

INVARIANZA DE NORMA EN ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA ESCALAR

Laura Xiomara Gutiérrez Guerrero

Asesor : Dr. Adnan Bashir

febrero de 2006

A mis Padres

Agradecimientos

Al Dr. Adnan Bashir por su ayuda constante y orientación.

A toda mi familia.

Contenido

Introducción	1
1. FOTONES.	4
1.1. Ecuaciones de Maxwell.	4
1.2. Invarianza de norma	5
1.3. Lagrangiano electromagnético.	6
1.4. Propagador.	8
2. ESCALARES.	11
2.1. Ecuación de Klein-Gordon.	11
2.1.1. Densidad de probabilidad negativa.	12
2.1.2. Energía negativa.	13
2.2. Lagrangiano de una partícula escalar.	14
2.3. Interpretación de la ecuación de Klein-Gordon.	14
2.3.1. Solución de densidad de probabilidad negativa.	15
2.3.2. Solución de energía negativa.	16
2.4. Propagador.	17
3. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA ESCALAR.	19
3.1. Interacción entre los escalares y los fotones.	19
3.1.1. Lagrangiano.	20
3.1.2. Corriente conservada.	22
3.2. Reglas de Feynman.	22
3.2.1. Amplitud de transición.	23
3.2.2. Diagramas de Feynman.	26
3.2.3. Dispersión $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ y las Reglas de Feynman	28
4. PROPAGADOR ESCALAR A UN LAZO.	35
4.1. Propagador escalar a un lazo.	35
4.1.1. Norma de Feynman	37
4.1.2. Norma Arbitraria	38
4.1.3. Propagador en tres dimensiones.	39
4.1.4. Propagador escalar en cuatro dimensiones	40

5. TRANSFORMACION DE LANDAU-KHALATNIKOV-FRADKIN.	42
5.1. Transformación de Landau-Khalatnikov-Fradkin(LKF).	42
5.1.1. Transformación de LKF en tres dimensiones.	43
5.1.2. Transformación de LKF en cuatro dimensiones.	45
6. Discusión y Conclusiones	50
A. Parametrización de Feynman	51
A.1. Algunas Integrales Estándar	51
A.2. La Función Gamma	52
A.3. Parametrización de Feynman	53
A.4. Solución de la integral J_{np}	54
Bibliografía	56

Introducción

Las partículas fundamentales se dividen en dos categorías, fermiones y bosones. Los fermiones son partículas que obedecen el principio de exclusión de Pauli y poseen espín semientero $s = n + \frac{1}{2}$, en donde $n = 0, 1, 2, \dots$, es decir, n es un número entero. Los fermiones elementales son los quarks y los leptones que tienen espín $\frac{1}{2}$. Los bosones son partículas que no obedecen el principio de exclusión de Pauli y poseen un espín entero $s = 0, 1, 2, \dots$. Los bosones elementales son fotones, gluones, bosones débiles y gravitones $\{W^\pm, Z\}$. Los fotones, gluones y bosones débiles tienen espín $s = 1$ y para los gravitones tenemos $s = 2$. Llamamos partículas escalares a aquellas cuyo espín es cero. Todavía no se ha descubierto ninguna partícula escalar fundamental aunque el famoso higgs es un candidato. Por otro lado, existen escalares compuestos como piones. Las partículas que tratamos en esta tesis son escalares cargados y fotones. Las partículas con diferentes valores de espín satisfacen diferentes ecuaciones de movimiento. Los fermiones de espín $-\frac{1}{2}$ satisfacen la ecuación de Dirac. Los bosones de espín cero satisfacen la ecuación de Klein-Gordon. Los bosones (sin masa) de espín $s=1$ satisfacen la ecuación de Maxwell. Por el hecho de que estamos interesados únicamente en escalares y fotones, nos restringiremos a estudiar la ecuación de Klein-Gordon y las de Maxwell.

Existen cuatro fuerzas básicas que describen todas las interacciones hasta ahora observadas entre las partículas: la fuerte, la débil, la electromagnética y la gravitacional. Las fuerzas *débil* y *fuerte* son experimentadas únicamente a distancias subatómicas. La *fuerza gravitacional* y la *fuerza electromagnética* son experimentadas comúnmente en la vida diaria, ya que actúan a largas distancias entre partículas con masa y con carga eléctrica, respectivamente.

El *Módulo Estándar* describe las interacciones (excepto la gravitacional) entre partículas elementales y fue propuesto en 1967 por Salam, Weinberg y Glashow. Desde entonces hasta la fecha, este modelo ha sobrevivido todos los retos experimentales. La interacción que tratamos en esta tesis es únicamente la electromagnética. El formalismo que describe esta interacción a nivel microscópico recibe el nombre de Electrodinámica Cuántica (QED). Entonces QED es pertinente a todas las partículas que sufren la interacción electromagnética o dicho de otro modo, a las partículas con carga eléctrica. Trataremos con Electrodinámica Cuántica Escalar (SQED). La Electrodinámica Cuántica Escalar trata a las partículas escalares cargadas interactuando con los fotones.

¿Por que estamos interesados en estudiar SQED a pesar de que no existen partículas escalares cargadas y fundamentales? A continuación, mencionamos algunas razones que

nos motivan a estudiar SQED:

- Hay varias razones de creer que existe física importante más allá del modelo estándar. En casi todas las extensiones del modelo estándar, como supersimetría y tecnicolor, aparecen naturalmente escalares cargados.
- En los modelos de inflación y de materia oscura, es común suponer la existencia de partículas escalares. Recientemente hay especulaciones que los efectos cuánticos (de un lazo) en SQED durante el periodo de inflación pueden causar efectos relevantes y observables [1].
- SQED también nos provee una plataforma simple y atractiva para abordar problemas no perturbativos involucrando teorías de norma, tales como encontrar funciones de Green no-perturbativas, [2]. Por el hecho de que tales intentos en QED espinorial pueden ser demasiado complicados, [3]. SQED nos puede ayudar a alcanzar nuestros objetivos de una manera simple y transparente.

En esta tesis, estudiamos el propagador escalar en SQED a un lazo. Además usando las relaciones poderosas de Landau-Khalatnikov-Fradkin, tratamos de hallar una forma no perturbativa del mismo [3]. Como esperábamos nuestros resultados son simples en comparación con los encontrados en [4]. En un futuro, planeamos abordar el problema de la covarianza de norma en la generación dinámica de masa para escalares en SQED.

- En el Capítulo 1 estudiamos los fotones, es decir, las ecuaciones de Maxwell. También discutimos la invariancia de norma, el Lagrangiano y el propagador.
- En el Capítulo 2 estudiamos las partículas escalares, las cuales son descritas por la ecuación de Klein-Gordon. Vemos cual es la densidad de Lagrange para estas partículas, así como el propagador que se usa en la descripción de procesos de dispersión y en el cálculo de secciones eficaces.
- En el Capítulo 3 estudiamos las interacciones entre partículas escalares y fotones, es decir, la electrodinámica cuántica escalar. A partir del formalismo de la mecánica cuántica relativista motivamos los diagramas y reglas de Feynman.
- En el Capítulo 4 calculamos la corrección al propagador escalar a un lazo en una norma y dimensión arbitraria. Tomamos los casos particulares $d = 3$ y $d = 4 - 2\epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$.

- En el Capítulo 5 estudiamos las transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin (TLKF) para el propagador escalar. A partir de estas transformaciones obtenemos el propagador escalar no perturbativo en $d = 3$ y $d = 4$.
- Por último presentamos la discusión y conclusión en el Capítulo 6.

Capítulo 1

FOTONES

1.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell relacionan el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y el campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ con la densidad de carga $\rho(\mathbf{r}, t)$ y la corriente electromagnética $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Sin mostrar la dependencia sobre \mathbf{r} y t , estas ecuaciones se pueden escribir de la siguiente manera en electrodinámica clásica:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{j}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Hemos usado las unidades naturales de Heaviside-Lorentz poniendo $c=1$. El potencial de Coulomb en estas unidades es $V = e^2/4\pi r$ para una carga puntual. Podemos introducir potenciales eléctrico y magnético, es decir, φ y \mathbf{A} de la manera usual. Escribiendo \mathbf{E} y \mathbf{B} como:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi,\tag{1.2}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},\tag{1.3}$$

las ecuaciones homogéneas de Maxwell se satisfacen automáticamente. Para escribir las otras dos ecuaciones en forma covariante introducimos dos cuadvectores $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ y

$A^\mu = (\rho, \mathbf{A})$ y se puede verificar que:

$$\square^2 A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = j^\mu \quad (1.4)$$

es equivalente a las ecuaciones no homogéneas de Maxwell. Ahora, las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir en términos del tensor antisimétrico

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (1.5)$$

de la forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (1.6)$$

Esta es la forma más compacta de escribir las ecuaciones de Maxwell. En la próxima sección estudiaremos la llamada simetría de norma de la electrodinámica.

1.2. Invarianza de norma

Podemos verificar que los potenciales en las ecuaciones (1.2) y (1.3) poseen cierta arbitrariedad. Entonces, si eligiéramos unos nuevos potenciales:

$$\varphi' = \varphi + \frac{\partial\chi}{\partial t}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\chi, \quad (1.8)$$

donde χ es una función escalar, tendríamos que:

$$\mathbf{E}' = -\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla\varphi' = -\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{A} - \nabla\chi] - \nabla\left[\varphi + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right] = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi = \mathbf{E}.$$

Similarmente para el campo magnético:

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times [\mathbf{A} - \nabla\chi] = \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \times \nabla\chi = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Este cambio a los nuevos pero físicamente equivalentes potenciales de las ecuaciones (1.7) y (1.8) se llama transformación de norma. Como pudimos comprobar los campos eléctrico y magnético son invariantes ante estas transformaciones. Las ecuaciones (1.7) y (1.8) pueden ser combinadas como:

$$A^{\mu'} = A^\mu + \partial^\mu\chi. \quad (1.9)$$

$F^{\mu\nu}$ es invariante ante las transformaciones de norma:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \longrightarrow \partial^\mu(A^\nu + \partial^\nu \chi) - \partial^\nu(A^\mu + \partial^\mu \chi) = F^{\mu\nu} .$$

Por el hecho de que las transformaciones de la ecuación (1.9) dejan los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} invariantes, es recomendable deshacerse de la arbitrariedad en A^μ . Este proceso se llama fijar la norma. Una de las maneras de hacerlo es imponer $\partial_\mu A^\mu = 0$, esta condición se llama condición de Lorentz e implica que:

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi = \square^2 \chi = -\partial_\mu A^\mu .$$

Esta es una ecuación no homogénea de ondas y sabemos que tiene soluciones. Las ecuaciones de Maxwell se reducen a

$$\square^2 A^\mu = j^\mu . \tag{1.10}$$

La condición de norma es una buena elección para fijar la norma si queremos mantener la invarianza de Lorentz explícitamente. Como todas las ecuaciones de movimiento, las ecuaciones de Maxwell se pueden derivar mediante un lagrangiano. Lo vemos en la próxima sección.

1.3. Lagrangiano electromagnético

El lagrangiano (densidad de lagrangiano) para un fotón libre se puede escribir como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} . \tag{1.11}$$

Las ecuaciones de Maxwell se obtienen como las de Euler-Lagrange para este lagrangiano, es decir:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} \right) = 0 . \tag{1.12}$$

La ecuación (1.11) nos permiten deducir:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = 0 , \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = -F^{\beta\alpha} . \tag{1.14}$$

Si sustituimos las ecuaciones (1.13) y (1.14) en la ecuación (1.12) obtenemos las ecuaciones de Maxwell:

$$\partial_\beta F^{\beta\alpha} = 0 . \quad (1.15)$$

Observemos que por la antisimetría del tensor $F^{\mu\nu}$, $F^{00} = -F^{00}$ lo que implica que $F^{00} = 0$. Así que el lagrangiano (1.11) no tiene términos de la forma \dot{A}^0 . Definamos:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} , \quad (1.16)$$

donde π^μ es el momento conjugado al campo. Las ecuaciones (1.11) y (1.16) implican que:

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 , \quad (1.17)$$

pues en el lagrangiano no aparecen términos del tipo \dot{A}^0 , una situación poco deseable porque no nos permite aplicar el formalismo canónico de cuantización de la teoría de campos. En este formalismo las relaciones de conmutación:

$$[\hat{x}, \hat{x}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i$$

se traducen como las siguientes relaciones de conmutación para los campos $A^\mu(\mathbf{x}, t)$ y $\pi^\mu(\mathbf{x}, t)$:

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] = [\pi^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = 0 , \quad (1.18)$$

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = -ig^{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \quad (1.19)$$

$\pi^0 = 0$ para el lagrangiano de la ecuación (1.11) y por lo tanto

$$[A^0(\mathbf{x}, t), \pi^0(\mathbf{x}', t)] = 0 , \quad (1.20)$$

en contradicción con la relación (1.19). Por esta situación incómoda, debemos agregar un término que contenga una derivada con respecto al tiempo de A^0 al lagrangiano de tal manera que la teoría no se altere. Una manera conveniente es agregando un término al lagrangiano que es $-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu)$. ξ se llama parámetro de norma covariante y puede

ser cualquier número real finito. $\xi = 1$ es norma de Feynman. $\xi = 0$ es llamada norma de Landau. Este término adicional se puede considerar como una restricción. La teoría se queda invariante tras imponer la condición de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Estas normas son muy convenientes para el estudio de procesos de dispersión de altas energías donde es deseable mantener manifiesta la invarianza de Lorentz y usando el método de Gupta y Bleuler es posible cuantizar las cuatro componentes de A^μ como grados independientes de libertad. Es importante resaltar que la física no es afectada por el valor de ξ . Cualquier ξ puede ser usada. Los pasos intermedios pueden ser diferentes para diferentes elecciones de ξ , pero el resultado final para cualquier observable físico es independiente de la ξ escogida. Así que el lagrangiano final para un fotón libre es:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu). \quad (1.21)$$

La presencia de una corriente j^μ modifica al lagrangiano como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) - j_\mu A^\mu. \quad (1.22)$$

Correspondientemente, las ecuaciones de Maxwell adquieren la forma

$$\square^2 A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu. \quad (1.23)$$

Antes de empezar a estudiar partículas escalares, es un buen momento para hablar del propagador del fotón aunque posponemos la discusión de su relevancia en la teoría de dispersión relativista hasta el capítulo 3.

1.4. Propagador

Para definir el propagador del fotón empezaremos con la ecuación (1.4). Queremos encontrar A^μ que satisfaga esta ecuación. Para eso consideremos dos casos:

Caso(I): El procedimiento es un poco más sencillo si empezamos con la norma de Feynman $\xi = 1$. En este caso,

$$\square^2 A^\mu(x) = j^\mu(x). \quad (1.24)$$

Resolveremos esta ecuación usando el método de Green para lo cual hay que encontrar la solución de la siguiente ecuación:

$$g^{\alpha\mu}\square_x^2 G_{\mu\beta}(x, y) = g^\alpha{}_\beta \delta^4(x - y) , \quad (1.25)$$

donde $G^{\mu\beta}(x, y)$ es la función de Green de dos puntos para el fotón o propagador del fotón en el espacio de posición. Ahora proponemos la siguiente solución para $A^\mu(x)$:

$$A^\mu(x) = A_0^\mu(x) + \int d^4y G^{\mu\beta}(x, y) j_\beta(y) , \quad (1.26)$$

donde A_0^μ es el campo fotónico en ausencia de corrientes y por lo tanto satisface la ecuación $\square^2 A_\mu^0 = 0$ en la norma de Feynman. Para verificar que (1.26) si es una solución de (1.24), aplicamos $g^\alpha{}_\mu \square_x^2$ a la ecuación (1.26) y usando (1.25) conseguimos:

$$\begin{aligned} g^\alpha{}_\mu \square_x^2 A^\mu(x) &= g^\alpha{}_\mu \square_x^2 A_0^\mu(x) + \int d^4y g^\alpha{}_\mu \square_x^2 G^{\mu\beta}(x, y) j_\beta(y) \\ &= \int g^{\alpha\beta} \delta^4(x - y) j_\beta(y) = j^\alpha(x) , \\ \square_x^2 A^\alpha(x) &= j^\alpha(x) . \end{aligned}$$

Para resolver la Ec. (1.25) hacemos la transformada de Fourier de $G^{\mu\beta}(x, y)$ al espacio de momentos:

$$G^{\mu\beta}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int D^{\mu\beta}(q) e^{-iq(x-y)} d^4q .$$

Aplicamos $g_{\alpha\mu} \square^2$ a $G^{\mu\beta}(x, y)$ y usando la ecuación (1.25) obtenemos que:

$$g^\beta{}_\alpha \delta^4(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int D^{\mu\beta}(q) g_{\alpha\mu}(-q^2) e^{-iq(x-y)} d^4q .$$

Por lo tanto, identificamos directamente que

$$D^{\mu\beta}(q) = -\frac{1}{q^2} g^{\mu\beta} . \quad (1.27)$$

$D^{\mu\beta}$ se llama propagador del fotón en la norma de Feynman.

CasoII: Ahora empezamos con la ecuación fotónica en una norma arbitraria:

$$\square^2 A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu .$$

Para encontrar A^ν resolvemos primero la siguiente ecuación:

$$\left[g^{\nu\lambda} \square_x^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu \partial^\lambda \right] G_{\lambda\alpha}(x, y) = g^\nu{}_\alpha \delta^4(x - y), \quad (1.28)$$

y proponemos la siguiente solución para $A_\lambda(x)$

$$A_\lambda(x) = A_\lambda^0(x) + \int G_{\lambda\alpha}(x, y) j^\alpha(y) d^4y. \quad (1.29)$$

Procedemos de maner similar que en el caso (I) y el propagador del fotón resulta ser:

$$D_{\lambda\alpha}(q) = \left[-\frac{g_{\lambda\alpha}}{q^2} + (1 - \xi) \frac{q_\lambda q_\alpha}{q^4} \right].$$

Como mencionamos anteriormente, el propagador del fotón juega un papel importante en la teoría de dispersión cuando los fotones interactúan con partículas cargadas. Dedicamos el próximo capítulo a estudiar la dinámica de las partículas escalares cargadas.

Capítulo 2

ESCALARES

2.1. Ecuación de Klein-Gordon

La ecuación de Schrödinger en mecánica cuántica para una partícula libre de masa m en el estado φ es:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \frac{1}{2m}\nabla^2\varphi = 0. \quad (2.1)$$

Esta ecuación corresponde a la relación en forma de operadores de la energía no relativista:

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (2.2)$$

después de reemplazar

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{p} &\rightarrow -i\nabla. \end{aligned} \quad (2.3)$$

La ecuación (2.1) describe correctamente el movimiento de las partículas microscópicas cuando intervienen bajas velocidades. Sin embargo, para velocidades grandes ya no se cumple. La ecuación de Schrödinger fue modificada para el dominio relativista sustituyendo la ecuación (2.2) por la relación

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2. \quad (2.4)$$

Sustituyendo las cantidades E y \mathbf{p} por los operadores correspondientes en la ecuación (2.4) obtenemos

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \nabla^2\varphi = m^2\varphi. \quad (2.5)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de Klein-Gordon. Para facilitar el manejo de fórmulas y manifestar la invarianza de Lorentz explícitamente, se utiliza la siguiente notación:

$$\begin{aligned}\partial^\mu &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right), \\ \partial_\mu \partial^\mu &\equiv \square^2.\end{aligned}\tag{2.6}$$

De este modo escribimos la ecuación de Klein-Gordon como:

$$(\square^2 + m^2)\varphi = 0.\tag{2.7}$$

La solución a esta ecuación es de la forma

$$\varphi = N e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)} = N e^{-ip\cdot x}.\tag{2.8}$$

Aparentemente, hay dos problemas con la ecuación de Klein-Gordon, como veremos a continuación.

2.1.1. Densidad de probabilidad negativa

El complejo conjugado de la ecuación de Klein-Gordon, (2.7), es:

$$(\square^2 + m^2)\varphi^* = 0.\tag{2.9}$$

Multiplicamos la ecuación (2.7) por φ^* y la ecuación (2.9) por φ y las restamos:

$$\varphi^* \square^2 \varphi - \varphi \square^2 \varphi^* = 0.\tag{2.10}$$

Desarrollándola obtenemos:

$$\partial_\mu [\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*] = 0.\tag{2.11}$$

Si multiplicamos la ecuación anterior por $i/2m$ y comparamos con la ecuación $\partial_\mu j^\mu = 0$ tenemos que:

$$j^\mu = \frac{i}{2m} (\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*).\tag{2.12}$$

La razón por la cual multiplicamos por $i/2m$ es que j^0 tenga las dimensiones de densidad de probabilidad $1/cm^3$. La conservación de la corriente se puede escribir como:

$$\partial_0 j^0 + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 . \quad (2.13)$$

donde

$$\begin{aligned} j^0 \equiv \rho &= \frac{i}{2m}(\varphi^* \partial^0 \varphi - \varphi \partial^0 \varphi^*) , \\ \mathbf{j} &= \frac{i}{2m}(\varphi^* \nabla \varphi - \varphi \nabla \varphi^*) . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ahora integramos la ecuación de continuidad sobre todo el espacio

$$\int_V \partial^0 \rho d^3x = \partial^0 \int_V \rho d^3x = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} d^3x = - \int_S \mathbf{j} \cdot ds . \quad (2.15)$$

Como la superficie S esta infinitamente lejos, suponemos que los campos desaparecen a estas distancias. Por lo tanto:

$$\int_V \rho d^3x = \text{constante} . \quad (2.16)$$

Es natural interpretar ρ como la densidad de probabilidad. La ecuación de Klein-Gordon es de segundo orden con respecto a la derivada temporal, por lo cual necesitamos dos condiciones para conocerla en un tiempo futuro. Para un tiempo dado t , φ y $\dot{\varphi}$ pueden tener valores arbitrarios, por lo tanto $\rho(\mathbf{x}, t)$ puede ser positiva o negativa. Esto es un problema, pues no se puede interpretar una densidad de probabilidad negativa.

2.1.2. Energía negativa

Si sustituimos la ecuación (2.8) en la ecuación (2.7) obtenemos:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \rightarrow E = \pm(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} . \quad (2.17)$$

Como sabemos que las partículas con energías negativas no existen, así que podríamos simplemente tirar las soluciones de energías negativas. Pero se puede verificar que en la presencia de potenciales externos, aunque empezemos sólo con las soluciones de energías positivas, aparecen soluciones con energías negativas. Por lo tanto, no se pueden deshacer de las soluciones no deseadas. En las próximas secciones veremos como resolver los problemas de la densidad y energía negativa.

2.2. Lagrangiano de una partícula escalar

La densidad de lagrangiano para el campo de Klein-Gordon es:

$$\mathcal{L} \left(\varphi, \varphi^*, \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}, \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^\nu} \right) = \frac{1}{2m} [(\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi] . \quad (2.18)$$

Podríamos escoger la parte real e imaginaria de φ como campos independientes, pero preferimos escoger φ y φ^* para representar partículas cargadas. Para verificar que efectivamente esta densidad de lagrangiano corresponde al campo de Klein-Gordon, debemos obtener de las ecuaciones de Euler-Lagrange las ecuaciones de Klein-Gordon para φ y φ^* .

Para φ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi)} \right) = 0 . \quad (2.19)$$

Usando el lagrangiano de la ecuación (2.18) vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= -\frac{m}{2} \varphi^* , \\ \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi)} \right) &= \frac{1}{2m} \square^2 \varphi^* . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para esta obtenemos

$$[\square^2 + m^2] \varphi^* = 0 . \quad (2.21)$$

Similarmente para el campo φ^* tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} - \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi^*)} \right) = 0 , \quad (2.22)$$

que implica de manera directa la ecuación de Klein-Gordon

$$[\square^2 + m^2] \varphi = 0 . \quad (2.23)$$

Hemos confirmado entonces, que esta densidad de lagrangiano efectivamente corresponde a el campo de Klein-Gordon.

2.3. Interpretación de la ecuación de Klein-Gordón

En esta sección trataremos de resolver los problemas asociados con las energías y probabilidades negativas.

2.3.1. Solución de densidad de probabilidad negativa

Podemos redefinir la corriente j^μ dada en la ecuación (2.12) agregando la carga e de modo que ahora

$$j^\mu = \frac{ie}{2m}(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*) = (e\rho', e\mathbf{j}') , \quad (2.24)$$

donde

$$\rho' = \frac{ie}{2m}(\varphi^* \partial^0 \varphi - \varphi \partial^0 \varphi^*) , \quad (2.25)$$

significa densidad de carga, y

$$\mathbf{j} = \frac{ie}{2m}(\varphi^* \nabla \varphi - \varphi \nabla \varphi^*) , \quad (2.26)$$

denota la densidad de carga-corriente. La densidad de carga (2.25) puede ser positiva negativa o cero. De ahora en adelante sólo hablaremos de ρ' y \mathbf{j}' por lo tanto, para conveniencia obvia, los llamamos ρ y \mathbf{j} . Podemos normalizar la densidad de corriente ρ de la siguiente manera:

$$\int_V \rho d^3x = \pm e . \quad (2.27)$$

Una partícula libre tiene dos posibles soluciones para un momento \mathbf{p} dado, una con energía positiva y la otra con energía negativa

$$E_p = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} , \quad (2.28)$$

las soluciones resultan:

$$\varphi_\pm = N_\pm \exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \mp |E_p|t)) , \quad (2.29)$$

donde N_\pm son constantes de normalización. Sustituyendo esta solución en la expresión para ρ ecuación (2.25) tenemos que:

$$\rho_\pm = \pm \frac{e|E_p|}{m} \varphi_\pm^* \varphi_\pm . \quad (2.30)$$

Las condiciones de frontera periódicas en los bordes de una caja cúbica de longitud L son tales que

$$\varphi_{n\pm} = N_{n\pm} \exp[i(\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{x} \mp |E_{p_n}|t)] , \quad (2.31)$$

donde

$$\mathbf{p}_n = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n} \quad , \quad \mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) \quad ; \quad n_i \in \mathbf{N} \quad (2.32)$$

y

$$E_{p_n} = \sqrt{p_n^2 + m^2} \equiv E_n \quad . \quad (2.33)$$

Aquí \mathbf{n} es un vector en el espacio con ejes n_x, n_y, n_z . Las constantes de normalización son determinadas por la condición (2.27)

$$N_{n\pm} = \sqrt{\frac{m}{L^3 E_n}} \quad . \quad (2.34)$$

Así, la expresión (2.31) se escribe de la siguiente manera:

$$\varphi_{n\pm} = \sqrt{\frac{m}{L^3 E_n}} \exp [i(\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{x} \mp |E_n|t)] \quad . \quad (2.35)$$

Esta solución será muy útil para la solución del problema de energías negativas que será abordado a continuación.

2.3.2. Solución de energía negativa

Para saber cuál es la energía asociada a estas dos soluciones, sugerimos calcular el tensor de energía-momento e interpretar la energía a partir de la expresión

$$H = \int d^3x T^0_0 \quad . \quad (2.36)$$

El tensor de energía-momento se escribe como

$$T^\nu_\mu = \sum_\sigma \partial_\mu \varphi_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi_\sigma)} - \mathcal{L} g^\nu_\mu \quad . \quad (2.37)$$

Para el campo de Klein-Gordon tenemos

$$T^\nu_\mu = \partial_\mu \varphi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} + \partial_\mu \varphi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi^*)} - \mathcal{L} g^\nu_\mu \quad , \quad (2.38)$$

donde el lagrangiano es el dado en la ecuación (2.18). Haciendo las operaciones correspondientes encontramos que

$$T^\nu_\mu = \frac{1}{2m} [(\partial_\mu \varphi)(\partial^\nu \varphi^*) + (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\nu \varphi)] - [(\partial_\sigma \varphi^*)(\partial^\sigma \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi] g^\nu_\mu \quad .$$

Entonces

$$T^0_0 = \frac{1}{2m} [(\partial^0 \varphi^*)(\partial^0 \varphi) + (\nabla \varphi^*) \cdot (\nabla \varphi) + m_0^2 \varphi^* \varphi] . \quad (2.39)$$

Para encontrar la energía correspondiente tenemos que

$$H_{n\pm} = \int_{L^3} T^0_0(n, \pm) d^3x , \quad (2.40)$$

donde

$$T^0_0(n, \pm) = \frac{1}{2m} [(\partial^0 \varphi_{n\pm}^*)(\partial^0 \varphi_{n\pm}) + (\nabla \varphi_{n\pm}^*) \cdot (\nabla \varphi_{n\pm}) + m^2 \varphi_{n\pm}^* \varphi_{n\pm}] . \quad (2.41)$$

Si sustituimos la ecuación (2.35) en la ecuación (2.41) conseguimos

$$T^0_0(n, \pm) = \frac{1}{2m} \left[\frac{m}{L^3 E_n} E_n^2 + \frac{m}{L^3 E_n} \mathbf{p}_n^2 + m^2 \frac{m}{L^3 E_n} \right] . \quad (2.42)$$

Ahora podemos integrar sobre d^3x para encontrar el hamiltoniano o energía total

$$H_{n\pm} = \int_{L^3} \frac{1}{2m} \left[\frac{m}{L^3 E_n} E_n^2 + \frac{m}{L^3 E_n} \mathbf{p}_n^2 + m^2 \frac{m}{L^3 E_n} \right] d^3x = E_n . \quad (2.43)$$

Lo interesante es que para las dos soluciones en la ecuación (2.35) tenemos energía positiva.

Las subsecciones (2.3.1) y (2.3.2) nos hacen llegar a las siguientes interpretaciones:

- φ_{n+} describe partículas con carga $+e$.
- φ_{n-} describe partículas con carga $-e$.
- Ambas ondas tienen energía positiva E_n .
- El hecho de que aparezca el factor $-E_n$ en la expresión para φ_{n+} corresponde a partículas con carga $+e$.
- $+E_n$ en la expresión de φ_{n-} corresponde a partículas con carga $-e$.

2.4. Propagador

Para una partícula escalar, la ecuación de Klein-Gordon en la presencia de un potencial $V(x)$ es:

$$[\square^2 + m^2 + V(x)]\varphi = 0 . \quad (2.44)$$

Para calcular el propagador no necesitamos saber la forma explícita de $V(x)$. Si queremos resolver (2.44) para φ es conveniente resolver primero la siguiente ecuación

$$[\square^2 + m^2]G(x, y) = \delta^4(x - y)\varphi . \quad (2.45)$$

Como en el caso del fotón, proponemos la solución de la forma

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) - \int d^4y G(x, y)V(y)\varphi(y) ,$$

donde $\varphi_0(x)$ es el campo de Klein-Gordon sin la presencia de el potencial $V(x)$. Verifiquemos que esta solución satisface la ecuación (2.44):

$$[\square^2 + m^2][\varphi(x) = \varphi_0(x) - \int d^4y G(x, y)V(y)\varphi(y)] .$$

Usamos el hecho de que

$$[\square^2 + m^2]\varphi_0(x) = 0 .$$

Entonces

$$[\square^2 + m^2]\varphi(x) = - \int d^4y G(x, y)V(y)\varphi(y)$$

$$[\square^2 + m^2]\varphi(x) = - \int d^4y \delta^4(x - y)V(y)\varphi(y) = -V(x)\varphi(x) ,$$

por lo cual si es solución. Ahora hacemos la transformada de Fourier $G(x, y)$ al espacio de momentos:

$$G(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4S(p) \exp(-ip \cdot (x - y)) .$$

Aplicando el operador $[\square^2 + m^2]$

$$[\square^2 + m^2] \left[G(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4s(p) \exp(-ip(x - y)) \right] ,$$

obtenemos

$$[\square^2 + m^2]G(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4S(p)[\square^2 + m^2] \exp(-ip(x - y)) = \delta^4(x - y) ,$$

de donde concluimos que

$$S(p) = \frac{1}{(p^2 - m^2)} .$$

$S(p)$ se llama propagador escalar en el espacio de momentos. En los próximos capítulos estudiaremos las interacciones entre los escalares cargados y los fotones.

Capítulo 3

ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA ESCALAR.

3.1. Interacción entre los escalares y los fotones

Recordemos que una partícula escalar libre de masa m satisface la ecuación de Klein-Gordon (2.7)

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi = 0 .$$

Por otro lado, también conocemos la ecuación de movimiento de un fotón libre. En electrodinámica clásica, el movimiento de una partícula de carga e en un potencial electromagnético $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ se obtiene haciendo la sustitución mínima

$$p^\mu \longrightarrow p^\mu - eA^\mu .$$

La correspondiente sustitución en mecánica cuántica es entonces

$$\partial^\mu \longrightarrow \partial^\mu + ieA^\mu .$$

La ecuación de Klein-Gordon se escribe en este caso en la forma

$$(\square^2 + m^2 + V(x))\varphi = 0 , \tag{3.1}$$

Con la identificación

$$V(x)\varphi = [-ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) - e^2 A^\mu A_\mu] \varphi . \tag{3.2}$$

Podemos llamar a $V(x)$ potencial electromagnético. Por la modificación de la ecuación de Klein-Gordon, esperamos un cambio correspondiente en la ecuación de continuidad, la corriente conservada y el lagrangiano. Esto es lo que estudiaremos a continuación.

3.1.1. Lagrangiano

El lagrangiano que nos da la ecuación de movimiento (3.1) es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2m}[(\mathcal{D}_\mu\varphi)^*(\mathcal{D}_\mu\varphi)] , \quad (3.3)$$

donde

$$\mathcal{D}_\mu = i\partial_\mu + eA_\mu , \quad \mathcal{D}_\mu^* = -i\partial_\mu + eA_\mu . \quad (3.4)$$

\mathcal{D}_μ se llama la derivada covariante. En forma explícita escribimos la ecuación (3.3) como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) + \frac{1}{2m}[(\partial_\mu\varphi^*)\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi] \\ & + \frac{ie}{2m}[\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*]A_\mu + \frac{e^2}{2m}[\varphi^*A^\mu\varphi]A_\mu . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Por cuestiones de renormalizabilidad que no abordamos en esta tesis hay que agregar un término $-\frac{\lambda}{4}(\varphi^*\varphi)^2$ en el lagrangiano (3.3) o (3.5). Por lo tanto la expresión final para el lagrangiano es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) + \frac{ie}{2m}[\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*]A_\mu + \frac{e^2}{2m}[\varphi^*A^\mu\varphi]A_\mu \\ & + \frac{1}{2m}[(\partial_\mu\varphi^*)\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi - m^2\varphi^*\varphi] - \frac{\lambda}{4}(\varphi^*\varphi)^2 , \end{aligned} \quad (3.6)$$

este lagrangiano se llama lagrangiano de la electrodinámica cuántica escalar (QED) y gobierna las interacciones entre los fotones y los escalares cargados. Ahora descomponemos este lagrangiano en tres partes obvias :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{foton\ libre} + \mathcal{L}_{escalar\ cargado\ libre} + \mathcal{L}_{interaccion} ,$$

donde

$$\mathcal{L}_{foton\ libre} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) ,$$

$$\mathcal{L}_{escalar\ cargado\ libre} = \frac{1}{2m}[(\partial_\mu\varphi^*)\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi] ,$$

$$\mathcal{L}_{interaccion} = +\frac{ie}{2m}[\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*]A_\mu + \frac{e^2}{2m}[\varphi^* A^\mu \varphi]A_\mu - \frac{\lambda}{4}(\varphi^* \varphi)^2 .$$

Estos tres términos tienen significado físico muy claro y obvio. Podemos aplicar una variación para cada uno de los campos existentes en este lagrangiano que son φ , φ^* y A_α . Para A_α , la ecuación de Euler-Lagrange es la dada por (1.12)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} \right) = 0 . \quad (3.7)$$

Utilizando la ecuación (3.5), obtenemos:

$$\square^2 A^\mu - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu , \quad (3.8)$$

donde j^μ esta dada por (3.15). Notamos que es la misma ecuación (1.23) que se obtuvo del lagrangiano del fotón con interacciones, es decir Ec. (1.22). Sin embargo, hay una diferencia obvia, ya sabemos la forma explicita de j^μ , dada por la ecuación (3.15). Es importante notar que para partículas de diferentes espines, j^μ sera diferente. Para φ^* la ecuación de Euler-Lagrange (2.22):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} - \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi^*)} \right) = 0 ,$$

implica

$$\square^2 \varphi + m^2 \varphi - ie[A_\mu \partial^\mu \varphi + \partial^\mu (\varphi A_\mu)] - e^2 A^\mu \varphi A_\mu + \frac{\lambda}{2} \varphi^2 \varphi^* = 0 . \quad (3.9)$$

Similarmente para φ , donde se utiliza la ecuación (2.19) tenemos

$$\square^2 \varphi^* + m^2 \varphi^* + ie[A_\mu \partial^\mu \varphi^* + \partial^\mu (\varphi^* A_\mu)] - e^2 A^\mu \varphi^* A_\mu + \frac{\lambda}{2} (\varphi^*)^2 \varphi = 0 . \quad (3.10)$$

Estas expresiones modifican a las ecuaciones (3.1) y (3.12). Ahora tenemos

$$(\square^2 + m^2 + V(x))\varphi = 0 ,$$

donde el potencial de interacción es

$$V(x)\varphi = \left[-ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) - e^2 A^\mu A_\mu + \frac{\lambda}{2} \varphi^* \varphi \right] \varphi . \quad (3.11)$$

3.1.2. Corriente conservada

Para obtener la corriente conservada procedemos de la manera usual. Tomamos el complejo conjugado de la ecuación (3.1)

$$(\square^2 + m^2 + V^*(x))\varphi^* = 0 . \quad (3.12)$$

Si multiplicamos (3.1) por φ^* y (3.12) por φ del lado izquierdo, y las restamos usando (3.11) obtenemos:

$$\partial_\mu(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*) - 2ie \partial_\mu(\varphi^* A^\mu \varphi) = 0 . \quad (3.13)$$

Para asignar dimensiones apropiadas a la corriente multiplicamos la relación (3.13) por $ie/2m$ y conseguimos

$$-\frac{ie}{2m} \partial_\mu(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*) - \frac{e^2}{m} \partial_\mu(\varphi^* A^\mu \varphi) = 0 . \quad (3.14)$$

Si comparamos la ecuación (3.14) con la ecuación $\partial_\mu j^\mu = 0$, podemos identificar

$$j^\mu = -\frac{ie}{2m}(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*) - \frac{e^2}{m}(\varphi^* A^\mu \varphi) . \quad (3.15)$$

Notamos que en ausencia de interacciones, el segundo término es cero y la ecuación (3.15) se reduce a la ecuación (2.24) como esperamos.

3.2. Reglas de Feynman

Una vez que sabemos el lagrangiano podemos proceder a estudiar procesos de dispersión entre fotones y escalares cargados. Sin embargo, primero necesitamos desarrollar teoría de dispersiones para partículas relativistas. En principio el camino formal es la teoría cuántica de campos, derivando las reglas de Feynman y aplicándolas en procesos de dispersiones. Nos restringiremos a la mecánica cuántica relativista motivando la teoría de dispersión relativista basada en la teoría no relativista y así identificando las reglas de Feynman.

3.2.1. Amplitud de transición

Consideremos una partícula dentro de un volumen V . La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo correspondiente es

$$H_0\varphi_n = E_n\varphi_n , \quad (3.16)$$

donde H_0 es el hamiltoniano independiente del tiempo. Dentro del volumen V podemos normalizar φ_n como

$$\int_V \varphi_m^* \varphi_n d^3x = \delta_{mn} . \quad (3.17)$$

Ahora hacemos que actúe un potencial $V(\mathbf{x}, t)$. La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es

$$[H_0 + V(\mathbf{x}, t)]\psi(\mathbf{x}, t) = i\partial_0\psi(\mathbf{x}, t) . \quad (3.18)$$

Queremos calcular la evolución de ψ bajo la influencia del potencial V . Como φ_n da una base completa, siempre podemos expandir $\psi(\mathbf{x}, t)$ en esta base:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_n b_n(t)\varphi_n(\mathbf{x}) . \quad (3.19)$$

Ahora definimos

$$b_n(t) = a_n(t)e^{-iE_n t} , \quad (3.20)$$

y entonces

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_n a_n(t)e^{-iE_n t}\varphi_n(\mathbf{x}) . \quad (3.21)$$

La evolución en el tiempo de $\psi(\mathbf{x}, t)$ puede ser completamente determinada si podemos calcular la evolución en el tiempo de $a_n(t)$. Si sustituimos (3.21) en la ecuación (3.18) obtenemos:

$$i \sum_n \partial_0 a_n(t)\varphi_n(\mathbf{x})e^{-iE_n t} = \sum_n V(\mathbf{x}, t)a_n(t)\varphi_n(\mathbf{x})e^{-iE_n t} . \quad (3.22)$$

Suponemos que φ_i representa el estado inicial de la partícula, antes de que $V(\mathbf{x}, t)$ empiece a actuar, y φ_f representa el estado final después de que $V(\mathbf{x}, t)$ deje de actuar. Si multiplicamos por φ_f^* e integramos sobre el volumen V encontramos

$$\partial_0 a_f(t) = -i \sum_n a_n(t) \int_V d^3x \varphi_f^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}, t) \varphi_n(\mathbf{x}) e^{i(E_f - E_n)t} . \quad (3.23)$$

Suponemos que $V(\mathbf{x}, t)$ empieza a actuar a $t = -T/2$. Como la partícula en este tiempo esta seguramente en el estado inicial,

$$\begin{aligned} a_i(-T/2) &= 1 , \\ a_n(-T/2) &= 0 \quad n \neq i . \end{aligned} \quad (3.24)$$

La ecuación (3.23) con estas condiciones nos da:

$$\partial_0 a_f(t) = -i \int d^3x \varphi_f^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}, t) \varphi_i(\mathbf{x}) e^{i(E_f - E_i)t} \Big|_{-T/2} . \quad (3.25)$$

Consideramos $f \neq i$ y que el potencial es muy chico y actúa por poco tiempo. Entonces $a_f \ll 1$ para toda t . Si integramos la ecuación (3.25) tenemos

$$a_f(t) \Big|_{-T/2}^t = \int_{-T/2}^t dt d^3x \varphi_f^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}, t) \varphi_i(\mathbf{x}) e^{i(E_f - E_i)t} . \quad (3.26)$$

Como $f \neq i$, $a_f(-T/2) = 0$. Por lo tanto,

$$a_f(t) = \int_{-T/2}^t dt d^3x \varphi_f^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}, t) \varphi_i(\mathbf{x}) e^{i(E_f - E_i)t} . \quad (3.27)$$

Notemos que si el potencial $V(\mathbf{x}, t)$ fuera cero, obtendríamos $a_f(t) = 0$ exactamente. Ahora a $t = T/2$, cuando el potencial deja de actuar sobre la partícula tenemos:

$$a_f(T/2) = -i \int_{-T/2}^{+T/2} dt \int d^3x \varphi_f^* e^{iE_f t} V(\mathbf{x}, t) \varphi_i e^{-iE_i t} . \quad (3.28)$$

$a_f(T/2)$ es llamada la amplitud de transición y es común representarla con T_{fi} . Por lo tanto,

$$T_{fi} = -i \int_{-T/2}^{+T/2} dt \int d^3x [\varphi_f e^{-iE_f t}]^* V(\mathbf{x}, t) [\varphi_i e^{-iE_i t}] , \quad (3.29)$$

$$T_{fi} = -i \int d^4x \varphi_f^*(x) V(x) \varphi_i(x) , \quad (3.30)$$

donde $x = (\mathbf{x}, t)$ y $\varphi_i(x) = \varphi_i(\mathbf{x}) e^{-iE_i t}$. Esta es la forma covariante de la amplitud de transición, y es entonces una forma natural de continuar en el régimen relativista. $|T_{fi}|^2$ se puede interpretar como la probabilidad de que una partícula en el estado inicial φ_i se disperse al estado final φ_f después de sufrir la interacción. La contraparte relativista de la ecuación de Schrödinger es la ecuación de Klein-Gordon. Si asumimos que la ecuación (3.30) es correcta relativísticamente, podemos tomar el problema de dispersión para partículas de espín cero. De la ecuación (3.1) sabemos que la ecuación de Klein-Gordon en la presencia de un potencial electromagnético se escribe como

$$(\square^2 + m^2)\varphi = -V\varphi ,$$

donde V está dado por (3.11)

$$V(x)\varphi = \left[-ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) - e^2 A^\mu A_\mu + \frac{\lambda}{2} \varphi^* \varphi \right] \varphi .$$

Si sustituimos este potencial en la ecuación de la amplitud de transición (3.30) obtenemos

$$T_{fi} = -i \int d^4x \varphi_f^*(x) \left[-ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) - e^2 A^\mu A_\mu + \frac{\lambda}{2} \varphi^* \varphi \right] \varphi_i(x) . \quad (3.31)$$

Esta ecuación nos da la amplitud de transición para la dispersión de una partícula sin espín (la llamaremos electrón) de un estado φ_i a un estado φ_f en la presencia de un potencial electromagnético. Observemos el primer término de la ecuación (3.31)

$$\int d^4x \varphi_f^*(x) \partial_\mu (A^\mu \varphi_i(x)) = \varphi_f^*(x) A^\mu \varphi_i(x) |_S - \int d^4x (\partial_\mu \varphi_f^*) A^\mu \varphi_i(x) ,$$

donde S representa la frontera del volumen V . Suponemos que el potencial $V(\mathbf{x}, t)$ desaparece cuando $|\mathbf{x}|$ y $t \rightarrow \infty$. Esto requiere que $A_\mu \rightarrow 0$. Por lo tanto

$$\int d^4x \varphi_f^*(x) \partial_\mu (A^\mu \varphi_i(x)) = - \int d^4x (\partial_\mu \varphi_f^*) A^\mu \varphi_i(x) .$$

Con esto, la ecuación (3.31) se transforma en:

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int d^4x \left[-ie(\varphi_f^* A^\mu \partial_\mu \varphi_i - (\partial_\mu \varphi_f^*) A^\mu \varphi_i) - e^2 \varphi_f^* A^\mu A_\mu \varphi_i + \frac{\lambda}{2} \varphi_f^* \varphi^* \varphi_i \right] \\ &= -i \int d^4x j_{fi}^\mu A_\mu - i \frac{\lambda}{2} \int d^4x \varphi_f^* \varphi^* \varphi_i , \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde

$$j_{fi}^\mu = -ie(\varphi_f^* \partial^\mu \varphi_i - (\partial^\mu \varphi_f^*) \varphi_i) - e^2 \varphi_f^* A^\mu \varphi_i. \quad (3.33)$$

Podemos llamar a j_{fi}^μ corriente de transición. La expresión (3.32) nos ayuda a pensar en términos de los diagramas de Feynman, lo veremos enseguida.

3.2.2. Diagramas de Feynman

Hemos visto T_{fi} para la dispersión de un electrón en un potencial electromagnético A^μ (fotón). Las ecuaciones (3.32) y (3.33) nos permiten escribir

$$\begin{aligned} T_{fi} = & -e \int d^4x [\varphi_f^*(x) \partial_\mu \varphi_i(x) - (\partial_\mu \varphi_f^*(x)) \varphi_i(x)] A^\mu(x) \\ & + ie^2 \int d^4x \varphi_f^*(x) A_\mu(x) \varphi_i(x) A^\mu(x) - i \frac{\lambda}{2} \int d^4x \varphi_f^* \varphi^* \varphi \varphi_i. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Los dos primeros términos se pueden interpretar como el siguiente diagrama:

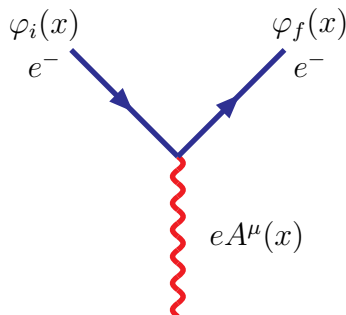


Figura 1: Interacción de Tres Puntos

Escribimos la ecuación (3.11) como $V = V_1 + V_2$, donde

$$V_1 = -ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu), \quad (3.35)$$

$$V_2 = -e^2 A^\mu A_\mu. \quad (3.36)$$

$$V_3 = \frac{\lambda}{2} \varphi^* \varphi \quad (3.37)$$

Ahora podemos interpretar la Figura 1 de la siguiente manera: Una partícula en el estado φ_i interactúa con el potencial V_1 dado por la ecuación (3.35) y se dispersa en el estado final φ_f . El tercer término de la ec. (3.34) se puede representar con el siguiente diagrama

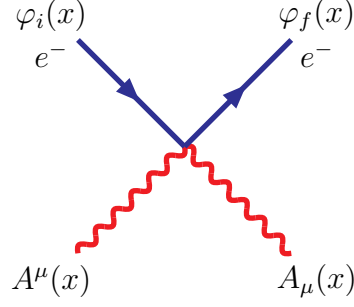


Figura 2: Interacción de Cuatro Puntos escalar-fotón

Este diagrama representa una partícula en el estado φ_i que interactúa con el potencial V_2 dado por (3.36) y se dispersa en el estado final φ_f . El cuarto término de la ec. (3.34) se puede representar con el siguiente diagrama

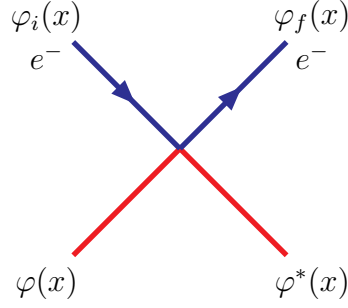


Figura 3: Interacción de Cuatro Puntos escalar

Este diagrama representa una partícula en el estado φ_i que interactúa con el potencial V_3 dado por la ec. (3.37) y se dispersa en el estado final φ_f . Para simplificar el cálculo, no consideraremos los diagramas en los cuales la partícula interactúa con el potencial V_2 de la ecuación (3.36). La razón es que e^2 es mucho más chico que e . Por lo tanto $V_2 \ll V_1$. Por ahora también despreciamos V_3 asumiendo que $\lambda \ll e$. Entonces las ecuaciones (3.32) y (3.33) se reducen a

$$\begin{aligned}
 T_{fi} &= -i \int d^4x [-ie(\varphi_f^* A^\mu \partial_\mu \varphi_i - (\partial_\mu \varphi_f^*) A^\mu \varphi_i)] \\
 &= -i \int d^4x j_{fi}^\mu A_\mu,
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

donde

$$j_{fi}^\mu = -ie[\varphi_f^* \partial^\mu \varphi_i - (\partial^\mu \varphi_f^*) \varphi_i] . \quad (3.39)$$

Si la partícula sin espín tiene momento inicial p_i y momento final p_f entonces podemos escribir su estado inicial y su estado final como

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= N_i e^{-ip_i \cdot x} , \\ \varphi_f(x) &= N_f e^{-ip_f \cdot x} , \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde N_i y N_f son constantes de normalización. Si sustituimos las ecuaciones de (3.40) en (3.39) conseguimos

$$j_{fi}^\mu = -eN_i N_f (p_i + p_f)^\mu e^{i(p_f - p_i) \cdot x} . \quad (3.41)$$

3.2.3. Dispersión $e^- \mu^- \longrightarrow e^- \mu^-$ y las Reglas de Feynman

Los fotones de los diagramas 1 y 2 pueden ser considerados como emitidos por el electrón o también podemos considerar que estos fotones vienen de algún otro lado y son absorbidos por electrón. En el segundo caso podemos pensar que el origen de estos fotones es alguna otra partícula cargada sin espín llamada muón. Ahora la amplitud de transición en la dispersión $e^- \mu^- \longrightarrow e^- \mu^-$ en términos de los diagramas de Feynman se verá de la siguiente manera

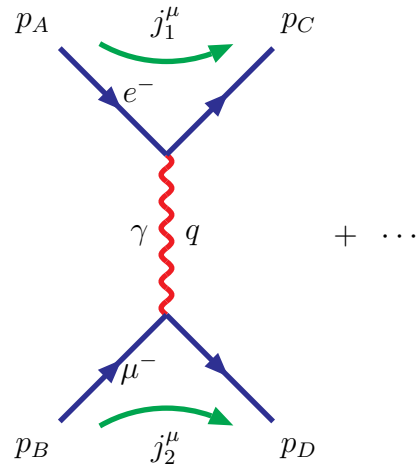


Figura 3: Dispersión de Electrón-Muon a Nivel Árbol

La sumatoria de la figura 3 contiene términos de orden $\mathcal{O}(e^4)$. La amplitud de transición para el proceso $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ se puede escribir como

$$T_{fi} = -i \int d^4x j_1^\mu A_\mu . \quad (3.42)$$

Tomando el muón como la fuente del fotón A_μ , podemos escribir

$$\square^2 A^\mu = j_2^\mu \quad (3.43)$$

Usando la relación (3.41) para la corriente j_2^μ , tenemos

$$j_2^\mu = -e N_B N_D (p_B + p_D)^\mu e^{i(p_D - p_B) \cdot x} . \quad (3.44)$$

Aplicando \square^2 sobre esta expresión conseguimos

$$\square^2 j_2^\mu = [-(p_D - p_B)^2] j_2^\mu .$$

Por lo tanto

$$\square^2 \left[-\frac{1}{(p_D - p_B)^2} j_2^\mu \right] = j_2^\mu . \quad (3.45)$$

Así que si comparamos (3.45) y (3.43) obtenemos

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j_2^\mu ,$$

donde

$$q^2 = (p_D - p_B)^2 . \quad (3.46)$$

Notemos que $q^2 = p_D^2 + p_B^2 - 2p_B \cdot p_D \neq 0$. La amplitud de transición resulta entonces

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^1(x) \left[-\frac{1}{q^2} \right] j_2^\mu(x) d^4x . \quad (3.47)$$

Si sustituimos (3.44) en (3.47) obtenemos junto con un expresión similar para j_μ^1 , obtenemos:

$$T_{fi} = -i \int d^4x [-e N_A N_C (p_A + p_C)^\mu e^{i(p_C - p_A) \cdot x}] \left(-\frac{1}{q^2} \right) [-e N_B N_D (p_A + p_C)^\mu e^{i(p_B - p_D) \cdot x}] . \quad (3.48)$$

Usando el hecho de que

$$\int d^4x e^{i(p_C + p_D - p_A - p_B) \cdot x} = \delta^4(p_C + p_D - p_A - p_B), \quad (3.49)$$

podemos reescribir (3.48) como:

$$T_{fi} = -iN_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^4(p_C + p_D - p_A - p_B) \mathcal{M}, \quad (3.50)$$

$$(3.51)$$

donde

$$\mathcal{M} = e(p_A + p_C)^\mu \left(-\frac{1}{q^2} \right) e(p_B + p_D)_\mu, \quad (3.52)$$

o en una manera más comun,

$$-i\mathcal{M} = [ie(p_A + p_C)^\mu] \left[\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \right] [ie(p_B + p_D)^\nu]. \quad (3.53)$$

\mathcal{M} es llamada amplitud invariante y es invariante bajo las transformaciones de Lorentz. La función δ en T_{fi} corresponde a la conservación de momento y energía. Feynman descubrió que la amplitud invariante se puede representar con un diagrama de Feynman. Un diagrama de Feynman consiste de líneas y vértices. Cada línea interna representa la propagación de una partícula en un punto del espacio-tiempo, y los vértices son los puntos donde las partículas son creadas o destruidas. Dibujamos el diagrama de la Figura 4 de nuevo para explicar sus varias partes:

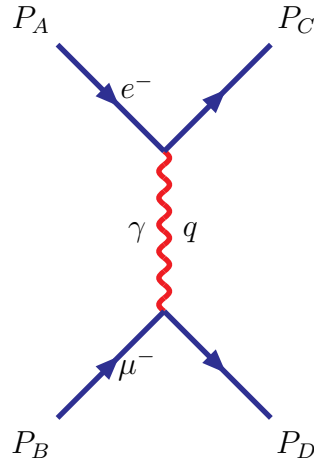


Figura 4: Dispersión de Electrón-muón a nivel árbol.

En este diagrama las líneas

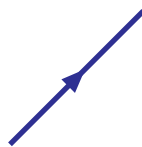


Figura 5: Las Partículas Escalares Externas.

representan las partículas externas escalares e^- y μ^- respectivamente. El propagador del fotón se representa con



Figura 6: El Propagador Fotónico.

Los vértices son los puntos donde se juntan tres líneas en el diagrama como podemos ver en la siguiente figura

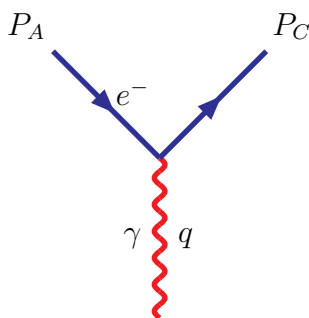
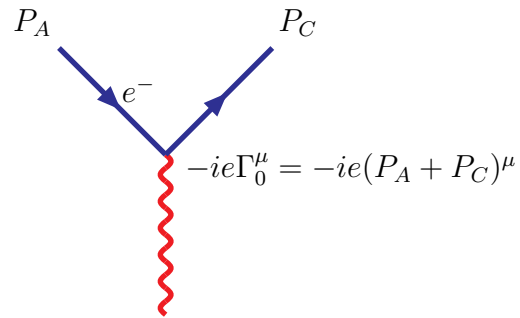


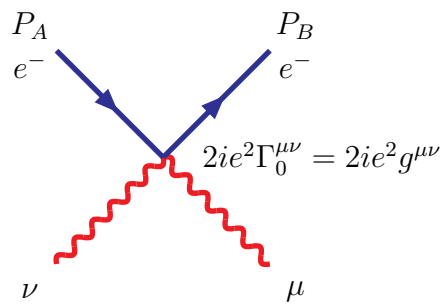
Figura 7: El Vértice Escalar-Photón.

Existen más partes que se encuentran en la dispersión $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$. Las reglas de Feynman nos dicen como asociamos un número a cada parte de un diagrama. Estas reglas son las siguientes:

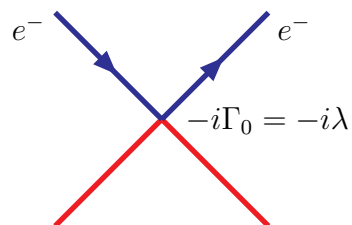
- **Regla 1:** Un factor $-ie\Gamma_0^\mu = -ie(P_A + P_C)^\mu$ para el vértice de un fotón



- **Regla 2:** Un factor $2ie^2\Gamma_0^{\mu\nu} = 2ie^2g^{\mu\nu}$ para el vértice de dos fotones




- **Regla 3:** Un factor $-i\Gamma_0 = -i\lambda$ para el vértice de dos escalares



- **Regla 4:** Un factor


$$i\Delta_0^{\mu\nu}(q) = \frac{-i}{q^2} \left[g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right] \quad (3.54)$$

para el propagador de fotón (o la línea interna de un fotón)



$$i\Delta_0^{\mu\nu}(q) = \frac{-i}{q^2} \left[g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right]$$

- **Regla 5:** Un factor $iS^0(p) = i/(p^2 - m^2)$ para el propagador de partículas escalares (espín 0) (o la línea interna de un escalar)



$$iS^0(p) = i/(p^2 - m^2)$$

- **Regla 6:** Un factor de vector de polarización ε^μ para un fotón entrante y su conjugado $\varepsilon^{\mu*}$ para un fotón saliente



- **Regla 7:** Un factor de 1 para un bosón entrante o saliente



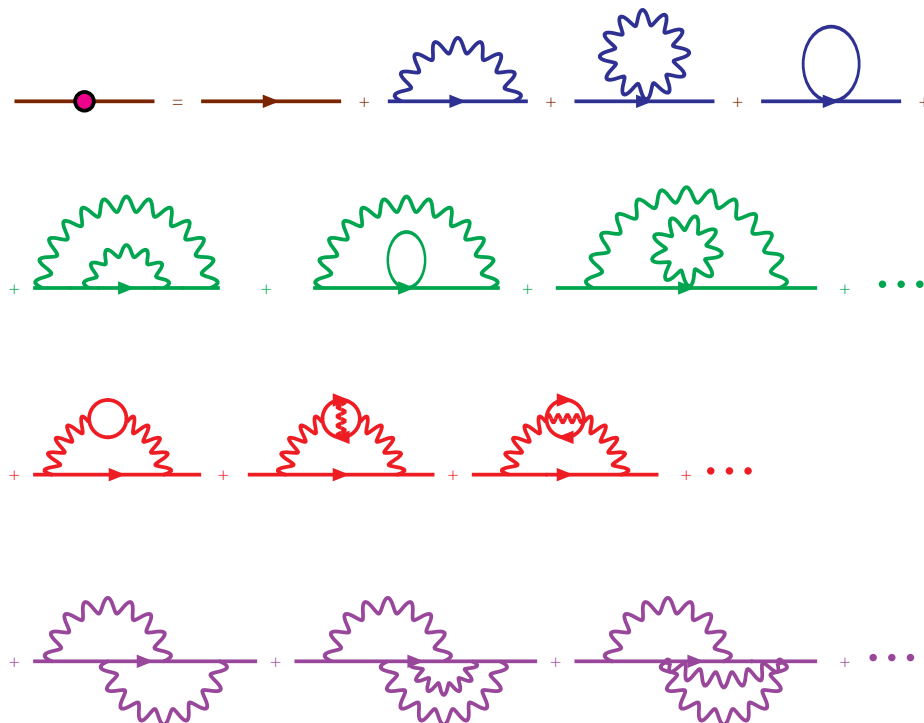
Ahora que sabemos las reglas de Feynman para varias partes de diagramas de Feynman, nos enfocaremos únicamente en el propagador de fermión y como se modifica en los próximos ordenes en la teoría de perturbaciones. La razón principal es que la invariancia de norma impone restricciones importantes sobre el propagador escalar. Esto es lo que estudiamos en el próximo capítulo.

Capítulo 4

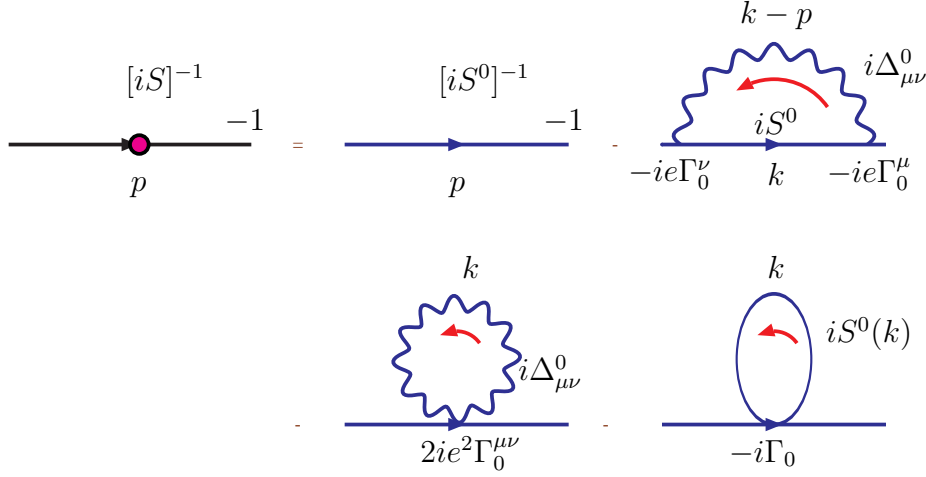
PROPAGADOR ESCALAR A UN LAZO.

4.1. Propagador escalar a un lazo

En los capítulos anteriores, introducimos propagadores de una partícula escalar y de un fotón, a nivel árbol en una expansión perturbativa. Estos propagadores se modifican a través de autointeracciones. Un electrón (sin espín) puede emitir y reabsorber fotones de varias maneras como muestra el diagrama :



Como se muestra, este proceso genera una serie infinita. Según vemos en la figura, utilizamos una pelotita en el lado izquierdo para representar la suma de todas las autointeracciones que pueden afectar a la partícula escalar en su propagación. A este propagador lo llamaremos propagador completo, mientras que al propagador que no emite y recaptura fotones (primer término en el lado derecho de la ecuación) lo llamaremos propagador desnudo. Si nos restringimos a nivel de un lazo, nos quedamos únicamente con la siguiente parte para el inverso del propagador escalar :



La ecuación correspondiente a este diagrama utilizando las reglas de Feynman es :

$$\begin{aligned}
 [iS(p)]^{-1} &= [iS^0(p)]^{-1} - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [-ie\Gamma_0^\nu] [iS^0(k)] [-ie\Gamma_0^\mu] [i\Delta_{\mu\nu}^0(k-p)] \\
 &\quad - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [2ie^2\Gamma_0^{\mu\nu}] [i\Delta_{\mu\nu}^0(k)] - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [iS^0(k)] [-i\Gamma_0]. \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Observemos que la segunda integral de la ec.(4.1) es cero ya que tiene la forma de la ec. (A.1) dada en el apéndice A. Si multiplicamos (4.1) por i y las formas explícitas de las funciones desnudas de Green obtenemos

$$\begin{aligned}
 S^{-1} &= [S^0]^{-1} + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (k+p)^\nu \frac{1}{k^2 - m^2} (k+p)^\mu \frac{1}{q^2} \left[g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \\
 &\quad - i\lambda \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - m^2}, \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

donde $q = k - p$ y ξ es el parámetro covariante de norma.

4.1.1. Norma de Feynman

La ec. (4.2) para la norma de Feynman ($\xi = 1$)

$$S_{Feynman}^{-1} = [S^0]^{-1} + ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k+p)^2}{(k^2 - m^2)q^2} - i\lambda \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - m^2}, \quad (4.3)$$

donde usamos el hecho de que $A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} = A \cdot B$ y $(k+p) \cdot (k+p) = (k+p)^2$. Vamos a mostrar que las integrales por resolver se pueden escribir de la forma

$$J_{np} = \int d^d k \frac{1}{(q^2)^n (k^2 - m^2)^p}. \quad (4.4)$$

La segunda integral en (4.3) es J_{01} . La primera integral se puede escribir como

$$J = \int d^d k \frac{(k+p)^2}{(k^2 - m^2)q^2} = \int d^d k \frac{k^2 + p^2 + 2k \cdot p}{(k^2 - m^2)q^2}. \quad (4.5)$$

La definición del momento q^2 es $q^2 = (k-p)^2 = k^2 + p^2 - 2k \cdot p$. Despejando $2k \cdot p = -q^2 + k^2 + p^2$ y sustituyendo esta expresión en (4.5) tenemos que

$$J = \int d^d k \frac{2k^2 + 2p^2 - q^2}{(k^2 - m^2)q^2}. \quad (4.6)$$

Por lo tanto, sumando y restando $2m^2$ obtenemos

$$J = 2 \underbrace{\int d^d k \frac{1}{q^2}}_{J_{10}} + 2(m^2 + p^2) \underbrace{\int d^d k \frac{1}{(k^2 - m^2)q^2}}_{J_{11}} - \underbrace{\int d^d k \frac{1}{k^2 - m^2}}_{J_{01}}. \quad (4.7)$$

El conocimiento de J_{10} , J_{01} y J_{11} es suficiente para calcular el propagador escalar en la norma de Feynman. La primera integral J_{10} es cero debido a que es de la forma

$$\int d^d w f(w) = 0 \quad (4.8)$$

Ahora de la integral J_{np} evaluada en el apéndice A deducimos las integrales J_{01} y J_{11}

$$J_{01} = \int d^d k \frac{1}{k^2 - m^2} = -i\pi^{d/2} \Gamma(1 - d/2) (m^2)^{d/2-1}. \quad (4.9)$$

$$J_{11} = i\pi^{d/2} \frac{\Gamma(2 - d/2) \Gamma(d/2 - 1)}{\Gamma(d/2)} (m^2)^{\frac{d}{2}-2} {}_2F_1 \left(2 - \frac{d}{2}, 1; \frac{d}{2}; \frac{p^2}{m^2} \right). \quad (4.10)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
J &= 2i\pi^{d/2}(m^2 + p^2)(m^2)^{\frac{d}{2}-2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{d}{2})} {}_2F_1\left(2 - \frac{d}{2}, 1; \frac{d}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \\
&\quad + i\pi^{d/2}\Gamma(1 - d/2)(m^2)^{d/2-1} .
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Finalmente, el inverso del propagador escalar en d dimensiones en la norma de Feynman es:

$$\begin{aligned}
S_{Feynman}^{-1} &= p^2 - m^2 - \frac{e^2}{(2\pi)^d} \left[2\pi^{d/2}(m^2 + p^2)(m^2)^{\frac{d}{2}-2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{d}{2})} \times \right. \\
&\quad \left. {}_2F_1\left(2 - \frac{d}{2}, 1; \frac{d}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) + \left(1 + \frac{\lambda}{e^2}\right) \pi^{d/2}\Gamma(1 - d/2)(m^2)^{d/2-1} \right] .
\end{aligned}$$

En la próxima subsección, generalizaremos esta expresión a una norma arbitraria ξ .

4.1.2. Norma Arbiraria

Ahora resolvemos la ec. (4.2) para el caso general, es decir para dimension y norma arbitraria, donde solamente nos resta resolver la última integral del primer renglón pues las demás ya fueron resueltas en la subsección anterior :

$$\begin{aligned}
\mathbb{J} &= \int d^d k \frac{(k+p)^\nu (k+p)^\mu q_\mu q_\nu}{(k^2 - m^2)q^4} = \int d^d k \frac{[(k+p) \cdot (k-p)][(k+p) \cdot (k-p)]}{(k^2 - m^2)q^4} \\
&= \int d^d k \frac{(k^2 - p^2)^2}{(k^2 - m^2)q^4} = \int d^d k \frac{k^4 + p^4 - 2k^2 p^2}{(k^2 - m^2)q^4} .
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Sumamos y restamos m^2 dos veces, tal que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{J} &= \int d^d k \frac{k^2(k^2 - m^2 + m^2)}{(k^2 - m^2)q^4} + p^4 \underbrace{\int d^d k \frac{1}{(k^2 - m^2)q^4}}_{J_{21}} \\
&\quad - 2p^2 \int d^d k \frac{k^2 - m^2 + m^2}{(k^2 - m^2)q^4} .
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Simplificando algunas operaciones algebraicas y usando (4.8) obtenemos

$$\mathbb{J} = (m^2 - p^2)^2 J_{21} . \tag{4.14}$$

De nuevo usamos la integral J_{np} del apendice A y encontramos:

$$\mathbb{J} = (m^2 - p^2)^2 \left[-i\pi^{d/2}(m^2)^{\frac{d}{2}-3} \frac{\Gamma(3 - \frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2} - 2)}{\Gamma(\frac{d}{2})} {}_2F_1\left(-\frac{d}{2} + 3, 2; \frac{d}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \right] . \tag{4.15}$$

Finalmente el propagador escalar en dimensiones y norma arbitraria se escribe como

$$\begin{aligned}
S^{-1}(p) = & p^2 - m^2 - \frac{e^2}{(2\pi)^d} \pi^{d/2} (m^2)^{\frac{d}{2}-1} \left\{ \Gamma(1 - d/2) \right. \\
& + 2(m^2 + p^2)(m^2)^{-1} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{d}{2})} {}_2F_1\left(2 - \frac{d}{2}, 1; \frac{d}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \\
& + (1 - \xi)(m^2 - p^2)^2 (m^2)^{-2} \frac{\Gamma(3 - \frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2} - 2)}{\Gamma(\frac{d}{2})} \times \\
& \left. {}_2F_1\left(3 - \frac{d}{2}, 2; \frac{d}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \right\} - \frac{\lambda}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) (m^2)^{d/2-1}. \quad (4.16)
\end{aligned}$$

En las siguientes secciones veremos los casos particulares del propagador escalar a un lazo en $d = 3$ y $d = 4 - 2\epsilon$ en el limite $\epsilon \rightarrow 0$.

4.1.3. Propagador en tres dimensiones

Para $d = 3$ el propagador escalar a nivel de un lazo es:

$$\begin{aligned}
S^{-1} = & p^2 - m^2 - \frac{e^2}{(2\pi)^3} \pi^{3/2} (m^2)^{1/2} \left\{ \Gamma(-1/2) + 2(m^2 + p^2)(m^2)^{-1} \times \right. \\
& \frac{[\Gamma(1/2)]^2}{\Gamma(3/2)} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) + (1 - \xi)(m^2 - p^2)^2 (m^2)^{-2} \times \\
& \left. \Gamma(-1/2) {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, 2; \frac{3}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \right\} - \frac{\lambda}{(4\pi)^{3/2}} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) (m^2)^{3/2-1}. \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Usando los siguientes resultados

$${}_2F_1\left(\frac{3}{2}, 2; \frac{3}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) = \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right)^{-2}, \quad {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) = \frac{\tanh^{-1} \sqrt{p^2/m^2}}{\sqrt{p^2/m^2}}, \quad (4.18)$$

$$\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \quad (4.19)$$

Después de simplificar (4.17) obtenemos que el propagador escalar en el espacio de Minkowski en tres dimensiones y norma arbitraria es

$$S^{-1} = p^2 - m^2 + \frac{e^2}{4\pi} \left[m - \frac{2(m^2 + p^2)}{m} \sqrt{\frac{m^2}{p^2}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + (1-\xi)m} \right] + \frac{\lambda\sqrt{m^2}}{4\pi}. \quad (4.20)$$

Notamos que para $d = 3$, no hay divergencias. En el espacio Euclideo esta expresión es

$$S^{-1} = -p^2 - m^2 + \frac{e^2}{4\pi} \left[m - \frac{2(m^2 - p^2)}{p} \tan^{-1} \left(\frac{p}{m} \right) + (1 - \xi)m \right] + \frac{\lambda m}{4\pi}. \quad (4.21)$$

Para $m = 0$, tenemos

$$S(p) = \frac{1}{p^2 + \alpha\pi p} \quad (4.22)$$

en el espacio de Minkowski, usando la notación $p = \sqrt{-p^2}$. A momentos pequeños, el propagador escalar se suaviza de $1/p^2$ a $1/p$.

4.1.4. Propagador escalar en cuatro dimensiones

Regresamos a la expresión (4.16) del propagador escalar en el espacio de Minkowski a un lazo en SQED en norma y dimensiones arbitrarias. En este caso el problema no es tan simple como para el propagador en tres dimensiones ya que la función Γ es divergente para $d = 4$. Aunque es fácil expandir en Γ en potencias de ϵ , lo que no es trivial es la expansión de las funciones hipergeométricas en potencias de sus parametros. Por lo tanto lo que hacemos es expandir esta expresión en serie de Taylor cuando $z = \frac{p^2}{m^2}$ es muy pequeño :

$$\begin{aligned} S^{-1} = & -m^2(1+z) + \frac{(m^2)^{d/2-1}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(4\pi)^{d/2}} \left\{ e^2 \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \left[\frac{8z}{d} - 2 \right] \right. \\ & - (e^2 + \lambda) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) + e^2(-1 + \xi) \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(-2 + \frac{d}{2}\right) \\ & \left. \times \left(1 + \frac{12z}{d} + z\right) \right\} + \mathcal{O}(z)^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Y ahora usamos $d = 4 - 2\epsilon$ en el limite $\epsilon \rightarrow 0$. Como ϵ es un valor que se aproxima a cero podemos desarrollar en series para este párametro y así obtener el propagador en cuatro dimensiones para una partícula escalar hasta $\mathcal{O}(\alpha, z, \epsilon^0)$

$$\begin{aligned}
S^{-1} = & -m^2(1+z) - m^2\nu \left[1 - \frac{z}{2} - (1+z) \left(\gamma - 2 \ln 2 - \ln \pi - \frac{1}{\epsilon} + \ln[m^2] \right) \right] \\
& \frac{m^2}{16\pi^2} \left\{ \lambda - \frac{5e^2 z}{2} + \gamma(3e^2 z - 1) + \frac{1}{\epsilon}(\lambda - 3e^2 z) + \ln[m^2](-\lambda + 3e^2 z) \right. \\
& \left. + \lambda \ln[4\pi] \right\} + 6 \ln[\pi]z + z \ln[4096] + \mathcal{O}(\epsilon^1)z + \mathcal{O}(z)^2, \tag{4.24}
\end{aligned}$$

donde $\nu \equiv \alpha\xi/4\pi$ y $\alpha = e^2/4\pi$. De una manera semejante, podemos evaluar el propagador escalar a ordenes más altos en la teoría de perturbaciones. Sin embargo, las integrales involucradas son mucho más complicadas. Existen ciertas relaciones en QED que nos permiten calcular algunos términos a todos los ordenes, así evitando las complicaciones matemáticas. Estas relaciones se llaman Transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin. Las estudiaremos en el próximo capítulo.

Capítulo 5

TRANSFORMACION DE LANDAU-KHALATNIKOV-FRADKIN .

5.1. Transformación de Landau-Khalatnikov-Fradkin(LKF)

Los propagadores y los vértices en SQED deben satisfacer las llamadas transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin. Estas relaciones no son perturbativas y también son válidas para cada orden en la teoría de perturbaciones. Son escritas en el espacio Euclideo y por lo tanto son difíciles de manejar en el espacio de momento. Para los vértices estas transformaciones son demasiado complicadas. Por lo tanto, estudiamos estas transformaciones para el propagador escalar únicamente y obtenemos información valiosa sobre él en todos los ordenes de α .

Si conocemos una función de Green para un valor de ξ , la podemos deducir para cualquier otro valor de ξ por medio de la transformación de Landau-Khalatnikov-Fradkin (LKFT) [5, 6, 7]. Para el propagador escalar, esta transformación en el espacio Euclideo es :

$$S(x; \xi) = S(x; 0)e^{-i[\Delta_d(0) - \Delta_d(x)]} , \quad (5.1)$$

donde

$$\Delta_d(x) = -i\xi e^2 \int \frac{d^d p}{(2\pi^d)} \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^4} . \quad (5.2)$$

La utilidad de las LKFT en el espacio de momentos necesita los siguientes pasos:

- Empezar con una expresión para el propagador en el espacio de momentos en la norma de Landau $S(p; 0)$.
- Obtener $S(x; 0)$ usando la transformada de Fourier.
- Obtener $S(x; \xi)$ usando las LKFT.
- Usar las LKFT para obtener $S(p; \xi)$.

En próximas subsecciones, aplicaremos LKFT para $d = 3$ y $d = 4$.

5.1.1. Transformación de LKF en tres dimensiones

Consideramos el caso simple de $d = 3$ únicamente para ver que información nos proporcionan la LKFT. En este caso

$$\Delta_3(x) = -i\xi e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi^3)} \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^4}. \quad (5.3)$$

Entonces

$$\Delta_3(0) - \Delta_3(x) = -i\xi e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1 - e^{-ip \cdot x}}{p^4} \right]. \quad (5.4)$$

Usamos coordenadas esféricas polares. Por lo tanto

$$d^d p = p^{d-1} \sin^{d-2} \theta d\theta \Omega_{d-2} dp, \quad (5.5)$$

donde

$$\Omega_{d-2} = 2\pi^{\frac{d-1}{2}} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right). \quad (5.6)$$

Así que para $d=3$, $d^3 p = 2\pi dp p^2 d\theta \sin \theta$. tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_3(0) - \Delta_3(x) &= -\frac{i\xi e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dp}{p^2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta [1 - e^{-ipx \cos \theta}] \\ &= -\frac{i\xi e^2}{2\pi^2 x} \int_0^\infty \frac{dp}{p^3} [px - \text{sen } px]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ahora integrando por partes sobre la variable p obtenemos:

$$\int_0^\infty \frac{dp}{p^3} [px - \text{sen } px] = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dp}{p^2} [x - x \cos px] = \frac{x^2}{2} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\text{sen } px}{p} dp}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} x^2. \quad (5.8)$$

Entonces,

$$\Delta_3(0) - \Delta_3(x) = -i\xi \frac{e^2}{8\pi} = -i \frac{\alpha\xi}{2} = -iax . \quad (5.9)$$

Por lo tanto, para $d = 3$, la *transformación de Landau-Khalatnikov-Fradkin* se reduce a una expresión muy simple:

$$S(x; \xi) = S(x; 0)e^{-ax} . \quad (5.10)$$

- **S(p; 0)** : En el espacio de momentos conocemos que el propagador escalar a nivel árbol es:

$$S(p; 0) = -\frac{1}{p^2 + m^2} \quad (5.11)$$

en el espacio de Euclides.

- **S(x; 0)** : Consideramos la transformada de Fourier, tal que,

$$S(x; 0) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot x} S(p; 0) . \quad (5.12)$$

Entonces,

$$S(x; 0) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{p^2 + m^2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-ipx \cos \theta} . \quad (5.13)$$

Realizando la integración angular y radial conseguimos

$$S(x; 0) = -\frac{1}{4\pi x} e^{-mx} . \quad (5.14)$$

- **S(x; ξ)**: En una norma arbitraria en el espacio de posiciones usando (5.10) el propagador escalar en tres dimensiones es:

$$S(x; \xi) = -\frac{1}{4\pi x} e^{-(m+a)x} . \quad (5.15)$$

- **S(p; ξ)**: Si calculamos la transformada inversa de Fourier de (5.15) obtenemos

$$S(p; \xi) = \int d^3x e^{ip \cdot x} S(x; \xi) = \int d^3x e^{ip \cdot x} \left[-\frac{1}{4\pi x} e^{-(m+a)x} \right] . \quad (5.16)$$

Hacemos una transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas polares de la misma manera como lo hemos hecho anteriormente y tenemos

$$S(p; \xi) = -\frac{1}{p^2 + \left(m + \frac{\alpha\xi}{2}\right)^2} . \quad (5.17)$$

Esta es una expresión *no perturbativa para el propagador del escalar*.

El inverso del propagador escalar es igual a:

$$S^{-1} = - \left[\left(m + \frac{\alpha\xi}{2} \right)^2 \right] + p^2 = - \left[m^2 + p^2 + m\alpha\xi + \frac{\alpha^2\xi^2}{4} \right] \quad (5.18)$$

A través de un cálculo directo, hemos obtenido que el propagador inverso en tres dimensiones en norma arbitraria es (4.20):

$$S^{-1} = -p^2 + m^2 + \frac{e^2}{4\pi} \left[m - \frac{2(m^2 - p^2)}{p} \tan^{-1} \left(\frac{p}{m} \right) + (1 - \xi)m \right].$$

Comparando los dos resultados tenemos que el propagador a orden árbol y el término $m\alpha\xi$ son iguales. En general, si hacemos una expansión en serie de potencias en α para el inverso del propagador tenemos:

$$S^{-1} = a_0\alpha^0 + (a_1\xi + b_1)\alpha + (a_2\xi^2 + b_2\xi + c_2)\alpha^2 \cdots \quad (5.19)$$

Si conocemos S a nivel árbol en la norma de Landau, es decir, conocemos a_0 , la transformación de LKF nos proporciona términos del tipo $(\alpha\xi)^n$ correctamente para cualquier valor entero positivo de n . En particular para este caso

$$\begin{aligned} a_0 &= -(m^2 + p^2) \\ a_1 &= -m \\ a_2 &= -\frac{1}{4} \\ a_n &= 0 \quad \forall n \geq 3. \end{aligned}$$

Hacemos notar que LKF no nos proporciona los términos cruzados, es decir, en la ec. (5.19) no obtenemos los términos b_1, b_2, c_2, \cdots .

5.1.2. Transformación de LKF en cuatro dimensiones

Ahora queremos calcular el propagador de la partícula escalar en cuatro dimensiones para una norma arbitraria, con este objetivo consideramos $d = 4$ en la ecuación (5.1)

$$S(x; \xi) = S(x; 0)e^{-i[\Delta_4(0) - \Delta_4(x)]}, \quad (5.20)$$

de manera analoga que en tres dimensiones tenemos que

$$\Delta_4(x) = -i\xi e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot x}}{k^4}.$$

En este momento es importante notar que si resolvemos $\Delta(x)$ para d -dimensiones resulta

$$\Delta_d(x) = -\frac{i\xi e^2}{16(\pi)^{d/2}} \frac{1}{x^{d-4}} \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right) . \quad (5.21)$$

Ahora $\lim_{x \rightarrow 0} \Delta_d(x) = \Delta_d(0)$. Es interesante que en cuatro dimensiones $\Delta(x)$ no depende de x a menos de que otra escala sea introducida, si esto no sucede entonces $\Delta(0) - \Delta(x) = 0$ trivialmente, por esta razón no utilizaremos $d = 4$ si no $d = 4 - 2\epsilon$ en el limite $\epsilon \rightarrow 0$ Asi que:

$$\Delta_4(x) = -\frac{i\xi e^2}{16(\pi)^{2-\epsilon}} \frac{1}{x^{-2\epsilon}} \Gamma(-\epsilon) , \quad (5.22)$$

$\Gamma(-\epsilon)$ la expandemos como la ec. (A.14) del apendice (A) y usamos $x^{-2\epsilon} = 1 - 2\epsilon \ln[x] + \mathcal{O}(\epsilon)^2$ estos resultados nos conducen a la siguiente ecuación

$$\Delta_4(x) = \frac{-i\xi e^2}{16(\pi)^{2-\epsilon}} \left(-\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln[x] + \mathcal{O}(\epsilon) \right) , \quad (5.23)$$

no hemos considerado los términos de $\mathcal{O}(\epsilon)$. La función logaritmo es divergente para cero, por tal motivo no sustituimos cero en esta ecuación, usaremos x_{min} . Así que obtenemos:

$$\Delta_4(x_{min}) - \Delta_4(x) = -i \ln \left(\frac{x^2}{x_{min}^2} \right)^\nu , \quad (5.24)$$

donde $\nu = \frac{\alpha\xi}{4\pi}$. Ahora sustituimos en (5.20):

$$S(x; \xi) = S(x; 0) \left(\frac{x^2}{x_{min}^2} \right)^{-\nu} . \quad (5.25)$$

- **S(p; 0):** El propagador a nivel árbol como ya lo hemos visto anteriormente es

$$S(p; 0) = -\frac{1}{p^2 + m^2} . \quad (5.26)$$

- **S(x; 0):** Nuevamente hacemos una transformación de Fourier para encontrar el propagador a nivel árbol del escalar en el espacio de posición

$$S(x; 0) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} S(p; 0) , \quad (5.27)$$

desarrollando

$$S(x; 0) = -\frac{1}{4\pi^3} \int_0^\infty dp p^3 \frac{1}{p^2 + m^2} \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta e^{-ipx \cos \theta} , \quad (5.28)$$

asi que podemos deducir usando los resultados dados en las integrales (A.7) y (A.10) del apendice A que el propagador en cuatro dimensiones en norma de Feynman y espacio de coordenadas es :

$$S(x; 0) = \frac{-m}{4\pi^2 x} K_1(mx) \quad (5.29)$$

- **S(x; ξ):** Si sustituimos (5.29) en (5.25) encontramos el propagador en norma arbitraria en el espacio de coordenadas

$$S(x; \xi) = \frac{-m}{4\pi^2 x} K_1(mx) \left(\frac{x^2}{x_{min}^2} \right)^\nu \quad (5.30)$$

- **S(p; ξ):** Regresando al espacio de momentos

$$S(p; \xi) = \int_0^\infty d^4 x e^{ip \cdot x} S(x; \xi) , \quad (5.31)$$

una transformación a coordenadas esféricas polares y el resultado de (A.7) del apendice A nos conducen a :

$$S(p; \xi) = -\frac{m}{p} (x_{min}^2)^\nu \int_0^\infty x^{1-2\nu} K_1(mx) J_1(px) dx , \quad (5.32)$$

ahora podemos utilizar el resultado de la integral (A.11) del apendice A asi que el propagador a un lazo en el espacio de momentos en una norma arbitraria en cuatro dimensiones es:

$$S(p; \xi) = -\frac{1}{m^2} \left(\frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^\nu \Gamma(1 - \nu) \Gamma(2 - \nu) {}_2F_1(1 - \nu, 2 - \nu; 2; -\frac{p^2}{m^2}) , \quad (5.33)$$

donde $\Lambda = 4/x_{min}^2$.

Cuando $m^2 \gg p^2$ podemos expandir ${}_2F_1$ como

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; -\frac{p^2}{m^2}) = 1 - \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{p^2}{m^2} + O\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^2. \quad (5.34)$$

Desarrollamos la ecuación (5.33) usando la propiedad anterior y despreciamos los términos de segundo orden y obtenemos:

$$S(p; \xi) = -\frac{1}{m^2}\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) + \frac{\nu}{m^2} \left[1 - 2\gamma - \ln\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) + \frac{p^2}{m^2} \left(-\frac{5}{2} + 2\gamma + \ln\left[\frac{m^2}{\Lambda^2}\right]\right)\right], \quad (5.35)$$

si escribimos $z = \frac{p^2}{m^2}$ la ecuación anterior se convierte en

$$S(p; \xi) = -\frac{1}{m^2}(1 - z) + \frac{\nu}{m^2} \left[1 - 2\gamma - \ln\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) + z \left(-\frac{5}{2} + 2\gamma + \ln\left[\frac{m^2}{\Lambda^2}\right]\right)\right]. \quad (5.36)$$

En el capítulo anterior obtuvimos la expresión (4.24) para el propagador en cuatro dimensiones a un lazo cuando z y ϵ estaban muy cercanos a cero. Ahora podemos comparar ese resultado con el dado por la ecuación (5.36), pero como las transformaciones LKF no nos proporcionan términos cruzados los omitiremos. Así la ecuación resulta

$$S^{-1} = -m^2(1 + z) - m^2\nu \left[1 - \frac{z}{2} - (1 + z) \left(\gamma - 2 \ln 2 - \ln \pi - \frac{1}{\epsilon} + \ln[m^2]\right)\right], \quad (5.37)$$

para comparar correctamente estos términos debemos obtener el inverso de esta ecuación por tal motivo expandemos en ν y z

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{m^2}(1 + z) + \frac{\nu}{m^2} \left[1 - \gamma - \frac{1}{\epsilon} + 2 \ln 2 - \ln m^2 + \ln(\pi)\right] \\ &\quad + \frac{\nu}{m^2} \left[z \left(-\frac{5}{2} + \gamma - \frac{1}{\epsilon} - 2 \ln 2 + \ln m^2 - \ln \pi\right)\right]. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Ahora de las ec. (5.36) y (5.38) podemos deducir la siguiente relación

$$\ln \frac{m^2}{\Lambda^2} \Rightarrow -\gamma - 2 \ln 2 - \ln[m^2] - \ln \pi - \frac{1}{\epsilon}. \quad (5.39)$$

También podemos comparar los inversos de los propagadores para ese fin primero debemos obtener el inverso de (5.36) expandiendo en z y en ν

$$S^{-1} = -m^2(1 + z) - \nu m^2 \left[1 - \frac{z}{2} - (1 + z)(2\gamma + \ln \frac{m^2}{\Lambda^2})\right]. \quad (5.40)$$

De manera similar de la ec. (5.37) y (5.40) resulta nuevamente la relación (5.39). Como vimos en la sección anterior LKFT nos proporciona términos del tipo $(\alpha\xi)^n$ para cualquier valor entero positivo de n . De la ecuación (5.19) para el propagador inverso encontramos los valores de los coeficientes a_0 y a_1

$$\begin{aligned}
 a_0 &= -(m^2 + p^2) , \\
 a_1 &= -m^2 \left[1 - \frac{z}{2} - (1+z)(2\gamma + \ln \frac{m^2}{\Lambda^2}) \right] , \\
 a_n &= 0 \quad \forall n \geq 2 .
 \end{aligned}
 \tag{5.41}$$

Así que para los casos de tres y cuatro dimensiones las transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin nos proporcionan valores correctos para los coeficientes de $(\alpha\xi)^n$.

Capítulo 6

Discusión y Conclusiones

Hemos estudiado Electrodinámica Cuántica Escalar a nivel de un lazo en la teoría de perturbaciones. Vamos a resaltar los resultados más importantes que hemos desarrollado a lo largo de la tesis:

- A partir del formalismo de la mecánica cuántica motivamos los diagramas y reglas de Feynman.
- Calculamos el propagador escalar a un lazo en dimension y norma arbitraria.
- Encontramos el propagador del escalar en tres dimensiones a un lazo.
- Usamos las transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin(LKF) para calcular el propagador del escalar en tres dimensiones.
- Comparamos los resultados del propagador a un lazo en tres dimensiones, con el calculo correspondiente con las transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin.
- Asi mismo calculamos el propagador del escalar a un lazo para $d = 4 - 2\epsilon$ en el limite $\epsilon \rightarrow 0$
- De nuevo basandonos en las transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin calculamos el propagador del escalar en cuatro dimensiones.
- Finalmente comparamos nuestros resultados de LKF con los de un lazo y encontramos los coeficientes correspondientes de las potencias de ξ

Apéndice A

Parametrización de Feynman

A.1. Algunas Integrales Estándar

Las integrales mas comunes para el calculo de lazos en d -dimensiones son:

$$\int d^d w f(w) = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\int \frac{d^d w}{(w^2 + s)^n} = i\pi^{d/2} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}d)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-d/2}}, \quad (\text{A.2})$$

$$\int d^d w \frac{w^\mu}{(w^2 + s)^n} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\int d^d w \frac{w^\mu w^\nu}{(w^2 + s)^n} = i\pi^{d/2} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}d - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{g^{\mu\nu}}{s^{n-d/2-1}}, \quad (\text{A.4})$$

$$\int d^d w \frac{w^2}{(w^2 + s)^n} = i\pi^{d/2} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}d - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{d}{s^{n-d/2-1}}, \quad (\text{A.5})$$

donde se usa el hecho de que

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = d. \quad (\text{A.6})$$

Las ecuaciones (A.2)-(A.5), son derivadas para valores enteros de d . Para valores no enteros, las integrales son definidas por las expresiones de los lados derechos de estas ecuaciones. Otras integrales estandar [8] usadas en esta tesis para el calculo de las transformaciones LKFT son

$$\int_0^\pi d\theta \sin^{2\nu} \theta e^{-i\beta \cos \theta} = \sqrt{\pi} \left(\frac{2}{\beta}\right)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) J_\nu(\beta) \quad [Re \nu > -\frac{1}{2}], \quad (\text{A.7})$$

$$\int_0^\infty dp \frac{p}{p^2 + m^2} \sin px = \frac{\pi}{2} e^{-mx} \quad [a > 0 \quad Re \beta > 0]. \quad (\text{A.8})$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-\beta x} \operatorname{sen} bx dx = n! \left(\frac{\beta}{\beta^2 + b^2} \right)^{n+1} \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \beta^n} \left(\frac{b}{b^2 + \beta^2} \right), \quad (\text{A.9})$$

$[\beta, b > 0 \in \Re].$

$$\int_0^\infty \frac{p^{\nu+1} J_\nu(px)}{(p^2 + m^2)^{\mu+1}} dp = \frac{m^{\nu-\mu} x^\mu K_\nu(mx)}{2^\mu \Gamma(\mu + 1)}. \quad (\text{A.10})$$

$$\int_0^\infty x^{-\lambda} K_\mu(ax) J_\nu(bx) dx = \frac{a^{\lambda-\nu-1} b^\nu}{2^{\lambda+1} \Gamma(1 + \nu)} \Gamma\left(\frac{\nu - \lambda + \mu + 1}{2}\right) \\ \times \Gamma\left(\frac{\nu - \lambda - \mu + 1}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{\nu - \lambda - \mu + 1}{2}, \frac{\nu - \lambda + \mu + 1}{2}; \nu + 1; -\frac{b^2}{m^2}\right). \quad (\text{A.11})$$

A.2. La Función Gamma

De las identidades de la Función Gamma tenemos que

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \Gamma(1 + \epsilon). \quad (\text{A.12})$$

Por una expansión de Taylor ($\epsilon \ll 1$)

$$\begin{aligned} \Gamma(1 + \epsilon) &= \Gamma(1) + \epsilon \Gamma'(1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= 1 + \epsilon \Gamma(1) \psi_1(1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= 1 - \epsilon \gamma + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon} (1 - \epsilon \gamma + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \\ &= \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon), \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \Gamma(-1 + \epsilon) &= -\frac{1}{1 - \epsilon} \Gamma(\epsilon) = -(1 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \\ &= -\left[\frac{1}{\epsilon} + 1 - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

donde γ es la constante de Euler:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0,5772157. \quad (\text{A.16})$$

A.3. Parametrización de Feynman

Cuando tenemos integrales muy complicadas estas pueden ser reducidas a una forma mas simple usando una técnica ingeniosa dada por Feynman. Para el producto de dos factores cuadráticos a y b , comenzamos con la identidad

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dt}{t^2}. \quad (\text{A.17})$$

Definiendo el *parámetro de Feynman* z como

$$t = b + (a-b)z, \quad (\text{A.18})$$

La ecuación (A.17) puede ser escrita

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[b + (a-b)z]^2}. \quad (\text{A.19})$$

Vemos que introduciendo el parámetro de Feynman z hemos expresado $1/ab$ en términos de un sólo factor elevado a la potencia 2. Aunque la integral (A.19) tenga la apariencia de ser más complicada, veremos que la parametrización de Feynman nos permite evaluar todas las integrales directamente. El método anterior se puede extender fácilmente. Para tres factores, el resultado alternativo es

$$\begin{aligned} \frac{1}{abc} &= 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{[a + (b-a)x + (c-b)y]^3} \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{1}{[a + (b-a)x + (c-a)z]^3} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

las cuales se pueden probar integrando con respecto a y y z respectivamente y usando la ecuación (A.19). La ecuación (A.20) se puede generalizar a un número arbitrario de factores, y el resultado es

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_0 a_1 a_2 \cdots a_n} &= \Gamma(n+1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \\ &\quad \times \frac{1}{[a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z_n]^{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

la cual es establecida por inducción. Otros resultados útiles son obtenidos por diferenciación con respecto a uno o más parámetros. Por ejemplo, diferenciando la ecuación

(A.19) con respecto a a obtenemos

$$\frac{1}{a^2b} = 2 \int_0^1 dz \frac{z}{[b + (a-b)z]^3} . \quad (\text{A.22})$$

En la misma manera podemos obtener otras expresiones más complicadas.

A.4. Solución de la integral J_{np}

$$J_{np} = \int d^d k \frac{1}{\underbrace{(q^2)^n}_A \underbrace{(k^2 - m^2)^p}_B} . \quad (\text{A.23})$$

Transformamos el denominador usando la siguiente integral de Feynman

$$\frac{1}{A^n B^p} = \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(p)} \int_0^1 dx \frac{x^{n-1}(1-x)^{p-1}}{[xA + (1-x)B]^{n+p}} \quad (\text{A.24})$$

entonces

$$J_{np} = \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(p)} \int_0^1 dx \int d^d k \frac{x^{n-1}(1-x)^{p-1}}{[x(k-p)^2 + (1-x)(k^2 - m^2)]^{n+p}} , \quad (\text{A.25})$$

Transformemos el denominador de esta integral a una forma conveniente para poder integrar. Llamemos

$$\begin{aligned} D &= x(k-p)^2 + (1-x)(k^2 - m^2) \\ &= x[k^2 + p^2 - 2k \cdot p] + (1-x)k^2 - m^2(1-x) \\ &= k^2 - 2k \cdot px + p^2x - m^2(1-x) . \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Sea

$$w = k - px , \quad \Rightarrow \quad k = w + px . \quad (\text{A.27})$$

Sustituyendo (A.27) en (A.26) obtenemos

$$\begin{aligned} D &= (w + px)^2 - 2(w + px) \cdot px + p^2x - m^2(1-x) \\ &= w^2 + p^2x(1-x) - m^2(1-x) . \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Si sustituimos (A.28) en la ec. (A.25)

$$J_{np} = \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(p)} \int dx x^{n-1}(1-x)^{p-1} \int d^d w \frac{1}{[w^2 + p^2x(1-x) - m^2(1-x)]} \quad (\text{A.29})$$

ahora esta integral tiene la forma de la ec. (A.2) con $S = p^2x(1-x) - m^2(1-x)$ asi que la ecuación (A.29) se transforma en

$$J_{np} = \frac{(-1)^{n+p} i \pi^{d/2} \Gamma(n+p-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)\Gamma(p)} \int_0^1 dx [-p^2x(1-x) + m^2(1-x)]^{\frac{d}{2}-n-p} \times x^{n-1}(1-x)^{p-1}. \quad (\text{A.30})$$

La integral

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx [-p^2x(1-x) + m^2(1-x)]^{\frac{d}{2}-n-p} x^{n-1}(1-x)^{p-1} = \\ & = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{p-1}(1-x)^{\frac{d}{2}-n-p} (-p^2x + m^2)^{\frac{d}{2}-n-p} dx \\ & = (m^2)^{\frac{d}{2}-n-p} \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{\frac{d}{2}-n-1} \left(1 - \frac{p^2}{m^2}x\right)^{\frac{d}{2}-n-p} dx \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

esta integral la resolvemos usando la siguiente integral estándar, [8].

$$\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}(1-\beta x)^{-\nu} dx = B(\lambda, \mu) {}_2F_1(\nu, \lambda; \lambda + \mu; \beta), \quad (\text{A.32})$$

donde $\lambda = n$, $\mu = \frac{d}{2} - n$, $\beta = \frac{p^2}{m^2}$ y $-\nu = \frac{d}{2} - n - p$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{\frac{d}{2}-n-1} \left(1 - \frac{p^2}{m^2}x\right)^{\frac{d}{2}-n-p} dx = \\ & = B\left(n, \frac{d}{2} - n\right) {}_2F_1\left(-\frac{d}{2} + n + p, n; \frac{d}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right) \\ & = \frac{\Gamma(n)\Gamma(\frac{d}{2} - n)}{\Gamma(\frac{d}{2})} {}_2F_1\left(-\frac{d}{2} + n + p, n; \frac{d}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Entonces

$$\begin{aligned} J_{np} & = (-1)^{n+p} i \pi^{d/2} (m^2)^{\frac{d}{2}-n-p} \frac{\Gamma(n+p-\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2}-n)}{\Gamma(p)\Gamma(\frac{d}{2})} \times \\ & \quad {}_2F_1\left(-\frac{d}{2} + n + p, n; \frac{d}{2}; \frac{p^2}{m^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Bibliografía

- [1] E.O. Kahya y R.P. Woodard, Phys. Rev. D72, 104001 (2005).
- [2] J.S. Ball y T.W Chiu, Phys. Rev. D22, 2542 (1980).
- [3] M.R. Pennington and R. Williams, “*Checking the Transverse Ward-Takahashi Relation at one loop Order in 4-Dimensions*”, hep-ph/0511254.
- [4] A. Bashir y A. Raya, Phys. Rev. D66, 105005 (2002).
- [5] L.D. Landau Y I.M. Khalatnikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 29, 89 (1956).
- [6] L.D. Landau Y I.M. Khalatnikov, Sov. Phys. JETP 2, 69 (1956).
- [7] E.S. Fradkin, So.Phys. JETP 2, 361 (1956).
- [8] I. S. Grandshteyn and I. M. Ryzhik, “*Table of Integrals, Series and Products*”, cuarta edición, Academic Press, New York, (1965).
- [9] M. Abramowitz and I.A. Stegun (eds.), “*Handbook of Mathematical Functions*”, Dover Publications, (1965).
- [10] F. Gross, “*Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*”, John Wiley & Sons, New York, (1999).
- [11] F. Halzen and A. D. Martin, “*Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*”, John Wiley & Sons, New York, (1984).
- [12] A. Raya, *Gauge Invariance and Construction of the Fermion-Boson Vertex in QED3*. Tesis de Doctorado. Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH (2003).