Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas "Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

Separación de la ecuación de Dirac para las métricas de Weyl tipo D

Tesis que para obtener el titulo de:

LICENCIADO EN FÍSICO MATEMÁTICAS

presenta:

ESTEFANÍA RUIZ VARGAS

Asesores de tesis:

Dr. Joaquin Estevez Delgado

Dra. Tatjana Vukasinac

Morelia, Mich., Junio 2006

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis vamos a analizar la ecuación de Dirac y su separabilidad. La ecuación de Dirac es una ecuación de onda que nos da una descripción de partículas elementales con spin 1/2, para encontrar dicha ecuacion primero se debe de introduir el concepto de espinor por medio de analizar los grupos O(3), SU(2), SL(2,C) y el grupo de Lorentz, y despues observar el comportamiento de dicho espinor en el caso de un empuje de Lorentz.

Una vez que hemos encontado la ecuacion de Dirac procederemos a ver que forma toma en un espacio-tiempo curvado, para esto introduciremos una serie de formalismos: el formalismo de tetradas, el formalismo de Newman-Penrose y el formalismo de diadas.

Al analizar bajo cuales condiciones se puede separar la ecuacion de Dirac demostraremos que la solución de la ecuación de Dirac se reduce a la determinación de ciertas funciones radiales y angulares que satisfagan ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Mostraremos que para los espacio-tiempos tipo D esta ecuacion es separable y tambien analizaremos la ecuacion en los espacio-tiempos axialmente-simetricos y estaticos, encontrando una clase de ellos que permite la separacion.

Capítulo 2

Espinores y la ecuación de Dirac

Los espinores se introdujeron en la física para representar el espin de partículas subatómicas como el electrón, en las matemáticas los espinores aparecen en el estudio de los grupos de rotaciones. En este capítulo introduciremos el concepto de espinor por medio de analizar los grupos O(3), SU(2), SL(2,C) y el grupo de Lorentz. Despues encontraremos una ecuación de onda que nos da una descripción de partículas elementales con spin 1/2, esta ecuación será la ecuación de Dirac.

2.0.1. Los grupos O(3) y SU(2)

Para introducir el concepto de espinor analizamos los grupos O(3) y SU(2).

Las matrices de rotación ortogonales 3x3 forman un grupo llamado O(3) y las matrices unitarias 2x2 con determinante igual a 1, forman un grupo llamado SU(2).

Las matrices de rotación R al respecto del eje x, y y z son las siguientes:

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\phi & sen\phi \\ 0 & -sen\phi & cos\phi \end{pmatrix}, \quad R_y(\psi) = \begin{pmatrix} cos\psi & 0 & -sen\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ sen\psi & 0 & cos\psi \end{pmatrix},$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta & 0 \\ -sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Los generadores J del grupo de rotaciones están definidos por:

$$J_z = \frac{1}{i}\frac{dR_z(\theta)}{d\theta}|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_x = \frac{1}{i}\frac{dR_x(\phi)}{d\phi}|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_y = \frac{1}{i}\frac{dR_y(\psi)}{d\psi}|_{\psi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Estos generadores cumplen las relaciones de conmutación:

$$[J_x, J_y] = iJ_z \quad \text{y permutaciones cíclicas} \tag{2.3}$$

Donde

$$[J_x, J_y] = J_xJ_y - J_yJ_x \tag{2.4}$$

Una rotación finita alrededor de un eje **n**, por un ángulo θ se denota por

$$R_n(\theta) = e^{i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\theta}, \tag{2.5}$$

donde $\boldsymbol{\theta}$=**n**θ.

Una transformación $\boldsymbol{\xi'} = U\boldsymbol{\xi}$, donde $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ y U es una matriz en SU(2) , equivale a una transformación **x'** $= R$**x**, donde **x** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y R es una matriz de rotación, con la correspondencia:

$$x = \frac{1}{2}(\xi_2^2 - \xi_1^2), \quad y = \frac{1}{2i}(\xi_2^2 + \xi_1^2), \quad z = \xi_1\xi_2,$$

$$U = e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}} \leftrightarrow R = e^{i}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\theta} \tag{2.6}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ son las matrices de Pauli dadas por:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Esta correspondencia entre SU(2) y O(3) implica que los grupos deben de tener una estructura similar, y por lo tanto que sus generadores obedecen las mismas relaciones de conmutación. De hecho se puede ver fácilmente que las matrices de Pauli obedecen:

$$[\frac{\sigma_x}{2}, \frac{\sigma_y}{2}] = i\frac{\sigma_z}{2}$$

Estas son las mismas relaciones que para $\mathbf{J}$, también vemos que los factores $\frac{1}{2}$ en las relaciones de conmutación son los mismos que los que se presentan en la correspondencia entre una matriz de SU(2) y una de O(3), lo que nos muestra que el elemento ξ del espacio 2-dimensional rota por la mitad del ángulo del que rota el vector. Esto es responsable de una distinción topológica global entre SU(2) y O(3) pues al aumentar el ángulo por, digamos, 2π nos da

$$U \leftrightarrow -U, \quad R \leftrightarrow R$$

Así que los elementos U y $-U$ en SU(2) corresponden a la rotación R en O(3): hay un mapeo dos a uno de los elementos de SU(2) en aquellos de O(3).

2.0.2. El grupo SL(2,C) y el grupo de Lorentz

De manera análoga a la correspondencia entre SU(2) y el grupo de rotaciones, hay una correspondencia entre SL(2,C) y el grupo de Lorentz.

La transformación de Lorentz mas general esta compuesta de empujes y rotaciones, al grupo compuesto por estas transformaciones se le llama grupo homogéneo de Lorentz, al grupo que consiste en empujes, rotaciones y traslaciones se le llama grupo inhomogéneo de Lorentz o grupo de Poincaré. Las matrices complejas 2x2 con determinante igual a 1 forman el grupo SL(2,C).

Sean $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ y $\beta = \frac{v}{c}$, observamos que $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$, entonces podemos escribir $\gamma = cosh\phi$, por lo tanto $cosh(\frac{\phi}{2}) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}$, $senh(\frac{\phi}{2}) = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}$.

La matriz de empuje de Lorentz a lo largo del eje x está dada por

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosh\phi & senh\phi & 0 & 0 \\ senh\phi & cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Análogamente podemos encontrar las matrices de empuje de Lorentz a lo largo de los ejes y y z.

Los generadores para los empujes de Lorentz a lo largo del eje x, y y z definidos de manera análoga que para el grupo de rotaciones son:

$$K_x = \frac{1}{i}\frac{\partial B}{\partial \phi}|_{\phi=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_y = \frac{1}{i}\frac{\partial B}{\partial \psi}|_{\psi=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_z = \frac{1}{i}\frac{\partial B}{\partial \theta}|_{\theta=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

En esta notación de matrices de 4×4 podemos escribir los generadores del grupo de rotaciones de la siguiente manera:

$$J_x = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_z = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Denotamos una transformacion de Lorentz por Λ, entonces podemos escribir

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \tag{2.11}$$

.
Si la transformacion de Lorentz consiste en una rotación finita por un ángulo θ y un empuje de Lorentz con parametro ϕ, entonces esa transformacion sera de la forma:

$$\Lambda = e^{i(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\theta}+\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\phi})}, \tag{2.12}$$

Las relaciones de conmutación se pueden calcular explícitamente, y son las siguientes:

$$[K_x, K_y] = -iJ_z \quad \text{y permutaciones cíclicas,}$$

$$[J_i, K_i] = 0, \quad (i = x, y, z),$$

$$[J_x, K_y] = iK_z \quad \text{y permutaciones cíclicas,} \tag{2.13}$$

Definamos los generadores:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K}),$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K}). \tag{2.14}$$

Ahora las relaciones de conmutación anteriores son:

$$[A_x, A_y] = iA_z \quad \text{y permutaciones cíclicas}$$

$$[B_x, B_y] = iB_z \quad \text{y permutaciones cíclicas}$$

$$[A_i, B_j] = 0, \quad (i, j, = x, y, z). \tag{2.15}$$

Esto muestra que **A** y **B** generan cada uno un grupo SU(2) y los dos grupos conmutan.

El grupo de Lorentz es esencialmente $SU(2) \times SU(2)$ y los estados que se transformen en una forma bien definida serán etiquetados por dos momentos angulares $(j, j`)$, el primero correspondiendo a $\mathbf{A}$ y el segundo a $\mathbf{B}$. Como casos especiales tenemos:

$$(j,0) \rightarrow \mathbf{J}^j = i\mathbf{K}^j, \text{ donde } \mathbf{B} = 0$$

$$(0,j) \rightarrow \mathbf{J}^j = -i\mathbf{K}^j, \text{ donde } \mathbf{A} = 0 \tag{2.16}$$

Consideremso ahora un espacio 2-dimensional y definamos los dos tipos de espinores

$$1er \quad tipo: \qquad (\frac{1}{2},0): \ \mathbf{J}^{\frac{1}{2}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad \mathbf{K}^{\frac{1}{2}} = -i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}. \tag{2.17}$$

Denotamos a las componentes de este espinor ξ^A. Si $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})$ son los parámetros de una rotación y una transformación pura de Lorentz, entonces ξ^A se transforman como:

$$\xi^A \rightarrow [e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta}-i\boldsymbol{\phi})}]^A_B \xi^B \equiv \mathbf{M}^A_B \xi^B. \tag{2.18}$$

En el segundo caso tenemos:

$$2ndo \quad tipo: \qquad (0,\frac{1}{2}): \ \mathbf{J}^{\frac{1}{2}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad \mathbf{K}^{\frac{1}{2}} = i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \tag{2.19}$$

Denotamos a las componentes de este espinor $\overline{\eta}_{A'}$ y se transforman como:

$$\overline{\eta}_{A'} \rightarrow [e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta}+i\boldsymbol{\phi})}]^{A'}_{B'} \overline{\eta}_{B'} \equiv \ \mathbf{N}^{A'}_{B'} \overline{\eta}_{B'}, \tag{2.20}$$

notamos que las matrices $\mathbf{N}$ y $\overline{\boldsymbol{M}}$ (que son elementos de SL(2C)) estan relacionadas de la siguiente manera:

$$\mathbf{N} = [e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta}+i\boldsymbol{\phi})}]^{A'}_{B'} = \overline{[e^{\frac{i}{2}\overline{\boldsymbol{\sigma}}\cdot(\boldsymbol{\theta}-i\boldsymbol{\phi})}]^A_B} = \overline{[e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta}-i\boldsymbol{\phi})}]^A_B}^{-1T} = \overline{\boldsymbol{M}}^T, \tag{2.21}$$

donde usamos el hecho de que $\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma^T}$.

La importancia de las representaciones $(\frac{1}{2},0)$ y $(0,\frac{1}{2})$ es debida a que cualquier otra representación finita del álgebra de Lorentz puede ser generada por estas dos representaciones no equivalentes.

Si ahora suponemos que ξ y η son dos espinores del mismo tipo, entonces su determinante

$$\left\| \begin{matrix} \xi^0 & \xi^1 \\ \eta^0 & \eta^1 \end{matrix} \right\| = \xi^0\eta^1 - \xi^1\eta^0 \tag{2.22}$$

es invariante a transformaciones unimodulares. Entonces, podemos definir una métrica antisimétrica ε_{AB} para el espacio tal que $\varepsilon_{AB}\xi^A\eta^B$ es invariante. Tenemos que $\varepsilon_{00} = \varepsilon_{11} = 0$ y $\varepsilon_{01} = -\varepsilon_{10} = 1$ i.e. ε_{AB} es el símbolo 2-dimensional de Levi-Civita. Podemos definir similarmente una métrica $\varepsilon_{A'B'}$ para los espinores primados que será de nuevo el símbolo de Levi-Civita.

Podemos usar las métricas ε_{AB} y $\varepsilon_{A'B'}$ para subir y bajar los índices espinoriales, así como contraer espinores con respecto a un par de índices primados o no primados, de la siguiente manera:

$$\xi_A = \xi^C\varepsilon_{CA}, \tag{2.23}$$

$$\xi^A = \varepsilon^{AC}\xi_C, \tag{2.24}$$

$$\xi_{A'}^{\ \ A'} = \varepsilon^{A'B'}\xi_{A'B'}, \tag{2.25}$$

$$\xi^{B'}_{\ \ B'} = \xi^{A'B'}\varepsilon_{A'B'}, \tag{2.26}$$

Haciendo uso de esto podemos reescribir las reglas de transformación para ambos tipos de espinores:

$$1er \;\; tipo: \qquad \xi_*^A = M_B^A\xi^B, \tag{2.27}$$

$$2ndo \;\; tipo: \qquad \overline{\eta}_*^{A'} = \overline{M}_{B'}^{A'}\overline{\eta}^{B'}. \tag{2.28}$$

Donde (M_B^A) y $(\overline{M}_{B'}^{A'})$ son matrices complejas conjugadas con determinantes unitarios. Esta representación nos garantiza la invariancia de $\xi^A\xi_A$ y $\overline{\eta}^{A'}\overline{\eta}_{A'}$ bajo las transformaciones de $SL(2,C)$

Ahora veremos cual es la relación entre un espinor y un vector, para esto consideremos un punto x^i en un rayo nulo en el espacio-tiempo de Minkowski

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0 \tag{2.29}$$

Ahora representamos el punto x^i en términos de dos números complejos ξ^0 y ξ^1 , de la siguiente forma

$$x^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^0\overline{\xi}^{0'} + \xi^1\overline{\xi}^{1'}), \quad x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^0\overline{\xi}^{1'} + \xi^1\overline{\xi}^{0'})$$

$$x^2 = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\xi^0\overline{\xi}^{1'} - \xi^1\overline{\xi}^{0'}), \quad x^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^0\overline{\xi}^{0'} - \xi^1\overline{\xi}^{1'}), \tag{2.30}$$

donde $\overline{\xi}^{0'}$ es compleja conjugada de ξ^0 y $\overline{\xi}^{1'}$ es compleja conjugada de ξ^1. Dicha representación garantiza que se trata de un punto en un rayo nulo en el espacio-tiempo de Minkowski.
Inversamente:

$$\xi^0\overline{\xi}^{0'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3), \quad \xi^1\overline{\xi}^{0'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 - ix^2)$$

$$\xi^0\overline{\xi}^{1'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + ix^2), \quad \xi^1\overline{\xi}^{1'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3) \tag{2.31}$$

De forma general, podemos asociar a cualquier cuatro vector X^i con un espinor de segundo rango $\xi^{AB'}$, en la siguiente manera

$$X^i \longleftrightarrow \begin{vmatrix} \xi^{00'} & \xi^{01'} \\ \xi^{10'} & \xi^{11'} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} X^0 + X^3 & X^1 + iX^2 \\ X^1 - iX^2 & X^0 - X^3 \end{vmatrix} = X^{AB'}. \tag{2.32}$$

El invariante asociado con el cuatro vector es

$$(X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 = X_{AB'}X^{AB'} \tag{2.33}$$

notamos que el lado izquierdo de esta ecuación será invariante ante transformaciones de Lorentz, mientras que el lado derecho será invariante ante transformaciones de SL(2,C).
O escrito de otra forma

$$g_{ij}X^iX^j = \varepsilon_{AC}\varepsilon_{B'D'}X^{AB'}X^{CD'} \tag{2.34}$$

La relación $X^i \longleftrightarrow X^{AB'}$ se puede expresar de la forma

$$X^i = \sigma^i{}_{AB'} X^{AB'} \tag{2.35}$$

donde $\sigma^i{}_{AB'}$ son matrices Hermitianas constantes

De forma explicita:

$$\sigma^0{}_{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma^1{}_{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\sigma^2{}_{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^3{}_{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.36}$$

Aparte del factor de normalización $\frac{1}{\sqrt{2}}$ estas matrices son las matrices de spin de Pauli.

Ahora podemos relacionar tensores de rangos arbitrarios con sus equivalentes de espinor, por ejemplo

$$Y^{ij}_k = \sigma^i{}_{AB'} \sigma^j{}_{CD'} \sigma_k{}^{EF'} Y^{AB'CD'}_{EF'} \tag{2.37}$$
$$Y^{AB'CD'}_{EF'} = \sigma^{AB'}_i \sigma^{CD'}_j \sigma^k{}_{EF'} Y^{ij}_k \tag{2.38}$$

2.0.3. Ecuación de Dirac

Consideremos la transformación en caso de un empuje de Lorentz, y supongamos que el espinor original se refiere a una partícula en reposo, $\xi(0)$, y el transformado a una partícula con momento $\mathbf{p}$, $\xi(\mathbf{p})$.

En el caso de un empuje de Lorentz ($\theta = 0$), el espinor ξ^A se transforma de la siguiente manera

$$\xi \to e^{(\frac{\sigma}{2} \cdot \phi)} \xi = [cosh(\frac{\phi}{2}) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} senh(\frac{\phi}{2})]\xi, \tag{2.39}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario en la dirección del empuje de Lorentz.

Recordando la definición de γ dada anteriormente esta transformación se puede escribir como:

$$\xi(\mathbf{p}) = [\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\cdot}\hat{\mathbf{p}}\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}]\xi(0) \tag{2.40}$$

Como, para una partícula con energía total E, masa m y momento $\mathbf{p}$, $E^2 = m^2c^4 + \boldsymbol{p^2}c^2$, la ecuación anterior se vuelve (con $c = 1$):

$$\xi(\mathbf{p}) = \frac{E + m + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\cdot}\mathbf{p}}{\sqrt{2m(E+m)}}\xi(0) \tag{2.41}$$

Similarmente encontramos:

$$\overline{\eta}(\mathbf{p}) = \frac{E + m - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\cdot}\mathbf{p}}{\sqrt{2m(E+m)}}\overline{\eta}(0) \tag{2.42}$$

Notamos que cuando una partícula esta en reposo, $\xi(0) = \eta(0)$, de donde se sigue que:

$$\xi(\mathbf{p}) = \frac{E + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\cdot}\mathbf{p}}{\sqrt{m}}\overline{\eta}(\mathbf{p})$$

y

$$\overline{\eta}(\mathbf{p}) = \frac{E - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\cdot}\mathbf{p}}{\sqrt{m}}\xi(\mathbf{p}) \tag{2.43}$$

Podemos reescribir estas ecuaciones como:

$$\begin{aligned} -m\xi(\mathbf{p}) + (p_0\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\cdot}\mathbf{p})\overline{\eta}(\mathbf{p}) &= 0 \\ (p_0\mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\cdot}\mathbf{p})\xi(\mathbf{p}) - m\overline{\eta}(\mathbf{p}) &= 0 \end{aligned} \tag{2.44}$$

que son conocidas como la ecuación de Dirac en el espacio de momentos, podemos encontrar estas ecuaciones en el espacio de posiciones por medio de una transformación de Fourier dada por:

$$\Xi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\xi(x)e^{ipx}dx,$$

donde $\Xi(p)$ es la transformada de Fourier de $\xi(x)$, de donde se deduce que la transformada inversa de Forier de $\Xi(p)$ será :

$$\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Xi(p)e^{-ipx}dp.$$

Notamos que al aplicar la dicha transformada:

$$(p_0\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\overline{\eta}(\mathbf{p}) \to -i(\partial_0 + \sigma^\alpha\partial_\alpha)\eta^A(x) = -i\sigma^j\partial_j\eta^A(x),$$

$$-m\xi(\mathbf{p}) \to -im\overline{\xi}_{B'}(x), \tag{2.45}$$

entonces aplicando la transformada de Fourier a las ecuaciones (2.44) nos queda:

$$\begin{aligned} im\overline{\xi}_{B'}(x) + \sigma^i{}_{AB'}\partial_i\eta^A(x) = 0 \\ im\eta_{B'}(x) + \sigma^i{}_{AB'}\partial_i\xi^A(x) = 0 \end{aligned} \tag{2.46}$$

La ecuación de Dirac es una ecuación de onda que nos da una descripción de partículas elementales de spin $\frac{1}{2}$, como los electrones, consistente con los principios de mecánica cuántica y la teoría especial de la relatividad.

Capítulo 3

Ecuación de Dirac en un espacio-tiempo curvado

En este capitulo veremos la forma que toma la ecuacion de Dirac en un espacio-tiempo curvado, para esto tendremos que introducir los siguientes formalismos: el formalismo de tetradas, que nos ayudara a escribir una nueva base para vectores, el formalismo de Newman-Penrose, que sera un caso especial del formalismo de tetradas, y el formalismo de diadas, que nos ayudara a escribir una base para espinores.

3.0.4. Formalismo de tetradas

La forma estándar de tratar problemas en la teoría general de relatividad es considerar las ecuaciones de Einstein en una base local de coordenadas. Pero en algunos casos parece ser mas ventajoso escoger una base de tetradas apropiada de cuatro campos de vectores linealmente independientes, proyectando las cantidades relevantes a la base escogida y considerando las ecuaciones que se satisfacen por ellas.

En cada punto del espacio-tiempo ponemos una base de cuatro vectores contravariantes ${e_{(a)}}^{i}$ con $a = 0, 1, 2, 3$. Asociado a los vectores contravariantes tenemos los vectores covariantes $e_{(a)i} = g_{ik}{e_{(a)}}^{k}$.

Definimos el inverso, ${e^{(b)}}_{i}$, de ${e_{(a)}}^{i}$, y asumimos que:

$$
{e_{(a)}}^{i} e_{(b)i} = \eta_{(a)(b)}, \tag{3.1}
$$

donde $\eta_{(a)(b)}$ es una matriz constante.

Como consecuencia de las definiciones anteriores llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$\eta^{(a)(b)}e_{(a)i} = e^{(b)}{}_{i},$$
$$\eta_{(a)(b)}e^{(a)}{}_{i} = e_{(b)i}. \tag{3.2}$$

Dado cualquier campo vectorial o tensorial, lo proyectamos al marco de tetradas para obtener sus componentes de tetradas. Entonces, en general:

$$T_{(a)(b)} = e_{(a)}{}^{i}e_{(b)}{}^{j}T_{ij} = e_{(a)}{}^{i}T_{i(b)},$$
$$T_{ij} = e^{(a)}{}_{i}e^{(b)}{}_{j}T_{(a)(b)} = e^{(a)}{}_{i}T_{(a)j}. \tag{3.3}$$

Los vectores contravariantes $\boldsymbol{e_{(a)}}$, considerados como vectores tangentes definen las derivadas direccionales

$$\boldsymbol{e_{(a)}} = e_{(a)}{}^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}}, \tag{3.4}$$

escribiremos

$$\Phi_{,(a)} = e_{(a)}{}^{i}\frac{\partial \Phi}{\partial x^{i}} = e_{(a)}{}^{i}\Phi_{,i}. \tag{3.5}$$

Recordando que la derivada covariante para un tensor arbitrario está dada por:

$$A^{\rho_1,\ldots,\rho_r}{}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_s;k} = \frac{\partial}{\partial x^k}A^{\rho_1,\ldots,\rho_r}{}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_s} + \sum_{a=1}^{r}\Gamma^{\rho_a}{}_{\mu k}A^{\rho_1,..\rho_{a-1},\mu,\rho_{a+1}..,\rho_r}{}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_s}$$
$$-\sum_{b=1}^{s}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma_b k}A^{\rho_1,\ldots,\rho_r}{}_{\sigma_1,..\sigma_{b-1},\mu,\sigma_{b+1}..,\sigma_s} \tag{3.6}$$

Podemos definir de manera mas general la derivada direccional

$$A_{(a),(b)} = e_{(b)}{}^{i}[e_{(a)}{}^{j}A_{j;i} + A_k e_{(a)}{}^{k}{}_{;j}]. \tag{3.7}$$

Ahora definiendo los coeficientes de rotación de Ricci:

$$\gamma_{(c)(a)(b)} = e_{(c)}{}^{k}e_{(a)k;i}e_{(b)}{}^{i}, \tag{3.8}$$

obtenemos la siguiente ecuación:

$$A_{(a)|(b)} = A_{(a),(b)} - \eta^{(n)(m)}\gamma_{(n)(a)(b)}A_{(m)}, \tag{3.9}$$

con

$$A_{(a)|(b)} = e_{(a)}^{\ \ i} A_{i;j} e_{(b)}^{\ \ j} \tag{3.10}$$

Donde $A_{(a)|(b)}$ es llamada la derivada intrínseca de $A_{(a)}$ en la dirección $e_{(b)}$. La derivada intrínseca es simplemente la proyección de la derivada covariante a la base de tetradas.
Entonces tenemos una formula que relaciona las derivadas direccionales y las intrínsecas.

3.0.5. Formalismo de Newman-Penrose

El formalismo de Newman-Penrose es un formalismo de tetradas con una elección especial de los vectores base. Elegimos una tetrada de vectores nulos $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{m}$ y $\overline{\boldsymbol{m}}$, donde $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{n}$ son reales y $\boldsymbol{m}$ y $\overline{\boldsymbol{m}}$ son conjugados complejos uno del otro.

Los vectores base deben de satisfacer condiciones de ortogonalidad

$$\mathbf{l}\cdot\mathbf{m} = \mathbf{l}\cdot\overline{\boldsymbol{m}} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{m} = \mathbf{n}\cdot\overline{\boldsymbol{m}} = 0. \tag{3.11}$$

Además de los requerimientos

$$\mathbf{l}\cdot\mathbf{l} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = \overline{\boldsymbol{m}}\cdot\overline{\boldsymbol{m}} = 0, \tag{3.12}$$

de que los vectores sean nulos, se debe de imponer en los vectores base condiciones de normalización

$$\mathbf{l}\cdot\mathbf{n} = 1\ , \quad \mathbf{m}\cdot\overline{\boldsymbol{m}} = 1. \tag{3.13}$$

Entonces la matriz fundamental, $\eta_{(a)(b)}$, es una matriz simétrica constante de la forma

$$[\eta_{(a)(b)}] = [\eta^{(a)(b)}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

Con la correspondencia

$$\boldsymbol{e_1} = \mathbf{l}, \quad \boldsymbol{e_2} = \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{e_3} = \mathbf{m}, \quad \boldsymbol{e_4} = \overline{\boldsymbol{m}} \tag{3.15}$$

La base covariante está dada por

$$\boldsymbol{e^1} = \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{e^2} = \mathbf{l}, \quad \boldsymbol{e^3} = -\overline{\boldsymbol{m}}, \quad \boldsymbol{e^4} = -\mathbf{m} \tag{3.16}$$

Los varios coeficientes de rotación de Ricci, ahora llamados coeficientes de spin, son designados con símbolos especiales:

$$\begin{aligned}
\kappa &= \gamma_{311}; \quad \rho = \gamma_{314}; \quad \epsilon = \frac{1}{2}(\gamma_{211} + \gamma_{341}),\\
\sigma &= \gamma_{313}; \quad \mu = \gamma_{243}; \quad \gamma = \frac{1}{2}(\gamma_{212} + \gamma_{342}),\\
\lambda &= \gamma_{244}; \quad \tau = \gamma_{312}; \quad \alpha = \frac{1}{2}(\gamma_{214} + \gamma_{344}),\\
\nu &= \gamma_{242}; \quad \pi = \gamma_{241}; \quad \beta = \frac{1}{2}(\gamma_{213} + \gamma_{343}).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

El complejo conjugado de cualquier cantidad se puede obtener reemplazando el índice 3, donde aparezca, por el índice 4, y viceversa.

Como un ejemplo podemos describir el espacio-tiempo de Schwarzschild en un formalismo de Newman-Penrose de la siguiente forma: los vectores tangentes asociados a las geodesicas radiales nulas son [4]

$$\frac{dt}{d\tau} = E(1 - \frac{2M}{r})^{-1}, \quad \frac{dr}{d\tau} = \pm E, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} = 0. \tag{3.18}$$

Para los vectores nulos reales $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{n}$ del formalismo de Newman-Penrose tomamos

$$\begin{aligned}
l^i &= (l^t, l^r, l^\theta, l^\varphi) = \frac{1}{\Delta}(r^2, \Delta, 0, 0),\\
n^i &= (n^t, n^r, n^\theta, n^\varphi) = \frac{1}{2r^2}(r^2, -\Delta, 0, 0),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

donde $\Delta = r^2 - 2Mr$,y completamos la base de tetradas con el vector nulo complejo

$$m^i = (m^t, m^r, m^\theta, m^\varphi) = \frac{1}{r\sqrt{2}}(0, 0, -r^2, -ir^2 sen\theta). \tag{3.20}$$

3.0.6. Formalismo de diadas

Como el espacio tiempo en relatividad general es localmente de Minkowski, podemos poner, en cada punto del espacio tiempo una base de diadas ortonormal $\zeta_{(a)}^{A}$ y $\zeta_{(a')}^{A'}$ con $a = 0, 1$, para espinores así como ponemos una base de tetradas ortonormal para vectores.

Ahora proyectemos las matrices originales ${\sigma^i}_{AB'}$ a la base de diadas.

$$ {\sigma^i}_{(a)(b)} = {\sigma^i}_{AB'}\zeta_{(a)}^{A}\zeta_{(b')}^{B'} \tag{3.21} $$

Los espinores ξ_a^A y $\xi_{a'}^{A'}$ y sus complejos conjugados determinan a los vectores nulos $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{m}$ y $\overline{\boldsymbol{m}}$ de la siguiente manera:

$$ \begin{aligned} l^i &= {\sigma^i}_{AB'}\zeta_{(0)}^{A}\zeta_{(0)}^{B'} \equiv {\sigma^i}_{(0)(0)}, \\ m^i &= {\sigma^i}_{AB'}\zeta_{(0)}^{A}\zeta_{(1)}^{B'} \equiv {\sigma^i}_{(0)(1)}, \\ \overline{m}^i &= {\sigma^i}_{AB'}\zeta_{(1)}^{A}\zeta_{(0)}^{B'} =\equiv {\sigma^i}_{(1)(0)}, \\ n^i &= {\sigma^i}_{AB'}\zeta_{(1)}^{A}\zeta_{(1)}^{B'} =\equiv {\sigma^i}_{(1)(1)}. \end{aligned} \tag{3.22} $$

Esta representación da las siguientes matrices hermitianas:

$$ \begin{aligned} {\sigma^i}_{(a)(b)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} l^i & m^i \\ \overline{m}^i & n^i \end{bmatrix}, \\ \sigma_i^{(a)(b)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} n_i & -\overline{m}_i \\ -m_i & l_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.23} $$

Estos cuatro vectores nulos $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{m}$ y $\overline{\boldsymbol{m}}$ pueden ser usados como una base para el formalismo de Newman-Penrose.

Asociado con las derivadas direccionales del formalismo de Newman-Penrose

$$ D = {\sigma^i}_{00'} l^i \partial_i, \quad \Delta = n^i\partial_i, \quad \delta = m^i\partial_i, \quad \overline{\delta} = \overline{m}^i\partial_i, \tag{3.24} $$

tenemos los equivalentes de espinor

$$ \begin{aligned} &\partial_{00'} = {\sigma^i}_{00'}\partial_i = l^i\partial_i = D, \quad \partial_{11'} = {\sigma^i}_{11'}\partial_i = n^i\partial_i = \Delta, \\ &\partial_{01'} = {\sigma^i}_{01'}\partial_i = m^i\partial_i = \delta, \quad \partial_{10'} = {\sigma^i}_{10'}\partial_i = \overline{m}^i\partial_i = \overline{\delta} \end{aligned} \tag{3.25} $$

Ahora proyectemos la derivada covariante a nuestra nueva base, así como lo hicimos en el formalismo de tetradas. De ahí que definimos la derivada intrínseca como sigue:

$$\xi_{(c)|(a)(b')} = \zeta_c{}^C \xi_{C;AB'} \zeta_a{}^A \zeta_{b'}{}^{B'}, \tag{3.26}$$

y los coeficientes de spin, definidos por,

$$\Gamma_{(a)(b)(c)(d')} = [\zeta_{(a)F}]_{;CD'} \zeta_b{}^F \zeta_c{}^C \zeta_{d'}{}^{D'}. \tag{3.27}$$

se puede probar que los coeficientes de spin también se pueden escribir de la siguiente forma

$$\Gamma_{(a)(b)CD'} = \frac{1}{2} \varepsilon^{(k')(f')} \zeta_{(a)}^{E} \overline{\zeta}_{(f')}^{F'} [\zeta_{(b)E} \overline{\zeta}_{(k')F'}]_{;CD'} \tag{3.28}$$

este es el Lema de Friedman.[4]

Esta definición de los coeficientes de spin esta de acuerdo con la definicin de dichos coeficientes en términos de los coeficientes de rotación de Ricci, lo cual se puede verificar usando el lema de Friedman y escribiendo los coeficientes de spin en términos de las derivadas covariantes de los vectores base $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{m}$ y $\overline{\boldsymbol{m}}$, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1101'} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{(k')(f')} \zeta_1{}^E \overline{\zeta}_{(f')}^{F'} [\zeta_{1E} \overline{\zeta}_{(k')F'}]_{;01'} \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon^{(k')(f')} [\zeta_1{}^E \overline{\zeta}_{(f')}^{F'} \zeta_{1E} (\overline{\zeta}_{(k')F'})_{;01'} + \zeta_1{}^E \overline{\zeta}_{(f')}^{F'} \zeta_{(k')F'} (\overline{\zeta}_{1E})_{;01'}] \\
&= \frac{1}{2} [\zeta_1{}^E \overline{\zeta}_1{}^{F'} (\zeta_{1E} \overline{\zeta}_{0F'})_{;01'} - \zeta_1{}^E \overline{\zeta}_0{}^{F'} (\zeta_{1E} \overline{\zeta}_{1F'})_{;01'}] \\
&= \frac{1}{2} [n^j m^i \overline{m}_{j;i} - \overline{m}^j m^i n_{j;i}] = \frac{1}{2} (\gamma_{243} - \gamma_{423}) = \gamma_{243} = \mu
\end{aligned} \tag{3.29}$$

se puede hacer hacer lo mismo para verificar el resto de los coeficientes.

Debido a la simetría de los coeficientes de spin en el primer par de índices, debemos de especificar 12 coeficientes que definimos con anterioridad. En el formalismo de Newman-Penrose a estos coeficientes se les asignan símbolos especiales

$\frac{\text{(a)(b)}}{\text{(c)(d')}}$	00	01 o 10	11
00'	κ	ε	π
10'	ρ	α	λ
01'	σ	β	μ
11'	τ	γ	ν

(3.30)

3.0.7. Ecuación de Dirac en un espacio-tiempo curvado

Como se menciono anteriormente, en la teoría relativista de partículas de spin $\frac{1}{2}$, la función de onda está representada por un par de espinores ξ y η que satisfacen la ecuación de Dirac (2.46).

Para obtener estas ecuaciones en el formalismo de Newman-Penrose en un espacio-tiempo curvado, reemplazamos las derivadas ordinarias por las derivadas covariantes y proyectamos las ecuaciones a una base de diadas. Tomemos la primera ecuación:

$$\zeta^{B'}_{(b')}\sigma^{i}{}_{AB'}\xi^{A}{}_{;i} + im\zeta^{B'}_{(b')}\overline{\eta}_{B'} = \zeta^{B'}_{(b')}(\xi^{(a)}\zeta^{A}_{(a)})\ _{;AB'} + im\overline{\eta}_{(b')}$$

$$= \zeta^{B'}_{(b')}(\xi^{(a)}{}_{;AB'}\zeta^{A}_{(a)} + \xi^{(a)}\zeta^{A}_{(a);AB'}) + im\overline{\eta}_{(b')}$$

$$= \zeta^{B'}_{(b')}(\xi^{(a)}{}_{,AB'}\zeta^{A}_{(a)} + \xi^{(a)}\zeta^{A}_{(c)}\Gamma^{(c)}_{(a)AB'}) + im\overline{\eta}_{(b')}$$

$$= \sigma^{i}{}_{(a)(b')}\xi^{(a)}{}_{,i} + \xi^{(a)}\Gamma^{(c)}_{(a)(c)(b')} - im\overline{\eta}_{(b')} = 0 \qquad (3.31)$$

Tratamos de manera similar la segunda ecuación, y podemos escribir explícitamente estas ecuaciones en términos de los coeficientes de espin que definimos, tenemos dos ecuaciones distintas para los dos valores que puede tomar $b' = 0, 1$:

$$(\partial_{00'}\xi^{0} + \Gamma^{0}_{b00'}\xi^{b}) + (\partial_{10'}\xi^{1} + \Gamma^{1}_{b10'}\xi^{b}) - im\overline{\eta}^{1'} = 0 \qquad (3.32)$$

$$(\partial_{11'}\xi^{1} + \Gamma^{1}_{b01'}\xi^{b}) + (\partial_{01'}\xi^{0} + \Gamma^{0}_{b11'}\xi^{b}) - im\overline{\eta}^{0'} = 0 \qquad (3.33)$$

o mas explícitamente:

$$(D + \Gamma_{1000'} - \Gamma_{0010'})\xi^0 + (\overline{\delta} + \Gamma_{1100'} - \Gamma_{0110'})\xi^1 - im\overline{\eta}^{1'} = 0$$
$$(\Delta + \Gamma_{1101'} - \Gamma_{0111'})\xi^1 + (\delta + \Gamma_{0101'} - \Gamma_{0011'})\xi^0 + im\overline{\eta}^{0'} = 0 \qquad (3.34)$$

Sustituyendo los coeficientes de spin:

$$(D + \varepsilon - \rho)\xi^0 + (\overline{\delta} + \pi - \alpha)\xi^1 = im\overline{\eta}^{1'}$$

$$(\Delta + \mu - \gamma)\xi^1 + (\delta + \beta - \tau)\xi^0 = -im\overline{\eta}^{0'} \qquad (3.35)$$

La segunda ecuación de Dirac nos da las mismas ecuaciones pero con ξ y η intercambiados, es conveniente considerar el complejo conjugado de dicha ecuación y definir:

$$F_1 = \xi^0, F_2 = \xi^1, G_1 = \overline{\eta}^{1'}, G_2 = -\overline{\eta}^{0'} \qquad (3.36)$$

Las ecuaciones que resultan son:

$$(D + \varepsilon - \rho)F_1 + (\overline{\delta} + \pi - \alpha)F_2 = imG_1$$

$$(\Delta + \mu - \gamma)F_2 + (\delta + \beta - \tau)F_1 = imG_2$$
$$(D + \overline{\varepsilon} - \overline{\rho})G_2 - (\delta + \overline{\pi} - \overline{\alpha})G_1 = imF_2$$
$$(\Delta + \overline{\mu} - \overline{\gamma})G_1 + (\overline{\delta} + \overline{\beta} - \overline{\tau})G_2 = imF_1 \qquad (3.37)$$

Estas son las ecuaciones de Dirac en el formalismo de Newman-Penrose.

Capítulo 4

Separación de la ecuación de Dirac

A continuación nos interesa analizar bajo cuales condiciones se puede separar el sistema de ecuaciones 3.37. Demostraremos que en este caso la solución de la ecuación de Dirac se reduce a la determinación de ciertas funciones radiales y angulares que satisfagan ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Vamos a mostrar como se pueden separar en los espacios-tiempos tipo D, al hacer una elección adecuada de tetradas y de coordenadas, y luego analizaremos el caso de las métricas de Weyl.

4.0.8. Espacios-tiempos tipo D

Los espacios-tiempos tipo D son una clase particularmente interesante para estudiar, por ejemplo las métricas de Kerr y de Schwarzschild pertenecen a esta clase.

Como se menciona en el apéndice 1, en los espacios-tiempos tipo D siempre se pueden elegir los vectores base $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{n}$ sobre las direcciones principales nulas repetidas del tensor de Weyl, así que:

$$
\begin{aligned}
\sigma = \lambda = \kappa = \nu = 0 \\
\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0 \\
\Psi \equiv \Psi_2 \neq 0
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Entonces de los 12 coeficientes de spin, 4 se pueden anular usando rotaciones en el espacio de tetradas. De los 5 escalares de Weyl (los cuales son funciones complejas que caracterizan completamente el tensor de Weyl, vease apéndice 1) solo uno es distinto de cero.

Todos los espacios-tiempo tipo D están clasificados por Kinnersley [1]. En este articulo se analizan y clasifican los espacios tiempos de tipo D. El punto de partida es la elección de tetradas a lo largo de las direcciones nulas principales. Se eligen las coordenadas en la manera que $l^i = \delta^i_1$, con $x^1 = r$, el parámetro afín a lo largo de l^i. Bajo estas suposiciones se buscan las soluciones de las ecuaciones de Einstein y las identidades de Bianchi en vacío, en el formalismo de Newman-Penrose (vease apéndice 2). La parte radial de las ecuaciones para ρ y π tiene la forma

$$\begin{aligned} D\rho &= \rho^2 \\ D\pi &= 2\bar{\tau}^0\rho^3 \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $D = l^i\partial_i = \partial_r$ y $\bar{\tau}^0$ es una constante independiente de r. La solución de las ecuaciones es

$$\begin{aligned} \rho &= -(r + i\rho^0)^{-1} \\ \pi &= \pi^0 + \bar{\tau}^0\rho^2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde ρ^0 y π^0 son dos constantes independientes de r, con ρ^0 real. Las métricas para las cuales $\rho \neq 0$ Kinnersley ha clasificado en tres tipos:

1. Tipo I: $\pi^0 = \tau^0 = 0$
2. Tipo II: $\pi^0 = 0\ ,\ \tau^0 \neq 0$
3. Tipo III: $\pi^0 \neq 0$

El tipo IV en su clasificación corresponde a $\rho = 0$. Cada uno de los tipos tiene sus ramificaciones, dependiendo de los valores de los demás parámetros que aparecen durante la integración de las ecuaciones.

Notamos que la única transformación de coordenadas que no cambia las direcciones nulas principales es la rotación tipo III, que transforma ρ a $A^{-1}\rho$. Por lo tanto si una métrica es de una clase dada, lo seguirá siendo bajo cualquier rotación.

Al analizar las perturbaciones de un espacio-tiempo vacío tipo Kinnersley II [2] se encuentra que la elección de tetradas y coordenadas que permiten la separación de las ecuaciones son las siguientes: Se introducen las coordenadas (u, r, x, y), donde

$$\begin{aligned} r &= -\frac{1}{2}(\rho^{-1} + \bar{\rho}^{-1}) \\ x &= \frac{i}{2}(\bar{\rho}^{-1} - \rho^{-1}) \end{aligned} \tag{4.4}$$

por lo cual $\rho = -(r - ix)^{-1}$. La elección de las demás coordenadas x y y es equivalente a la elección de los componentes de las tetradas n^A y m^A, $A = 0, 3$. Se muestra que las tetradas se pueden elegir en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} l^i &= (0, 1, 0, 0) \\ n^i &= (2\rho\bar{\rho}(\Re f - \Re f')/x, \rho^0 - \Re(\rho\psi^0) - \rho\bar{\rho}\tau^0\bar{\tau}^0, 0, 2\rho\bar{\rho}(\Re g - \Re g')/x) \\ m^i &= \bar{\rho}(f/\bar{\tau}^0, 0, i\tau^0, g/\bar{\tau}^0) \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde ρ^0 es una constante real, ψ^0 es una constante compleja, τ^0 es una constante puramente imaginaria, $\Re$ denota la parte real de la función a la que se le aplica, y

$$f(x) = c_1 x^2 + d_1 \quad g(x) = c_2 x^2 + d_2 \tag{4.6}$$

con c_1, c_2, d_1, d_2 constantes complejas arbitrarias.

Con el propósito de separar la ecuación de Dirac se ha demostrado [3] que es conveniente adoptar un sistema de coordenadas (t, r, x, ϕ) donde

$$\rho = -(r - ix)^{-1}, \quad \Psi = (M - il)\rho^3 \tag{4.7}$$

con M y l constantes reales.

Estas coordenadas están relacionadas en la siguiente manera con las coordenadas de Stewart-Walker

$$\begin{aligned} t &= u - \frac{1}{2}\int \frac{r^2 + c}{K(r)} dr \\ \phi &= y - \frac{a}{2}\int \frac{dr}{K(r)} \end{aligned} \tag{4.8}$$

para a,b y c constantes reales, eligiendo

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{c}{2} \quad g(x) = \frac{a}{2} \tag{4.9}$$

donde las funciones K y $|\tau^o|$ se pueden escribir como

$$K = -\mu^0 r^2 + Mr + (b + l^2/4)/\mu^0,$$
$$|\tau^o|^2 = -(b + V^2(x))/\mu^0$$
$$V^2(x) = l/2 + \mu^0 x, \quad (-\mu^0 = \pm\frac{1}{2}, 0) \tag{4.10}$$

En este sistema de coordenadas los vectores de tetradas nulos tienen las siguientes componentes

$$l^a = [-\frac{1}{2}(r^2 + c)/K, 1, 0, -\frac{1}{2}a/K],$$
$$n^a = \rho\overline{\rho}[\frac{1}{2}(r^2 + c), K, 0, \frac{1}{2}a],$$
$$m^a = \overline{\rho}[i(x^2 - c)/2|\tau^o|, 0, |\tau^o|, -ia/2|\tau^o|], \tag{4.11}$$

Los coeficientes de spin distintos de cero son:

$$\tau = -i\rho\overline{\rho}|\tau^o|, \quad \pi = i\rho^2|\tau^o|, \quad \mu = -\rho^2\overline{\rho}K,$$
$$\gamma = \mu - \frac{1}{2}(\frac{dK}{dr})\rho\overline{\rho}, \quad \beta = -\overline{\rho}\frac{V(x)}{2|\tau^o|}, \quad \alpha = -(\overline{\beta} - \pi) \tag{4.12}$$

Por ejemplo para el espacio-tiempo de Kerr tenemos:

$$l = 0, \quad \mu^0 = -\frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{4}a^2, \quad c = a^2, \quad x = acos\theta \tag{4.13}$$

entonces las tetradas se reducen a las tetradas de Kinnersely para dicho espacio-tiempo.

Para el espacio-tiempo de Schwarzchild simplemente tomamos $a = 0$ en las condiciones para el espacio-tiempo de Kerr.

Volviendo a la ecuación de Dirac, ahora introducimos nuevas variables y operadores a través de las siguientes relaciones:

$$F_1 = -\rho\widetilde{f_1}, \quad F_2 = -i\widetilde{f_2}, \quad G_1 = \widetilde{g}_1, \quad G_2 = i\overline{\rho}\widetilde{g}_2 \tag{4.14}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_n &= \partial_r - \frac{1}{2K}[(r^2+c)\partial_t + a\partial_\phi] + \frac{n}{K}\frac{dK}{dr} \\
\mathcal{D}_n^\dagger &= \partial_r + \frac{1}{2K}[(r^2+c)\partial_t + a\partial_\phi] + \frac{n}{K}\frac{dK}{dr} \\
\mathcal{L}_s^\dagger &= -|\tau^o|\partial_x + \frac{i}{2|\tau^o|}[(c-x^2)\partial_t + a\partial_\phi] - \frac{sV(x)}{|\tau^o|} \\
\mathcal{L}_s &= -|\tau^o|\partial_x - \frac{i}{2|\tau^o|}[(c-x^2)\partial_t + a\partial_\phi] - \frac{sV(x)}{|\tau^o|}
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

Para la separación de la ecuación de Dirac, comenzamos asumiendo una dependencia de la forma $e^{i(\sigma t+k\phi)}$para las cuatro componentes de la función de onda, donde σ es una constante positiva arbitraria, k es otra constante y t y ϕ son las coordenadas a lo largo de las direcciones de Killing.

Denotemos

$$
\widetilde{f_1} = e^{i(\sigma t+k\phi)} f_1, \quad \widetilde{f_2} = e^{i(\sigma t+k\phi)} f_2, \quad \widetilde{g_1} = e^{i(\sigma t+k\phi)} g_1, \quad \widetilde{g_2} = e^{i(\sigma t+k\phi)} g_2,
$$

y notemos que $\partial_t \to i\sigma$ y $\partial_\phi \to ik$.

En términos de las nuevas variables la ecuación de Dirac se vuelve:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_0 f_1 + \mathcal{L}_{\frac{1}{2}} f_2 &= m(ir+x)g_1 \\
K\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}^\dagger f_2 + \mathcal{L}_{-\frac{1}{2}}^\dagger f_1 &= m(ir+x)g_2 \\
\mathcal{D}_0 g_2 - \mathcal{L}_{-\frac{1}{2}}^\dagger g_1 &= m(ir-x)f_2 \\
K\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}^\dagger g_1 - \mathcal{L}_{\frac{1}{2}} g_2 &= m(ir-x)f_1
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

Las variables en la ecuación de Dirac son ahora manifiestamente separables pues los operadores $\mathcal{D}_n$ y $\mathcal{D}_n^\dagger$ dependen solamente de r, y $\mathcal{L}_s$ y $\mathcal{L}_s^\dagger$ dependen solo de x.

Sean

$$
f_1 = R_{-\frac{1}{2}} S_{-\frac{1}{2}}, \quad f_2 = R_{\frac{1}{2}} S_{\frac{1}{2}}, \quad g_1 = R_{\frac{1}{2}} S_{-\frac{1}{2}}, \quad g_2 = R_{-\frac{1}{2}} S_{\frac{1}{2}}, \tag{4.17}
$$

donde R y S son funciones, respectivamente, de r y x solamente, haciendo las sustituciones correspondiente llegamos a la siguiente forma de la ecuación:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_0 R_{-\frac{1}{2}} &= (\lambda + imr) R_{\frac{1}{2}} \\
K\mathcal{D}^\dagger_{\frac{1}{2}} R_{\frac{1}{2}} &= (\lambda - imr) R_{-\frac{1}{2}} \\
\mathcal{L}_{\frac{1}{2}} S_{\frac{1}{2}} &= -(\lambda - mx) S_{-\frac{1}{2}} \\
\mathcal{L}^\dagger_{-\frac{1}{2}} S_{-\frac{1}{2}} &= (\lambda + mx) S_{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

donde λ es la constante de separación real.

Notamos que después de reemplazar $\partial_t \rightarrow i\sigma$ y $\partial_\phi \rightarrow ik$ en las ecuaciones (4.15) , los operadores $\mathcal{D}_n$ y $\mathcal{D}^\dagger_n$ se vuelven operadores complejos conjugados uno del otro, y $\mathcal{L}^\dagger_s$ y $\mathcal{L}_s$ se vuelven operadores reales.

Podemos eliminar $R_{\frac{1}{2}}$ y $S_{\frac{1}{2}}$ de las ecuaciones (4.18) para obtener dos ecuaciones para $R_{-\frac{1}{2}}$ y $S_{-\frac{1}{2}}$

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{L}_{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^\dagger_{-\frac{1}{2}} + \frac{m|\tau^o|}{\lambda + mx} \mathcal{L}^\dagger_{-\frac{1}{2}} + \lambda^2 - m^2 x^2] S_{-\frac{1}{2}} = 0 \\
[K\mathcal{D}^\dagger_{\frac{1}{2}} \mathcal{D}_0 - \frac{imK}{\lambda + imr} \mathcal{D}_0 + \lambda^2 + m^2 r^2] R_{-\frac{1}{2}} = 0
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

Será suficiente considerar solo estas dos ecuaciones.

Por lo tanto tenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden separadas.

4.0.9. La métrica de Weyl

De la misma manera que hemos analizado la separación de la ecuación de Dirac para un espacio-tiempo tipo D, ahora lo haremos para una métrica determinada llamada la métrica de Weyl.

Las soluciones estáticas y axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein están dadas en las coordenadas cilíndricas (t, ρ, z, φ) por la métrica de Weyl

$$ds^2 = -e^{2\Lambda} dt^2 + e^{-2\Lambda} [e^{2\Gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] \tag{4.20}$$

con $\Lambda = \Lambda(\rho, z)$ y $\Gamma = \Gamma\rho, z)$.

Las funciones métricas deben de satisfacer:

$$\Lambda_{,\rho\rho} + \rho^{-1}\Lambda_{,\rho} + \Lambda_{,zz} = 0 \tag{4.21}$$

y

$$\begin{aligned} \Gamma_{,\rho} &= \rho(\Lambda_{,\rho}^2 - \Lambda_{,z}^2) \\ \Gamma_{,z} &= 2\rho\Lambda_{,\rho}\Lambda_{,z} \end{aligned} \tag{4.22}$$

para que (4.20) sea una solución de las ecuaciones de Einstein en vacío.

La primer ecuación es la ecuación de Laplace para Λ en coordenadas polares y también representa la condición de integrabilidad para la segunda ecuación lo que implica que para cada potencial Newtoniano tenemos una métrica de Weyl especifica.

La solución general de la ecuación de Laplace para la función Λ, que presenta un comportamiento asintóticamente plano, (es decir $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ cuando $\rho \rightarrow \infty$) es:

$$\Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{r^{n+1}} P_n(cos\theta) \tag{4.23}$$

donde $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, $cos\theta = \frac{z}{r}$ son las coordenadas esféricas de Weyl y $P_n(cos\theta)$ son los polinomios de Legendre. Los coeficientes a_n son constantes reales arbitrarias.

Entonces las ecuaciones anteriores se resuelven para dar la función Γ en términos de los coeficientes a_n como sigue:

$$\Gamma = \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(n+1)(k+1)}{n+k+2} \frac{a_n a_k}{r^{n+k+2}} (P_{n+1}P_{k+1} - P_n P_k) \tag{4.24}$$

Como ya hemos visto que la ecuación de Dirac se puede separar en los espacios-tiempos tipo D, analizaremos las condiciones bajo las cuales una métrica de Weyl es de tipo D.

Vamos a elegir las tetradas nulas de una métrica de Weyl en la siguiente manera

$$\begin{aligned} l_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\Lambda}, 0, 0, \rho e^{-\Lambda}) \\ n_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\Lambda}, 0, 0, -\rho e^{-\Lambda}) \\ m_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, e^{\Gamma-\Lambda}, ie^{\Gamma-\Lambda}, 0) \end{aligned} \tag{4.25}$$

Con esta elección de tetradas los escalares de Weyl tienen la forma:

$$\Psi_0 = a + ib, \quad \Psi_2 = h, \quad \Psi_1 = \Psi_3 = 0, \quad \Psi_4 = a - ib, \tag{4.26}$$

donde a, b y h son funciones reales.

Buscamos que los escalares de Weyl cumplan

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$$

$$\Psi \equiv \Psi_2 \neq 0$$

para lo cual haremos una serie de rotaciones.

Hacemos una rotación de clase III:

$$\boldsymbol{l} \to A^{-1}\boldsymbol{l}, \quad \boldsymbol{n} \to A\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{m} \to e^{i\theta}\boldsymbol{m}, \quad \overline{\boldsymbol{m}} \to e^{-i\theta}\overline{\boldsymbol{m}} \tag{4.27}$$

donde A y θ son funciones reales dadas por:

$$A = 1, \quad \theta = -\frac{1}{2}arctan(\frac{b}{a}) \tag{4.28}$$

la cual transforma a los escalares de Weyl de la siguiente forma:

$$\Psi_0' = e^{2i\theta}\Psi_0, \quad \Psi_1' = e^{i\theta}\Psi_1, \quad \Psi_2' = \Psi_2, \quad \Psi_3' = e^{-i\theta}\Psi_3, \quad \Psi_4' = e^{-2i\theta}\Psi_4 \tag{4.29}$$

Pidiendo que la parte imaginaria de Ψ_0' y Ψ_4' en dicha transformación sea igual a cero, nos quedan explícitamente:

$$\Psi_0' = \Psi_4' = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \Psi_2' = h, \quad \Psi_1' = \Psi_3' = 0 \tag{4.30}$$

Ahora hacemos una rotación de clase I:

$$\boldsymbol{l'} \to \boldsymbol{l'}, \quad \boldsymbol{m'} \to \boldsymbol{m'} + B\boldsymbol{l'},$$

$$\overline{\boldsymbol{m}} \to \overline{\boldsymbol{m}} + \overline{B}\boldsymbol{l'}, \quad \boldsymbol{n'} \to \boldsymbol{n'} + \overline{B}\boldsymbol{m'} + B\overline{\boldsymbol{m}} + B\overline{B}\boldsymbol{l'} \tag{4.31}$$

donde B es una función real, la cual transforma a los escalares de Weyl de la siguiente forma:

$$\Psi_0'' = \Psi_0' + 6B^2\Psi_2' + B^4\Psi_4', \quad \Psi_1'' = 3B\Psi_2' + B^3\Psi_4',$$

$$\Psi_2'' = \Psi_2' + B^2\Psi_4', \quad \Psi_3'' = B\Psi_4', \quad \Psi_4'' = \Psi_4' \tag{4.32}$$

Pedimos que $\Psi_0'' = 0$, es decir:

$$\Psi_0' + 6B^2\Psi_2' + B^4\Psi_4' = 0 \tag{4.33}$$

Resolviendo para B^2 tenemos que:

$$(B^2)_{1,2} = \frac{-6\Psi_2' \pm 2\sqrt{9\Psi_2' - \Psi_0'\Psi_4'}}{2\Psi_0'} \tag{4.34}$$

Para que haya dos soluciones distintas y doblemente degeneradas para B (en cuyo caso la métrica seria de tipo D), se necesita que

$$9\Psi_2' - \Psi_0'\Psi_4' = 0 \tag{4.35}$$

o

$$9h - (a^2 + b^2) = 0 \tag{4.36}$$

Podemos escribir Ψ_0' de la siguiente manera:

$$\Psi_0' = \Psi_4'(B - B_1)^2(B - B_2)^2 \tag{4.37}$$

dependiendo de la signatura de h, B_1 y B_2 son:

$$B_1 = \begin{pmatrix} i, & h > 0 \\ 1, & h < 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -i, & h > 0 \\ -1, & h < 0 \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

Entonces en el caso $B = B_1$, las tetradas quedan de la siguiente manera para , $h > 0$:

$$l_i'' = \sqrt{2}(e^{\Lambda}, e^{\Gamma-\Lambda}sen\theta, e^{\Gamma-\Lambda}cos\theta, 0)$$

$$n_i'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\Lambda}, 0, 0, -\rho e^{-\Lambda})$$

$$m_i'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(ie^{\Lambda}, e^{i\theta}e^{\Gamma-\Lambda}, ie^{i\theta}e^{\Gamma-\Lambda}, -i\rho e^{-\Lambda}) \tag{4.39}$$

y para $h < 0$:

$$l_i'' = \sqrt{2}(e^{\Lambda}, e^{\Gamma-\Lambda}cos\theta, -e^{\Gamma-\Lambda}sen\theta, 0)$$

$$n_i'' = \frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{\Lambda}, -e^{\Gamma-\Lambda}cos\theta, e^{\Gamma-\Lambda}sen\theta, 0)$$

$$m_i'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, ie^{\Gamma-\Lambda}sen\theta, ie^{\Gamma-\Lambda}cos\theta, -\rho e^{-\Lambda}) \tag{4.40}$$

Finalmente al hacer otra rotación de clase I, con parámetro $C = \frac{1}{B_2 - B_1}$

$$\boldsymbol{l''} \rightarrow \ \boldsymbol{l''}, \quad \boldsymbol{m''} \rightarrow \boldsymbol{m''} + C\boldsymbol{l''},$$

$$\overline{\boldsymbol{m}}'' \rightarrow \overline{\boldsymbol{m}}'' + \overline{C}\boldsymbol{l''}, \quad \boldsymbol{n''} \rightarrow \boldsymbol{n''} + \overline{C}\boldsymbol{m''} + C\overline{\boldsymbol{m}}'' + C\overline{C}\boldsymbol{l''} \tag{4.41}$$

las tetradas quedan para $h > 0$:

$$l_i''' = \sqrt{2}(e^{\Lambda}, e^{\Gamma-\Lambda}sen\theta, e^{\Gamma-\Lambda}cos\theta, 0)$$

$$n_i'' = \frac{3}{\sqrt{2}}(2e^{\Lambda}, e^{\Gamma-\Lambda}sen\theta, e^{\Gamma-\Lambda}cos\theta, -\rho e^{-\Lambda})$$

$$m_i'' = \frac{3}{\sqrt{2}}(0, cos\theta e^{\Gamma-\Lambda} - 2ie^{\Gamma-\Lambda}sen\theta, -ie^{\Gamma-\Lambda}sen\theta, -i\rho e^{-\Lambda}) \tag{4.42}$$

y para $h < 0$:

$$l_i''' = \sqrt{2}(e^{\Lambda}, e^{\Gamma-\Lambda}cos\theta, -e^{\Gamma-\Lambda}sen\theta, 0)$$

$$n_i''' = \frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{\Lambda}, -e^{\Gamma-\Lambda}cos\theta, e^{\Gamma-\Lambda}sen\theta, 0)$$

$$m_i''' = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, ie^{\Gamma-\Lambda}sen\theta, ie^{\Gamma-\Lambda}cos\theta, -\rho e^{-\Lambda}) \tag{4.43}$$

y los escalares de Weyl:

$$\Psi_0''' = \Psi_1''' = \Psi_3''' = \Psi_4''' = 0 \tag{4.44}$$

por el teorema de Goldberg-Sachs (ver apendice 1), los coeficientes de spin $\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0$.

La ecuación (4.35) junto con la ecuación (4.21) : representan la condición que tiene que satisfacer $\Lambda(\rho, z)$ para que la métrica correspondiente sea de tipo D.

La forma explicita de la ecuación (4.35) es la siguiente:

$$9\Psi_2' - \Psi_0'\Psi_4' = 3\rho\Lambda_{,z}^2\Lambda_{,\rho} + 3\rho^4\Lambda_{,\rho}^2\Lambda_{,z}^4 + 3\rho^4\Lambda_{,\rho}^4\Lambda_{,z}^2 - 3\rho^3\Lambda_{,\rho}\Lambda_{,z}^4$$
$$-6\rho^3\Lambda_{,\rho}^3\Lambda_{,z}^2 - 2\rho^3\Lambda_{,\rho}^3\Lambda_{,\rho\rho} - 3\rho^2\Lambda_{,z}^2\Lambda_{,\rho\rho} + 2\rho^3\Lambda_z^3\Lambda_{,\rho z} + \rho\Lambda_{,\rho}\Lambda_{,\rho\rho} + 3\rho^2\Lambda_{,\rho}^2\Lambda_{,\rho\rho}$$
$$+3\rho^2\Lambda_{,z}^2\Lambda_{,\rho}^2 - 6\rho^3\Lambda_{,\rho}^2\Lambda_{,z}\Lambda_{,\rho z} - 2\Lambda_{,\rho}^2 + 6\rho^2\Lambda_{,\rho}\Lambda_{,z}\Lambda_{,\rho z} + 6\rho^3\Lambda_{,\rho}\Lambda_{,z}^2\Lambda_{,\rho\rho}$$
$$+\rho^2\Lambda_{,\rho z}^2 + \rho^4\Lambda_{,z}^6 + 6\rho\Lambda_{,\rho}^3 - 3\rho^3\Lambda_{,\rho}^5 + \rho^2\Lambda_{,\rho\rho}^2 - \rho^2\Lambda_{,\rho}^4 + \rho^4\Lambda_{,\rho}^6 = 0 \qquad (4.45)$$

Busquemos una solución de la forma $\Lambda = \Lambda(z)$, En este caso nuestro sistema de ecuaciones queda de la siguiente manera:

$$\rho^4\Lambda_{,z}^6 = 0 \qquad (4.46)$$

$$\Lambda_{,zz} = 0 \qquad (4.47)$$

Resolviendo (4.47) tenemos que:

$$\Lambda = c_1 z + c_2 \qquad (4.48)$$

y por lo tanto de (4.22) tenemos que:

$$\Gamma = -\frac{c_1\rho^2}{2} + c_3 \qquad (4.49)$$

Entonces sustituyendo en (4.46) tenemos:

$$\rho^4 c_1^6 = 0 \qquad (4.50)$$

Por lo tanto $c_1 = 0$ que corresponde a un espacio-tiempo plano.

Ahora busquemos una solución de la forma $\Lambda(\rho)$. En este caso nuestro sistema de ecuaciones queda de la siguiente manera:

$$(-\rho\Lambda_{,\rho\rho} + \Lambda_{,\rho} - 3\rho\Lambda_{,\rho}^2 + \rho^2\Lambda_{,\rho}^3)(-\rho\Lambda_{,\rho\rho} - 2\Lambda_{,\rho} + \rho^2\Lambda_{,\rho}^3) = 0 \qquad (4.51)$$

$$-\rho^{-1}\Lambda_{,\rho} - \Lambda_{,\rho\rho} = 0 \qquad (4.52)$$

Resolviendo (4.52) tenemos que:

$$\Lambda(\rho) = c_1 + c_2 ln(\rho) \qquad (4.53)$$

y por lo tanto de (4.22) tenemos que:

$$\Gamma = c_2^2 ln(\rho) + c_3 \tag{4.54}$$

Entonces sustituyendo e igualando el primer termino de (4.51) a cero tenemos:

$$\frac{c_2(c_2-1)(c_2-2)}{\rho} = 0 \tag{4.55}$$

o igualando el segundo termino:

$$c_2(c_2^2-1) = 0 \tag{4.56}$$

Por lo tanto $c_2 = 0, 1, -1, 2$, en los casos $c_2 = 0$ y $c_2 = 1$ tenemos que $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$, es decir, corresponden a un espacio-tiempo plano, tomaremos solo los casos en que $R_{\mu\nu\rho\sigma} \neq 0$, es decir cuando $c_2 = 2, -1$, para estos casos tenemos

$$\Lambda(\rho) = c_1 + 2ln(\rho), \quad \Gamma(\rho) = 4ln(\rho) + c_3 \tag{4.57}$$

$$\Lambda(\rho) = c_1 - ln(\rho), \quad \Gamma(\rho) = ln(\rho) + c_3 \tag{4.58}$$

respectivamente.

Observamos que para ambos casos los escalares de Weyl son reales por lo tanto:

$$b = 0 \Rightarrow \theta = 0,$$

$$B^2 = -\frac{6\Psi_2}{2\Psi_0} = -1 \Rightarrow B_1 = i, \; B_2 = -i \tag{4.59}$$

Por lo tanto las tetradas quedan:

$$()l_i''' = \sqrt{2}(e^{\Lambda}, 0, -e^{\Gamma-\Lambda}, 0)$$

$$n_i''' = \frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{\Lambda}, 0, e^{\Gamma-\Lambda}, 0)$$

$$m_i''' = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, e^{\Gamma-\Lambda}, 0, -i\rho e^{-\Lambda}) \tag{4.60}$$

Así nuestra métrica para $c_2 = -1$ esta determinada por:

$$g_{00} = \frac{e^{2c_1}}{\rho^2}, \quad g_{11} = -\rho^4 e^{2c_3-2c_1} = g_{22}, \quad g_{33} = -\rho^4 e^{-2c_1} \tag{4.61}$$

Y para $c_2 = 2$ por:

$$g_{00} = \rho^4 e^{2c_1}, \quad g_{11} = -\rho^4 e^{2c_3 - 2c_1} = g_{22}, \quad g_{33} = -\frac{1}{\rho^2} e^{-2c_1} \tag{4.62}$$

notamos que ninguna de estas métricas es asintóticamente plana.

La solución $c_2 = 2$ pertenece a la clase Kinnersley IVb, lo cual se puede ver analizando los coeficientes de spin.

Las tetradas de la clase Kinnersley IVb están dadas, en el sistema de coordenadas (u, R, x, y), por:

$$\begin{aligned} l_i &= (0, 1, 0, 0) \\ n_i &= (1, \frac{CR^2}{x^2}, 0, 0) \\ m_i &= (0, \frac{2R^2 \xi(x)}{x}, \xi(x), \frac{i}{\xi(x)}) \end{aligned} \tag{4.63}$$

donde $C = \pm\frac{1}{2}, 0$ y $\xi = \sqrt{C + \frac{m}{x}}$ con m un parámetro real.

Si consideramos el caso $C = 0$, los coeficientes de spin son los siguientes:

$$\pi = \frac{\sqrt{m}}{x^{3/2}}, \quad \tau = -\pi, \quad \beta = -\frac{3}{4}\pi, \quad \alpha = -\frac{1}{4}\pi \tag{4.64}$$

Regresando a nuestras tetradas, al hacer una rotación clase III con parámetros $\theta = \pi$ y $A = A(\rho)$:

$$\boldsymbol{l} \to A^{-1}\boldsymbol{l}, \quad \boldsymbol{n} \to A\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{m} \to e^{i\theta}\boldsymbol{m}, \quad \overline{\boldsymbol{m}} \to e^{-i\theta}\overline{\boldsymbol{m}} \tag{4.65}$$

nos queda que nuestros coeficientes de spin son:

$$\pi = \frac{\sqrt{2}}{b}\frac{1}{\rho^3}, \quad \tau = -\pi, \quad \beta = -\frac{3}{4}\pi, \quad \alpha = -\frac{1}{4}\pi \tag{4.66}$$

Estos son los mismos coeficientes que para la clase Kinnersley IVb relacionados por:

$$m = \frac{2}{b^2}, \quad x = \rho^2 \tag{4.67}$$

Ahora separaremos la ecuación de Dirac con las nuevas tetradas dadas por (4.0.9), con esta elección de tetradas los coeficientes de spin son:

$$\kappa = \sigma = \lambda = \nu = \rho = \mu = \varepsilon = \gamma = 0,$$

$$\pi = -\frac{e^{(c_1-c_3)}\sqrt{2}}{\rho^3}, \quad \tau = -\pi$$

$$\beta = -\frac{3}{4}\pi, \quad \alpha = -\frac{1}{4}\pi \tag{4.68}$$

Sustituimos en la ecuación de Dirac dada por (3.37) y eliminamos la dependencia de t y ϕ al factorizar $e^{i(\sigma \cdot t + k\cdot\phi)}$ que estarán presentes en todos los términos, y después de simplificar nos quedan las siguientes ecuaciones:

$$(2i\sigma e^{c_3-2c_1} - 2\partial_z)F_1 + (e^{c_3}\rho^3 k - \frac{3}{2\rho} - \partial_\rho)F_2 = \sqrt{2}im\rho^2 e^{-c_1+c_3}G_1$$

$$(\frac{1}{2}i\sigma e^{c_3-2c_1} + \frac{1}{2}\partial_z)F_2 + (-e^{c_3}\rho^3 k - \frac{3}{2\rho} - \partial_\rho)F_1 = \sqrt{2}im\rho^2 e^{-c_1+c_3}G_2$$

$$(2i\sigma e^{c_3-2c_1} - 2\partial_z)G_2 + (e^{c_3}\rho^3 k + \frac{3}{2\rho} + \partial_\rho)G_1 = \sqrt{2}im\rho^2 e^{-c_1+c_3}F_2$$

$$(\frac{1}{2}i\sigma e^{c_3-2c_1} + \frac{1}{2}\partial_z)G_1 + (-e^{c_3}\rho^3 k + \frac{3}{2\rho} + \partial_\rho)G_2 = \sqrt{2}im\rho^2 e^{-c_1+c_3}F_1 \tag{4.69}$$

Definiendo

$$\mathcal{L}_1 = i\sigma e^{c_3-2c_1} - \partial_z$$

$$\mathcal{L}_2 = i\sigma e^{c_3-2c_1} + \partial_z$$

$$\mathcal{D}_1 = e^{c_3}\rho^3 k - \frac{3}{2\rho} - \partial_\rho$$

$$\mathcal{D}_2 = e^{c_3}\rho^3 k + \frac{3}{2\rho} + \partial_\rho \tag{4.70}$$

y

$$\gamma(\rho) = \sqrt{2}im\rho^2 e^{-c_1+c_3} \tag{4.71}$$

o de forma mas general:

$$\mathcal{L}_n = i\sigma e^{c_3-2c_1} + (-1)^n\partial_z$$

$$\mathcal{D}_n = e^{c_3}\rho^3 k + (-1)^n(\frac{3}{2\rho} + \partial_\rho) \tag{4.72}$$

donde $n = 1, 2$

Las ecuaciones (4.69) son:

$$\begin{aligned}
2\mathcal{L}_1 F_1 + \mathcal{D}_1 F_2 &= \gamma G_1 \\
\frac{1}{2}\mathcal{L}_2 F_2 - \mathcal{D}_2 F_1 &= \gamma G_2 \\
2\mathcal{L}_1 G_2 + \mathcal{D}_2 G_1 &= \gamma F_2 \\
\frac{1}{2}\mathcal{L}_2 G_1 - \mathcal{D}_1 G_2 &= \gamma F_1
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Si suponemos que F_1, F_2, G_1 y G_2 son de la forma

$$F_1 = S_1 R_1, \quad F_2 = S_2 R_2, \quad G_1 = S_2 R_1, \quad G_2 = -S_1 R_2 \tag{4.74}$$

donde R_1 y R_2 dependen solamente de ρ,y S_1 y S_2 dependen solamente de z, y sustituimos en las ecuaciones (4.73) tenemos:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_1 R_2 - \gamma R_1)S_2 &= (-2\mathcal{L}_1 S_1)R_1 \\
(\mathcal{D}_2 R_1 - \gamma R_2)S_1 &= (\frac{1}{2}\mathcal{L}_2 S_2)R_2 \\
(\mathcal{D}_2 R_1 - \gamma R_2)S_2 &= (2\mathcal{L}_1 S_1)R_2 \\
(\mathcal{D}_1 R_2 - \gamma R_1)S_1 &= (-\frac{1}{2}\mathcal{L}_2 S_2)R_1
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Estas ecuaciones implican:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 R_2 - \gamma R_1 &= \mu_1 R_1 \\
2\mathcal{L}_1 S_1 &= -\mu_1 S_2 \\
\mathcal{D}_2 R_1 - \gamma R_2 &= \mu_2 R_2 \\
\frac{1}{2}\mathcal{L}_2 S_2 &= \mu_2 S_1 \\
\mathcal{D}_2 R_1 - \gamma R_2 &= \mu_3 R_2 \\
2\mathcal{L}_1 S_1 &= \mu_3 S_2
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_1 R_2 - \gamma R_1 = \mu_4 R_1$$
$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_2 S_2 = -\mu_4 S_1 \tag{4.76}$$

donde :

$$\mu_2 = \mu_3 = -\mu_1 = -\mu_4 \equiv \mu \tag{4.77}$$

Así que tenemos dos pares de ecuaciones:

$$\mathcal{D}_1 R_2 - \gamma R_1 = -\mu R_1$$
$$\mathcal{D}_2 R_1 - \gamma R_2 = \mu R_2 \tag{4.78}$$

y

$$2\mathcal{L}_1 S_1 = \mu S_2$$
$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_2 S_2 = \mu S_1 \tag{4.79}$$

En las ecuaciones (4.78), podemos despejar R_1 y obtener una sola ecuación en términos de R_2:

$$R_1 = \frac{1}{\gamma - \mu}\mathcal{D}_1 R_2$$

$\Rightarrow$

$$(\mathcal{D}_2(\frac{\mathcal{D}_1}{\gamma - \mu}) - (\mu' + \gamma))R_2 = 0$$

De la misma forma, en las ecuaciones (4.79), despejamos S_2 , podemos obtener una sola ecuación en términos de S_1:

$$S_2 = \frac{2}{\mu}\mathcal{L}_1 S_1$$

$\Rightarrow$

$$(\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1 + \mu^2)S_1 = 0$$

Por lo tanto tenemos dos ecuaciones separadas:

$$(\mathcal{D}_2(\frac{\mathcal{D}_1}{\gamma - \mu}) - \gamma - \mu)R_2 = 0 \tag{4.80}$$

$$(\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1 + \mu^2)S_1 = 0 \tag{4.81}$$

que dependen solo de ρ y de z respectivamente. Notamos que la ecuación (4.81) es una ecuación de eigenvalores para S_1.

Por ultimo veremos algunos ejemplos de métricas de tipo D que son de Weyl, por ejemplo en el caso de la métrica de Schwarzschild, que sabemos es de tipo D, dada por:

$$ds^2 = u^2(dv^2 + sen^2 v d\phi^2) + (1 - \frac{2m}{u})^{-1}du^2 - (1 - \frac{2m}{u})dt^2 \quad (4.82)$$

podemos dar una transformación explicita para escribir dicha métrica como una métrica de tipo Weyl dada por (4.20), es decir, de la siguiente forma:

$$ds^2 = -e^{2\Lambda}dt^2 + e^{2\Gamma - 2\Lambda}(d\rho^2 + dz^2) + e^{-2\Lambda}\rho^2 d\phi^2$$

La transformación es la siguiente:

$$r = u(1 - \frac{2m}{u})^{1/2} senv, \quad z = (u - m)cosv, \quad \phi = \phi, \quad t = t$$

Por lo tanto la métrica nos quedara de la siguiente forma

$$ds^2 = -\frac{R_1 + R_2 - 2m}{R_1 + R_2 + 2m}dt^2 + \frac{(R_1 + R_2 + 2m)^2}{4R_1R_2}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2\frac{R_1 + R_2 + 2m}{R_1 + R_2 - 2m}d\phi^2 \quad (4.83)$$

donde

$$R_1 = \sqrt{(z + m)^2 + \rho^2}, \quad R_2 = \sqrt{(z - m)^2 + \rho^2} \quad (4.84)$$

Como otro ejemplo tomemos el caso Kinnersley IVb dado por:

$$ds^2 = -\frac{2cr^2}{x^2}du^2 + 2dudr - \frac{4r}{x}dudx - \frac{\xi^{-2}}{2}dx^2 - 2\xi^2 dy^2 \quad (4.85)$$

donde

$$\xi^2 = c + \frac{m}{x}, \quad c\epsilon(0, \pm\frac{1}{2}) \quad (4.86)$$

El caso $c = 0$ ya ha sido discutido en el capitulo anterior, por lo tanto solo consideraremos $c\epsilon(\pm\frac{1}{2})$.

Queremos ver si esta métrica es de Weyl, por lo tanto veremos si es posible escribirla de la forma (4.20). Para esto primero la diagonalizaremos pasando de un sistema de coordenadas (u, r, x, y) a (t, v, x, y), donde $r = r(x, v)$ y $u = u(t, v)$. Analizando las componentes de la métrica notamos que:

$$g_{tt} = (\frac{\partial u}{\partial t})^2 g_{uu},$$

$$
\begin{aligned}
g_{vv} &= 2\frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial v}g_{ru} + (\frac{\partial u}{\partial v})^2 g_{uu}, \\
g_{xx} &= g_{xx}, \\
g_{yy} &= g_{yy}, \\
g_{ty} &= g_{vy} = g_{xy} = 0, \\
g_{tv} &= \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial v}g_{uu} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial v}g_{ur}, \\
g_{tx} &= \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial x}g_{ur} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial x}g_{ux} \\
g_{vx} &= \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial x}g_{ur} + \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial x}g_{ux}
\end{aligned}
\tag{4.87}
$$

Si suponemos que:

$$
r = r_1(x)r_2(v), \quad u = u_1(t) + u_2(v) \tag{4.88}
$$

entonces al buscar que los términos mixtos de la métrica, sean iguales a cero llegamos a:

$$
r_1(x) = x^2, \quad u_2(v) = -\frac{1}{2cr_2(v)} \tag{4.89}
$$

Podemos elegir

$$
r_2(v) = e^v, \quad u_1(t) = t \tag{4.90}
$$

entonces nos queda

$$
r = x^2 e^v, \quad u = t - \frac{1}{2ce^v} \tag{4.91}
$$

Y nuestra métrica diagonalizada es:

$$
ds^2 = -2cx^2e^{2v}dt^2 + \frac{x^2}{2c}dv^2 - \frac{\xi^{-2}}{2}dx^2 - 2\xi^2 dy^2 \tag{4.92}
$$

Analizemos el signo de c, si es positivo entonces v seria la coordenada temporal y g no seria estático, si es negativo entonces t es la coordenada temporal, por lo tanto tendremos que tomar c como negativa, la unica opción es $c = -\frac{1}{2}$. La métrica toma la forma:

$$
ds^2 = x^2e^{2v}dt^2 - (x^2dv^2 + \frac{\xi^{-2}}{2}dx^2) - 2\xi^2 dy^2 \tag{4.93}
$$

Ahora que nuestra métrica esta diagonalizada buscaremos la forma de llevarla a una métrica de tipo Weyl (4.20), para esto notamos que el termino entre paréntesis puede llevarse a la forma $e^{2\mu(w,p)}(dw^2+dp^2)$ haciendo una elección correcta de las coordenadas (w,p). Buscamos que:

$$g_{ww} = g_{pp}, \qquad g_{wp} = 0 \tag{4.94}$$

Podemos elegir:

$$v = w, \qquad x = x(p) \tag{4.95}$$

entonces las condiciones (4.94) implican que $x = x(p)$ esta determinado por:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \sqrt{2}x\xi(x) \tag{4.96}$$

Ahora nuestra métrica queda:

$$ds^2 = x^2 e^{2w} dt^2 - x^2(dw^2 + dp^2) - 2\xi^2 dy^2 \tag{4.97}$$

esta métrica es de la forma:

$$ds^2 = e^{2\lambda(w,p)} dt^2 - e^{2\mu_1(w,p)}(dw^2 + dp^2) - e^{2\mu_2(w,p)} dy^2 \tag{4.98}$$

Introducimos la coordenada armónica dada por

$$R(w,p) = e^{\lambda(w,p)+\mu_2(w,p)} \tag{4.99}$$

que satisface $(\partial_w^2 + \partial_p^2)R = 0$, que es una consecuencia de las ecuaciones de Eisntein en vacío. Y la coordenada antiarmónica que satisface:

$$\frac{\partial R}{\partial w} = -\frac{\partial Z}{\partial p}, \qquad \frac{\partial R}{\partial p} = \frac{\partial Z}{\partial w} \tag{4.100}$$

y notamos que al hacer el cambio de coordenadas de (w,p) a (R,Z) nuestra métrica tomara la forma de Weyl, lo que se ve al escribir explícitamente los componentes transformados de la métrica:

$$\begin{aligned} g_{RR} &= (\frac{\partial w}{\partial R})^2 g_{ww} + (\frac{\partial p}{\partial R})^2 g_{pp}, \\ g_{ZZ} &= (\frac{\partial w}{\partial Z})^2 g_{ww} + (\frac{\partial p}{\partial Z})^2 g_{pp}, \\ g_{RZ} &= \frac{\partial w}{\partial R}\frac{\partial w}{\partial Z} g_{ww} + \frac{\partial p}{\partial R}\frac{\partial p}{\partial Z} g_{pp} \end{aligned} \tag{4.101}$$

Las condiciones (4.100) implican que el termino mixto g_{RZ} es igual a cero. Por lo tanto la forma de la métrica (4.98) transformada será:

$$ds^2 = e^{2\lambda(R,Z)}dt^2 - e^{2\mu(R,Z)}(dR^2 + dZ^2) - R^2 e^{-2\lambda(R,Z)}dy^2 \tag{4.102}$$

que es de la forma (4.20) es decir, de Weyl.

Ahora en nuestro caso, notamos que:

$$R = \sqrt{2}x(p)\xi(x)e^w \tag{4.103}$$

Por lo tanto, de las condiciones (4.100) se sigue que:

$$Z = (-x + m)e^w \tag{4.104}$$

Con estas nuevas coordenadas nuestra métrica toma la siguiente forma:

$$g_{tt} = (\sqrt{R^2 + Z^2} - Z)^2, \quad g_{yy} = -\frac{R^2}{(\sqrt{R^2 + Z^2} - Z)^2}$$

$$g_{RR} = g_{ZZ} = -\frac{m^2(\sqrt{R^2 + Z^2} - Z)^2}{Z^2 R^2} \tag{4.105}$$

Por lo tanto nuestra métrica toma la forma de una métrica de Weyl.
No hemos encontrado una forma general de deducir si una métrica de tipo D es de Weyl, por lo tanto se debe de tomar cada métrica de tipo D como un caso especial, y el ejemplo ilustra una serie de pasos que se pueden seguir para ver si dicha métrica es de Weyl.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo introducimos y analizamos el concepto de espinor para llegar asi a la ecuación de Dirac, despues de introducir una serie de formalismos llegamos a la forma de dicha ecuación en un espacio-tiempo curvado.

Una vez introducida la ecuación de Dirac, procedimos a analizar bajo que condiciones es separable. Primero estudiamos los espacios tiempo tipo D, a los cuales pertenecen las métricas de Kerr y de Schwarzschild, y mostramos un sistema de coordenadas adecuado para la separación en dicha clase de espacios llegando a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden separadas.

Despues analizamos la métrica de Weyl, en donde el sistema de ecuaciones compuesto por las ecuaciones que la métrica debe de satisfacer para dar una solución de las ecuaciones de Einstein en vacio, y la ecuación que la métrica debe de satisfacer para ser de tipo D, nos da las condiciones para la separabilidad de la ecuación de Dirac. Se encontraron dos soluciones explicitas y se separo la ecuación de Dirac para una de ellas.

Por ultimo mostramos algunos ejemplos de métricas de tipo D que son de Weyl, por ejemplo la métrica de Schwarzschild, no encontramos una forma general de deducir si una métrica de tipo D es de Weyl, pero por medio de un ejemplo se mostro la forma en la que se puede proceder al tomar una métrica de tipo D para llevarla a la forma de Weyl.

Capítulo 6

Apéndice

Ecuaciones de Einstein para un espacio tiempo vacio de tipo D, en el formalismo de Newman Penrose

En la teoria general de la relatividad, el espacio-tiempo es considerado como un espacio cuatro-dimensional descrito por una métrica g_{ij} con una signatura de Lorentz (+ - - -) . En particular en un espacio plano tomaremos la métrica de Minkowski de la forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{6.1}$$

donde c denota la velocidad de la luz.

Podemos introducir los simbolos de Christoffel, los cuales describen la variacion de los vectores de una base e_l, de la siguiente manera:

$$\Gamma^i{}_{lk} = \frac{1}{2} g^{ij} (g_{jk,l} + g_{lj,k} - g_{lk,j}) \tag{6.2}$$

Entonces el tensor de Riemann, el cual puede ser considerado como una medida de la curvatura de una variedad diferenciable, esta definido de la siguiente forma

$$R^j{}_{lnm} = \Gamma^j{}_{lm,n} - \Gamma^j{}_{ln,m} + \Gamma^j{}_{kn} \Gamma^k{}_{lm} - \Gamma^j{}_{km} \Gamma^k{}_{ln} \tag{6.3}$$

Este tensor tiene las siguientes propiedades:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij} \tag{6.4}$$

$$R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0 \tag{6.5}$$

Al contraer el tensor de Riemann con respecto al segundo (o tercer) indice covariante obtenemos el tensor de Ricci

$$R_{ij} = g^{kl} R_{ijkl} \tag{6.6}$$

y al contraer el tensor de Ricci obtenemos el escalar de Ricci, o curvatura escalar:

$$R = g^{kl} R_{kl} \tag{6.7}$$

En una base local de coordenadas, tenemos las siguientes identidades que se siguen de la definicion del tensor de Riemann y sus propiedades:

$$R^{j}{}_{lpq;r} + R^{j}{}_{lqr;p} + R^{j}{}_{lrp;q} = 0 \tag{6.8}$$

conocida como la identidad de Bianchi en su forma estandar, y

$$R^{i}{}_{jkl} Z_i = Z_{j;k;l} - Z_{j;l;k} \tag{6.9}$$

conocida como la identidad de Ricci, donde Z_i es un vector covariante.

Las ecuaciones de Einstein estan dadas por:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = 8\pi G T_{ij} \tag{6.10}$$

donde T^{ij} es el tensor de energia momento y G es la constante cosmologica. En vacio las ecuaciones de Einstein se reducen a:

$$R_{ij} = 0 \tag{6.11}$$

Notamos que en vacio el tensor de Weyl (vease apendice), sera igual al tensor de Riemann:

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} \tag{6.12}$$

Al proyectar la identidad de Ricci,(en la que sustituimos el vector $\mathbf{Z}$ por el vector base $\boldsymbol{e_{(a)}}$):

$$R_{mikl} e_{(a)}^{\ m} = e_{(a)i;k;l} - e_{(a)i;l;k} \tag{6.13}$$

al marco de tetradas y sustituir los respectivos coeficientes de rotacion de Ricci, que como se menciona en el capitulo 3 estan dados por

$$\gamma_{(c)(a)(b)} = e_{(c)}^{\ k} e_{(a)k;i} e_{(b)}^{\ i}$$

nos queda:

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = -\gamma_{(a)(b)(c),(d)} + \gamma_{(a)(b)(d),(c)} + \gamma_{(b)(a)(f)}[\gamma_{(c)}{}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(d)}{}^{(f)}{}_{(c)}] +$$

$$+\gamma_{(f)(a)(c)}\gamma_{(b)}{}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(f)(a)(d)}\gamma_{(b)}{}^{(f)}{}_{(c)} \tag{6.14}$$

debido a las simetrias en esta identidad hay 36 ecuaciones de este tipo.

La identidad de Bianchi, expresada en terminos de las derivadas intrinsecas y los componentes de tetradas toma la forma:

$$R_{(a)(b)[(c)(d)|(f)]} = \frac{1}{6}\sum_{[(c)(d)(f)]} (R_{(a)(b)(c)(d),(f)} - \eta^{(n)(m)}[\gamma_{(n)(a)(f)}R_{(m)(b)(c)(d)} +$$

$$+\gamma_{(n)(b)(f)}R_{(a)(m)(c)(d)} + \gamma_{(n)(c)(f)}R_{(a)(b)(m)(d)} + \gamma_{(n)(d)(f)}R_{(a)(b)(c)(m)}]) \tag{6.15}$$

donde $\eta_{(a)(b)}$ es una matriz constante dada por

$$e_{(a)}{}^{i}e_{(b)i} = \eta_{(a)(b)}$$

Tendremos 20 ecuaciones linealmente independientes de Bianchi.

Ahora consideremos un espacio-tiempo vacio de tipo D, esto implica que $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$ y $\Psi \equiv \Psi_2 \neq 0$, por el teorema de Goldberg-Sachs: $\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0$. Tambien pediremos que los vectores $\boldsymbol{l}$ de la base de tetradas formen una congruencia de geodesicas nulas parametrizadas afinmente, es decir, que $l_{i;j}l^j = (\varepsilon + \overline{\varepsilon})l_i = 0$, por lo tanto el coeficiente de spin ε sera igual a cero.

Con estas consideraciones las relaciones de conmutacion para los operadores D, Δ, δ , $\overline{\delta}$ (vease capitulo 3) son:

$$\begin{aligned} \Delta D - D\Delta &= (\gamma + \overline{\gamma})D - (\overline{\tau} + \pi)\delta - (\tau + \overline{\pi})\overline{\delta} \\ \delta D - D\delta &= (\overline{\alpha} + \beta - \pi)D - \overline{\rho}\delta \\ \delta\Delta - \Delta\delta &= (\tau - \overline{\alpha} - \beta)D + (\mu - \gamma + \overline{\gamma})\delta \\ \overline{\delta}\delta - \delta\overline{\delta} &= (\overline{\mu} - \mu)D + (\overline{\rho} - \rho)\Delta - (\overline{\beta} - \alpha)\delta - (\overline{\alpha} - \beta)\overline{\delta} \end{aligned} \tag{6.16}$$

Al escribir la forma explicita de las identidades de Ricci podemos escribir un total de 36 ecuaciones, pero en el contexto del formalismo de Newman-Penrose sera suficente escribir la mitad al no escribir el complejo conjugado la ecuacion, por lo tanto tendremos 18 ecuaciones.

Tomando en cuenta las consideraciones hechas al inicio tenemos que de las 18 ecuaciones de Ricci mencionadas, solo quedan 16 distintas de cero, debido a que varios de los coeficientes de spin y las componentes del tensor de Ricci seran iguales a cero, la forma explicita de las ecuaciones restantes es:

$$D\rho = \rho^2$$

$$\begin{aligned}
D\beta &= \overline{\rho}\beta \\
D\alpha &= \rho(\alpha + \pi) \\
D\tau &= \rho(\tau + \overline{\pi}) \\
D\gamma &= \alpha(\tau + \overline{\pi}) + \beta(\overline{\tau} + \pi) + \tau\pi + \Psi \\
D\mu - \delta\pi &= \overline{\rho}\mu + \pi(\overline{\pi}) - \overline{\alpha} + \beta) + \Psi \\
\delta\rho &= \rho(\overline{\alpha} + \beta) + (\rho - \overline{\rho})\tau \\
\delta\tau &= \tau(\tau - \overline{\alpha} + \beta) \\
\delta\alpha - \overline{\delta}\beta &= \rho\mu + \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} - 2\alpha\beta + (\rho - \overline{\rho}) - \Psi \\
\delta\pi &= -\pi(\pi - \overline{\beta} + \alpha) \\
\delta\mu &= -\mu(\alpha + \overline{\beta}) - (\mu + \mu)\pi \\
\Delta\rho - \overline{\delta}\tau &= -\rho\overline{\mu} - \tau(\overline{\tau} + \alpha - \overline{\beta}) + \rho(\gamma + \overline{\gamma}) - \Psi \\
\Delta\pi &= -\mu(\overline{\tau} + \pi) - \pi(-\overline{\gamma} + \gamma) \\
\Delta\alpha - \overline{\delta}\gamma &= -\overline{\mu}\alpha + \gamma(\overline{\beta} - \overline{\tau}) + \overline{\gamma}\alpha \\
\Delta\beta - \overline{\delta}\gamma &= -\mu(\beta + \tau) + \gamma(2\beta + \overline{\alpha} - \tau) - \overline{\gamma}\beta \\
\Delta\mu &= -\mu(\mu + \overline{\gamma} + \gamma)
\end{aligned} \tag{6.17}$$

y tambien quedaran solamente 4 identidades de Bianchi distintas de cero, su forma explicita es:

$$D\Psi = 3\rho\Psi$$

$$\Delta\Psi = -3\mu\Psi$$
$$\delta\Psi = 3\tau\Psi$$
$$\overline{\delta}\Psi = -3\pi\Psi \tag{6.18}$$

Las ecuaciones basicas del formalismo de Newman-Penrose estan abarcadas en las relaciones de conmutacion, las identidades de Ricci y las identidades de Bianchi mencionadas. Estas ecuaciones seran utiles al clasificar los espacios-tiempo tipo D, como lo hace Kinnersley [1]

Bibliografía

[1] W. Kinnersley, *Type D vacuum matrics*, J. Math. Phys. 10 (1969) 1195.

[2] J. M. Stewart and M. Walker, *Perturbations of space-times in general relativity*, Proc. R. Soc. Lond. A341 (1974) 49

[3] R. Guven, *The solution of Dirac's equation in a class of type D vacuum space-times*, Proc. R. Soc. Lond. A356 (1977) 465

[4] S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*, Clarendon Press, Oxford