

**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS
DE HIDALGO**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“GRUPOS GEOMÉTRICAMENTE INFINITOS”

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

**PRESENTA:
LUIS GUILLERMO RUIZ VELÁZQUEZ**

**DIRECTOR DE TESIS:
DOCTOR DANIEL JUAN PINEDA**

MORELIA MICHOACÁN, ENERO 2006

0.1. Agradecimientos

Quiero agradecer a mi asesor: Daniel Juan Pineda; a mi jurado: Maria Luisa Pérez Seguí, Jorge Luis López López, José Gerardo Tinoco Ruiz y Francisco Javier Domínguez Mota; a mis profesores, a mis compañeros y amigos y a mi familia por hacer este trabajo posible.

Índice general

0.1. Agradecimientos	1
1. Introducción	5
2. Espacios, Cubrientes y Acciones	7
2.1. Grupo fundamental	7
2.2. Espacios Cubrientes	10
2.3. Acciones	12
3. Grupos Kleinianos	15
3.1. Transformaciones de Möbius	15
3.1.1. Automorfismos de Σ	15
3.1.2. Generadores de $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$	17
3.1.3. Círculos en Σ	18
3.1.4. Transitividad y razón cruzada	18
3.1.5. Clases de conjugación en $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$	20
3.1.6. Clasificación geométrica	22
3.2. Grupos Kleinianos	27
3.2.1. Círculos isométricos	27
3.2.2. Acciones discontinuas	28
3.2.3. Área, Diámetro y Convergencia	29
3.2.4. El conjunto límite	30
3.2.5. La partición de Σ	32
3.2.6. Superficies de Riemann	34
3.2.7. Dominios Fundamentales	36
3.2.8. Polígonos Fundamentales	39
3.2.9. Teorema de Poincaré	43

4. Grupos geoméricamente infinitos	45
4.1. Grupos elementales y no elementales	45
4.2. Teorema de combinación	54
4.3. Teorema de Ahlfors	58

Capítulo 1

Introducción

En el presente trabajo se hacen obvias las dificultades que se presentan en el ámbito matemático al pasar una propiedad de un espacio topológico de una dimensión a otra. Es difícil en general, teniendo un resultado, generalizarlo para dimensiones mayores, muchas veces es imposible. Este último caso es el que sucede en este trabajo, teniendo un teorema que es válido en dimensión 2, se muestra un ejemplo de que en dimensión 3 ya no es válido. Teniendo un ejemplo, se pueden encontrar muchos más.

El principal teorema es el Teorema de Ahlfors que dice que si tengo un grupo actuando de forma discontinua y finitamente generado, y se hace su cociente, la variedad que resulta, es de tipo finito. En este resultado se ven interesantes relaciones entre algo geométrico (dominio fundamental con número finito de lados), algo algebraico (grupo finitamente generado) y algo topológico (variedad de tipo finito) así como también se ve como entre ellas se complementan para llegar a un resultado. Entonces, para mostrar que no es válido en dimensiones mayores que 2, se construye un grupo finitamente generado tal que la variedad que se genera al hacer el cociente, tiene grupo fundamental no finitamente generado.

Para esto se hace un estudio de las transformaciones de Möbius, se ven algunas de sus propiedades y se usan para formar grupos que actúan de forma discontinua en el plano extendido de los complejos. Después se trabaja con grupos Kleinianos y se describen algunas de sus características para después concluir con un teorema que permite crear grupos con propiedades favorables a partir de otros grupos bajo condiciones razonables.

Para la construcción del grupo que necesitamos se comienza con un grupo conocido (el grupo tal que el cociente en $\mathbb{H}^3$ forma el complemento de los

anillos Borromeanos), se toma un subgrupo especialmente elegido, se conjuga y se hacen productos para que, con ayuda del álgebra, de la topología y un poco de teoría de 3-variedades, se concluya con el grupo deseado.

Algo interesante de este trabajo es ver como, para llegar a los resultados, se hace uso de varias ramas de las matemáticas, de no ser así algunos de los problemas se volverían formidablemente complicados. Es admirable ver como algunas propiedades, al verlas desde otro punto de vista, cambian completamente, lo que las hace mas vulnerables para ser demostradas.

Capítulo 2

Espacios, Cubrientes y Acciones

2.1. Grupo fundamental

Definición 2.1.1 Sean X, Y espacios topológicos y sean $f, g: X \rightarrow Y$ continuas. Decimos que f es homotópica a g si existe $H: X \times I \rightarrow Y$ continua tal que

$$H(x, 0) = f(x)$$

$$H(x, 1) = g(x)$$

En éste caso escribimos $f \simeq g$ y decimos que H es una homotopía (de f a g).

Observación 2.1.2 La homotopía forma una relación de equivalencia entre las funciones de X a Y .

Demostración. Sean f, g, h funciones continuas de X a Y . Entonces $f \simeq f$ con $H(x, t) = f(x)$. Si $f \simeq g$ con homotopía H , entonces $g \simeq f$ con $H'(x, t) = H(x, 1 - t)$. Si $f \simeq g$ con homotopía H_1 y $g \simeq h$ con homotopía H_2 , entonces $f \simeq h$ con

$$H(x, t) = \begin{cases} H_1(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ H_2(x, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

□

Vamos a considerar trayectorias homotópicas entre dos puntos fijos x_0 y x_1 . En este caso pediremos que $H(x_0, t) = x_0$ y $H(x_1, t) = x_1$ para todo t .

Definición 2.1.3 Dadas α trayectoria de x_0 a x_1 y β trayectoria de x_1 a x_2 definimos una trayectoria $\alpha * \beta$ de x_0 a x_2 por

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \beta(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

A la clase de homotopía de α se le denota $[\alpha]$.

Proposición 2.1.4 El producto define, en el conjunto de clases de equivalencia de trayectorias, una operación que lo hace semigrupo.

Demostración. El producto está bien definido.

Hay neutros. Sea C_{x_0} la trayectoria constante en x_0 . Vamos a mostrar que $[C_{x_0}] * [\alpha] = [\alpha]$, que es lo mismo que $C_{x_0} * \alpha \simeq \alpha$; esto puede verse de manera geométrica si se piensa que el *tiempo* que tarda la trayectoria $C_{x_0} * \alpha$ en estar en x_0 se va acortando conforme el parámetro t llega a 1. De forma similar se ve que $[\alpha] * [C_{x_1}] = [\alpha]$.

Asociatividad. Debemos mostrar que $([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$, pero esto es lo mismo que $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$.

Inversos. Definimos $\bar{\alpha}(s) = \alpha(1 - s)$. Se puede ver que $\alpha * \bar{\alpha} \simeq C_{x_0}$. $\square$

Definición 2.1.5 Si α es una trayectoria de x_0 a x_1 con $x_0 = x_1$ decimos que α es un lazo.

Definición 2.1.6 $\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] | \alpha \text{ es un lazo basado en } x_0\}$.

Proposición 2.1.7 $\pi_1(X, x_0)$ con la operación recién definida es un grupo.

Demostración. Viene de la proposición anterior. $\square$

El grupo $\pi_1(X, x_0)$ se llama el *grupo fundamental de X en x_0* .

Proposición 2.1.8 Si φ es una trayectoria de x_0 a x_1 entonces φ induce un isomorfismo de grupos $\varphi_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ donde a $[\alpha]$ lo manda en $[\bar{\varphi} * \alpha * \varphi]$.

Demostración. Esta bien definida.

$\varphi_*([\alpha] * [\beta]) = [\bar{\varphi} * \alpha * \beta * \varphi] = [\bar{\varphi} * \alpha * \varphi * \bar{\varphi} * \beta * \varphi] = \varphi_*[\alpha] * \varphi_*[\beta]$ por lo tanto es un morfismo. Como φ_* tiene inversa entonces es un isomorfismo. $\square$

Definición 2.1.9 Un espacio X es conexo por trayectorias si para cada par de puntos en X existe una trayectoria en X que los une.

Definición 2.1.10 Un espacio X es localmente conexo por trayectorias si para cada punto de $x \in X$ y cada vecindad U de x existe una vecindad V de x conexas por trayectorias contenida en U .

Definición 2.1.11 Sea X un espacio topológico conexo por trayectorias. Si $\pi_1(X, x_0) = 1$ entonces X es simplemente conexo.

Definición 2.1.12 Sea $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ una función continua que manda x_0 a y_0 . Definimos

$$h_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

como

$$h_*([f]) = [h \circ f].$$

La función h_* es un homomorfismo y se llama el *homomorfismo inducido por h* relativo al punto x_0 .

La función h_* esta bien definida ya que si H es una homotopía entre f y f' entonces $h \circ H$ es una homotopía entre $h \circ f$ y $h \circ f'$.

Teorema 2.1.13 Si $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ y $k: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ son continuas entonces $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. Si $i: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ es la identidad entonces i_* es el homomorfismo identidad.

Demostración. Por definición,

$$(k \circ h)_*([f]) = [(k \circ h) \circ f]$$

y

$$(k_* \circ h_*)([f]) = k_*(h_*([f])) = k_*([h \circ f]) = [k \circ (h \circ f)].$$

De forma similar $i_*([f]) = [i \circ f] = [f]$. $\square$

Corolario 2.1.14 Si $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es un homeomorfismo de X a Y entonces h_* es un isomorfismo de $\pi_1(X, x_0)$ a $\pi_1(Y, y_0)$.

Demostración. Sea $k: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ el inverso de h . Entonces, $k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = i_*$ donde i es la identidad en X . Además $h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = j_*$ con j la identidad en Y . Como i_* y j_* son la identidad de los grupos $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$ respectivamente, entonces k_* es el inverso de h_* . $\square$

2.2. Espacios Cubrientes

Definición 2.2.1 Sea $p: E \rightarrow B$ continua y sobre, decimos que p es proyección cubriente si dado $b \in B \exists U \in \mathcal{N}_b^\circ$ tenemos que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

donde la unión es disjunta y U_α abierto $\forall \alpha$ de tal manera que

$$p|_{U_\alpha}: U_\alpha \rightarrow U$$

sea un homeomorfismo.

Esto quiere decir que tanto E como B tienen las mismas propiedades locales.

Teorema 2.2.2 (Teorema de levantamiento de trayectorias) Sea $p: E \rightarrow B$ proyección cubriente, sea $\gamma: I \rightarrow B$ una trayectoria que empiece en b_0 . Entonces $\exists \bar{\gamma}: I \rightarrow E$ tal que $p\bar{\gamma} = \gamma$; además si elegimos $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ entonces $\bar{\gamma}$ es única con $\bar{\gamma}(0) = e_0$.

Demostración. Vea [10] páginas 342 y 343. $\square$

Lema 2.2.3 (Lema general del levantamiento) Sea $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ proyección cubriente, sea $f: (Y, y_0) \rightarrow (B, b_0)$ función continua con Y conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias, entonces f se levanta a $E \Leftrightarrow \mathbf{Im}(f_*) \subset \mathbf{Im}(p_*)$ en este caso el levantamiento es único.

$$\begin{array}{ccc} & & (E, e_0) \\ & \nearrow & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (B, b_0) \end{array}$$

Demostración. Vea [10] páginas 346 y 347. $\square$

Definición 2.2.4 Un cubriente $p: \tilde{X} \rightarrow X$ es un cubriente universal si $\pi_1(\tilde{X})$ es simplemente conexo.

El nombre de cubriente universal viene de la siguiente propiedad: Si $q: Y \rightarrow X$ es un cubriente con Y conexo, entonces existe un cubriente $f: \tilde{X} \rightarrow Y$ tal que $p = q \circ f$.

Si $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$ y $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ son cubiertas universales, entonces existe un homeomorfismo $f: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tal que $p_1 = f \circ p_2$.

Ahora asumiremos que los siguientes grupos son subgrupos de un grupo universal $\mathbb{G}$ que será el grupo de homeomorfismos de algún espacio $\mathbb{X}$ en sí mismo. Regularmente pensaremos en $\mathbb{X}$ como $\hat{\mathbb{C}}$ y en $\mathbb{G}$ como $\mathcal{M}$. También el índice m tomará los valores $\{1, 2\}$. Además los grupos G_1 y G_2 tienen un subgrupo común J .

Para cualquier grupo G , si $G_1, G_2, \dots$ son subgrupos de G y $g_1, g_2, \dots$ son elementos de G , entonces $\langle G_1, G_2, \dots, g_1, g_2, \dots \rangle$ es el subgrupo mas chico de G que contiene todos los subgrupos $G_1, G_2, \dots$ y todos los elementos $g_1, g_2, \dots$.

Definición 2.2.5 Una forma normal es una palabra de la forma $g_n, \dots, g_1$, donde cada g_k con k par vive en $G_1 \setminus J$ y cada g_k con k impar vive en $G_2 \setminus J$ o viceversa.

Existe una identificación natural de formas normales. Si $j \in J$, entonces diremos que las formas normales $g_n \cdots g_k \cdots g_1$ y $g_n \cdots (g_k j)(j^{-1} g_{k-1}) \cdots g_1$ son equivalentes.

Existe una multiplicación de formas normales que es la yuxtaposición y después contrayendo con la equivalencia anterior. El producto de dos formas normales es equivalente a una forma normal o a un elemento de J . El conjunto de clases de equivalencia de formas normales, con esta multiplicación, junto con los elementos de J se llama el *producto libre* de G_1 y G_2 , con el subgrupo J *amalgamado* o algunas veces sólo el *producto libre amalgamado* y se escribe $G_1 *_J G_2$.

Existe un homomorfismo natural $\Phi: G_1 *_J G_2 \rightarrow G = \langle G_1, G_2 \rangle$ dado al tratar a la yuxtaposición de palabras como composición de funciones, esto es $\Phi(g_n, \dots, g_1) = g_n \circ \cdots \circ g_1$. Esta función manda formas normales equivalentes en la misma transformación.

Es fácil ver que $G = G_1 *_J G_2$ si y sólo si Φ no manda formas normales no triviales a la identidad.

Cada forma normal tienen una *longitud* $n = |g_n \cdots g_1|$. Note que formas normales equivalentes tienen la misma longitud así que si $G = G_1 *_J G_2$, entonces $|g|$ está bien definido para cada elemento de G .

Si $G = G_1 *_J G_2$ y J es trivial (en este caso decimos que G es el producto libre de G_1 y G_2 y escribimos $G = G_1 * G_2$), entonces cada elemento no trivial de G tiene una única forma normal, mientras que si J no es trivial, la forma normal de un elemento de G no es única.

Una forma normal $g_n, \dots, g_1$ es una m -forma si $g_n \in G_m \setminus J$. Cada forma normal es una 1-forma o una 2-forma. Este concepto es invariante bajo equivalencia.

Usando formas normales se ve que podemos extender isomorfismos. Esto es, supongamos que tenemos dos productos libres amalgamados $G = G_1 *_J G_2$ y $\tilde{G} = \tilde{G}_1 *_{\tilde{J}} \tilde{G}_2$ y supongamos que tenemos isomorfismos $\varphi_m: G_m \rightarrow \tilde{G}_m$, donde $\varphi_1|_J = \varphi_2|_J = \tilde{J}$. Entonces existe un único isomorfismo $\varphi: G \rightarrow \tilde{G}$ donde $\varphi|_{G_m} = \varphi_m$.

Teorema 2.2.6 (Seifert-van Kampen) *Sea $X = U \cup V$ donde U y V son abiertos de X . Supongamos que U , V y $U \cap V$ son conexos por trayectorias y $x_0 \in U \cap V$. Sea H un grupo y sean $\phi_1: \pi(U, x_0) \rightarrow H$ y $\phi_2: \pi(V, x_0) \rightarrow H$ homomorfismos. Sean i_1, i_2, j_1, j_2 homomorfismos como se indican en el diagrama:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_1(U, x_0) & & \\
 & \nearrow i_1 & \downarrow j_1 & \searrow \phi_1 & \\
 \pi_1(U \cap V, x_0) & \rightarrow & \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\Phi} & H \\
 & \searrow i_2 & \uparrow j_2 & \nearrow \phi_2 & \\
 & & \pi_1(V, x_0) & &
 \end{array}$$

Si $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, entonces existe un único homomorfismo $\Phi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H$ tal que $\Phi \circ j_1 = \phi_1$ y $\Phi \circ j_2 = \phi_2$. Es decir

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0).$$

Demostración. Vea [10] páginas 426 a 430. $\square$

2.3. Acciones

En esta sección X será un conjunto y G un grupo y obtendremos una transformación $*$: $G \times X \rightarrow X$. Escribiremos $*(g, x)$ como $g * x$ o gx .

Definición 2.3.1 Una acción de G en X es una transformación $*$: $G \times X \rightarrow X$ tal que:

1. $ex = x$ para todas las $x \in X$ con e la identidad en G .
2. $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$ para todas las $x \in X$ y todas las $g_1, g_2 \in G$.

Bajo estas condiciones, X es un G -conjunto.

De éstas condiciones se sigue que para cada $g \in G$, la función que manda x en gx es una biyección en X .

Definición 2.3.2 Sea G un grupo actuando en un conjunto X . La órbita de un punto $x \in X$ es el conjunto de elementos de X en los que puede ser llevado x por elementos de G . La órbita de un punto x se denota como $Gx = \{y \in X | y = gx \text{ para algún } g \in G\}$.

Definición 2.3.3 Para cada $x \in X$ definimos el subgrupo estabilizador de x (también llamado grupo de isotropía) como el conjunto de $g \in G$ que fijan a x . Lo denotamos como $G_x = \{g \in G | gx = x\}$.

Definición 2.3.4 Un espacio B es semilocalmente simplemente conexo si para cada $b \in B$ existe una vecindad U de b tal que el homomorfismo $i_*: \pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ inducido por la inclusión es trivial.

Teorema 2.3.5 Sea B conexo por trayectorias, localmente conexo y semilocalmente simplemente conexo. Sea $b_0 \in B$. Dado un subgrupo H de $\pi_1(B, b_0)$ existe una función cubriente $p: E \rightarrow B$ y un punto e_0 en $p^{-1}(b_0)$ tal que $p_*(\pi_1(E, e_0)) = H$.

Demostración. Vea [10] páginas 495 a 498. $\square$

Definición 2.3.6 Si H_0 es un subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$ entonces la función cubriente $p: E \rightarrow B$ con $p_*(\pi_1(E, e_0)) = H_0$ se llama un cubriente regular.

Definición 2.3.7 Sea $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un cubriente universal. El grupo $G = \{T: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} | pT = p\}$ con T un homeomorfismo, es el grupo de transformaciones de cubierta de p .

Cada elemento del grupo de transformaciones de cubierta permuta los elementos de cada fibra. Esto define una acción en cada fibra. Si la acción es discontinua (se verá este tipo de acción en el capítulo 3), entonces tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.3.8 *Sea X conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias y G un grupo de homeomorfismos de X . La función de paso al cociente $\pi: X \rightarrow X/G$ es una función cubriente si y sólo si la acción de G es discontinua. En este caso el cubriente π es regular y G es el grupo de transformaciones de cubierta.*

Demostración. Vea [10] página 491. $\square$

Teorema 2.3.9 *Si $p: X \rightarrow B$ es un cubriente regular y G es su grupo de transformaciones de cubierta entonces existe un homeomorfismo $k: X/G \rightarrow B$ tal que $p = k \circ \pi$ donde $\pi: X \rightarrow X/G$ es la función de paso al cociente.*

Demostración. Vea [10] página 491. $\square$

Capítulo 3

Grupos Kleinianos

3.1. Transformaciones de Möbius

3.1.1. Automorfismos de Σ

Un automorfismo de la esfera de Riemann $\Sigma = \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es una biyección meromorfa $T: \Sigma \rightarrow \Sigma$. Denotamos todos los automorfismos de Σ por $\mathbf{Aut}(\Sigma)$.

Teorema 3.1.1 $\mathbf{Aut}(\Sigma)$ consiste de las funciones

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0)$$

Demostración. Véase [6]. $\square$

Las transformaciones $w = T(z)$ son las *transformaciones de Möbius*. Al conjunto de estas transformaciones lo denotaremos por $\mathcal{M}$ o $\mathbf{Mob}(\overline{\mathbb{R}}^2)$. Es importante notar que T no determina los coeficientes a, b, c, d de manera única: si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entonces los coeficientes $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d$ corresponden a la misma transformación T .

Las transformaciones de Möbius forman un grupo bajo la composición.

Corolario 3.1.2 $\mathbf{Aut}(\Sigma)$ es un grupo de homeomorfismos de Σ en sí mismo.

Demostración. Si $T \in \mathbf{Aut}(\Sigma)$ entonces, siendo meromorfa, es continua; como $T^{-1} \in \mathbf{Aut}(\Sigma)$, T^{-1} también es continua, entonces T es un homeomorfismo de Σ en sí mismo. $\square$

Hay una fuerte relación entre transformaciones de Möbius y matrices: si T y U son transformaciones de Möbius con

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, U(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

y M y N son las matrices

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

entonces $U \circ T$ corresponde al producto de matrices

$$NM = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ el grupo lineal general que consiste de todas las matrices con coeficientes complejos de 2×2

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

con $\mathbf{det}(M) = ad - bc \neq 0$, y para cada M sea $\theta(M)$ la transformación de Möbius $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Entonces $\theta(NM) = U \circ T = \theta(N) \circ \theta(M)$, así que $\theta: \mathbf{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{Aut}(\Sigma)$ es un homomorfismo de grupos y por el teorema anterior, un epimorfismo. El núcleo $K = \mathbf{ker}(\theta)$ consiste de las matrices $M \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ tal que $T(z) = z$ para toda $z \in \Sigma$, así K son las matrices

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\});$$

Dos matrices M y N determinan el mismo automorfismo de Σ si $N = \lambda M$ para algún $\lambda \neq 0$. Aplicando el primer teorema de isomorfismo a θ tenemos

$$\mathbf{Aut}(\Sigma) \cong \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})/K = \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})/\{\lambda I | \lambda \neq 0\}.$$

El grupo cociente $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})/K$ es el *grupo general lineal proyectivo* denotado por $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$.

Como $\mathbf{det}(MN) = \mathbf{det}(N)\mathbf{det}(M)$ para toda $M, N \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$, la función

$$\mathbf{det}: \mathbf{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

es un homomorfismo de grupos; su núcleo, el grupo especial lineal $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$, consiste de las $M \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ tales que $\mathbf{det}(M) = 1$. Como $\mathbf{det}$ es sobre tenemos $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})/\mathbf{SL}(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$.

Si $N \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ entonces podemos escribir $N = \lambda M$ donde $\lambda^2 = \mathbf{det}(N)$ y $M \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$. Como $\theta(N) = \theta(M)$, todos los automorfismos de Σ tienen una representación de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc = 1)$$

así, θ es sobre y hemos mostrado:

Teorema 3.1.3 $\text{Aut}(\Sigma) \cong \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C}) = \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$. $\square$

3.1.2. Generadores de $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$

Existe un homeomorfismo entre Σ y $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$, dado por la proyección estereográfica $\pi: S^2 \rightarrow \Sigma$, donde

$$\pi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x+iy}{1-z} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 1) \\ \infty & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 1) \end{cases}.$$

Su inversa es

$$g(z) = \begin{cases} \left(\frac{z+\bar{z}}{\|z\|^2+1}, \frac{-i(z-\bar{z})}{\|z\|^2+1}, \frac{\|z\|^2-1}{\|z\|^2+1} \right) & \text{si } z \in \mathbb{C} \\ (0, 0, 1) & \text{si } z = \infty \end{cases}.$$

Es útil considerar las siguientes transformaciones de Möbius especiales:

1. La transformación $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$ ($\theta \in \mathbb{R}$) representa una rotación en la esfera Σ un ángulo θ alrededor de el eje vertical desde 0 hasta ∞ .
2. La transformación $J(z) = \frac{1}{z}$ representa una rotación de la esfera un ángulo π alrededor del eje entre 1 y -1.
3. La transformación $S_r(z) = rz$ ($r \in \mathbb{R}, r > 0$) fija 0 y ∞ , y actúa en $\mathbb{C}$ expandiendo o contrayendo distancias por un factor r .

4. La transformación $T_t(z) = z + t$ ($t \in \mathbb{C}$) fija ∞ y actúa en $\mathbb{C}$ como una traslación.

Teorema 3.1.4 *Cada transformación de Möbius es una composición de una cantidad finita de transformaciones de Möbius de las formas 1, 2, 3 ó 4.*

Demostración. Cada transformación de Möbius tiene la forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc = 1$. Si $c = 0$ entonces $T(z) = \frac{az+b}{d}$ con $a, d \neq 0$, sea $\frac{a}{d} = re^{i\theta}$ y $\frac{b}{d} = t$. Entonces $T(z) = re^{i\theta}z + t$, $T = T_t \circ S_r \circ R_\theta$. Si $c \neq 0$,

$$T(Z) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(cz+d)} = (T_t \circ J)(-c^2z - cd)$$

con $t = \frac{a}{c}$; por el caso $c = 0$, la transformación $z \mapsto -c^2z - cd$ puede ser expresada por los generadores dados y así también T . $\square$

3.1.3. Círculos en Σ

Un *círculo* en la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ se define como una intersección $S^2 \cap \Pi$ donde Π es un plano de $\mathbb{R}^3$ y $|S^2 \cap \Pi| > 1$. Usando la biyección $\pi: S^2 \rightarrow \Sigma$, definimos un *círculo en Σ* como la imagen bajo π de cualquier círculo en S^2 .

Los círculos en Σ son de dos tipos: círculos en $\mathbb{C}$ (en el sentido euclidiano), y conjuntos de la forma $\Lambda \cup \{\infty\}$, donde Λ es una línea recta en $\mathbb{C}$.

Teorema 3.1.5 *Si C es un círculo en Σ , y si $T \in \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$, entonces $T(C)$ es un círculo de Σ .*

Demostración. Por el Teorema (3.1.4), T es una composición de transformaciones de la forma R_θ, J, S_r y T_r que mandan círculos en círculos. $\square$

3.1.4. Transitividad y razón cruzada

Si un grupo G actúa en un conjunto Ω decimos que G *actúa transitivamente* si, para cada $\alpha, \beta \in \Omega$ existe algún $g \in G$ tal que $g(\alpha) = \beta$. Mas generalmente, decimos que G actúa *k-transitivamente* en Ω si, cuando $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ y $(\beta_1, \dots, \beta_k)$ contienen distintos elementos de Ω existe algún $g \in G$ tal que $g(\alpha_j) = \beta_j$ para $j = 1, 2, \dots, k$.

Teorema 3.1.6 *Si z_1, z_2, z_3 son elementos distintos de Σ , entonces existe un único $T \in \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ tal que $T(z_1) = 0, T(z_2) = 1$ y $T(z_3) = \infty$*

Demostración. Si $z_1, z_2, z_3 \neq \infty$, sea

$$T(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)}.$$

Entonces T manda z_1, z_2, z_3 a $0, 1, \infty$ respectivamente, y $T \in \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ puesto que T tiene la forma $T(z) = \frac{(az+b)}{(cz+d)}$ con $ad - bc = (z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) \neq 0$.

Si algún $z_j = \infty$, tomamos el límite de T cuando $z_j \rightarrow \infty$: si $z_1 = \infty$ tomamos $T(z) = \frac{-(z_2 - z_3)}{(z_3 - z)}$; si $z_2 = \infty$ tomamos $T(z) = \frac{-(z - z_1)}{(z_3 - z)}$; si $z_3 = \infty$ tomamos $T(z) = \frac{-(z - z_1)}{(z_1 - z_2)}$. En cada caso $T \in \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ y T manda z_1, z_2, z_3 a $0, 1, \infty$.

Unicidad: Si $U \in \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ manda z_1, z_2, z_3 a $0, 1, \infty$, entonces UT^{-1} fija $0, 1, \infty$; haciendo $UT^{-1}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y resolviendo la ecuación $UT^{-1}(z) = z$ ($z = 0, 1, \infty$) para a, b, c y d vemos que UT^{-1} es la identidad, así que $U = T$. $\square$

Corolario 3.1.7 Si (z_1, z_2, z_3) y (w_1, w_2, w_3) son puntos distintos de Σ , entonces existe una única $T \in \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ tal que $T(z_j) = w_j$ para $j = 1, 2, 3$.

Demostración. Sean $T_1, T_2 \in \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ con $T_1(z_j) = T_2(w_j) = 0, 1, \infty$. Entonces $T = T_2^{-1}T_1$ manda z_j a w_j .

Si $U \in \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ también satisface $U(z_j) = w_j$ entonces tanto T_1 como T_2U mandan z_j a $0, 1, \infty$, así que $T_1 = T_2U$ y $U = T_2^{-1}T_1 = T$. $\square$

Corolario 3.1.8 Si $T \in \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ y T fija tres puntos distintos de Σ , entonces T es la identidad. $\square$

Definición 3.1.9 Si (z_0, z_1, z_2, z_3) son puntos distintos de Σ , la razón cruzada $\lambda = (z_0, z_1; z_2, z_3)$ se define como $T(z_0)$, donde T es el único elemento de $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ que satisface $T(z_1) = 0, T(z_2) = 1, T(z_3) = \infty$.

$$\text{Tenemos } \lambda = (z_0, z_1; z_2, z_3) = \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_0)}.$$

Teorema 3.1.10 Sean (z_0, z_1, z_2, z_3) y (w_0, w_1, w_2, w_3) conteniendo distintos elementos de Σ . Entonces existe algún $T \in \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ con $T(z_j) = w_j$ si y sólo si $(z_0, z_1; z_2, z_3) = (w_0, w_1; w_2, w_3)$.

Demostración. Supongamos que $T(z_j) = w_j$. Sea U el único elemento de $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ que manda w_1, w_2, w_3 a $0, 1, \infty$ respectivamente, tal que $(w_0, w_1; w_2, w_3) = U(w_0)$. UT es un elemento de $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ que manda z_1, z_2, z_3 a $0, 1, \infty$ respectivamente, y único entonces $(z_0, z_1; z_2, z_3) = UT(z_0) = U(w_0) = (w_0, w_1; w_2, w_3)$.

De forma inversa, si $(z_0, z_1; z_2, z_3) = \lambda = (w_0, w_1; w_2, w_3)$ entonces existe $U, V \in \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ con $U(w_j) = V(z_j) = \lambda, 0, 1, \infty$. Ahora $U^{-1}V(z_j) = w_j$ y tomamos $T = U^{-1}V$. $\square$

3.1.5. Clases de conjugación en $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$

Si G es un grupo, decimos que $g, h \in G$ son *conjugados* en G si existe $f \in G$ tal que $g = fhf^{-1}$. Esto forma una relación de equivalencia en G .

Decimos que $z \in \Sigma$ es un *punto fijo* de algún $T \in \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ si $T(z) = z$; entonces $U(z)$ es un punto fijo de $UTU^{-1} \in \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ para toda $U \in \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$.

Al considerar puntos fijos y clases de conjugación de elementos de $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$, es conveniente trabajar con $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ ya que los dos grupos son idénticos pero ahora pedimos $ad - bc = 1$ en lugar de $ad - bc \neq 0$.

Tenemos $T(\infty) = \frac{a}{c}$ así que T fija ∞ si y sólo si $c = 0$. Si $c \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$ es un punto fijo de T si y sólo si

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

esta ecuación tiene dos raíces z , y T tiene dos puntos fijos en Σ , a menos que

$$(d - a)^2 + 4bc = 0$$

en cuyo caso la ecuación tiene una doble raíz y T tiene un único punto fijo. Usando $ad - bc = 1$, esta ecuación se convierte en

$$(a + d)^2 - 4 = 0$$

así que T tiene un único punto fijo si y sólo si $(a + d)^2 = 4$.

Si $c = 0$ entonces T fija a ∞ y tenemos $ad = 1$ y $T(z) = az^2 + ab$ así que hay un segundo punto fijo $z = \frac{ab}{(1-a^2)} \neq \infty$ si y sólo si $a^2 = 1$, o, equivalentemente $(a + d)^2 \neq 4$. Cuando $a^2 = 1$ tenemos $T(z) = a \pm b$, entonces T es la identidad para $b = 0$ y T tiene un único punto fijo para $b \neq 0$. Hemos probado:

Teorema 3.1.11 Sea $T(z) = \frac{(az+b)}{(cz+d)}$, con $ad - bc = 1$. Si $(a+d)^2 \neq 4$, T tiene dos puntos fijos en Σ . Si $(a+d)^2 = 4$ y $T \neq I$, entonces T tiene un punto fijo en Σ . $\square$

Podemos usar la función $(a+d)^2$ para determinar las clases de conjugación en $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$. Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{C}),$$

definimos la *traza* de A por

$$\mathbf{tr}(A) = a + d$$

Podemos observar que $\mathbf{tr}(AB) = \mathbf{tr}(BA)$, si B es invertible entonces

$$\mathbf{tr}(BAB^{-1}) = \mathbf{tr}(B^{-1}BA) = \mathbf{tr}(A).$$

Así que la traza depende solo de la clase de conjugación de un elemento. Cada transformación de Möbius se representa por un par $\pm A$ de matrices en $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$, así que tenemos $\mathbf{tr}(-A) = -\mathbf{tr}(A)$, y

$$\mathbf{tr}^2(T) = (\mathbf{tr}(A))^2 = (a+d)^2$$

es una función bien definida que depende solo de la clase de conjugación de T en $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Ahora vamos a describir las clases de conjugación en $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$. En cualquier grupo la identidad forma una clase de conjugación; las clases restantes se describen seleccionando un representante de cada clase.

Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definimos

$$U_\lambda(z) = \begin{cases} \lambda z & \text{si } \lambda \neq 1, \\ z + 1 & \text{si } \lambda = 1. \end{cases}$$

Teorema 3.1.12 Si T es un elemento de $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ distinto de la identidad, entonces existe algún $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que T es conjugado a U_λ .

Demostración. Supongamos que T tiene sólo un punto fijo z_0 . Por el Teorema (3.1.6), existe algún $S \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ tal que $S(z_0) = \infty$. Entonces STS^{-1} fija solamente a ∞ , y así $STS^{-1}(z) = z + t$ para algún $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, o sea, $STS^{-1} = T_t$ en la notación de (3.1.2). Sea $V(z) = \frac{z}{t}$. Entonces $VT_tV^{-1} = z + 1$, y $(VS)T(VS)^{-1} = U_t$, así que T es conjugado a U_1 .

Supongamos que T tiene dos puntos fijos z_1, z_2 . Por el Teorema (3.1.4), existe un $W \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ tal que $W(z_1) = 0$ y $W(z_2) = \infty$. Entonces WTW^{-1} fija 0 e ∞ , de aquí $WTW^{-1} = U_\lambda$ para algún $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. $\square$

Ahora vamos a determinar cuando U_k y U_λ son conjugados.

Teorema 3.1.13 U_k es conjugado a U_λ si y sólo si $k = \lambda$ o $k = \lambda^{-1}$.

Demostración. Primero nos ocuparemos de U_1 . Como U_1 fija sólo a ∞ , SU_1S^{-1} fija sólo a $S(\infty)$ para cada $S \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$. Así que U_1 no puede ser conjugado a U_λ ($\lambda \neq 1$), ya que estos elementos fijan 0 e ∞ .

Ahora supongamos que U_k y U_λ son conjugados donde $k, \lambda \neq 1$. Entonces $\mathbf{tr}(U_k) = \mathbf{tr}(U_\lambda)$ y

$$k + \frac{1}{k} + 2 = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2$$

lo que nos da $k = \lambda$ o $k = \frac{1}{\lambda}$. Al revés, U_k es conjugado a $U_{1/k}$. Si $J(z) = \frac{1}{z}$ entonces $JU_kJ^{-1} = U_{1/k}$. $\square$

Corolario 3.1.14 Dos elementos T_1, T_2 de $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$, distintos de la identidad, son conjugados si y sólo si $\mathbf{tr}^2(T_1) = \mathbf{tr}^2(T_2)$.

Demostración. Debemos probar que $\mathbf{tr}^2(T_1) = \mathbf{tr}^2(T_2)$ implica que T_1 y T_2 son conjugados. Sean T_1 y T_2 conjugados a U_k y U_λ respectivamente; entonces $\mathbf{tr}^2(T_1) = \mathbf{tr}^2(T_2)$ implica que $\mathbf{tr}^2(U_k) = \mathbf{tr}^2(U_\lambda)$ así que $k = \lambda$ o $k\lambda = 1$, entonces U_k y U_λ son conjugados y así, también lo son T_1 y T_2 . $\square$

Podemos entonces definir una norma en $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ como $\|A\|^2 = \langle A, A \rangle$. Y con esto definimos para $g \in G$ y A la matriz asociada a g :

$$\|g\|^2 = \frac{\|A\|^2}{\|\det(A)\|}.$$

3.1.6. Clasificación geométrica

Una forma de visualizar las transformaciones de Möbius es mediante la introducción de ciertas familias de círculos. Consideremos una transformación de la forma

$$w = k \frac{z - a}{z - b}.$$

Aquí $z = a$ corresponde a $w = 0$ y $z = b$ a $w = \infty$. De aquí se sigue que las líneas rectas que pasan por el origen, son imágenes de círculos que pasan por a y b . Por otro lado, los círculos concéntricos en el origen, $|w| = \rho$, corresponden a círculos con ecuación

$$\left| \frac{z - a}{z - b} \right| = \frac{\rho}{|k|}.$$

Estos son los *círculos de Apolonio* con puntos límites a y b . Por su ecuación, es el conjunto de puntos cuyas distancias a a y b tienen la misma razón.

Denotemos por C_1 los círculos que pasan por a y b , y C_2 los círculos de Apolonio con éstos puntos límites. La figura (3.1) formada por todos los círculos C_1 y C_2 la llamaremos *red circular* o *círculos de Steiner* determinados por a y b . Algunas propiedades de estos círculos son:

1. Existen exactamente un C_1 y un C_2 que pasan por un punto dado del plano con excepción de los puntos límite.
2. Cada C_1 intersecta a cada C_2 en ángulos rectos.
3. Reflexiones de C_1 transforman cada C_2 en sí mismo y cada C_1 en otro C_1 . Reflexiones en C_2 transforma cada C_1 en sí mismo y cada C_2 en otro C_2 .
4. Los puntos límites son simétricos con respecto a C_2 pero no con respecto a cualquier otro círculo.

Si una transformación $w = T(z)$ manda a, b a a', b' respectivamente, puede escribirse en la forma

$$\frac{w - a'}{w - b'} = k \frac{z - a}{z - b}.$$

La transformación T manda los círculos C_1 y C_2 en círculos C'_1 y C'_2 con puntos límite a', b' .

Consideremos la situación cuando $a' = a, b' = b$. Entonces a, b son puntos fijos de T . Bajo estas circunstancias toda la red circular será mandada a sí misma. El valor de k sirve para identificar los círculos C'_1 y C'_2 .

Los casos en los que todos los C_1 o todos los C_2 son mandados a sí mismos son importantes. Tenemos que $C'_1 = C_1$ para todo C_1 si $k > 0$ (si $k < 0$ los círculos son los mismos pero la orientación se invierte). Diremos entonces que

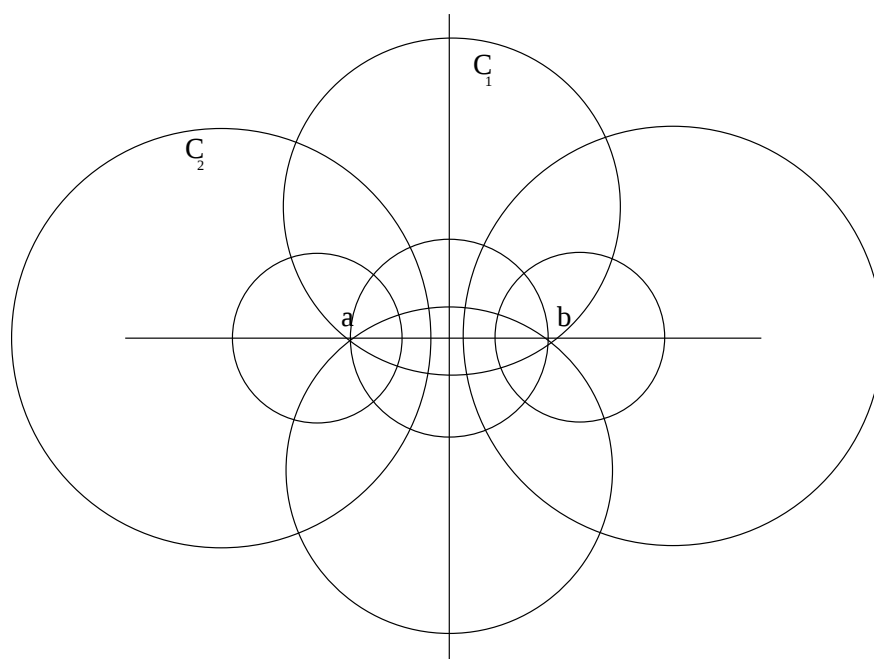


Figura 3.1: Círculos de Steiner

la transformación es *hiperbólica*. Mientras k aumenta, los puntos $T(z)$, $z \neq a, b$, fluyen a lo largo de los círculos C_1 hacia b .

Ahora, $C'_2 = C_2$ ocurre cuando $|k| = 1$. Transformaciones con esta propiedad son llamadas *elípticas*. Cuando $\arg(K)$ varía, los puntos $T(z)$ se mueven a lo largo de los círculos C_2 . Los flujos correspondientes a a y b circulan en direcciones diferentes.

Hemos visto que T tiene un único punto fijo $z_0 \in \Sigma$ si y sólo si $\text{tr}^2(T) = 4$, o equivalentemente, $\lambda = 1$; llamamos a esa transformación T *parabólica*.

Para discutir una transformación parabólica introduciremos otro tipo de red circular. Considere la transformación

$$w = \frac{\omega}{z - a} + c.$$

Líneas rectas en el plano corresponden a círculos que pasan por a ; mas aún, líneas paralelas corresponden a círculos mutuamente tangentes. Si $w = u + iv$ las líneas $u = \text{constante}$ y $v = \text{constante}$ corresponden a dos familias de círculos mutuamente tangentes que se intersectan en ángulos rectos como en la figura (3.2). Ésta configuración puede ser considerada como un conjunto degenerado de círculos de Steiner que está determinado por el punto a y una tangente a una de las familias de círculos. Denotaremos a las imágenes de las líneas $v = \text{constante}$ por C_1 , los círculos de la otra familia por C_2 .

Cualquier transformación que mande a a a' puede escribirse de la forma

$$\frac{\omega'}{w - a'} = \frac{\omega}{z - a} + c.$$

Suponemos que $a = a'$ es el único punto fijo. Entonces $\omega = \omega'$ y podemos escribir

$$\frac{\omega}{w - a} = \frac{\omega}{z - a} + c.$$

Cada C_1 se manda sobre sí mismo y la transformación parabólica puede ser considerada como un flujo sobre los círculos C_2 .

Una transformación que no es hiperbólica, elíptica ni parabólica la llamaremos *loxodrómica*.

Hemos visto que T es conjugado en $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ a algún U_λ ($\lambda \neq 0$). Ahora T no determina λ de forma única ya que T es conjugado también a $U_{1/\lambda}$; llamamos al par $\{\lambda, \frac{1}{\lambda}\}$, que es determinado por T de forma única, el *multiplicador* de T . Entonces dos transformaciones de Möbius que no sean la identidad son conjugadas si y sólo si tienen el mismo multiplicador. La conexión entre el multiplicador y la función tr^2 es

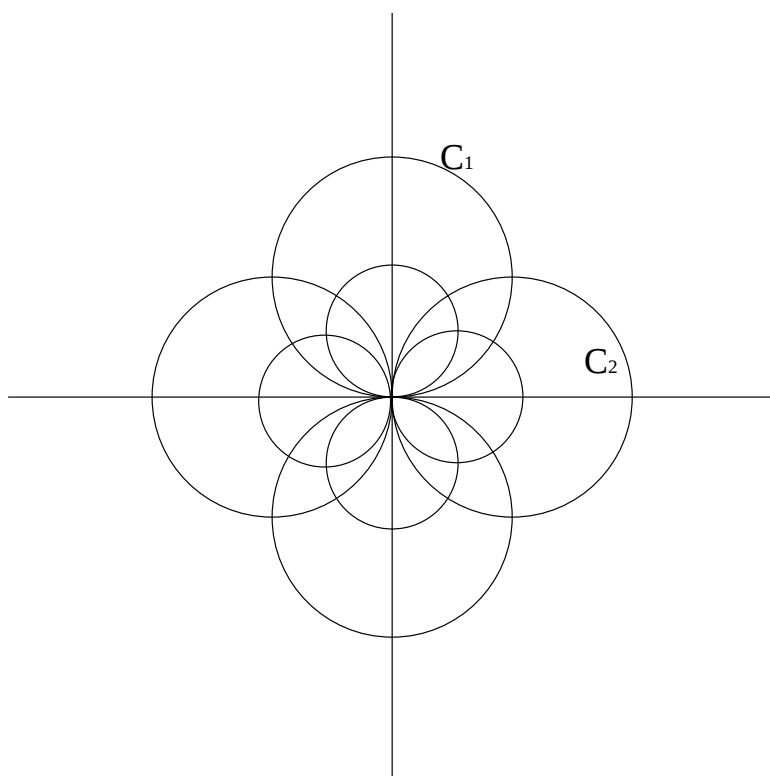


Figura 3.2: Círculos de Steiner degenerados

$$\mathbf{tr}^2(T) = \mathbf{tr}^2(U_\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2.$$

Hemos visto que T es parabólica si y sólo si $\mathbf{tr}^2(T) = 4$. Si T tiene dos puntos fijos z_1 y z_2 , sea

$$V(z) = \frac{(z - z_1)}{(z - z_2)},$$

con esto, $VT V^{-1} = U_\lambda$, fija 0 e ∞ para algún $\lambda \neq 0, 1$.

3.2. Grupos Kleinianos

3.2.1. Círculos isométricos

Sea

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

algún elemento de $\mathcal{M}$. A lo largo de esta sección supondremos que $g(\infty) \neq \infty$. El punto $\alpha = \alpha(g) = g^{-1}(\infty)$ es llamado el *centro del círculo isométrico* de g . De forma similar, el punto $\alpha' = \alpha'(g) = g(\infty)$ es el centro del círculo isométrico de g^{-1} .

La familia de círculos que pasan por α e ∞ va a dar, bajo g , a la familia de círculos que pasan por ∞ y α' . Entonces las trayectorias ortogonales a la primera familia van a dar, bajo g , a trayectorias ortogonales a la segunda. Esto es, la familia de círculos Euclidianos con centro en α va a dar, bajo g , a la familia de círculos Euclidianos centrados en α' . Existe un único círculo $I = I(g)$ en la primer familia que, al ser mandado bajo g , va a dar en un círculo del mismo tamaño.

Definición 3.2.1 *El círculo I descrito anteriormente es el círculo isométrico de g , y su imagen I' es el círculo isométrico de g^{-1} .*

Tanto I como I' tienen el radio $\rho = |c|^{-1}$.

Sea $p = p(g)$ la reflexión en el círculo isométrico I de g . Sea $q = q(g)$ la reflexión Euclidiana en el bisector perpendicular del segmento entre α y α' ; si $\alpha = \alpha'$ entonces $q = 1$. Sea $r = r(g) = g \circ (q \circ p)^{-1}$.

Proposición 3.2.2 *Cada $g \in \mathcal{M}$ con $g(\infty) \neq \infty$, puede escribirse en la forma $g = r \circ q \circ p$, donde p es reflexión en el círculo isométrico de g , y r y q son movimientos Euclidianos. $\square$*

Proposición 3.2.3 Sea $g \in \mathcal{M}$ tal que $g(\infty) \neq \infty$ y sea C un conjunto cerrado que puede contener a ∞ , pero no contiene a $\alpha = g^{-1}(\infty)$. Sea δ la distancia de α a C , y sea ρ el radio del círculo isométrico I de g . Entonces

$$\mathbf{dia}_{\mathbf{E}}(g(C)) \leq 2\frac{\rho^2}{\delta},$$

y si $\infty \in C$, entonces

$$\frac{\rho^2}{\delta} \leq \mathbf{dia}_{\mathbf{E}}(g(C)).$$

Demostración. Sea x el punto de C mas cercano a α . Entonces $\delta = |x - \alpha|$, y T queda fuera del círculo de radio δ centrado en α . Como $|p(z) - \alpha| = \frac{\rho^2}{|z - \alpha|}$, $p(C)$ va a dar dentro del círculo de radio $\frac{\rho^2}{\delta}$ centrado en α de donde se cumple la primera desigualdad. La segunda desigualdad se sigue del hecho de que $\alpha \in p(C)$. $\square$

3.2.2. Acciones discontinuas

Definición 3.2.4 Sea X un espacio topológico y sea G un grupo de homeomorfismos de X en sí mismo. Decimos que la acción de G en un punto $x \in X$ es libremente discontinua, si existe una vecindad U de x tal que $g(U) \cap U = \emptyset$, para todos los $g \in G$ distintos de la identidad. La vecindad U se llama una buena vecindad de x .

Otra forma de decir lo mismo es que los traslados de U por distintos elementos de G son disjuntos.

El conjunto de puntos en el que la acción de G es libremente discontinua se llama el *conjunto regular libre*, y se denota por $\Omega^\circ = \Omega^\circ(G)$

Un conjunto $Y \subset X$ es *invariante bajo G* si $g(Y) = Y$ para todas las $g \in G$. El conjunto Ω° es, claramente, invariante bajo G . También es un abierto de X ; esto es, si U es una buena vecindad, entonces cada punto de U vive en Ω° .

El grupo G divide cualquier conjunto Y en el que actúa en clases de equivalencia. Dos puntos x y y son *equivalentes bajo G* , si existe un $g \in G$ con $g(x) = y$. El espacio de clases de equivalencia se denota por Y/G , dándole la topología cociente.

Definición 3.2.5 Un subgrupo $G \subset \mathcal{M}$ cuya acción es libremente discontinua en algún punto $z \in \Sigma$ es un grupo Kleiniano.

Proposición 3.2.6 Ω°/G es Hausdorff.

Demostración. Sean x y y dos puntos no equivalentes de Ω° . Necesitamos encontrar vecindades U de x y V de y tal que $g(U) \cap V = \emptyset$ para todas las $g \in G$. Empezamos tomando U y V dos buenas vecindades disjuntas de x y y respectivamente. Si es necesario hacemos V pequeña tal que ningún traslado de x quede en $\bar{V}$, la cerradura de V .

Como los traslados de U bajo G son discos circulares disjuntos, la suma de sus áreas esféricas es menor o igual al área de la esfera, entonces el diámetro esférico de cualquier sucesión de ellos tiende a cero. Como los traslados de x no se acumulan en Ω° , solo una cantidad finita de traslados de U se intersectan con V . Para cada $g \in G$ con $g(U) \cap V \neq \emptyset$ existe una buena vecindad mas chica U' de x con $g(U) \cap V = \emptyset$. Después de un número finito de pasos, encontramos las vecindades requeridas. $\square$

Estamos interesados en propiedades de grupos Kleinianos que son invariantes bajo conjugación en $\mathcal{M}$, y frecuentemente es preferible tener algunos puntos convenientemente ubicados. Podemos elegir hasta tres puntos z_m ubicados con respecto a G luego podemos escoger una cantidad igual de puntos convenientemente ubicados, $x_m \in \Sigma$, y sea $h \in \mathcal{M}$ que manda cada z_m en su correspondiente x_m . En lugar de referirnos al grupo hGh^{-1} , nos referiremos a este grupo como si fuera el mismo grupo G , *normalizado*.

Los tres puntos específicos de Σ son usualmente 0, 1 e ∞ . El proceso descrito anteriormente se llama *normalización*.

3.2.3. Área, Diámetro y Convergencia

Usando la proyección estereográfica podemos pensar el plano complejo extendido como la esfera S^2 . Denotamos distancias en Σ por $d(\cdot, \cdot)$, denotamos el diámetro esférico de un conjunto X por $\mathbf{dia}(X)$, y denotaremos el área de un conjunto (medible) X por $\mathbf{med}(X)$.

Sea G un grupo Kleiniano, y sea U una buena vecindad de algún punto $z \in \Omega^\circ$. Como los traslados de U son disjuntos, la suma de sus áreas es finita. Así tenemos:

Proposición 3.2.7 Sea U una buena vecindad de algún punto $z \in \Omega^\circ$. Entonces

$$\sum_{g \in G} \mathbf{med}(g(U)) < \infty.$$

$\square$

Corolario 3.2.8 *Cada grupo Kleiniano es numerable. $\square$*

Teorema 3.2.9 *Si $\infty \in \Omega^\circ$, entonces*

$$\sum_{g \in G} |c|^{-4} < \infty \quad (g \neq \text{Identidad}).$$

Demostración. Comenzamos escogiendo una buena vecindad U de ∞ de la forma $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \rho\} \cup \{\infty\}$. Sea α el centro del círculo isométrico I de algún elemento no trivial $g \in G$. El radio de I es $|c|^{-1}$. Como U es una buena vecindad, $\alpha = g^{-1}(\infty)$ no está en U . Podemos asumir que δ , la distancia Euclidiana de α a U , es positiva. Note que $\delta \leq \rho$.

De la proposición (3.2.3), tenemos:

$$\mathbf{dia}_E(g(U)) \geq |c|^{-2} \delta^{-1}. \quad (3.1)$$

Como $g(U)$ es un disco circular contenido en el complemento de U , existe una constante $K > 0$ tal que

$$\mathbf{med}(g(U)) \geq K^{-1} \mathbf{dia}_E^2(g(U)). \quad (3.2)$$

Combinando la proposición (3.2.7) y las ecuaciones (3.1) y (3.2) obtenemos

$$\sum_{g \in G} |c|^{-4} \leq \sum_{g \in G} \delta^2 \mathbf{dia}_E^2(g(U)) \leq K \rho^2 \sum_{g \in G} \mathbf{med}(g(U)) < \infty$$

$(g \neq \text{Identidad}). \quad \square$

Corolario 3.2.10 *Sea $\{g_m\}$ una sucesión de elementos distintos del grupo Kleiniano G , donde $\infty \in \Omega^\circ$, y sea ρ_m los radios de los círculos isométricos de g_m . Entonces $\rho_m \rightarrow 0$. $\square$*

3.2.4. El conjunto límite

Definición 3.2.11 *Un punto x es un punto límite de un grupo Kleiniano G si existe un punto $z \in \Omega^\circ$, y una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de G , con $g_m(z) \rightarrow x$. El conjunto de puntos límites se llama el conjunto límite y se denota por $\Lambda = \Lambda(G)$.*

Como cada vecindad de un punto de Λ contiene una infinidad de traslados de un punto, $\Lambda \cap \Omega^\circ = \emptyset$.

Teorema 3.2.12 *Sea x un punto límite de un grupo Kleiniano G . Entonces existe un punto límite y , y existe una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de G , tales que $g_m(z) \rightarrow x$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\Sigma \setminus \{y\}$.*

Demostración. Como x es un punto límite, existe un punto $z_0 \in \Omega^\circ$, y una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de G , tales que $g_m(z) \rightarrow x$. Normalizamos G para que $z_0 = \infty$. Ya que estamos en un compacto (Σ) escogemos una subsucesión tal que $\alpha_m = g_m^{-1}(\infty) \rightarrow y$; y es claramente un punto límite. Usando la proposición (3.2.2) escribimos a cada g_m como $r \circ q \circ p$. El resultado se sigue de las siguientes observaciones: el centro de los círculos isométricos de g_m , α_m , tienden a y ; g_m manda el exterior de su círculo isométrico dentro del círculo isométrico de su inverso, esto se ve fácilmente sabiendo que $g_m = r \circ q \circ p$; el radio de los círculos isométricos de g_m y g_m^{-1} tienden a cero, esto gracias al corolario (3.2.10); el centro del círculo isométrico de g_m^{-1} , $\alpha' = g_m(\infty)$, tiende a x . $\square$

De esto se sigue que la definición de punto límite depende solo de la sucesión de elementos del grupo, y no del punto en Ω° . Esto es, si $\{g_m\}$ es una sucesión de elementos distintos de G , y $g_m(z_0) \rightarrow x$ para algún $z_0 \in \Omega^\circ$, entonces existe una subsucesión tal que $g_m(z) \rightarrow x$, para toda $z \in \Omega^\circ$.

El teorema anterior no da información del punto y , solo que es un punto límite. Podríamos tener que $y = x$. También puede existir una subsucesión con $g_m(y) \rightarrow x$ o también puede existir una subsucesión $g_m(y) \rightarrow w \neq x$. En éste último caso decimos que y es un *punto de aproximación*.

Teorema 3.2.13 *Sea $\{g_m\}$ una sucesión de elementos distintos de un grupo Kleiniano G . Entonces existe una subsucesión $\{g_m\}$ y puntos límites x y y tales que $g_m(z) \rightarrow x$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\Sigma \setminus \{y\}$.*

Demostración. Normalizamos G para que $\infty \in \Omega^\circ$ y escogemos una subsucesión $\{g_m\}$ tal que $g_m(\infty)$ converja a algún punto x y tal que $g_m^{-1}(\infty)$ converja a y . Ahora aplicamos el teorema anterior. $\square$

Teorema 3.2.14 Λ es cerrado, invariante bajo G y nunca denso en Σ .

Demostración. Para mostrar que Λ es cerrado, sea $\{x_m\}$ una sucesión de puntos en Λ , con $x_m \rightarrow x$. Usando (3.2.12), podemos encontrar un punto $z \in \Omega^\circ$, y podemos encontrar sucesiones $\{g_{m,k}\}$ de elementos distintos de G , tales que $g_{m,k}(z) \rightarrow x_m$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que los

x_m son todos distintos y $x_m \neq x$. Sea δ_m la distancia mínima de x_m a cualquier otro x_j . Para cada m , escogemos $k(m)$ tal que $d(g_{m,k(m)}(z), x_m) < \delta_m/2$. Entonces $\{g_{m,k(m)}\}$ es una sucesión de elementos distintos de G , ya que los x_m son distintos y por la desigualdad anterior. Es claro que $g_{m,k(m)}(z) \rightarrow x$.

Sea $x \in \Lambda$ y sea $g \in G$. Como x es un punto límite, existe una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de G y un punto $z \in \Omega^\circ$ con $g_m(z) \rightarrow x$. Entonces $g \circ g_m(z) \rightarrow g(x)$. Λ es invariante bajo G .

Por definición, existen puntos de Ω° en cualquier vecindad de $x \in \Lambda$. Como $\Lambda \cap \Omega^\circ = \emptyset$, Λ es nunca denso. $\square$

Teorema 3.2.15 *Si Λ contiene mas de dos puntos, entonces es perfecto.*

Demostración. Supongamos que Λ tiene al menos tres puntos. Para cualquier punto límite x , existe una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de G y un punto límite y con $g_m(z) \rightarrow x$ para toda $z \neq y$. En particular existe esa sucesión y dos distintos puntos límites x_1, x_2 , no necesariamente distintos de x , tales que $g_m(x_1) \rightarrow x$ y $g_m(x_2) \rightarrow x$. Como $x_1 \neq x_2$, para cada m , $g_m(x_1) \neq x$ o $g_m(x_2) \neq x$. Así obtenemos una sucesión de distintos puntos límites que convergen a x . $\square$

3.2.5. La partición de Σ

En general, si un grupo actúa en un espacio X y $Y \subset X$, entonces el *estabilizador* de Y en G , que se denota $\mathbf{Stab}_G(Y)$, o sólo $\mathbf{Stab}(Y)$ si no hay confusión, se define como

$$\mathbf{Stab}(Y) = \{g \in G \mid g(Y) = Y\}.$$

Note que $\mathbf{Stab}(Y)$ siempre es un subgrupo de G .

Definición 3.2.16 *Decimos que G actúa de forma discontinua en un punto $x \in X$ si existe una vecindad U de x tal que $g(U) \cap U = \emptyset$ para todas las $g \in G$ excepto una cantidad finita.*

El conjunto de puntos en los que G actúa de forma discontinua se llama el *conjunto de discontinuidad* o *conjunto regular* y se denota por $\Omega = \Omega(G)$.

Definición 3.2.17 *Decimos que un conjunto Y es precisamente invariante bajo el subgrupo H de G , si*

1. $H = \mathbf{Stab}_G(Y)$ y
2. $g(Y) \cap Y = \emptyset$ para todas las $g \in G \setminus H$.

Cuando no halla confusión, diremos que Y es precisamente invariante bajo H o, de forma mas simple, que Y es precisamente invariante.

Note que $x \in \Omega^\circ$ si y sólo si existe una vecindad U de x la cual es precisamente invariante bajo la identidad en G .

Proposición 3.2.18 *Sea G un grupo Kleiniano. Un punto $x \in \Omega(G)$ si y sólo si*

1. $\mathbf{Stab}(x)$ es finito y
2. existe una vecindad U de x la cual es precisamente invariante bajo $\mathbf{Stab}(x)$.

Demostración. Si G actúa de forma discontinua en x , entonces $H = \mathbf{Stab}(x)$ tiene que ser finito. Sea U vecindad de x tal que $g(U) \cap U = \emptyset$ para toda g excepto una cantidad finita. Como $g(U) \cap U \neq \emptyset$ para una cantidad finita, podemos encontrar una vecindad (que seguiremos llamando U) tal que $g(U) \cap U \neq \emptyset$ sólo para $g \in H$. Entonces sea $V = \bigcap_{g \in H} g(U)$, donde se toma la intersección de sobre todos los elementos de H , veamos que V es una vecindad de x que es precisamente invariante bajo H . Si $h \in H$ entonces

$$h(V) = h\left(\bigcap_{g \in H} g(U)\right) = \bigcap_{g \in H} h \circ g(U) = \bigcap_{g \in H} g(U) = V$$

ya que $h \circ g \in H$. Con esto $h \in \mathbf{Stab}(V)$. Si $h \in \mathbf{Stab}(V)$ entonces

$$h(V) = V \Rightarrow \left(h\left(\bigcap_{g \in H} g(U)\right)\right) \cap \left(\bigcap_{g \in H} g(U)\right) \neq \emptyset$$

como

$$h\left(\bigcap_{g \in H} g(U)\right) \subset h(U)$$

entonces $h(U) \cap U \neq \emptyset$ y tenemos $h \in H$. Con esto $H = \mathbf{Stab}(V)$. Es claro que $g(V) \cap V = \emptyset$ para todas las $g \in G \setminus H$ con lo que concluimos una implicación.

Si $\mathbf{Stab}(x)$ es finito y U es precisamente invariante bajo $\mathbf{Stab}(x)$ entonces $g(U) \cap U \neq \emptyset$ solo para los elementos de $\mathbf{Stab}(x)$. $\square$

Definición 3.2.19 Una vecindad U de un punto $x \in \Omega$ es una buena vecindad si U es precisamente invariante bajo $\text{Stab}(x)$. Como cualquier vecindad de estas contiene una vecindad circular con la misma propiedad, asumiremos que las buenas vecindades son circulares.

Teorema 3.2.20 Para cualquier grupo Kleiniano G , Σ es la unión disjunta de Λ y Ω .

Demostración. Si z es un punto límite, entonces cualquier vecindad U de z contiene una infinidad de traslados de algún punto, entonces hay una infinidad de elementos distintos de G que $g(U) \cap U \neq \emptyset$. Con lo que concluimos que $\Lambda \cap \Omega = \emptyset$.

Supongamos que x no está en Ω . Entonces para cualquier vecindad U de x , hay una infinidad de traslados de U que se intersectan con U . Podemos encontrar una sucesión de elementos distintos $\{g_m\}$ de G , y una sucesión de puntos $\{z_m\}$ tales que $z_m \rightarrow x$ y $g_m(z_m) \rightarrow x$. Por (3.2.13) existe una subsucesión tal que $g_m(z) \rightarrow w$ uniformemente en subconjuntos compactos del complemento de y , donde w y y son puntos límites. Si $x = y$ entonces $x \in \Lambda$. Si $x \neq y$, entonces los puntos $\{z_m\}$ no se acumulan a y así que $g_m(z_m) \rightarrow w$ de lo que concluimos que $x = w \in \Lambda$. $\square$

Proposición 3.2.21 Si existe una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de un grupo Kleiniano G y existe un punto y en $\Omega(G)$ con $g_m(y) \rightarrow x$, entonces $g_m(z) \rightarrow x$ para todas las $z \in G$.

Demostración. Normalicemos G para que $\infty \in \Omega^\circ$. Como $y \in \Omega$, y no puede estar dentro de una cantidad infinita de círculos isométricos de las g_m 's. Entonces $g_m(y)$ queda dentro del círculo isométrico de g_m^{-1} . Como el radio de los círculos isométricos tiende a cero y $g_m(y) \rightarrow x$, el centro de los círculos isométricos de las g_m^{-1} converge a x . Entonces para cualquier $z \in \Omega$, z queda fuera de casi todos los círculos isométricos de las g_m 's y, así, $g_m(z)$ va a parar dentro del círculo isométrico de las g_m^{-1} y tenemos que $g_m(z) \rightarrow x$. $\square$

3.2.6. Superficies de Riemann

En esta sección estudiaremos la conexión entre un grupo Kleiniano y una superficie de Riemann.

Una *superficie de Riemann* S es una variedad conexa compleja de una dimensión, esto es, S es un espacio Hausdorff conexo donde cualquier $s \in$

S tiene una vecindad U y un homeomorfismo asociado $\psi: U \rightarrow \mathbb{C}$ donde, cuando este definida, la composición de uno de estos homeomorfismos con el inverso de otro es holomorfo. El homeomorfismo ψ es llamado una *coordenada local* en s .

La unión disjunta de a lo más una cantidad numerable de superficies de Riemann se llama una *superficie de Riemann (disconexa)*.

Dos superficies de Riemann (disconexas) son *conformemente equivalentes* si existe un homeomorfismo biolomorfo entre ellas.

Una *superficie de Riemann (disconexa) marcada* es una superficie de Riemann (disconexa) S con un conjunto discreto de puntos *especiales* electos de ella; cada punto especial x_m es *marcado* con un símbolo α_m donde cada α_m es o un entero ≥ 2 o el símbolo ∞ . Decimos que α_m es el orden de x_m . El complemento de los puntos especiales de S se denota por S° .

Una superficie de Riemann por definición no tiene frontera. Una superficie de Riemann homeomorfa a una variedad compacta de dos dimensiones sin frontera es *cerrada*. Una superficie de Riemann homeomorfa al interior de una variedad compacta de dos dimensiones, con o sin frontera, es llamada *topológicamente finita*.

La unión disjunta de a lo más una cantidad numerable de superficies de Riemann cerradas es una *superficie de Riemann cerrada (disconexa)*, así mismo, la unión disjunta de una cantidad numerable de superficies de Riemann topológicamente finitas es una *superficie de Riemann topológicamente finita (disconexa)*.

Teorema 3.2.22 *Sea G un grupo Kleiniano. Entonces $S = \Omega/G$ es una superficie de Riemann (disconexa).*

Demostración. Primero mostraremos que S es Hausdorff. Necesitamos probar que si x y y son dos puntos no equivalentes de Ω , entonces existen vecindades U de x y V de y cuyas proyecciones son disjuntas. Escojamos dos buenas vecindades U' y V' de x y y respectivamente. Como U' y V' están en Ω sólo una cantidad finita de traslados de U' se intersectan con V' y podemos escoger vecindades mas pequeñas U y V (gracias a que $\mathbb{C}$ es Hausdorff y las $g \in G$ son continuas) tales que los traslados de U no se intersectan con V .

Como G tiene una cantidad numerable de componentes, así también tiene S .

Sea U una buena vecindad de un punto $z \in \Omega^\circ$. Como $p|_U$ es inyectiva, p^{-1} esta bien definida en $p(U)$. Una vez que escogemos $p^{-1}(p(z))$, p sirve como

una coordenada local. Si U y U' son dos vecindades como las anteriores que se intersectan, entonces $p^{-1} \circ p$, donde esté definido, es un elemento de G .

Sea $z \in \Omega \setminus \Omega^\circ$, sea U una buena vecindad de z y sea $J = \mathbf{Stab}(z)$. Como J es un subgrupo finito de G , cualquier elemento no trivial de J es elíptico. Los elementos de J tienen un segundo punto fijo z' en común. Normalicemos para que $z = 0$ y $z' = \infty$. Entonces los elementos de J son de la forma $z \rightarrow e^{\frac{2\pi im}{n}} z$. Como J es finito entonces es cíclico.

La función $f(z) = z^n$ sirve como una proyección de U a U/J ; esto es, dos puntos z_1 y z_2 en U son equivalentes bajo J si y sólo si $f(z_1) = f(z_2)$. Las imágenes de U bajo f es un disco centrado en el origen, donde f cubre su imagen n veces excepto en el origen. En $f(U)$ la función inversa $\psi(s) = \sqrt[n]{s}$ es el homeomorfismo local requerido. Si dos vecindades se intersectan fuera del origen, $\psi \circ \psi^{-1}$ es un elemento de G . $\square$

Sea G un grupo Kleiniano y sea $S = \Omega/G$. Esta representación particular hace a S una superficie de Riemann (disconexa). Los puntos especiales son proyecciones de puntos fijos de elementos elípticos de Ω . El orden en los puntos especiales $x = p(z)$ es el orden de $\mathbf{Stab}(z)$.

3.2.7. Dominios Fundamentales

Describir o dibujar un grupo Kleiniano no es fácil. En general lo que podemos hacer es dibujar Ω/G que ilustra la acción de G . Lo que se hace es dar un dominio fundamental el cual contiene un elemento de cada clase de Ω y que ilustra la topología de Ω/G .

Definición 3.2.23 *Un dominio fundamental D para el grupo Kleiniano G es un subconjunto abierto de Ω que satisface lo siguiente:*

- (I) *D es precisamente invariante bajo la identidad en G .*
- (II) *Para cada $z \in \Omega$, existe un $g \in G$ con $g(z) \in \overline{D}$.*
- (III) *La frontera de D consiste de puntos límite de G y una colección finita o numerable de curvas; cada curva vive, excepto quizá por uno o ambos puntos finales, en Ω ; la intersección de una curva con Ω se llama un lado de D .*
- (IV) *Los lados están apareados por G ; esto es, si s es un lado de D entonces existe un lado s' , no necesariamente distinto de s , y hay un $g \in G$*

distinto de la identidad, llamado apareamiento, con $g(s) = s'$. También $(s')' = s$ y el apareamiento de s' a s es g^{-1} .

- (v) Si $\{s_m\}$ es una sucesión de lados de D , entonces el diámetro $\mathbf{dia}(s_m) \rightarrow 0$. Los lados de D se acumulan sólo en puntos límites.
- (vi) Sólo una cantidad finita de traslados de D se intersectan con cualquier compacto de Ω .

La primera condición dice que D es disjunto de todos sus traslados, o, equivalentemente, que dos puntos de D no son equivalentes bajo G , o, equivalentemente, que la función de paso al cociente p es inyectiva en D .

La segunda condición dice que p manda $\overline{D} \cap \Omega$ sobre Ω/G .

Note que si existe un lado s y un apareamiento g con $g(s) = s$, entonces, como el apareamiento de s' a s es g^{-1} , $g^{-1} = g$, esto es, $g^2 = 1$.

Sea $\tilde{D} = \overline{D} \cap \Omega$. Las identificaciones en los lados induce una relación de equivalencia de $\tilde{D}$. Un punto interior es equivalente sólo a sí mismo. Si x y y viven en lados de D y existe un apareamiento g con $g(x) = y$ entonces x y y son equivalentes. Sea D^* el cociente de $\tilde{D}$ con esta relación de equivalencia.

Dos puntos x y y son equivalentes en $\tilde{D}$ si y sólo si existe un elemento $g \in G$ con $g(x) = y$. Así la función p nos da una proyección natural de D^* sobre Ω/G , llamaremos a esta función φ .

Los puntos finales de los lados que vivan en Ω se llaman *vértices*.

Lema 3.2.24 *Si x es un punto de $\tilde{D}$, entonces existen a lo más una cantidad finita de puntos de $\tilde{D}$ equivalentes a x .*

Demostración. Se encierra a x en un compacto y el lema se sigue por la condición (vi). $\square$

Teorema 3.2.25 $\varphi: D^* \rightarrow \Omega/G$ es un homeomorfismo.

Demostración. Vamos a ver que φ es biyectiva y un homeomorfismo local, al hacer esto tendremos que es un homeomorfismo.

Por la condición (ii), φ es suprayectiva y de la condición (i), φ restringida a D es inyectiva. $\varphi|D$ es un homeomorfismo local. Entonces en D ya hemos terminado.

Si x es un punto interior de un lado s , entonces existe un apareamiento g y un lado s' tales que $g(s) = s'$. Sea $x' = g(x)$. Si $x' \neq x$, sea δ la mínima

distancia de x a x' , o a cualquier vértice de D , o a cualquier punto límite de G , o a cualquier punto fijo de g . De forma similar se define δ' como la mínima distancia de x' a x , o a cualquier vértice de D , o a cualquier punto límite de G , o a cualquier punto fijo de g . Por como son x y x' y la condición (v), tanto δ como δ' son ambos positivos. Escojamos $\rho < \min(\delta, \delta')/2$ tal que la bola de radio ρ centrada en x sea una buena vecindad de x . Ahora tomamos dos puntos y_1 y y_2 en s donde y_1 y y_2 vivan en lados diferentes de x en s y que ambos vivan en el disco de radio ρ centrado en x . Conectamos y_1 y y_2 por una trayectoria que este contenida, salvo sus puntos finales, en D y que además viva en el disco de radio ρ . Esta trayectoria define una vecindad U de x en $\tilde{D}$. De forma similar escogemos una trayectoria que conecte $g(y_1)$ con $g(y_2)$, para así tener una vecindad U' de x' en $\tilde{D}$. Sabemos que cualquier punto de $D \cap U$ o $D \cap U'$ es equivalente solo a sí mismo. También cualquier punto de $s \cap U$ es equivalente solo al punto correspondiente en $s' \cap U'$. Con esto tenemos una relación de equivalencia en $U \cup U'$, a la proyección que define esta relación le llamaremos p' . Así por la propiedad universal del cociente tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U \cup U' & \xrightarrow{p} & p(U \cup U') \\ p' \downarrow & \swarrow \varphi & \\ p'(U \cup U') & & \end{array}$$

Del diagrama se ve que φ es inyectiva, y como era sobre, es biyectiva. También es abierta ya que p es continua y p' es una proyección del paso al cociente. Entonces φ restringida a $p(U \cup U')$ es un homeomorfismo.

Si x es un punto interior de un lado s con $g(x) = x$, entonces $g^2 = 1$. Sea δ la distancia mínima de x a cualquier vértice de D , o a cualquier otro punto fijo de g o a cualquier punto límite de G . Escojamos ρ , y_1 , y_2 y una trayectoria que los conecte como lo hicimos anteriormente sólo que ahora escogemos $y_2 = g(y_1)$. Esto define una vecindad U de x en $\tilde{D}$. Los puntos de $U \cap D$ son equivalentes sólo a sí mismos. Cada punto $z \neq x$ de $s \cap U$ es equivalente sólo a $g(z)$ que también esta en U y x es equivalente sólo a sí mismo. Esto define una relación de equivalencia en U , llamaremos p' a la proyección que define. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{p} & p(U) \\ p' \downarrow & \swarrow \varphi & \\ p'(U) & & \end{array}$$

Como antes, vemos que φ es biyectiva y abierta. Entonces tenemos que $\varphi|_{p(U)}: P(U) \rightarrow \varphi(p(U))$ es un homeomorfismo.

Ahora, sea $x = x_1$ un vértice. Entonces existe un lado s_1 que tiene a x_1 como punto final. Sea s'_1 el lado apareado a s_1 por g_1 . Sea $x_2 = g_1(x_1)$. Entonces existe otro lado $s_2 \neq s'_1$ que tiene a x_2 como punto final. Existe un lado s'_2 y una función de apareamiento g_2 tales que $g_2(s_2) = s'_2$. Sea $x_3 = g_2(x_2)$ y así sucesivamente. Por el lema anterior, este procedimiento terminará en un número finito de pasos, esto es, existe un entero n tal que $s_n = s_1$. Construiremos una vecindad de x escogiendo puntos y_m en s_m y $y'_m = g_m(y_m)$ en s'_m . Escogemos una trayectoria τ_m desde y'_{m-1} hasta y_m (τ_1 va desde y'_n hasta y_1) tal que la región abierta U_m acotada por s'_{m-1} , τ_m y s_m quede en D ; tal que la región cerrada correspondiente quede en una buena vecindad de x_m ; y tal que las U_m sean todas disjuntas. Sea $U = \bigcup U_m$. De forma similar a las anteriores nos damos cuenta que $\varphi|_{p(U)}$ es un homeomorfismo.

Ya tenemos que φ es biyectiva y es un homeomorfismo local que era lo que queríamos. $\square$

Ahora veamos como podemos construir un dominio fundamental. Para la siguiente definición asumiremos que G es un grupo Kleiniano y que además ∞ es un punto de Ω° . La región de Ford está definida sólo para grupos Kleinianos con esta restricción.

Definición 3.2.26 *Para un elemento arbitrario $g \in G$, sea D_g el exterior del círculo isométrico de g . La región de Ford es el interior de $\bigcap D_g$ donde la intersección se toma sobre todos los elementos no triviales de G .*

Teorema 3.2.27 *La región de Ford es un dominio fundamental para G .*

Demostración. Ver [8] páginas 32 a 34. $\square$

3.2.8. Polígonos Fundamentales

A lo largo de esta sección usaremos la siguiente notación: X es uno de los espacios $\mathbb{H}^n$ (o $\mathbb{B}^n$), $\mathbb{S}^n$ (o $\widehat{\mathbb{E}}^n$) o $\mathbb{E}^n$ y $\mathbb{G}$ su grupo de isometrías.

Definición 3.2.28 *Un poliedro (convexo) D en $\mathbb{X}$ es la intersección de una cantidad numerable de semiespacios, donde sólo una cantidad finita de los hiperplanos que definen estos semiespacios intersectan a cualquier compacto de $\mathbb{X}$.*

La cerradura $\overline{D}$ de D se descompone de manera natural en celdas dadas por la intersección de los hiperplanos. Las k -celdas en esta descomposición se llaman k -caras de D o de $\overline{D}$. Las caras con codimensión uno se llaman *lados*, y las caras de codimensión dos se llaman *orillas*. Cada orilla vive en la intersección de exactamente dos lados.

Un poliedro de dimensión dos se llama *polígono*, en este caso las caras de codimensión dos se llaman *vértices*.

Definición 3.2.29 Sea G un subgrupo discreto de $\mathbb{G}$. Un poliedro D es un poliedro fundamental para G si se cumple lo siguiente:

- (I) Para cada $g \in G$ distinto de la identidad, $g(D) \cap D = \emptyset$.
- (II) Para cada $x \in \mathbb{X}$ existe una $g \in G$ con $g(x) \in \overline{D}$.
- (III) Los lados de D son apareados por elementos de G ; esto es, para cada lado s existe un lado s' y un elemento $g_s \in G$ tales que $g_s(s) = s'$. Además debe cumplirse que $g_{s'} = g_s^{-1}$ y $(s')' = s$. El elemento g_s se llama un apareamiento de lados.
- (IV) Cualquier compacto intersecta una cantidad finita de traslados de D por elementos de G .

Si D es un poliedro fundamental entonces las identificaciones de los lados inducen una relación de equivalencia en $\overline{D}$; esto es, $x \sim y$ si existe un apareamiento de lados g con $g(x) = y$. La condición (I) dice que cualesquiera dos puntos en D no son equivalentes. Una consecuencia de la condición (IV) es que cada punto de $\overline{D}$ es equivalente sólo a una cantidad finita de puntos de $\overline{D}$.

Esta relación de equivalencia también define una relación de equivalencia en las orillas de D . Cada clase de equivalencia puede ser ordenada por ciclos como a continuación veremos.

Empecemos con una orilla e_1 . Esta orilla vive entre dos lados, llamemos a uno de ellos s_1 . Existe un lado s'_1 y un apareamiento de lados g_1 tales que $g_1(s_1) = s'_1$. Sea $e_2 = g_1(e_1)$. Como e_1, e_2 vive entre dos lados, uno de ellos es s'_1 , llamemos al otro s_2 . Existe un lado s'_2 y un apareamiento de lados g_2 tales que $g_2(s_2) = s'_2$. Continuando de esta manera, generamos una sucesión $\{e_m\}$ de orillas, una sucesión $\{g_m\}$ de apareamientos de lados y una sucesión $\{(s_m, s'_m)\}$ de lados apareados. Como cada punto de e_1 es equivalente a una

cantidad finita de otros puntos de $\overline{D}$, la sucesión de orillas es periódica y de aquí, las otras dos sucesiones son periódicas. Sea k el mínimo entero positivo tal que las tres sucesiones tengan periodo k .

La sucesión de orillas $\{e_1, \dots, e_k\}$ se llama un *ciclo* de orillas. k es el *periodo* del ciclo. Dos de estos ciclos son *equivalentes* si ambos contienen el mismo conjunto de orillas.

Cada orilla queda en exactamente una clase de equivalencia de ciclos.

Observe que $g_k \circ \dots \circ g_1(e_1) = e_1$; $h = g_k \circ \dots \circ g_1$ se llama la *transformación cíclica* en e_1 .

Sea x un punto en el interior de e_1 y sea L el plano bidimensional que pasa por x ortogonal a e_1 . En L , vemos los traslados de D como $g_1^{-1}(D)$, $g_1^{-1} \circ g_2^{-1}(D)$, $\dots$, $g_1^{-1} \circ \dots \circ g_k^{-1}(D)$. Pero $g_1^{-1} \circ \dots \circ g_k^{-1}(D) = h^{-1}(D)$ podría no ser igual a D . El siguiente traslado que vemos es $h^{-1} \circ g_1^{-1}$ y así siguen. Después volvemos a D . Definimos el periodo k tal que, cuando volvemos a D , k es una potencia de h^{-1} . Esto es, existe un mínimo entero positivo q tal que $h^q(D) = D$, entonces $h^q = 1$. El orden q depende sólo de la clase de equivalencia de un ciclo.

Dos lados de D que se intersectan en una orilla e , lo hacen a un ángulo $\alpha(e)$ medido por el interior de D . Hemos mostrado que si $\{e_1, \dots, e_k\}$ es un ciclo de orillas y si la correspondiente transformación cíclica tiene orden q , entonces $\sum \alpha(e_m) = \frac{2\pi}{q}$.

Proposición 3.2.30 *Los apareamientos de lados generan a G .*

Demostración. Si x es cualquier punto de $\mathbb{X}$ entonces podemos trazar una trayectoria desde cualquier punto 0 en D hasta x donde la trayectoria no pasa por ningún traslado de una cara de D de codimensión s con $s > 1$. Entonces existe un conjugado de una función de apareamiento que manda cada traslado de D a lo largo de esta trayectoria hasta el siguiente traslado de D . El elemento conjugado es el producto de funciones de apareamiento. $\square$

Supongamos que G es un subgrupo discreto de $\mathbb{G}$ y escojamos un punto 0 en $\mathbb{X}$ que no es punto fijo de ningún elemento no trivial de G .

Definición 3.2.31 *Para cualquier elemento no trivial $g \in G$ el bisector perpendicular de la línea que une a 0 con $g(0)$ es un hiperplano. Sea D_g el semiespacio de puntos que están mas cerca de 0 que de $g(0)$, es decir $D_g = \{x \in \mathbb{X} | d(x, 0) < d(x, g(0))\}$. La región de Dirichlet D o D_G , centrada en 0, es la intersección de todos los semiespacios D_g .*

Proposición 3.2.32 *Si G es un grupo discreto de isometrías de $\mathbb{X}$, entonces para cada $x \in \mathbb{X}$ y cada $\rho > 0$, la bola de radio ρ centrada en x contiene una cantidad finita de traslados de x .*

Demostración. Supongamos que no. Entonces existe una sucesión de elementos distintos de G tales que $\{g_n(x)\} \rightarrow x$ lo que implica que $d(g_n(x), x) \rightarrow 0 \Rightarrow d(g_n g_1(x), g_1(x)) \rightarrow 0$, hacemos $g_1(x) = y$ y tenemos que $g_n(y) \rightarrow y$ y como los g_i son isometrías, convergen a la identidad, lo que es una contradicción. $\square$

Teorema 3.2.33 *La región de Dirichlet D es un polígono fundamental para G .*

Demostración. Si g es un elemento no trivial de G y x es algún punto de D , entonces $d(g(x), g(0)) = d(x, 0) < d(x, g^{-1}(0)) = d(g(x), 0)$ lo que nos dice que $g(x)$ no está en D . Así obtenemos la condición (I).

Para obtener la condición (II) sea x algún punto de $\mathbb{X}$. Existe un elemento g (no necesariamente único) tal que $d(x, g(0)) \leq d(x, h(0))$ para toda $h \in G$. Entonces, escribiendo un elemento arbitrario de G como $g \circ h$, $d(g^{-1}(x), 0) = d(x, g(0)) \leq d(x, g \circ h(0)) = d(g^{-1}(x), h(0))$ para todas las $h \in G$. De aquí obtenemos que $g^{-1}(x)$ vive en $\overline{D}_h$ para toda h , entonces vive en $\overline{D}$.

Veamos que se cumple la condición (III). Sea x un punto del interior de un lado s de D . Entonces existe un único $g \in G$ con $x \in \overline{D}_g$, es decir, $d(x, 0) < d(x, h(0))$ para todas las $h \neq g$ y $d(x, 0) = d(x, g(0))$. Entonces $d(g^{-1}(x), 0) = d(x, 0) = d(g^{-1}(x), g^{-1}(0))$ y para cualquier $h \neq g^{-1}$, $d(g^{-1}(x), h(0)) = d(x, g \circ h(0)) > d(x, 0) = d(g^{-1}(x), 0)$. Entonces $g^{-1}(x)$ vive en un lado s' de D de donde se sigue que $g^{-1}(s) = s'$.

Sea K un compacto. Podemos suponer que K es un disco cerrado de radio ρ centrado en 0. De la proposición anterior tenemos que, en la bola de radio 2ρ , hay sólo una cantidad finita de traslados de 0. Si $d(g^{-1}(0), 0) > 2\rho$, entonces $g(D) \cap K = \emptyset$ y así tenemos la condición (IV). $\square$

De la definición de D centrado en 0 se tiene:

Corolario 3.2.34 *Si $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ es un ciclo en la frontera de D , entonces $\rho(z_1, 0) = \rho(z_2, 0) = \dots = \rho(z_n, 0)$.*

3.2.9. Teorema de Poincaré

Continuaremos nuestra suposición de $\mathbb{X}$ y $\mathbb{G}$ como en la sección anterior.

Supongamos que nos dan un polígono D tal que sus lados están apareados por elementos de $\mathbb{G}$. Nuestra meta es poner condiciones a D para garantizar que el grupo G , generado por las identificaciones de los lados de D , es discreto y que D es un poliedro fundamental para G .

La primera condición es que los lados de D estén apareados por elementos de $\mathbb{G}$. Esto es, asumiremos que para cada lado s de D existe un lado s' , no necesariamente distinto de s , y un elemento $g_s \in \mathbb{G}$ satisfaciendo lo siguiente.

$$(I) \quad g_s(s) = s'.$$

$$(II) \quad g_{s'} = g_s^{-1}. \text{ Las isometrías } g_s \text{ se llaman } \textit{apareamientos de lados}.$$

Como s y s' son lados de D , $g_s(D)$ y D o quedan en el mismo lado de s' o quedan en lados opuestos. Si quedan en el mismo lado, entonces $g_s(D) \cap D \neq \emptyset$; lo que nos lleva a la tercera condición.

$$(III) \quad g_s(D) \cap D = \emptyset.$$

Sea G el grupo generado por los apareamientos de lados. Observe que si existe un lado s , con $s' = s$, entonces, la condición (II) implica que $g_s^2 = 1$. Si esto ocurre, la relación $g_s^2 = 1$ se llamará una *relación de reflexión*.

Los apareamientos inducen una relación de equivalencia en $\overline{D}$, donde cada punto de D es equivalente sólo a sí mismo. Sea D^* el espacio de clases de equivalencia, con la topología usual tal que la proyección $p: \overline{D} \rightarrow D^*$ sea continua y abierta. Si D va a ser un poliedro fundamental para G , la condición (IV) de la sección 3.2.8 requiere que haya una cantidad finita de puntos en cada clase de equivalencia.

$$(IV) \quad \text{Para cada punto } z \in D^*, p^{-1}(z) \text{ es un conjunto finito.}$$

Nuestras dos condiciones siguientes están relacionadas con las orillas. Las orillas están en ciclos; la condición anterior garantiza que cada ciclo es finito. Para cada orilla $e = e_1$, sea $\{e_1, \dots, e_k\}$ el conjunto de orillas en el ciclo conteniendo a e (como antes, k se escoge para que las sucesiones de orillas, de lados apareados y de funciones de apareamientos de lados tengan periodo k), y sean $g_1, \dots, g_k$ los correspondientes apareamientos de lados. Entonces la *transformación de ciclo* $h = h(e) = g_k, \dots, g_1$ deja invariante a e . La función h depende de la elección del lado en el que esta e ; si escogemos el otro lado para comenzar, obtenemos h^{-1} como la transformación de ciclo.

(v) Para cada orilla e existe un entero positivo t tal que $h^t = 1$.

Las relaciones en G de la forma $h^t = 1$ se llaman *relaciones de ciclo*. Esencialmente existe una relación de ciclo para cada clase de equivalencias de ciclos. Si e' es equivalente a e , entonces $h(e')$ es conjugado a $(h(e))^{\pm 1}$.

Sea $\alpha(e)$ el ángulo, medido dentro de D , en la orilla e . Necesitamos

(vI)

$$\sum_{m=1}^k \alpha(e_m) = \frac{2\pi}{t}.$$

Las condiciones listadas hasta ahora, son suficientes para garantizar que D y sus traslados no se enciman entre sí excepto en los lados.

La última condición es

(vII) D^* es completo.

Teorema 3.2.35 *Sea D un polígono cuyos apareamientos cumplen las condiciones anteriores. Entonces G , el grupo generado por los apareamientos de lados es discreto, D es un polígono fundamental para G y las relaciones de reflexión y de ciclo forman un conjunto completo de relaciones para G .*

Capítulo 4

Grupos geoméricamente infinitos

4.1. Grupos elementales y no elementales

En esta sección clasificaremos los elementos de $\mathcal{M}$ de acuerdo a sus órbitas.

Definición 4.1.1 *Un subgrupo G de $\mathcal{M}$ es elemental si tiene una órbita finita. En otro caso diremos que es no elemental.*

Observación 4.1.2 *Los subgrupos abelianos de $\mathcal{M}$ son elementales.*

Demostración. Sea G un subgrupo abeliano de $\mathcal{M}$. Sea $g \in G$ con puntos fijos α y β . Si f es otro elemento de G , entonces $fgf^{-1} = g$ y por lo tanto $\{f(\alpha), f(\beta)\} = \{\alpha, \beta\}$. Así que $\{\alpha, \beta\}$ es una órbita finita de G . $\square$

Existe una clasificación para los grupos elementales de $\mathcal{M}$. A continuación daremos la lista de ellos para después ocuparnos de los no elementales.

Teorema 4.1.3 *Los elementos de un subgrupo finito G tienen un punto fijo en común.*

Demostración. Sea n el orden de G y sea $g \in G$. Entonces $g^n(z) = z$, pero g es conjugado a m_k para algún k , así, $m_k^n(z) = z$ pero $m_k^n(z) = k^n z$ y tenemos que $\|k\| = 1$ lo que nos dice que g es elíptico. Entonces todos los elementos de G tienen un punto fijo en común. $\square$

Ahora veamos la clasificación de los subgrupos discretos elementales de $\mathcal{M}$.

Sea G un subgrupo discreto elemental y sea $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ una órbita finita de G . Dado $g \in G$ existen naturales $m_1, \dots, m_n$ tales que $g^{m_i}(z_i) = z_i$, si definimos $m = m_1 \cdots m_n$ tenemos que $g^m(z_i) = z_i$ para toda i .

Elementales del tipo 1. Supongamos que $n \geq 3$. Entonces para $g \in G$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $g^m(z_i) = z_i$, por lo tanto g^m tiene tres o más puntos fijos, entonces $g^m(z) = z$ para todo z y por lo tanto g es elíptico y existe un punto fijo en G . Podemos suponer (conjugando) que el punto fijo es 0 y que G fija la bola unitaria.

Lema 4.1.4 $G \subset \mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ es discreto si y sólo si $P_t = \{g \in G \mid \|g\| \leq t\}$ es un conjunto finito para toda $t \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que G es discreto. Basta probar que P_t es compacto. Como la métrica de G es la métrica usual de $\mathbb{C}^4$, basta ver que P_t es cerrado y acotado. Claramente P_t es acotado. Sea $\{g_n\}$ una sucesión en P_t que converge a g . La función determinante es una función continua, así que la sucesión $\{\det(g_n)\}$ converge a $\{\det(g)\}$. Sabemos que $\det(g_n) = 1$ por lo tanto $\det(g) = 1$. Ahora, $\|g_n\| \leq \varepsilon + \|g\|$ para todo ε y con esto tenemos que $g \in P_t$.

Ahora supongamos que P_t es un conjunto finito para toda t . Sea $g \in G$, consideramos $d(g, G \setminus \{g\}) = \inf \{d(g, h) \mid h \in G \setminus \{g\}\}$. Si probamos que $d(g, G \setminus \{g\}) > 0$ habremos terminado. Sea $t_0 \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $g \in P_{t_0}$. Si $h \in P_{t_0+n}$ pero h no está en P_{t_0} , entonces $d(g, h) \geq n$ por lo que nos interesarán los h contenidos en P_{t_0} . Como P_{t_0} es finito, esto implica que $d(g, P_{t_0}) > 0$ y con esto terminamos. $\square$

Ahora vamos a identificar a los grupos elementales del tipo 1.

Si $V = \{z \in \sum \mid z \text{ es punto fijo de algún } g \in G \setminus \{I\}\}$ y $E = \{(g, v) \mid g \in G \setminus \{I\}, v \in V \text{ y } g(v) = v\}$. Veamos a V como la unión disjunta de sus órbitas $V_1, \dots, V_t$ y sea n_j el orden del estabilizador $v \in V_j$ (para todos los $v \in V_j$ el orden del estabilizador es igual ya que todos están en la misma órbita). Tenemos por un lado que

$$|E| = 2(|G| - 1)$$

y por otro que

$$|E| = \sum_{j=1}^t |V_j| (n_j - 1).$$

Además, sabemos que $|V_j| = \frac{|G|}{n_j}$, entonces, igualando las ecuaciones tenemos

$$2 \left(1 - \frac{1}{|G|} \right) = \sum_{j=1}^t \left(1 - \frac{1}{n_j} \right).$$

Si $G \neq I$ tenemos que $|G| \geq 2$ y $n_j \geq 2$. Por lo tanto

$$1 \leq 2 \left(1 - \frac{1}{|G|} \right) < 2$$

y

$$\frac{1}{2}t \leq \sum_{j=1}^t \left(1 - \frac{1}{n_j} \right) < t$$

y tenemos que sólo es posible que $t = 2$ o $t = 3$. Si $t = 2$, entonces, $|G| = n_1 = n_2$ y $|V_1| = |V_2| = 1$ así, G tiene que ser un grupo cíclico finito de rotaciones de $\mathbb{C}$. Si $t = 3$, sin pérdida de generalidad, suponemos que $n_1 \leq n_2 \leq n_3$; entonces $n_1 = 2$ es el único caso posible y con esto $n_2 = 3$ y $n_3 = 3, 4, 5$ por lo que $|G| = 12, 24, 60$ respectivamente.

Elementales del tipo 2. Supongamos que $n = 1$ y $z_1 \in \Sigma$. Entonces, G es conjugado a un grupo en el que todos sus elementos fijan ∞ , es decir, G es conjugado a un grupo cuyos elementos son de la forma $az + b$. Si G no tuviera elementos parabólicos, entonces G fijaría también el cero, por lo tanto, G tiene al menos un elemento parabólico.

Teorema 4.1.5 Sean f y g en $\mathcal{M}$ con g loxodrómico. Supongamos que f y g tienen exactamente un punto en común. Entonces el grupo generado por f y g no es discreto.

Demostración. Supongamos que el punto fijo de f y g es ∞ (de no ser así, conjugamos). Entonces f y g tienen la forma $f(z) = az + b$,

$g(z) = \alpha z$ con $b \neq 0$ y $\|\alpha\| > 1$ (de no ser así, consideramos el inverso de g). Tenemos que $g^{-n}fg^n(z) = az + \alpha^{-n}b$ y así

$$\|g^{-n}fg^n\|^2 = \frac{\|a\|^2 + 1 + \|b\| \|\alpha^{-n}\|}{\|a\|} \rightarrow \frac{\|a\|^2 + 1}{\|a\|}$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Tenemos que $\|g^{-n}fg^n\|^2$ es acotada para toda n , pero el conjunto $\{g^{-n}fg^n | n \in \mathbb{N}\}$ no es finito, y por el lema (4.1.4) el grupo generado por f y g no puede ser discreto. $\square$

Entonces, G no tiene elementos loxodrómico, por lo tanto los elementos de G tienen la forma $g(z) = a_g z + b_g$ con $\|a_g\| = 1$.

Tenemos una función natural Θ que va de G a $\mathbb{S}^1$ definida por:

$$\begin{aligned} \Theta: G &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ g &\mapsto a_g \end{aligned}$$

La función Θ es un homomorfismo de grupos topológicos. Denotemos a su imagen por S y a su núcleo por N . Notemos que N son los elementos parabólicos de G además de la identidad.

Analicemos a S . Como G es discreto y S está en un compacto, entonces S es finito. Como todos los grupos finitos de $\mathbb{S}^1$ son cíclicos, S es cíclico.

Sea $a \in S$ y $a \neq 1$. Veamos que $\|a - 1\| \geq 1$. Sea $h_0(z) = z + b_0$ en G (existe ya que G tiene al menos un elemento parabólico) y supongamos que $\|a - 1\| < 1$. Como $a \in S$ existe $g \in G$ con $g(z) = az + b_g$. Sean $h_n = h_{n-1}^{-1}gh_{n-1}g^{-1}$ y $b_n = b_0(a - 1)^n$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces $h_n(z) = z + b_n$ y $\|b_n\| < \|b_{n-1}\|$. Sabemos que $h_n \in G$, que son distintos y $h_n \rightarrow I$ cuando $n \rightarrow \infty$ lo cual es una contradicción ya que G es discreto.

De forma similar se muestra que $\|a + 1\| \geq 1$.

Ahora mostraremos que $S = \{1, w, \dots, w^{q-1}\}$ para $q \leq 6$, $q \neq 5$ y $w = \exp(\frac{2\pi i}{q})$.

No puede ser que $q = 5$ ya que para $w^2 = \exp(\frac{4\pi i}{5})$ se tiene que $\|w^2 + 1\|^2 = 2 - 2\cos(\frac{4\pi}{5}) < 1$. De la misma forma q no puede ser mayor que seis ya que $0 < \frac{2\pi}{q} < \frac{\pi}{3}$ y con esto $\|w - 1\|^2 = 2 - 2\cos(\frac{2\pi}{q}) < 1$. Se puede verificar que los demás casos sí se satisfacen.

Ahora veamos como es N . Sea $B = \{b|z + b \in G\}$ y $B^* = B \setminus \{0\}$. Como G es discreto, B^* tiene un elemento de norma mínima que llamaremos λ . Ahora si $\{n\lambda|n \in \mathbb{Z}\} \subset B$ de manera propia, entonces $B^* \setminus \{n\lambda|n \in \mathbb{Z}\}$ tiene un elemento μ de norma mínima, con lo que tenemos $\|\lambda\| \leq \|\mu\|$.

Sea $A = \{f|f(z) = z + n\lambda + m\mu, n, m \in \mathbb{Z}\}$, veamos que $A = N$. Es claro que $A \subset N$. Sea $f \in N$, $f(z) = z + \gamma$. Por como escogimos a λ y a μ , éstos no pueden ser múltiplos, esto indica que λ y μ son generadores de $\mathbb{C}$. Por lo que $\gamma = (n + x)\lambda + (m + y)\mu$ con $-\frac{1}{2} \leq x, y < \frac{1}{2}$. $x\lambda + y\mu = \gamma - n\lambda - m\mu \in B$ y además $\|x\lambda + y\mu\| < \|\frac{\lambda}{2}\| + \|\frac{\mu}{2}\| \leq \|\mu\|$ por lo que $x\lambda + y\mu \in \{n\lambda|n \in \mathbb{Z}\}$ y con esto $\gamma = (n + n_1)\lambda + m\mu$, por lo que $f \in A$.

Y ya tenemos los grupos discretos del tipo 2, si w es un generador de S y $g \in G$, entonces g tiene la forma

$$g(z) = w^k + z + n\lambda + m\mu$$

con $n, m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq 6$ y $q \neq 5$.

Elementales del tipo 3. Supongamos que $n = 2$ y $z_1, z_2 \in \Sigma$. Entonces podemos suponer que todos los elementos de G dejan invariante $\{0, \infty\}$ (sin no es así, conjugamos) y tenemos que los elementos de G tienen la forma $g(z) = az^s$ con $s \in \{1, -1\}$.

Supongamos que G fija puntualmente $\{0, \infty\}$. Los elementos de G son de la forma $g(z) = a_g z$, $a_g \neq 0$ por lo que G es abeliano. consideremos el siguiente homomorfismo de grupos (pensando en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ como un grupo con la operación producto)

$$\begin{aligned} \Theta: \quad G &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ g &\mapsto \|a_g\| \end{aligned}$$

El kernel $N = \ker(\Theta)$ consta de los elementos elípticos de G . Además, N es cíclico finito ya que está en biyección con un subgrupo sin puntos de acumulación de $\mathbb{S}^1$. La imagen de Θ no se acumula en 1. Si la imagen es 1 entonces es cíclico infinito. Supongamos que la imagen no sólo es el 1, entonces $\Theta(G) = \{\lambda^n|n \in \mathbb{N}\}$ para algún entero positivo λ . De lo que tenemos una sucesión exacta

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow \mathbf{Im}(\Theta) \rightarrow 1$$

como $\mathbf{Im}(\Theta)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$ que es un módulo proyectivo sobre $\mathbb{Z}$ entonces la sucesión se escinde por lo que G es isomorfo a $N \oplus \mathbf{Im}(\Theta)$.

Supongamos que G preserva $\{0, \infty\}$. Sea $G_0 = \{g \in G | g \text{ fija } \{0, \infty\}\}$. G_0 tiene la forma descrita anteriormente, nos interesa el caso en que G_0 esté contenido en G de manera propia. Supongamos que existe un elemento h que intercambia el 0 con el ∞ , podemos suponer que ese elemento fija al 1 (de no ser así, conjugamos). Tal h tiene la forma $h(z) = \frac{1}{z}$. Si $f \in G$ intercambia al 0 con el ∞ , entonces $h \circ f \in G_0$, debido a esto tenemos que G_0 es un subgrupo de índice dos en G .

Definición 4.1.6 *Un grupo Kleiniano es Fuchsiano si deja invariante un disco circular.*

Si G es un grupo Fuchsiano, entonces el conjunto de puntos límites Λ está forzosamente contenido en la frontera del disco abierto D , donde G actúa, es importante saber si ésta contención es propia o no, así que diremos que G es del *Tipo I* si $\Lambda = \partial D$ y G será del *Tipo II* si $\Lambda \subsetneq \partial D$.

Sea P un polígono fundamental para un grupo Fuchsiano G con D su disco invariante. $\overline{P} \cap \partial D$ tiene sólo un número finito de componentes de longitud euclidiana positiva, a éstos los llamaremos *lados libres*. Sea v en $\overline{P} \cap \partial D$, v es un *vértice propio* si es el punto final de dos lados de P ; v es un *vértice impropio* o *vértice al infinito* si es el punto final de un lado y de un lado libre de P .

Si G es un grupo Fuchsiano y D su disco invariante, entonces la frontera de D se ve como la unión disjunta de Λ con una unión numerable de arcos mutuamente disjuntos. Es decir

$$\partial D = \Lambda \sqcup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma_i \right).$$

Sea L_i la geodésica que tiene los mismos puntos finales que σ_i y sea H_i el semiplano que es acotado por L_i y que no contiene a σ_i . La colección $\{\sigma_i | i \in \mathbb{N}\}$ es invariante bajo G ya que Λ y ∂D lo son, por lo tanto $\{H_i | i \in \mathbb{N}\}$ es invariante bajo G . Así, para grupos cuyos conjunto límite Λ tiene cardinalidad mayor que dos definimos la *región de Nielsen* N de G como:

- $N = D$ si G es del tipo I.
- $N = \bigcap H_i$ con $i \in \mathbb{N}$ si G es del tipo II.

Teorema 4.1.7 *Sea G un grupo Fuchsiano no elemental con región de Nielsen N , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. G es finitamente generado.
2. Para todo polígono fundamental convexo P de G , el h -área de $P \cap N$ es finita.
3. Existe un polígono fundamental de G con un número finito de lados.
4. Todo polígono fundamental de G tiene un número finito de lados.

Demostración. $(4 \Rightarrow 3)$ es inmediato. $(4 \Rightarrow 1)$ y $(3 \Rightarrow 1)$ ya los hemos hecho.

$(3 \Rightarrow 2)$ Si P no tiene lados libres, es inmediato. Cada lado libre T_i determina un semiplano H_j que contiene a N y como hay un número finito de éstos, $P \cap N \subset (P \cap H_1 \cap \cdots \cap H_m)$ y además $P \cap H_1 \cap \cdots \cap H_m$ tiene área finita.

$(2 \Rightarrow 1)$ Sea $Q = P \cap N$, $\overline{Q}$ tiene todos o ningún elemento de un ciclo de ∂P . Supongamos que $\overline{Q}$ contiene los ciclos $C_1, \dots, C_t$ de vértices en $\Delta \cap \partial P$ y también contiene los puntos $w_1, \dots, w_n$ en $\partial \Delta$. Sea l_i la longitud del ciclo C_i y q_i su orden. Sea Q_0 el polígono cuyo conjunto de vértices es $\{C_1, \dots, C_t, w_1, \dots, w_n\}$. Q_0 y Q son convexos por lo que $Q_0 \subset Q$ así que la suma de los ángulos interiores de Q_0 es menor o igual que la suma de los ángulos interiores respectivos en Q , por lo que el h -área(Q) $\geq$ h -área(Q_0) y con esto

$$h\text{-área}(Q_0) = (l_1 + \cdots + l_t + n - 2)\pi - (\theta_{11} + \cdots + \theta_{1l_1} + \cdots + \theta_{tl_t} + \theta_1 + \cdots + \theta_n).$$

Así

$$h\text{-área}(Q_0) = (l_1 + \cdots + l_t + n - 2)\pi - \left(\frac{2\pi}{q_1} + \cdots + \frac{2\pi}{q_t} + \theta_1 + \cdots + \theta_n \right).$$

Como $\theta_i = 0$ ya que w_i es un vértice propio, entonces

$$h\text{-área}(Q) \geq h\text{-área}(Q_0) = (n - 2)\pi + \pi \sum_{i=1}^t \left(l_i - \frac{2}{q_i} \right).$$

Los puntos fijos de elementos elípticos que son vértices tiene que ser de orden mayor o igual a tres. Entonces $l_i q_i \geq 3$ por lo que $l_i - \frac{2}{q_i} \geq \frac{l_i}{3}$ y así obtenemos $h\text{-área}(Q) \geq (n-2)\pi + \pi 3(\frac{t}{3})$ por lo que tenemos que sólo un número finito de ciclos están contenidos en $\bar{Q}$ y sólo un número finito de lados intersectan a $\bar{Q}$. Como ya se vio, los g_s tales que s intersecta a $\bar{Q}$ generan a G .

(1 $\Rightarrow$ 3) Sea D el polígono de Dirichlet centrado en el origen. Vamos a ver a D como $K \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$ para K un compacto de Δ y D_i abiertos y conexos con la propiedad que su cerradura intersecta a sólo un número finito de lados de D . Al hacer esto habremos terminado porque como K es compacto, no contiene puntos límites y entonces no puede contener una cantidad infinita de lados de D .

Sabemos que G es finitamente generado, digamos por $f_1, \dots, f_m$. Sabemos también que los elementos g_s de G apareados por los lados de D generan a G por lo que los f_i son productos finitos de los g_s . Sean $g_1, \dots, g_t$ los g_s que son factores de los f_i , es un número finito ya hay un número finito de f_i 's. Sea $0 < r < 1$ tal que el disco $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| \leq r\}$ contiene un número finito de arcos (de longitud positiva) de cada uno de los lados de D apareados por $g_i, \dots, g_t$ y ∂B no contiene vértices de D . Sea $K = \bar{D} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < r\}$ y $G(K) = \cup g(K)$ donde la unión se toma sobre todas las $g \in G$.

$G(K)$ es conexo: K es conexo y por lo tanto también lo es $g(K)$. Como $K \cap g_i(K) \neq \emptyset$ entonces $K \cup g_i(K)$ es conexo. De la misma forma $K \cup g_{i_1}(K) \cup (g_{i_1}g_{i_2})(K) \cup \dots \cup (g_{i_1}g_{i_2} \dots g_{i_l})(K)$ es conexo para $g_{i_j} \in \{g_1, \dots, g_t\}$. Como éstos g_i generan, tenemos la conexidad de $G(K)$.

Observe que $\bar{D} \cap \partial B = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_n$ con los σ_i arcos conexos disjuntos dos a dos que viven en D salvo sus puntos finales.

Si z es un punto final de σ_i y $w = g(z)$ para algún $g \in G$ y $w \in \partial D$, entonces $\rho(w, 0) = \rho(z, 0)$ y por lo tanto $w \in \partial B$. Así, los puntos finales de los σ_i son apareados por las funciones de apareamiento. Entonces cada punto final de σ_j viene (bajo una función h) de un punto final de un σ_i con h y σ_i únicos. Con esto, cada σ_j vive en un arco simple Γ_j formado por imágenes de todos los σ_i . La colección de Γ_i es invariante bajo G . Para cada j existe un elemento no trivial h_j de G tal que $h_j(\Gamma_j) = \Gamma_j$. La función h_j se construye como sigue: si z_1 es punto final de σ_j , entonces existe una función f_1 que lo manda a un punto final de

otro σ_i y existe una función f_2 que manda este punto a otro, cuando este proceso termina (regresando a z_1) tenemos las funciones $f_1, \dots, f_n$ y hacemos $h_j = f_1 \circ \dots \circ f_n$.

Sea D_j la unión de σ_j con la componente de $D \setminus \sigma_j$ que no contiene al origen.

Veamos que Γ_j separa a D_j y a $G(K)$ en Δ . Como $G(K)$ también es conexo y contiene al cero, basta probar que $G(K) \cap \Gamma_j = \emptyset$. Supongamos que $G(K) \cap \Gamma_j \neq \emptyset$ entonces existe un σ_i y una función f_i tales que $f_i(\sigma_i) \subset \Gamma_j$ y $G(K) \cap f_i(\sigma_i) \neq \emptyset$ que es una contradicción ya que $K \cap \sigma_i = \emptyset$.

Ahora veamos que los D_j intersectan a un número finito de lados de D .

- Si h_j es elíptico, entonces Γ_j es una curva de Jordan, por lo tanto existe una componente conexa de $\Delta \setminus \Gamma_j$ tiene cerradura compacta en Δ . Si ésta componente es D_j entonces sólo un número finito de lados de D intersectan a D_j . Si la componente compacta no contiene a D_j , entonces ésta contiene a $G(K)$ con lo que concluimos que G tiene que ser finito.
- Si h_j es parabólico, entonces Γ_j es una curva de Jordan en Δ salvo sus puntos finales. En este caso, $\overline{D_j} \cap \partial\Delta$ consiste de un sólo punto, el punto fijo de h_j que es un vértice propio de D con lo que concluimos que sólo un número finito de lados de D intersectan a D_j .
- Si h_j es hiperbólico, entonces Γ_j tiene como puntos finales los puntos fijos de h_j y separa a Δ en dos componentes, una que contiene a $G(K)$ y la otra a D_j . La cerradura de la componente que contiene a $G(K)$ contiene a todos los puntos límites de G y por lo tanto $\overline{D_j} \cap \partial\Delta$ consiste de puntos ordinarios.

3 $\Rightarrow$ 4 Veá [1] páginas 132 a 138.

□

4.2. Teorema de combinación

En esta sección todos los grupos son subgrupos de un grupo universal $\mathbb{G}$ que será el grupo de homeomorfismos de algún espacio $\mathbb{X}$ en sí mismo. Regularmente pensaremos en $\mathbb{X}$ como $\widehat{\mathbb{C}}$ y en $\mathbb{G}$ como $\mathcal{M}$. También el índice m tomará los valores $\{1, 2\}$.

A lo largo de esta sección tendremos la hipótesis de que tenemos dos grupos G_1 y G_2 con un subgrupo común J . Supondremos que $[G_m : J] > 1$.

Definición 4.2.1 *Un par interactivo de conjuntos (X_1, X_2) consiste de dos conjuntos no vacíos disjuntos X_1 y X_2 donde X_m es invariante bajo J , cada elemento de $G_1 \setminus J$ manda X_1 en X_2 y cada elemento de $G_2 \setminus J$ manda X_2 en X_1 .*

Teorema 4.2.2 *Si G actúa libre y discontinuamente en algún subconjunto no vacío de $\mathbb{X}$ y $G = G_1 *_J G_2$ entonces existe un par interactivo.*

Demostración. Sea D un conjunto fundamental para la acción de G en $\Omega^0(G) \subset \mathbb{X}$. Sea $X_1 = \bigcup g(D)$, donde la unión se toma sobre todas las 2-formas y sea $X_2 = \bigcup g(D)$ donde la unión se toma sobre todas las 1-formas. Los conjuntos X_1 y X_2 son no vacíos y J -invariantes.

Supongamos que existe un punto $x \in X_1 \cap X_2$. Entonces existen puntos y_1 y y_2 en D y existe una 1-forma h_1 tal que $x = h_1(y_1)$ y existe una 2-forma h_2 tal que $x = h_2(y_2)$. Como y_1 y y_2 son G -equivalentes en D , $y_1 = y_2 = y$. Pongamos $h_1 = g_n \circ \dots \circ g_1$ y $h_2 = f_n \circ \dots \circ f_1$. Entonces como $h_1^{-1} \circ h_2(y) = y$

$$1 = h_1^{-1} \circ h_2 = g_1^{-1} \circ \dots \circ g_n^{-1} \circ f_n \circ \dots \circ f_1.$$

Como $g_n \in G_1 \setminus J$ y $f_k \in G_2 \setminus J$, la expresión anterior es una forma normal por lo que no es la identidad en G . Con esto hemos mostrado que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

Si x es un punto de X_2 entonces existe un punto $y \in D$ y una 1-forma $h_1 = g_n \circ \dots \circ g_1$ tal que $x = h_1(y)$. Si h_2 es cualquier elemento de $G_2 \setminus J$, $h_2(x) = h_2 \circ g_n \circ \dots \circ g_1(y)$; como $h_2 \circ g_n \circ \dots \circ g_1$ es una 2-forma, $h_2(x) \in X_1$. De forma similar se prueba que si $x \in X_1$ y $h_1 \in G_1 \setminus J$ entonces $h_1(x) \in X_2$. $\square$

Definición 4.2.3 *Una forma normal $g_n \dots g_1$ es una (m, k) -forma si $g_n \in G_m \setminus J$ y $g_1 \in G_k \setminus J$.*

Definición 4.2.4 *Un par interactivo (X_1, X_2) es propio si existe un punto en X_1 que no es G -equivalente a ningún punto de X_2 o existe un punto en X_2 que no es G_1 -equivalente a ningún punto de X_1 .*

Definición 4.2.5 *Un subconjunto $T \subset \Omega$ abierto, conexo y no vacío que es precisamente invariante bajo su estabilizador, es llamado un (J, G) -panel, donde $J = \text{Stab}(T)$.*

Definición 4.2.6 *Sea G un grupo Kleiniano y sea J un subgrupo de G de rango 1. J o el punto fijo x de J es cuspidal si existe un disco circular abierto $B \subset \widehat{\mathbb{C}}$ que es un (J, G) -panel.*

De forma similar, J o x es doblemente cuspidal si existen dos discos circulares disjuntos B_1 y B_2 tales que $B_1 \cup B_2$ es precisamente invariante bajo J en G . En este caso $B = B_1 \cup B_2$ se llama una región doblemente cuspidal.

Definición 4.2.7 *Si B es una región cuspidal para x entonces existe un elemento $h \in \mathcal{M}$ con $h(x) = \infty$ tal que $z \rightarrow z + 1$ genera el subgrupo parabólico de hJh^{-1} . Escogemos $E = \{z \in \Sigma \mid |\text{Re}(z)| < 1/2\}$ como un dominio fundamental para hJh^{-1} y sea $C = h^{-1}(E) \cap B$. C es una cúspide para J o para x .*

Definición 4.2.8 *Un grupo Kleiniano G es geoméricamente finito si existe un polígono fundamental para G con un número finito de lados.*

Definición 4.2.9 *Un conjunto fundamental es un subconjunto de Ω° que contiene exactamente un punto de cada clase de equivalencia en Ω° . Un conjunto fundamental para G cuyo interior es un dominio fundamental se llama un conjunto fundamental restringido.*

Definición 4.2.10 *Sea b una componente acotada de una superficie de Riemann topológicamente finita (disconexa) S . Si existe una vecindad de b conformemente equivalente al disco agujereado decimos que b corresponde a un pinchazo en S o decimos que S está pinchado en b .*

Definición 4.2.11 *Sea $G \subset \mathcal{M}$. Un conjunto J -invariante B cerrado, con J geoméricamente finito, es un (J, G) -bloque si satisface*

- (i) $B \cap \Omega(G) = B \cap \Omega(J)$ y $B \cap \Omega(J)$ es precisamente invariante bajo J en G .

- (II) Existe un conjunto fundamental restringido E para J que contiene un conjunto fundamental D para G , existen una cantidad finita de cúspides $C_1, \dots, C_n$ disjuntos en puntos fijos de elementos parabólicos de J donde cada $C_j \subset E$ y $C_j \cap B = \emptyset$ y existe una vecindad U de B tal que $(E \setminus D) \cap U \subset C_1, \dots, C_n$.
- (III) Para cada pinchazo en $\Omega(J)/J$ existe una vecindad U del punto tal que U esta contenida en la proyección de B o U es disjunto de la proyección de B .

Definición 4.2.12 Un bloque es fuerte si para cada punto fijo x de un elemento parabólico de rango 1 de J , $\text{Stab}_G(x)$ tiene rango 2 o x es doblemente cuspidal en G .

Definición 4.2.13 Dado el conjunto precisamente invariante X_m , un conjunto fundamental D_m para G_m es máximo con respecto a X_m si $D_m \cap X_m$ es un conjunto fundamental para la acción de J en X_m .

Definición 4.2.14 Si $B \in \widehat{\mathbb{C}}$ es J -invariante y $C \subset \mathbb{H}^3$ es J -invariante, con $\bar{\partial}C = B$, entonces decimos que C expande B si cumple lo siguiente: para cada punto fijo de un elemento parabólico de rango 1 en B existe una región doblemente cuspidal $A \cup A'$ tal que C no intersecta a ninguno de los dos semiespacios cuyas fronteras son A y A' respectivamente.

Definición 4.2.15 Sea B tanto un (J, G) -bloque fuerte como una curva cerrada simple. Entonces B divide a $\widehat{\mathbb{C}}$ en dos discos topológicos abiertos. Decimos que B es precisamente encajado si para cada $g \in G \setminus J$, $g(B)$ no intersecta ninguno de éstos dos discos.

Definición 4.2.16 Sea $\{W_m\}$ una colección de curvas cerradas simples. Decimos que las curvas $\{W_m\}$ se anidan alrededor del punto x si cada W_m separa a x de W_{m-1} y si z_m es cualquier punto de W_m , entonces $z_m \rightarrow x$.

Teorema 4.2.17 (Teorema de Combinación de Maskit) Sea J un subgrupo geoméricamente finito de los grupos discretos G_1 y G_2 con $G_1 \neq J \neq G_2$. Supongamos que existe una curva cerrada simple W que divide a $\widehat{\mathbb{C}}$ en dos discos topológicos cerrados B_1 y B_2 donde B_m es un (J, G_m) -bloque y (B_1°, B_2°) es un par interactivo propio. Sea D_m un conjunto fundamental para G_m donde D_m es máximo con respecto a B_m , $D_m \cap B_{3-m}$ es vacío o tiene interior no vacío y $D_1 \cap W = D_2 \cap W$. Sea $D = (D_1 \cap B_2) \cup (D_2 \cap B_1)$ y sea $G = \langle G_1, G_2 \rangle$. Entonces se cumple lo siguiente:

- (I) $G = G_1 *_J G_2$.
- (II) G es discreto.
- (III) Si W es precisamente invariante bajo J en G_1 o G_2 entonces, excepto quizá por elementos conjugados de G_1 y G_2 , cada elemento de G es loxodrómico.
- (IV) W es un (J, G) -bloque precisamente encajado y si B_1 y B_2 son fuertes, entonces W es fuerte.
- (V) Si $\{W_n\}$ es una sucesión de traslados distintos de W bajo G , entonces $\text{dia}(W_n) \rightarrow 0$.
- (VI) Existe una sucesión de G -traslados de W distintos anidados alrededor del punto x si y sólo si x es un punto límite de G que no es G -equivalente a un punto límite de G_1 o G_2 .
- (VII) D es un conjunto fundamental para G . Si D_1 y D_2 son restringidos, W intersecta a ∂D_m en un número finito de puntos y existe un conjunto fundamental restringido E de J que contiene a D_1 y D_2 tal que excepto por algunas cúspides, $E \setminus D_m$ está acotado fuera de W , entonces D es restringido.
- (VIII) Sea Q_m la unión de los G_m -traslados de B_m° y sea R_m el complemento de Q_m . Entonces $\Omega(G)/G = (R_1 \cap \Omega(G_1))/G_1 \cup (R_2 \cap \Omega(G_2))/G_2$ donde éstas dos superficies posiblemente desconexas son identificadas a lo largo de su frontera común (posiblemente desconexa o vacía) $(W \cap \Omega(J))/J$.
- (IX) Supongamos que W es fuerte. Sea C un disco topológico precisamente invariante en $\mathbb{H}^3$ que genera W tal que C divide $\mathbb{H}^3$ en dos conjuntos cerrados B_1^3 y B_2^3 donde B_m^3 es precisamente invariante bajo J en G_m . $\mathbb{H}^3/G$ puede describirse como sigue: Es la unión de $\mathbb{H}^3/G_1$, donde la imagen de B_1^3/J ha sido borrada y $\mathbb{H}^3/G_2$ donde la imagen de B_2^3/J ha sido borrada y las dos 3-variedades son unidas a lo largo de su frontera común C/J .
- (X) Si B_1 y B_2 son fuertes, entonces excepto quizá por traslados de puntos límites de G_1 o G_2 , cada punto límite de G es un punto de aproximación.

(XI) G es geométricamente finito si y sólo si G_1 y G_2 son geométricamente finitos.

Demostración. Vea [8]. $\square$

Existen otras versiones de este teorema. Por ejemplo:

Teorema 4.2.18 (Combinación de Klein) Sean $\{G_i\}$ con G_i subgrupos de las transformaciones de Möbius y dominios fundamentales F_i que satisfacen:

1. $\text{ext}(F_i \subset F_j)$ para toda $i \neq j$.
2. $F = \text{int}(\cap F_i) \neq \emptyset$.

Entonces el grupo $G = \langle G_i \rangle$, generado por la unión de los grupos G_i , es discontinuo y es el producto libre de los G_i donde F es un dominio fundamental para G .

Demostración. Vea [1]. $\square$

4.3. Teorema de Ahlfors

El siguiente teorema es fundamental para la teoría de grupos de Möbius discontinuos actuando en $\mathbb{C}$.

Teorema 4.3.1 (Teorema de Ahlfors) Sea G un subgrupo discreto no elemental finitamente generado de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ actuando libremente y discontinuamente en $\Omega(G)$. Entonces el espacio cociente $\Omega(G)/G$ consiste de un número finito de superficies Riemannianas $S_1, \dots, S_n$ cada una con área hiperbólica finita. En particular, el grupo $\pi_1(S_i)$ es finitamente generado ($i = 1, \dots, n$).

Si cambiamos a una dimensión mayor, el resultado anterior ya no es válido como se verá en el siguiente teorema.

Teorema 4.3.2 Existe un grupo finitamente generado libre de torsión $F \subset \text{Mob}(\mathbb{R}^3)$, con una componente invariante $\Omega \subset \Omega(F)$, tal que el grupo $\pi_1(\Omega/F)$ no es finitamente generado.

Para la demostración de este teorema se construirá el grupo F y se demostrará que cumple con las propiedades pedidas. Esto será a lo largo de 5 lemas. En esta sección $D(G)$ denotará la región de Ford para el grupo G . Esta región se construye de forma similar a 3.2.26 pero en este caso se toman esferas en lugar de círculos.

Sea M el complemento en $\mathbb{H}^3$ de los anillos Borromeanos. M es una variedad abierta que admite una estructura hiperbólica de volumen finito, es decir, $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$, $\Gamma \subset \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^3)$ (ver [13]). Γ está generado por

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad g_4 = \begin{pmatrix} 2+i & 2i \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

con presentación $\Gamma = \langle g_1, g_2, g_3, g_4 \mid g_1g_2 = g_2g_1, g_4g_3^{-1}g_4 = g_3g_1, g_4(g_2^{-1}g_3g_2)g_4^{-1} = g_2^{-1}g_3g_1g_2 \rangle$.

Definición 4.3.3 *Un grupo K con un subgrupo S es llamado S -residualmente finito (S -RF) si para cualquier elemento $k \in K \setminus S$ existe un subgrupo de índice finito $K_1 \subset K$ que contiene a S y no contiene a $\{k\}$.*

Lema 4.3.4 *El grupo Γ es S -residualmente finito para cualquier subgrupo geoméricamente finito S de Γ .*

Demostración. Ver [7]. $\square$

Consideremos un espacio hiperbólico que es el exterior B de la 3-esfera unitaria Σ_1 centrada en el origen. Sean H_i subgrupos parabólicos máximos no conjugados de Γ y $\Lambda(H_i) = \{p_i\}$ ($i = 1, 2$). Supondremos que los puntos p_1 y p_2 tienen como coordenadas $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ respectivamente. Sea Π_i el plano euclidiano extendido tangente a Σ_1 en los puntos p_i y sea Π_i^- la componente de $\mathbb{R}^3 \setminus \Pi_i$ tal que $\Pi_i^- \cap \Sigma_1 = \emptyset$ ($i = 1, 2$). Sea τ_j la reflexión en el plano euclidiano extendido Π_j ($j = 1, 2$).

Sea W_i una esfera tangente a Σ_1 en el punto p_i tal que

1. $W_i \subset \mathbf{cl}(B)$
2. la bola $\mathbf{cl}(\mathbf{int}(W_i))$ contiene a Σ_1 .

Sea $V_i = \mathbf{ext}(W_i)$ ($i = 1, 2$).

Lema 4.3.5 *Existe un subgrupo de índice finito $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$, tal que se cumplen las siguientes condiciones.*

- (a) El grupo $\tilde{\Gamma}$ tiene un subgrupo finitamente generado $\tilde{F}$ tal que $\tilde{\Gamma} = \langle \tilde{F}, t \rangle$, para algún $t \in H_2 \cap \tilde{\Gamma}$.
- (b) El grupo $\tilde{\Gamma}$ tiene un conjunto fundamental $\mathcal{P}$ tal que $\mathcal{P} \cap V_i$ es un dominio fundamental para la acción del grupo $\tilde{H}_i = H_i \cap \tilde{\Gamma}$ en V_i ($i = 1, 2$).

Demostración. Existe un número finito de $h_k \in H_i$ tales que $I(h_k) \cap (\Pi_j \cup (\mathbb{R}^3 \setminus D(H_j))) \neq \emptyset$ ($j \neq i; i, j \in \{1, 2\}, 0 \leq k < \infty$): Supongamos que existen una infinidad de h_k tales que $I(h_k) \cap \Pi_j \neq \emptyset$, sea α_k el centro de $I(h_k)$, como $\text{diam}(I(h_k)) \rightarrow 0$, entonces $d(\Pi_j, \alpha_k) \rightarrow 0$ pero

$$\begin{aligned} h_1(\alpha_1) &= h^{m_1}(\alpha_1) \\ h_2(\alpha_1) &= h^{m_2}(\alpha_1) \\ &\vdots \\ h_n(\alpha_1) &= h^{m_n}(\alpha_1) \end{aligned}$$

con $H_i = \langle h \rangle$ y por el teorema (3.2.12) $h(\alpha_1) \rightarrow P_i$ lo cual es una contradicción. Ahora supongamos que existe una infinidad de h_k tales que $I(h_k) \cap (\mathbb{R}^3 \setminus D(H_j)) \neq \emptyset$, sean α_k y β_l los centros de $I(h_k)$ y $I(h_l)$ respectivamente con $h_k \in H_i$ y $h_l \in H_j$, entonces $d(\alpha_k, \beta_l) \rightarrow 0$ pero $h_k(\alpha_1) \rightarrow P_i$ y $h_l(\beta_1) \rightarrow P_j$ y encontramos una contradicción ya que $\alpha_k = h^{m_k}$ y $\beta_l = h'^{m_l}$ donde $\langle h \rangle = H_i$ y $\langle h' \rangle = H_j$. Ya que tenemos una cantidad finita de estas h_k , podemos escoger un subgrupo de índice finito $\hat{\Gamma} \subset \Gamma$ tal que h_k no esté en $\hat{\Gamma}$. Sea $\hat{H}_i = H_i \cap \hat{\Gamma}$ ($i = 1, 2$).

Ahora veamos que se cumple la primera condición. La variedad M fibra sobre el círculo [4] con fibra R una superficie compacta, sea $\Phi = \pi_1(R)$ y tenemos la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \rightarrow & \Gamma \\ & & \downarrow \\ & & \Gamma/\Phi \simeq \mathbb{Z} \end{array}$$

Φ es un subgrupo normal finitamente generado de Γ .

Sea $\hat{\Phi} = \Phi \cap \hat{\Gamma}$, $\hat{\Phi}$ es un subgrupo normal de $\hat{\Gamma}$. Existe un $l \in \hat{\Gamma}$ tal que $\hat{\Gamma} = \langle \hat{\Phi}, l \rangle$. Sea $t \in \hat{H}_2 \setminus \hat{\Phi}$ entonces $t = \alpha \cdot l^n$, para algún $\alpha \in \hat{\Phi}$. Sea $\Gamma^0 = \langle \hat{\Phi}, l^n \rangle = \langle \hat{\Phi}, t \rangle$. Como $|\Gamma : \Gamma^0| = |\Gamma : \hat{\Gamma}| |\hat{\Gamma} : \Gamma^0|$ entonces $|\Gamma : \Gamma^0| < \infty$.

Comprobemos la segunda condición. Sea $\tilde{H}_i = \hat{H}_i \cap \Gamma^0$. Ya hemos probado que $\text{cl}(\mathbb{R}^3 \setminus D(\hat{H}_i)) \subset D(\hat{H}_j)$, para $i \neq j$; entonces, aplicando el teorema de combinación de Klein, el conjunto $D(\tilde{H}_1) \cap D(\tilde{H}_2)$ es un dominio fundamental

del grupo $\tilde{H} = \langle \tilde{H}_1, \tilde{H}_2 \rangle = \tilde{H}_1 * \tilde{H}_2$. Entonces el conjunto $R = D(\tilde{H}_1) \cap D(\tilde{H}_2) \cap \mathbf{cl}(V_1 \cup V_2)$ no tiene puntos equivalentes en la acción de $\tilde{H}$. La cerradura del conjunto $T = R \cap (W_1 \cup W_2)$ es un compacto en B , entonces existe a lo más un número finito de elementos $g_k \in \Gamma^0$ tales que $g_k(T) \cap T \neq \emptyset$ ($k = 1, \dots, m$). El grupo $\tilde{H}$ es geoméricamente finito ya que tanto $\tilde{H}_1$ como $\tilde{H}_2$ lo son; entonces, por el lema anterior, Γ^0 es $\tilde{H}$ -residualmente finito. Entonces existe un subgrupo $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma^0$ tal que $|\Gamma^0 : \tilde{\Gamma}| < \infty$, $\tilde{H} \subset \tilde{\Gamma}$ y g_k no esta en $\tilde{\Gamma}$, $k = 1, \dots, m$. Entonces si $g \in \tilde{\Gamma}$ tenemos $g(R) \cap R = \emptyset$. El grupo $\tilde{\Gamma}$ también satisface la primera condición, entonces R es un conjunto fundamental para la acción de $\tilde{\Gamma}$ en la órbita $\tilde{\Gamma}(V_1 \cup V_2)$.

Escogemos un conjunto fundamental A para la acción de $\tilde{\Gamma}$ en $B \subset \tilde{\Gamma}(\mathbf{cl}(V_1 \cup V_2))$. Entonces $A \cup R = \mathcal{P}$ es un conjunto fundamental para la acción del grupo $\tilde{\Gamma}$ en B . Para este conjunto fundamental se cumple la segunda condición. Hacemos $\tilde{F} = \tilde{\Gamma} \cap \Phi$. $\square$

Sean $\Gamma_1 = \tilde{\Gamma}$, $\Gamma_2 = \tau_1 \Gamma_1 \tau_1$, $G_1 = \langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$, $G_2 = \tau_2 G_1 \tau_2$, $G = \langle G_1, G_2 \rangle$.

Lema 4.3.6 *El grupo G_1 actúa de forma discontinua y contiene un subgrupo finitamente generado F_1 tal que $G_1/F_1 \simeq \mathbb{Z}$ y $G_1 = \langle F_1, t \rangle$, donde t es el elemento definido en el lema anterior.*

Demostración. Sea $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}$ donde $\mathcal{P}$ es el conjunto fundamental del grupo $\tilde{\Gamma} = \Gamma_1$ construido en el lema anterior. El grupo $\tilde{H}_1 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ deja el plano Π_1 invariante ya que es parabólico con punto límite $p_1 = (0, 1, 0)$. El conjunto $\mathbf{cl}(\Pi_1^-)$ es precisamente invariante bajo $\tilde{H}_1$ en el grupo Γ_1 porque $\tilde{H}_1$ es parabólico máximo y porque $\mathcal{P}$ es un conjunto fundamental de Γ_1 con $\mathcal{P} \cap V_i$ dominio fundamental para la acción de $\tilde{H}_i$ en V_i . De forma análoga se ve que $\tau_1 \mathbf{cl}(\Pi_1^-)$ es precisamente invariante bajo el subgrupo $\tilde{H}_1$ de Γ_2 . Entonces, aplicando el teorema de combinación de Maskit tenemos que el grupo G_1 actúa de forma discontinua, es isomorfo a $\Gamma_1 *_{\tilde{H}_1} \Gamma_2$ y tiene a $R_1 = \mathcal{P}_1 \cap \tau_1(\mathcal{P}_1)$ como conjunto fundamental. El grupo G_1 actúa en la componente invariante Ω_1 ($\infty \in \Omega_1$).

Proposición 4.3.7 *La variedad $M(G_1) = \Omega_1/G_1$ es homeomorfa al interior de una superficie fibrada sobre S^1 y $\pi_1(\Omega_1) = 1$.*

Demostración. El teorema de Maskit nos dice que podemos descomponer a $M(G_1)$ como el pegado de M_1 y M_2 donde $M_1 = M(\Gamma_1) \setminus (\Pi_1^-/\tilde{H}_1)$, $M_2 = M(\Gamma_2) \setminus (\tau_1 \Pi_1^-/\tilde{H}_1)$. Como $\tilde{H}_1$ es parabólico, el cociente en el plano Π_1 da

toros, entonces $\Pi_1^-/\tilde{H}_1 = \tau_1\Pi_1^-/\tilde{H}_1 = S^1 \times S^1 \times (0, 1)$. Como cada parte fibra sobre el subgrupo $\tilde{F}$, entonces, cada variedad M_i es homeomorfa a una superficie cuya fibra corresponde al subgrupo $\tilde{F} \subset \tilde{\Gamma}$. El homeomorfismo que pega la frontera de ∂M_1 con ∂M_2 preserva la estructura de la fibración ya que en ambas partes fibra. Por el teorema de van Kampen, tenemos el isomorfismo $\pi_1(M(G_1)) \simeq \Gamma_1 *_{\tilde{H}_1} \Gamma_2 \simeq G_1$. El grupo G_1 es un grupo Hopfiano, es decir, todo morfismo suprayectivo es un isomorfismo. Con todo esto concluimos que $\pi_1(\Omega_1) = 1$. Con lo que concluimos la demostración de la proposición.

Entonces el subgrupo F_1 de G_1 que corresponde a la fibra de $M(G_1)$ es un subgrupo normal y $G_1/F_1 \simeq \mathbb{Z}$. Procediendo igual que en el lema (4.3.5), obtenemos que $G_1 = \langle F_1, t \rangle$ donde $t \in \tilde{H}_2$. Gracias a que $\tilde{H}$ es finitamente generado y que los subgrupos $\tilde{H}_i$ son máximos, cada superficie $M(\Gamma_i)$ se puede compactificar agregándole un toro en cada cúspide, y también se puede hacer con $M(G_1)$. Así el grupo F_1 es finitamente generado. $\square$

De forma análoga pueden ser verificadas estas mismas propiedades para el grupo G_2 .

Hagamos $F = \langle F_1, F_2 \rangle$, donde $F_2 = \tau_2 F_1 \tau_2$; $\tilde{H}_3 = \tau_1 \tilde{H}_2 \tau_1$ y $J = \langle \tilde{H}_2, \tilde{H}_3 \rangle$.

Lema 4.3.8 (a) *El grupo G es la combinación de los grupos G_1 y G_2 a lo largo del subgrupo J .*

(b) *El grupo G es discontinuo y tiene una componente invariante Ω (que será la que contenga a ∞).*

(c) *El grupo finitamente generado F es un subgrupo normal en G .*

(d) *La variedad $M(G) = \Omega/G$ es el interior de una variedad compacta.*

Demostración. Vamos a probar (a). Gracias al lema anterior, el grupo G_1 actúa de forma discontinua en Ω_1 y $R_1 = \mathcal{P} \cap \tau_1(\mathcal{P})$ es un conjunto fundamental para esta acción. Debido a las propiedades de $\mathcal{P}$ mencionadas en el lema (4.3.5), $R_1 \cap \mathbf{cl}(\Pi_2^-)$ es un conjunto fundamental para la acción del grupo J en la bola $\mathbf{cl}(\Pi_2^-)$. Sea $V = V_2 \cap \tau_1(V_2)$ vecindad de $\Pi_2 \setminus \Lambda(J)$; los grupos $\tilde{H}_2$ y $\tilde{H}_3$ cumplen las condiciones y propiedades del lema (4.3.5) por lo que $R_1 \cap V = D(\tilde{H}_2) \cap D(\tilde{H}_3) \cap V$; si $g \in G_1 \setminus J$ entonces $g(\Pi_2 \setminus \Lambda(J))$ debe estar contenido en alguna de las bolas W_2 o $\tau_1 W_2$ por lo que $\Pi_2 \setminus \Lambda(J)$ es precisamente invariante bajo J en G_1 . Entonces existe una vecindad $\mathcal{N}$ de $\Pi_2 \setminus \Lambda(J)$ tal que $\mathcal{N}$ también es precisamente invariante bajo J en G_1 y $\mathcal{N} \subset \Omega(G_1)$. Ahora sólo basta mostrar lo siguiente:

Proposición 4.3.9 *La esfera Π_2 es precisamente invariante bajo J en G_1 .*

Demostración. Supongamos que existe un elemento $g \in G_1 \setminus J$ tal que $g(\Pi_2) \cap \Pi_2 = \{x\} \subset \Lambda(J)$. El grupo J es geoméricamente finito y tenemos dos casos (ver [3]):

- (1) x es un punto de aproximación, o
- (2) x es un punto fijo de un elemento parabólico $\gamma \in J$.

En el primer caso existe una sucesión $h_n \in J$ tal que $h_n(x) \rightarrow x_0$ y $h_n(z) \rightarrow y_0 \neq x_0$ para todo $z \in \text{cl}(\Pi_2^-) \setminus \{x\}$, donde $y_0 \in \Pi_2$. Entonces la sucesión $h_n g(\Pi_2)$ converge a Π_2 , por lo cual existe un n tal que $h_n g((N)) \cap (N)$ es no vacía. Esto es una contradicción ya que $\mathcal{N}$ es precisamente invariante bajo J en G_1 .

Veamos el segundo caso. Sea $p_3 = \tau(p_2)$. Existe un $y \in \Pi_2$ tal que $g(y) = x$. Si $x = P_2$ entonces $g^{-1}\gamma g(y) = y$, sea $h' = g^{-1}\gamma g$ entonces $\gamma g h'(y) = P_2$. Si $x = P_3$, $g\gamma g^{-1}(y) = y$, sea $h' = g^{-1}\gamma g$ entonces $\gamma g h'(y) = P_3$ entonces $\gamma g h'(\{P_2, P_3\}) = \{P_2, P_3\}$ y como los grupos $\tilde{H}_2$ y $\tilde{H}_3$ son máximos no conjugados, $g \in J$ lo que es una contradicción.

Hemos probado la proposición. Entonces con J se cubre toda la vecindad V por lo que cualquier otro elemento manda Π_2^- dentro de $\Sigma_1 \cup \tau_1 \Sigma_1$ y como $G_2 = \tau_2 G_1 \tau_2$ pasa algo similar con G_2 por lo que podemos aplicar el primer teorema de combinación de Maskit para obtener los incisos (a) y (b).

Para probar (c) tenemos que verificar que para cualquier $g_1 \in G_1$ y $g_2 \in G_2$ las relaciones $g_1^{-1}F_2g_1 \subset F = \langle F_1, F_2 \rangle$ y $g_2F_1g_2^{-1} \subset F$ se cumplen. El elemento g_1 tiene la forma f_1t^n , donde $f_1 \in F_1$, $t \in H_2 \subset G_1 \cap G_2$. Entonces tenemos $g_1F_2g_1^{-1} = f_1t^nF_2t^{-n}f_1^{-1} = f_1F_2f_1^{-1} \subset \langle F_1, F_2 \rangle$ ya que F_2 es un subgrupo normal de G_2 .

Probaremos (d). Como se vio en el lema (4.3.6), las variedades $M(G_1)$ y $M(G_2)$ pueden ser compactificadas agregándoles toros en cada cúspide. Entonces las variedades $M(G_1)^- = M(G_1) \setminus \Pi_2^-/J$ y $M(G_2)^- = M(G_2) \setminus (\tau_2(\Pi_2^-)/J)$ pueden ser compactificadas por lo que $M(G)$ puede ser compactificada ya que es el pegado de $M(G_1)^-$ y $M(G_2)^-$ a lo largo de $\tilde{S} = (\Pi_2 \setminus \Lambda(J))/J$. $\square$

Sea $M(F) = \Omega/F$.

Lema 4.3.10 *El grupo $\pi_1(M(F))$ no es finitamente generado.*

Demostración.

Paso 1. Veamos que las órbitas $G_1(\Pi_2^-)$ y $F_1(\Pi_2^-)$ son iguales. $G_1 = \langle F_1, t \rangle$ donde $t \in \tilde{H}_2$ y como $t(\Pi_2^-) = \Pi_2^-$, tenemos que $G_1(\Pi_2^-) = F_1(\Pi_2^-)$. Los elementos de G son de la forma $g = g_1 g_2 \cdots g_n$ donde $g_j \in G_1 \cup G_2$ y de las igualdades $g_j = f_j t^{m_j}$ con $f_j \in F_1 \cup F_2$ tenemos que $g = f t^m$ donde $f \in F$ y $m \in \mathbb{Z}$.

Paso 2. Por construcción tenemos que $\tau_2 G \tau_2 = G$. Usando el cubriente $p: \Omega \rightarrow \Omega/G = M(G)$, la involución τ_2 se proyecta a la involución $\bar{\tau}_2: M(G) \rightarrow M(G)$ que tiene como conjunto de puntos fijos a $\tilde{S} = p(\Pi_2 \setminus \Lambda(J))$. De la misma manera la involución τ_2 se proyecta a la involución $\hat{\tau}_2: \Omega/F \rightarrow \Omega/F = M(F)$. Así tenemos el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{q} & M(F) & \xrightarrow{r} & M(G) \\ \downarrow \tau_2 & & \downarrow \hat{\tau}_2 & & \downarrow \bar{\tau}_2 \\ \Omega & \xrightarrow{q} & M(F) & \xrightarrow{r} & M(G) \end{array}$$

donde $p = r \circ p$ y r es un cubriente regular.

Paso 3. Como el grupo G es la combinación de los grupos G_1 y G_2 , $(\Omega_1 \setminus (G_1(\Pi_2^-)))/G_1$ es la cerradura de alguna de las componentes de $M(G) \setminus \tilde{S}$, denotaremos a ésta componente como $M(G)^-$. Sea $M(F)^-$ la variedad $r^{-1}(M(G)^-)$. Pero las variedades $M(F)^-$ y $M(G)^-$ son iguales a $M(F_1) \setminus (\Pi_2^-/J \cap F)$ y $M(G_1) \setminus (\Pi_2^-/J)$ respectivamente. El cubriente $r: M(F)^- \rightarrow M(G)^-$ es la restricción del cubriente cíclico infinito $M(F) \rightarrow M(G)$.

Paso 4. Como ya se ha visto, la variedad $M(G)^-$ se puede compactificar, llamaremos a esta compactificación $N(G)^-$. La superficie $\tilde{S} = (\Pi_2^- \setminus \Lambda(J))/J$ no puede ser un toro ya que J no es abeliano por lo que es de género mayor o igual a 2 por lo que la variedad $N(G)^-$ no fibra sobre el círculo. Las variedades $N(G)^-$ y $N(F)^-$ no contienen células falsas (vea [5]) ya que son cubiertas por S^3 . Por lo que no son contradicciones a la *conjetura de Poincaré*: Toda 3-variedad cerrada, conexa y simplemente conexa es homeomorfa a S^3 . Esto es importante ya que en el paso 5 lo necesitaremos en el teorema de Stallings.

Paso 5. En este paso probaremos que $\pi_1(M(F)^-)$ no es finitamente generado. Tenemos la sucesión exacta

$$1 \rightarrow \pi_1(M(F)^-) \rightarrow \pi_1(M(G)^-) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1.$$

Supongamos que el grupo $\pi_1(M(F)^-)$ es finitamente generado. Usaremos el siguiente teorema de Stallings [5] (teorema 11.6 página 104): si M es una 3-variedad con una sucesión exacta como la anterior (en este caso $M = M(G)^-$), entonces $\mathcal{P}(M)$ fibra sobre el círculo ($\mathcal{P}(M)$ es M sin células falsas). Pero $\mathcal{P}(M) = M$ por el paso 4. Con lo que tenemos una contradicción.

En el próximo paso usaremos el siguiente teorema (Vea [2]):

Teorema 4.3.11 (Teorema de Armstrong) *Sea X simplemente conexo y localmente compacto. Sea G grupo de homeomorfismos de X , sea H subgrupo normal de G con $H = \langle g_i \rangle$ con g_i con puntos fijos. Entonces $\pi_1(X/G) \simeq G/H$.*

Paso 6. Probaremos que el grupo $\pi_1(M(F))$ tampoco es finitamente generado. Sea $u: \tilde{M} \rightarrow M(F)$ el cubriente universal con grupo de transformaciones de cubierta $\pi \simeq \pi_1(M(F))$. La variedad $M(F)^-$ es homeomorfa a $M(F)/\hat{\tau}_2$. Consideremos un levantamiento $\tilde{\tau}_2: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ de la involución $\hat{\tau}_2$. $\pi = \tilde{\tau}_2 \pi \tilde{\tau}_2$ y el grupo $\mathcal{B} = \langle \pi_1(M(F)), \tilde{\tau}_2 \rangle$ actúa de forma discontinua en $\tilde{M}$. Sea **TORS** el subgrupo normal de $\mathcal{B}$ generado por los elementos de orden finito. Usando el teorema de Armstrong, $\pi_1(M(F)^-)$ es isomorfo a $\mathcal{B}/\mathbf{TORS}$ por lo que el grupo $\mathcal{B}$ no es finitamente generado lo que nos da que el grupo $\pi_1(M(F))$ tampoco es finitamente generado. Por construcción, el grupo $F = \langle F_1, F_2 \rangle$ es finitamente generado, por lo que queda demostrado el teorema. $\square$

Bibliografía

- [1] B. N. Apanasov: *Discrete Groups In Space And Uniformization Problems*, Kluwer Academic Publisher, 1991.
- [2] M. A. Armstrong: *The Fundamental Group of the orbit space of a discontinuous group*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 64, 299-301, 1968.
- [3] A. F. Beardon y B. Maskit: *Limit Points Of Kleinian Groups And Finite Sided Fundamental Polyhedra*, Acta Math 132, 1-12, 1990
- [4] D. L. Goldsmith: *Knots, Groups And 3-Manifold* Ann. of Math. Studies 84, 3-23, 1975.
- [5] J. Hempel: *3-Manifolds*, Princeton Univ. Press, 1976.
- [6] G. A. Jones: *Complex Functions*, Cambridge University Press, 1987.
- [7] M. Kapovich y L. Potyagailo: *On The Absence Of Ahlfors' Finiteness Theorem For Kleinian Groups In Dimension Three*, Topology and its Applications 40, 1991, 83-91.
- [8] B. Maskit: *Kleinian Groups*, Springer-Verlag, 1988.
- [9] K. Matsuzaki y M. Taniguchi: *Hyperbolic Manifolds And Kleinian Groups*, Clarendon Press, 1998.
- [10] J. R. Munkres: *Topology*, Prentice Hall, 2000.
- [11] R. D. Porter: *Introduction To Fibre Bundles*, Marcel Dekker, 1977.
- [12] W. R. Scott: *Group Theory*, Courier Cover Publications, 1987.
- [13] W. Thurston: *The Geometry And Topology Of 3-Manifolds*, Princeton Univ. Lecture Notes, 1978.

Índice alfabético

- órbita, 13
- acción
 - de un grupo, 13
 - discontinua, 32
 - libremente discontinua, 28
 - transitiva, 18
- apareamiento, 37
- buena vecindad, 28
- cúspide, 55
- círculo isométrico, 27
- círculos
 - de Apolonio, 23
 - de Steiner, 23
- conexo por trayectorias, 8
- conjunto
 - de discontinuidad, 32
 - fundamental, 55
 - fundamental restringido, 55
 - límite, 30
 - regular libre, 28
- coordenada local, 35
- cubriente regular, 13
- cubriente universal, 10
- dominio fundamental, 36
- elementos conjugados, 20
- estabilizador, 13, 32
- forma normal, 11
- grupo
 - de isotropía, 13
 - Fuchsiano, 50
 - fundamental, 8
 - general lineal proyectivo, 16
 - geométricamente finito, 55
 - Kleiniano, 28
 - normalizado, 29
- homotópica, 7
- lado, 36
 - libre, 50
- localmente conexo por trayectorias, 9
- normalización, 29
- par interactivo, 54
- polígono, 40
- poliedro fundamental, 40
- precisamente invariante, 32
- producto libre, 11
 - amalgamado, 11
- proyección cubriente, 10
- punto
 - de aproximación, 31
 - fijo, 20
 - fijo cuspidal, 55
 - fijo doblemente cuspidal, 55

- límite, 30
- razón cruzada, 19
- red circular, 23
- región
 - de Dirichlet, 41
 - de Ford, 39
 - de Nielsen, 50
- semilocalmente simplemente conexo,
13
- simplemente conexo, 9
- subgrupo
 - elemental, 45
 - no elemental, 45
- superficie de Riemann, 34
- transformación
 - elíptica, 25
 - hiperbólica, 25
 - loxodrómica, 25
 - parabólica, 25
- transformaciones
 - de cubierta, 13
 - de Möbius, 15
- traza, 21
- vértice
 - al infinito, 50
 - impropio, 50
 - propio, 50
- vértices, 37