,z} \xi^z + R^a{}_{0bz,z} \xi^z S^{bz}] - R^a{}_{0bz} S^{bz}{}_{,a} \xi^a.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Nótese que en las Ecs. (4.42), (4.45) y (4.46) la componente del espín S^{ab} del momento angular no aparece y solo aparecen las componentes principales de S^{zb} . Para entenderlo un poco mejor definimos

$$S^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} S_{jk}, \tag{4.47}$$

donde ϵ^{ijk} es el tensor de Levi-Civita con $\epsilon^{xyz} = 1$. De la Ec. (4.47) notamos que la componente z del momento angular intrínscico no juega un papel en nuestras ecuaciones (4.42),

(4.45) y (4.46). Esto significa que ningún efecto se espera cuando el trompo se orienta a lo largo de la dirección de propagación de la onda gravitacional.

La segunda observación interesante es que si S^{zb} no se anula entonces $\frac{d^2\xi^0}{dt^2} \neq 0$ y $\frac{d^2\xi^z}{dt^2} \neq 0$, contrario al caso de un par de partículas puntuales que están cercanas en el cual ambos términos se anulan. La tercera observación importante es que la ecuación $\frac{d^2\xi^a}{dt^2}$ contiene un número grande de términos además de la ecuación usual $R^a{}_{0b0} \xi^b$.

Claramente, esto significa que la solución de (4.46) no será tan simple como lo fue para el caso de partículas puntuales cercanas.

Capítulo 5

Ecuación de Desviación del Trompo Relativista y Pulsares

INTRODUCCIÓN

En este capítulo veremos en primer instancia como es la radiación gravitacional así como su diferencia con el caso electromagnético, estudiaremos que son los pulsares y como se relacionan con la Teoría General de la Relatividad, finalmente obtenemos la solución de la EDTR y relacionamos la solución con parámetros del pulsar de Hulse y Taylor [10], la producción de ondas provenientes del PSRB 1913+16 para obtener información sobre las perturbaciones que se pudieran medir en la tierra, sin embargo este estudio dista de la experimentación, además todavía no han sido detectadas las ondas gravitacionales como para hacer una buena comparación.

5.1. Radiación Gravitacional

Si nos preguntamos cuales son las características de la radiación, nuestra respuesta puede incluir la transmisión de energía e información a través del espacio o la existencia de una ecuación de onda que satisface algunas ecuaciones con condiciones. Estos aspectos, están por supuesto, relacionados, a una velocidad característica de transmisión, el cual se determina por la ecuación de onda. En la teoría gravitacional Newtoniana la energía se transmite vía el campo gravitacional el cual se puede determinar por el potencial gravitacional V . En el espacio vacío V satisface $\nabla^2 V = 0$, lo cual no es una ecuación de onda, pero puede ser considerado como el límite de una ecuación de onda en donde la velocidad característica de transmisión tiende al infinito.

Esto significa, que los efectos gravitacionales, son de acuerdo a la teoría de Newton transmitidos instantáneamente, lo que está en contradicción con el punto de vista relativista. Por otra parte con una velocidad infinita de transmisión es imposible asociar una longitud de onda con una frecuencia dada de oscilación.

La teoría de Einstein, siendo una teoría relativista, no sufre de estos defectos, y como veremos, esto nos lleva a una ecuación de onda para la propagación de disturbios gravitacionales con una velocidad característica igual a c . Una discusión de la radiación gravitacional usando las ecuaciones exactas de campo es virtualmente imposible, debido a su no linealidad extrema (sin embargo se ha dado considerable progreso en esta dirección sobre los últimos 30 años) nosotros debemos de recurrir por consiguiente a la linealización de las ecuaciones apropiadamente para un campo gravitacional débil. Esto nos conduce al surgimiento de una ecuación de onda, y nos permite comparar la radiación gravitacional con la radiación electromagnética.

La radiación electromagnética se genera acelerando las cargas, y por analogía nosotros esperamos acelerar las masas para producir radiación gravitacional.

Por la misma analogía, podemos quizás esperar que la radiación gravitacional sea predominantemente dipolar, pero este no es el caso. El momento dipolar de masa de un sistema de partículas es, por definición, el vector

$$\vec{d} = \sum_i m \vec{x}_i, \quad (5.1)$$

donde \vec{x} es el vector de posición de una partícula de masa m . Aquí $\frac{d}{dt}(\vec{d}) = \vec{p}_T$ es el momento total del sistema, así $\frac{d^2}{dt^2}(\vec{p}_T) = 0$ en virtud de la conservación del momentum, ésto es el porque no tenemos radiación dipolar. Más bien tendremos que la radiación será la segunda derivada del segundo momento de la distribución de masa de la fuente, se muestra

que es predominantemente radiación cuadrupolar. El segundo momento es el tensor \aleph con componentes definidos por

$$\aleph^{ij} = \sum_{ij} m x^i x^j, \quad (5.2)$$

el cual para una distribución continua toma la forma de una integral de volumen:

$$\aleph^{ij} = \int \rho x^i x^j dv. \quad (5.3)$$

5.2. Generación de Ondas Gravitacionales

En electromagnetismo, la radiación multipolar de orden principal de una distribución de carga no relativista es radiación dipolar. El vector potencial en la norma de Lorentz en la zona de onda es

$$A_j(t, \vec{x}) = \frac{1}{cr} \dot{d}_j \left(t - \frac{r}{c} \right), \quad (5.4)$$

donde $r \equiv |\vec{x}|$ y \vec{d} es el momento dipolar eléctrico. Los campos eléctrico y magnético que van como $\frac{1}{r}$ calculados en la ecuación anterior dependen solamente sobre las componentes de \vec{d} transversa a la dirección de propagación $\hat{n} \equiv \frac{\vec{x}}{r}$, así que podemos remplazar d_j por su parte transversa,

$$d_j^T \equiv P_{jk} d_k, \quad (5.5)$$

donde P_{jk} es el tensor de proyección,

$$P_{jk} = \delta_{jk} - n_j n_k. \quad (5.6)$$

Substituyendo los campos \vec{E} y \vec{B} de la Ec. (5.4) dentro del vector de Poynting, obtenemos la distribución angular del flujo de energía,

$$\frac{d^2 E}{dt d\omega} = \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{d}_j^T \ddot{d}_j^T \quad (5.7)$$

$$= \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{d}_j \ddot{d}_j - (n_j \ddot{d}_j)^2]. \quad (5.8)$$

La cantidad d_j será evaluado en el tiempo retardado $t - \frac{r}{c}$. Escogiendo el eje z a lo largo de \hat{n} , podemos integrar la Ec. (5.8) sobre el ángulo sólido para obtener

$$L_{em} \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}_j \ddot{d}_j. \quad (5.9)$$

Escribiendo $d_j = ex_j$ para una carga puntual, vemos que esto es simplemente la formula de Larmor, véase la pág. 382 de la Ref. [31].

Ahora en el terreno dimensional nosotros podríamos esperar radiación gravitacional de orden principal de una fuente con velocidades bajas siendo también un dipolo:

$$L_{GW} \propto \frac{G}{c^3} \ddot{d}_j \ddot{d}_j, \quad (5.10)$$

donde el momento dipolar gravitacional es

$$d_j = \sum_A m_A x_j^A, \quad (5.11)$$

y hemos permitido que $e^2 \rightarrow Gm^2$ en la Ec. (5.9). Sin embargo, Ec. (5.11) da

$$\ddot{d}_j = \sum_A m_A \ddot{x}_j^A = \sum_A \dot{p}_j^A, \quad (5.12)$$

donde \vec{p}^A es el momentum de la A-ésima partícula. Puesto que el momentum total del sistema se conserva (como habíamos explicado antes) $\dot{\vec{d}}_j = 0$. No hay radiación dipolar en relatividad general.

El siguiente orden de radiación multipolar es el dipolo magnético y el cuádrupolo eléctrico.

El "momento dipolar magnético de masa" es

$$\vec{\mu} \equiv \frac{1}{c} \sum_A \vec{x}^A \times (m_A \dot{\vec{x}}^A) = \frac{1}{c} \sum_A \vec{j}^A, \quad (5.13)$$

donde \vec{j}^A es el momentum angular de la A-ésima partícula. Por la conservación del momentum angular $\dot{\vec{\mu}} = 0$: no hay radiación dipolar magnético en Relatividad General. La radiación de menor orden es el cuádrupolo eléctrico.

El análogo de la Ec. (5.4) es

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{r c^4} \ddot{\aleph}_{jk}^{TT}(t - \frac{r}{c}), \quad (5.14)$$

donde \aleph_{jk} es el momento cuádrupolar de masa

$$\aleph_{jk} \equiv \sum_A m_A \left[x_j^A x_k^A - \frac{1}{3} \delta_{jk} (x^A)^2 \right]. \quad (5.15)$$

Donde el superíndice "TT" significa como ya hemos visto, tomar la parte transversa de traza-nula:

$$\aleph_{jk} \equiv P_{jl} P_{km} \aleph_{lm} - \frac{1}{2} P_{jk} (P_{lm} \aleph_{lm}). \quad (5.16)$$

El flujo de energía está dado por el tensor de energía-tensión

$$T_{0r} = \frac{1}{32\pi} \frac{c^4}{G} \langle h_{jk,0}^{TT} h_{jk,r}^{TT} \rangle . \quad (5.17)$$

Substituyendo la Ec. (5.14), tenemos

$$\frac{d^2 E}{dt d\omega} = \frac{1}{8\pi} \frac{G}{c^4} \langle \frac{d^3}{dt^3} (\aleph_{jk}^{TT}) \frac{d^3}{dt^3} (\aleph_{jk}^{TT}) \rangle . \quad (5.18)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \frac{G}{c^5} \langle \aleph_{jk}^{(3)} \aleph_{jk}^{(3)} - 2n_i \aleph_{ij}^{(3)} \aleph_{jk}^{(3)} n_k + \frac{1}{2} (n_j n_k \aleph_{jk}^{(3)})^2 \rangle , \quad (5.19)$$

donde el corchete con superíndice "3" denota la tercera derivada en el tiempo, integrando sobre \hat{n} , tenemos

$$L_{GW} \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \aleph_{jk}^{(3)} \aleph_{jk}^{(3)} \rangle . \quad (5.20)$$

La formula cuadrupolar (5.20), con la definición (5.15), son válidas para fuentes de movimiento lento ($v \ll c$), con gravedad interna débil (potencial Newtoniano ($\phi \ll c^2$)).

5.3. Pulsares

En el verano de 1967 Anthony Hewish y sus colaboradores de la Universidad de Cambridge detectaron, por accidente, emisiones de radio en los cielos que en nada se parecían a las que se habían detectado hasta entonces. Llegaban en impulsos muy regulares a intervalos de sólo 1 1/3 segundos. Para ser exactos, a intervalos de 1, 33730109 segundos. La fuente emisora recibió el nombre de «estrella pulsante» o «pulsar» en abreviatura (pulsating star en inglés).

Durante los dos años siguientes se descubrieron un número bastante grande de tales pulsares, seguramente se preguntará por qué no se descubrieron antes. El caso es que un pulsar radia mucha energía en cada impulso, pero estos impulsos son tan breves que por término medio la intensidad de ondas de radio es muy baja, pasando inadvertida. Es más, los astrónomos suponían que las fuentes de radio emitían energía a un nivel constante y no

prestaban atención a los impulsos intermitentes.

Uno de los pulsares más rápidos fue el que se encontró en la nebulosa del Cangrejo, comprobándose que radiaba en la zona visible del espectro electromagnético. Se apagaba y se encendía en perfecta sincronización con los impulsos de radio. Aunque había sido observado muchas veces, había pasado hasta entonces por una estrella ordinaria. Nadie pensó jamás en observarlo con un aparato de detección lo bastante delicado como para demostrar que guiñaba treinta veces por segundo. Con pulsaciones tan rápidas, la luz parecía constante, tanto para el ojo humano como para los instrumentos ordinarios.

¿Pero qué es un pulsar? Si un objeto emite energía a intervalos periódicos es que está experimentando algún fenómeno de carácter físico en dichos intervalos. Puede ser, por ejemplo, un cuerpo que se está expandiendo y contrayendo y que emite un impulso de energía en cada contracción. O podría girar alrededor de su eje o alrededor de otro cuerpo y emitir un impulso de energía en cada rotación o revolución.

La dificultad estribaba en que la cadencia de impulsos era rapidísima, desde un impulso cada cuatro segundos a uno cada 1/30 de segundo. El pulsar tenía que ser un cuerpo muy caliente, pues si no, no podría emitir tanta energía; y tenía que ser un cuerpo muy pequeño, porque si no, no podría hacer nada con esa rapidez.

Los cuerpos calientes más pequeños que habían observado los científicos eran las estrellas enanas blancas. Pueden llegar a tener la masa de nuestro sol, son tanto o más calientes que él y sin embargo no son mayores que la Tierra. ¿Podría ser que esas enanas blancas produjesen impulsos al expandirse y contraerse o al rotar? ¿O se trataba de dos enanas blancas girando una alrededor de la otra? Pero por muchas vueltas que le dieron los astrónomos al problema no conseguían que las enanas blancas se movieran con suficiente rapidez.

En cuanto a objetos aún más pequeños, los astrónomos habían previsto teóricamente la posibilidad de que una estrella se contrajera brutalmente bajo la atracción de la gravedad, estrujando los núcleos atómicos unos contra otros. Los electrones y protones interaccionarían y formarían neutrones, y la estrella se convertiría en una especie de gelatina de neutrones. Una «estrella de neutrones» como ésta podría tener la misma masa que el Sol y medir sin embargo sólo diez millas de diámetro.

Ahora bien, jamás se había observado una estrella de neutrones, y siendo tan pequeñas se temía que aunque existiesen no fueran detectables.

Con todo, un cuerpo tan pequeño sí podría girar suficientemente rápido para producir los impulsos. En ciertas condiciones los electrones sólo podrían escapar en ciertos puntos de la superficie. Al girar la estrella de neutrones, los electrones saldrían despedidos como el agua de un aspersor; en cada vuelta habría un momento en que el chorro apuntase en dirección a la Tierra, haciéndonos llegar ondas de radio y luz visible.

Thomas Gold [30], de la Universidad Cornell, pensó que, en ese supuesto, la estrella de neutrones perdería energía y las pulsaciones se irían espaciando cada vez más, cosa que resultó ser cierta. Hoy día parece muy probable que los pulsares sean esas estrellas de neutrones que los astrónomos creían indetectables.

5.3.1. El Pulsar Binario PSR 1913+16

La evidencia más fuerte para la existencia de ondas gravitacionales viene del estudio de la órbita del primer pulsar binario que se descubrió.

El pulsar binario, PSR 1913+16, fue descubierto por Hulse y Taylor [10] en 1974. Ellos encontraron rápidamente que los cambios visibles en la frecuencia del pulsar podrían ser explicados por el efecto Doppler debido al movimiento orbital alrededor de su compañera con un período de alrededor de 8 horas. La presencia de un reloj de alta precisión (pulsar) moviéndose con velocidad de $\sim 300Kms^{-1}$ a través del campo gravitacional de la compañera, esto causó una agitación de actividad en la comunidad relativista. La naturaleza ha suministrado una prueba fundamental para varios efectos relativistas. En la práctica, estos efectos se buscan en el estudio de tiempo de llegada de los pulsos desde el pulsar, como por ejemplo en el intento de medir su período con una aproximación de $\pm 1\mu s$ fue problemático debido a los cambios aparentes del período que llegaban a detectar hasta $80\mu s$ aproximadamente día a día, y a veces tanto como $8\mu s$ cada 5 minutos, tal conducta es muy diferente a otros pulsares: los cambios de período más largos conocidos a los pulsares son del orden de $10\mu s$ por año.

El Pulsar Binario PSR 1913+16 - Ondas Gravitacionales

1.- El sistema binario consiste de un pulsar en una órbita elíptica alrededor de su compañera. El pulsar tiene una velocidad orbital de $300Kms^{-1}$. Variaciones en el tiempo de llegada de los pulsos a la tierra proporciona información acerca de su órbita.

2.- El sistema se caracteriza por cuatro parámetros; las masas M_1 y M_2 ; a_1 , el semieje

mayor de la órbita del pulsar a lo largo del centro de masa; e i , la inclinación entre el plano orbital y el plano del cielo.

3.- Dos combinaciones de estos parámetros, $a_1 \sin i$ y la función de masa f

$$f \equiv \frac{(M_2 \sin i)^3}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{(a_1 \sin i)^3}{G} \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2$$

donde P es el período de la órbita, son medidos por efectos Newtonianos para correcciones de $\frac{v}{c}$.

4.- La Relatividad General nos permite tres combinaciones más de parámetros para ser medidos: uno es el avance del periastro, de la combinación del corrimiento Doppler de segundo-orden y corrimiento gravitacional, y otro del decaimiento del período orbital debido a la emisión de ondas gravitacionales.

5.- La consistencia de las relaciones entre los cuatro parámetros confirman la existencia de ondas gravitacionales y la ausencia de posibles influencias perturbativas sobre el sistema que podrían complicar la interpretación de los datos. En particular, la fórmula cuadrupolar para la emisión de ondas gravitacionales se confirma con un error dentro del 10%.

6.- Con mejorar la exactitud del cronometraje, más allá de los efectos relativistas que llegan a ser medidos y entonces las relaciones adicionales entre los cuatro parámetros pueden ser corroborados.

5.4. Solución de la Ecuación de Geodésicas para el Trompo Relativista

Si nos concentramos en los términos de la Ec. (4.46) y no involucrando derivadas tanto de S^{zb} como del tensor de Riemann, los cuales representan probablemente correcciones de ordenes pequeños. En este caso (4.46) se reduce a

$$\frac{d^2 \xi^a}{dt^2} = -R^a{}_{0b0} \xi^b - R^a{}_{0bz} \frac{d\xi^0}{dt} S^{bz} - R^a{}_{z bz} \frac{d\xi^z}{dt} S^{bz}, \quad (5.21)$$

usando (4.43), las ecuaciones (4.42), (4.45) y (5.21) llegan a ser

$$\frac{d^2\xi^0}{dt^2} = -\frac{1}{2}h_{ab,00}\frac{\xi^a}{dt}S^{zb}, \quad (5.22)$$

$$\frac{d^2\xi^z}{dt^2} = \frac{1}{2}h_{ab,00}\frac{\xi^a}{dt}S^{zb}, \quad (5.23)$$

y

$$\frac{d^2\xi^a}{dt^2} = \frac{1}{2}h^a{}_{b,00}\xi^b - \frac{1}{2}h^a{}_{b,00}\frac{d\xi^0}{dt}S^{bz} + \frac{1}{2}h^a{}_{b,00}\frac{d\xi^z}{dt}S^{bz}. \quad (5.24)$$

Respectivamente. De las Ecs. (5.22) y (5.23) podemos identificar que

$$x^0 = -\xi^z + cte.$$

Por consiguiente la Ec. (5.24) llega a ser

$$\frac{d^2\xi^a}{dt^2} = \frac{1}{2}h^a{}_{b,00}\xi^b + h^a{}_{b,00}\frac{d\xi^z}{dt}S^{bz}. \quad (5.25)$$

Nótese que si en un tiempo inicial el espín del trompo S^{bz} tiene una orientación tal como

$$\xi^b + 2\frac{d^2\xi^z}{dt^2}S^{bz} = 0, \quad (5.26)$$

entonces no hay movimiento transversal y $\xi^a = \text{constante}$. Y por consiguiente la Ec. (5.23) admite la solución

$$\xi^z = \text{constante.} \quad (5.27)$$

Si el espín del trompo se orienta a lo largo del vector de separación ξ^a que separa los dos trompos, entonces la onda gravitacional no produce cualquier efecto sobre el sistema. Esto Parece ser un nuevo resultado interesante donde en el caso ordinario de EDG la onda es siempre transversa en sus efectos físicos.

Si ahora buscamos una solución de la Ec. (5.25) de la siguiente forma

$$\xi^a = \xi^a_0 + \frac{1}{2}h^a_b \xi^b_0 + h^a_b \left(\frac{d\xi^z}{dt} \Big|_0 \right) S^{bz}. \quad (5.28)$$

Donde $\xi^a_0 = \text{const.}$ Observamos que $\frac{d\xi^a}{dt} = \frac{1}{2}h^a_{b,0} \xi^b_0 + h^a_{b,0} \left(\frac{d\xi^z}{dt} \Big|_0 \right) S^{bz}$. Substituyendo (5.28) en (5.23) encontramos que a primer orden en h , la Ec. (5.23) llega a ser

$$\frac{d^2 \xi^z}{dt^2} \approx 0. \quad (5.29)$$

De manera que si inicialmente $\frac{d\xi^z}{dt} \Big|_0 = 0$ es a primer orden de aproximación la solución (5.23) se reduce al caso ordinario de un par de partículas puntuales cercanas.

Hemos seguido la posibilidad de usar trompos relativistas como detectores de ondas gravitacionales, en [7, 8] donde un trompo aislado fue considerado, hace difícil de comparar los resultados con el caso de Ecuación de Desviación de Geodésicas EDG. Para sobrepasar esta dificultad se ha precisamente derivado la ecuación EDTR para un par de trompos cercanos. También se ha mostrado que la EDTR se reduce a la EDG cuando el tensor de espín se anula.

Considerando una onda gravitacional plana encontramos que la solución de la EDTR para dos casos simples. En el primer caso descubrimos que si el momentum angular interno del trompo se orienta a lo largo del vector de separación de los dos trompos, la onda gravitacional no produce cualquier efecto sobre el sistema físico.

En el segundo caso más general, se encontró que cerca del trompo tendrá un efecto diferente del caso de EDG solo a segundo orden de aproximación en la perturbación h_{ab} . A primer vista, podría parecer que estos dos casos muestran que aunque la formulación de

la EDTR puede ser teóricamente interesante esto no asegura una vía prometedora para la experimentación. Sin embargo, las estimaciones pueden mostrar que este no es el caso.

Dejemos escribir la Ec. (5.28) en la forma

$$\xi^a = \xi^a_0 + \frac{1}{2}h^a_b \xi^b_0 + \eta^a, \quad (5.30)$$

donde

$$\eta^a = h^a_b \left(\frac{d\xi^z}{dt} \Big|_0 \right) S^{bz}. \quad (5.31)$$

Aquí, estamos interesados en hacer estimaciones no muy aproximadas para η^a . El resultado $\xi^0 = -\xi^z + cte$ nos permite tener $\left(\frac{d\xi^z}{dt} \Big|_0 \right) \sim 1$.

Así, la Ec. (5.31) se reduce a

$$\eta^a \sim h^a_b \frac{S^{bz}}{m_0 c}, \quad (5.32)$$

donde, para tener las unidades correctas, establecemos las constantes m_0 y c . (Aquí, m_0 es la masa del trompo y c denota la velocidad de la luz). En un orden de magnitud, la expresión (5.32) se puede escribir en la forma

$$\eta \sim h \frac{S}{m_0 c}. \quad (5.33)$$

Aproximadamente podemos escribir $S \sim m_0 r^2 \omega$, así (5.33) llega a ser

$$\eta \sim h \frac{r^2 \omega}{c}. \quad (5.34)$$

Para Pulsares típicos en milisegundos (ms), $\omega \sim 10^3 Hz$ y $r \sim 10^6 cm$. $\frac{r^2 \omega}{c} \sim 10^5 cm$ y de (5.34) encontramos que

$$\eta \sim h(10^5 cm). \quad (5.35)$$

Si esperamos la mejor sensibilidad de la amplitud de la onda sobre la tierra, aproximadamente $h \sim 10^{-18}$, encontramos que $\eta \sim 10^{-13} cm$. Este valor para η es, por supuesto, es demasiado pequeño para ser detectado en la investigación actual. Sin embargo, esta estimación se basa sobre el valor $h \sim 10^{-18}$, el cual corresponde a fuentes de radiación gravitacional que estan a distancias de Mpc (Megaparsec) de la tierra, pero esto no necesariamente corresponde a algunos lugares del medio interestelar donde las llegadas de las ondas gravitacionales puedan tener un efecto fuerte . Por ejemplo, un pulsar puede estar lo suficientemente cercas de una fuente de ondas gravitacionales demasiado fuerte tal como otro pulsar, hoyo negro o supernova.

5.5. Ecuación de Desviación de Geodésicas para el Trompo Relativista y el Pulsar PSRB 1913+16

Hemos calculado la perturbación de la Ec. (5.35) para una cierta amplitud de onda $h \sim 10^{-18}$, pero consideremos ahora el sistema binario de Hulse y Taylor [10], con los siguientes parámetros [1, 10, 28]

$$\begin{aligned}
 * r_{pulsar} &= 1 \times 10^4 m &= 1 \times 10^6 cm \\
 P_{orbital} &= 27906,98161 s \\
 \omega_{orbital} &= 2,25147 \times 10^{-4} Hz \\
 i &= 45^\circ \\
 M_{pulsar} &= 1,4142 M_{Sol} &= 2,80 \times 10^{30} Kg \\
 \frac{a_1 \sin i}{c} &= 2,34186 s \\
 e &= 0,617139 \\
 w_{pulsar} &= 106,44 Hz \\
 G &= 6,67259 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}.
 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Donde $*$, es un valor típico de los pulsares.
 Utilizando la Ec. (5.34), la Ec. (5.35) nos da

$$\eta \sim h(10^4 cm). \quad (5.37)$$

Para el rango de valores entre las mejores sensibilidades experimentales esperadas en la Tierra [3, 6]: $h \sim 10^{-18}$ y $h \sim 10^{-12}$, de la ecuación anterior obtenemos

$$\eta \sim 10^{-14} cm, \quad (5.38)$$

$$\eta \sim 10^{-8} cm,$$

respectivamente. El primero de estos valores da una estimación muy pequeña para las investigaciones actuales. Esto puede ser debido a la lejanía de la fuente (el pulsar). El segundo valor de η brinda una posibilidad más tangible, al ser comparable con el radio de Bohr.

Hemos estudiado la solución para casos particulares, por lo que ahora nos ocupa es suponer que el pulsar PSRB 1913+16 es una fuente de ondas gravitacionales, que tiene como generación de ondas gravitacionales la Ec. (5.14), es decir la producción de ondas gravitacionales es de naturaleza cuadrupolar, de esta forma la Ec. (5.14) para puntos del campo cerca de $x^3 = z$ llega a ser [1, 14]

$$[h_{ij}] \approx \frac{8GMa^2\omega^2}{c^4r} \Re[e_{pol} \exp \frac{2i\omega}{c}(x^0 - x^3)], \quad (5.39)$$

donde 2ω es la frecuencia angular de la onda, r representa el punto de observación, M la masa del objeto que forma el segundo momento de masa (\aleph_{ij}), a representa la distancia entre el objeto y el centro de masa, ω es la velocidad angular del objeto.

De la ecuación (5.33), consideraremos el espín de la Tierra para estimar η , que es aproximadamente lo que un detector de ondas gravitacionales en tierra tendría que medir si sólo se tomará en cuenta la onda gravitacional proveniente del PRSB 1913+16.

Esta vez

$$\begin{aligned}
r_{Tierra} &= 6,37 \times 10^8 \text{ cm} \\
\omega_{Tierra} &= 7,27 \times 10^{-5} \text{ Hz}.
\end{aligned}
\tag{5.40}$$

La ecuación (5.34) queda como

$$\eta \approx h(983,61 \text{ cm}). \tag{5.41}$$

Para calcular h que proviene del pulsar binario podemos aproximar la amplitud dada por la Ec. (5.39)

$$h \approx \frac{8GMa^2\omega^2}{c^4r}. \tag{5.42}$$

Para el valor de a consideraremos el semieje mayor a_1 Ec. (5.36), ω como la velocidad angular de la órbita y $r = r_{obs}$ la distancia del PRSB 1913+16 a la Tierra, están dados por los siguientes valores [1]

$$\begin{aligned}
a = a_1 \cos i &= 9,94 \times 10^{10} \text{ cm} \cos 45 = 7,026 \times 10^8 \text{ m} \\
\omega_{orbital} &= 2,25 \times 10^{-4} \text{ Hz} \\
r_{obs} = 16300 \text{ años luz} &= 1,54361 \times 10^{20} \text{ m}.
\end{aligned}
\tag{5.43}$$

Aquí a es la contribución paralela del sistema respecto de la tierra, como se aprecia en la siguiente figura¹, ver [1].

¹Donde ω es la frecuencia angular de la órbita y $\dot{\theta}$ es la frecuencia angular del periastro y tiene un valor de 4,2261° por año.

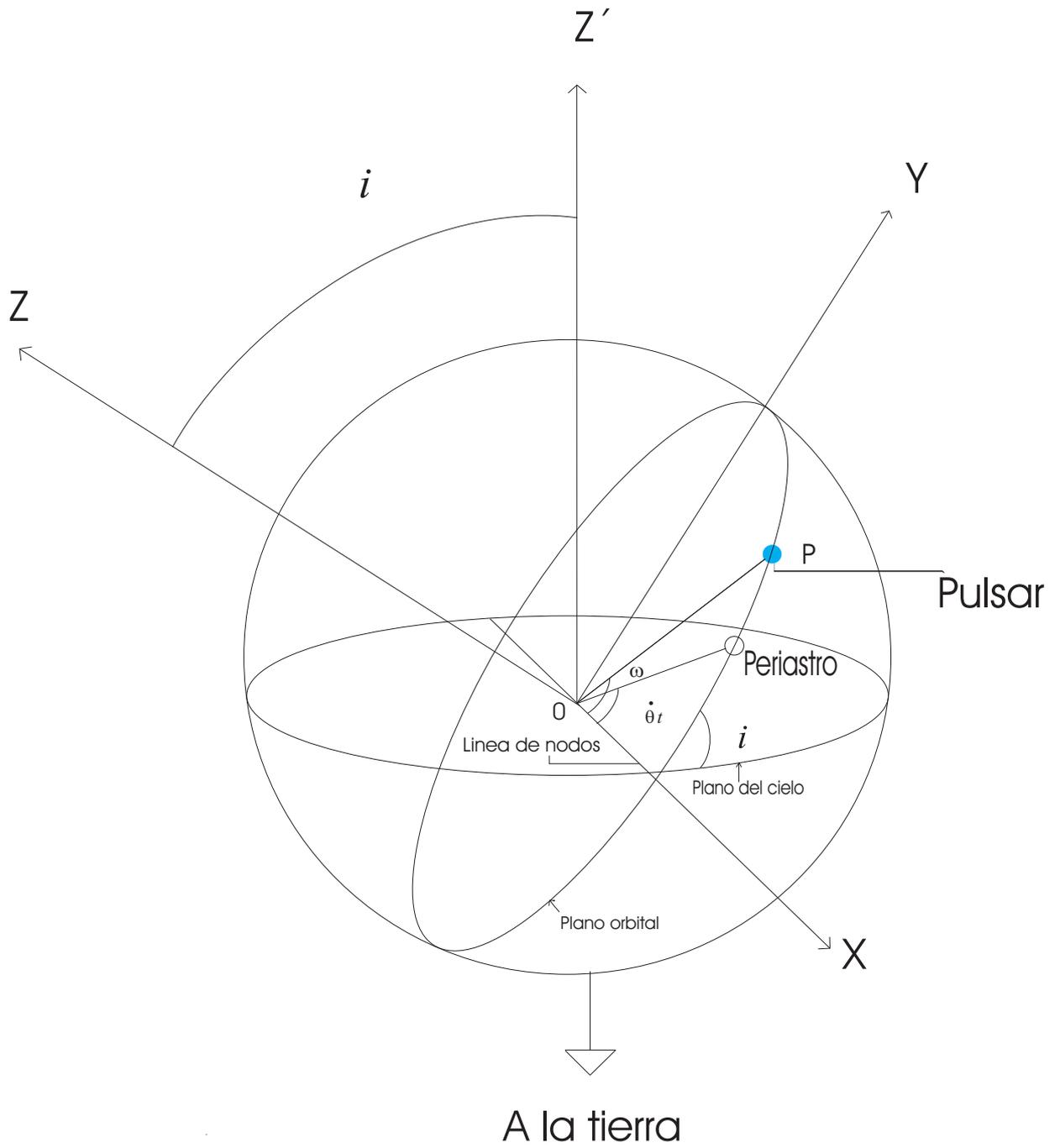


Figura 5.1: Pulsar Binario PSRB 1913+16.

Con los valores de (5.36) y fijandonos en la Ecuación (5.20), ésta ultima referida a nuestra fuente de ondas, obtenemos [1, 17]

$$\frac{dE}{dt} = \frac{32GI^2\omega^6}{5c^5}. \quad (5.44)$$

Para la frecuencia $\omega_{orbital}$ tenemos los siguientes valores de la onda.

$$\begin{aligned} \omega_{grav} = 2\omega_{orbital} &= 4,5 \times 10^{-4} Hz \\ \nu_{grav} = \frac{\omega_{grav}}{2\pi} &= 7,17 \times 10^{-5} Hz \\ \lambda_{grav} &= 4,186 \times 10^{12} m \\ k_{grav} = \frac{2\pi}{\lambda_{grav}} &= 1,5 \times 10^{-12} 1/m \\ \frac{dE}{dt} &= 1,75 \times 10^{23} W atts. \end{aligned} \quad (5.45)$$

De los valores de las Ecs. (5.36), (5.43) y la Ec. (5.42) podemos ver que finalmente h va como

$$h \approx 2,996 \times 10^{-23}. \quad (5.46)$$

Entonces la Ec. (5.41) nos da

$$\eta \approx 2,95 \times 10^{-20}. \quad (5.47)$$

La última ecuación de (5.45) es la velocidad al cual el sistema pierde energía por radiación gravitacional.

Se ha calculado los valores de η para dos sistemas diferentes, el pulsar binario de Hulse y Taylor y al sistema Tierra, vemos que entre las perturbaciones hay una gran diferencia, es decir aquí en Tierra sería casi indetectable, si la onda viniese del PRSB 1913+16 mientras que en el sistema Binario de Hulse y Taylor son más grandes los valores de η .

Capítulo 6

Conclusiones

EL objetivo principal de este trabajo de tesis fue estudiar la Ecuación de Desviación de Geodésicas para objetos con espín o momento angular intrínseco (Trompo Relativista) (EDGTR). Sin embargo, desde el inicio de esta investigación, se nos ocurrió la idea de que esta ecuación podría brindarnos una herramienta predictiva en astrofísica para la detección de ondas gravitacionales al estudiar la desviación de geodésicas en objetos astrofísicos rotantes.

Cabe mencionar que en trabajos anteriores, ya se había explorado la posibilidad de detectar la Radiación Gravitacional por medio de objetos rotantes [8, 9] pero ese era el caso de un solo objeto rotante. Posteriormente, en la Ref. [6] se estudió la Desviación de Geodésicas para Trompos Relativistas. Esto nos brinda la posibilidad de estudiar sistemas de dos cuerpos rotantes, tales como los sistemas binarios y en consecuencia que un sistema binario sea el sistema de prueba para la detección de ondas gravitacionales.

Es por ello que en este trabajo de tesis hemos revisado diversos aspectos de la Teoría General de la Relatividad: Primero revisamos el importante concepto de ondas gravitacionales, donde vimos que éstas satisfacen una ecuación de onda similar a la ecuación de ondas electromagnéticas propagándose a la velocidad de la luz: es decir, los gravitones son partículas no masivas. En la norma de Lorentz, estas soluciones son ondas planas monocromáticas con dos modos de polarización.

Para ir concretando ideas, en el **Capítulo 3** vimos la teoría del Trompo Relativista de Hanson y Regge, y en el **Capítulo 4**, vimos como se generalizan estas ecuaciones del Trompo Relativista a la Ecuación de Desviación de Geodésicas cuando se incluyen los efectos de rotación y de movimiento en un fondo gravitacional. Vimos como resultado de

estas revisiones la obtención de la EDGTR.

Finalmente, en el Quinto Capítulo de este trabajo revisamos la aplicación de la condición de ondas gravitacionales a la EDGTR, donde supusimos que el rol del trompo relativista puede ser interpretado por una estrella compacta con propiedades relativistas: un pulsar!. Obtuvimos una solución simplificada de la EDGTR, que involucra una perturbación como desviación a la separación entre las partículas, en la que nos basamos para hacer estimaciones sobre el pulsar de Hulse y Taylor [10]. Para diversas fuentes, con un rango de valores entre $h \sim 10^{-18}$ y $h \sim 10^{-12}$ se obtienen las desviaciones entre $\eta \sim 10^{-14}cm$ y $h \sim 10^{-8}cm$, lo cual nos da una posibilidad más tangible para la detección de ondas gravitacionales en la Tierra.

Como un último ejercicio y aplicación consideramos a la Tierra como objeto de prueba en la que llega una onda gravitacional proveniente de una fuente, en particular del pulsar Binario PRSB 1913+16, considerada como fuente de ondas gravitacionales. Para este caso, los números son tan pequeños que prácticamente es imposible medir el efecto de perturbación de la Tierra debido a la radiación del binario.

De estas observaciones, podemos esperar que si tenemos una mejor sensibilidad experimental como lo tendrá el Interferómetro Espacial LISA (Laser Interferometer Space Antenna) fig. 6.1, o si realizamos el análisis de estos efectos en objetos más cercanos a la fuente de radiación, tendremos entonces efectos tangibles y medibles directamente como consecuencia de la radiación gravitacional.

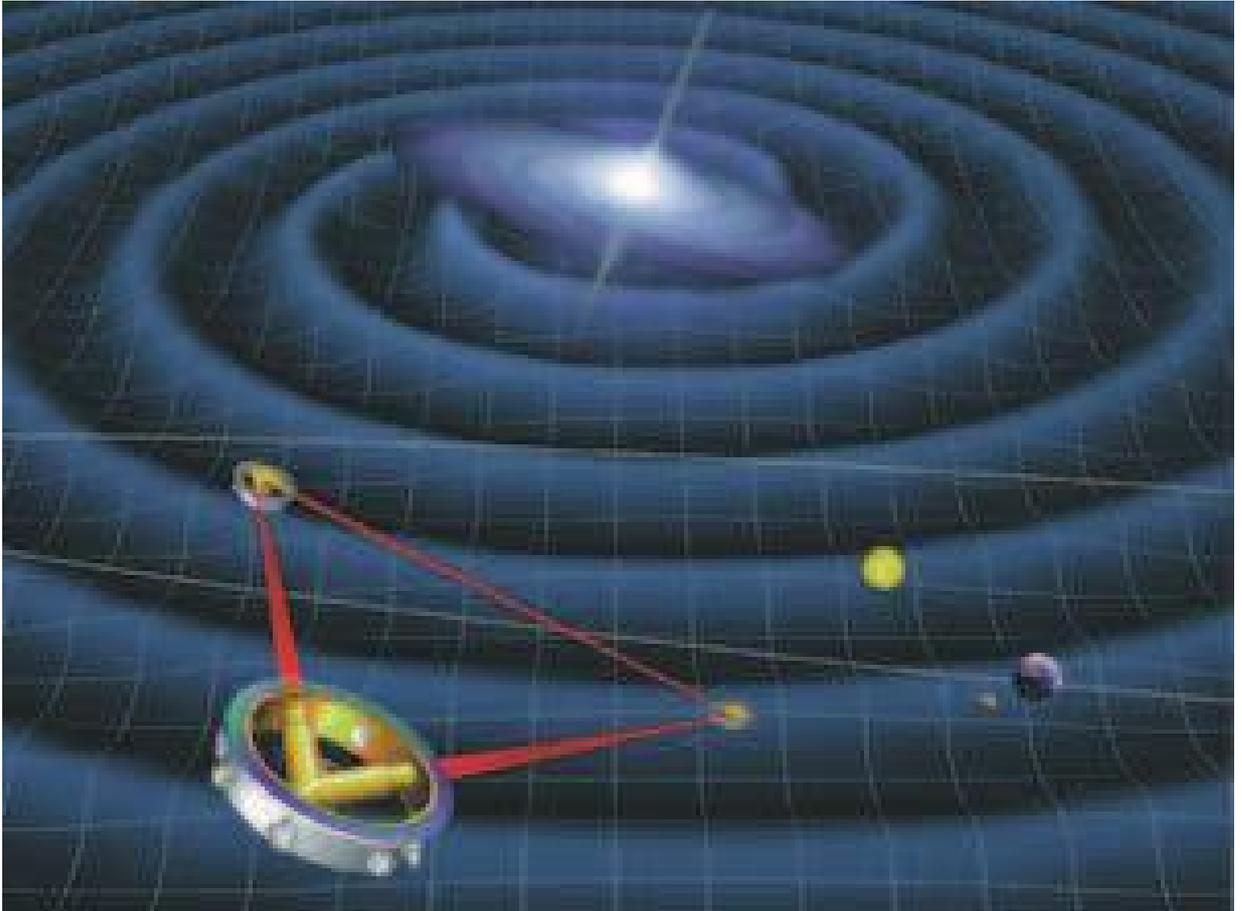


Figura 6.1: Lisa (Antena Espacial de Interferometría Láser).

Bibliografía

- [1] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars* (Wile-Interscience, New York 1983).
- [2] K. S. Thorne, in S. Hawking and W. Israel, eds, *300 Year of Gravitation* (Cambridge University, Cambridge 1987) p. 330.
- [3] Ver A. Lazzarini, Ligo Project an Overview, Published in *Les Arcs 1996, Dark matter in cosmology, quantum measurements, experimental gravitation* 355-361 Ligo y Referencias en el artículo.
- [4] Ver Y. Acker et al., The Present Status of Virgo Project, Published in *Sao Jose dos Campos 1996, Omnidirectional Gravitational Radiation Observatory* 241-250 VIRGO y Referencias en el artículo.
- [5] Ver B. Schutz, (ed.), *Class. Quantum Grav.* **18**, 3965 (2001) y Referencias en el artículo.
- [6] J. A. Nieto, J. Saucedo, V. M. Villanueva, Relativistic Top Deviation Equation and Gravitational Waves, 2003, 18pp., *Phys. Lett. A* **312**:175-186, 2003; hep-th/0303123.
- [7] J. A. Nieto and V. M. Villanueva, *Nuovo Cim. B* **109**, 821 (1994).
- [8] J. A. Nieto and M. P. Ryan, *Nuovo Cim.A* **63**, 71 (1981).
- [9] M. Mathisson, *Acta Phys. Pol.* **6**, 163 (1937); M. H. Pryce *Proc. R. Soc. London Ser A* **195**, 62 (1948); A. Papapetrou, *Proc. R. Soc. London Ser. A* **201**, 248 (1951); W. G. Dixon, *Proc. Roy. Soc. London A* **314**, 499 (1970); S. Hojman, Ph. D. Thesis, Princeton University (1975).
- [10] R. A. Hulse and J. H. Taylor, *Ap. J.* **195**, L51 (1975).
- [11] P. Laguna and A. Wolszczan, “Pulse arrival times from binary pulsars with rotating black hole companions”, astro-ph/9705054.
- [12] I. I. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 798 (1964).
- [13] S. Detweiler, *Astrophys. J.* **234**, 1100 (1979).

- [14] J. Foster, J.D. Nightingale *A Short Course in General Relativity* (University of Sussex, United Kingdom 1994)
- [15] M. Mohseni, R.W. Tucker and C. Wang, *Class.Quant.Grav.* **18**, 3007 (2001).
- [16] M. Mohseni, *Phys.Lett.A* **301**, 382 (2002); gr-qc/0208072.
- [17] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley and Sons, Inc. 1972).
- [18] F. A. E. Pirani, *Acta Phys. Pol.* **15**, 389 (1956)
- [19] C. A. P. Galvao and C. Teitelboim, *J. Math. Phys.* **21**, 1863 (1980).
- [20] S. Hojman and T. Regge, “Spinning tops in external fields”, *Studies in Mathematical Physics; Essays in Honor of Valentine Bargmann*, ed. E. H. Lieb, B. Simon and A. S. Wightman (Princeton University Press, Princeton NJ 1976)
- [21] W. Tulczyjew, *Acta Phys. Pol.* **18**, 393 (1959).
- [22] J. Nitsch, in *Cosmology and Gravitation; “Spin, Torsion, Rotation and Supergravity”*, eds. P. G. Bergamann and V. Sabbata, Plenum Press (1980).
- [23] S. Hojman, M. Rosenbaum, M. P. Ryan *Phys.Rev. D* **19**, 430 (1979).
- [24] L. C. García de Andrade “Nongeodesic motion of spinless particles in the teleparallel gravitational wave background”: gr-qc/0205120.
- [25] Charles W. Misner, Kip S. Thorne and Jhon Archibald Wheeler: *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, 1973).
- [26] Dixon W.G., *Nuovo. Cim.* 34 (1964), 317.
- [27] R. H. Rietdijk, J. W. van Holten, *Class. Quantum Grav.* 7(1990)247.
- [28] <http://astrosun2.astro.cornell.edu/academics/courses//astro201/psr1913.htm>
- [29] <http://www.johnstonsarchive.net/relativity/binpulsar.html>
- [30] <http://www.mpifr-bonn.mpg.de/div/pulsar/pulsar.html>
- [31] James Blake Westgard: *Electrodinamics: A Concise Introduction* (Indiana State University Terre Haute, IN 47809 USA, QC631.W47 1995)