Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

# Series Formales sobre Bimódulos

TESIS

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Daniel López Aguayo

*Director:* Dr. Raymundo Bautista Ramos
Centro de Ciencias Matemáticas UNAM

Morelia, Michoacán - Octubre 2012.

# Índice general

# INTRODUCCIÓN

En este trabajo se introducen los conceptos de anillo topológico y completación de un anillo con respecto a un ideal. Como un caso particular se considera el álgebra de caminos y se calcula su completación con respecto al ideal generado por las flechas. Posteriormente se consideran series formales de potencias sobre bimódulos y se justifica porque este es un anillo completado con respecto a un ideal. Se concluye el trabajo dando una caracterización de los automorfismos de las series formales de potencias sobre ciertos bimódulos.

Capítulo 1

# Anillos Topológicos y Completaciones

**Definición**. Un ***anillo topológico*** es un anillo $(R, +, \cdot)$ con estructura de espacio topológico tal que la suma y el producto son continuas como aplicaciones $R \times R \to R$ donde $R \times R$ tiene la topología producto.

El concepto de anillo topológico fue introducido por David Van Dantzig[1] en su tesis doctoral titulada "*Studien over topologische algebra*".

Algunos ejemplos de anillos topológicos son $\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ con sus topologías usuales. Los anillos topológicos son objeto de estudio en el análisis, por ejemplo: $C(X)$ el anillo de todas las funciones continuas real-valuadas definidas en un espacio compacto $X$ o $C_c(X)$ el espacio de todas las funciones continuas real-valuadas con soporte compacto definidas en un espacio localmente compacto $X$.

**Definición**. Si $X$ es un conjunto, una ***base*** para una topología sobre $X$ es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $X$ (llamados ***elementos básicos***) tales que:

(1) Para cada $x \in X$, existe al menos un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.
(2) Sean $B_1$ y $B_2$ elementos de $\mathcal{B}$. Si $x \in B_1 \cap B_2$ entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Si la colección $\mathcal{B}$ satisface las condiciones anteriores se define la ***topología $\tau$ generada por la base*** $\mathcal{B}$ como sigue: $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si para cada $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

**Definición**. Un ***anillo filtrado*** $R$ es un anillo junto con una sucesión decreciente de ideales $R = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3...$ tal que $I_nI_m \subseteq I_{n+m}$ para toda $n, m \in \mathbb{N}$ [2]. A la colección $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ se le llama una ***filtración*** de ideales.

[1]Matemático alemán (1900-1959), trabajó en el estudio de metrización de anillos, grupos y campos.
[2]En este trabajo $\mathbb{N}$ denota al conjunto de los enteros positivos incluyendo al 0.

Un caso importante que se estudia es cuando $\mathfrak{m}$ es un ideal bilateral del anillo $R$ y se considera la filtración dada por los ideales $I_n = \mathfrak{m}^n$, $n \in \mathbb{N}$. A dicha filtración se le conoce como filtración $\mathfrak{m}$-ádica.

**Proposición 1.1**. Sea $R$ un anillo filtrado con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces el conjunto $\{x + I_n : x \in R, n \in \mathbb{N}\}$ forma una base para una topología en $R$. A la topología generada se le llama ***topología asociada a la filtración***.

*Demostración*:

Veamos primero que la primera condición de una base para una topología se cumple. Dado $x \in R$ se tiene que $x = x + 0 \in x + I_1$ ya que un ideal es en particular un subgrupo aditivo de $R$, luego contiene al elemento 0. Resta ver que la segunda condición se cumple. Supongamos que $z \in (x + I_n) \cap (y + I_m)$ donde $x, y$ son elementos de $R$ y $\{n, m\} \subseteq \mathbb{N}$. Definamos $k = \max\{n, m\}$ y veamos que $z + I_k \subseteq (x + I_n) \cap (y + I_m)$. Sea $z + j$ un elemento arbitrario de $z + I_k$, i.e $j \in I_k$. Dado que $z \in (x + I_n) \cap (y + I_m)$ entonces $z = x + j_1$ con $j_1 \in I_n$ y a la vez $z = y + j_2$ con $j_2 \in I_m$. Como $k = \max\{n, m\}$ entonces $I_k \subseteq I_n$ e $I_k \subseteq I_m$. Por lo tanto $z + j = x + j_1 + j \subseteq x + I_n$ ya que $j \in I_k \subseteq I_n$ y $j_1 \in I_n$. De manera similar se sigue que $z + j = y + j + j_2 \subseteq y + I_m$. En consecuencia $z + I_k \subseteq (x + I_n) \cap (y + I_m)$. Además por definición $z + I_k$ es un elemento de la base que contiene a $z$. Lo anterior prueba que dicha colección forma una base para una topología. □

**Observación**: La topología asociada a una filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ es Hausdorff si y sólo si $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$. Si un anillo tiene la filtración $I$-ádica entonces a la topología que genera la base definida anteriormente se le conoce como ***topología I-ádica***.

**Proposición 1.2**. Sea $R$ un anillo filtrado con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces la suma y producto son operaciones continuas, es decir $R$ tiene estructura de anillo topológico.

*Demostració*n:

Para ello recordemos que si $(X, \tau_1)$ y $(Z, \tau_2)$ son espacios con topologías $\tau_i$ generadas por bases $\mathcal{B}_i$ con $i \in \{1, 2\}$ entonces $f : X \to Z$ es continua si y sólo si para cada $x \in X$ y para cada básico $V \in \mathcal{B}_2$ que contiene a $f(x)$ existe un elemento básico $U \in \mathcal{B}_1$ que contiene a $x$ y tal que $f(U) \subseteq V$.

Probemos primero que $+ : R \times R \to R$ es una función continua. Sea $(r, s) \in R \times R$ y sea $z + I_n$ un abierto básico que contiene a $r + s$ con $n \in \mathbb{N}$. Observe que $(r + I_n) \times (s + I_n)$ es un abierto básico para la topología producto que contiene al elemento $(r, s)$. Del hecho que $(x + I_n) + (y + I_n) \subseteq x + y + I_n$ se sigue que la aplicación suma es continua. La continuidad del producto se deriva del hecho que $(x + I_n)(y + I_n) \subseteq xy + I_n$. □

Supongamos ahora que $R$ es un anillo filtrado con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$. Definamos una función $d : R \times R \to \mathbb{N}$ como sigue: $d(x, x) = 0$ y $d(x, y) = 2^{-max\{k \in \mathbb{N}:\ x-y\ \in I_k\}}$ si $x \neq y$. Note que la condición $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ implica que $d$ está bien definida para todos los pares $(x, y) \in R \times R$.

**Proposición 1.3**. La aplicación $d$ definida anteriormente es una métrica en $R$.

*Demostración*:

De la definición de $d$ es claro que $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$. También es evidente que $d(x, y) = d(y, x)$, luego basta mostrar que se cumple la desigualdad del triángulo. Para probar esto vamos a proceder por casos. Si ocurre que $x = y$ entonces $d(x, y) + d(y, z) = d(y, z)$ y claramente $d(y, z) \geq d(y, z)$, luego podemos suponer que todos los puntos $x, y, z$ son distintos entre sí. Sea $n_1$ el mayor entero tal que $x - y \in I_{n_1}$, $n_2$ el mayor entero tal que $y - z \in I_{n_2}$ y $n_3$ el mayor entero tal que $x - z \in I_{n_3}$. Definamos $r = \min\{n_1, n_2\}$. La igualdad $x - z = (x - y) + (y - z)$ implica que $x - z \in I_r$ y por lo tanto $r \leq n_3$. Pero entonces $-n_3 \leq -r$ de donde se deduce que:

$$\begin{aligned} d(x, z) = 2^{-n_3} &\leq 2^{-r} \\ &\leq 2^{-n_1} + 2^{-n_2} \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Por lo tanto $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ como se quería mostrar. □.

Lo anterior muestra que si $R$ es un anillo filtrado con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ entonces la filtración asociada genera una métrica en $R$. Cuando ocurre esto diremos que $R$ es un espacio ***linealmente topologizado***.

De la teoría de espacios métricos se sabe que si $(X, d)$ es un espacio métrico entonces la colección de todas las bolas abiertas $B_d(x, \epsilon)$ de radio $\epsilon$, para $x \in X$ y $\epsilon > 0$, es una base para una topología sobre $X$, denominada ***topología métrica*** inducida por $d$.

**Definición**: Si $(X, \tau)$ es un espacio topológico se dice que $X$ es ***metrizable*** si existe una distancia $d$ en el conjunto $X$ que induce la topología $\tau$.

**Proposición 1.4**. Sea $R$ un anillo filtrado con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ y supongamos que además $R$ tiene la topología asociada a la filtración. Si $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ entonces $R$ es un espacio metrizable.

*Demostración*:

Vamos a mostrar que la métrica $d : R \times R \to \mathbb{R}$ definida por: $d(x, x) = 0$ y $d(x, y) = 2^{-max\{k \in \mathbb{N}:\ x-y \in I_k\}}$ si $x \neq y$ induce la topología asociada a la filtración. Primero notemos que dado $N \in \mathbb{N}$ y $x \in R$ se tiene que $B(x, \frac{1}{2^{N-1}}) = x + I_N$. Sea $x \in R$ y $\epsilon > 0$, veamos que $B(x, \epsilon)$ es un conjunto abierto en la topología asociada a la filtración. Sea $N$ lo suficientemente grande tal que $2^{N-1}\epsilon > 1$. Por lo tanto $B(x, \frac{1}{2^{N-1}}) \subseteq B(x, \epsilon)$ pero por la observación $B(x, \frac{1}{2^{N-1}}) = x + I_N$, luego $x + I_N \subseteq B(x, \epsilon)$. Recíprocamente, sea $x + I_k$ un elemento básico para la topología asociada a la filtración y sea $z \in x + I_k$. Nuevamente por la observación $x + I_k = B(x, \frac{1}{2^{k-1}})$ en particular $z \in B(x, \frac{1}{2^{k-1}}) \subseteq x + I_k$ y por lo tanto $x + I_k$ es un conjunto abierto en la topología métrica inducida por $d$. Se concluye que dichas topologías coinciden. □

**Definición**. Sea $I$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $\{R_i : i \in I\}$ una familia de anillos. Supongamos que para $i, j \in I$ con $j \geq i$ existe una aplicación $\mu_{ji} : R_j \to R_i$ tal que:

(a) $\mu_{ji} \circ \mu_{kj} = \mu_{ki}$ si $i \leq j \leq k$.
(b) $\mu_{ii} = id_{R_i}$ para cada $i \in I$.

Se dice entonces que el par $((R_i)_{i \in I}, (\mu_{ji})_{i \leq j \in I})$ forma un sistema inverso de anillos y morfismos.

Se define el ***límite inverso*** del sistema inverso $((R_i)_{i \in I}, (\mu_{ji})_{i \leq j \in I})$ como:

$$\varprojlim R_i := \left\{ (r_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} R_i \middle| \, \mu_{ji}(r_j) = r_i \text{ si } i \leq j \right\}$$

**Observación**. Para cada $i \in I$ se tiene la restricción de la proyección natural $\pi_i : \varprojlim R_i \to R_i$.

**Proposición 1.5**. Si $\mu_{ji}$ son morfismos de anillos para toda $i \leq j$ entonces $\varprojlim R_i$ tiene estructura de anillo.

*Demostración*:

Consideremos la multiplicación en $\varprojlim R_i$ que se hereda del producto directo $\prod_{i \in I} R_i$. Primero notemos que $\varprojlim R_i \neq \emptyset$ pues contiene al elemento cuyas coordenadas es el elemento neutro aditivo del correspondiente grupo abeliano $R_i$. Sean $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}$ elementos de $\varprojlim R_i$ entonces si $(c_i)_{i\in I} = (a_i - b_i)_{i\in I}$ se tiene que para toda $i \leq j$:

$$\begin{aligned} \mu_{ji}(a_j - b_j) &= \mu_{ji}(a_j) - \mu_{ji}(b_j) \\ &= a_i - b_i \end{aligned}$$

Lo que prueba que $(a_i)_{i\in I} - (b_i)_{i\in I} \in \varprojlim R_i$. Por otro lado si $i \leq j$ entonces usando el hecho que $\mu_{ji}$ es morfismo de anillos se tiene que:

$$\begin{aligned} \mu_{ji}(a_j b_j) &= \mu_{ji}(a_j)\mu_{ji}(b_j) \\ &= a_i b_i \end{aligned}$$

Por lo tanto $\varprojlim R_i$ tiene estructura de anillo. $\square$.

**Proposición 1.6**. *Propiedad universal del límite inverso*. Si $S$ es cualquier anillo con la propiedad que para cada $i \in I$ existe un morfismo de anillos $f_i : S \to R_i$ con $f_i = \mu_{ji} \circ f_j$ para $i \leq j$ entonces existe un único morfismo de anillos $f : S \to \varprojlim R_i$ tal que los triángulos laterales del siguiente diagrama conmutan:

$$\begin{tikzcd}
& S \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddl, bend right, "f_j"'] \arrow[ddr, bend left, "f_i"] & \\
& \varprojlim R_i \arrow[dl, "\pi_j"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & \\
R_j \arrow[rr, "\mu_{ji}"'] & & R_i
\end{tikzcd}$$

*Demostración*:

Sea $f : S \to \varprojlim R_i$ dada por $f(s) := (f_i(s))_{i\in I}$. Observe que si $i \leq j$ entonces $\mu_{ji}(f_j(s)) = f_i(s)$, pues $\mu_{ji} \circ f_j = f_i$ y por lo tanto $\mathrm{Im}(f) \subseteq \varprojlim R_i$. Sean $s_1, s_2$ elementos de $S$, entonces usando el hecho que $f_i$ es en particular un morfismo de grupos se tiene que:

$$\begin{aligned} f(s_1 + s_2) &= (f_i(s_1 + s_2))_{i\in I} \\ &= (f_i(s_1) + f_i(s_2))_{i\in I} \\ &= (f_i(s_1))_{i\in I} + (f_i(s_2))_{i\in I} \\ &= f(s_1) + f(s_2) \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} f(s_1 s_2) &= (f_i(s_1 s_2))_{i\in I} \\ &= (f_i(s_1) f_i(s_2))_{i\in I} \\ &= (f_i(s_1))_{i\in I} (f_i(s_2))_{i\in I} \\ &= f(s_1) f(s_2) \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que $f$ es un morfismo de anillos, la unicidad de $f$ se sigue al componer con las proyecciones $\pi_i$. □.

Supongamos ahora que $R$ es un anillo e $I$ un ideal (bilateral) de $R$. Notemos que en $R$ se tiene la *filtración I-ádica*:

$$R \supseteq I \supseteq I^2 \supseteq I^3 \supseteq \ ...$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y supongamos que $n \leq m$. Observe que el ideal $I^m$ está contenido en el núcleo de la proyección natural $R \twoheadrightarrow R/I^n$, luego por el teorema de Noether se tienen morfismos naturales de anillos:

$$f_{mn} : R/I^m \longrightarrow R/I^n$$

Por construcción se sigue que el par $((I^n)_{n\in\mathbb{N}}, (f_{mn})_{n\leq m\in\mathbb{N}})$ forma un sistema inverso de anillos y morfismos. Consideremos entonces el límite inverso $\varprojlim R/I^n$:

$$\varprojlim R/I^n = \left\{ (r_n + I^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} R/I^n \ | r_n \equiv r_m \bmod I^n \text{ para toda } m \geq n \right\}$$

Se define la ***completación*** de $R$ con respecto a $I$ como $\hat{R}_I := \varprojlim R/I^n$.

**Definición**. Sea $R$ un anillo filtrado con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de $R$ es una ***sucesión de Cauchy*** si y sólo si para toda $k \in \mathbb{N}$ existe $N = N(k) \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+1} - x_n \in I_k$ para toda $n \geq N$.

**Definición**. Sea $R$ un anillo con filtración $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $R$ es **convergente** si existe $x \in R$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $N = N(k) \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x \in I_k$ para toda $n \geq N$. A $x$ se le llama el límite de la sucesión y se denota por $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

**Definición**. Sea $R$ un anillo filtrado entonces $R$ es ***completo*** si toda sucesión de Cauchy en $R$ es convergente.

Consideremos la completación de $R$ con respecto al ideal $I$, $\hat{R}_I$ y para cada $i \in \mathbb{N}$ definimos:

$$\hat{R}_i := \{(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{R}_I : r_n = 0 \text{ para toda } n \leq i\}$$

Notemos que para cada $i \in \mathbb{N}$ el conjunto $\hat{R}_i$ es un ideal de $\hat{R}_I$. De esta manera el anillo $\hat{R}_I$ tiene asociada una filtración natural: $\{\hat{R}_i : i \in \mathbb{N}\}$.

**Proposición 1.7**. Sea $R$ un anillo dotado de la topología $I$-ádica. Entonces se cumple que:

(a) La completación $\hat{R}_I = \varprojlim R/I^n$ es un espacio completo y Hausdorff.
(b) Existe un morfismo de anillos inyectivo $\varphi : R \hookrightarrow \hat{R}_I$.

*Demostración*:

(a) La completación $\hat{R}_I$ es Hausdorff ya que: $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \hat{R}_i = \{0\}$. Veamos que $\hat{R}_I$ es un espacio completo. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\hat{R}_I$. Pongamos $x_n = (x_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ donde $x_{n,m} \in R/I^m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Por ser $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy en $\hat{R}_I$ entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $n(m) \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+1} - x_n \in \hat{R}_m$ para toda $n \geq n(m)$. Esto implica que $x_{n+1,i} = x_{n,i}$ para toda $i \leq m$ y toda $n \geq n(m)$. Notemos que sin perder generalidad podemos suponer que $\{n(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente. Veamos que $x_{n,i} = x_{n(m),i}$ para cada $i \leq m$ y toda $n \geq n(m)$. Note que si $n \geq n(m)$ entonces $n = n(m)+k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, luego hagamos inducción sobre $k$. Para $k = 1$ el enunciado se cumple pues $n(m) \geq n(m)$. Supongamos entonces que $x_{n(m)+k,i} = x_{n(m),i}$ y probemos que $x_{n(m)+k+1,i} = x_{n(m),i}$.

En efecto:

$$\begin{aligned} x_{(n(m)+k)+1,i} &= x_{n(m)+k,i} \\ &= x_{n(m),i} \end{aligned}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ definamos $x_m^{'} := x_{n(m),m}$ y pongamos $x' := (x_m^{'})_{m\in\mathbb{N}}$.

• $x' \in \hat{R}_I$:

Hay que probar que si $r \geq s$ entonces $f_{r,s}(x_r^{'}) = x_s^{'}$. Dado que $\{n(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente entonces $n(r) \geq n(s)$. Como $x_{n,i} = x_{n(m),i}$ para cada $i \leq m$ y toda $n \geq n(m)$ en particular poniendo $i = m$ se sigue que $x_{n,m} = x_{n(m),m}$ para cada $n \geq n(m)$. Luego como $n(r) \geq n(s)$ entonces $x_{n(r),s} = x_{n(s),s}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f_{r,s}(x_r^{'}) &= f_{r,s}(x_{n(r),r}) \\ &= x_{n(r),s} \\ &= x_{n(s),s} \\ &= x_s^{'} \end{aligned}$$

Lo que prueba que $x' \in \hat{R}_I$.

• $x' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

Observe que $x' - x_n = (x_{n(m),m} - x_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$. Sea $r \in \mathbb{N}$ y veamos que para toda $n \geq n(r)$ se tiene que $(x_{n(m),m} - x_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} \in \hat{R}_r$. Supongamos que $m \leq r$ entonces por ser $\{n(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente se sigue que $n(m) \leq n(r)$ y por lo tanto $x_{n(r),m} = x_{n(m),m}$. Así $n(m) \leq n(r) \leq n$ y en particular $n \geq n(m)$. Luego $x_{n,m} = x_{n(m),m}$ y por ello $x' - x_n \in \hat{R}_r$ para toda $n \geq n(r)$. En consecuencia $x' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ y por lo tanto $\hat{R}_I$ es un espacio completo.

(b) Sea $\varphi : R \to \hat{R}_I$ dada por $r \mapsto (r + I^n)_{n\in\mathbb{N}}$, es claro que $\varphi$ es morfismo de anillos. Note que si $\varphi(r) = \varphi(s)$ entonces $r + I^n = s + I^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ lo que implica que $r - s \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I^n = \{0\}$ y por lo tanto $r = s$. □

Capítulo 2

# Completación del Álgebra de Caminos

Sea $Q = (Q_0, Q_1, h, t)$ un carcaj finito y sea $K$ un campo fijo. Asociamos al carcaj $Q$ dos $K$-espacios vectoriales $R = K^{Q_0}$ y $A = K^{Q_1}$ que consisten de aplicaciones $K$-valuadas en $Q_0$ y $Q_1$ respectivamente. Dotamos a $A$ de una estructura de $(R, R)$-bimódulo como sigue: si $e \in R$ y $f \in A$ entonces la acción izquierda está dada por $(e \cdot f)(a) = e(h(a))f(a)$ y la acción derecha está dada por $(f \cdot e)(a) = f(a)e(t(a))$ para cada flecha $a$. Para cada vértice $x$ definimos una aplicación $e_x : Q_0 \to K$ mediante $e_x(y) = \delta_{x,y}$ y notemos que $R = \bigoplus_{x \in Q_0} Ke_x$. Similarmente $A$ tiene como base las funciones $\underline{\alpha} : Q_1 \to K$ dadas por $\underline{\alpha}(\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$ y por lo tanto $A = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} K\underline{\alpha}$. Consideremos el álgebra tensorial de $A$:

$$T_R(A) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} A^{\otimes d}$$

Donde $A^{\otimes d}$ representa el producto tensorial iterado $\underbrace{A \otimes_R A \otimes_R \ldots \otimes_R A}_{\text{d veces}}$ y $A^0 = R$. Observe que esto está bien definido ya que $A$ es un $(R, R)$-bimódulo.

Note que para cada $d \geq 1$ los productos $a_1 \cdots a_d$ tal que $a_k \in Q_1$ y $t(a_k) = h(a_{k+1})$ para cada $1 \leq k \leq d$ forman una $K$-base de $A^{\otimes d}$. De esta manera podemos identificar $A^{\otimes d}$ con $KQ_d$, i.e el $K$-espacio vectorial generado por todos los caminos de longitud $d$. Luego el álgebra tensorial se puede identificar con el álgebra de caminos $KQ$.

Por otro lado, por definición de producto cartesiano se tiene que:

$$\prod_{d=0}^{\infty} A^{\otimes d} = \left\{ h : \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{d=0}^{\infty} A^{\otimes d} \ : (\forall d \in \mathbb{N})(h(d) \in A^{\otimes d}) \right\}$$

Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los caminos orientados del carcaj $Q$ y consideremos el conjunto de series formales: $\left\{ \sum_{\gamma \in \mathcal{B}} a_\gamma \gamma : a_\gamma \in K \right\}$.

**Proposición 2.1**. Existe una correspondencia biyectiva:

$$\prod_{d=0}^{\infty} A^{\otimes d} \longleftrightarrow \left\{ \sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma \gamma : a_\gamma \in K \right\}$$

*Demostración*:

Denotemos la longitud de un camino por $l$ y por simplicidad denotemos por $X$ el conjunto de series formales. Sea $x = \sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma$. Definamos $\varphi : X \longrightarrow \prod_{d=0}^{\infty} A^{\otimes d}$ mediante $x \mapsto \varphi(x)$ donde:

$$\varphi(x)(d) := \sum_{l(\gamma)=d} a_\gamma\gamma$$

para cada $d \in \mathbb{N}$. Observe que $\varphi$ es inyectiva, en efecto, sean $\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma$ y $\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} b_\gamma\gamma$ dos series formales con la misma imagen bajo $\varphi$. Luego para todo $d \in \mathbb{N}$ se tiene que $\sum_{l(\gamma)=d} a_\gamma\gamma = \sum_{l(\gamma)=d} b_\gamma\gamma$ y por lo tanto $a_\gamma = b_\gamma$ para todo $\gamma \in \mathcal{B}$. En consecuencia $\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma = \sum_{\gamma\in\mathcal{B}} b_\gamma\gamma$. Para ver que $\varphi$ es sobreyectiva note que si $h \in \prod_{d=0}^{\infty} A^{\otimes d}$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $h(n) = \sum_{l(\gamma)=n} a_\gamma\gamma$ con $a_\gamma \in k$, luego si tomamos la serie $\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma$:

$$\begin{aligned}\varphi\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma\right)(n) &= \sum_{l(\gamma)=n} a_\gamma\gamma \\ &= h(n)\end{aligned}$$

Y por lo tanto $\varphi\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma\right) = h$. $\square$.

Por lo anterior podemos identificar al conjunto de series formales con el producto $\prod_{d=0}^{\infty} A^{\otimes d}$. Notemos que podemos dotar al conjunto de series formales de una estructura de anillo como sigue:

- La suma:

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma + \sum_{\gamma\in\mathcal{B}} b_\gamma\gamma := \sum_{\gamma\in\mathcal{B}} (a_\gamma + b_\gamma)\gamma$$

• El producto:

$$\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma\right)\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{B}} b_\alpha\alpha\right) := \sum_{\rho\in\mathcal{B}}\left(\sum_{\gamma\alpha=\rho} a_\gamma b_\alpha\right)\rho$$

**Proposición 2.2**. Sea $\mathfrak{m}$ el ideal generado por las flechas y sea $\widehat{KQ}$ la completación del álgebra de caminos $KQ$ con respecto a $\mathfrak{m}$, entonces existe un isomorfismo de anillos:

$$\widehat{KQ} \cong \left\{\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma : a_\gamma \in K\right\}$$

*Demostración*:

Sea $X$ el conjunto de series formales. Para establecer dicho isomorfismo vamos a utilizar la propiedad universal del límite inverso (ver proposición 1.6). Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la aplicación $\varphi_n : X \longrightarrow KQ/\mathfrak{m}^n$ dada por:

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma \mapsto \sum_{l(\gamma)<n} a_\gamma\gamma + \mathfrak{m}^n$$

Lo que realiza esta aplicación es la reducción de la serie formal módulo los caminos de longitud mayor o igual que $n$. Note que $\varphi_n$ es morfismo de anillos, en efecto es claro que preserva sumas, resta ver que preserva productos. Sean $\sum\limits_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma$, $\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{B}} b_\alpha\alpha$ dos series formales. Por un lado se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\varphi_n\left(\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma\right)\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{B}} b_\alpha\alpha\right)\right)\\
&= \varphi_n\left(\sum_{\rho\in\mathcal{B}}\left(\sum_{\rho=\gamma\alpha} a_\gamma b_\alpha\right)\rho\right)\\
&= \sum_{l(\rho)<n}\left(\sum_{\rho=\gamma\alpha} a_\gamma b_\alpha\right)\rho + \mathfrak{m}^n
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
&\varphi_n\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma\right)\varphi_n\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{B}} b_\alpha\alpha\right)\\
&=\left(\sum_{l(\gamma)<n} a_\gamma\gamma+\mathfrak{m}^n\right)\left(\sum_{l(\alpha)<n} b_\alpha\alpha+\mathfrak{m}^n\right)\\
&=\sum_{\rho\in\mathcal{B}}\left(\sum_{\rho=\gamma\alpha,l(\gamma)<n,l(\alpha)<n} a_\gamma b_\alpha\right)\rho+\mathfrak{m}^n
\end{aligned}$$

Teniendo presente que los caminos de longitud mayor o igual a $n$ son cero en el cociente $KQ/\mathfrak{m}^n$ se sigue que dichas expresiones son iguales por la distributividad de la suma, luego por la propiedad universal del límite inverso se sigue que existe un único morfismo de anillos $f : X \longrightarrow \varprojlim KQ/\mathfrak{m}^n$ dado por:

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma \mapsto \left(\sum_{l(\gamma)<n} a_\gamma\gamma+\mathfrak{m}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

• $f$ es inyectiva. Podemos identificar a $KQ/\mathfrak{m}^n$ con el $K$-espacio vectorial generado por todos los caminos de longitud a lo más $n-1$. Sea $\sum a_\gamma\gamma$ un elemento $KQ/\mathfrak{m}^n$ y supongamos que $\sum a_\gamma\gamma = 0$ para todo camino orientado $\gamma$ tal que $l(\gamma)\le n-1$. Luego por la independencia lineal de los caminos orientados se sigue que $a_\gamma = 0$ para todo $\gamma$ tal que $l(\gamma)\le n-1$. Pero además esto es cierto para toda $n\in\mathbb{N}$, luego $\sum_{\gamma\in\mathcal{B}} a_\gamma\gamma = 0$.

• $f$ es sobreyectiva. Supongamos que $(f_n+\mathfrak{m}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un elemento de $\varprojlim KQ/\mathfrak{m}^n$. Observe primero que podemos suponer que $f_n$ es una combinación lineal de caminos de longitud a lo más $n-1$ ya que en el cociente $KQ/\mathfrak{m}^n$ todos los caminos de longitud mayor o igual a $n$ se anulan. Por otro lado, por definición de límite inverso se tiene que para toda $m\ge n$: $f_m-f_n\in\mathfrak{m}^n$. Esto implica que el elemento $(f_n+\mathfrak{m}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ se puede escribir como:

$$(f_1+\mathfrak{m}, f_1+g_1+\mathfrak{m}^2, f_1+g_1+g_2+\mathfrak{m}^3, ...)$$

Donde cada $g_i$ es una combinación lineal de caminos de longitud $i$, es decir $g_i\in KQ_i$ para cada $i\ge 1$. Por ejemplo $f_2-f_1\in\mathfrak{m}$, luego $f_2 = f_1+g_1$ donde $g_1\in\mathfrak{m}$, es decir $g_1 = f_2-f_1$. Por lo tanto el elemento $f_1+g_1+g_2+g_3+g_4+...$ es una serie formal cuya imagen bajo el morfismo $f$ es exactamente $(f_n+\mathfrak{m}^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Esto establece la sobreyectividad del morfismo $f$. □.

Capítulo 3

# Series Formales sobre Bimódulos

Sean $D_1, D_2, .., D_n$ anillos con división, $S = \prod_{i=1}^{n} D_i$ y $M$ un (S,S)-bimódulo. Definamos:

$$\mathcal{F}_S(M) := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a(i) \ : \ a(i) \in M^{\otimes i} \right\}$$

Donde declaramos que $M^0 = S$. Dotamos a $\mathcal{F}_S(M)$ de estructura de anillo como sigue:

• La suma:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a(i) + \sum_{i=0}^{\infty} b(i) := \sum_{i=0}^{\infty} (a(i) + b(i))$$

• El producto:

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} a(i) \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} b(j) \right) := \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i+j=s} a(i)b(j)$$

donde $a(i)b(j)$ es la imagen de $a(i) \otimes b(j)$ en $M^{\otimes(i+j)}$ bajo el isomorfismo canónico:

$$M^{\otimes i} \otimes_S M^{\otimes j} \xrightarrow{\cong} M^{\otimes(i+j)}$$

Notemos que $\mathcal{F}_S(M)$ es un anillo con 1. En efecto, el elemento 1 está dado por:

$$1(i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = 0 \\ 0 \text{ si } i \neq 0 \end{cases}$$

ya que si $a \in \mathcal{F}_S(M)$ entonces:

$$(a1)(i) = \sum_{s+t=i} a(s)1(t)$$

Luego si $t \neq 0$ entonces $1(t) = 0$ y por ello $(a1)(i) = a(i)$.

Note además que como $M^0 = S$ entonces $S$ se encaja como subanillo en $T_S(M)$ y $\mathcal{F}_S(M)$ luego podemos considerar tanto a $T_S(M)$ y $\mathcal{F}_S(M)$ como $S$-álgebras vía el morfismo inclusión de $S$ en cualquiera de estos dos anillos.

Similarmente el álgebra tensorial $T_S(M)$ se encaja como subanillo de $\mathcal{F}_S(M)$, i.e $T_S(M) \hookrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ al identificar $T_S(M)$ con el conjunto de sumas finitas de los productos tensoriales iterados. Sea $\mathfrak{m}(M)$ el ideal de $T_S(M)$ generado por $M$. Observe que se tiene una filtración:

$$T_S(M) \supseteq \mathfrak{m}(M) \supseteq \mathfrak{m}(M)^2 \supseteq ...$$

Luego se tiene la topología $\mathfrak{m}(M)$-ádica en $T_S(M)$. Note también que para todo entero $j \geq 1$:

$$\mathfrak{m}(M)^j = M^{\otimes j} \oplus M^{\otimes j+1} \oplus ...$$

Definamos ahora una aplicación $\nu : \mathcal{F}_S(M) \to \mathbb{N}$ como sigue. Para cada $a \in \mathcal{F}_S(M)$ se define:

$$\nu(a) := \min\{i : a(i) \neq 0\}$$

**Proposición 3.1**. La aplicación $\nu$ induce una métrica en $\mathcal{F}_S(M)$.

*Demostración*:

Veamos que la aplicación $d : \mathcal{F}_S(M) \times \mathcal{F}_S(M) \to \mathbb{N}$ definida por:

$$d(a,b) := \begin{cases} 2^{-\nu(a-b)} \text{ si } a \neq b \\ 0 \text{ si } a = b \end{cases}$$

es una métrica en $\mathcal{F}_S(M)$. Observe que solo la desigualdad del triángulo no es evidente. Sean $a, b, c$ elementos de $\mathcal{F}_S(M)$ y sin pérdida de generalidad supongamos que todos son distintos entre sí. Sea $i_1$ el menor entero tal que $(a-c)(i_1) \neq 0$, $i_2$ el menor entero tal que $(a-b)(i_2) \neq 0$ e $i_3$ el menor entero tal que $(b-c)(i_3) \neq 0$. Definamos $k = \min\{i_2, i_3\}$ y note que $a - c = (a-b) + (b-c)$, luego si $i < k$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(a-c)(i) &= ((a-b)+(b-c))(i) \\ &= (a-b)(i) + (b-c)(i) \\ &= 0\end{aligned}$$

ya que $i < k$ y como $k = \min\{i_2, i_3\}$ entonces $i < i_2$ y a la vez $i < i_3$. Por construcción $i_1$ es el menor entero tal que $(a-c)(i_1) \neq 0$, luego $i_1 \geq k$. Por lo tanto $-i_1 \leq -k$ y así $2^{-i_1} \leq 2^{-k} \leq 2^{-i_2} + 2^{-i_3}$. En consecuencia $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ y por ende $d$ satisface la desigualdad del triángulo. □

**Observación**. Note que la prueba anterior muestra que $d$ satisface la desigualdad $d(a, c) \leq \max\{d(a, b), d(b, c)\}$ para todo $a, b, c$ en $\mathcal{F}_S(M)$ así que de hecho $(\mathcal{F}_S(M), d)$ es un espacio *ultramétrico*.

**Proposición 3.2**. Sea $\overline{\langle M \rangle}$ la cerradura topológica en el espacio $\mathcal{F}_S(M)$ del ideal $\langle M \rangle$ generado por $M$ en el anillo $\mathcal{F}_S(M)$. Entonces $a \in \overline{\langle M \rangle} \Leftrightarrow a(0) = 0$.

*Demostración*:

$\Leftarrow$) Supongamos que $a(0) = 0$. Definamos una sucesión $\{a^{\leq n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{F}_S(M)$ como sigue:

$$a^{\leqslant n}(j) := \begin{cases} a(j) \text{ si } j \leq n \\ \quad 0 \text{ si } j > n \end{cases}$$

Veamos que $a = \lim\limits_{n \to \infty} a^{\leqslant n}$, es decir que para toda $\epsilon > 0$ existe un natural $N$ tal que $d(a, a^{\leqslant n}) < \epsilon$ para toda $n > N$. Observe que $\nu(a - a^{\leqslant n}) = n + k$ para algún entero positivo $k$. Luego dado $\epsilon > 0$ elija un natural $N$ tal que $2^N \epsilon > 1$. Por lo tanto si $n > N$ entonces $n + k > N + k > N$ y así $n + k > N$. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} 2^{-(n+k)} &\leq 2^{-(N+K)} \\ &\leq 2^{-N} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Como $a(0) = 0$ entonces $\{a^{\leqslant n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\langle M \rangle$ y es tal que $a = \lim\limits_{n \to \infty} a^{\leqslant n} \in \overline{\langle M \rangle}$.

$\Rightarrow$) Supongamos que $a \in \overline{\langle M \rangle}$, entonces cualquier abierto que contiene a $a$ intersecta a $\langle M \rangle$. En particular considerando $B(a, \frac{1}{2})$, la bola abierta con centro en $a$ y radio $\frac{1}{2}$, se sigue que existe $b \in \langle M \rangle$ tal que $d(a, b) < \frac{1}{2}$. Necesariamente $a(0) = b(0)$ pues en otro caso $d(a, b) = 1 \nless \frac{1}{2}$. Como $b \in \langle M \rangle$ entonces $b(0) = 0$ y luego $a(0) = 0$. □

Para cada $j \geq 1$ definamos:

$$\mathcal{F}_S(M)^{\geq j} := \{a \in \mathcal{F}_S(M) : a(i) = 0 \text{ para toda } i < j\}$$

Note en particular que $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1} = \overline{\langle M \rangle}$.

**Proposición 3.3**. Para cada entero $j \geq 1$ se tiene que $\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}$ es un ideal de $\mathcal{F}_S(M)$.

*Demostración*:

Sea $j$ un entero tal que $j \geq 1$. Supongamos que $a = \sum_{i=0}^{\infty} a(i)$ es un elemento de $\mathcal{F}_S(M)$ y sea $b = \sum_{k=0}^{\infty} b(k)$ un elemento de $\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}$. Entonces por definición de producto en $\mathcal{F}_S(M)$:

$$ab = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i+k=t} a(i)b(k)$$

Supongamos que $t < j$, luego $i + k < j$. Lo anterior implica que $k < j$ pues si $k \geq j$ entonces $i + k \geq i + j \geq j$ luego $i + k \geq j$, una contradicción. Por lo tanto si $t < j$ entonces $k < j$ y como $b = \sum_{k=0}^{\infty} b(k)$ es un elemento de $\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}$ entonces $b(k) = 0$ para todo $k < j$. En consecuencia $\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}$ es un ideal de $\mathcal{F}_S(M)$. □

**Proposición 3.4**. Sea $\mathfrak{m}(M)$ el ideal generado por $M$ en el álgebra tensorial $T_S(M)$. Para cada entero positivo $j$ existe un isomorfismo de anillos:

$$\frac{\mathcal{F}_S(M)}{\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}} \cong \frac{T_S(M)}{\mathfrak{m}(M)^j}$$

*Demostración*:

Notemos que se tiene una inclusión natural $T_S(M) \hookrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ y un morfismo sobreyectivo $\mathcal{F}_S(M) \twoheadrightarrow \frac{\mathcal{F}_S(M)}{\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}}$, luego la composición determina un morfismo $\phi : T_S(M) \to \frac{\mathcal{F}_S(M)}{\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}}$. Veamos que $\mathfrak{m}(M)^j \subseteq \ker(\phi)$. En efecto si $a \in \mathfrak{m}(M)^j$ entonces $a(s) = 0$ para toda $s \leq j - 1$, luego $\phi(a) = 0$. Por lo tanto por el teorema de Noether existe un morfismo de anillos $\Psi : \frac{T_S(M)}{\mathfrak{m}(M)^j} \longrightarrow \frac{\mathcal{F}_S(M)}{\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}}$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} T_S(M) \arrow[r, hook] \arrow[d] & F_S(M) \arrow[d, two heads] \\ \frac{T_S(M)}{\mathfrak{m}(M)^j} \arrow[r, dashed, "\Psi"] & \frac{\mathcal{F}_S(M)}{\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}} \end{tikzcd}$$

Resta ver que $\Psi$ es un isomorfismo.

• $\Psi$ es morfismo inyectivo:

Sea $a = \sum_{i=0}^{j-1} a(i) \in \dfrac{T_S(M)}{\mathfrak{m}(M)^j}$ y supongamos que $a \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq j}$ luego para toda $t \leq j-1$ se tiene que $a(t) = 0$ y por lo tanto $a = 0$.

• $\Psi$ es morfismo sobreyectivo:

Sea $a = \sum_{i=0}^{\infty} a(i) + \mathcal{F}_S(M)^{\geq j}$ un elemento de $\frac{\mathcal{F}_S(M)}{\mathcal{F}_S(M)^{\geq j}}$. Observe que en dicho cociente se tiene la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a(i) + \mathcal{F}_S(M)^{\geq j} = \sum_{i=0}^{j-1} a(i) + \mathcal{F}_S(M)^{\geq j}$$

Pero entonces $b = \sum_{i=0}^{j-1} a(i) + \mathfrak{m}(M)^j$ satisface $\Psi(b) = a$. En consecuencia $\Psi$ es un isomorfismo de anillos. □

**Observación**. Un razonamiento análogo al que se da en la demostración de la proposición 2.2 muestra que si $\mathfrak{m}(M)$ es el ideal generado por $M$ en el álgebra tensorial $T_S(M)$ entonces existe un isomorfismo de anillos: $\widehat{T_S(M)}_{\mathfrak{m}(M)} \cong \mathcal{F}_S(M)$.

Introduzcamos ahora el concepto de sumabilidad para una sucesión de series formales.

**Definición**. Sea $\tau := \{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{F}_S(M)$. Se dice que $\tau$ es *sumable* si para cada $u \in \mathbb{N}$ el conjunto:

$$\mathcal{F}(\tau, u) = \{i \in \mathbb{N} : T_i(u) \neq 0\}$$

es finito. En tal caso se define la serie $\sum T_i$ como:

$$\left(\sum T_i\right)(u) := \sum_{i \in \mathcal{F}(\tau,u)} T_i(u)$$

**Proposición 3.5**. Sea $\tau = \{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{F}_S(M)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $J_n := \sum_{i\leq n} T_i$. Entonces si $\tau$ es sumable se tiene que $\lim_{n\to\infty} J_n = \sum T_i$ con respecto a la métrica en $\mathcal{F}_S(M)$ descrita en la proposición 3.1.

*Demostración*:

Sea $\epsilon > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $2^N \epsilon > 1$. Como $\tau$ es sumable entonces para cada $u \in \{0, 1, 2, ...N\}$ se tiene que $|\mathcal{F}(\tau, u)| < \infty$. Sea $T = \bigcup_{u=0}^{N} \mathcal{F}(\tau, u)$ y pongamos $k = \max T$. Supongamos que $n \geq k$ y que $u \in \{0, 1, ...N\}$ entonces:

$$\begin{aligned} J_n(u) - \left(\sum T_i\right)(u) &= \sum_{i=0}^{n} T_i(u) - \sum_{i\in\mathcal{F}(\tau,u)} T_i(u) \\ &= \sum_{i\in\{0,1,...n\}\setminus\mathcal{F}(\tau,u)} T_i(u) \end{aligned}$$

Note ahora que si $i \in \{0, 1, ..n\} \setminus \mathcal{F}(\tau, u)$ y $u \in \{0, 1, ...N\}$ entonces $T_i(u) = 0$. En efecto, si no es el caso entonces $T_i(u) \neq 0$, luego $i \in \mathcal{F}(\tau, u)$ una contradicción. Por lo tanto si $n \geq k$ se sigue que:

$$\begin{aligned} \nu\left(J_n - \sum T_i\right) &= \text{mín}\left\{u \in \mathbb{N} : J_n(u) - \left(\sum T_i\right)(u) \neq 0\right\} \\ &> N \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} d\left(J_n, \sum T_i\right) &= 2^{-\nu\left(J_n - \sum T_i\right)} \\ &< 2^{-N} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Se concluye que $\lim_{n\to\infty} J_n = \sum T_i$. $\square$

Sean $\tau = \{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\tau' = \{T'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesiones de elementos de $\mathcal{F}_S(M)$. Se construye una nueva serie $\sum T''_s$ definiendo primero una sucesión de series formales $\tau'' = \{T''_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ como sigue:

$$T''_s := \sum_{i+j=s} T_i T'_j$$

**Proposición 3.6**. Sean $\tau = \{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\tau' = \{T'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesiones de elementos de $\mathcal{F}_S(M)$. Si ambas sucesiones son sumables entonces:

(i) $\tau'' = \{T''_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ es sumable.
(ii) $\sum T''_s = \left(\sum T_i\right)\left(\sum T'_j\right)$

*Demostración*:

(i) Sea $u \in \mathbb{N}$ y para cada entero $l \in [0, u]$ definamos:

$$J_l = \mathcal{F}(\tau, l) \times \mathcal{F}(\tau', u-l)$$
$$J = \bigcup_{l=0}^{u} J_l$$

Por hipótesis $\tau$ y $\tau'$ son sucesiones sumables, luego $J_l$ es finito por ser el producto cartesiano de dos conjuntos finitos y por ende $J$ es finito. Tomemos $s_0 = \max\{i + j : (i, j) \in J\}$, luego:

$$\mathcal{F}(\tau'', u) \subseteq [0, s_0] \cap \mathbb{N}$$

Por lo tanto $\mathcal{F}(\tau'', u)$ es un conjunto finito lo que prueba que $\tau''$ es sumable.

(ii) Sea $u \in \mathbb{N}$. Por un lado:

$$\begin{aligned}\left(\sum T''_s\right)(u) &= \sum_{s\in\mathcal{F}(\tau'',u)} T''_s(u)\\ &= \sum_{s=0}^{s_0} T''_s(u)\\ &= \sum_{l=0}^{u} \sum_{(i,j)\in J_l} T_i(l)T'_j(u-l)\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}\Big(\sum T_i\Big)\Big(\sum T'_j\Big)(u) &= \sum_{l=0}^{u}\left(\sum_{i\in\mathcal{F}(\tau,l)} T_i(l)\right)\left(\sum_{j\in\mathcal{F}(\tau',u-l)} T'_j(u-l)\right)\\ &= \sum_{l=0}^{u}\sum_{(i,j)\in J_l} T_i(l)T'_j(u-l)\end{aligned}$$

Se sigue que ambas expresiones son iguales. □

Recordemos ahora un resultado de topología general.

**Lema**. Sea $Y$ un espacio de Hausdorff, $X$ un espacio topológico y $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas. Supongamos que $D \subseteq X$ es un subconjunto denso de $X$ tal que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in D$ entonces $f = g$.

*Demostración*:

Como $Y$ es Hausdorff entonces la diagonal $\triangle = \{(y, y) : y \in Y\}$ es un subconjunto cerrado de $Y \times Y$. Definamos $\varphi : X \to Y \times Y$ mediante $\varphi(x) = (f(x), g(x))$. Dado que $f$ y $g$ son aplicaciones continuas entonces $\varphi$ también es continua y por ello $\varphi^{-1}(\triangle)$ es un subconjunto cerrado de $X$. Por hipótesis $\varphi^{-1}(\triangle) = D$, luego como $\overline{D} = X$ y $\varphi^{-1}(\triangle)$ es cerrado en $X$ entonces $\varphi^{-1}(\triangle) = X$. En consecuencia $f(x) = g(x)$ para toda $x \in X$, es decir $f = g$. □

**Proposición 3.7**. Sea $\varphi : M \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ un morfismo de $(S, S)$-bimódulos tal que $\varphi(M) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$. Entonces existe un único morfismo de $S$-álgebras $\overline{\varphi} : \mathcal{F}_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{F}_S(M) \arrow[d, dotted, "\overline{\varphi}"] \\ & \mathcal{F}_S(M) \end{tikzcd}$$

*Demostración*:

Por la propiedad universal del álgebra tensorial existe un único morfismo de $S$-álgebras: $\psi : T_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & T_S(M) \arrow[d, dotted, "\psi"] \\ & \mathcal{F}_S(M) \end{tikzcd}$$

Sea $a = \sum_{u=0}^{\infty} a(u)$ un elemento de $\mathcal{F}_S(M)$ luego $a(u) \in M^{\otimes u}$ para cada $u \geq 0$. Note que como $a(u) \in M^{\otimes u}$ entonces usando la hipótesis que $\varphi(M) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$ se tiene que $\psi(a(u)) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u}$. En consecuencia la sucesión de series formales $\{\psi(a(u))\}_{u\in\mathbb{N}}$ es sumable. Se define entonces $\overline{\varphi} : \mathcal{F}_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ mediante:

$$a \mapsto \sum_{u\in\mathbb{N}} \psi(a(u))$$

• $\overline{\varphi}$ preserva la unidad. En efecto $\overline{\varphi}(1) = \psi(1) = 1$ ya que $\psi|_S = \mathrm{id}_S$ pues $\psi$ es morfismo de $S$-álgebras.

• $\overline{\varphi}$ preserva sumas. Sean $a_1, a_2$ elementos de $\mathcal{F}_S(M)$ entonces usando la definición de suma en $\mathcal{F}_S(M)$ y el hecho que $\psi$ preserva sumas se tiene que:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(a_1 + a_2) &= \sum_{u\in\mathbb{N}} \psi((a_1 + a_2)(u)) \\ &= \sum_{u\in\mathbb{N}} \psi(a_1(u) + a_2(u)) \\ &= \sum_{u\in\mathbb{N}} (\psi(a_1(u)) + \psi(a_2(u))) \\ &= \sum_{u\in\mathbb{N}} \psi(a_1(u)) + \sum_{u\in\mathbb{N}} \psi(a_2(u)) \\ &= \overline{\varphi}(a_1) + \overline{\varphi}(a_2) \end{aligned}$$

• $\overline{\varphi}$ preserva productos. Sean $a_1, a_2$ elementos de $\mathcal{F}_S(M)$ entonces usando la proposición 3.6 y el hecho que $\psi$ preserva sumas y productos se tiene que:

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}(a_1a_2) &= \sum_{u\in\mathbb{N}} \psi((a_1a_2)(u)) \\
&= \sum_{u\in\mathbb{N}} \psi\left(\sum_{i+j=u} a_1(i)a_2(j)\right) \\
&= \sum_{u\in\mathbb{N}} \sum_{i+j=u} \psi(a_1(i)a_2(j)) \\
&= \sum_{u\in\mathbb{N}} \sum_{i+j=u} \psi(a_1(i))\psi(a_2(j)) \\
&= \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \psi(a_1(i))\right)\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \psi(a_2(j))\right) \\
&= \overline{\varphi}(a_1)\overline{\varphi}(a_2)
\end{aligned}$$

• $\overline{\varphi}$ es una extensión de $\varphi$. Sea $m \in M$ entonces $\overline{\varphi}(m) = \psi(m)$. Como $\psi|_M = \varphi$ entonces $\psi(m) = \varphi(m)$ y por lo tanto $\overline{\varphi}|_M = \varphi$.

• $\overline{\varphi}$ es único. Supongamos que existe otro morfismo $\phi : \mathcal{F}_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ de $S$-álgebras tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{F}_S(M) \arrow[d, "\phi"] \\
& \mathcal{F}_S(M)
\end{tikzcd}$$

Al considerar la restricción de $\phi$ a $T_S(M)$ se obtiene un morfismo $T_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ que fija $S$ y cuya restricción a $M$ coincide con $\varphi$. Como $\psi$ es único entonces $\phi = \psi$ en $T_S(M)$, es decir $\phi$ y $\psi$ coinciden en el álgebra tensorial $T_S(M)$. Sea $a \in \mathcal{F}_S(M)$ entonces $a = \sum_{u\in\mathbb{N}} a(u)$ donde $a(u) \in M^{\otimes u}$. Observe que para cada $u \in \mathbb{N}$ se tiene que $M^{\otimes u} \subseteq T_S(M)$ y así $\phi(a(u)) = \psi(a(u))$. Usando la proposición 3.5 y el lema de la página 20 se sigue que:

$$\begin{aligned}\phi(a) &= \phi\left(\sum_{u\in\mathbb{N}} a(u)\right)\\ &= \sum_{u\in\mathbb{N}} \phi(a(u))\\ &= \sum_{u\in\mathbb{N}} \psi(a(u))\\ &= \overline{\varphi}(a)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi = \overline{\varphi}$ lo que establece la unicidad del morfismo $\overline{\varphi}$. □

Sea $\varphi : \mathcal{F}_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ un morfismo de $S$-álgebras con la propiedad que $\varphi(M) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$. Observe que $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1} = M \bigoplus \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ luego al considerar la restricción de $\varphi$ a $M$ se obtiene un morfismo $\varphi_0 : M \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ de $S$-bimódulos que está completamente determinado por el par de morfismos de $S$-bimódulos: $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ donde:

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)} &: M \longrightarrow M\\ \varphi^{(2)} &: M \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}\end{aligned}$$

**Proposición 3.8**. Supongamos que $\varphi^{(1)} = id_M$ entonces $\varphi$ es un isomorfismo.

*Demostración*:

Definamos $\psi = id_{\mathcal{F}_S(M)} - \varphi$ entonces $\psi$ es un endomorfismo de (S-S)-bimódulos. Veamos que $\psi(M^{\otimes u}) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$.

• Para $u = 0$ hay que verificar que $\psi(S) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$. Sea $s \in S$, entonces como $\varphi|_S = id_S$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\psi(s) &= s - \varphi(s)\\ &= s - s\\ &= 0\end{aligned}$$

el cual es un elemento de $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$. Observe que si $u = 1$ entonces la hipótesis $\varphi^{(1)} = id_M$ implica que:

$$\begin{aligned}\psi(m) &= m - \varphi(m)\\ &= m - \varphi_0(m)\\ &= m - (\varphi^{(1)}(m) + \varphi^{(2)}(m))\\ &= m - m - \varphi^{(2)}(m)\\ &= -\varphi^{(2)}(m)\end{aligned}$$

Por construcción $\varphi^{(2)} : M \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$, luego $\psi(m) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$.

• Para obtener el caso general procedamos por inducción. Supongamos que la afirmación se cumple para $u$ y probemos que se cumple para $u + 1$. Sea $n \otimes m \in M^{\otimes(u+1)} = M^{\otimes u} \otimes M$, entonces:

$$\begin{aligned}\psi(n \otimes m) &= n \otimes m - \varphi(n \otimes m)\\ &= nm - \varphi(n)\varphi(m)\\ &= nm - \varphi(n)m + \varphi(n)m - \varphi(n)\varphi(m)\\ &= (n - \varphi(n))m + \varphi(n)(m - \varphi(m))\\ &= \psi(n)m + \varphi(n)\psi(m)\end{aligned}$$

Note que $n \in M^{\otimes u}$ luego por hipótesis inductiva $\psi(n) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$ y por ende $\psi(n)m \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+2}$ pues $m \in M$. Por otro lado $n \in M^{\otimes u}$ y como $\varphi(M) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$ entonces $\varphi(n) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u}$. Además $\psi(m) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ lo que implica que $\varphi(n)\psi(m) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+2}$. Dado que $\mathcal{F}_S(M)^{\geq u+2}$ es un ideal de $\mathcal{F}_S(M)$ entonces en particular es un subgrupo aditivo, así $\psi(n)m + \varphi(n)\psi(m) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+2}$ lo que completa el argumento inductivo.

Veamos que lo anterior implica que $\psi(\mathcal{F}_S(M)^{\geq u}) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$. En efecto sea $a \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u}$ entonces $a = \sum_{k=0}^{\infty} a(u+k)$ donde $a(u+k) \in M^{\otimes(u+k)}$. Usando la proposición 3.5 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\psi(a) &= a - \varphi(a) \\
&= a - \varphi\left(\sum_{k=0}^{\infty} a(u+k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a(u+k) - \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(a(u+k)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (a(u+k) - \varphi(a(u+k))) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \psi(a(u+k)) \\
&= \psi(a(u)) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(a(u+k))
\end{aligned}$$

Como $a(u) \in M^{\otimes u}$ entonces usando el hecho que $\psi(M^{\otimes u}) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$ se concluye que $\psi(a(u)) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$. Por otro lado note que $\psi(a(u+k)) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+k+1} \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$. Por ser $\mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{F}_S(M)$ y $\psi$ continua entonces la proposición 3.5 implica que $\psi(a) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$.

Supongamos ahora que $a \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u}$ entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $\psi^i(a) \in \mathcal{F}_S(M)^{\geq u+1}$ luego la sucesión de series formales $\{\psi^i(a)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es sumable. Definamos $\rho : \mathcal{F}_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ mediante:

$$a \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i(a)$$

Note que $\rho$ es morfismo de (S,S)-bimódulos pues $\psi^i$ lo es para cada $i \in \mathbb{N}$. Por construcción se tiene que $\psi = id - \varphi$, lo que implica que $\varphi = id - \psi$. Por lo tanto $\varphi\rho = (id - \psi)\rho$. Usando la continuidad de $\psi$ y la proposición 3.5 se tienen las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
(\varphi\rho)(a) &= (id - \psi)(\rho(a)) \\
&= (id - \psi)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi^i(a)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i(a) - \psi\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi^i(a)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i(a) - \sum_{i=0}^{\infty} \psi^{i+1}(a) \\
&= \psi^0(a) \\
&= id(a) \\
&= a
\end{aligned}
$$

Así $\varphi\rho = id_{\mathcal{F}_S(M)}$. Similarmente $\rho\varphi = id_{\mathcal{F}_S(M)}$ y por lo tanto $\varphi$ es un isomorfismo. □

Concluimos este trabajo dando una caracterización de los automorfismos de $\mathcal{F}_S(M)$.

**Proposición 3.9**. Sea $\varphi : \mathcal{F}_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ morfismo de $S$-álgebras tal que $\varphi(M) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$. Denotemos por $\varphi_0$ al par de morfismos $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ definido anteriormente. Entonces $\varphi$ es un automorfismo de $S$-bimódulos si y sólo si $\varphi^{(1)}$ es un isomorfismo de (S-S)-bimódulos.

*Demostración*:

$\Rightarrow$) Supongamos que $\varphi$ es un automorfismo, luego existe $\rho : \mathcal{F}_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$ tal que $\rho\varphi = \varphi\rho = id_{\mathcal{F}_S(M)}$. Como $\varphi|_S = id_S$ entonces $\rho|_S = id_S$ ya que si $s \in S$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\rho(s) &= \rho(id(s)) \\
&= \rho(\varphi(s)) \\
&= (\rho \circ \varphi)(s) \\
&= id_S(s) \\
&= s
\end{aligned}
$$

Lo anterior implica que $\rho(M) \subseteq \mathcal{F}_S(M)^{\geq 1}$, así $\rho = (\rho^{(0)}, \rho^{(1)})$ donde $\rho^{(0)} : M \longrightarrow M$ y $\rho^{(1)} : M \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ son morfismos de (S,S)-bimódulos. Sea $m \in M$, entonces:

$$\begin{aligned}
\rho(m) &= \rho^{(0)}(m) + \rho^{(1)}(m) \\
\varphi(\rho(m)) &= \varphi(\rho^{(0)}(m)) + \varphi(\rho^{(1)}(m)) \\
m &= \varphi(\rho^{(0)}(m)) + \varphi(\rho^{(1)}(m)) \\
&= \varphi^{(1)}(\rho^{(0)}(m)) + \varphi^{(2)}(\rho^{(0)}(m)) + \varphi(\rho^{(1)}(m))
\end{aligned}$$

Note que los últimos dos sumandos del lado derecho son elementos de $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$, luego por unicidad de la suma directa se sigue que $m = \varphi^{(1)}(\rho^{(0)}(m))$. Por otro lado $\varphi(m) = \varphi^{(0)}(m)$, luego:

$$\begin{aligned}
\varphi(m) &= \varphi^{(1)}(m) + \varphi^{(2)}(m) \\
\rho(\varphi(m)) &= \rho(\varphi^{(1)}(m)) + \rho(\varphi^{(2)}(m)) \\
m &= \rho(\varphi^{(1)}(m)) + \rho(\varphi^{(2)}(m)) \\
&= \rho^{(0)}(\varphi^{(1)}(m)) + \rho^{(1)}(\varphi^{(1)}(m)) + \rho(\varphi^{(2)}(m))
\end{aligned}$$

Como $\rho^{(1)}(\varphi^{(1)}(m))$ y $\rho(\varphi^{(2)}(m))$ son elementos de $\mathcal{F}_S(M)^{\geq 2}$ entonces $\rho^{(0)}(\varphi^{(1)}(m)) = m$ y por lo tanto $\varphi^{(1)}$ es un isomorfismo.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\varphi^{(1)}$ es un isomorfismo. Sea $\rho' := (\varphi^{(1)})^{-1} : M \longrightarrow M$. Por 3,7 $\rho'$ induce un morfismo:

$$\rho : \mathcal{F}_S(M) \longrightarrow \mathcal{F}_S(M)$$

con la propiedad que $\rho|_S = id_S$. Note que:

$$\begin{aligned}
(\rho \circ \varphi)(m) &= \rho(\varphi(m)) \\
&= \rho(\varphi^{(0)}(m)) \\
&= \rho(\varphi^{(1)}(m) + \varphi^{(2)}(m)) \\
&= \rho(\varphi^{(1)}(m)) + \rho(\varphi^{(2)}(m)) \\
&= (\varphi^{(1)})^{-1}(\varphi^{(1)}(m)) + \rho(\varphi^{(2)}(m)) \\
&= m + \rho(\varphi^{(2)}(m))
\end{aligned}$$

En consecuencia $\rho \circ \varphi = (id_M, \rho \circ \varphi^{(2)})$ luego la proposición anterior es aplicable y por ello $\varphi$ tiene inverso izquierdo. Un razonamiento similar muestra que $\varphi$ tiene inverso derecho, es decir $\varphi$ es un isomorfismo. □

# Bibliografía

[1] Assem I., Simson D. and Skowronski A., *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, Vol. 1, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[2] Derksen H., Weyman J. and Zelevinsky A., *Quivers with potentials and their representations I: Mutations*, Selecta Mathematica 14 (2008), 59-119.

[3] Enochs E., Jenda O., *Relative Homological Algebra*, Vol. 1, de Gruyter, Berlin 2000.

[4] Jacobson, N., *Basic Algebra II*, Dover Publications, 2009.

[5] Munkres, J., *Topología*, Prentice Hall, Segunda Edición, 2002.

[6] Rotman, J., *Homological Algebra*, Springer, Second Edition, 2008.

[7] Warner, S., *Topological Rings*, North Holland Mathematics Studies, 1993.