



UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

**“Un Funcional Cuártico para Generar
Mallas Convexas en Regiones Irregulares”**

T E S I S

que para obtener el título de

**LICENCIADO EN CIENCIAS
FÍSICO MATEMÁTICAS**

P R E S E N T A

Diana Itzel Sepúlveda Jáuregui

ASESOR DE TESIS

Dr. Francisco J. Domínguez Mota

Morelia, Michoacán de Ocampo, Abril de 2006

Agradecimientos

Tengo la oportunidad de mostrar mi gratitud a las personas que hicieron posible el trabajo que hoy presento.

Al Dr. Francisco Domínguez Mota por la dedicación a lo largo del trabajo que implicó el desarrollo de esta tesis de licenciatura.

A las personas más cercanas a mí quienes de alguna manera contribuyeron a la culminación satisfactoria de ella, en especial a mis padres Armando y Teresita, y mis hermanos Armando, Daniel y Rodrigo.

A Raúl por la entrega y apoyo constantes para darme la confianza al caminar.

Índice general

Agradecimientos	I
. Prefacio	V
1. Planteamiento del Problema	1
1.1. Objetivos de la Generación de Mallas	1
1.2. Mapeos e Invertibilidad	2
1.3. Generación de Mallas en el Plano	4
1.3.1. Generación Variacional Continua	5
1.3.2. Generación Variacional Discreta	6
2. Funcionales Clásicos	9
2.1. Discretización de Barrera-Pérez	9
2.2. Funcional de Longitud	11
2.3. Funcional de Winslow	13
2.4. Funcional de Área	14
2.5. Funcional de Ortogonalidad	14
2.6. Generación Variacional Discreta de Mallas	15
2.7. Algunos Resultados Numéricos	17
3. Convexidad	23
3.1. Conjuntos Convexos	23
3.1.1. Envolvente Convexa	24
3.1.2. Cerradura e Interior de un Conjunto	25
3.1.3. Teorema de Weierstrass	26
3.1.4. Separación y Soporte de Conjuntos	26
3.1.5. Hiperplanos y Separación de dos Conjuntos	26
3.1.6. Separación de un Conjunto Convexo y un Punto	28
3.1.7. Soporte de Conjuntos en Puntos Frontera	29
3.2. Funciones Convexas	30
3.2.1. Definiciones y Propiedades Básicas	30
3.2.2. Continuidad de Funciones Convexas	31
3.2.3. Derivada Direccional de Funciones Convexas	31
3.2.4. Subgradientes de una Función Convexa.	32

3.2.5. Funciones Diferenciables Convexas	33
3.2.6. Funciones 2-Diferenciables Convexas y C3ncavas	34
4. Funcionales de 3rea	37
4.1. Funcionales de 3rea	37
4.2. Funcionales convexos de 3rea	38
4.3. Funcionales con barreras infinitas	39
4.4. Un funcional convexo con barreras continuas	40
4.5. El funcional <i>QRRArea</i>	40
4.6. Resultados Num3ricos	44
4.6.1. Algoritmo	45
4.6.2. Regiones Irregulares de Prueba.	45
5. Conclusiones	61
A. Interpolaci3n Transfinita	63
B. M3todos de B3squeda Lineal	67
Bibliograf3a	69

Prefacio

En la búsqueda de la descripción de ciertos fenómenos físicos a través de ecuaciones diferenciales parciales se presenta con frecuencia un problema: la imposibilidad de encontrar una solución analítica. Cuando esto ocurre, es necesario resolver numéricamente las ecuaciones para encontrar una aproximación a la solución, donde el problema se centra en discretizar tales ecuaciones diferenciales, lo que lleva a la discretización del dominio de dichas ecuaciones; lo anterior, con la finalidad de poder hacer aproximaciones en un espacio de dimensión finita.

Recientemente, el problema de discretizar los dominios de las funciones se ha venido conformando por sí sólo en una línea de investigación, en la que se busca simplificar el problema original de resolver las ecuaciones diferenciales parciales. En sí, lo que se pretende es generar una malla, problema que conduce a una de las siguientes vertientes:

- Mallas regulares que se ordenan a través de cuadriláteros, es decir, lógicamente iguales a una cuadrícula, o
- Mallas irregulares que consisten en un conjunto denso de puntos y "desordenado", es decir, no todas las celdas serán cuadriláteros.

La solución al problema de discretizar el dominio de una función se puede obtener con métodos de diferencias finitas.

Particularmente, este trabajo está enfocado en la búsqueda de una buena discretización del dominio, generando mallas estructuradas formadas por cuadriláteros, es decir, mallas regulares, ya que de la discretización del dominio depende la simplificación de la solución de las ecuaciones diferenciales parciales.

Dada la diversidad de enfoques para generar mallas, es posible encontrar técnicas e ideas muy diversas para generarlas. Por ejemplo, a través de

- Métodos algebraicos,
- Métodos basados en la solución de ecuaciones diferenciales parciales, o
- Métodos variacionales.

Un ejemplo de los métodos desarrollados son los de Prokopov y Godunov [23] quienes en un principio se centraron en la teoría de mapeos conformes y, posteriormente, usaron la técnica de un funcional

variacional empleado en los problemas con valores en la frontera en la teoría de funciones. Después Godunov, basado en aquellas primeras investigaciones, desarrolló otro método para abordar el problema de generar mallas, a través de una métrica parametrizada definida en superficies de curvatura constante, proponiendo una generalización simple del funcional variacional de Dirichlet con parámetros constantes. Dicho algoritmo genera mallas parametrizando cuadriláteros con curvas suaves en la frontera. Si no se consideran curvas suaves, los métodos de minimización tendrían problemas en los cambios pronunciados de la frontera.

La construcción de estos algoritmos no es algo sencillo y hoy queda abierta la pregunta de si se puede extender la parametrización conforme cuasi-isométrica de dominios en tres dimensiones. Una de las dificultades es que los mapeos y las constantes varían al minimizar el funcional.

Los principales problemas de la generación de mallas surgen en regiones irregulares puesto que la mayoría de los métodos no funcionan en estas regiones, razón por la que se les considera regiones complicadas. Tal es el caso de la siguiente región (Figura 1).

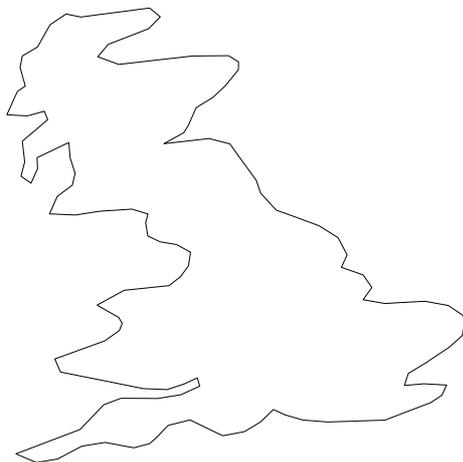


Figura 1: Ejemplo de una región irregular.

Ya que los métodos algebraicos basados en mapeos conformes o por ecuaciones diferenciales parciales, no son de utilidad para resolver problemas de minimización en regiones irregulares, algunos investigadores optan por los métodos de interpolación.

Una de las alternativas que es útil para generar mallas aún en estas regiones irregulares es el empleo de los métodos variacionales. Los primeros que incursionaron en el campo de los métodos variacionales fueron Brackbill y Saltzman [12]. Los autores que desarrollaron las ideas que condujeron a la generación variacional discreta de mallas fueron Steinberg [35], Roache [35], Castillo [13], Knupp [30] y Tinoco [39].

En este trabajo se propone un algoritmo variacional discreto para generar mallas convexas en re-

giones irregulares del plano.

Por otro lado, la opción para resolver el problema de la discretización de los dominios de funciones, basada en la generación de mallas irregulares, ha sido estudiada ampliamente en las investigaciones desarrolladas por Delaunay [30]; este tipo de aproximación no es abordada en el trabajo de esta tesis.

Contenido de los capítulos

La estructura del presente trabajo es la siguiente.

- **Capítulo 1.**
Se plantea el problema que se desea abordar en esta tesis, definiendo conceptos básicos sobre la generación numérica de mallas, así como la idea de funcional.
- **Capítulo 2.**
Se definen los funcionales clásicos de Longitud, Suavidad, Área y Ortogonalidad desde el punto de vista continuo y discreto, usando la discretización de Barrera-Pérez.
- **Capítulo 3.**
Se analiza la teoría de la convexidad de conjuntos y funciones que es la base de los resultados obtenidos en este trabajo el cual se centra en funcionales convexos de área como se puede apreciar con amplitud en el siguiente capítulo.
- **Capítulo 4.**
Aquí se presentan los resultados del problema planteado, usando un funcional convexo de área que permite generar mallas convexas con éxito, aún en regiones irregulares.
- **Capítulo 5.**
Se presentan de manera detallada las conclusiones obtenidas en este trabajo, así como recomendaciones para investigaciones futuras.

Capítulo 1

Planteamiento del Problema

Los métodos variacionales son útiles para generar mallas convexas. La primera versión de Brackbill y Saltzman [12] de estos métodos fue propuesto a mediados de 1960. Una de las formas para generar mallas está basada en la solución numérica de diferencias finitas análogas al sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange, pero resolver el sistema presenta dificultades sobre todo en regiones irregulares. Por tal motivo, en este trabajo se utiliza el método llamado *Formulación Directa*, basado en las propiedades de la geometría discreta, con el fin de evitar resolver directamente las ecuaciones de Euler-Lagrange.

1.1. Objetivos de la Generación de Mallas

La generación numérica de mallas surge de la necesidad de encontrar soluciones a problemas de ecuaciones diferenciales parciales en regiones físicas con una geometría compleja, a través de la transformación de una *región física* o *espacio físico* a una región más simple. Dicha transformación puede ser vista como un sistema general de coordenadas curvilíneas de la región física, y la transformación del problema a coordenadas polares, cilíndricas y esféricas son casos especiales.

Dada la necesidad de una región más simple, es posible transformar la región física a un cuadrado o a un cubo de tal forma que la frontera de estos, según el caso, corresponda a la frontera de la región física. Al cuadrado o cubo se le llama *región lógica* o *espacio lógico*, y la transformación es un mapeo a un sistema de coordenadas en el que se presenta fácil expresar las condiciones de frontera.

Una condición requerida para el desarrollo de este trabajo es que el jacobiano de la transformación sea distinto de cero, con el fin de asegurar la existencia del inverso de la transformación. Cuando el jacobiano de la transformación es cero, la transformación no preserva las propiedades físicas y matemáticas esenciales de las ecuaciones originales, es por ello que el problema se restringe a una transformación cuyo jacobiano es distinto de cero.

Es usual ver la transformación como un mapeo del espacio lógico al espacio físico puesto que las mallas son escogidas primeramente en el espacio lógico y posteriormente mapeadas al espacio físico. Si se escoge un conjunto de puntos en el espacio lógico, entonces la transformación manda estos

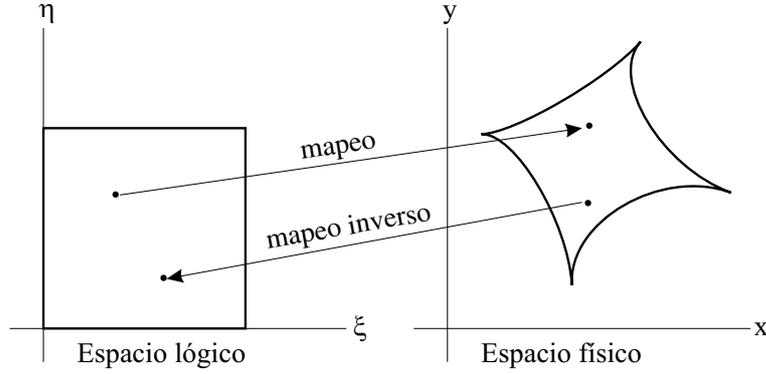


Figura 1.1: Mapeo del espacio lógico al espacio físico y mapeo inverso.

puntos a puntos en el espacio físico formando una malla. Si tomamos los puntos en la región lógica dividiendo el cuadrado en rectángulos iguales o el cubo en cajas rectangulares iguales, entonces la malla es rectangular lógicamente.

Uno de los objetivos deseables en la generación de mallas es producir mallas suaves, es decir, mallas donde el espacio varía suavemente y los ángulos entre las líneas de la malla no sean muy pequeños. Cuando la solución de las ecuaciones cambia rápidamente en alguna parte de la región física, entonces se escoge una malla más fina en esa parte de la región para reducir el error en la solución numérica.

1.2. Mapeos e Invertibilidad

En los mapeos de un objeto geométrico a otro se considera al espacio lógico como el dominio y al espacio físico como el rango de la transformación. Estos espacios son limitados a subconjuntos de espacios Euclidianos. Tómense x, y y z como las coordenadas correspondientes al espacio físico y ξ, η y ζ las coordenadas del espacio lógico.

El espacio lógico se escoge de la siguiente manera,

n	Espacio Lógico	Frontera ∂U_k^n
1	$U_1 = \{\xi \in E^1; 0 \leq \xi \leq 1\}$	2 puntos
2	$U_2 = \{(\xi, \eta) \in E^2; 0 \leq \xi, \eta \leq 1\}$	4 puntos 4 segmentos
3	$U_3 = \{(\xi, \eta, \zeta) \in E^3; 0 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1\}$	6 caras 12 segmentos 8 puntos

Cuadro 1.1: Espacio Lógico.

El espacio físico es un poco más complejo,

- en tres dimensiones se sitúan mallas en regiones, superficies y curvas (dim: 3,2,1);
- en dos dimensiones se necesitan mallas en regiones y curvas (dim: 2,1); y
- en una dimensión, los intervalos necesitan tener mallas situadas en ellos.

Un objeto k -dimensional en un espacio físico n -dimensional se denota Ω_k^n . Al hacer mapeos o transformaciones de objetos lógicos a físicos se tiene como resultado un sistema de coordenadas generales en el objeto físico, el cual se denota por X_k^n tal que,

$$X_k^n: U_k \rightarrow \Omega_k^n,$$

donde k es la dimensión del objeto y n la dimensión del espacio físico, con $0 < n \leq 3$ y $0 < k \leq n$. A fin de contar con una notación más sencilla, a partir de ahora se escribirá X como $X(\xi)$.

El cuadro 1.2 muestra la transformación de coordenadas cuando k y n varían de 1 a 3. Obsérvese que la frontera de la región física corresponde a la imagen de la frontera de la región lógica bajo la transformación.

Mapeo	Coordenadas	De	A
X_1^1	$x = x(\xi)$	intervalo	intervalo
X_1^2	$x = x(\xi), y = y(\xi)$	intervalo	curva
X_1^3	$x = x(\xi), y = y(\xi), z = z(\xi)$	intervalo	curva
X_2^2	$x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$	cuadrado	región
X_2^3	$x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta), z = z(\xi, \eta)$	cuadrado	superficie
X_3^3	$x = x(\xi, \eta, \zeta), y = y(\xi, \eta, \zeta), z = z(\xi, \eta, \zeta)$	cubo	volumen

Cuadro 1.2: Transformación de coordenadas.

Un mapeo del espacio lógico al espacio físico genera mallas naturales en el espacio físico, las cuales dependen de la parametrización del mapeo, es decir, diferentes parametrizaciones generan diferentes mallas. La frontera de un objeto puede darse de tres formas: paramétricamente, implícitamente y en forma discreta. Por ejemplo, la frontera del disco unitario en el plano parametrizada en coordenadas polares es,

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi;$$

de manera implícita,

$$x^2 + y^2 = 1;$$

y en forma discreta,

$$x_i = \cos \theta_i, \quad y_i = \sin \theta_i, \quad \text{con } \theta_i = \frac{2\pi i}{M}, \quad 0 \leq i \leq M.$$

Ahora bien, es necesario que las transformaciones usadas para la generación de mallas lleve la frontera ∂U_k del espacio lógico U_k a la frontera $\partial \Omega_k^n$ de la región física Ω_k^n , esto es,

$$\partial X_k^n: \partial U_k \rightarrow \partial \Omega_k^n.$$

Si un objeto está dado implícitamente, será necesario encontrar una descripción paramétrica de la frontera.

Así, el problema básico de la generación de mallas es determinar si la frontera del objeto físico está dada por una transformación paramétrica no-singular

$$\partial X_k^n: \partial U_k \rightarrow \partial \Omega_k^n,$$

en cuyo caso se extiende este mapeo a $X_k^n: U_k \rightarrow \Omega_k^n$ del interior del espacio lógico al interior del espacio físico.

La expresión más usada para el estudio de las transformaciones es el jacobiano de la matriz J . Si $X_k^n \in C^1$ las derivadas parciales $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$ están definidas, lo cual implica que $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$, con $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ está definido. Es importante mencionar que J no necesariamente es una matriz cuadrada, tal es el caso de la matriz jacobiana de una superficie cuya expresión es,

$$J = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \\ z_\xi & z_\eta \end{pmatrix}.$$

Si la dimensión del objeto físico es igual a la dimensión del espacio físico, $n = k$, entonces se tiene una matriz cuadrada y su determinante es el jacobiano del mapeo X_k^n ,

$$J = \det(J).$$

Recordemos que las matrices cuadradas tienen rango máximo si y sólo si el determinante es distinto de cero.

Teorema 1 "De la función inversa". *Supóngase $X_k^n \in C^1$. Entonces X_k^n es localmente uno a uno en ξ en el interior de U_k y el rango de J es maximal en ξ . (Véase Spivak [1]).*

1.3. Generación de Mallas en el Plano

El objetivo principal de la generación de mallas en una dimensión es producir una malla donde esté bien definida la distancia entre sus puntos. Existen varias formas de generar mallas en la recta, pero nos enfocaremos en las que se pueden generalizar a más dimensiones, específicamente en el plano. Una de estas formas es emplear el Cálculo de Variaciones, método ampliamente trabajado por Steinberg y Roache [35].

Para poder controlar el espacio en la malla se busca una función que dependa de la variable en el espacio lógico o de la variable en el espacio físico, y la solución de las ecuaciones asociadas a ésta función se encuentra con el método variacional. En el caso de generar mallas en dos dimensiones, la transformación del espacio lógico al físico o viceversa se conoce como funcional, al cual siempre se asocian sus respectivas ecuaciones de Euler-Lagrange.

1.3.1. Generación Variacional Continua

El cálculo de variaciones introduce el concepto de funcional, el cual se busca minimizar a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a él.

Definición 1 *Un funcional $I(\mathbf{x})$ es una función cuyo dominio son los mapeos \mathbf{x} que pertenecen a un subconjunto de un espacio de funciones.*

Para este trabajo, el conjunto de mapeos es llamado *conjunto admisible* donde tales funciones son de clase C^2 .

Considérese un funcional I sobre el conjunto de todos los mapeos diferenciables \mathbf{x} , los cuales mandan el rectángulo

$$R = \{(\xi, \eta) | 0 \leq \xi \leq 1; 0 \leq \eta \leq 1\}$$

sobre una región Ω del plano, de tal forma que las restricciones de \mathbf{x} a la frontera del rectángulo son biyecciones continuas sobre la frontera Ω .

Un tipo de funcional continuo tiene la siguiente estructura,

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \int_0^1 F(x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta) d\xi d\eta,$$

donde F es la función que contiene la geometría que se desea controlar con el fin de generar una malla para la frontera Ω . Cada uno de los mapeos \mathbf{x} del espacio de funciones es una *malla continua* para la región Ω .

Así, el objetivo de la generación variacional es minimizar el funcional dado sobre las mallas para la región Ω . Y las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas, son las transformaciones que minimizan el funcional que al resolverlas construyen la malla.

En el estudio de la generación de mallas se pueden encontrar cuatro funcionales clásicos. Para describirlos considérese el conjunto de todas las biyecciones $\mathbf{x} = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ diferenciables entre el rectángulo unitario R y la región Ω , denotando con J los jacobianos correspondientes. De esta manera, los funcionales tienen la siguiente estructura:

- **Funcional de Longitud.**

$$I(\mathbf{x}(\xi, \eta)) = \int_0^1 \int_0^1 (x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2) d\xi d\eta$$

- **Funcional de Suavidad.**

$$I(\mathbf{x}(\xi, \eta)) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2}{J} d\xi d\eta.$$

- **Funcional de Área.**

$$I(\mathbf{x}(\xi, \eta)) = \int_0^1 \int_0^1 J^2 d\xi d\eta$$

▪ **Funcional de Ortogonalidad.**

$$I(\mathbf{x}(\xi, \eta)) = \int_0^1 \int_0^1 (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)^2 d\xi d\eta$$

Nótese que en términos del jacobiano de la transformación $(\xi, \eta) \mapsto (x, y)$ es sencilla la interpretación de estos funcionales, los cuales se explican de manera más detallada en el capítulo 2.

1.3.2. Generación Variacional Discreta

La línea de este trabajo no es resolver numéricamente las ecuaciones de Euler-Lagrange, sino discretizar los funcionales continuos para generar mallas óptimas, resolviendo un problema de optimización de gran escala. Esta forma de abordar el problema se conoce como generación variacional discreta.

Enseguida se definen varios conceptos necesarios para el desarrollo de este trabajo.

Sea Ω una región poligonal γ de vértices $V = v_1, v_2, \dots, v_q$, cerrada, simple y orientada en sentido positivo como se muestra en la figura 1.2.

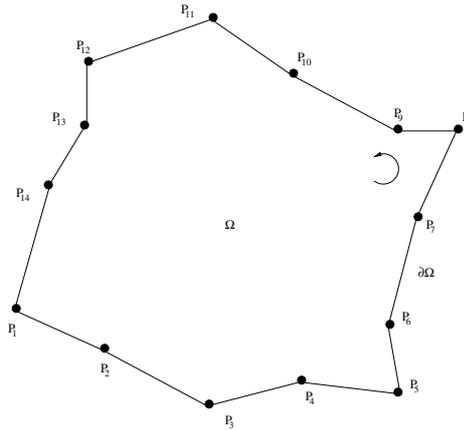


Figura 1.2: Ejemplo de una región definida por una poligonal cerrada y simple.

Definición 2 Sean m y n números naturales mayores que 2. Decimos que el conjunto de puntos del plano

$$G = \{P_{i,j} | i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$$

con lados

$$L_1(G) = \{P_{i,1} | i = 1, \dots, m\}$$

$$L_2(G) = \{P_{m,j} | j = 1, \dots, n\}$$

$$L_3(G) = \{P_{i,n} | i = 1, \dots, m\}$$

$$L_4(G) = \{P_{1,j} | j = 1, \dots, n\},$$

es una malla estructurada¹ admisible y discreta de orden $m \times n$ para Ω , si se satisface que

$$V \subseteq \bigcup_{i=1}^4 L_i(G).$$

Decimos además que la malla G es convexa si cada uno de los $(m-1)(n-1)$ cuadriláteros (o celdas) $c_{i,j}$ de vértices $\{P_{i,j}, P_{i+1,j}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}\}$, con $1 \leq i < m$ y $1 \leq j < n$, es convexo.

Definición 3 Sea $M(\Omega)$ el conjunto de mallas admisibles con $N = 4(m-1)(n-1)$ triángulos para una región poligonal Ω de área orientada igual a A .

Se consideran los cuatro triángulos que se forman en cada una de las celdas de la malla. Sobre la celda $c_{i,j}$ de vértices $\{P_{i,j}, P_{i+1,j}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}\}$ los cuatro triángulos son: $\triangle P_{i,j} P_{i+1,j} P_{i,j+1}$, $\triangle P_{i+1,j} P_{i+1,j+1} P_{i,j+1}$, $\triangle P_{i,j} P_{i+1,j} P_{i+1,j+1}$, $\triangle P_{i,j} P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}$, los cuales se pueden ver en la figura 1.3.

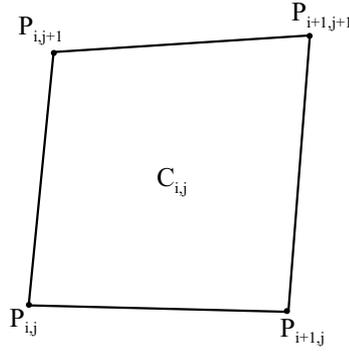


Figura 1.3: Celda ij de la malla.

Es importante señalar que para generar las mallas convexas se resuelve un problema de optimización de gran escala sobre un conjunto asociado $M(\Omega)$.

¹Formada con cuadriláteros.

Capítulo 2

Funcionales Clásicos

En este capítulo se presentan las expresiones correspondientes a los funcionales continuos clásicos, con el propósito de sentar las bases para proponer el problema de generar mallas discretas como un problema de optimización de gran escala, a través de un proceso de aproximación, el cual permite tener control sobre tres propiedades de la malla: longitud, área y ortogonalidad.

Se analizan los funcionales asociados a cada una de las propiedades que se busca controlar, pasando del funcional continuo al discreto; para ello se emplea la discretización propuesta por Barrera-Pérez et al. ([4]).

2.1. Discretización de Barrera-Pérez

Considérese el mapeo bilineal que manda el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$ al cuadrilátero de vértices P, Q, R y S (figura 2.1), en el plano dado por,

$$\vec{r}(\xi, \eta) = A + B\xi + C\eta + D\xi\eta,$$

donde $\vec{r} = (x, y)^T$, y en los vértices del cuadrilátero \vec{r} satisface

$$\vec{r}(0, 0) = P, \quad \vec{r}(1, 0) = Q$$

$$\vec{r}(0, 1) = S, \quad \vec{r}(1, 1) = R.$$

En cada una de las esquinas del cuadrilátero se tiene que,

$$\vec{r}(0, 0) = A = P$$

$$\vec{r}(1, 0) = A + B \Rightarrow B = Q - P$$

$$\vec{r}(0, 1) = A + C \Rightarrow C = S - P$$

y

$$\vec{r}(1, 1) = A + B + C + D \Rightarrow D = R - P - Q + P - S + P = R - Q - S + P,$$

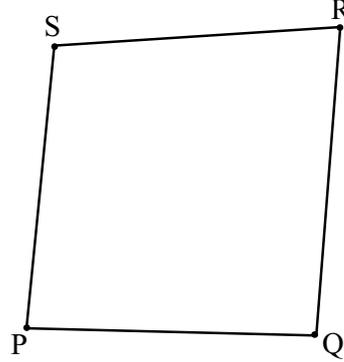


Figura 2.1: Cuadrilátero de vértices PQRS.

de tal forma que

$$\vec{r} = P + (Q - P)\xi + (S - P)\eta + (P - Q + R - S)\xi\eta.$$

Los vectores tangentes para \vec{r} son

$$\vec{r}_\xi = Q - P + (P - Q + R - S)\eta$$

y

$$\vec{r}_\eta = S - P + (P - Q + R - S)\xi.$$

Ahora, evaluando las derivadas de \vec{r} en los vértices del rectángulo se tiene que,

$$\vec{r}_\xi(0,0) = Q - P \quad \vec{r}_\eta(0,0) = S - P$$

$$\vec{r}_\xi(1,0) = Q - P \quad \vec{r}_\eta(1,0) = R - Q$$

$$\vec{r}_\xi(0,1) = R - S \quad \vec{r}_\eta(0,1) = S - P$$

$$\vec{r}_\xi(1,1) = R - S \quad \vec{r}_\eta(1,1) = R - Q.$$

Obsérvese que $\vec{r}_\xi(0,0)$ y $\vec{r}_\eta(0,0)$ dependen únicamente del triángulo SPQ , puesto que están descritos sólo en términos de S, P y Q . De igual forma, $\vec{r}_\xi(1,0)$ y $\vec{r}_\eta(1,0)$ dependen sólo del triángulo PQR ; $\vec{r}_\xi(0,1)$ y $\vec{r}_\eta(0,1)$ dependen del triángulo QRS ; y $\vec{r}_\xi(1,1)$ y $\vec{r}_\eta(1,1)$ dependen del triángulo RSP .

Se requiere también del Jacobiano de la transformación para expresar en forma discreta los funcionales que se presentan en esta sección. Calcúlese el jacobiano de \vec{r} ,

$$J(\xi, \eta) = \det(J) = \det \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix} = |\vec{r}_\xi| |\vec{r}_\eta| = \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\eta \\ y_\eta \end{pmatrix} = \vec{r}_\xi^T J_2 \vec{r}_\eta.$$

donde $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, es la matriz de rotación que gira $-\frac{\pi}{2}$.

En cada una de las esquinas del cuadrilátero, el jacobiano representa el doble del área del triángulo que se forma con el producto cruzado de los vectores tangentes correspondientes. A fin de mostrar esto, considérese $\vec{r}(0,0)$, $\vec{r}(1,0)$, $\vec{r}(0,1)$ y $\vec{r}(1,1)$, tal que $M = \vec{r}(1,0) - \vec{r}(0,0)$, $N = \vec{r}(0,1) - \vec{r}(0,0)$, $T = \vec{r}(1,1) - \vec{r}(0,1)$ y $U = \vec{r}(1,0) - \vec{r}(1,1)$. Al triángulo formado por los vectores $M(M_1, M_2, M_3)^T$ y $N(N_1, N_2, N_3)^T$, le corresponde un área descrita en términos del jacobiano; es decir

$$A = \frac{J}{2} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix},$$

donde $M_3 = 0 = N_3$ y e_1, e_2 y e_3 los vectores de la base canónica $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ respectivamente.

Resolviendo, se tiene que $A = e_3(M_1N_2 - M_2N_1)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} J_{0,0} &= (\vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{0,0}) \times (\vec{r}_{0,1} - \vec{r}_{0,0}) = M^T J_2 N = 2 \cdot \text{área}(\triangle SPQ) \\ J_{1,0} &= (\vec{r}_{1,1} - \vec{r}_{1,0}) \times (\vec{r}_{0,0} - \vec{r}_{1,0}) = Q^T J_2 M = 2 \cdot \text{área}(\triangle PQR) \\ J_{0,1} &= (\vec{r}_{1,1} - \vec{r}_{0,1}) \times (\vec{r}_{0,0} - \vec{r}_{0,1}) = P^T J_2 N = 2 \cdot \text{área}(\triangle QRS) \\ J_{1,1} &= (\vec{r}_{1,0} - \vec{r}_{1,1}) \times (\vec{r}_{0,1} - \vec{r}_{1,1}) = Q^T J_2 P = 2 \cdot \text{área}(\triangle RSP) \end{aligned} \quad (2.1)$$

El siguiente corolario muestra un resultado importante relacionado con los jacobianos correspondientes a las esquinas del cuadrilátero.

Corolario 2 Sea $J_{i,j}$ el jacobiano de cada una de las cuatro esquinas del cuadrilátero, de la misma manera que en las expresiones 2.1, entonces $J_{1,1} + J_{0,0} + J_{1,0} + J_{0,1} = 4 \cdot \text{área}(\square PQRS)$.

2.2. Funcional de Longitud

El Funcional de Longitud [35] busca controlar la longitud de los segmentos de la malla e intenta igualarlos; para esto, la suma de los cuadrados de las longitudes de los segmentos de las celdas de la malla deben minimizarse.

Caso continuo. Para calcular la longitud de curva se tiene la siguiente expresión,

$$I(\mathbf{x}(\xi, \eta)) = \int_0^1 \int_0^1 [(\mathbf{x}_\xi)^2 + (\mathbf{x}_\eta)^2] d\xi d\eta,$$

con $\mathbf{x} = (x, y)^T$; esto es,

$$I(\mathbf{x}(\xi, \eta)) = \int_0^1 \int_0^1 (x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2) d\xi d\eta,$$

de esta manera, se obtiene el funcional de longitud $L(\mathbf{x})$.

Desde el punto de vista del cálculo variacional, se deben resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange, que para este funcional quedan de la siguiente manera:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial L}{\partial x_\xi} \right) + \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\partial L}{\partial x_\eta} \right) = 0$$

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial L}{\partial y_\xi} \right) + \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\partial L}{\partial y_\eta} \right) = 0,$$

las cuales se reducen al sistema de ecuaciones de Laplace para la transformación $(\xi, \eta) \mapsto (x, y)$

$$x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta} = 0$$

$$y_{\xi\xi} + y_{\eta\eta} = 0,$$

ecuaciones que son elípticas y no acopladas. Sin embargo, en este trabajo no se resuelven las ecuaciones de Euler-Lagrange, sino que se emplea el enfoque discreto que se menciona a continuación.

Caso discreto. Se describe el funcional discreto de longitud l como

$$l(\mathbf{x}) = l(\vec{r}) = (\vec{r}_\xi)^2 + (\vec{r}_\eta)^2.$$

La discretización del funcional en cada una de las esquinas del cuadrilátero es

$$l(r(0, 0)) = (Q - P)^2 + (S - P)^2 = l(\triangle SPQ)$$

$$l(r(1, 0)) = (Q - P)^2 + (R - Q)^2 = l(\triangle PQR)$$

$$l(r(1, 1)) = (R - S)^2 + (R - Q)^2 = l(\triangle QRS)$$

$$l(r(0, 1)) = (R - S)^2 + (S - P)^2 = l(\triangle RSP).$$

Se define entonces $l(\triangle SPQ) = (Q - P)^2 + (S - P)^2$. De igual manera se procede para los otros tres triángulos asociados al funcional en cada esquina. De ahí que

$$L(\vec{r}) = \sum_i \sum_j \frac{1}{4} (l(\triangle S_{i,j} P_{i,j} Q_{i,j}) + \dots + l(\triangle R_{i,j} S_{i,j} P_{i,j})).$$

Por lo tanto, $L(\vec{r})$, se aproxima a

$$L(\vec{r}) = \int_0^1 \int_0^1 [(\mathbf{x}_\xi)^2 + (\mathbf{x}_\eta)^2] d\xi d\eta.$$

A continuación estudiaremos el funcional de Winslow.

2.3. Funcional de Winslow

El funcional de Winslow [41], también conocido como funcional de suavidad, está relacionado con el funcional de longitud, el cual busca, precisamente, suavizar las líneas interiores de la malla. Veamos los casos continuo y discreto de este funcional.

Caso continuo. La expresión para el funcional continuo de suavidad es

$$S(\mathbf{x}(\xi, \eta)) = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{(\mathbf{x}_\xi)^2 + (\mathbf{x}_\eta)^2}{J} \right] d\xi d\eta,$$

con $\mathbf{x} = (x, y)^T$; es decir,

$$S(\mathbf{x}(\xi, \eta)) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2}{J} d\xi d\eta.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a este funcional se reducen nuevamente al sistema de ecuaciones de Laplace, pero para la transformación inversa $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$.

Caso discreto. Ya se ha visto que el funcional de Winslow está directamente relacionado con el funcional de Longitud, salvo por el Jacobiano. Para la discretización, defínase el factor α que describirá el jacobiano discretizado en cada una de las esquinas del cuadrilátero. Por ejemplo, en $J(0, 0)$, α es

$$\alpha(\triangle SPQ) = (Q - P)^T J_2(S - P),$$

de forma análoga se obtiene para los otros vértices.

Entonces, el funcional en forma discreta en cada esquina, se ve como $s(\mathbf{x}) = s(\vec{r}) = \frac{(\vec{r}_\xi)^2 + (\vec{r}_\eta)^2}{J}$

$$s(r(0, 0)) = \frac{(Q - P)^2 + (S - P)^2}{\alpha(\triangle SPQ)} = \frac{l(\triangle SPQ)}{\alpha(\triangle SPQ)}$$

$$s(r(1, 0)) = \frac{(Q - P)^2 + (R - Q)^2}{\alpha(\triangle PQR)} = \frac{l(\triangle PQR)}{\alpha(\triangle PQR)}$$

$$s(r(1, 1)) = \frac{(R - S)^2 + (R - Q)^2}{\alpha(\triangle QRS)} = \frac{l(\triangle QRS)}{\alpha(\triangle QRS)}$$

$$s(r(0, 1)) = \frac{(R - S)^2 + (S - P)^2}{\alpha(\triangle RSP)} = \frac{l(\triangle RSP)}{\alpha(\triangle RSP)}.$$

De donde

$$S(\vec{r}) = \sum_i \sum_j \frac{1}{4} \left(\frac{l(\triangle S_{i,j} P_{i,j} Q_{i,j})}{\alpha(\triangle S_{i,j} P_{i,j} Q_{i,j})} + \dots + \frac{l(\triangle R_{i,j} S_{i,j} P_{i,j})}{\alpha(\triangle R_{i,j} S_{i,j} P_{i,j})} \right).$$

2.4. Funcional de Área

El funcional de Área [13], permite controlar el área de las celdas de la malla.

Caso continuo. El funcional de área se representa con la siguiente expresión

$$A(\mathbf{x}(\xi, \eta)) = \int_0^1 \int_0^1 J^2 d\xi d\eta.$$

Este funcional tiene como ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} y_\eta^2 x_{\xi\xi} - x_\eta y_\eta y_{\xi\xi} - 2y_\xi y_\eta x_{\xi\eta} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) y_{\xi\eta} + y_\xi^2 x_{\eta\eta} - x_\xi y_\eta y_{\eta\eta} &= 0 \\ -x_\eta y_\eta x_{\xi\xi} + x_\eta^2 y_{\xi\xi} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) x_{\xi\eta} - 2x_\xi x_\eta y_{\xi\eta} - x_\xi y_\xi x_{\eta\eta} + x_\xi^2 y_{\eta\eta} &= 0, \end{aligned}$$

las cuales son más complicadas que las ecuaciones asociadas al funcional de longitud, pues constituyen un sistema cuasi-lineal, no acoplado y no elíptico. Resolver este sistema de ecuaciones es bastante complejo, por ello, la solución del problema se facilita si se elige el camino de la discretización propuesta por Barrera-Pérez [4].

Caso discreto. En el funcional de Winslow se definió α como un factor asociado al Jacobiano en cada una de las esquinas del cuadrilátero, el cual describe el funcional discreto de área. De hecho, se encuentra únicamente determinado por él.

Se tiene que $a(\vec{r}) = J^2$, entonces

$$a(\vec{r}(0, 0)) = \alpha^2(\triangle SPQ)$$

$$a(\vec{r}(1, 0)) = \alpha^2(\triangle PQR)$$

$$a(\vec{r}(0, 1)) = \alpha^2(\triangle QRS)$$

$$a(\vec{r}(1, 1)) = \alpha^2(\triangle RSP).$$

Así,

$$A(\vec{r}) = \sum_i \sum_j \frac{1}{4} (\alpha^2(\triangle S_{i,j} P_{i,j} Q_{i,j}) + \dots + \alpha^2(\triangle R_{i,j} S_{i,j} P_{i,j})).$$

2.5. Funcional de Ortogonalidad

El funcional de Ortogonalidad [35] busca controlar los ángulos entre las líneas de la malla.

Caso continuo. Este funcional se expresa como

$$O(\mathbf{x}(\xi, \eta)) = \int_0^1 \int_0^1 (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)^2 d\xi d\eta,$$

con $\mathbf{x} = (x, y)^T$.

Y las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a este funcional, no son menos complejas que las asociadas al funcional de área. Se ven como:

$$\begin{aligned} x_\eta^2 x_{\xi\xi} + x_\eta y_\eta y_{\xi\xi} + (4x_\xi x_\eta + 2y_\xi y_\eta) x_{\xi\eta} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) y_{\xi\eta} + x_\xi^2 x_{\eta\eta} + x_\xi y_\xi y_{\eta\eta} &= 0 \\ x_\eta y_\eta x_{\xi\xi} + y_\eta^2 y_{\xi\xi} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) x_{\xi\eta} + (4y_\xi y_\eta + 2x_\xi x_\eta) y_{\xi\eta} + x_\xi y_\xi x_{\eta\eta} + y_\xi^2 y_{\eta\eta} &= 0. \end{aligned}$$

Así, se discretiza el funcional para evitar resolver este sistema de ecuaciones.

Caso discreto. El funcional está dado por

$$O(\mathbf{x}) = O(\vec{r}) = (\vec{r}_\xi)^T (\vec{r}_\eta),$$

que para el triángulo SPQ , se tiene

$$o = (\Delta SPQ) = (S - P)^T (Q - P),$$

obteniendo las siguientes expresiones en cada una de las esquinas del cuadrilátero,

$$\begin{aligned} o(\vec{r}(0, 0)) &= o(\Delta SPQ) \\ o(\vec{r}(1, 0)) &= o(\Delta PQR) \\ o(\vec{r}(0, 1)) &= o(\Delta RSP) \\ o(\vec{r}(1, 1)) &= o(\Delta QRS), \end{aligned}$$

entonces, el funcional queda como

$$O(\vec{r}) = \sum_i \sum_j \frac{1}{4} (o^2(\Delta S_{i,j} P_{i,j} Q_{i,j}) + \dots + o^2(\Delta Q_{i,j} R_{i,j} S_{i,j})).$$

2.6. Generación Variacional Discreta de Mallas

Usualmente, en el problema variacional se calculan las ecuaciones de Euler-Lagrange para el funcional. En este trabajo, para la generación variacional de mallas se propone reemplazar las derivadas de las integrales por diferencias finitas y las integrales por sumas y fórmulas de cuadratura sobre los puntos de la malla.

Con el propósito de obtener mallas óptimas, que sean solución del problema de optimización de gran escala, se pueden discretizar los funcionales de Longitud L, Suavidad S, Área A y Ortogonalidad O, a través de la formulación directa de la siguiente manera,

$$I(\mathbf{x}) = \int_0^1 \int_0^1 F(\mathbf{x}) d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^1 F(x, y, x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta, \xi, \eta) d\xi d\eta$$

y

$$\int_0^1 \int_0^1 F(\mathbf{x}) d\xi d\eta = \sum_{i,j} \int \int_{B_{i,j}} F(\vec{r}_{i,j}) d\xi d\eta,$$

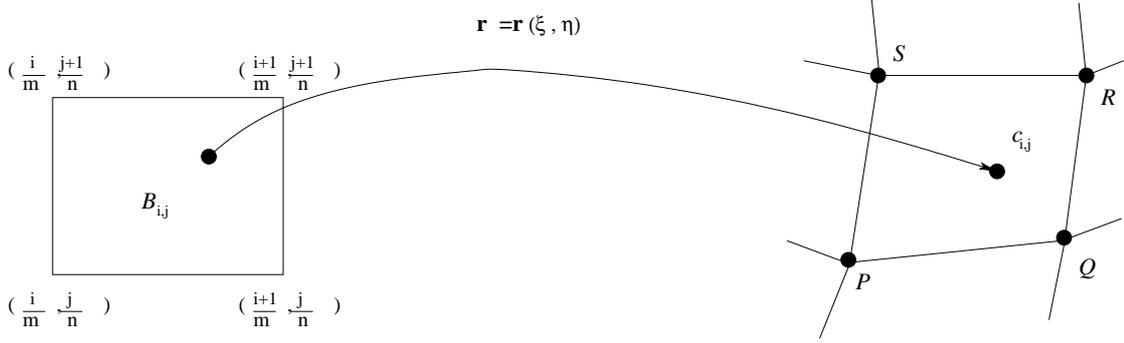


Figura 2.2: Mapeo bilineal sobre $B_{i,j}$.

donde $B_{i,j}$ es la i,j -ésima celda de la malla (figura 2.2). Véase Castillo [13].

La aproximación discreta propuesta por Barrera y Pérez [4] para la igualdad anterior es la siguiente expresión,

$$I(\vec{r}) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_k^4 F(\Delta_{i,j}^k).$$

Los funcionales quedan expresados como:

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_k^4 l(\Delta_{i,j}^k)$$

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_k^4 \frac{l(\Delta_{i,j}^k)}{\alpha(\Delta_{i,j}^k)}$$

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_k^4 (\alpha(\Delta_{i,j}^k))^2$$

$$O = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_k^4 (o(\Delta_{i,j}^k))^2.$$

De esta forma, el problema de la generación variacional discreta de mallas consiste en resolver el problema $\min\{I(\vec{r})\}$ sobre un conjunto de mallas admisibles.

Es importante observar que, de esta forma, el problema clásico del cálculo de variaciones se ha transformado en un problema de optimización de gran escala, que puede ser resuelto con los métodos estándar de optimización. En el capítulo 4, se mostrará que dicho problema puede ser planteado sin restricciones, lo que permite minimizar de una manera bastante eficiente.

2.7. Algunos Resultados Numéricos

A fin de mostrar el trabajo que realizan los funcionales clásicos tratados en este capítulo, Longitud, Suavidad, Área, y Ortogonalidad, se han escogido algunas regiones para aplicarlos buscando mallas óptimas para cada región. Se optimizó con el programa UNAMALLA¹ partiendo de una malla inicial de 40×40 generada por interpolación transfinita² y, sólo para el caso del funcional de Suavidad, la malla inicial se trató hasta hacerla convexa ya que suavidad no trabaja sobre mallas no convexas. Los resultados fueron los siguientes:

	Malla Inicial	F:Longitud	F:Suavidad	F:Área	F:Ortogonalidad
α_{min}	-4.3586832	-9.7617332	0.0094200	-1.4216850	-7.4020368
Cel no conv	475	152	0	39	676

Cuadro 2.1: Gato. Optimizado con los funcionales de Longitud, Suavidad, Área y Ortogonalidad.

	Malla Inicial	F:Longitud	F:Suavidad	F:Área	F:Ortogonalidad
α_{min}	-6.2819460	-6.0077812	0.0020000	-2.2506149	-14.2452280
Cel no conv	601	248	0	54	779

Cuadro 2.2: Inglaterra. Optimizado con los funcionales de Longitud, Área y Ortogonalidad.

	Malla Inicial	F:Longitud	F:Suavidad	F:Área	F:Ortogonalidad
α_{min}	-3.6168486	-5.3350307	0.0476000	-1.2809967	-6.4481758
Cel no conv	394	92	0	17	621

Cuadro 2.3: La Habana. Optimizado con los funcionales de Longitud, Suavidad, Área y Ortogonalidad.

A continuación se muestran las imágenes de la mallas correspondientes a cada una de las regiones optimizadas con los cuatro funcionales clásicos estudiados en este capítulo. Obsérvese que ninguna de las mallas generadas por los funcionales de Longitud, Área y Ortogonalidad, es convexa. En las mallas presentadas para Suavidad es muy importante señalar que aunque son convexas tienen el inconveniente de que las mallas iniciales con las que se generaron son convexas y fueron obtenidas previamente con el algoritmo que se describe en el capítulo 4. El funcional de Suavidad clásica no es útil para generar mallas convexas en regiones irregulares. Véase región Gato, figura 2.3; región Inglaterra, figura 2.4; región La Habana, figura 2.5; región Rusia, figura 2.6.

¹UNAMALLA es un software generado por el grupo de trabajo del mismo nombre que se encuentra en la red en la dirección www.matemáticas.unam.mx/unamalla.

²Véase apéndice A.

	Malla Inicial	F:Longitud	F:Suavidad	F:Área	F:Ortogonalidad
α_{min}	-4.6151903	-2.4081995	0.0001408	-0.9921764	-7.5447653
Cel no conv	359	117	0	46	651

Cuadro 2.4: Rusia. Optimizado con los funcionales de Longitud, Área y Ortogonalidad.

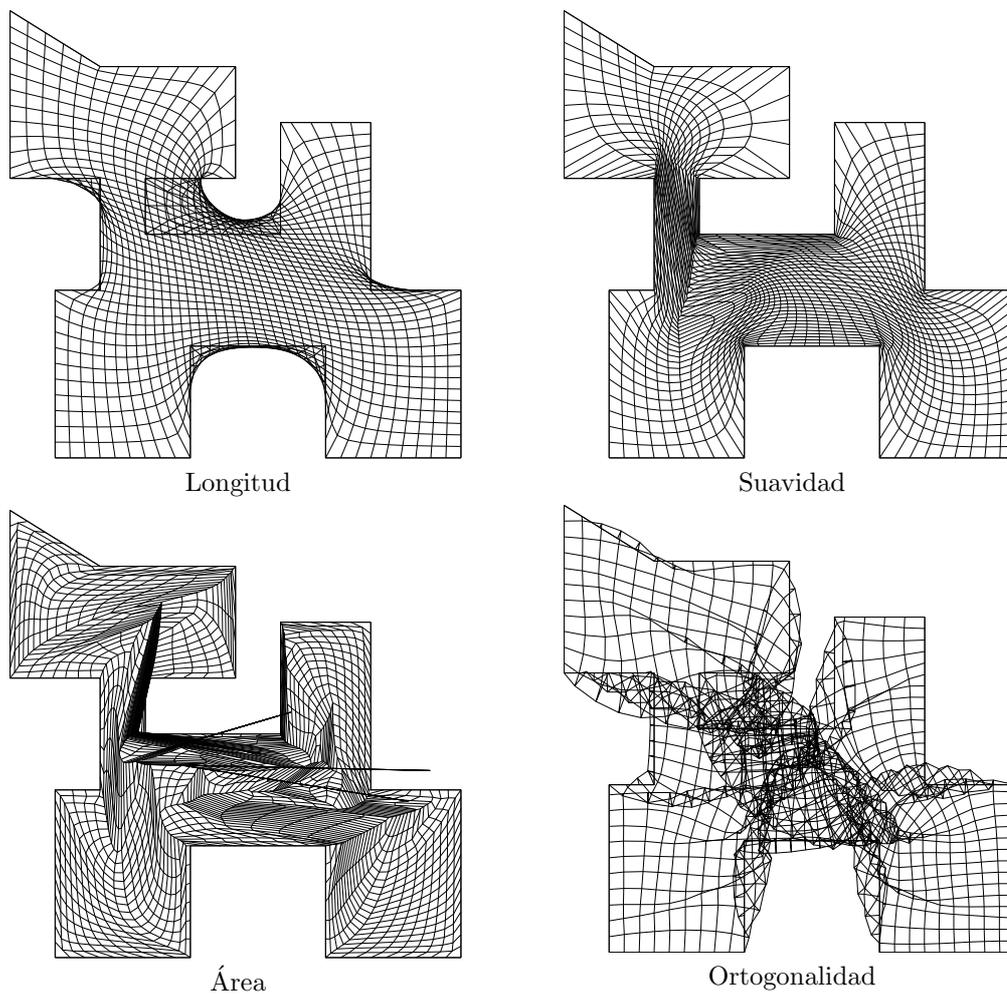


Figura 2.3: Mallas óptimas para los funcionales de Longitud, Suavidad, Área y Ortogonalidad sobre el contorno de Gato.

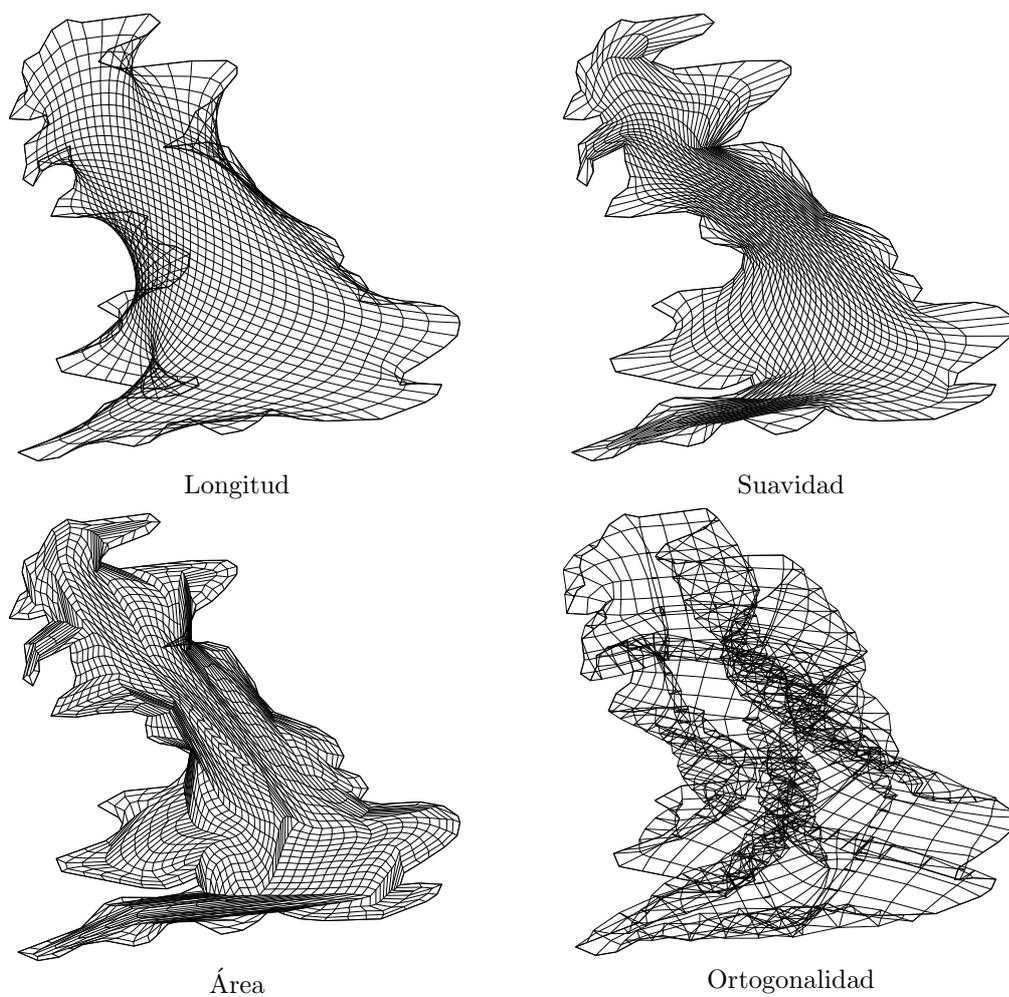


Figura 2.4: Mallas óptimas para los funcionales de Longitud, Suavidad, Área y Ortogonalidad sobre el contorno de Inglaterra.

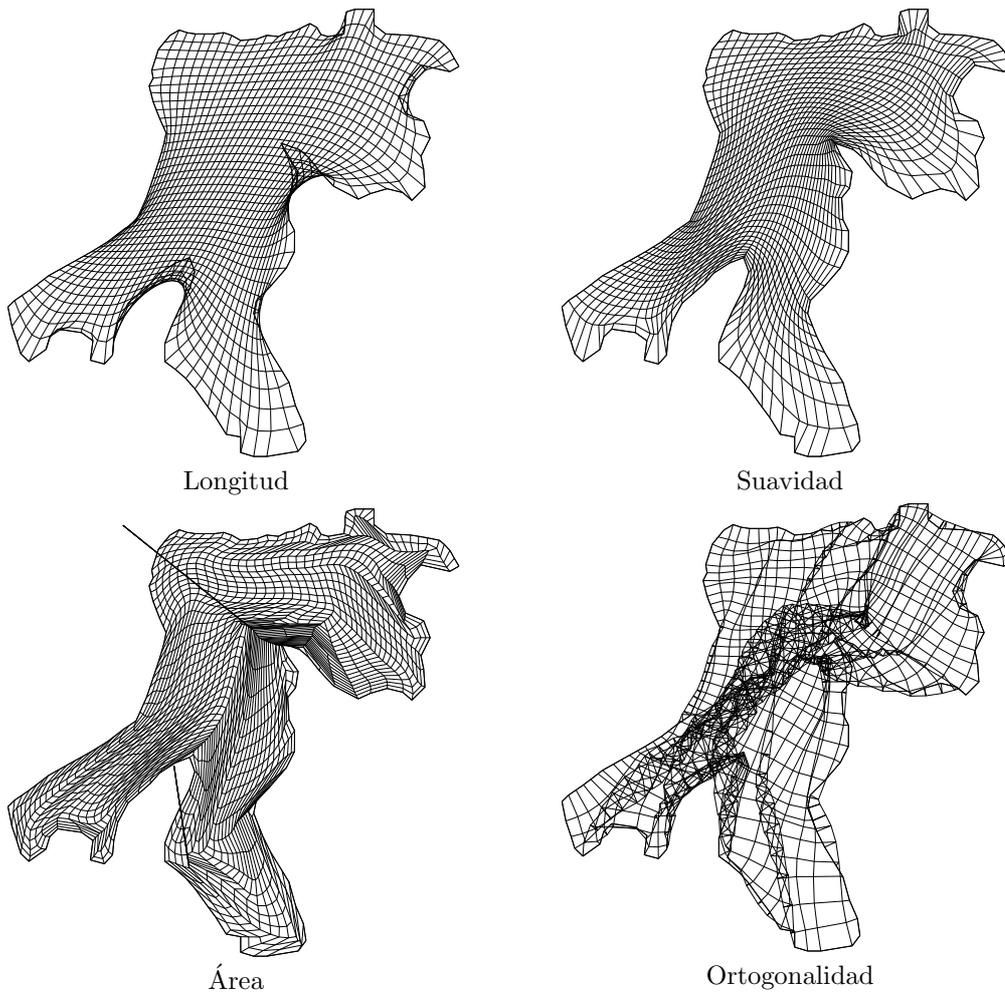


Figura 2.5: Mallas óptimas para los funcionales de Longitud, Suavidad, Área y Ortogonalidad sobre el contorno de La Habana.

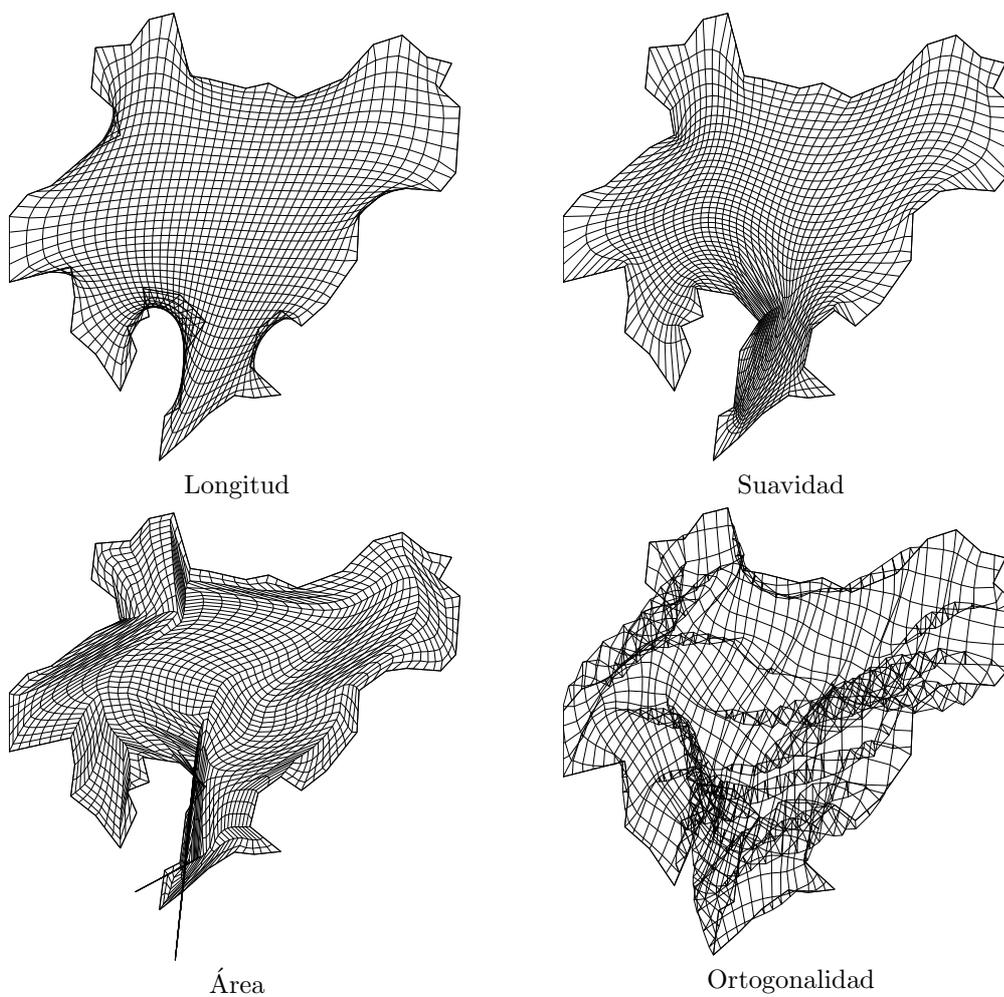


Figura 2.6: Mallas óptimas para los funcionales de Longitud, Suavidad, Área y Ortogonalidad sobre el contorno de Rusia.

Capítulo 3

Convexidad

En el capítulo anterior, el problema de generación de mallas se planteó como un problema de optimización de gran escala. Un concepto importante en la búsqueda de los óptimos de los funcionales, así como el desarrollo de algoritmos de solución de problemas de optimización, es el de *convexidad*. Por ello, se dedica este capítulo al estudio de la convexidad de conjuntos y funciones.

3.1. Conjuntos Convexos

Sea S un subconjunto de un espacio vectorial. Se dice que S es convexo si el segmento lineal cerrado que une cualesquiera dos puntos del conjunto, está totalmente contenido en S . Es decir, para todo $x_1, x_2 \in S$

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S, \lambda \in [0, 1].$$

Ejemplos de un conjunto convexo y un conjunto no convexo se muestran en la figura 3.1.

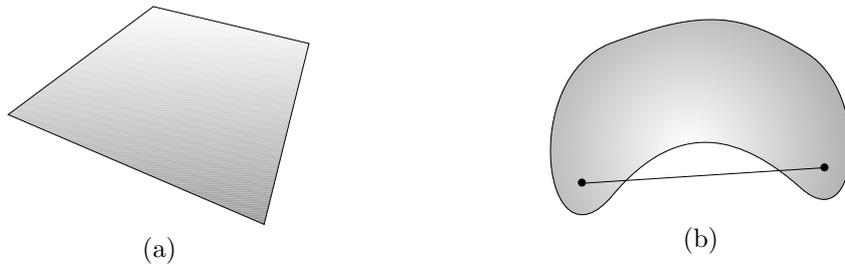


Figura 3.1: (a) Conjunto convexo. (b) Conjunto no convexo.

Se enuncian las propiedades de los conjuntos convexos en el siguiente lema, y a lo largo de este capítulo se consideran estos conjuntos en el espacio Euclidiano n -dimensional E_n .

Lema 3 Sean S_1 y S_2 conjuntos convexos en E_n . Entonces,

1. $S_1 \cap S_2$ es convexo.

2. $S_1 \oplus S_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ es convexo.
3. $S_1 \ominus S_2 = \{x_1 - x_2 : x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ es convexo.

Ya se ha mencionado el interés de trabajar sobre conjuntos convexos, puesto que se facilita la solución a los problemas de optimización. A continuación se define la envolvente convexa para estos conjuntos; cabe mencionar que tal envolvente se puede definir para conjuntos no convexos.

3.1.1. Envolvente Convexa

Sea $S \subseteq E_n$. La envolvente convexa de S , $H(S)$ o $\text{conv}(S)$, es el conjunto de todas las combinaciones convexas de S , es decir,

$$x \in \text{conv}(S) \iff x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j,$$

siempre que $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$, $\lambda_j \geq 0$ con $j = 1, \dots, k$, donde $k \in \mathbb{Z}^+$ y $x_1, \dots, x_k \in S$.

Como se puede observar en la figura 3.2, $\text{conv}(S)$ es el menor¹ conjunto convexo que contiene a S , como afirma el siguiente lema.

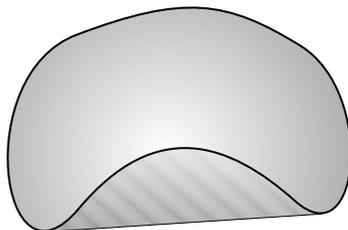


Figura 3.2: Envolvente convexa.

Lema 4 Sea $S \subseteq E_n$. Entonces, $\text{conv}(S)$ es el menor conjunto convexo que contiene a S . Es decir, $\text{conv}(S)$ es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S .

Aquí se omite la demostración de este lema, debido a que es bien conocida.

Un teorema importante es el de la caracterización de la envolvente convexa de un conjunto.

Teorema 5 (Caratheodory) Sea $S \subseteq E_n$. Si $x \in \text{conv}(S)$ entonces, $x \in \text{conv}(x_1, \dots, x_{n+1})$, donde $x_j \in S$, para todo $j = 1, \dots, n+1$; es decir, $x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j$, donde $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1$ y $\lambda_j \geq 0$, $x_j \in S$ con $j = 1, \dots, n+1$. (Véase [1].)

¹menor, considerando el orden parcial definido por la contención de conjuntos: $A \leq B \iff A \subseteq B$.

3.1.2. Cerradura e Interior de un Conjunto

A continuación se muestran algunas definiciones y propiedades topológicas de los conjuntos que se utilizan en el estudio de la convexidad.

Definición 4 Sea $S \subseteq E_n$.

- $\mathcal{N}_\varepsilon(x) = \{\bar{x} : \|x - \bar{x}\| < \varepsilon\}$.
- $x \in cl S$ si $S \cap \mathcal{N}_\varepsilon(x) \neq \phi$, $\forall \varepsilon > 0$.
- Si $S = cl S$, entonces S es cerrado.
- $x \in int S$ si $\mathcal{N}_\varepsilon(x) \subset S$ para algún $\varepsilon > 0$.
- Si $S = int S$, entonces S es abierto.
- $x \in \partial S$ si $\mathcal{N}_\varepsilon(x)$ contiene al menos un punto en S y un punto fuera de S , $\forall \varepsilon > 0$.
- S es acotado si existen $x \in E_n$, $\varepsilon > 0$, tal que $S \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(x)$.
- S es compacto si es cerrado y acotado.
- S es cerrado $\Leftrightarrow x \in S$, $\forall x \in \partial S$. Más aún, $cl S \equiv S \cup \partial S$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a S .
- S es abierto $\Leftrightarrow S$ no contiene ningún punto de su frontera.
- $int S \subseteq S$. $int S = S - \partial S$ pero $\partial S \neq S - int S$.
- S es cerrado $\Leftrightarrow \forall \{x_k\} \subset S$ convergente con $\{x_k\} \rightarrow \bar{x}$ se tiene que $\bar{x} \in S$.

En un conjunto convexo no vacío, el segmento lineal que une un punto de su interior con un punto de su cerradura, está totalmente contenido en el interior del conjunto, como establece el siguiente teorema.

Teorema 6 Sea $S \subseteq E_n$ conjunto convexo, $int S \neq \phi$. Sean $x_1 \in cl S$ y $x_2 \in int S$. Entonces, $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in int S$, para todo $\lambda \in (0, 1)$.

Como consecuencia de este teorema, se tienen dos corolarios relativos al interior de un conjunto.

Corolario 7 Sea S conjunto convexo. Entonces $int S$ es convexo.

Corolario 8 Sea S conjunto convexo, $int S \neq \phi$. Entonces,

- $cl S$ es convexa.
- $cl(int S) = cl S$.
- $int(cl S) = int S$.

3.1.3. Teorema de Weierstrass

Teorema 9 Sean $S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$ compacto, y $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces, el problema $\min\{f(x) : x \in S\}$ alcanza su mínimo, es decir, existe $x_0 \in S$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$. Véase Rudin ([37]).

3.1.4. Separación y Soporte de Conjuntos

En el caso particular de los conjuntos convexos el problema de encontrar la distancia mínima de un punto a un conjunto, puede escribirse de una manera sencilla en términos del producto interior.

Teorema 10 Sean $S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$ cerrado y convexo, y $y \notin S$. Entonces existe un único $\bar{x} \in S$ con distancia mínima de y . Más aún, \bar{x} es el punto mínimo si y sólo si $(y - \bar{x})^T(x - \bar{x}) \leq 0$, para todo $x \in S$.

Demostración. *Existencia.* Por hipótesis $S \neq \emptyset \Rightarrow \exists \hat{x} \in S$. Analicemos el conjunto $\bar{S} = S \cap \{x : \|y - x\| \leq \|y - \hat{x}\|\}$, el buscar el punto más cercano, es decir, $\inf\{\|y - x\| : x \in S\}$ es equivalente al $\inf\{\|y - x\| : x \in \bar{S}\}$, lo cual implica encontrar el $\min\{f(x) : x \in \bar{S}\}$ donde $\bar{S} \neq \emptyset$ y compacto, y f continua en \bar{S} .

Por el teorema de Weierstrass, $\exists \bar{x} \in \bar{S}$ tal que \bar{x} es el punto más cercano a y ; además, $\bar{x} \in S$.

Unicidad. Supongase que $\exists \bar{x}' \in S$ tal que $\|y - \bar{x}\| = \|y - \bar{x}'\| = \gamma$. Por convexidad de S , $\frac{\bar{x} + \bar{x}'}{2} \in S$ y sobre el segmento que une a \bar{x} y \bar{x}' , $\|\bar{x}' - \frac{\bar{x} + \bar{x}'}{2}\| = r$. Por desigualdad del triángulo se tiene que $\|y - \frac{\bar{x} + \bar{x}'}{2}\| \leq \frac{1}{2}\|y - \bar{x}\| + \frac{1}{2}\|y - \bar{x}'\| = \gamma$.

Si se considera la desigualdad estricta se llega a una contradicción puesto que \bar{x} es el punto más cercano a y ; entonces se conserva la igualdad, $\|y - \frac{\bar{x} + \bar{x}'}{2}\| = \gamma$. Por teorema de Pitágoras, $\|y - \bar{x}'\|^2 = \|y - \frac{\bar{x} + \bar{x}'}{2}\|^2 + \|\bar{x}' - \frac{\bar{x} + \bar{x}'}{2}\|^2$, es decir, $\gamma^2 = \gamma^2 + r^2 \Rightarrow r = 0$. Por lo tanto $\bar{x} = \bar{x}'$.

Ahora, \bar{x} es punto mínimo $\iff (y - \bar{x})^T(x - \bar{x}) \leq 0, \forall x \in S$.

\Leftarrow : Sea $(y - \bar{x})^T(x - \bar{x}) \leq 0, \forall x \in S$. Tómesese $x \in S$, entonces, $\|y - x\|^2 = \|y - \bar{x} + \bar{x} - x\|^2 = \|y - \bar{x}\|^2 + \|\bar{x} - x\|^2 + 2(\bar{x} - x)^T(y - \bar{x})$. Se tiene que $\|\bar{x} - x\| \geq 0$ y $(\bar{x} - x)^T(y - \bar{x}) \geq 0$; entonces $\|y - x\|^2 \geq \|y - \bar{x}\|^2$ y \bar{x} es punto mínimo.

\Rightarrow : Supóngase $\|y - x\|^2 \geq \|y - \bar{x}\|^2, \forall x \in S$. Sea $x \in S$, por convexidad de S , $\bar{x} + \lambda(x - \bar{x}) \in S$ para $0 \leq \lambda \leq 1$. Entonces, $\|y - \bar{x} - \lambda(x - \bar{x})\|^2 \geq \|y - \bar{x}\|^2$.

Por un lado, $\|y - \bar{x} - \lambda(x - \bar{x})\|^2 = \|y - \bar{x}\|^2 + \|\lambda(x - \bar{x})\|^2 - 2\lambda(y - \bar{x})^T(x - \bar{x})$, es decir,

$\|y - \bar{x}\|^2 + \lambda^2\|x - \bar{x}\|^2 - 2\lambda(y - \bar{x})^T(x - \bar{x}) \geq \|y - \bar{x}\|^2$; esto implica

$\lambda^2\|x - \bar{x}\|^2 - 2\lambda(y - \bar{x})^T(x - \bar{x}) \geq 0 \Rightarrow \lambda\|x - \bar{x}\|^2 \geq 2\lambda(y - \bar{x})^T(x - \bar{x}), \forall \lambda \in [0, 1]$, se sigue que $\lambda\|x - \bar{x}\|^2 \geq 2\lambda(y - \bar{x})^T(x - \bar{x})$.

Por lo tanto, $(y - \bar{x})^T(x - \bar{x}) \leq 0, \forall x \in S$. \square

3.1.5. Hiperplanos y Separación de dos Conjuntos

Definición 5 Un hiperplano H en E_n es una colección de puntos de la forma $\{x : \vec{p}^T x = \alpha\}$ donde $\vec{p} \in E_n$, $\vec{p} \neq 0$ y α un escalar. \vec{p} es el vector normal a H .

Obsérvese que un hiperplano H define dos semiespacios cerrados, $H^+ = \{x : \vec{p}^T x \geq \alpha\}$ y $H^- = \{x : \vec{p}^T x \leq \alpha\}$, y dos semiespacios abiertos $\{x : \vec{p}^T x > \alpha\}$ y $\{x : \vec{p}^T x < \alpha\}$.

En el teorema anterior (10), se puede ver que S está en el semiespacio $a^T(x - \bar{x}) \leq 0$ para todo $x \in S$, relativo al hiperplano $a^T(x - \bar{x}) = 0$ que pasa por \bar{x} y normal a $a = (y - \bar{x})$.

Definición 6 Sean $S_1, S_2 \subseteq E_n$, S_1 y S_2 no vacíos.

- Un hiperplano $H = \{x : \vec{p}^T x = \alpha\}$ separa a S_1 y S_2 si $\vec{p}^T x \geq \alpha$ para todo $x \in S_1$, y $\vec{p}^T x \leq \alpha$ para todo $x \in S_2$.
- Si $S_1 \cap S_2 \subseteq H$, entonces H separa propiamente a S_1 y S_2 .
- Se dice que H separa estrictamente a S_1 y S_2 si $\vec{p}^T x > \alpha$ para todo $x \in S_1$, y $\vec{p}^T x < \alpha$ para todo $x \in S_2$.
- Se dice que H separa fuertemente a S_1 y S_2 si $\vec{p}^T x \geq \alpha + \varepsilon$ para todo $x \in S_1$, y $\vec{p}^T x \leq \alpha$ para todo $x \in S_2$, donde $\varepsilon > 0$.
- Una separación impropia es cuando $S_1 \cup S_2 \subseteq H$.

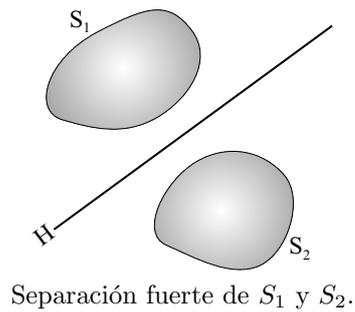
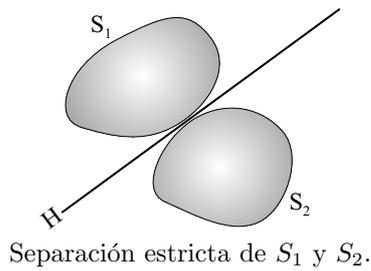
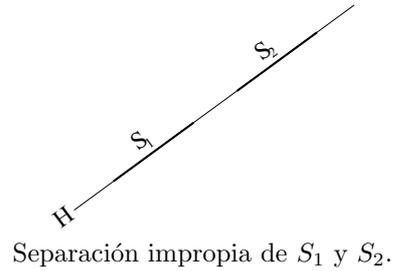
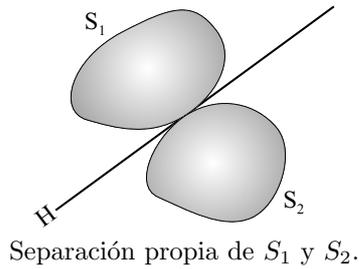


Figura 3.3: Hiperplanos de separación.

3.1.6. Separación de un Conjunto Convexo y un Punto

Teorema 11 Sean $S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$ convexo y cerrado, $y \notin S$. Entonces existen $\vec{p} \neq 0$ y α escalar tal que $\vec{p}^T y > \alpha$ y $\vec{p}^T x \leq \alpha$, para todo $x \in S$.

Demostración. Se tiene que $S \neq \emptyset$ convexo y cerrado. Por el teorema de separación y soporte (10), existe un único $\bar{x} \in S$ tal que \bar{x} es el punto mínimo, entonces $(x - \bar{x})^T (y - \bar{x}) \leq 0$, $\forall x \in S$.

Tomando $\vec{p} = (y - \bar{x}) \neq 0$ y $\alpha = \bar{x}^T (y - \bar{x}) = (y - \bar{x})^T \bar{x} \equiv \vec{p}^T \bar{x}$ se tiene que $\vec{p}^T x \leq \alpha$, $\forall x \in S$, mientras que $\vec{p}^T y - \alpha = (y - \bar{x})^T (y - \bar{x}) = \|y - \bar{x}\|^2 > 0$. Por lo tanto, $\vec{p}^T y > \alpha$. \square

Corolario 12 Sea $S \subseteq E_n$ convexo y cerrado. Entonces, S es la intersección de todos los semiespacios cerrados que contienen a S .

Demostración. Defínase H_α semiespacio tal que $S \subseteq H_\alpha$ con $\alpha \in I$, I conjunto de índices. Sea $S \subseteq E_n$, S cerrado y convexo. Se debe probar que $S = \bigcap H_\alpha$ tal que $H_\alpha \supseteq S$, $\forall \alpha \in I$.

\subseteq : Puesto que $S \subseteq H_\alpha$, $\forall \alpha \in I$, entonces $S \subseteq \bigcap H_\alpha$.

\supseteq : Supóngase que $S \not\subseteq \bigcap H_\alpha$, $H_\alpha \supseteq S$, $\forall \alpha \in I$; entonces existe un $y \in \bigcap H_\alpha$ tal que $y \notin S$. Por el teorema 11, $S = \bigcap H_\alpha$ con $H_\alpha \supseteq S$, $\forall \alpha \in I$. \square

Corolario 13 Sean $S \neq \emptyset$ y un punto $y \notin cl\ conv(S)$. Entonces existe un hiperplano H que separa fuertemente a S y y .

Demostración. Se tiene que $\emptyset \neq cl\ conv(S) \subseteq E_n$ es cerrado y convexo. Sea $y \notin cl\ conv(S)$. Por el teorema de separación (11) existen $\vec{p} \neq 0$ y α escalar tal que $\vec{p}^T y > \alpha$ y $\vec{p}^T x \leq \alpha$, $\forall x \in cl\ conv(S)$, es decir, $\exists H$ hiperplano que separa a S y a y y los separa fuertemente, $\vec{p}^T y \geq \alpha + \varepsilon$. \square

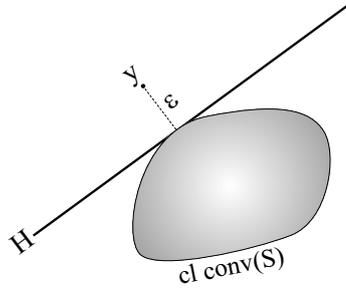


Figura 3.4: Separación fuerte de un conjunto S y un punto y .

Sean $S \subseteq E_n$, y un punto en S . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\exists H$ hiperplano que separa estrictamente a S e y .
2. $\exists H$ hiperplano que separa fuertemente a S e y .

3. $\exists \vec{p}$ tal que $\vec{p}^T y > \sup\{\vec{p}^T x : x \in S\}$.

4. $\exists \vec{p}$ tal que $\vec{p}^T y < \inf\{\vec{p}^T x : x \in S\}$.

3.1.7. Soporte de Conjuntos en Puntos Frontera

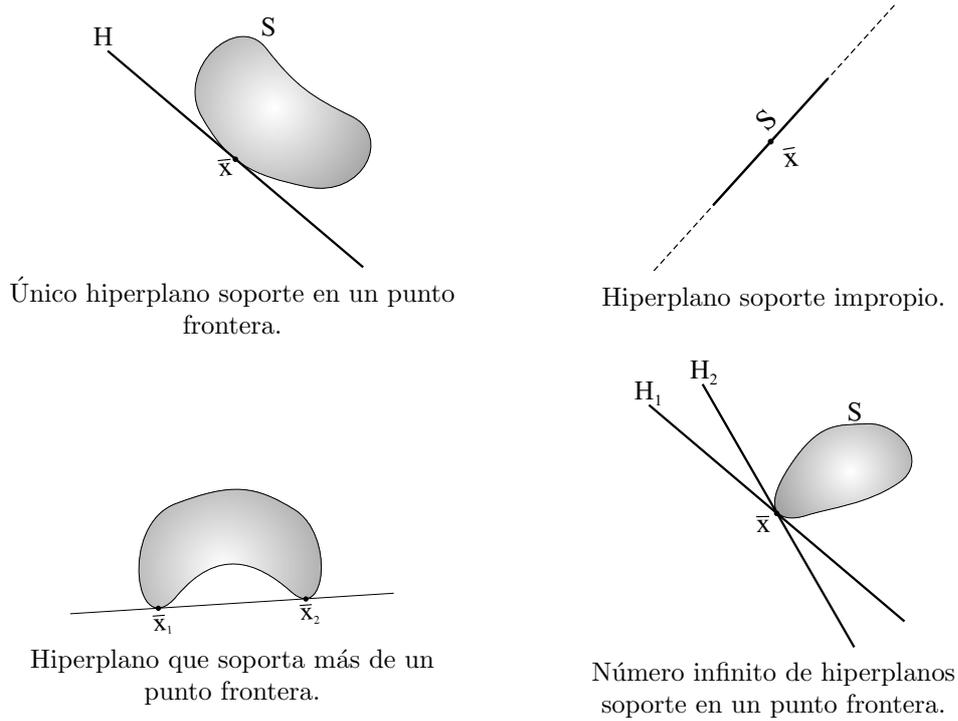


Figura 3.5: Hiperplanos soporte.

Definición 7 Sean $S \subseteq E_n$, con $S \neq \emptyset$, y $\bar{x} \in \partial S$.

Un hiperplano $H = \{x : \vec{p}^T(x - \bar{x}) = 0\}$ se llama hiperplano soporte de S en \bar{x} si:

- $S \subseteq H^+$, es decir, $\vec{p}^T(x - \bar{x}) \geq 0, \forall x \in S$, o
- $S \subseteq H^-$ tal que $\vec{p}^T(x - \bar{x}) \leq 0, \forall x \in S$.

La figura 3.5 muestra varios casos de hiperplanos que soportan a un conjunto en uno o más puntos.

Teorema 14 Sea $S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$ y convexo. Sea $\bar{x} \in \partial S$. Entonces, existe H hiperplano que soporta a S en \bar{x} , es decir, existe $\vec{p} \neq 0$ tal que $\vec{p}^T(x - \bar{x}) \leq 0$, para todo $x \in cl S$.

Demostración. Como $\bar{x} \in \partial S$, $\exists \{y_k\} \not\subseteq cl S$ tal que $y_k \rightarrow \bar{x}$, ($\{y_k\} \not\subseteq S$ y $\{y_k\} \not\subseteq \partial S$). Por el teorema de separación (11), $\forall y_k$, $\exists \vec{p}_k$ con $\|\vec{p}_k\| = 1$, tal que $\vec{p}_k^T y_k > \vec{p}_k^T \bar{x}$, $\forall x \in cl S$.

Ahora, $\{\vec{p}_k\}$ es acotado, esto implica que $\exists \{\vec{p}_k\}_K$ subsucesión de $\{\vec{p}_k\}$ tal que $\{\vec{p}_k\}_K \rightarrow \vec{p}$ que tiene norma 1, ($\|\vec{p}\| = 1$), entonces $\vec{p}_k^T y_k > \vec{p}_k^T \bar{x}$, $\forall x \in cl S$.

Con $x \in cl S$ y tomando el límite cuando $K \ni k \rightarrow \infty$ se tiene $\vec{p}^T \bar{x} \geq \vec{p}^T x$, es decir, $\vec{p}^T (x - \bar{x}) \leq 0$, $\forall x \in cl S$. \square

Corolario 15 Sean $S \subseteq E_n$, $S \neq \phi$ convexo, y $\bar{x} \notin int S$. Entonces existe \vec{p} , con $\vec{p} \neq 0$ tal que $\vec{p}^T (x - \bar{x}) \leq 0$, para todo $x \in cl S$.

Demostración. Sea $\bar{x} \notin int S$, esto implica que $\bar{x} \in \partial S$ o $\bar{x} \notin cl S$. Si $\bar{x} \notin cl S$ por el teorema del hiperplano soporte (14), el corolario es cierto. Si $\bar{x} \in \partial S$ por el teorema de separación (11), el corolario es cierto. \square

Corolario 16 Sea $S \subseteq E_n$, $S \neq \phi$. Sea $y \notin int conv(S)$, entonces existe H hiperplano que separa a S e y .

Demostración. Por el corolario anterior (15), $\exists H$ que los separa. \square

Corolario 17 Sean $S \subseteq E_n$, $S \neq \phi$, y $\bar{x} \in \partial S \cap \partial conv(S)$. Entonces existe H hiperplano que soporta a S en \bar{x} .

Demostración. Se tiene que $\bar{x} \in \partial S \cap \partial conv(S) \Rightarrow \bar{x} \in \partial S$ y $\bar{x} \in \partial conv(S)$. Si $\bar{x} \in \partial S$, por el teorema del hiperplano soporte (14), es cierto. Si $\bar{x} \in \partial conv(S)$, como $conv(S)$ es un conjunto convexo se puede usar el mismo teorema, es decir, $\exists H$ que soporta a S en \bar{x} . \square

Teorema 18 Sean $S_1, S_2 \subseteq E_n$, $S_1 \neq \phi$ y convexo, $S_2 \neq \phi$ y convexo. Supongamos $S_1 \cap S_2 = \phi$, entonces existe H hiperplano que separa a S_1 y S_2 , es decir, existe $\vec{p} \neq 0$ tal que $\inf\{\vec{p}^T x : x \in S_1\} \geq \sup\{\vec{p}^T x : x \in S_2\}$.

Demostración. Sea $S = S_1 \ominus S_2 = \{x_1 - x_2 : x_1 \in S_1 \text{ y } x_2 \in S_2\}$. Como S_1 y S_2 son convexos, entonces S es convexo y $0 \notin S$ pues $S_1 \cap S_2 = \phi$. Por corolario 15, $\exists \vec{p} \neq 0$ tal que $\vec{p}^T (x - 0) \geq 0$, $\forall x \in S \Rightarrow \vec{p}^T x \geq 0$, es decir, $\vec{p}^T x_1 \geq \vec{p}^T x_2$, ($x = x_1 + x_2$), $\forall x_1 \in S_1$ y $\forall x_2 \in S_2$. \square

3.2. Funciones Convexas

A continuación se revisan las propiedades más relevantes de las funciones convexas.

3.2.1. Definiciones y Propiedades Básicas

Definición 8 Sea $f: S \rightarrow E_1$ donde $S \subseteq E_n$, $S \neq \phi$ y convexo.

- f es convexa sobre S si $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \forall x_1, x_2 \in S$ y $\forall \lambda \in (0, 1)$.
- f es estrictamente convexa si $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ con $x_1 \neq x_2$.

- f es cóncava si $-f$ es convexa.
- f es estrictamente cóncava si $-f$ es estrictamente convexa.

Seguindo las definiciones anteriores, son claros los siguientes ejemplos.

1. Sean $f_1, \dots, f_k: E_n \rightarrow E_1$ convexas. Entonces:
 - $f(x) = \sum_{j=1}^k c_j f_j(x)$, donde $c_j > 0, \forall j = 1, 2, \dots, k$, es convexa.
 - $f(x) = \text{máx}\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$ es convexa.
2. Considérese $g_n: E_n \rightarrow E_1$ cóncava. Sea $S = \{x : g_n(x) > 0\}$ y defínase $f: S \rightarrow E_1$ como $f(x) = \frac{1}{g_n(x)}$. Entonces f es convexa sobre S .

El comportamiento de una función puede ser analizado en términos de sus conjuntos de nivel que se define a continuación.

Considérese $L_a = \{x \in S : f(x) \leq a\}$ con $a \in E_1$, el conjunto asociado a f convexa, conocido también como el conjunto nivel.

Lema 19 Sean $S \subseteq E_n, S \neq \emptyset$ y convexo, y $f: S \rightarrow E_1$ función convexa. Entonces $L_a = \{x \in S : f(x) \leq a\}$, donde $a \in \mathbb{R}$, es convexo.

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in L_a \Rightarrow x_1, x_2 \in S$ y $f(x_1) \leq a, f(x_2) \leq a$. Ahora, sea $\lambda \in (0, 1)$ y $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Como S es convexo, $x \in S$; y f es convexa, $f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \leq \lambda a + (1 - \lambda)a = \lambda a + a - \lambda a = a$; esto implica que $x \in L_a$ pues $x \in S$ y $f(x) \leq a$. Por lo tanto, L_a es convexo. \square

3.2.2. Continuidad de Funciones Convexas

Teorema 20 Sea $S \subseteq E_n, S \neq \emptyset$ y convexo, y sea $f: S \rightarrow E_1$ convexa. Entonces f es continua en $\text{int } S$.

3.2.3. Derivada Direccional de Funciones Convexas

Definición 9 Sean $S \subseteq E_n, S \neq \emptyset$, y $f: S \rightarrow E_1$. Sean $\bar{x} \in S$ y $\vec{d} \neq 0$ tal que $\bar{x} + \lambda \vec{d} \in S$ para $\lambda > 0$ y suficientemente pequeña. La derivada direccional en \bar{x} en dirección de \vec{d} , denotada por $f'(\bar{x}; \vec{d})$, está dada por el siguiente límite si existe:

$$f'(\bar{x}; \vec{d}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + \lambda \vec{d}) - f(\bar{x})}{\lambda}$$

Lema 21 Sea $f: E_n \rightarrow E_1$ función convexa. Consideremos un punto cualquiera $\bar{x} \in E_n$ y una dirección $0 \neq \vec{d} \in E_n$, entonces existe $f'(\bar{x}; \vec{d})$. (Véase []).

3.2.4. Subgradientes de una Función Convexa.

Epigráfica e Hipográfica de una Función

La gráfica de una función f en S es $\{(x, f(x)) : x \in S\} \subseteq E_{n+1}$ y se denota por $\text{graf}(f)$. Se pueden construir dos conjuntos relacionados con la gráfica de f :

- la *epigráfica* que consiste en los puntos arriba de $\text{graf}(f)$ y
- la *hipográfica* que consiste en los puntos debajo de $\text{graf}(f)$.

Definición 10 Sean $S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$, y $f: S \rightarrow E_1$. La *epigráfica* de f , denotada por $\text{epi } f$, es un subconjunto de E_{n+1} definida por

$$\text{epi } f = \{(x, y) : x \in S, y \in E_1, y \geq f(x)\}.$$

La *hipográfica* de f , denotada por $\text{hyp } f$, es un subconjunto de E_{n+1} definida por

$$\text{hyp } f = \{(x, y) : x \in S, y \in E_1, y \leq f(x)\}.$$

Teorema 22 Sean $S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$ y convexo, y $f: S \rightarrow E_1$. Entonces f es convexa si y sólo si $\text{epi } f$ es convexa.

Demostración. \Rightarrow : Supóngase f convexa. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \text{epi } f$, esto implica $x_1, x_2 \in S$ y $y_1 \geq f(x_1)$, $y_2 \geq f(x_2)$. Tómese $\lambda \in (0, 1)$, entonces $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$ por convexidad de f .

Es claro que $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$, entonces $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \in \text{epi } f$. Por lo tanto, $\text{epi } f$ es convexa.

\Leftarrow : Supóngase $\text{epi } f$ convexa. Sean $x_1, x_2 \in S$, entonces $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in \text{epi } f$. Por hipótesis, $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)) \in \text{epi } f$, $\forall \lambda \in (0, 1)$, es decir, $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$, $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \in E_1$ y $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$.

Por lo tanto, f es convexa. \square

Definición 11 Sean $S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$ y convexo, y $f: S \rightarrow E_1$ convexa. Entonces ξ es un subgradiente de f en $\bar{x} \in S$ si $f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x})$, para todo $x \in S$.

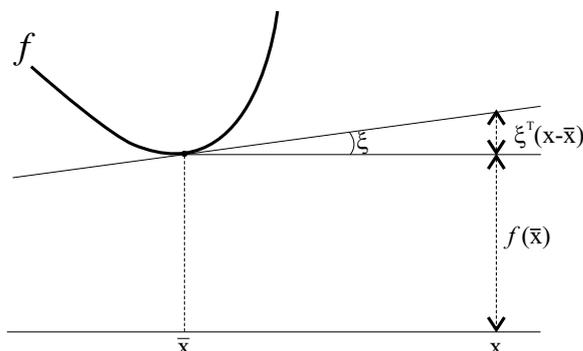
De igual forma, sea $f: S \rightarrow E_1$ cóncava. Entonces ξ es un subgradiente de f en $\bar{x} \in S$ si $f(x) \leq f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x})$, para todo $x \in S$.

En la definición anterior, $f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x})$ representa el hiperplano soporte de $\text{epi } f$, donde ξ es la pendiente de dicho hiperplano, como se observa en la figura 3.6.

Teorema 23 Sean $S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$ y convexo, y $f: S \rightarrow E_1$ convexa. Entonces, para $\bar{x} \in \text{int } S$ existe ξ vector tal que $H = \{(x, y) : y = f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x})\}$ soporta la epigráfica de f en $(\bar{x}, f(\bar{x}))$. En particular, $f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x})$, para todo $x \in S$; es decir, ξ es un subgradiente de f en \bar{x} .

Corolario 24 Sean $S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$ y convexo, y $f: S \rightarrow E_1$ estrictamente convexa. Entonces, para $\bar{x} \in \text{int } S$ existe ξ vector tal que $f(x) > f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x})$, para todo $x \in S$, $x \neq \bar{x}$.

Teorema 25 Sean $S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$ y convexo, y $f: S \rightarrow E_1$. Supongamos que para todo $\bar{x} \in \text{int } S$ existe ξ vector tal que $f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x})$, para todo $x \in S$. Entonces, f es convexa en el $\text{int } S$.

Figura 3.6: ξ subgradiente de f .

3.2.5. Funciones Diferenciables Convexas

Definición 12 Sean $S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$, y $f: S \rightarrow E_1$. Entonces f es diferenciable en $\bar{x} \in \text{int } S$ si existe $\vec{\nabla} f(\bar{x})$ vector, llamado vector gradiente, y una función $\beta: E_n \rightarrow E_1$ tal que $f(x) = f(\bar{x}) + \vec{\nabla} f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\|\beta(\bar{x}; x - \bar{x})$,² para todo $x \in S$, donde $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \beta(\bar{x}; x - \bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{R}{\|x - \bar{x}\|} = 0$.

Es claro que f es diferenciable en el abierto $S' \subseteq S$ si es diferenciable para todo $x \in S'$. Si f es diferenciable en \bar{x} , entonces existe al menos un vector gradiente que está dado por

$$\vec{\nabla} f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} \right)^T = (f_1(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x}))^T.$$

Lema 26 Sean $S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$ y convexo, y $f: S \rightarrow E_1$ convexa. Supongamos f diferenciable en $\bar{x} \in \text{int } S$. Entonces, la colección de subgradientes de f en \bar{x} es el singulete $\{\vec{\nabla} f(\bar{x})\}$.

Una función diferencial convexa tiene sólo un gradiente llamado vector gradiente.

Teorema 27 Sean $S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$ convexo y abierto, y $f: S \rightarrow E_1$ diferenciable en S . Entonces,

- f es convexa si y sólo si para todo $\bar{x} \in S$, $f(x) \geq f(\bar{x}) + \vec{\nabla} f(\bar{x})^T(x - \bar{x})$, para todo $x \in S$.
- f es estrictamente convexa si y sólo si para todo $\bar{x} \in S$, $f(x) > f(\bar{x}) + \vec{\nabla} f(\bar{x})^T(x - \bar{x})$, para todo $x \in S$ con $x \neq \bar{x}$.

La demostración es clara por el teorema 23.

Teorema 28 Sean $S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$, y $f: S \rightarrow E_1$ diferenciable en S . Entonces,

- f es convexa si y sólo si para todo $x_1, x_2 \in S$ se tiene $[\vec{\nabla} f(x_2) - \vec{\nabla} f(x_1)]^T(x_2 - x_1) \geq 0$
- f es estrictamente convexa si y sólo si para todo $x_1, x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$, se tiene $[\vec{\nabla} f(x_2) - \vec{\nabla} f(x_1)]^T(x_2 - x_1) > 0$

²Expansión de primer orden (serie de Taylor) en \bar{x} .

3.2.6. Funciones 2-Diferenciables Convexas y Cóncavas

Definición 13 Sean $S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$, y $f: S \rightarrow E_1$. Entonces, f es 2-diferenciable en $\bar{x} \in \text{int } S$ si existe $\vec{\nabla} f(\bar{x})$ y una matriz $n \times n$ simétrica $\mathbb{H}(\bar{x})$, llamada matriz Hessiana, y una función $\beta: E_n \rightarrow E_1$ tal que,

$$f(x) = f(\bar{x}) + \vec{\nabla} f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T \mathbb{H}(\bar{x})(x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\|^2 \beta(\bar{x}; x - \bar{x})$$

para todo $x \in S$, donde $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \beta(\bar{x}; x - \bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{R}{\|x - \bar{x}\|} = 0$.

Nótese que f es 2-diferenciable en el abierto $S' \subseteq S$ si es 2-diferenciable para todo $x \in S'$. La matriz Hessiana tiene la siguiente estructura,

$$\mathbb{H}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Teorema 29 Sean $S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$ abierto y convexo, y $f: S \rightarrow E_1$ 2-diferenciable en S . Entonces f es convexa si y sólo si la matriz Hessiana es positiva semidefinida para todo $x \in S$.

Demostración. \Rightarrow : Supóngase f convexa y sea $\bar{x} \in S$. Se debe probar que $x^T \mathbb{H}(\bar{x})x \geq 0$, $\forall x \in S$. Como S es abierto, $\forall x \in S$, $\bar{x} + \lambda x \in S$ para $|\lambda| \neq 0$ y suficientemente pequeña. Por el teorema 27 y la 2-diferenciabilidad de f se tiene que

$$f(\bar{x} + \lambda x) \geq f(\bar{x}) + \lambda \vec{\nabla} f(\bar{x})^T x,$$

puesto que $\bar{x} + \lambda x - \bar{x} = \lambda x$, y

$$f(\bar{x} + \lambda x) = f(\bar{x}) + \lambda \vec{\nabla} f(\bar{x})^T x + \frac{1}{2} \lambda^2 x^T \mathbb{H}(\bar{x})x + \lambda^2 \|x\|^2 \beta(\bar{x}; \lambda x).$$

Restando las dos ecuaciones anteriores tenemos, $\frac{1}{2} \lambda^2 x^T \mathbb{H}(\bar{x})x + \lambda^2 \|x\|^2 \beta(\bar{x}; \lambda x) \geq 0$. Si se toma λ cercano a cero, el límite es,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2} x^T \mathbb{H}(\bar{x})x + \|x\|^2 \beta(\bar{x}; \lambda x) \geq \lim_{\lambda \rightarrow 0} 0,$$

de donde, $x^T \mathbb{H}(\bar{x})x \geq 0$.

\Leftarrow : Supóngase $x^T \mathbb{H}(\bar{x})x \geq 0$, $\forall x \in S$. Tómesese $x, \bar{x} \in S$. Entonces, por el teorema del valor medio se tiene que

$$f(x) = f(\bar{x}) + \vec{\nabla} f(x)^T(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T \mathbb{H}(\hat{x})(x - \bar{x}),$$

donde $\hat{x} = \lambda \bar{x} + (1 - \lambda)x$ para alguna $\lambda \in (0, 1)$.

Como S es convexo, $\hat{x} \in S$. Además, $(x - \bar{x})^T \mathbb{H}(\hat{x})(x - \bar{x}) \geq 0$, entonces,

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \vec{\nabla} f(x)^T (x - \bar{x}) \quad \forall x, \bar{x} \in S.$$

Por lo tanto, f es convexa. \square

Teorema 30 Sean $S \subseteq E_n$, $S \neq \emptyset$ convexo y abierto, y $f: S \rightarrow E_1$ 2-diferenciable en S .

- Si la matriz Hessiana es positiva definida para todo $x \in S$, entonces f es estrictamente convexa.
- Si f es estrictamente convexa, entonces la matriz Hessiana es positiva semidefinida para todo $x \in S$.
- Si f es estrictamente convexa y cuadrática, entonces su matriz Hessiana es positiva definida.

Teorema 31 Sean $S \subseteq E_1$, $S \neq \emptyset$, y $f: S \rightarrow E_1$ infinitamente diferenciable. Entonces f es estrictamente convexa en S si y sólo si para todo $\bar{x} \in S$ existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^{(n)}(\bar{x}) > 0$, siempre que $f^{(j)}(\bar{x}) = 0$ con $1 < j < n$, donde $f^{(j)}$ denota la j -ésima derivada de f .

Demostración. Sea $\bar{x} \in S$. Considérese la expansión en serie de Taylor de f alrededor de \bar{x} para una perturbación $h \neq 0$ y lo suficientemente pequeña:

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + hf'(\bar{x}) + \frac{h^2}{2}f''(\bar{x}) + \frac{h^3}{3}f'''(\bar{x}) + \dots$$

\Rightarrow : Supóngase f estrictamente convexa en S , por el teorema 27, $f(\bar{x} + h) > f(\bar{x}) + hf'(\bar{x})$, $\forall h \neq 0$, entonces

$$\frac{h^2}{2}f''(\bar{x}) + \frac{h^3}{3}f'''(\bar{x}) + \frac{h^4}{4}f^{(4)}(\bar{x}) + \dots > 0.$$

Nótese que las derivadas de orden 2 o más pueden ser cero.

\Leftarrow : Supóngase que $\forall \bar{x} \in S \exists n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^{(n)}(\bar{x}) > 0$, siempre que $1 < j < n$. Se debe probar que $(\bar{x} + h) \in S$ y $f(\bar{x} + h) > f(\bar{x}) + hf'(\bar{x}) \forall h \in (-\delta, \delta)$, para algún $\delta > 0$ y suficientemente pequeño.

Por hipótesis $f''(\bar{x}) \geq 0 \forall \bar{x} \in S$, y por el teorema 29 f es convexa. De aquí que $\bar{h} \neq 0$, $(\bar{x} + h)$ implica $f(\bar{x} + \bar{h}) \geq f(\bar{x}) + \bar{h}f'(\bar{x})$ por teorema 27.

Si $f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + hf'(\bar{x})$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda f(\bar{x} + \bar{h}) + (1 - \lambda)f(\bar{x}) &= f(\bar{x}) + \lambda \bar{h}f'(\bar{x}) \leq f(\bar{x} + \lambda \bar{h}) \\ &= f[\lambda(\bar{x} + \bar{h}) + (1 - \lambda)\bar{x}] \leq \lambda f(\bar{x} + \bar{h}) + (1 - \lambda)f(\bar{x}) \end{aligned}$$

para $0 \leq \lambda \leq 1$. Entonces la igualdad se mantiene y $f(\bar{x} + \lambda \bar{h}) = f(\bar{x}) + \lambda \bar{h}f'(\bar{x})$, $\forall \lambda \in [0, 1]$.

Tomando λ cercano a cero, llegamos a una contradicción.

Por lo tanto, $f(\bar{x} + \bar{h}) > f(\bar{x}) + \bar{h}f'(\bar{x})$. \square

Una vez que se ha hecho el análisis de las propiedades de las funciones, los resultados del siguiente capítulo se presentan de manera inmediata.

Capítulo 4

Funcionales de Área

Una vez que se ha caracterizado en términos de α el problema de generar variacionalmente mallas convexas, en este capítulo se aborda el estudio de las propiedades de los funcionales que dependen únicamente de α , los cuales son referidos de ahora en adelante como funcionales de área.

Es de resaltar que los resultados presentados en este capítulo permiten proponer, en términos de dichos funcionales de área, una solución sencilla y geoméricamente intuitiva al problema que se ha planteado: generar mallas estructuradas convexas en regiones irregulares del plano.

4.1. Funcionales de área

A fin de contar con la notación adecuada para los resultados que se proponen en este trabajo, es conveniente hacer la siguiente consideración: Sean $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y F el funcional $F(x): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$F(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

donde $N = 4(m-1)(n-1)$ es el número total de triángulos en las celdas de las mallas que pertenecen a $M(\Omega)$ ¹ para una región Ω de área A . Entonces el funcional discreto de área F_A asociado a F está dado por la expresión

$$F_A(G) = F(\varphi(G)) = \sum_{q=1}^N f(\alpha_q),$$

con $\varphi: M(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^N$, el mapeo que a cada malla le asigna el vector $\varphi(G) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T$ de sus valores de α .

¹Con n y m fijos y considerando los triángulos definidos por los vértices de las celdas como se discutió en el capítulo 1.

4.2. Funcionales convexos de área

Recuérdese que el problema que se busca resolver en este trabajo ha sido reescrito en términos de un proceso de optimización a gran escala sin restricciones. El proponer la solución a este problema consiste en la búsqueda del funcional o los funcionales de área adecuados.

¿Qué se entiende por un funcional adecuado? La respuesta a esta pregunta es sencilla: Es aquel cuyos mínimos se alcanzan en mallas convexas.

Los resultados del capítulo anterior nos muestran que los funcionales convexos definidos en conjuntos convexos permiten garantizar de manera inmediata la existencia de puntos en donde se alcanza el mínimo. Esto sugiere de manera natural considerar en primera instancia a los funcionales convexos de área. De hecho, el siguiente teorema indica que, bajo ciertas condiciones, un funcional de área convexo es ideal para generar mallas convexas en regiones irregulares.

Teorema 32 *Si G_u es una malla tal que todos sus triángulos tienen la misma área y F_A es el funcional expresado como $F_A(G) = \sum_{q=1}^N f(\alpha_q)$, donde f es una función $f: R \rightarrow R$, con $f''(x) \geq 0$, entonces G_u es un punto mínimo de F_A .*

De entre dichos funcionales, la primera expresión estrictamente convexa es el funcional clásico de área

$$F_A(G) = \sum_{q=1}^N \alpha_q^2,$$

que fue estudiado, entre otros autores, por Castillo²[13] y Tinoco[39].

Desafortunadamente, a pesar de la sencillez del resultado y del funcional, al minimizarlo no es posible generar una malla convexa en cualquier región. Esto ocurre, dado que, al no distinguir entre triángulos de área negativa y positiva, se imponen algunas simetrías en el funcional de área que impiden en general un proceso de optimización que conduzca a generar mallas convexas. Un ejemplo sencillo de esta afirmación se presenta en la siguiente región (figura 4.1). Aunque la región no tiene una frontera muy irregular, el funcional clásico de área no alcanza su mínimo en una malla convexa. Esto indica claramente que se requiere algo más que la convexidad para lograr el resultado deseado.

Obsérvese que esto ocurre porque las definiciones de malla admisible y α implican de manera inmediata la existencia de varias relaciones entre los valores de α :

1. Los triángulos que corresponden a las esquinas de la malla están fijos durante todo el proceso de optimización.
2. Los valores de α en cada celda son dependientes.

Esto implica que, en general, una malla con todos sus valores de α iguales, salvo los cuatro triángulos fijos de las esquinas de la malla, no se encuentra en el rango de φ , lo que impide garantizar en términos del teorema 32 que el funcional alcanza su mínimo en una malla convexa, con todos los

²Aunque definido en las celdas de la malla y no en triángulos, en un sentido diferente al del presente trabajo.

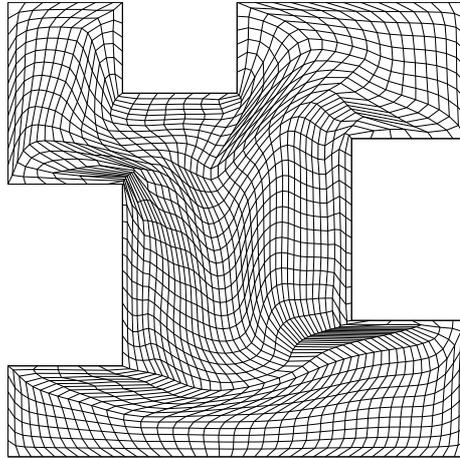


Figura 4.1: Región irregular no compleja.

valores de α iguales.

No obstante, esto no es una dificultad insalvable. Existen funcionales convexos que pueden subsanar *teóricamente* las dificultades ocasionadas por estas relaciones empleando métodos de barreras infinitas. Un ejemplo es el funcional k -área propuesto por Tinoco [39], cuyas propiedades se discuten brevemente en la siguiente sección.

4.3. Funcionales con barreras infinitas

Considérese la función $f(\alpha)$ convexa

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

y el correspondiente funcional de área asociado a ella. Obsérvese que de manera natural dicho funcional alcanza uno o varios mínimos en el conjunto de mallas admisibles convexas para una región. Sin embargo, sólo es posible garantizar que al minimizarlo se obtenga una malla óptima convexa si se parte de una malla inicial convexa, lo cual no resulta de utilidad desde el punto de vista práctico.

Para resolver este problema, Tinoco [39], propuso una modificación al funcional de Suavidad estudiado por Ivanenko [28].

El funcional modificado, al cual nos referiremos como k -área, sí permite generar mallas convexas irregulares, encontrando una forma eficiente de no restringir a mallas convexas las condiciones iniciales en la optimización empleando un factor k en el denominador de la siguiente manera

$$f(\alpha) = \frac{1}{k + \alpha},$$

donde el factor k traslada el origen de coordenadas lo que permite evaluar en valores de α negativos.

Es sencillo demostrar ([10], [11]) que empleando el funcional k -área es posible generar una malla convexa en un número finito de pasos de optimización partiendo de una malla inicial no convexa. Desde este punto de vista proporciona una respuesta teórica al problema que ocupa a este trabajo.

Sin embargo, es conveniente resaltar que desde el punto de vista numérico, al optimizar, los algoritmos para la búsqueda en línea pueden probar direcciones de descenso numéricamente cerca del polo de $\frac{1}{k+\alpha}$, lo que ocasionaría un problema de desbordamiento. Esto puede resolverse reemplazando la expresión $\frac{1}{k+\alpha}$ por una función *continua* en una vecindad de $-k$, de tal forma que puedan probarse las direcciones de descenso sin problema.

Esto significa que en la práctica se optimiza un funcional *diferente* a k -área, lo que lleva a preguntarnos si existen funcionales continuos de α , con un comportamiento similar en el sentido de funcionar como una barrera para impedir que en el proceso de optimización los valores menores de α en las mallas generadas decrezcan, lo que lleva a proponer los funcionales de la siguiente sección.

4.4. Un funcional convexo con barreras continuas

En resumen, de lo expuesto hasta ahora se sigue que se quiere encontrar un funcional de área

- Convexo
- Continuo
- Con una barrera "ajustable".
- Acotado inferiormente.

Obsérvese que es sencillo encontrar funciones para definir funcionales con las propiedades anteriores. Un ejemplo muy claro es la expresión

$$f(\alpha) = e^{-\alpha},$$

propuesto por Domínguez-Mota [6], con la cual es posible generar variacionalmente mallas convexas incluso en regiones complicadas.

Esto muestra que las condiciones anteriores permiten efectivamente encontrar funcionales para resolver el problema planteado en este trabajo.

Otra expresión, de menor costo computacional, se analiza en detalle en la siguiente sección.

4.5. El funcional *QRRArea*

En esta tesis se propone emplear una función de clase C^2 que cumple con las condiciones antes citadas dada por

$$f(\alpha) = \begin{cases} (a\alpha + b)^4 + c, & \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha}, & \alpha > 1 \end{cases}$$

donde $a =, b = y c =.$

Esta es una función continua, convexa, definida en todo el dominio convexo $M(\Omega)$, con una parte polinomial de grado 4 que actúa como una barrera flexible, pero al mismo tiempo suficientemente estricta.

El correspondiente funcional

$$F_A(G) = F(\varphi(G)),$$

donde

$$F(\alpha) = \sum_{q=1}^N f(\alpha_q),$$

será denotado de ahora en adelante como *QRRA: Quartic Regularization Reciprocal Area* (Regularización Cuártica del Recíproco de Área). También, a fin de agilizar la discusión, a partir de ahora se usará $A \in \mathbb{R}$ como la constante que determina cuatro veces el área de la región poligonal.

El primer resultado que se discute es un teorema clásico, de Hardy, Littlewood y Polya, en su obra *Inequalities* [26] que muestra la importancia de la convexidad en los funcionales de área.

Teorema 33 *Sea g una función convexa y A un número real. Si x_1, x_2, \dots, x_N son números reales que satisfacen $\sum_{i=1}^N x_i = A$, entonces*

$$Ng\left(\frac{A}{N}\right) \leq \sum_{i=1}^N g(x_i).$$

Demostración. Por hipótesis,

$$g\left(\frac{A}{N}\right) = g\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right).$$

Puesto que g es convexa, se tiene que,

$$g\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i),$$

por tanto

$$Ng\left(\frac{A}{N}\right) \leq \sum_{i=1}^N g(x_i). \square$$

Como se discutió anteriormente, la convexidad, aunque importante, no es suficiente para garantizar que los mínimos de los funcionales de área se alcanzan en mallas convexas. Esto requiere de algunos resultados adicionales.

El siguiente teorema nos muestra una forma muy sencilla de parametrizar los conjuntos de nivel de F .

Teorema 34 Sean $u > 0$, $t > 0$. Existe $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0M})^T \in \mathbb{R}^M$ tal que

$$F_t(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=0}^M f(tx_{0i}) = u,$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} (ax + b)^4 + c, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1. \end{cases}$$

Demostración. Haciendo $x_{0i} = x_{0j}$ para $1 \leq i, j \leq M$ se tiene que

$$F_t(\mathbf{x}_0) = Mf(tx_{01}) = u,$$

es decir, $f(tx_{01}) = \frac{u}{M}$. Entonces,

$$x_{01} = \frac{1}{t} f^{-1}\left(\frac{u}{M}\right).$$

Si $0 < \frac{u}{M} \leq 1$, $f^{-1}\left(\frac{u}{M}\right) = \frac{M}{u}$. Entonces,

$$x_{01} = \frac{1}{t} \frac{M}{u}.$$

Si $\frac{u}{M} > 1$, $(ax_{01} + b)^4 + c = \frac{u}{M}$, es decir, $\frac{u}{M} - c = (ax_{01} + b)^4 \Rightarrow \left(\frac{u}{M} - c\right)^{\frac{1}{4}} = ax_{01} + b$. Por tanto,

$$x_{01} = \frac{\left(\frac{u}{M} - c\right)^{\frac{1}{4}} - b}{ta}. \quad \square$$

A fin de describir más claramente la geometría de las curvas de nivel F_t , se denotará el primer hipercuadrante como Λ_0 , esto es,

$$\Lambda_0 = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid \min\{x_i\} > 0\}.$$

Ahora, se puede enunciar la condición para que un conjunto de nivel de F esté contenido en Λ_0 .

Teorema 35 La superficie de nivel $S_{\mathbf{x}_0}$ del punto $\mathbf{x}_0 = x_0(1, 1, \dots, 1)^T$, definida por el funcional

$$F_t(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N f(tx_i)$$

para $f(x) = \begin{cases} (ax + b)^4 + c, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$, donde t un número real positivo, cumple que

$$S_{\mathbf{x}_0} \subset \Lambda_0$$

si $x_0 \geq \frac{1}{t} f^{-1}\left(\frac{1}{N} f(0)\right)$.

Demostración. Obsérvese que si el punto $(0, x_0, \dots, x_0) \in S_{\mathbf{x}_0}$, entonces

$$f(0) + (N - 1)f(x) = Nf(tx_0).$$

Por el teorema 34, existe un x que satisface la expresión anterior si $Nf(tx_0) - f(0) > 0$, es decir, si $Nf(tx_0) > f(0)$. De donde $f(tx_0) > \frac{1}{N}f(0) = \frac{1}{N}(b^4 + c)$, lo cual implica que

$$tx_0 < f^{-1}\left(\frac{1}{N}(b^4 + c)\right).$$

Por lo tanto,

$$x_0 = \frac{1}{t}f^{-1}\left(\frac{1}{N}(b^4 + c)\right). \square$$

Finalmente, se enuncia el teorema que expresa el resultado deseado.

Teorema 36 Sean f dada por $f(x) = \begin{cases} (ax + b)^4 + c, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$, F como

$$F = \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

y Ω una región poligonal para la cual existe una malla admisible G_0 convexa. Entonces es posible encontrar un número real t para el cual existe una malla $\hat{G} \in M_0(t\Omega)$ tal que

$$F_{A, \sqrt{t}}(\hat{G}) = \min\{F_{A, \sqrt{t}}(G) | G \in M(\sqrt{t}\Omega)\}.$$

Demostración. Nótese que la superficie de nivel de $\varphi(G_0)$ está contenida en el primer cuadrante si

$$\frac{1}{t}f^{-1}\left(\frac{F_t(G_0)}{N}\right) = x_0 \geq \frac{1}{t}f^{-1}\left(\frac{b^4 + c}{N}\right),$$

lo cual ocurre si $F_t(G_0) \geq f(0)$.

Obsérvese que

$$F_t(G_0) \leq Nf(t\alpha_-(G_0))$$

de donde se sigue que es suficiente lograr $f(0) \geq Nf(t\alpha_-(G_0))$.

Pero esto implica que

$$f(t\alpha_-(G_0)) \leq \frac{1}{N}f(0).$$

Como f es decreciente,

$$t\alpha_-(G_0) \geq f^{-1}\left(\frac{1}{N}f(0)\right),$$

de donde se concluye que t debe satisfacer

$$t \geq \frac{1}{\alpha_-(G_0)}f^{-1}\left(\frac{f(0)}{N}\right). \tag{4.1}$$

Eljase t_0 que satisfaga 4.5.

Ahora, obsérvese que si G es una malla tal que $F_{t_0}(\varphi(G)) \leq F_{t_0}(\varphi(G_0))$ entonces,

$$\frac{1}{t_0} f^{-1}\left(\frac{F_{t_0}(\varphi(G))}{N}\right) \geq \frac{1}{t_0} f^{-1}\left(\frac{F_{t_0}(\varphi(G_0))}{N}\right).$$

De donde se sigue que el conjunto

$$L = \{G \in M(\Omega) | F_t(G) \leq F_t(G_0)\}$$

satisface $L \subseteq \Lambda_0$.

Además, L es convexo por la convexidad de F_t , de donde se sigue el resultado deseado. \square

En resumen: el teorema anterior indica claramente que si un funcional F es convexo, continuo y acotado inferiormente, entonces existe un real $t_0 > 0$ tal que las soluciones al problema de optimización en gran escala sin restricciones

$$\min\{F_{A,\sqrt{t}}(G)\}$$

para $t \geq t_0$, son al mismo tiempo las soluciones al problema que se ha planteado al principio de este trabajo.

4.6. Resultados Numéricos

Concluida la discusión teórica, se empleará enseguida el funcional

$$F_t(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=0}^N f(tx_{0i}), \quad f(x) = \begin{cases} (ax + b)^4 + c, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases},$$

para generar mallas convexas en cuatro regiones irregulares de prueba, que en la literatura se han considerado como "difíciles", lo cual significa que, sólo con métodos variacionales ha sido posible generar mallas convexas en ellas. Las regiones elegidas son los contornos de: Gato, Inglaterra, La Habana y Rusia. El método que se empleó en la optimización fue uno de los métodos de *Newton Truncado con Búsqueda en Línea* implementado por Moré-Thuente[34]. Algunos detalles del algoritmo se describen en el apéndice B.

Se consideraron mallas de 40×40 lo que da un total de 1521 celdas en la región, esto es, 6084 triángulos de los cuales, los 4 triángulos de las esquinas de la malla están fijos. El problema a resolver es de 2888 variables correspondientes a los nodos interiores de la malla.

Es importante mencionar que se trabajó con un procesador AMD-K6(tm) 3D con 62MB de RAM, Sistema Microsoft Windows 98.

4.6.1. Algoritmo

Dado que se desconoce a priori el valor de t requerido por el teorema 36, la estrategia que se empleará será elegir un valor inicial de t arbitrario, optimizar e incrementarlo si no se ha generado la malla convexa.

Esto se describe en el siguiente algoritmo:

1. Elegir valores iniciales para TOL , t , $\tau > 1$ y $\varepsilon > 0$.
2. Generar una malla inicial por interpolación transfinita (Véase apéndice A).
3. Efectuar algunas iteraciones del problema de optimización

$$\hat{G} = \arg \min_{G \in M(\Omega)} \{F_t(G)\}$$

con

$$F_t(G) = \sum_{q=1}^N f(t\alpha_q)$$

hasta satisfacer $\|\nabla F_t(\hat{G})\| < TOL$, donde ∇F_t es el gradiente de F_t .

4. Si $\alpha_-(\hat{G}) > \varepsilon$, se obtiene una malla convexa y el proceso ha terminado; de lo contrario se multiplica t por el factor $\tau > 1$ y se regresa al paso 3 con \hat{G} como la malla inicial.

Naturalmente, es posible elegir diferentes valores iniciales t y diferentes factores τ . En términos de las mismas la sucesión de mallas óptimas intermedias se aproximará a una malla convexa requiriendo diferentes números de iteraciones.

En general, ajustar los parámetros en un problema de optimización es un problema complicado y que requiere un análisis muy detallado, lo que no fue planteado como uno de los objetivos de esta tesis. Sin embargo, la elección descrita más adelante, aunque seguramente no es la más eficiente, permitió lograr los resultados deseados. Obsérvense los cambios en el factor t durante el proceso de la optimización con el funcional QRRRArea. Los valores de t inicial, τ y ε son:

$$t_i = \begin{cases} \frac{-2}{\alpha_-}, & \alpha_- < -0.01; \\ 1, & -0.01 \leq \alpha_- < 0.0001; \\ 20, & \alpha_- \geq 0.0001; \end{cases}$$

$\tau = 2$ y $\varepsilon = 10^{-6}$. En ningún caso se requirió de un valor mayor a $t = 7.3416669$.

4.6.2. Regiones Irregulares de Prueba.

Región: Gato.

Las condiciones iniciales de la malla para la región Gato se muestran en la tabla 4.1, correspondientes a la parte superior de la figura 4.2. La malla inicial de Gato se optimizó primeramente con el funcional Área-Ortogonalidad. La tabla 4.2 muestra el resultado de este proceso de optimización,

el cual logra de manera rápida la convergencia de la malla aunque algunas celdas quedan dobladas y por ende, no se consigue una malla convexa, como se puede apreciar en la parte inferior de la figura 4.2.

Malla Inicial	
Nombre	gato.red
Dimensión	40 × 40
Cel no conv	475
α_{min}	-4.3586832
α_{max}	3.21
t -suavidad	6.21
t -área	4.77
Área	2.96e+06
Longitud	1.07
Ortogonalidad	5

Cuadro 4.1: Gato.

Funcional	A-O	
	Inicial	Final
α_{min}	-4.3586832	-0.9594400
t	0	0
Iteraciones	0	20
Cel no conv	475	103
F_{val}	2.8780200	0.9530220
$ \vec{\nabla}F $	0.0460824	0.0035836

Cuadro 4.2: Gato. Optimizado con el funcional Área-Ortogonalidad, $\lambda = 0.5$.

Probando ahora el funcional que hemos propuesto, QRRArea, se optimizó la malla para esta región empleando dos estrategias:

1. preconditionando la malla inicial por medio del funcional Área-Ortogonalidad para reducir el número de celdas no convexas en la malla inicial y posteriormente QRRArea, y
2. trabajando únicamente QRRArea sobre la malla inicial.

Con lo cual se podrá verificar de qué manera trabaja el funcional QRRArea con o sin ayuda previa. Los resultados de ambos procesos se muestran en la tabla 4.3 y sus respectivas mallas en la figura 4.3.

Al observar ambos procesos, es claro que efectivamente fue de ayuda el funcional Área-Ortogonalidad al optimizar previamente con éste para la región Gato, pues los cambios del factor t en el funcional QRRArea, con 103 celdas no convexas, fueron menos que los cambios producidos por QRRArea en

Funcional	A-O + QRRRA				
Variación de t	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
α_{min}	-0.9594400	0.0002626	0.0057226		
t	4.1690988	8.3383362	8.3383362		
Iteraciones	0	500	567		
Cel no conv	103	0	0		
F_{val}	2.2977400	0.3341470	0.3341470		
$ \vec{\nabla}F $	0.6558280	0.0165464	0.0034202		
Funcional	QRRRA				
α_{min}	-4.3586832	-0.7264190	-0.1731048	-0.0012493	0.0515771
t	0.9177084	1.8354167	3.6708335	7.3416669	7.3416669
Iteraciones	0	54	554	946	1219
Cel no conv	475	173	21	1	0
F_{val}	1.0029500	0.5611390	0.4468230	0.4013580	0.3669360
$ \vec{\nabla}F $	0.1131030	0.0236263	0.0392781	0.0541867	0.0035869

Cuadro 4.3: Gato. Optimizado con Área-Ortogonalidad+QRRArea y QRRArea respectivamente, $\lambda = 1$.

la malla inicial. Paralelamente, el número de iteraciones, 567 para el funcional Área-Ortogonalidad, son menos de la mitad de las iteraciones que requirió QRRArea para lograr una malla convexa. Es de recalcar que la región Gato es considerada de las más complejas, y finalmente el funcional QRRArea logra la convexidad de la malla en un número finito de iteraciones en un tiempo aceptable por sí sólo.

Similarmente, se realizaron los mismos procesos de optimización para los contornos de los países de Inglaterra, La Habana y Rusia, regiones irregulares que se eligieron para probar nuestro funcional.

Región: Inglaterra.

Los datos de la malla inicial generada 40×40 de la región Inglaterra se presentan en la tabla 4.4, y la malla inicial en la figura 4.4, parte superior.

Una vez optimizada la malla inicial de la región que nos ocupa con el funcional Área-Ortogonalidad, se logra la convergencia, dejando 106 celdas no convexas. Subsiste entonces la búsqueda de una malla convexa para esta región. Véase la parte inferior de la figura 4.4.

Finalmente, continuando el análisis del trabajo del funcional QRRArea propuesto, optimizamos la malla generada por Área-Ortogonalidad para la región Inglaterra con este funcional, comparándolo con el proceso efectuado por el funcional QRRArea sobre la malla inicial, tal como se hizo en la región Gato. Los datos de ambos procesos se ven en la tabla 4.6 y sus respectivas mallas en la figura 4.5.

Nótese que el número de cambios en el factor t en ambos procesos fueron los mismos, sólo 3, siendo

Malla Inicial	
Nombre	Ingl.red
Dimensión	40 × 40
Cel no conv	601
α_{min}	-6.2819460
α_{max}	3.04
t -suavidad	5.60e+03
t -área	2.18e+03
Área	371
Longitud	3.65
Ortogonalidad	7.53

Cuadro 4.4: Inglaterra.

Funcional	A-O	
	Inicial	Final
α_{min}	-6.2819460	-6.3021118
t	0	0
Iteraciones	0	22
Cel no conv	601	106
F_{val}	7.4513100	1.7427700
$ \vec{\nabla}F $	0.1531840	0.0028592

Cuadro 4.5: Inglaterra. Optimizado con el funcional Área-Ortogonalidad, $\lambda = 0.5$.

poca la diferencia en el número de iteraciones realizadas por el funcional QRRArea solo que con ayuda del funcional Área-Ortogonalidad. Por otro lado, fue muy poco el tiempo que requirió el funcional para conseguir la convexidad de la malla en esta región.

Con ello afirmamos que el funcional QRRArea está trabajando bastante bien. Veamos ahora el caso de otra región irregular, el contorno de La Habana.

Región: La Habana.

En la tabla 4.7 se muestran las condiciones iniciales de la malla 40×40 para la región La Habana, cuya imagen se ve en la parte superior de la figura 4.6. Dada la malla inicial, optimizamos nuevamente con el funcional Área-Ortogonalidad buscando la convergencia de ésta, proceso que se puede apreciar en la tabla 4.8 y la imagen de la malla con el número de celdas reducidas en la figura 4.6, parte inferior.

Así, continuando con la estrategia se optimizó de las dos maneras ya descritas sobre la región, en principio con la malla preconditionada por el funcional Área-Ortogonalidad como ayuda al funcional que se ha propuesto, y finalmente sobre la malla inicial. Véanse la tabla 4.9 y la figura 4.7.

Funcional	A-O+QRRRA				
Variación de t	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
α_{min}	-6.3021118	-2.1035401	-0.7583571	-0.3000479	0.0006721
t	0.6346932	1.2693864	2.5387728	5.0775455	5.0775455
Iteraciones	0	3	28	128	235
Cel no conv	106	105	25	4	0
F_{val}	0.3020870	0.3621230	0.3598720	0.3407880	0.3246260
$ \vec{\nabla}F $	0.0100343	0.0245135	0.0312065	0.0512101	0.0031741
Funcional	QRRRA				
α_{min}	-6.2819460	-1.5314807	-0.9666892	-0.3562416	0.0004333
t	0.6367454	1.2734907	2.5469815	5.0939630	5.0939630
Iteraciones	0	18	53	156	354
Cel no conv	601	99	33	8	0
F_{val}	2.4102000	0.3825750	0.3913840	0.3846130	0.3595210
$ \vec{\nabla}F $	0.0714354	0.0158300	0.0377769	0.0766364	0.0036347

Cuadro 4.6: Inglaterra. Optimizado con el funcional Área-Ortogonalidad+QRRArea y QRRArea respectivamente, $\lambda = 1$.

Nótese que el proceso de optimización en esta región se efectuó rápidamente con sólo dos cambios en el factor t en ambos casos, e incluso, ahora el número de iteraciones para el proceso mediante el funcional QRRArea sobre la malla inicial, fue menor que las iteraciones que requirió QRRArea con la malla preconditionada. Esto nos habla de la efectividad del funcional sobre regiones irregulares.

Región: Rusia.

Finalmente, continuando con las pruebas para analizar la eficacia de el funcional QRRArea, se presenta lo correspondiente al contorno de Rusia, región irregular cuyos datos de la malla inicial y su imagen se observan en la tabla 4.10 y figura 4.8 parte superior.

Trabajando sobre la región con el funcional Área-Ortogonalidad se obtienen los resultados mostrados en la tabla 4.11, que, como era de esperarse, no se consigue una malla convexa pero si una reducción del número de celdas no convexas, lo cual se ve en la figura 4.8 parte inferior.

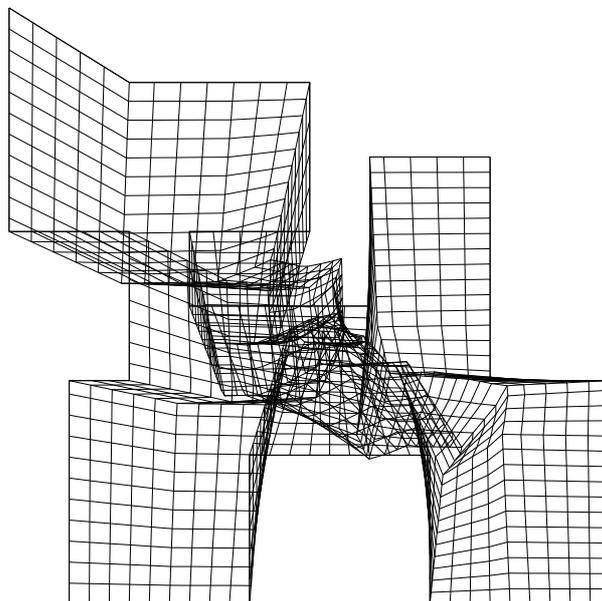
Para lograr obtener una malla convexa se requiere que todas las celdas de la malla sean convexas. Esto nuevamente se consigue a través de las dos maneras descritas al inicio de esta sección. Lo observado en el trabajo de QRRArea con la ayuda del funcional Área-Ortogonalidad y por sí sólo se ve en la tabla 4.12. En este caso, tuvo un trabajo más rápido el funcional QRRArea con ayuda del funcional Área-Ortogonalidad, aunque en el segundo caso el tiempo sigue siendo pequeño. Los cambios en el factor t son dos para el primer caso y tres para el segundo. Véanse las mallas correspondientes en la figura 4.9

Malla inicial	
Nombre	haba.red
Dimensión	40×40
Cel no conv	394
α_{min}	-3.6168486
α_{max}	1.88
t -suavidad	7
t -área	4.98
Área	1.18e+04
Longitud	1.75
Ortogonalidad	5.2

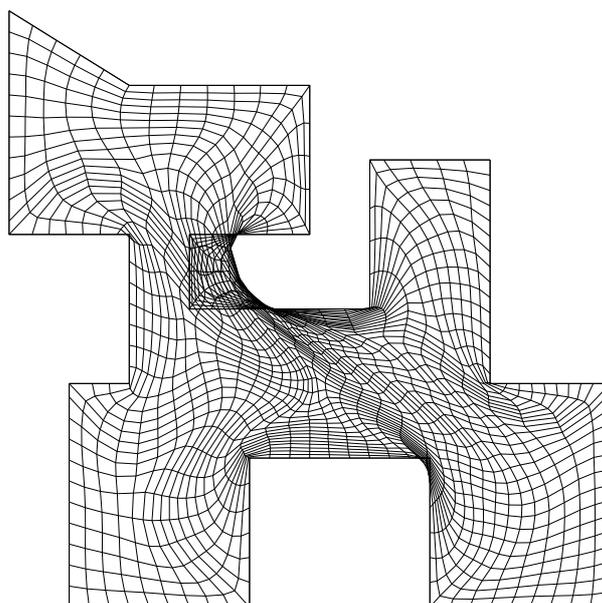
Cuadro 4.7: La Habana.

Funcional	A-O	
	Inicial	Final
α_{min}	-3.6168486	-0.8244439
t	0	0
Iteraciones	0	14
Cel no conv	394	19
F_{val}	3.4805200	0.9128930
$ \vec{\nabla}F $	0.0959164	0.0034582

Cuadro 4.8: La Habana. Optimizado con el funcional Área-Ortogonalidad, $\lambda = 0.5$.

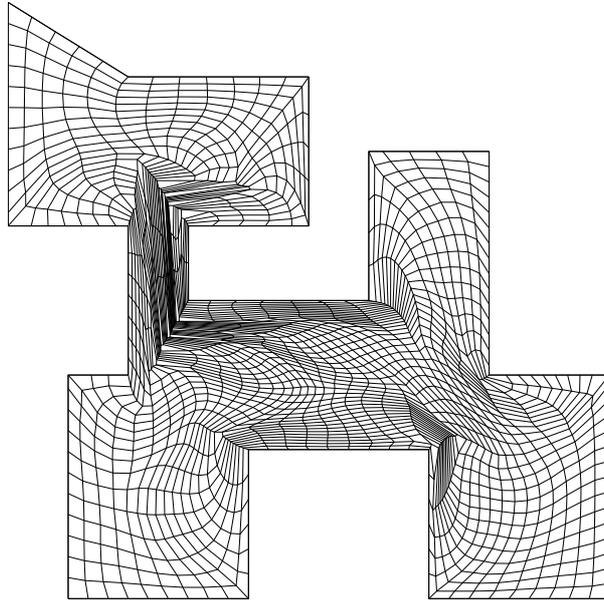


Gato. Malla inicial.

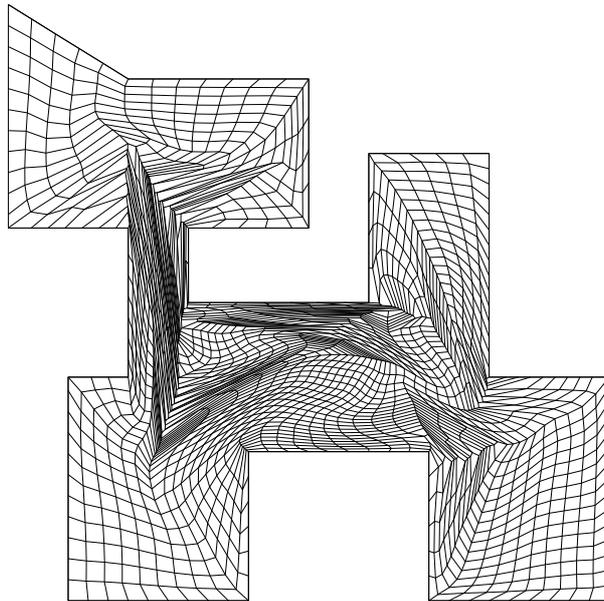


Gato. Área-Ortogonalidad.

Figura 4.2: Mallas generadas.

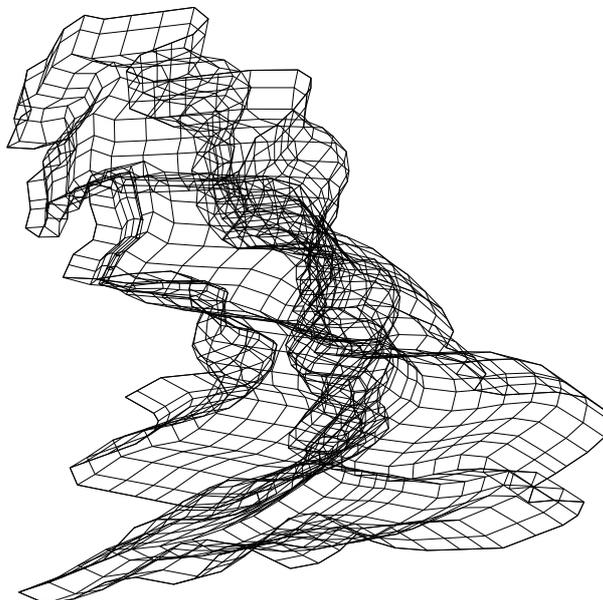


Gato. Área-Ortogonalidad+QRRÁrea.

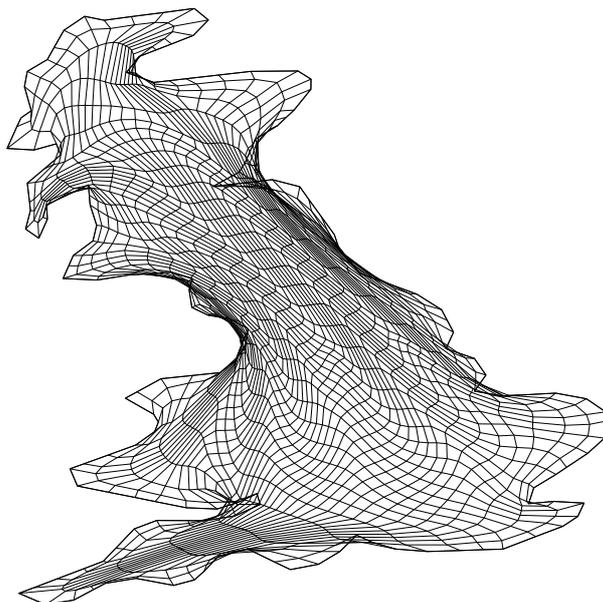


Gato. QRRÁrea.

Figura 4.3: Mallas generadas.

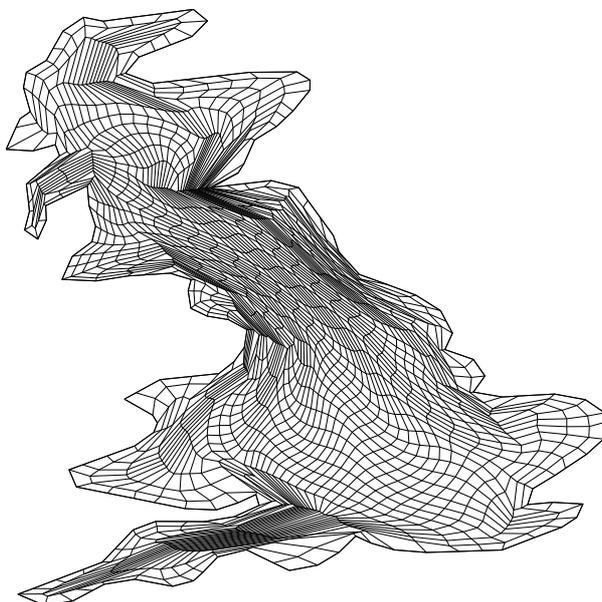


Inglaterra. Malla inicial.

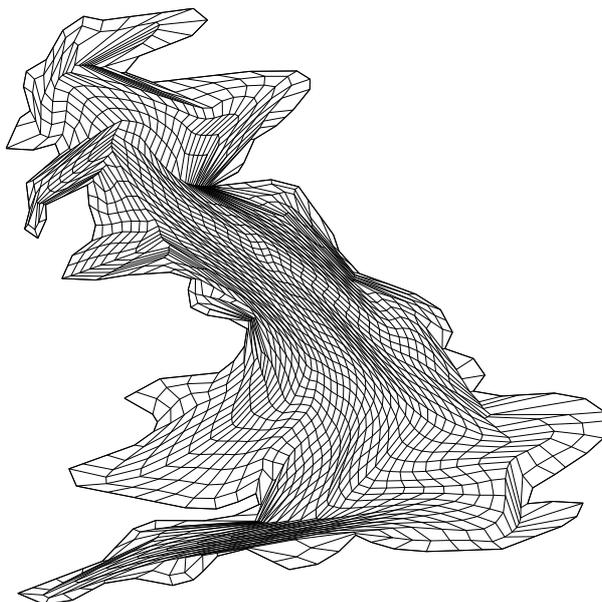


Inglaterra. Área-Ortogonalidad.

Figura 4.4: Mallas generadas.

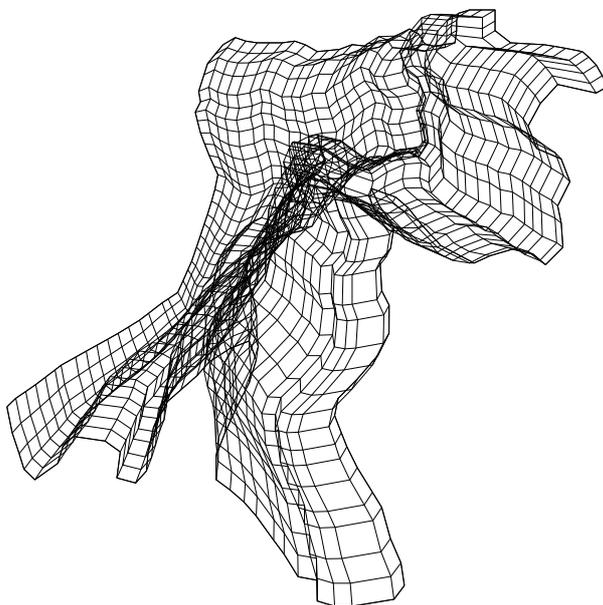


Inglaterra. Área-Ortogonalidad+QRRArea.

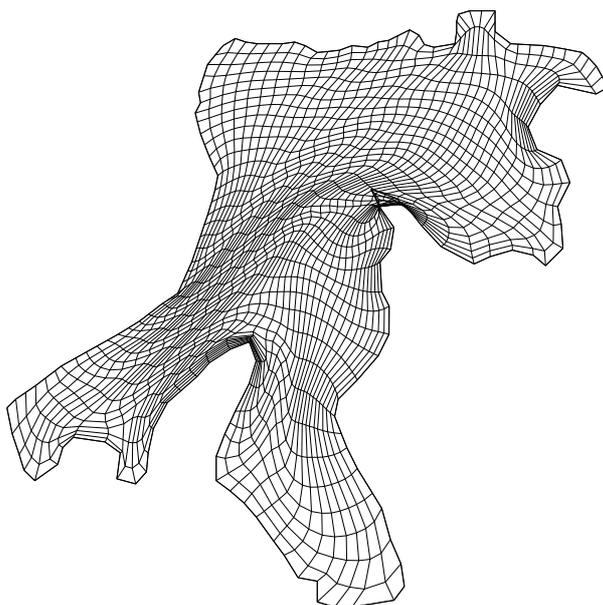


Inglaterra. QRRArea.

Figura 4.5: Mallas generadas.



La Habana. Malla inicial.



La Habana. Área-Ortogonalidad.

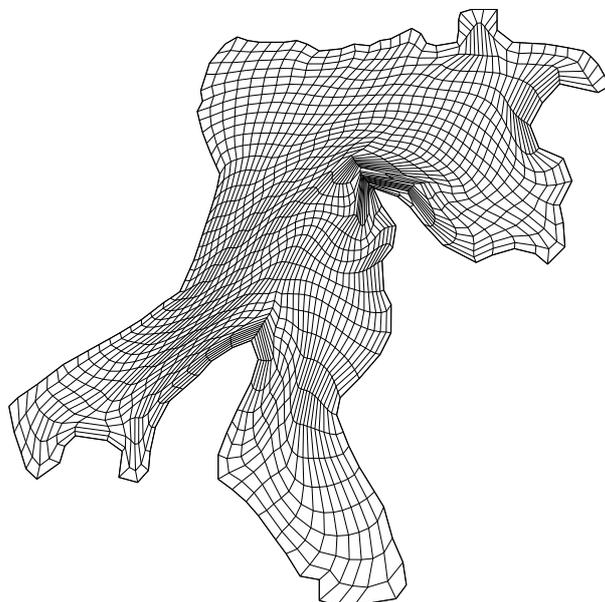
Figura 4.6: Mallas generadas.

Funcional	A-O+QRRRA		
Variación de t	t_0	t_1	t_2
α_{min}	-0.8244379	0.0070252	
t	4.8517907	4.8517907	
Iteraciones	0	123	
Cel no conv	19	0	
F_{val}	0.6118970	0.3020000	
$ \vec{\nabla}F $	0.4472070	0.0036819	
Funcional	QRRRA		
α_{min}	-3.6168486	-0.3542347	0.0012748
t	1.1059351	2.2118703	2.2118703
Iteraciones	0	43	101
Cel no conv	394	15	0
F_{val}	1.2413100	0.3361260	0.3056540
$ \vec{\nabla}F $	0.2555580	0.0142592	0.0031993

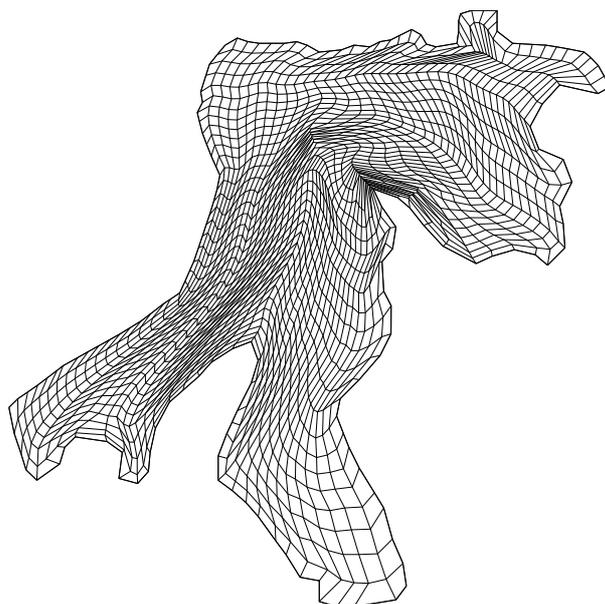
Cuadro 4.9: La Habana. Optimizado con el funcional Área-Ortogonalidad+QRRRA y QRRRA, $\lambda = 1$.

Malla Inicial	
Nombre	rusia.red
Dimensión	40×40
Cel no conv	359
α_{min}	-4.6151903
α_{max}	2.66
t -suavidad	4.57
t -área	4.06
Área	4.13e+18
Longitud	1.71
Ortogonalidad	4.76

Cuadro 4.10: Rusia.

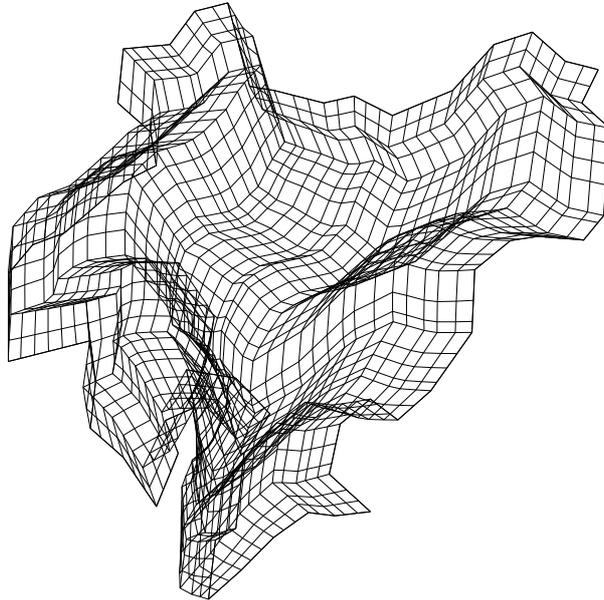


La Habana. Área-Ortogonalidad+QRRÁrea.

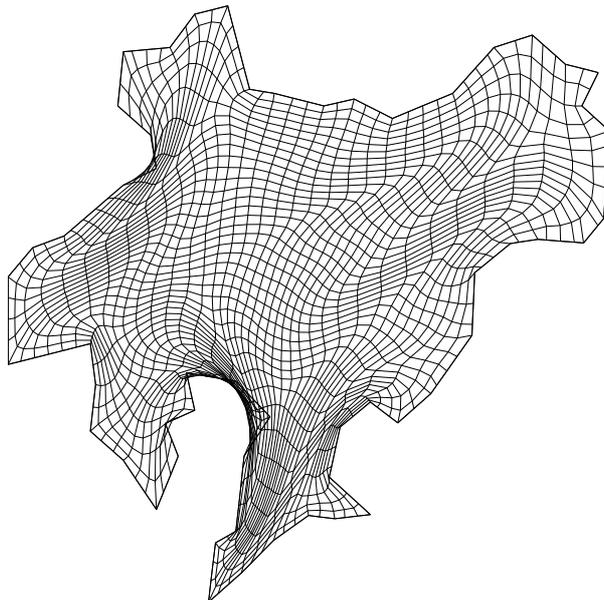


La Habana. QRRÁrea.

Figura 4.7: Mallas generadas.



Rusia. Malla Inicial.



Rusia. Área-Ortogonalidad.

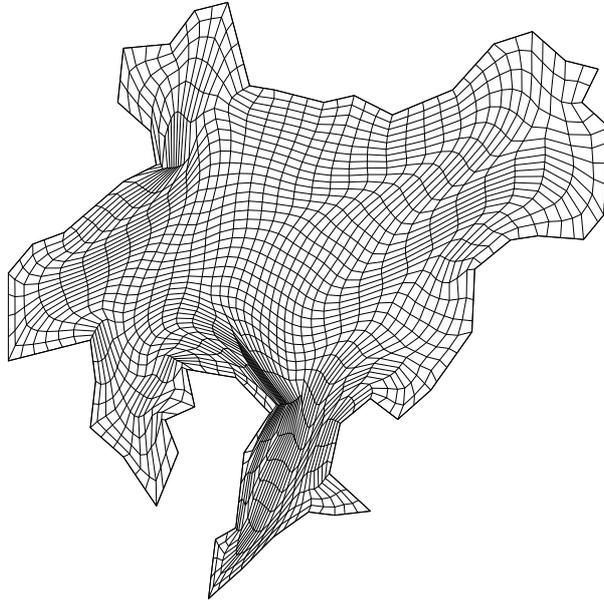
Figura 4.8: Mallas generadas.

Funcional	A-O	
	Inicial	Final
α_{min}	-4.6151903	-1.6092943
t	0	0
Iteraciones	0	34
Cel no conv	359	43
F_{val}	3.1344200	0.8224860
$ \vec{\nabla}F $	0.0653894	0.0036300

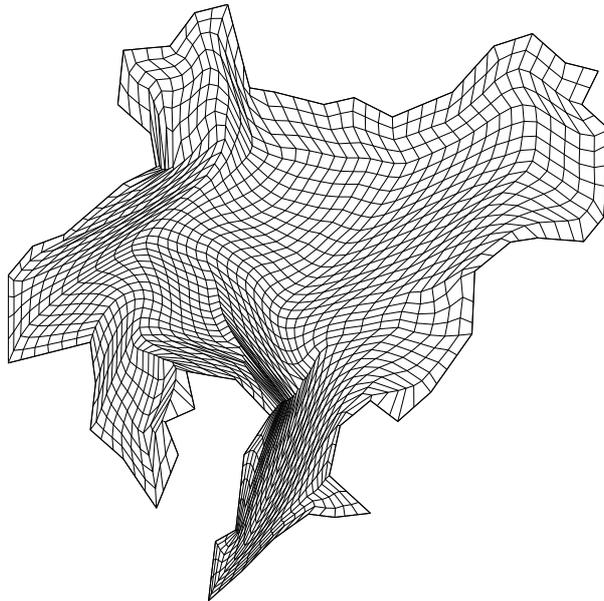
Cuadro 4.11: Rusia. Optimizado con el funcional Área-Ortogonalidad, $\lambda = 0.5$.

Funcional	A-O-QRRA			
Variación de t	t_0	t_1	t_2	t_3
α_{min}	-1.6092650	-0.0522692	0.0009590	
t	2.4856068	4.9712136	4.9712136	
Iteraciones	0	59	71	
Cel no conv	43	2	0	
F_{val}	0.4580740	0.2957270	0.2928100	
$ \vec{\nabla}F $	0.1389190	0.0120680	0.0031029	
Funcional	QRRA			
α_{min}	-4.6151903	-0.6877657	-0.1134042	0.0001408
t	0.8667032	1.7334063	3.4668126	3.4668126
Iteraciones	0	31	113	215
Cel no conv	359	157	6	0
F_{val}	0.7301810	0.4917120	0.3529660	0.3319890
$ \vec{\nabla}F $	0.0921634	0.0189171	0.0181148	0.0036437

Cuadro 4.12: Rusia. Optimizado con el funcional Área-Ortogonalidad+QRRArea y QRRArea respectivamente, $\lambda = 1$.



Rusia. Área-Ortogonalidad+QRRArea.



Rusia. QRRArea.

Figura 4.9: Mallas generadas.

Capítulo 5

Conclusiones

El problema que se planteó como objetivo particular de esta tesis fue el buscar una manera de generar numéricamente mallas convexas en regiones irregulares del plano, lo cual resultó sencillo al emplear funcionales convexos de área.

Como se observó, el problema dista de ser trivial, pues generar una malla en una región implica muchas variables a controlar. La idea entonces fue combinar dos ingredientes fuertes en un funcional, esto es, la convexidad y que la función fuese estrictamente decreciente; con un funcional convexo se garantiza que el problema de minimización tenga la solución que requerimos, de ahí la importancia de analizar a detalle la convexidad de conjuntos y funciones.

En este contexto, la solución que se ha propuesto es el funcional

$$F(\alpha) = \sum_{q=1}^N f(\alpha_q)$$

donde

$$f(\alpha) = \begin{cases} (a\alpha + b)^4 + c, & 1 \geq \alpha \\ \frac{1}{\alpha}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Notemos que f tiene las siguientes características: es convexa, continua, con una barrera ajustable y acotada inferiormente.

Una vez implementado el funcional y optimizando con el método de búsqueda en línea, se observó que trabajó de manera eficiente en regiones irregulares, y aunque en algunos casos fue de utilidad el precondicionar la malla de una región con el funcional de Área-Ortogonalidad, en general, por sí sólo, logró generar las mallas convexas buscadas.

En resumen: se resolvió con éxito el problema que se propuso como trabajo de esta tesis.

Trabajo a futuro.

Buscar otros conjuntos de parámetros que resuelvan de una manera más rápida el problema de generar mallas en regiones irregulares, haciendo el proceso de optimización más eficiente y con un

menor costo. Por otro lado, crear algún modelo educativo para entender la construcción de una malla y la utilidad de esta línea de investigación para la simplificación de algunos problemas que se presentan en diversas áreas donde las ecuaciones que describen dicho problema son muy complejas y no tienen solución a través de métodos algebraicos o de ecuaciones diferenciales parciales.

Apéndice A

Interpolación Transfinita

En la generación variacional discreta se requiere de la construcción de una malla inicial. Esto puede hacerse por medio de un método algebraico de generación muy sencillo, llamado *interpolación transfinita* (TFI, Transfinite interpolation) ([30]).

Para construir una malla por TFI, se seleccionan los lados derecho $L_2(\eta)$, izquierdo $L_4(\eta)$, inferior $L_1(\xi)$ y superior $L_3(\xi)$ de la frontera de una región Ω , parametrizados de tal forma que $0 \leq \xi \leq 1$ y $0 \leq \eta \leq 1$.

Para estos lados deben cumplirse las condiciones

$$L_1(0) = L_4(0)$$

$$L_1(1) = L_2(0)$$

$$L_2(1) = L_3(1)$$

$$L_3(0) = L_4(1).$$

La expresión que se utiliza para la generación algebraica es

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = (1 - \eta)L_1(\xi) + \eta L_3(\xi) + (1 - \xi)L_3(\eta) + \xi L_4(\eta) - \{\xi\eta L_3(1) + \xi(1 - \eta)L_1(1) + \eta(1 - \xi)L_3(0) + (\xi - 1)(\eta - 1)L_1(0)\},$$

y la malla se genera como la imagen bajo \mathbf{x} del rectángulo

$$R = \{(\xi, \eta) | 0 \leq \xi \leq 1; 0 \leq \eta \leq 1\}.$$

Es importante mencionar que este método tiene la dificultad de que las singularidades diferenciales en la frontera de Ω se propagan hacia el interior, por lo que produce mallas muy dobladas en regiones irregulares.

Como ejemplo se tienen las siguientes mallas de 20 y 40 puntos por lado generadas por interpolación transfinita para el contorno de la bahía de la Habana (Figuras A.1 y A.2). Notemos que ninguna de las dos mallas es convexa.

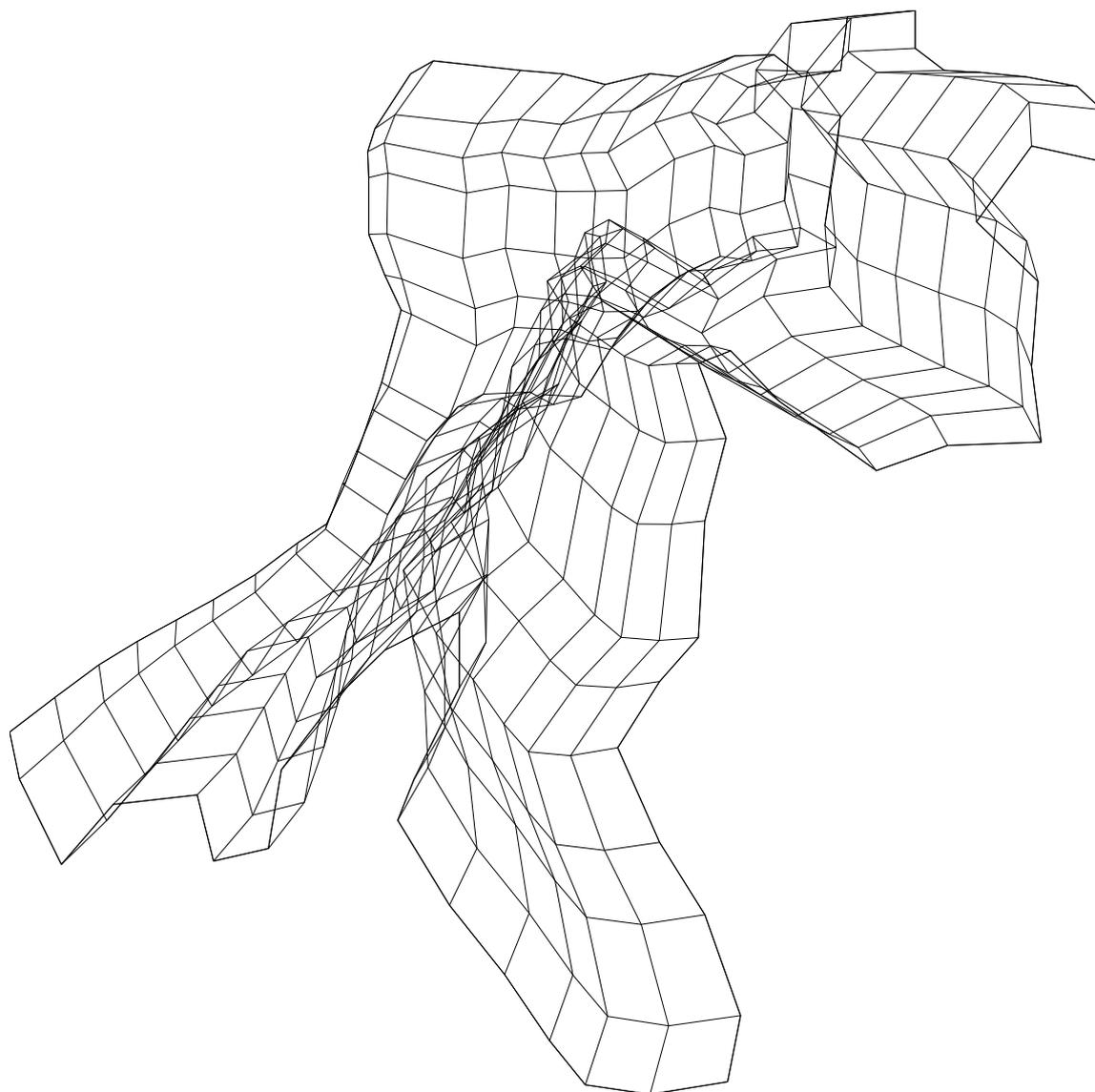


Figura A.1: Malla para el contorno de la Habana generada por interpolación. 20 puntos por lado.

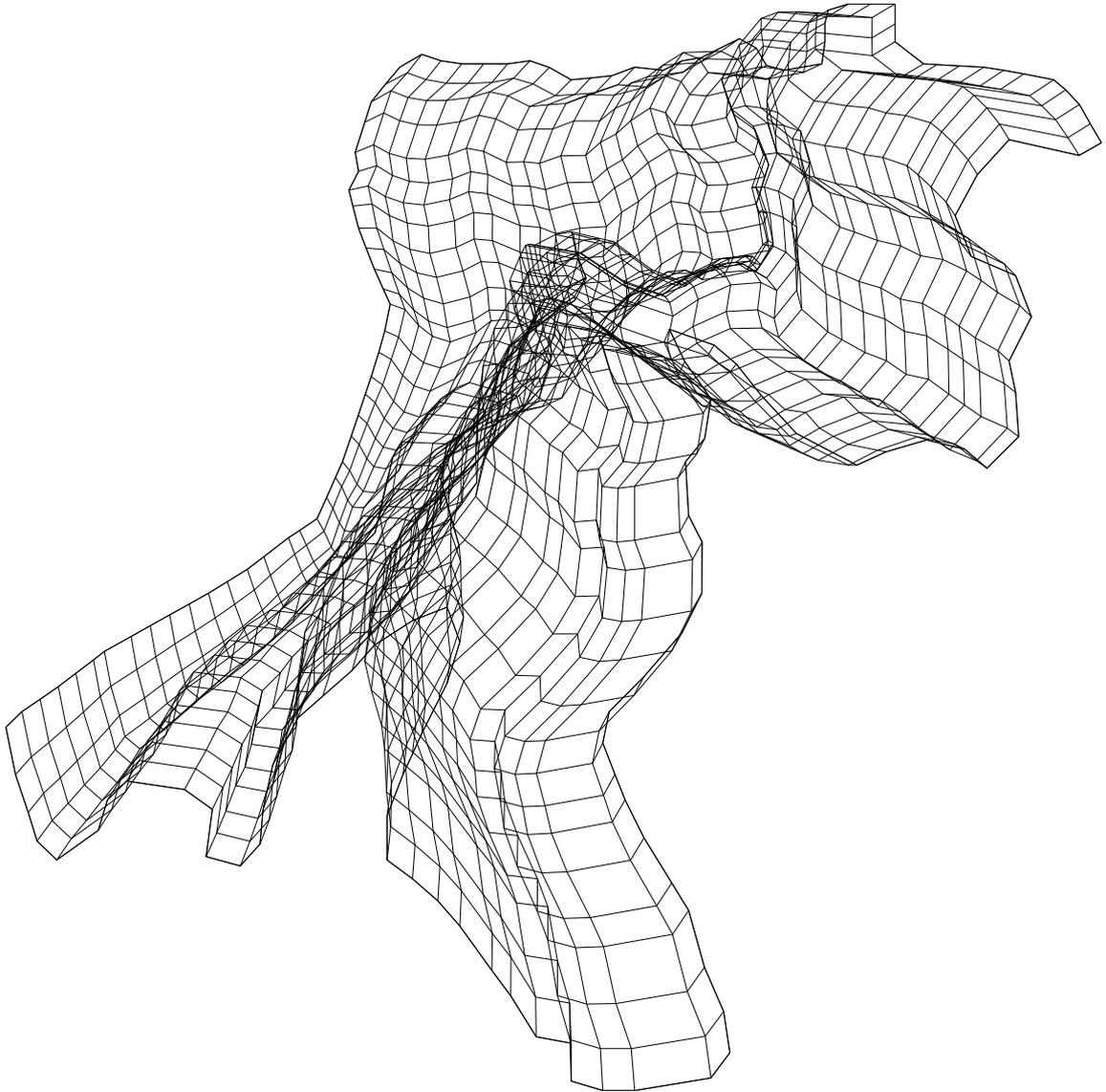


Figura A.2: Malla para el contorno de la Habana generada por interpolación. 40 puntos por lado.

Apéndice B

Métodos de Búsqueda Lineal

Se desea resolver el problema de optimización con un método de descenso, es decir, partiendo de un x_0 inicial se genera una sucesión $\{x_k\}$ con la propiedad de que $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ y donde cada iteración es una corrección de la iteración anterior, esto es,

$$x_{k+1} = x_k + s_k$$

con $s_k = \alpha_k p_k$, p_k una dirección de descenso generada con alguna estrategia general tal que $\nabla f_k^t p_k < 0$ y $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

El problema es determinar un α_k adecuado en cada iteración, es decir, una vez determinada p_k , cuánto se debe avanzar en esa dirección. α_k debe encontrarse de manera que se garantice la convergencia global del método de descenso y de preferencia de manera económica. Usualmente se hace referencia a α_k como el tamaño de paso en la iteración k . Al procedimiento para escoger α_k es lo que se le conoce como *Búsqueda lineal* y es usualmente un proceso iterativo finito.

Teóricamente α_k debe ser tal que

$$\alpha_k \approx \alpha^* = \arg \min_{\alpha} f(x_k + \alpha p_k)$$

de manera que la reducción en f esté garantizada en cada paso. A los métodos de búsqueda lineal que tratan de obtener una aproximación muy buena de α^* se les conoce como búsquedas lineales exactas. Sin embargo, estos métodos son muy costosos, por lo que en la práctica se trabaja lo que se conoce como búsquedas lineales inexactas, en las cuales se busca que α_k satisfaga ciertas condiciones que garanticen la convergencia del método de descenso a un bajo costo, aunque no se aproximen con gran exactitud a α^* .

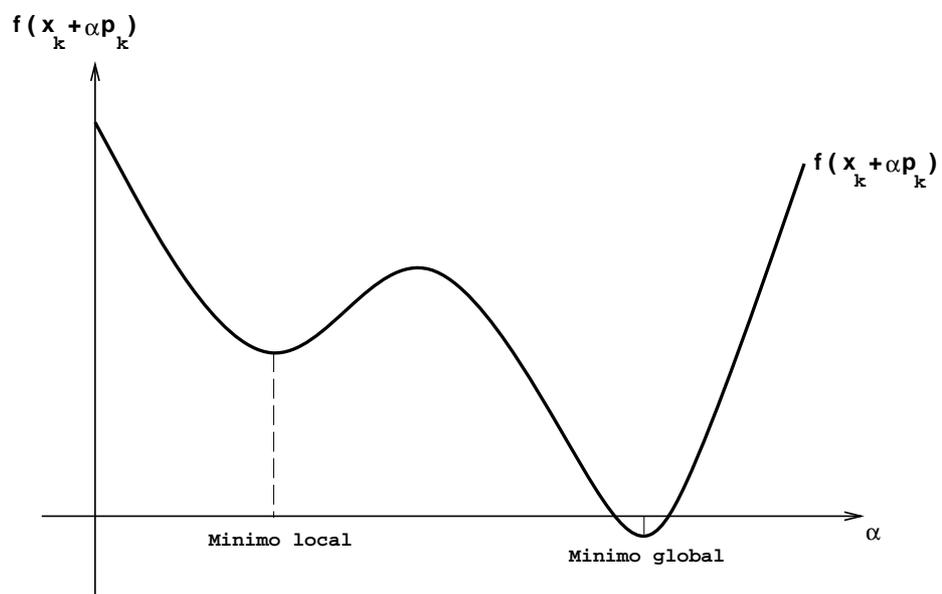


Figura B.1: La longitud de paso ideal es el mínimo global.

Bibliografía

- [1] Ahlfors, L.V. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1979.
- [2] Allievi, A. y Calisal, S.M. *Application of bubnov-galerkin formulation to orthogonal grid generation*. Journal of Computational Physics 98, 1992.
- [3] Anderson, D.A. *Constructing adaptive grids with poisson grid generatios*. Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, 1986.
- [4] Barrera, P., Castellanos, L. y Pérez, A. *Curvilinear coordinate system generation over plane irregular regions*. Reportes técnicos de la Facultad de Ciencias, U.N.A.M., 1992.
- [5] Barrera, P., Domínguez-Mota, F.J. y González, F.G. *Some experiences on orthogonal grid generation*. Proceedings of the 9th International Meshing Roundtable, 2000.
- [6] Barrera, P., Domínguez-Mota, F.J. y González, F.G. *Variational grid generation using exponentials of area*. Proceedings of the 10th International Meshing Roundtable, 2001.
- [7] Barrera, P., Domínguez-Mota, F.J. y González, F.G. *Robust discrete grid generation on plane irregular regions*. Proceedings of the Computing Centre RAS and R&D Company 2002 Workshop, Moscow, Russia, 2002.
- [8] Barrera, P., Domínguez-Mota, F.J. y González, F.G. *Some experiences on orthogonal grid generation*. Applied Numerical Mathematics 40, 2002.
- [9] Barrera, P. y Tinoco, J.G. *Smooth and convex grid generation over general plane regions*. Mathematics and Computers in Simulation, 1998.
- [10] Barrera, P. y Tinoco, J.G. *Area functionals in plane grid generation*. 6th Conference in Numerical Grid Generation in Computational Field Simulation Conference, 1998.
- [11] Barrera, P. y Tinoco, J.G. *Area control in generating smooth and convex grids over general plane regions*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1999.
- [12] Brackbill, J.U. y Saltzman, J.S [1892b]. *Adaptive zoning for singular problems in two dimensions*. J. Comp. Physics, 46, pp. 342-368.
- [13] Castillo, J.E. *Variational Grid Generation*. PhD thesis, University of New Mexico, 1987.
- [14] Castillo, J.E. *Mathematical Aspects of Numerical Grid Generation*. SIAM, 1991.

- [15] Carey, G.F. *Grid Generation, Refinements and Redistribution*. Wiley, New York, 1993.
- [16] Charakhch'yan, A.A. y Ivanenko S.A. *Curvilinear grids of convex quadrilaterals*. USSR Comput. Maths. Math. Phys. Vol. 28, No.2, 1988.
- [17] Dubiner, M. *Theoretical and Numerical Analysis of Conformal Mappings*. PhD thesis, MIT, 1981.
- [18] Frey, P.J. y George, P.L. *Maillages: Applications aux Elements Finis*. Hermes Science Publications, 1999.
- [19] García, I.D. *Métodos de optimización de gran escala y algunas aplicaciones a funciones parcialmente separables*. Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias U.N.A.M., 1999.
- [20] George, P.L. *Automatic Mesh Generation: Applications to Finite Element Methods*. Wiley, New York, 1991.
- [21] George, P.L., Hecht, F. y Saltel, E. *Constraint of the boundary and automatic mesh generation*. Proc. 2nd International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Mechanics, 1988.
- [22] Godunov, S.K. *On the ideas underlying grid generation methods*. Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 43, No. 6, 2003.
- [23] Godunov, S.K. y Prokopov, G.P. *On the Computation of Conformal Mappings and Generation of Difference Grids*. Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 1967, vol. 7, No. 5, pp. 1031-1059.
- [24] González, F.G. *Generación en Mallas en Regiones Planas Irregulares*. Tesis de Licenciatura, Universidad Autónoma de Yucatán, 1994.
- [25] González, F.G. *Un sistema automático para la generación numérica de mallas basado en los nuevos funcionales de área y suavidad*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, 2003.
- [26] Hardy, G., Littlewood, J.E. y Pólya, G. *Inequalities*. Cambridge University Press, 1934.
- [27] Henrici, P. *Applied and Computational Complex Analysis*. Wiley, 1986.
- [28] Ivanenko, S.A. *Generation of non-degenerate meshes*. USSR Comput. Maths. Math. Phys. Vol. 28, No.2, 1988.
- [29] Knupp, P. *Intrinsic algebraic grid generation*. Mathematical aspects of numerical grid generation, J.E. Castillo Ed., 1991.
- [30] Knupp, P. y Steinberg, S. *Fundamentals of grid generation*. CRC Press, 1992.
- [31] Lee, K.D. y Rubbert, P.E. *Patched coordinate systems*. Numerical Grid generation, 1982.
- [32] Mastin, C.W., Warsi, Z.U.A. y Thompson, J.F. *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*. Elsevier Science Publications Co., Inc. New York, NY., 1985.
- [33] Milnor, J. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1969.

-
- [34] Moré, J.J y Thunente, D.J. *Line search algorithms with guaranteed sufficient decrease*. ACM Transactions on Mathematical Software, 20 (1994), pp. 286-307.
- [35] Roache, P.J. y Steinberg, S. *Variational grid generation*. Num. Meth. for P.D.E.s 2, 71-96, 1986.
- [36] Roberts, A.W. y Varberg, D.E. *Convex Functions*. Academic Press, 1973.
- [37] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 1974.
- [38] Soni, B.K., Thompson, J.F. y Weatherhill, P. *Handbook of Grid Generation*. CRC Press, 1999.
- [39] Tinoco, J.G. *Funcionales Discretos para la Generación de Mallas Suaves y Convexas sobre Regiones Planas Irregulares*. Tesis de Doctorado, CIMAT, 1997.
- [40] Toledo, F. *Métodos Nuéricos para Mapeo Conforme con Aplicación a la Generación de Mallas*. Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias, U.N.A.M., 1995.
- [41] Winslow, A.M. *Numerical solution of quasilinear poisson equation in nonuniform triangle mesh*. J. Comput. Phys. 1(2), p. 149-172, 1966.