

# UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas  
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

"SUBGRUPO DE LIBRE ES LIBRE, CON GRÁFICAS"

TESIS PROFESIONAL

para obtener el Título de:  
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

presenta  
JUAN CARLOS DÍAZ PATIÑO

Asesora  
DRA. MARÍA LUISA PÉREZ SEGUÍ

MORELIA, MICHOACÁN JULIO 2006



# Índice general

<b>1. Gráficas lineales</b>	<b>1</b>
<b>2. Grupos libres</b>	<b>13</b>
2.1. El Grupo Libre . . . . .	13
2.2. Productos libres . . . . .	21
<b>3. El grupo fundamental de una gráfica</b>	<b>27</b>
3.1. Teorema de Seifert-Van Kampen . . . . .	28
3.2. Grupo Fundamental de una gráfica . . . . .	40
<b>4. Espacios cubrientes</b>	<b>45</b>
4.1. Definiciones básicas . . . . .	45
4.2. Espacio cubriente de una gráfica . . . . .	52
<b>5. Subgrupos de grupos libres</b>	<b>55</b>



# Introducción

La principal motivación en realizar el siguiente trabajo fue la de poder hacer una tesis donde se aplicara una gran variedad de conocimientos referentes a distintas materias que llamaron mi atención durante el tiempo que estude la licenciatura. Una virtud de este trabajo es ver cómo se complementan varias ramas de las matemáticas para encontrar una solución a un problema no tan sencillo de demostrar en la teoría de grupos, mostrando de esta manera cómo la gran diversidad de conocimientos usados adecuadamente, puede darnos grandes aportaciones en el campo de las ciencias.

Usaremos herramientas topológicas como lo son el grupo fundamental, la teoría de espacios cubrientes, el teorema de Seifert-Van Kampen, como así también temas de la teoría de conjuntos y de álgebra. Haremos una conjunción entre todos estos conocimientos para poder aplicarlos en la teoría de gráficas y así demostrar que el subgrupo de un grupo libre también es libre.

En este trabajo de tesis se ven demostraciones un tanto largas y complejas pero se tratan de escribir de manera didáctica usando una gran cantidad de dibujos, haciendo de éste un material manejable para el estudiante de licenciatura.

En el capítulo 1 damos una topología a las gráficas lineales y demostramos algunas propiedades que relacionan el estudio combinatorio de gráficas lineales y su estructura topológica, en el capítulo 2 estudiamos los grupos libres y productos libres que son temas no tratados usualmente en un primer curso de teoría de grupos. En el capítulo 3 revisamos conceptos de topología menos básica como el grupo fundamental y en particular demostraremos el Teorema de Seifert-Van Kampen y juntamos los temas ya tratados en la tesis para calcular el grupo fundamental de una gráfica. En el capítulo 4 profundizamos

un poco sobre la teoría de espacios cubrientes y determinamos que el espacio cubriente de una gráfica también es gráfica y además su grupo fundamental está en correspondencia con las aristas que no están contenidas en un árbol maximal. Finalmente, en el capítulo 5 se demuestra en teorema principal de la tesis que es: Subgrupo de un grupo libre es libre; esto se hace construyendo gráficas y subgráficas cuyos grupos fundamentales son el grupo y subgrupo dados y también daremos algunas consecuencias directas de este resultado.

# Capítulo 1

## Gráficas lineales

Hay muchas razones que despiertan el enorme interés que se presenta actualmente en la teoría de gráficas. Existe una enorme cantidad de aplicaciones en áreas de física, química, ciencias de la comunicación, computación, electrónica, ingeniería civil, arquitectura, genética, psicología, sociología, economía, antropología y lingüística. Así también la teoría está estrechamente relacionada con diferentes áreas de matemáticas como la teoría de grupos, matrices, análisis numérico, probabilidad, topología y combinatoria. Esto se debe a que la teoría de gráficas sirve como modelo matemático para cualquier sistema que involucra una relación binaria.

En este capítulo se incluyen algunas propiedades de gráficas así como resultados del tipo topológico de las gráficas. Daremos una definición topológica de gráfica que extiende nuestra noción intuitiva de gráfica en forma combinatoria. Supondremos conocidos los conceptos que se estudian en un curso básico de topología e incluso las definiciones básicas de grupo fundamental. También supondremos conocidos la definición y conceptos básicos combinatorios de la teoría de gráficas.

**Definición:** Un *arco* es un espacio topológico homeomorfo al intervalo  $[0,1]$ .

**Definición:** Sea  $X$  un espacio que es la unión de los subespacios  $X_\alpha$  con  $\alpha \in J$ . La topología de  $X$  se dice que es *coherente* con los subespacios  $X_\alpha$  siempre que un subconjunto  $C$  de  $X$  es abierto si y sólo si  $C \cap X_\alpha$  es abierto en  $X_\alpha$  para todo  $\alpha$ .

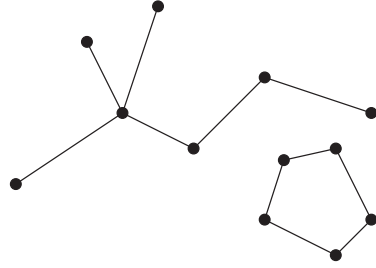


Figura 1.1: Gráfica lineal

La definición es equivalente si se cambia la palabra abierto por cerrado.

**Definición:** Una *gráfica lineal*  $X$  es unión de arcos  $A_\alpha$  con  $\alpha \in J$  que cumple con las siguientes 2 propiedades:

- i) Para  $\alpha \neq \beta$ , la intersección  $A_\alpha \cap A_\beta$  es vacía o un punto que debe ser extremo de cada uno de los arcos  $A_\alpha$  y  $A_\beta$ .
- ii) La topología de  $X$  es coherente con la de los subespacios  $A_\alpha$ .

Si  $X = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$  es una gráfica lineal, de ahora en adelante llamamos *arista* a cada  $A_\alpha$  y a los extremos de  $A_\alpha$  se les llama *vértices* de la gráfica y los puntos que no sean vértices se llaman puntos *interiores*.

La intención de esta definición es la de conservar la idea intuitiva que se tiene de gráficas finitas. A continuación se presentan algunos ejemplos:

**Ejemplo 1.1** La figura 1.1 es un ejemplo de una gráfica lineal finita.

**Ejemplo 1.2** La recta real  $\mathbb{R}$  también puede verse como una gráfica lineal donde los vértices son los números enteros y las aristas son los intervalos  $[n, n + 1]$  (figura 1.2).

**Ejemplo 1.3** Si en un círculo solamente asignamos dos puntos como vértices, el espacio resultante no es una gráfica porque no se cumple la propiedad i).





Figura 1.2: La recta Real

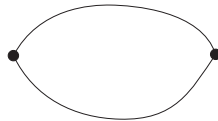


Figura 1.3: Unión de dos arcos



Figura 1.4: Círculo visto como gráfica lineal

*Mas sin embargo si asignamos tres puntos como vértices ahora sí tenemos la estructura de gráfica lineal (figura 1.4).*

Cuando se trata de gráficas finitas, la segunda propiedad puede cambiarse nada más pidiendo que el espacio  $X$  sea  $T_2$ , sin embargo cuando uno trata gráficas infinitas esto no es suficiente para que las propiedades de una gráfica se mantengan.

En el siguiente ejemplo vemos cómo en una gráfica finita es necesaria la condición de  $T_2$  para que tengamos una gráfica de la manera en la que las conocemos usualmente.

**Ejemplo 1.4** Sean  $I$  y  $J$  espacios homeomorfos al intervalo  $[0,1]$ ,  $X = I \dot{\cup} J$  y sea  $X$  la unión ajena de  $I$  y  $J$ . Definimos la topología de  $X$  de la siguiente manera:

*Sean  $i$  y  $j$  puntos interiores fijos de  $I$  y  $J$  respectivamente. Para cualquier abierto de  $I$  o  $J$  que no contenga a  $i$  o  $j$ , los abiertos son los mismos en  $X$ , pero si un abierto en  $I$  contiene a  $i$ , entonces el abierto en  $X$  es la unión de este abierto con uno en  $J$  que contenga a  $j$ . De esta manera nuestro espacio no es  $T_2$  y así tenemos un ejemplo de porqué es necesaria la condición de  $T_2$  para gráficas finitas (figura 1.5).*

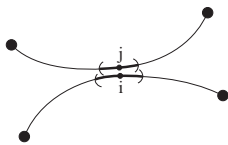


Figura 1.5:

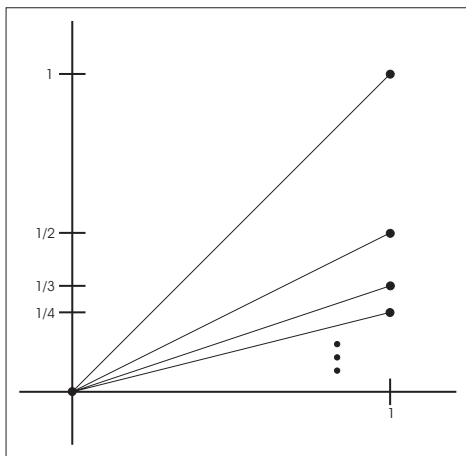


Figura 1.6: La escoba

El siguiente ejemplo vemos como en gráficas infinitas la condición de  $T_2$  no es suficiente para que tengamos la estructura de una gráfica.

**Ejemplo 1.5 *La escoba.*** Sea  $X$  el conjunto de todos los segmentos de recta que tienen como extremos el origen y la coordenada  $(1, 1/n)$  con  $n \in \mathbb{N}$  (figura 1.6).

En este ejemplo vemos que si damos a  $X$  la topología como subespacio de  $\mathbb{R}^2$ , ésta es más gruesa que la topología coherente ya que el abierto formado únicamente por el segmento de recta que va de  $(0,0)$  hasta  $(1,0)$  es un abierto en la topología coherente pero no lo es en la de subespacio.

**Lema 1.6** *Toda gráfica es normal como espacio topológico.*

**Demostración:** Sean  $B$  y  $C$  conjuntos cerrados ajenos contenidos en la gráfica  $X = \bigcup A_\alpha$  con  $\alpha \in J$ . Supongamos primero que todos los vértices

están en  $B \cup C$ ; vamos a aprovechar la condición de la topología coherente para construir abiertos ajenos  $U$  y  $V$  que contengan a  $B$  y  $C$ . Para cada  $\alpha \in J$  escogemos abiertos ajenos  $U_\alpha$  y  $V_\alpha$  en  $A_\alpha$  de tal manera que  $B \cap A_\alpha \subseteq U_\alpha$  y  $C \cap A_\alpha \subseteq V_\alpha$ . Definimos  $U = \cup U_\alpha$  y  $V = \cup V_\alpha$ . Mostraremos que  $U$  y  $V$  son ajenos. Supongamos que existe  $x \in U \cap V$ ; entonces  $x \notin U_\alpha \cap V_\alpha$  porque los escogimos ajenos, así que  $x \in U_\alpha \cap V_\beta$  para algunos  $\alpha, \beta \in J$  y  $\alpha \neq \beta$ . Como  $|A_\alpha \cap A_\beta| = 1$ , entonces  $x$  es un vértice, lo cual es una contradicción pues si  $x$  estuviera en  $B$  no podría estar en ningún  $V_\alpha$  y si estuviera en  $C$  usaríamos un argumento similar. Tenemos también que  $U$  y  $V$  son abiertos por construcción y que  $U \cap A_\alpha = U_\alpha$  y  $V \cap A_\alpha = V_\alpha$ . Por lo tanto  $U$  y  $V$  separan a  $B$  y  $C$ .

Ahora supongamos que existiera un vértice  $x_0$  que no estuviera contenido en  $B \cup C$ ; entonces al construir los abiertos  $U$  y  $V$  sólo habría que quitar el punto  $x_0$  de cada  $U_\alpha$  y cada  $V_\alpha$ . ■

Al conjunto de vértices lo denotamos por  $X^0$ . El conjunto  $X^0$  es un conjunto cerrado porque cada vértice es un conjunto cerrado en cada arista que lo contiene y también es un conjunto discreto. También hay que hacer la observación de que cada arista es un conjunto cerrado dentro de la gráfica.

**Definición:** Sea  $X$  una gráfica lineal. Una *subgráfica*  $Y$  de  $X$  es un subespacio de  $X$  que es unión de aristas de  $X$ .

**Lema 1.7** *Las subgráficas son gráficas lineales y además son subconjuntos cerrados.*

**Demostración:** Para ver que una subgráfica  $Y$  de  $X$  es gráfica hay que verificar las dos condiciones de la definición de gráfica, la primera condición se satisface de la definición de subgráfica y para la segunda, la topología de  $X$  se hereda a la subgráfica  $Y$  por lo tanto  $Y$  es gráfica.

Para ver que la subgráfica es cerrada, tomamos un punto  $x$  en el complemento y analizamos dos casos, cuando  $x$  es interior y cuando  $x$  es vértice. Si  $x$  es punto interior, escogemos una vecindad de  $x$  dentro de la arista y está totalmente contenida en el complemento, para cuando  $x$  es un vértice simplemente tomamos una vecindad de  $x$  de la forma  $[x, y)$ , donde  $y$  esta en el complemento y es un punto interior de una arista. De esta manera la subgráfica  $Y$  es un conjunto cerrado. ■

El siguiente lema es fundamental ya que permite trabajar los conjuntos compactos dentro de subgráficas finitas.

**Lema 1.8** *Sea  $X$  una gráfica lineal. Si  $C$  es un subconjunto compacto de  $X$ , entonces existe una subgráfica finita  $Y$  de  $X$  que contiene a  $C$ . Si  $C$  también es conexo, se puede escoger la gráfica conexa.*

**Demostración:** Sea  $X = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$  gráfica lineal. Para demostrar este lema hay que ver que  $C$  sólo contiene un número finito de vértices y que también solo hay un número finito de  $\alpha$ 's tales que  $A_\alpha$  interseca a  $C$ . Observemos que el conjunto de vértices contenidos en  $C$  es un conjunto cerrado y discreto dentro de un compacto y por lo tanto  $X^0 \cap C$  es finito. Ahora vamos escoger puntos  $x_\alpha$ , donde cada  $x_\alpha$  es un punto interior de  $A_\alpha$  y que además esta contenido en  $C$ . Construimos el conjunto  $B = \{x_\alpha : \alpha \in J'\}$  donde  $J' \subseteq J$ . Nuevamente,  $B \cap C$  es un conjunto cerrado y discreto contenido en un compacto, por lo tanto  $B$  es un conjunto finito y de allí concluimos que sólo hay un número finito de  $\alpha$ 's tales que  $A_\alpha$  interseca a  $C$ . Con esta información podemos construir la subgráfica  $Y$ : para cada vértice contenido en  $C$  tomamos la arista que lo contenga y hacemos lo mismo para los puntos interiores que también estén contenidos en  $C$ . Ahora, si  $C$  es conexo,  $Y$  es la unión de aristas, cada una de las cuales interseca a  $C$ , así que  $Y$  es conexo. ■

Recordemos que un espacio  $X$  es *localmente conexo por trayectorias en  $x$*  si para cada abierto  $U$  de  $x$ , existe un abierto conexo por trayectorias  $V$  de  $x$  contenido en  $U$ . Si  $X$  es localmente conexo por trayectorias para cada uno de sus puntos, se dice que  $X$  es *localmente conexo por trayectorias*.

También recordemos que calcular el grupo fundamental de un espacio topológico  $X$  con un punto distinguido, es una asignación funtorial y que si  $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  es una función continua, entonces

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

está definido por la ecuación

$$h_*([f]) = [h \circ f].$$

**Definición:** Un espacio  $B$  es *semilocalmente simplemente conexo* si para cada  $b \in B$ , existe una vecindad  $U$  de  $b$  tal que el homomorfismo

$$i_* : \pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$$

inducido por la inclusión es trivial.

**Lema 1.9** *Si  $X$  es una gráfica lineal, entonces  $X$  es localmente conexo por trayectorias y semilocalmente simplemente conexo.*

**Demostración:** Sea  $X$  una gráfica lineal. Para ver que  $X$  es localmente conexo por trayectorias hay que analizar dos casos: cuando  $x$  es punto interior y cuando  $x$  es vértice. Cuando  $x$  es punto interior de una arista, escogemos una vecindad  $U$  de  $x$  homeomorfa al  $(0,1)$  totalmente contenida en la arista y ésta es conexa por trayectorias. Si  $x$  es un vértice la vecindad de  $x$  sería unión de abiertos de  $X$  homeomorfos al  $[0, 1)$  y tendrían como punto común a  $x$ , todos estos abiertos son conexos y por lo tanto su unión es conexa.

Para ver que la gráfica  $X$  es semilocalmente simplemente conexa procedemos de manera similar: Si  $x$  es un punto interior, una vecindad  $U$  homeomorfa al  $(0,1)$  y ésta es tal que el homomorfismo  $i_* : \pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$  inducido por la inclusión es trivial. Si  $x$  es un vértice, el abierto  $U$  que nos sirve es la unión de todas las aristas que contienen a  $x$  pero les quitamos el extremo diferente de  $x$ , así que  $U$  es unión de abiertos conexos que tienen a  $x$  en común. Sea  $f$  un lazo en este abierto, como  $f$  es un conjunto compacto en  $X$  tenemos que  $f$  está contenido en una subgráfica finita y un lazo en este subespacio es contraíble, por lo tanto  $X$  es semilocalmente simplemente conexo. ■

En el siguiente ejemplo se ilustra el porqué pedimos que la topología de una gráfica sea coherente.

**Ejemplo 1.10** *Círculos unidos en un punto.* Sea  $G$  el espacio topológico compuesto por la unión de los círculos con radio  $1/n$  y centro en  $(1/n, 0)$  (figura 1.7).

Si le damos la topología de subespacio a  $G$  al "fragmentar" cada círculo en tres aristas unidas en sus extremos como en el ejemplo 1.3, no tendríamos la propiedad de semilocalmente simplemente conexo porque toda vecindad de

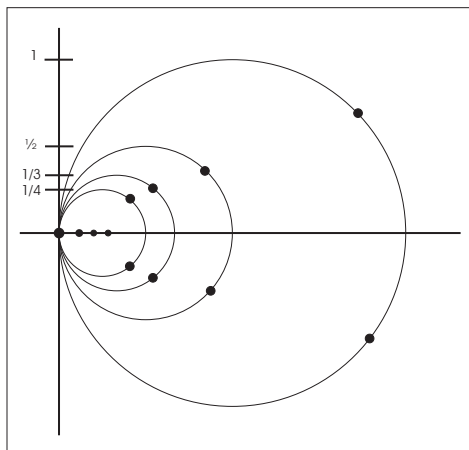


Figura 1.7: Círculos unidos en un punto.

0 contendría círculos completos. Pero si al espacio  $G$  le damos la estructura de gráfica, las vecindades del cero serían unión de aristas con un solo punto en común, y allí sí se cumpliría la propiedad de semilocalmente simplemente conexo al tomar la vecindad de 0 formada únicamente por las aristas que intersectan a 0 y quitándoles el vértice distinto de 0.

**Definición:** Un *trayecto* en  $X$  es una sucesión  $e_1, \dots, e_n$  de aristas orientadas de  $X$  tal que el vértice final de  $e_i$  coincide con el vértice inicial de  $e_{i+1}$  para  $i = 1, \dots, n-1$ . Un trayecto queda completamente especificado por la sucesión de vértices  $x_0, \dots, x_n$ , donde  $x_0$  es el vértice inicial de  $e_1$  y  $x_i$  es el vértice final de  $e_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Se llama trayecto de  $x_0$  a  $x_n$ . Se dirá que es un *trayecto cerrado* si  $x_0 = x_n$ .

Hay que hacer la aclaración de que trayectoria y trayecto no son la mismo ya que los trayectos están definidos solamente para vértices y aristas orientadas.

En teoría de gráficas existe el concepto de gráfica conexa (sin tomar en cuenta topología alguna): Una gráfica es conexa si entre cada par de vértices existe un trayecto de  $x$  a  $y$  (una vez que se les dé a las aristas una orientación apropiada). A continuación veremos que este concepto coincide con el topológico.

**Lema 1.11** *Una gráfica es conexa como espacio topológico si y sólo si lo es como gráfica.*

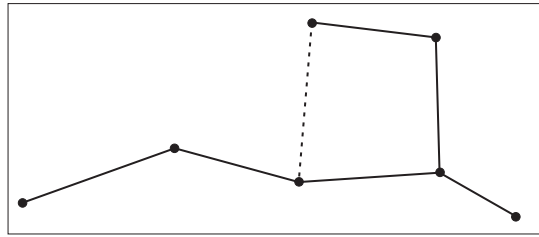


Figura 1.8: Gráfica lineal.

**Demostración:**

- $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $X$  es conexo como espacio topológico. Definimos  $x \sim y$  si existe una trayectoria entre los dos. Observemos que si  $x$  y  $y$  están en la misma arista, entonces  $x \sim y$ . Ahora sea  $Y_x$  el conjunto de todos los puntos que están relacionados con  $x$ . Tenemos que  $Y_x$  es una partición, también es una subgráfica por lo tanto es un conjunto cerrado en  $X$ , entonces  $X = \cup Y_x$  donde los  $Y_x$  hacen una partición de  $X$  pero  $X$  es conexo entonces  $Y_x$  es la única componente, por lo tanto, cada vértice puede ser unido por un trayecto en  $X$ .
- $\Leftarrow$ ) Si todos los vértices pueden ser unidos por un trayecto, por consecuencia pueden ser unidos por una trayectoria, de esta manera todos los vértices están dentro de la misma componente conexa, los puntos interiores de una arista también tienen que estar en la misma componente que los vértices porque las aristas son conexas, por lo tanto sólo existe una componente conexa de  $X$  y así  $X$  es conexo. ■

**Definición:** Sea  $e_1, \dots, e_n$  un trayecto en la gráfica lineal  $X$ . Podría ocurrir que las aristas orientadas  $e_i$  y  $e_{i+1}$  fueran la misma arista pero con orientación contraria. Si esta situación no ocurre en un trayecto, decimos que éste es un *trayecto reducido*.

**Definición:** Una subgráfica  $T$  de una gráfica  $X$  se dice que es un *árbol* en  $X$  si  $T$  es conexa y no contiene trayectos cerrados reducidos.

En la figura 1.8 tenemos que la gráfica sería un árbol si quitamos la línea punteada.

**Lema 1.12** *Si  $T$  es un árbol en  $X$  y  $A$  es una arista de  $X$  que intersecta a  $T$  en exactamente un vértice, entonces  $T \cup A$  es un árbol en  $X$ . Recíprocamente, si  $T$  es un árbol finito en  $X$  que consta de más de una arista, entonces existen un árbol  $T_0$  en  $X$  y una arista  $A$  de  $X$  que corta a  $T_0$  en exactamente un vértice, tal que  $T = T_0 \cup A$ .*

**Demostración:** Sean  $a$  y  $b$  los vértices inicial y final de  $A$  respectivamente; Entonces  $T \cup A$  es conexo. Para demostrar que es un árbol, sólo falta probar que no contiene trayectos cerrados reducidos. Supongamos que existe un trayecto cerrado reducido  $x_0, \dots, x_n$  en  $T \cup A$ . Ahora hay que analizar varios casos:

- 1) Si  $b \neq x_i$  para toda  $x_i$  entonces el camino está totalmente contenido en  $T$ , lo cual es una contradicción porque  $T$  es un árbol.
- 2) Si  $b = x_i$  para algún  $i = 1, \dots, n - 1$  entonces  $a = x_{i-1} = x_{i+1}$ , por lo tanto no es un trayecto reducido, contradiciendo la hipótesis.
- 3) Si  $b = x_0 = x_n$  entonces  $x_1, \dots, x_{n-1}$  es un trayecto cerrado reducido en  $T$ , lo cual también es una contradicción.

Para la siguiente parte del lema hay que ver que en nuestro árbol existe al menos un vértice que pertenece solamente a una arista. Si esto no sucediera, podríamos construir un camino cerrado reducido debido a que nuestra gráfica es finita. Sea  $T$  un árbol en  $X$  y sea  $x_0$  un vértice que pertenece solamente a una arista  $A$ , sea  $T_0$  la subgráfica que consiste en quitar el interior de la arista  $A$  y el vértice  $x_0$  del árbol  $T$ , ahora hay que demostrar que  $T_0$  es árbol. Como  $T$  no contiene trayectos cerrados reducidos, tampoco los tiene  $T_0$ , y  $T_0$  es conexo porque si  $T_0$  fuese la unión de dos cerrados ajenos,  $T_0 \cup A$  sería la unión de dos conjuntos cerrados ajenos porque  $A$  solo tiene un punto en común con  $T_0$  y entonces  $T$  no sería conexo, contradiciendo la hipótesis. ■

**Lema 1.13** *Todo árbol es simplemente conexo.*

**Demostración:** Procederemos por inducción para el caso finito, Para una arista tenemos que el árbol es simplemente conexo porque es un espacio homeomorfo al intervalo  $[0,1]$ . Sea  $T$  un árbol de  $n$  aristas con  $n > 1$ , entonces



por el teorema anterior, existe un árbol  $T_0$  y una arista  $A$  tal que  $T = T_0 \cup A$ . Ahora,  $T_0$  es retracto por deformación de  $T$  y como  $T_0$  tiene  $n - 1$  aristas es  $T_0$  simplemente conexo, por lo tanto  $T$  es simplemente conexo.

Para el caso infinito hacemos un lazo en nuestro árbol  $T$ , nuestro lazo es un conjunto cerrado y compacto, por lo tanto está contenido en una subgráfica finita y como esta es simplemente conexa, tenemos que nuestro lazo es homotópicamente nulo, por lo tanto  $T$  es simplemente conexo. ■

**Definición:** Un árbol  $T$  en  $X$  es maximal si no existe árbol en  $X$  que contenga propiamente a  $T$ .

**Teorema 1.14** *Sea  $X$  una gráfica conexa. Un árbol  $T$  en  $X$  es maximal si, y sólo si, contiene todos los vértices de  $X$ .*

**Demostración:**

⇐) Sea  $T$  un árbol en  $X$ ; supongamos que  $T$  contiene a todos los vértices de  $X$ . Sea  $Y$  una subgráfica de  $X$  que contenga propiamente a  $T$ ; demostraremos que  $Y$  no es un árbol. Como  $Y$  contiene propiamente a  $T$ , existe un arista  $A$  que no está en  $T$ . Llamemos  $a$  y  $b$  a los extremos de esta arista. Como el árbol es conexo, podemos unir los puntos  $a$  y  $b$  por una trayectoria contenida en  $T$ , ahora podemos continuar nuestra trayectoria uniendo el punto  $b$  con el punto  $a$  por medio de la arista  $A$ , lo cual nos daría una trayectoria cerrada, por lo tanto  $Y$  no es un árbol. Entonces  $T$  es un árbol maximal.

⇒) Sea  $T$  un árbol; probaremos que si  $T$  no contiene a todos los vértices de  $X$  entonces no es maximal. Sea  $x_0$  un vértice que no esté contenido en  $T$ . Como  $X$  es conexo, podemos escoger una trayectoria desde un vértice  $y \in T$  hasta  $x_0$ ; sea  $y_i$  el último vértice de la trayectoria que está contenido en  $T$ ; ahora tenemos una arista  $A$  que intersecta en un solo punto a  $T$  así que  $T \cup A$  es un árbol por el lema 1.12 y  $T$  no es maximal. De lo anterior deducimos que si un árbol es maximal, entonces contiene a todos los vértices de  $X$ . ■

**Teorema 1.15** *Si  $X$  es una gráfica lineal entonces cada árbol  $T_0$  en  $X$  está contenido en un árbol maximal en  $X$ .*

**Demostración:** Sea  $\tau$  la colección de árboles que contienen a  $T_0$ . Ordenamos a  $\tau$  por la inclusión. Vamos a demostrar que la unión de una subcolección de  $\tau$  también es un árbol y después usaremos el Lema de Zorn para demostrar que  $\tau$  tiene un elemento maximal. Sea  $Y = \bigcup_{i \in J} T_i$  donde  $T_i$  es un elemento de  $\tau$ . Entonces  $Y$  es la unión de gráficas conexas que tienen a  $T_0$  en común, por lo tanto  $Y$  también es conexas. Ahora hay que ver que no contiene trayectos cerrados. Supongamos que existe un trayecto cerrado  $x_0, x_1, \dots, x_n$  en  $Y$ . Para cada arista  $A_i$  de nuestro trayecto cerrado, escogemos un árbol  $T_i \subseteq Y$  de manera que el árbol  $T_n$  contendrá a todas las aristas anteriores, por lo tanto contendrá a el trayecto cerrado, lo cual es una contradicción, de allí que  $Y$  no contiene trayectos cerrados. Hemos demostrado que cualquier colección en  $\tau$  tiene cota superior, entonces por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal. ■

**Definición:** Si  $X$  es una gráfica lineal finita, se define el *número de Euler* de  $X$  como el número de vértices de  $X$  menos el número de aristas de  $X$ . Se suele representar por  $\chi(X)$ .

**Lema 1.16** *El número de Euler de un árbol  $T$  es 1.*

**Demostración:** Procedemos por inducción sobre las aristas. Analicemos el caso cuando el número de aristas es  $n = 1$ . Para este caso tenemos dos vértices y una arista, por lo tanto  $\chi(T) = 1$ . Ahora lo suponemos cierto para  $n$ , vamos a demostrarlo para  $n + 1$ . Tenemos que  $T = T_0 \cup A$  por el lema 1.12, donde  $T_0$  es un árbol de  $n$  aristas y  $A$  es una arista que sólo intersecta en un punto a  $T$ ; por la hipótesis de inducción,  $\chi(T_0) = 1$  y, como agregamos un vértice y una arista a este árbol, concluimos que  $\chi(T) = 1$ . ■

# Capítulo 2

## Grupos libres

Este capítulo incluye las principales propiedades que caracterizan el grupo libre y teoremas importantes en la área de teoría de grupos. Supondremos conocidos todos los conceptos básicos de la Teoría de grupos que se estudian en un primer curso de esta área.

### 2.1. El Grupo Libre

Empecemos recordando algunos conceptos de grupos. Supondremos primero que los grupos son abelianos y utilizaremos, en este caso, la notación aditiva.

**Definición:** Sea  $K$  un conjunto de índices y sea  $\{A_k | k \in K\}$  una familia de grupos. El *producto directo* denotado por  $\prod_{k \in K} A_k$ , es el grupo cuyos elementos son elementos  $(a_k)$  del producto cartesiano de  $A_k$  y cuya operación es:

$$(a_k) + (b_k) = (a_k + b_k).$$

La *suma directa*, denotada por  $\bigoplus_{k \in K} A_k$ , es el subgrupo de  $\prod_{k \in K} A_k$  que consiste de todos los elementos  $(a_k)$  para los cuales todos los elementos  $(a_k)$  son iguales a cero salvo un número finito.

**Definición:** Un subconjunto finito  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  de un grupo  $G$  es *inde-*

*pendiente* si para todo  $m_i \in \mathbb{Z}$ ,  $\sum m_i x_i = 0$  implica  $m_i x_i = 0$  para cada  $i$ . Un conjunto infinito  $Y$  con elementos distintos del cero en  $G$  es independiente si todo subconjunto finito es independiente.

**Definición:** Sea  $G$  un grupo y  $X$  un subconjunto de  $G$ , denotamos por  $\langle X \rangle$  al subgrupo generado por  $X$ .

**Lema 2.1** *Un subconjunto  $X$  de elementos distintos de cero de un grupo  $G$  es independiente si y sólo si*

$$\langle X \rangle = \bigoplus_{x \in X} \langle x \rangle$$

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $X$  es independiente. Si  $x_0 \in X$  y  $y \in \langle x_0 \rangle \cap \langle X - \{x_0\} \rangle$  entonces  $y = mx_0$  y  $y = \sum m_i x_i$ , donde los  $x_i$  son elementos distintos de  $X$  y ninguno de ellos igual a  $x_0$ . Entonces

$$-mx_0 + \sum m_i x_i = 0,$$

entonces la independencia nos da cada termino igual a 0; en particular  $0 = mx_0 = y$ .

$\Leftarrow$ ) Como  $\langle X \rangle = \bigoplus_{x \in X} \langle x \rangle$ , tenemos que el único elemento en común entre  $\langle x_i \rangle$  y  $\langle x_j \rangle$  es 0 para todo  $i$  y  $j$ . Entonces si  $m_i x_i + m_j x_j = 0$  se concluye que  $m_i = 0$  y  $m_j = 0$  porque  $x_i$  y  $x_j$  son diferentes de 0. ■

**Definición:** Un grupo abeliano  $F$  es *libre abeliano* si es suma directa de grupos cíclicos infinitos. Más precisamente, hay un subconjunto  $X \subset F$  de elementos de orden infinito, llamado *base* de  $F$ , con  $F = \bigoplus_{x \in X} \langle x \rangle$ .

**Teorema 2.2** *Dos grupos libres abelianos  $F = \bigoplus_{x \in X} \langle x \rangle$  y  $G = \bigoplus_{y \in Y} \langle y \rangle$  son isomorfos si y sólo si  $|X| = |Y|$ .*

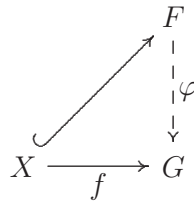
**Demostración:**

- ⇐) Como  $|X| = |Y|$ , hay una biyección  $f : X \rightarrow Y \subset G$ , y  $f$  determina un homomorfismo  $\varphi : F \rightarrow G$  con  $\varphi(x) = f(x)$  para toda  $x \in X$ . De manera similar, existe un homomorfismo  $\psi : G \rightarrow F$  con  $\psi(y) = f^{-1}(y)$  para toda  $y \in Y$ . Pero  $\varphi\psi$  y  $\psi\varphi$  son identidades porque cada una fija los elementos de la base; entonces  $\varphi : F \rightarrow G$  es un isomorfismo.
- ⇒) Recíprocamente, si  $p$  es primo, entonces  $V = F/pF$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{Z}_p$ . Afirmamos que  $\overline{X} = \{x + pF : x \in X\}$  es una base de  $V$ . Es claro que  $\overline{X}$  genera  $V$ . Supongamos que  $\Sigma[m_x](x + pF) = 0$ , donde  $[m_x] \in \mathbb{Z}_p$  y no todos los  $[m_x] = [0]$ . Si  $m_x$  es un representante de  $[m_x]$ , entonces  $\Sigma m_x(x + pF) = 0$ . En  $F$ , esta ecuación se convierte en  $\Sigma m_x \in pF$ ; esto es, hay enteros  $n_x$  con  $\Sigma m_x = \Sigma p n_x x$ . Independencia de la base nos da  $m_x = p n_x$  para toda  $x$ , y también  $[m_x] = [0]$  para toda  $x$ . Esta contradicción muestra que  $\overline{X}$  es independiente, y entonces es base de  $V$ . Hemos probado que  $\dim(F/pF) = |\overline{X}| = |X|$ . De manera similar, se muestra que  $\dim(F/pF) = |Y|$ , entonces  $|X| = |Y|$ . ■

**Definición:** El *rango* de un grupo libre abeliano  $F$  es el número de elementos en una base de  $F$ .

A partir de aquí los grupos no necesariamente son abelianos. Así que conviene usar la notación multiplicativa.

**Definición:** Si  $X$  es un subconjunto de un grupo  $F$ , entonces  $F$  es un *grupo libre con base  $X$*  si para cualquier grupo  $G$  y cualquier función  $f : X \rightarrow G$  existe un único homomorfismo  $\varphi : F \rightarrow G$  que extiende  $f$ .



La siguiente construcción se usará para demostrar que el grupo libre existe. Sea  $X$  un conjunto y sea  $X^{-1}$  un conjunto ajeno a  $X$  con el cual hay una biyección  $X \rightarrow X^{-1}$  y que denotamos por  $x \mapsto x^{-1}$ . Denotamos por 1 algún

elemento que no está contenido en  $X \cup X^{-1}$ . Si  $x \in X$  entonces  $x^1$  denota a  $x$  y  $x^0$  denota al 1.

**Definición:** Una *palabra* es una sucesión  $w = (a_1, a_2, \dots)$ , donde  $a_i \in X \cup X^{-1} \cup \{1\}$  para toda  $i$  y existe un entero  $n \geq 0$  tal que  $a_i = 1$  para todo  $i > n$ . En particular la sucesión constante

$$(1, 1, \dots)$$

es una palabra llamada *palabra vacía* y denotada por 1.

Como las palabras tienen un número finito de elementos antes de que la sucesión se vuelva constante, usamos una notación más familiar para las palabras no vacías;

$$w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$$

donde  $x_i \in X$ ,  $\varepsilon_i = \pm 1$  o 0 y  $\varepsilon_n = \pm 1$ . Observemos que el "deletreo" de una palabra es único: dos sucesiones  $(a_i)$  y  $(b_i)$  son iguales si y sólo si  $a_i = b_i$  para toda  $i$ . La *longitud* de la palabra vacía se define como 0, la longitud de una palabra  $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$  se define como  $n$ .

**Definición:** Si  $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$  es una palabra, entonces su *inverso* es la palabra  $w^{-1} = x_n^{-\varepsilon_n} \cdots x_1^{-\varepsilon_1}$

**Definición:** Una palabra  $w$  en  $X$  es *reducida* si  $w$  es vacía o  $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$  donde todo  $x_i \in X$ ,  $\varepsilon_i = \pm 1$  y  $x$  y  $x^{-1}$  nunca están juntos.

Podemos definir una multiplicación de palabras por yuxtaposición, es decir, si  $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$  y  $u = y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \cdots y_m^{\delta_m}$ , entonces

$$wu = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n} y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \cdots y_m^{\delta_m}.$$

Esta multiplicación no define un producto en el conjunto de todas las palabras reducidas en  $X$  porque  $wu$  no es necesariamente una palabra reducida (a pesar de que  $w$  y  $u$  sí lo sean). Podemos definir una nueva multiplicación para las palabras reducidas  $w$  y  $u$  como la palabra reducida obtenida de  $wu$  después de cancelaciones. Mas precisamente, existe una subpalabra (posiblemente vacía)  $v$  de  $w$  con  $w = w'v$  tal que  $v^{-1}$  es una subpalabra de  $u$  con  $u = v^{-1}u''$  y tal que  $w'u''$  es reducida. Definimos el producto de palabras reducidas llamado *yuxtaposición* por

$$wu = w'u''$$

**Teorema 2.3** *Dado un conjunto  $X$  existe un grupo libre  $F$  con base  $X$ .*

**Demostración:** Sea  $F$  el conjunto de todas las palabras reducidas en  $X$ . Se puede mostrar que  $F$  es un grupo bajo la yuxtaposición, pero verificar asociatividad implica un tedioso análisis de casos. En vez de eso usaremos el *truco de van der Warden* descrito a continuación.

Para cada  $x \in X$  construimos dos funciones  $|x| : F \rightarrow F$  y  $|x^{-1}| : F \rightarrow F$  como sigue: Para  $\varepsilon = \pm 1$ ,

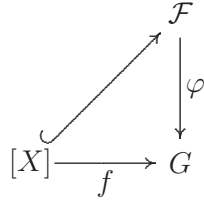
$$|x^\varepsilon|(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}) = \begin{cases} x^\varepsilon x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}, & \text{si } x^\varepsilon \neq x_1^{-\varepsilon_1} \\ x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}, & \text{si } x^\varepsilon = x_1^{-\varepsilon_1} \end{cases}$$

Como las composiciones  $|x^\varepsilon| \circ |x^{-\varepsilon}|$  y  $|x^{-\varepsilon}| \circ |x^\varepsilon|$  son ambas la identidad  $1_F : F \rightarrow F$ , concluimos que  $|x^\varepsilon|$  es una permutación de  $F$  con inversa  $|x^{-\varepsilon}|$ . Sea  $S_F$  el grupo simétrico en  $F$ , y sea  $\mathcal{F}$  el subgrupo de  $S_F$  generado por  $[X] = \{|x| : x \in X\}$ . Afirmamos que  $\mathcal{F}$  es un grupo libre con base  $[X]$ . Observemos que existe una biyección  $\zeta : [X] \rightarrow X$  definida por  $|x| \mapsto x$ . Un elemento arbitrario  $g \in \mathcal{F}$  distinto de la identidad tiene una factorización

$$g = |x_1^{\varepsilon_1}| \circ |x_2^{\varepsilon_2}| \circ \cdots \circ |x_n^{\varepsilon_n}|,$$

donde  $\varepsilon_i = \pm 1$  y  $|x^\varepsilon|$  y  $|x^{-\varepsilon}|$  nunca son adyacentes. Tal factorización de  $g$  es única, para  $g(1_X) = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$  y esto muestra que el deletreo de una palabra es único.

Para poder ver que  $\mathcal{F}$  es libre con base  $[X]$ , sea  $G$  un grupo y  $f : [X] \rightarrow G$ .



La factorización es única; la función  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow G$  dada por

$$\varphi(|x_1^{\varepsilon_1}| \circ |x_2^{\varepsilon_2}| \circ \cdots \circ |x_n^{\varepsilon_n}|) = f(|x_1|)^{\varepsilon_1} f(|x_2|)^{\varepsilon_2} \cdots f(|x_n|)^{\varepsilon_n}$$

está bien definida y extiende a  $f$ . Como  $[X]$  genera  $\mathcal{F}$ , es suficiente mostrar que  $\varphi$  es un homomorfismo.

Sean  $w$  y  $u$  palabras reducidas en  $[X]$ . Es obvio que  $\varphi(w \circ u) = \varphi(w)\varphi(u)$  sin importar si la palabra  $wu$  (obtenida de  $w \circ u$  borrando las barras verticales) es reducida. Escribamos  $w = w' \circ v$  y  $u = v^{-1} \circ u''$  como en la definición de yuxtaposición. Ahora

$$\begin{aligned}\varphi(w) &= \varphi(w')\varphi(v) \text{ y} \\ \varphi(u) &= \varphi(v^{-1})\varphi(u'') = \varphi(v)^{-1}\varphi(u'')\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\varphi(w)\varphi(u) &= \varphi(w')\varphi(v)\varphi(v)^{-1}\varphi(u'') \\ &= \varphi(w')\varphi(u'').\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\varphi(w \circ u) &= \varphi(w' \circ u'') \\ &= \varphi(w')\varphi(u'')\end{aligned}$$

(porque  $w' \circ u''$  es reducida), y entonces  $\varphi$  es un homomorfismo. Hemos probado que  $\mathcal{F}$  es un grupo libre con base  $[X]$ . Como  $\hat{\zeta} : \mathcal{F} \rightarrow F$  definido por  $|x_1^{\varepsilon_1}| \circ |x_2^{\varepsilon_2}| \circ \cdots \circ |x_n^{\varepsilon_n}| \mapsto x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ , es una biyección con  $\hat{\zeta}([X]) = \zeta([X]) = X$ ,  $F$  es un grupo isomorfo a  $\mathcal{F}$ ; entonces  $F$  es un grupo libre con base  $X$ . ■

**Corolario 2.4** *Cualquier grupo  $G$  es cociente de un grupo libre.*

**Demostración:** Construyamos el conjunto  $X = \{x_g : g \in G\}$ . De esta manera  $f : x_g \rightarrow g$  es una biyección  $X \rightarrow G$ . Si  $F$  es libre con base  $X$  entonces existe un homomorfismo  $\varphi : F \rightarrow G$  que extiende  $f$ ; además  $\varphi$  es una función suprayectiva porque  $f$  lo es. Entonces por el primer teorema de isomorfismo  $G \cong F/\ker\varphi$ . ■

**Definición:** Sea  $X$  un conjunto y  $\Delta$  la familia de palabras en  $X$ . Un grupo  $G$  tiene *generadores*  $X$  y *relaciones*  $\Delta$  si  $G \cong F/R$ , donde  $F$  es el grupo libre con base  $X$  y  $R$  es el subgrupo normal de  $F$  generado por  $\Delta$ . El par ordenado  $(X|\Delta)$  se llama *presentación* de  $G$ .



Una relación  $r \in \Delta$  se escribe de costumbre como  $r = 1$  para resaltar que en el grupo cociente  $G$  la relación es el elemento trivial.

Hay dos razones que nos obligan a definir  $R$  como el subgrupo normal de  $F$  generado por  $\Delta$ : La primera es que si  $r \in \Delta$  y  $w \in F$  entonces  $r = 1$  implica que  $wrw^{-1} = 1$  en  $G$ ; la segunda es que queremos formar un grupo cociente y esto sólo es posible mediante grupos normales.

**Ejemplo 2.5** *El grupo cíclico  $\mathbb{Z}_6$  tiene generador  $x$  y relación  $x^6 = 1$ .*

Un grupo libre  $F = \langle x \rangle$  con un generador es cíclico infinito y  $\langle x \rangle / \langle x^6 \rangle \cong \mathbb{Z}_6$ . Una presentación de  $G$  es  $(x \mid x^6)$ .

**Ejemplo 2.6** *Otra presentación de  $\mathbb{Z}_6$  es*

$$\mathbb{Z}_6 = (x, y \mid x^3 = 1, y^2 = 1, xyx^{-1}y^{-1} = 1)$$

**Ejemplo 2.7** *Un grupo abeliano  $G$  con base  $X$  tiene presentación*

$$G = (X \mid xyx^{-1}y^{-1} = 1 \text{ para todo } x, y \in X).$$

**Ejemplo 2.8** *Un grupo libre  $F$  con base  $X$  tiene presentación*

$$F = (X \mid \emptyset)$$

Ya que demostramos la existencia del grupo libre, ahora hay que averiguar bajo qué circunstancias dos grupos libres son isomorfos. Para esto "abelianizaremos" los grupos y utilizaremos el teorema 2.2

**Definición:** Si  $a, b \in G$ , el *conmutador* de  $a$  y  $b$  denotado por  $[a, b]$ , es

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$$

El *subgrupo conmutador* (o subgrupo derivado) de  $G$ , denotado por  $G'$ , es el subgrupo de  $G$  generado por todos los conmutadores.

**Lema 2.9** *Si  $F$  es un grupo libre con base  $X$ , entonces  $F/F'$  es un grupo libre abeliano con base  $X_{\#} = \{xF' : x \in X\}$ .*

**Demostración:** Para esta demostración es suficiente ver que dada una función arbitraria  $f : X_{\#} \rightarrow A$ , donde  $A$  es abeliano, existe una única función  $\tilde{\varphi}$  que extiende a  $f$ .

Sea  $A$  un grupo abeliano y  $f : X_{\#} \rightarrow A$  una función. Definimos  $f_{\#} : X \rightarrow A$  por  $x \mapsto f(xF')$ . Como  $F$  es libre con base  $X$ , existe un homomorfismo  $\varphi : F \rightarrow A$  que extiende  $f_{\#}$ . Pero  $F' \leq \ker \varphi$ , porque  $A$  es abeliano, de aquí que hay un homomorfismo  $\tilde{\varphi} : F/F' \rightarrow A$ , definido por  $wF' \mapsto \varphi(w)$ , que extiende  $f$ . Afirmamos que la extensión  $\tilde{\varphi}$  es única. Supongamos que existe  $\theta : F/F' \rightarrow A$  y que  $\theta(xF') = f(xF')$ . Si  $\nu : F \rightarrow F/F'$  es el mapeo natural ( $x \mapsto xF'$ ), entonces  $\theta\nu : F \rightarrow A$  es un homomorfismo con  $\theta\nu(x) = \theta(xF') = f(xF') = \varphi(x)$  para toda  $x \in X$ . Como  $X$  es base de  $F$ ,  $\theta\nu = \varphi = \tilde{\varphi}\nu$ ; porque  $\nu$  es suprayectiva,  $\theta = \tilde{\varphi}$ . Entonces,  $F/F'$  es libre abeliano con base  $X_{\#}$ . ■

**Teorema 2.10** *Sean  $F$  y  $G$  grupos libres con bases  $X$  y  $Y$  respectivamente. Entonces,  $F \cong G$  si y sólo si  $|X| = |Y|$ .*

**Demostración:**

$\Leftarrow$ ) Como  $|X| = |Y|$ , existe una función biyectiva  $f : X \rightarrow Y$ . Ahora bien,  $f$  compuesto con la inclusión  $i_G$  de  $Y$  en  $G$  nos da una función de  $X$  a  $G$ ,  $i_G f : X \rightarrow G$ , y como  $F$  es el grupo libre con base  $X$ , tenemos que existe una única función  $\varphi$  que extiende a  $i_G \circ f$ . De manera similar encontramos una función  $\psi$  que extiende a  $i_F f^{-1}$ . Cuando componemos las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  tenemos que  $\psi \circ \varphi$  deja fijo a  $X$ , o sea que la composición es una función que extiende a la función inclusión de  $X$  en  $F$ , pero también la identidad extiende a la inclusión. Así que, dada la unicidad de la función del grupo libre, tenemos que  $\psi \circ \varphi = id_F$ . De manera similar tenemos que  $\varphi \circ \psi = id_G$ , por lo tanto  $\varphi$  y  $\psi$  son isomorfismos, con lo cual concluimos que  $F \cong G$ .

$\Rightarrow$ ) Si  $\varphi : F \rightarrow G$  es un isomorfismo, entonces  $F/F' \cong G/G'$ . Por el lema anterior,  $F/F'$  es un grupo libre abeliano con base  $X_{\#} = \{xF' : x \in X\}$ .

Como  $|X_{\#}| = |X|$ , se sigue que  $|X| = \text{rango}(F/F')$ . De manera similar,  $|Y| = \text{rango}(G/G')$ , de allí que  $|X| = |Y|$ . ■

**Definición:** El *rango* de un grupo libre  $F$  (no abeliano) es el número de elementos en una base de  $F$ .

En el último capítulo demostraremos que todo subgrupo de un grupo libre  $F$  también es libre. Esta afirmación no es sencilla de demostrar a partir de la definición de grupo libre y por ello utilizaremos el grupo fundamental de una gráfica.

## 2.2. Productos libres

A continuación construiremos el grupo más pequeño que contiene a una familia de grupos como subgrupos. Esta construcción es de gran importancia pues aparece de manera frecuente en la construcción de grupos y, en particular, de ella depende la construcción del grupo fundamental de un espacio topológico  $X$  a partir de los grupos fundamentales de espacios más pequeños que  $X$  (ver Seifert-Van Kampen 3.3).

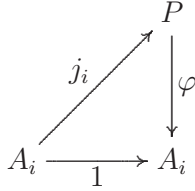
**Definición:** Sea  $\{A_i : i \in I\}$  una familia de grupos. Un producto libre de  $A_i$  es un grupo  $P$  y una familia de homomorfismos  $j_i : A_i \rightarrow P$  tal que para cada grupo  $G$  y cualquier familia de homomorfismos  $f_i : A_i \rightarrow G$ , existe un único homomorfismo  $\varphi : P \rightarrow G$  tal que  $\varphi j_i = f_i$  para todo  $i$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & & P \\
 & \nearrow^{j_i} & \vdots \\
 A_i & \xrightarrow{f_i} & G \\
 & & \downarrow \varphi
 \end{array}$$

**Lema 2.11** Si  $P$  es un producto libre de  $\{A_i : i \in I\}$ , entonces los homomorfismos  $j_i$  son inyectivos.

**Demostración:** Para un índice fijo  $i \in I$ , consideremos el diagrama en el cual  $G = A_i$ ,  $f_i$  es la identidad y, para  $k \neq i$ , el mapeo  $f_k : A_k \rightarrow A_i$  es

trivial.



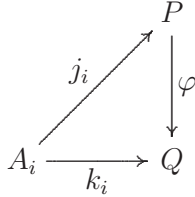
Entonces  $\varphi j_i = 1_{A_i}$ , y por lo tanto  $j_i$  es una función inyectiva. ■

Las funciones  $j_i : A_i \rightarrow P$  se llaman *encajes*.

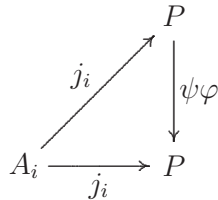
**Ejemplo 2.12** Un grupo libre  $F$  es el producto libre de grupos cíclicos infinitos.

**Teorema 2.13** Sea  $\{A_i : i \in I\}$  una familia de grupos. Si  $P$  y  $Q$  son productos libres de los  $A_i$  entonces  $P \cong Q$ .

**Demostración:** Sean  $j_i : A_i \rightarrow P$  y  $k_i : A_i \rightarrow Q$  los respectivos encajes. Como  $P$  es producto libre de los  $A_i$ , existe un homomorfismo  $\varphi : P \rightarrow Q$  con  $\varphi j_i = k_i$  para toda  $i$ . Similarmente existe un mapeo  $\psi : Q \rightarrow P$  con  $\psi k_i = j_i$  para toda  $i$ .



Consideremos el nuevo diagrama



Ambos  $\psi\varphi$  e  $1_P$  son mapeos que hacen que el diagrama conmute. Por hipótesis sólo puede existir un único mapeo y así  $\psi\varphi = 1_P$ . Similarmente  $\varphi\psi = 1_Q$  y, por lo tanto,  $\varphi : P \rightarrow Q$  es un isomorfismo. ■

En vista del teorema anterior podemos hablar de *el* producto libre  $P$  de  $\{A_i : i \in I\}$ ; y este se denota por

$$P = *_{i \in I} A_i.$$

Si sólo hay un número finito de  $A_i$ 's, usualmente se denota el producto como

$$A_1 * \cdots * A_n$$

**Teorema 2.14** *Dada una familia  $\{A_i : i \in I\}$  de grupos, el producto libre existe.*

**Demostración:** La demostración es similar a la de la existencia de el grupo libre, así que solo daremos la idea principal.

Suponemos que los conjuntos  $A_i^\# = A_i - \{1\}$  son ajenos por parejas; llamamos  $(\bigcup_i A_i^\#) \cup \{1\}$  al alfabeto; llamamos a sus elementos *letras*, y formamos *palabras* con estas letras; y se sigue lo mismo que con el truco de Van der Warden. ■

**Lema 2.15** *Sea  $\{X_i : i \in I\}$  una familia de conjuntos ajenos por parejas. Si  $F_i$  es el grupo libre con base  $X_i$ , entonces  $*_{i \in I} F_i$  es el grupo libre con base  $\bigcup_{i \in I} X_i$ .*

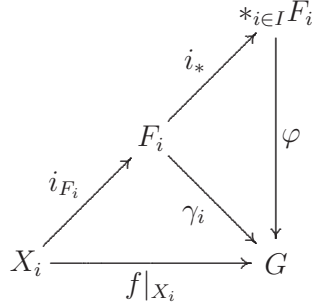
**Demostración:** Sea  $G$  un grupo y sea  $f : \bigcup_{i \in I} X_i \rightarrow G$  una función arbitraria. Para  $i$  fija tenemos, por hipótesis, el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & & F_i \\ & \nearrow i_{F_i} & \downarrow \exists! \gamma_i \\ X_i & \xrightarrow{f|_{X_i}} & G \end{array}$$

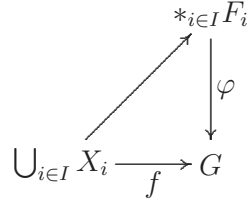
Como  $*_{i \in I} F_i$  es el producto libre de los  $F_i$ 's tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & *_{i \in I} F_i \\ & \nearrow i_* & \downarrow \exists! \varphi \\ F_i & \xrightarrow{\gamma_i} & G \end{array}$$

y este diagrama conmuta para toda  $i \in I$ . Al combinar los dos diagramas tenemos lo siguiente



De aquí tenemos una función  $\varphi$  única que hace conmutar el diagrama para toda  $i$ . De allí podemos completar el diagrama del grupo libre  $*_{i \in I} F_i$  con base  $\bigcup_{i \in I} X_i$ .



■

**Teorema 2.16 (Forma Normal).** Si  $g \in *_{i \in I} A_i$  y  $g \neq 1$ , entonces  $g$  tiene una factorización única

$$g = a_1 \dots a_n$$

donde todos los factores adyacentes pertenecen a distintos  $A_i^\#$

**Demostración:** Los elementos usados en la demostración 2.14 son palabras reducidas y en éstas la factorización es única. ■

**Teorema 2.17** Sea  $\{A_i : i \in I\}$  una familia de grupos, Para cada  $i$  sea  $(X_i | \Delta_i)$  una presentación de  $A_i$  donde los conjuntos  $\{X_i : i \in I\}$  son ajenos por parejas. Entonces una presentación de  $*_{i \in I} A_i$  es  $(\bigcup X_i | \bigcup \Delta_i)$

**Demostración:** El teorema 2.15 muestra que si  $F_i$  es un grupo libre con base  $X_i$ , entonces  $F = \prod_{i \in I} F_i$  es el grupo libre con base  $\bigcup_{i \in I} X_i$ . Sean  $\{j_i :$

$A_i \hookrightarrow \prod_{i \in I} A_i$  los encajes. Si  $R_i$  es el subgrupo normal de  $F_i$  generado por la relación  $\Delta_i$ , y si  $\nu_i : F_i \rightarrow A_i$  es una función suprayectiva con  $\ker \nu_i = R_i$ , entonces el mapeo  $\varphi : F \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$  que extiende todos los  $F_i \rightarrow A_i \hookrightarrow \prod_{i \in I} A_i$  tiene como núcleo al subgrupo normal generado por  $\bigcup_{i \in I} \Delta_i$ . ■





## Capítulo 3

# El grupo fundamental de una gráfica

**Definición:** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A$  un subconjunto no vacío de  $X$ . Para cada  $x \in X$ , definimos la *distancia de  $x$  a  $A$*  por la ecuación

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}$$

**Lema 3.1 (El lema del número de Lebesgue).** *Sea  $\mathcal{A}$  una cubierta abierta del espacio métrico  $(X, d)$ . Si  $X$  es compacto, existe un  $\delta > 0$  tal que para cada subconjunto de  $X$  con diámetro menor que  $\delta$ , existe un elemento de  $\mathcal{A}$  que lo contiene.*

*El número  $\delta$  se denomina número de Lebesgue para la cubierta  $\mathcal{A}$ .*

**Demostración:** Sea  $\mathcal{A}$  una cubierta abierta de  $X$ , si  $X$  está en  $\mathcal{A}$  ya terminamos porque cualquier  $\delta > 0$  sirve. Entonces suponemos que  $X$  no está en la cubierta. Como  $X$  es compacto, existe una subcubierta finita  $\{A_1 \dots A_n\}$ . Para cada  $i \leq n$  llamamos  $C_i$  al complemento de  $A_i$ . Ahora definimos una función de  $X$  en  $\mathbb{R}$  de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(x, C_i)$$

Ya nada más falta ver que esta función siempre es mayor que cero. Sea  $x \in X$  como  $\mathcal{A}$  es cubierta  $x \in A_i$  para algún  $i$ , entonces escogemos una bola centrada en  $x$  y radio  $\epsilon$  de manera que este totalmente contenida en  $A_i$ . Entonces  $d(x, C_i) \geq \epsilon$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d(x, C_i) &\geq \epsilon, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(x, C_i) &\geq \frac{\epsilon}{n}, \\ f(x) &\geq \epsilon/n. \end{aligned}$$

De aquí concluimos que  $f$  es mayor que cero, por lo tanto tiene un mínimo, llamamos a este valor  $\delta$ . Ahora hay que ver que éste es número de Lebesgue. Sea  $B$  un subconjunto de  $X$  con diámetro menor que  $\delta$  y sea  $x_0 \in B$ . Ahora  $x_0 \in B \subseteq B(x_0, \delta)$  de lo que concluimos:

$$\delta \leq f(x) \leq d(x_0, C_m),$$

donde  $C_m$  es el conjunto del cual está más alejado  $x$  entre los  $C_i, i \leq n$ , entonces  $B(x_0, \delta) \subseteq A_m$ , que es un elemento de la cubierta, con lo cual concluimos la demostración. ■

### 3.1. Teorema de Seifert-Van Kampen

**Teorema 3.2 Teorema especial de Seifert-Van Kampen.** *Supongamos que  $X = U \cup V$ , donde  $U$  y  $V$  son conjuntos abiertos de  $X$ . Supongamos que  $U \cap V$  es conexo por trayectorias y que  $x_0 \in U \cap V$ . Sean  $i$  y  $j$  las funciones inclusión de  $U$  y  $V$ , respectivamente, en  $X$ . Entonces las imágenes de los homomorfismos inducidos*

$$i_* : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \quad , \quad j_* : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

generan  $\pi_1(X, x_0)$ .

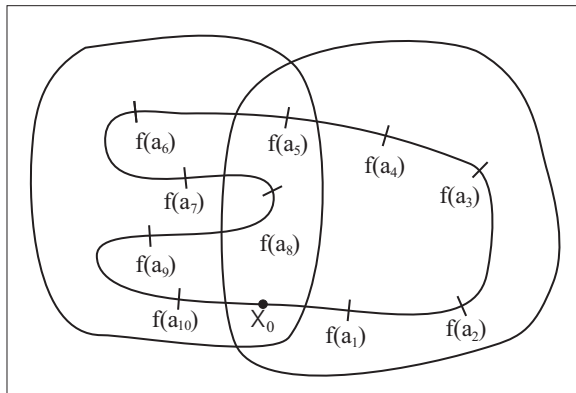


Figura 3.1:

**Demostración:** Sea  $f$  un lazo en  $X$  centrado en  $x_0$ . Vamos a dividir el intervalo  $[0,1]$  en segmentos  $[a_i, a_{i+1}]$  de manera que cada  $f([a_i, a_{i+1}])$  esté contenido en  $U$  o en  $V$  y que además cada  $f(a_i)$  este contenido en  $U \cap V$ .

Como el lazo  $f$  es un subespacio compacto de  $X$  y además  $U$  y  $V$  son una cubierta de éste, podemos usar el lema del número de Lebesgue  $\delta$  para dividir el lazo  $f$  en segmentos de diámetro menor que  $\delta$  de manera que cada  $f([a_i, a_{i+1}])$  queda contenido en  $U$  o en  $V$ . Sea  $a_0, \dots, a_m$  la división obtenida de el paso anterior; ahora queremos hacer una subdivisión  $b_0, \dots, b_n$  de manera que cada  $f(b_i)$  este contenido en  $U \cap V$ . Si  $f(a_i) \in U \cap V$  ya terminamos. Si  $f(a_i)$  está en  $U$  o en  $V$ ,  $f([a_i, a_{i+1}])$  y  $f([a_{i-1}, a_i])$  también lo están, así que si suprimimos este término de la división podemos asegurar que  $f([a_{i-1}, a_{i+1}])$  también está contenido en  $U$  o en  $V$ , continuamos con este proceso hasta que tengamos la subdivisión deseada.

Nuestro lazo lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$[f] = [f_1] * [f_2] * \dots * [f_n],$$

donde  $f_i = f([b_i, b_{i+1}])$  (figura 3.2). Ahora vamos a definir trayectorias  $\alpha_i$  desde  $x_0$  hasta  $f(b_i)$  (figura 3.3),  $\alpha_0 = e_{x_0} = \alpha_n$ . Esto lo podemos hacer porque  $U \cap V$  es conexo por trayectorias.

Definimos

$$g_i = (\alpha_{i-1} * f_i) * \bar{\alpha}_i$$

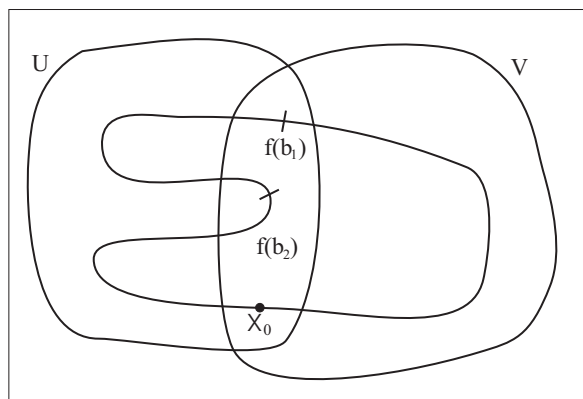


Figura 3.2:

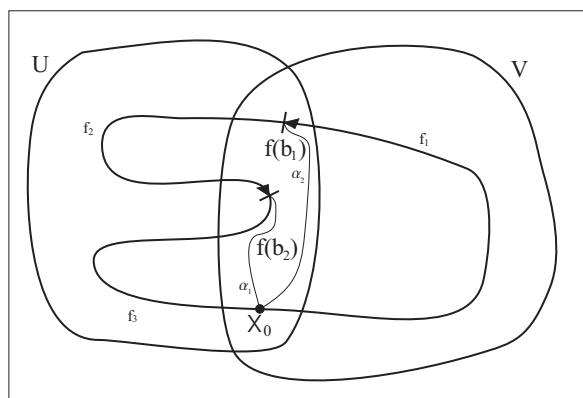


Figura 3.3:

y  $g_i$  es un lazo centrado en  $x_0$  y está totalmente contenido en  $U$  o  $V$ . Ahora por una sustitución directa podemos verificar que

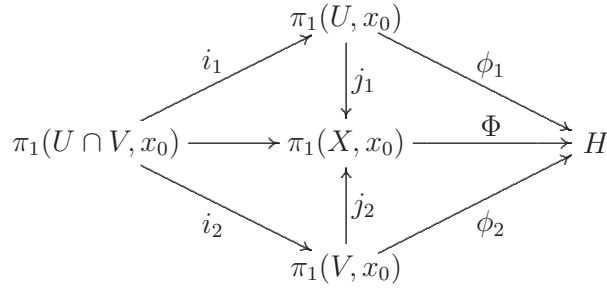
$$[g_1] * [g_2] * \cdots * [g_n] = [f_1] * [f_2] * \cdots * [f_n]$$

y con esto demostramos que cualquier lazo centrado en  $x_0$ , está generado por lazos en  $U$  o  $V$  y, por lo tanto,  $\pi_1(X, x_0)$  está generado por lazos en  $U$  o  $V$ . ■

**Teorema 3.3 Teorema de Seifert-Van Kampen.** *Sea  $X = U \cup V$ , donde  $U$  y  $V$  son abiertos en  $X$ ; supongamos que  $U$ ,  $V$  y  $U \cap V$  son conexos por trayectorias; sea  $x_0 \in U \cap V$ . Sea  $H$  un grupo y sean*

$$\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \rightarrow H \quad , \quad \phi_2 : \pi_1(V, x_0) \rightarrow H$$

homomorfismos. Sean  $i_1, i_2, j_1, j_2$  los homomorfismos indicados en el siguiente diagrama, cada uno de ellos inducido por la inclusión.



Si  $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$ , entonces existe un único homomorfismo  $\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H$  tal que  $\Phi \circ j_1 = \phi_1$  y  $\Phi \circ j_2 = \phi_2$ .

**Demostración:** El teorema 3.2 afirma que  $\pi_1(X, x_0)$  está generado por las imágenes de  $j_1$  y  $j_2$ . El valor de  $\Phi$  sobre el generador  $j_1(g_1)$  debe ser igual a  $\phi(g_1)$ , y su valor sobre  $j_2(g_2)$  debe coincidir con  $\phi_2(g_2)$ . Entonces  $\Phi$  está completamente determinado por  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . La demostración de que  $\Phi$  existe es aparte.

Por comodidad introduciremos la siguiente notación: dado una trayectoria  $f$  en  $X$ , escribimos  $[f]$  para denotar su clase de homotopía de trayectorias

en  $X$ . Si  $f$  está en  $U$ , entonces  $[f]_U$  denotará su clase de homotopía de trayectorias en  $U$ . Las notaciones  $[f]_V$  y  $[f]_{U \cap V}$  se definen de modo similar.

Comenzamos definiendo una función  $\rho$  que asigna a cada lazo  $f$  basado en  $x_0$ , contenido en  $U$  o en  $V$ , un elemento de  $H$ . Definimos

$$\begin{aligned}\rho(f) &= \phi([f]_U) \text{ si } f \text{ está en } U, \\ \rho(f) &= \phi([f]_V) \text{ si } f \text{ está en } V.\end{aligned}$$

Entonces  $\rho$  está bien definida, ya que si  $f$  está en la intersección de  $U$  y  $V$ , entonces

$$\phi_1([f]_U) = \phi_1 i_1([f]_{U \cap V}) \quad \text{y} \quad \phi_2([f]_V) = \phi_2 i_2([f]_{U \cap V})$$

y estos dos elementos de  $H$  son iguales por hipótesis. La función  $\rho$  satisface las siguientes condiciones:

- 1) Si  $[f]_U = [g]_U$ , o si  $[f]_V = [g]_V$ , entonces  $\rho(f) = \rho(g)$ .
- 2) Si  $f$  y  $g$  están en  $U$ , o si ambas están en  $V$ , entonces  $\rho(f * g) = \rho(f) \cdot \rho(g)$ .

La primera afirmación se satisface por definición, y la segunda porque tanto  $\phi_1$  como  $\phi_2$  son homomorfismos.

Ahora vamos a extender  $\rho$  a una función  $\sigma$  que asigna a cada trayectoria  $f$  contenido en  $U$  o en  $V$ , un elemento de  $H$ , tal que la función  $\sigma$  satisface la condición (1), y satisface la condición (2) cuando  $f * g$  está definido.

Para comenzar elegimos, para cada  $x \in X$ , una trayectoria  $\alpha_x$  desde  $x_0$  hasta  $x$  como sigue: si  $x = x_0$ , sea  $\alpha_x$  la trayectoria constante en  $x_0$ . Si  $x \in U \cap V$ , sea  $\alpha_x$  una trayectoria en  $U \cap V$ . Y si  $x$  está en  $U$  o en  $V$  pero no en  $U \cap V$ , sea  $\alpha_x$  una trayectoria en  $U$  o en  $V$ , respectivamente.

Entonces para cualquier camino  $f$  en  $U$  o en  $V$ , definimos un lazo  $L(f)$  en  $U$  o en  $V$ , respectivamente, basado en  $x_0$  por la ecuación

$$L(f) = \alpha_x * (f * \bar{\alpha}_y)$$

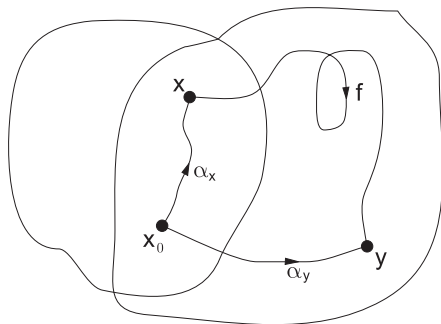


Figura 3.4:

donde  $x$  es el punto inicial de  $f$  e  $y$  es el punto final de  $f$  (véase figura 3.4). Finalmente, definimos

$$\sigma(f) = \rho(L(f)).$$

Probemos que  $\sigma$  es una extensión de  $\rho$ . Si  $f$  es un lazo basado en  $x_0$  que está en  $U$  o en  $V$ , entonces

$$L(f) = e_{x_0} * (f * e_{x_0})$$

ya que  $\alpha_{x_0}$  es la trayectoria constante en  $x_0$ . Entonces  $L(f)$  es homotópica por trayectorias a  $f$  en  $U$  o en  $V$ , de modo que  $\rho(L(f)) = \rho(f)$  por la definición (1) para  $\rho$ . Por tanto  $\sigma(f) = \rho(f)$ . Para comprobar la condición (1), sean  $f$  y  $g$  trayectorias homotópicas en  $U$  o en  $V$ . Entonces los lazos  $L(f)$  y  $L(g)$  son también homotópicos por trayectorias en  $U$  o en  $V$ , de modo que la condición (1) para  $\rho$  se aplica. Para comprobar (2), sean  $f$  y  $g$  trayectorias arbitrarias en  $U$  o en  $V$  tales que  $f(1) = g(0)$ . Tenemos

$$L(f) * L(g) = (\alpha_x * (f * \bar{\alpha}_y)) * (\alpha_y * (g * \bar{\alpha}_z))$$

para puntos adecuados  $x, y, z$ ; este lazo es homotópico por trayectorias en  $U$  o en  $V$  a  $L(f * g)$ , por lo que

$$\rho(L(f * g)) = \rho(L(f) * L(g)) = \rho(L(f)) \cdot \rho(L(g))$$

por las condiciones (1) y (2) para  $\rho$ . Por tanto,  $\sigma(f * g) = \sigma(f) * \sigma(g)$ .

Finalmente, extendemos la función  $\sigma$  a una función  $\tau$  que lleva una trayectoria arbitraria  $f$  a un elemento de  $H$ . Dicha función satisfará las siguientes condiciones:

- 1) Si  $[f] = [g]$  entonces  $\tau(f) = \tau(g)$ .
- 2)  $\tau(f * g) = \tau(f) \cdot \tau(g)$ , si  $f * g$  está definido.

Dado  $f$ , escogemos una partición  $s_0 < \dots < s_n$  de  $[0, 1]$  tal  $f$  aplica cada uno de los subintervalos  $[s_{i-1}, s_i]$  en  $U$  o en  $V$ . Denotemos por  $f_i$  la función lineal positiva del intervalo  $[0, 1]$  en el intervalo  $[s_{i-1}, s_i]$  compuesta con  $f$ . Entonces  $f_i$  es una trayectoria en  $U$  o en  $V$ , y

$$[f] = [f_1] * \dots * [f_n].$$

Si  $\tau$  debe ser una extensión de  $\sigma$  satisfaciendo (1) y (2), debe verificarse

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdot \dots \cdot \sigma(f_n).$$

De modo que utilizaremos esta ecuación como definición de  $\tau$ .

Probaremos que esta definición es independiente de la elección del subintervalo. Será suficiente con probar que el valor de  $\tau(f)$  permanece invariable si añadimos un único punto  $p$  a la partición. Sea  $i$  el índice tal que  $s_{i-1} < p < s_i$ . Si calculamos  $\tau(f)$  utilizando esta nueva partición, el único cambio en la fórmula anterior es que el factor  $\sigma(f_i)$  desaparece y es reemplazado por el producto  $\sigma(f'_i) \cdot \sigma(f''_i)$ , donde  $f'_i$  y  $f''_i$  son las funciones lineales positivas de  $[0, 1]$  en  $[s_{i-1}, p]$  y  $[p, s_i]$ , respectivamente, compuestas con  $f$ . Pero  $f_i$  es homotópica por trayectorias a  $f'_i * f''_i$  en  $U$  o en  $V$ , de modo que  $\sigma(f_i) = \sigma(f'_i) \cdot \sigma(f''_i)$ , por las condiciones (1) y (2) para  $\sigma$ . Por tanto,  $\tau$  está bien definida.

Se deduce que  $\tau$  es una extensión de  $\sigma$ . En efecto, si  $f$  está en  $U$  o en  $V$ , podemos utilizar la partición trivial de  $[0, 1]$  para definir  $\tau(f)$ ; entonces  $\tau(f) = \sigma(f)$  por definición.

Probemos la condición (1) para la función  $\tau$ .

En primer lugar verificaremos esta condición en un caso especial. Sean  $f$  y  $g$  trayectorias en  $X$  desde  $x$  hasta  $y$ , y sea  $F$  una homotopía de trayectorias entre ellas. Supongamos la hipótesis adicional que existe una partición  $s_0 < \dots < s_n$  de  $[0, 1]$  tal que  $F$  aplica cada rectángulo  $R_i = [s_{i-1}, s_i] \times I$  dentro de  $U$  o de  $V$ . Probaremos en este caso que  $\tau(f) = \tau(g)$ .



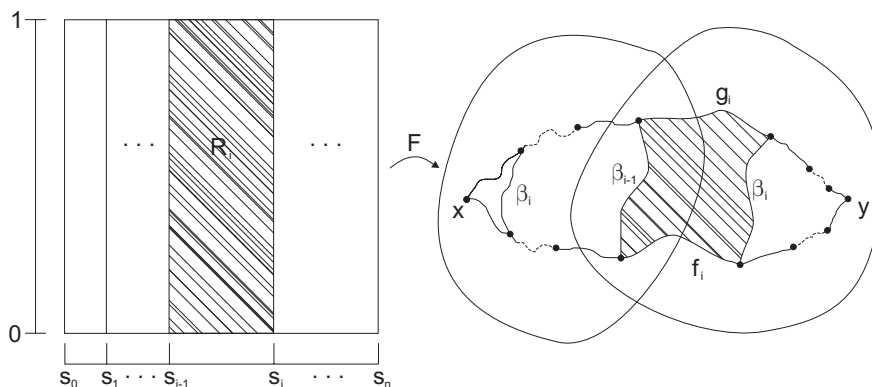


Figura 3.5:

Dado  $i$ , consideremos la función lineal positiva de  $[0, 1]$  en  $[s_{i-1}, s_i]$  compuesta con  $f$  o con  $g$  y denominemos a estas dos trayectorias  $f_i$  y  $g_i$ , respectivamente. La restricción de  $F$  a cada rectángulo  $R_i$  nos proporciona una homotopía entre  $f_i$  y  $g_i$  que toma valores en  $U$  o en  $V$  pero que no es una homotopía de trayectorias, ya que los extremos pueden cambiar durante la homotopía. Consideremos las trayectorias trazadas por los extremos durante la homotopía. Definimos  $\beta_i$  como la trayectoria  $\beta_i(t) = F(s_i, t)$ . Entonces  $\beta_i$  es una trayectoria en  $X$  desde  $f(s_i)$  hasta  $g(s_i)$ . Las trayectorias  $\beta_0$  y  $\beta_n$  son las trayectorias constantes en  $x$  e  $y$ , respectivamente (véase la figura 3.5). Probaremos que, para cada  $i$

$$f_i * \beta_i \simeq_p \beta_{i-1} * g_i$$

con la homotopía de trayectorias tomando valores en  $U$  o en  $V$ .

En el rectángulo  $R_i$ , consideremos la trayectoria que recorre los lados inferior y derecho desde  $s_{i-1} \times 0$  hasta  $s_i \times 0$  y hasta  $s_i \times 1$ ; si componemos esta trayectoria con la función  $F$  obtenemos la trayectoria  $f_i * \beta_i$ . Análogamente, si consideramos la trayectoria que recorre los lados izquierdo y superior de  $R_i$  y lo componemos con  $F$  obtenemos la trayectoria  $\beta_{i-1} * g_i$ . Como  $R_i$  es convexo, existe una homotopía de trayectorias en  $R_i$  entre estas dos trayectorias; si componemos con  $F$  obtenemos una homotopía de trayectorias entre  $f_i * \beta_i$  y  $\beta_{i-1} * g_i$  que tiene lugar en  $U$  o en  $V$  como deseábamos.

Se deduce de las condiciones (1) y (2) que

$$\sigma(f_i) \cdot \sigma(\beta_i) = \sigma(\beta_{i-1}) \cdot \sigma(g_i)$$

de modo que

$$\sigma(f_i) = \sigma(\beta_{i-1}) \cdot \sigma(g_i) \cdot \sigma(\beta_i)^{-1}$$

De manera similar se deduce que puesto que  $\beta_0$  y  $\beta_n$  son trayectorias constantes,  $\sigma(\beta_0) = \sigma(\beta_n) = 1$ . De la igualdad  $\beta_0 * \beta_0 = \beta_0$  se deduce  $\sigma(\beta_0) \cdot \sigma(\beta_0) = \sigma(\beta_0)$

Ahora calculamos  $\tau$  del siguiente modo:

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdots \sigma(f_n).$$

sustituyendo en esta ecuación y simplificando, obtenemos la ecuación

$$\tau(f) = \sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2) \cdots \sigma(g_n) = \tau(h).$$

Por tanto hemos probado la condición (1) en un caso especial.

Ahora probaremos la condición (1) en el caso general. Dados  $f$  y  $g$  y una homotopía de trayectorias  $F$  entre ellas, consideremos subdivisiones  $s_0, \dots, s_n$  y  $t_0, \dots, t_m$  de  $[0, 1]$  tales que  $F$  aplica cada rectángulo  $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$  en  $U$  o en  $V$ . Sea  $f_j$  la trayectoria  $f_j(s) = F(s, t_j)$ ; entonces  $f_0 = f$  y  $f_m = g$ . La pareja de trayectorias  $f_{j-1}$  y  $f_j$  satisfacen las condiciones de nuestro caso especial, de modo que  $\tau(f_{j-1}) = \tau(f_j)$  para todo  $j$ . Se deduce entonces que  $\tau(f) = \tau(g)$ , como deseábamos.

Ahora probaremos la condición (2) para la función  $\tau$ . Dado una trayectoria  $f * g$  en  $X$ , escojamos una subdivisión  $s_0 < \dots < s_n$  de  $[0, 1]$  que contenga al punto  $1/2$  como un punto de la subdivisión, tal que  $f * g$  aplica cada subintervalo en  $U$  o en  $V$ . Sea  $k$  el índice tal que  $s_k = 1/2$ .

Para  $i = 1, \dots, k$ , la función lineal positiva de  $[0, 1]$  en  $[s_{i-1}, s_i]$  compuesta con la función  $f * g$  coincide con la función lineal positiva de  $[0, 1]$  en  $[2s_{s-1}, 2s_i]$  compuesta con  $f$ ; denotemos esta función por  $f_i$ . De manera análoga, para cada  $i = k + 1, \dots, n$ , la función lineal positiva de  $[0, 1]$  en  $[s_{i-1}, s_i]$ , compuesta también con  $f * g$  coincide con la función lineal positiva de  $[0, 1]$  en  $[2s_{i-1} - 1, 2s_i - 1]$  compuesta con  $g$ ; denotemos esta función por  $g_{i-k}$ . Usando la subdivisión  $s_0, \dots, s_n$  para el dominio de la trayectoria  $f * g$  obtenemos

$$\tau(f * g) = \sigma(f_1) \cdots \sigma(f_k) \sigma(g_1) \cdots \sigma(g_{n-k}).$$

Usando la subdivisión  $2s_0, \dots, 2s_k$  para la trayectoria  $f$

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdots \sigma(f_k).$$

Y utilizando la subdivisión  $2s_k - 1, \dots, 2s_n - 1$  para la trayectoria  $g$

$$\tau(g) = \sigma(g_1) \cdots \sigma(g_{n-k}).$$

Por tanto, la condición (2) se satisface trivialmente.

El teorema se obtiene ahora aplicando los pasos anteriores. Para cada lazo  $f$  basado en  $x_0$ , definimos

$$\Phi([f]) = \tau(f)$$

Las condiciones (1) y (2) prueban que  $\Phi$  es un homomorfismo bien definido.

Probemos que  $\Phi \circ j_i = \phi_i$ . Si  $f$  es un lazo en  $U$ , entonces

$$\begin{aligned} \Phi(j_1([f])) &= \Phi([f]) \\ &= \tau(f) \\ &= \rho(f) = \phi([f]_U). \end{aligned}$$

como deseábamos. De forma similar se demuestra que  $\Phi \circ j_2 = \phi_2$ . ■

**Teorema 3.4 *Version clasica de Seifert-Van Kampen.*** *Supongamos las hipótesis del teorema precedente. Sea*

$$j : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

*el homeomorfismo del producto libre que extiende los homomorfismos  $j_1$  y  $j_2$  inducidos por la inclusión. Entonces  $j$  es suprayectiva y su núcleo es el menor subgrupo normal  $N$  del producto libre que contiene a todos los elementos representados por palabras de la forma*

$$(i_1(g)^{-1}, i_2(g))$$

*para  $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$ .*

**Demostración:** Como  $\pi_1(X, x_0)$  está generado por las imágenes de  $j_1$  y  $j_2$  entonces  $j$  es sobreyectiva. Probemos que  $N \subseteq \ker(j)$ . Como  $\ker(j)$  es

normal, entonces es suficiente probar que  $i_1(g)^{-1}i_2(g)$  pertenece a  $\ker(j)$  para todo  $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$ . Si  $i : U \cap V \rightarrow X$  es la inclusión, entonces

$$ji_1(g) = j_1i_1(g) = i_* = j_2i_2 = ji_2(g).$$

Entonces  $i_1(g)^{-1}i_2(g)$  pertenece al núcleo de  $j$ .

Se deducirá entonces que  $j$  induce un epimorfismo

$$k : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) / N \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Probaremos que  $N = \ker(j)$  demostrando que  $k$  es inyectivo. Para ello será suficiente con probar que  $k$  posee una inversa por la izquierda.

Sea  $H$  el grupo  $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) / N$ . Definamos  $\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \rightarrow H$  igual a la inclusión de  $\pi_1(U, x_0)$  en el producto libre compuesta con la proyección del producto libre en su cociente con  $N$ . Sea  $\phi_2 : \pi_1(V, x_0) \rightarrow H$  la función definida de modo análogo. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_1(U, x_0) & & \\
 & \nearrow i_1 & \downarrow j_1 & \searrow \phi_1 & \\
 \pi_1(U \cap V, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) & \longleftarrow k & \longrightarrow H \\
 & \searrow i_2 & \uparrow j_2 & \nearrow \phi_2 & \\
 & & \pi_1(V, x_0) & & 
 \end{array}$$

Es fácil ver que  $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$ . Si  $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$ , entonces  $\phi_1(i_1(g))$  es la clase  $i_1(g)N$  en  $H$ , y  $\phi_2(i_2(g))$  es la clase  $i_2(g)N$ . Como  $i_1(g)^{-1}i_2(g) \in N$ , las clases son iguales. Se deduce del teorema 3.3 que existe un homomorfismo  $\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H$  tal que  $\Phi \circ j_1 = \phi_1$  y  $\Phi \circ j_2 = \phi_2$ . Probaremos que  $\Phi$  es un inverso por la izquierda de  $k$ . Será suficiente con demostrar que  $\Phi \circ k$  actúa como el elemento neutro sobre cualquier generador de  $H$ , esto es, sobre cualquier clase de la forma  $gN$ , donde  $g \in \pi_1(U, x_0)$  o  $\pi_1(V, x_0)$ . Pero si  $g \in \pi_1(U, x_0)$ , tenemos

$$k(gN) = j(g) = j_1(g)$$

de modo que

$$\Phi(k(gN)) = \Phi(j_1(g)) = \phi_1(g) = gN$$

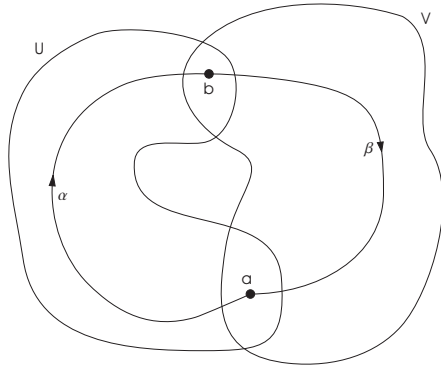


Figura 3.6:

como deseábamos. Un razonamiento similar se aplica si  $g \in \pi_1(V, x_0)$ . ■

**Corolario 3.5** *Supongamos las hipótesis del teorema de Seifert-Van Kampen. Si  $U \cap V$  es simplemente conexo entonces existe un isomorfismo*

$$k : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

■

**Lema 3.6** *Supongamos  $X = U \cup V$ , donde  $U$  y  $V$  son abiertos de  $X$ . Supongamos que  $U \cap V$  es la unión de dos conjuntos abiertos ajenos conexos por caminos  $A$  y  $B$ , que  $\alpha$  es un camino en  $U$  desde el punto  $a$  de  $A$  hasta el punto  $b$  de  $B$ , y que  $\beta$  es un camino en  $V$  de  $b$  a  $a$ . Si  $U$  y  $V$  son simplemente conexos, entonces la clase  $[\alpha * \beta]$  genera  $\pi_1(X, a)$ .*

**Demostración:** La demostración es análoga a la del teorema especial de Seifert-van Kampen con la diferencia de que ahora  $U \cap V$  es un conjunto con dos componentes conexas  $A$  y  $B$ . Sea  $f$  un lazo centrado en  $a$ ; ahora hay que dividir el intervalo  $[0,1]$  en segmentos  $[a_{i-1}, a_i]$  con  $i = 1, \dots, n$  de manera que la imagen de cada uno de ellos esté contenido en  $U$  o en  $V$  y que  $f(a_i) \in U \cap V$ ; a  $f([a_{i-1}, a_i])$  lo denotaremos como  $f_i$ . Si  $f(a_i) \in A$  trazaremos una trayectoria desde  $a$  hasta  $f(a_i)$  y la llamaremos  $\alpha_i$ ,  $\alpha_0 = \alpha_n = e_{x_0}$ , si  $f(a_i) \in B$  trazaremos la trayectoria desde  $b$  hasta  $f(a_i)$ . Ahora definamos las trayectorias  $g_i = \alpha_{i-1} * f_i * \bar{\alpha}_i$ . Por una parte tenemos que

$$[f] = [f_1] * \dots * [f_n]$$

y por sustitución directa ahora observamos que

$$[g_1] * \cdots * [g_n] = [f].$$

ahora bien, si  $g_i$  está contenida en  $V$ , y como  $V$  es simplemente conexo, tenemos que bien  $[g_i]$  es homotópica a una constante, a  $\beta$  o a  $\bar{\beta}$ , y si  $g_i$  está en  $U$ , entonces será homotópica a una constante, a  $\alpha$  o a  $\bar{\alpha}$ . Con esto demostramos que la clase  $[\alpha * \beta]$  genera  $\pi_1(X, a)$ . ■

## 3.2. Grupo Fundamental de una gráfica

**Teorema 3.7** *Sea  $X$  una gráfica conexa que no es un árbol. Entonces el grupo fundamental de  $X$  es un grupo libre no trivial. En realidad, si  $T$  es un árbol maximal en  $X$ , entonces el grupo fundamental de  $X$  tiene un sistema de generadores libres que están en correspondencia biyectiva con la colección de aristas de  $X$  que no están en  $T$ .*

**Demostración:** Sea  $T$  un árbol maximal en  $X$ . Entonces  $T$  contiene a todos los vértices de  $X$ . Como  $X$  es conexo, podemos unir cualquier par de puntos por una trayectoria. Vamos a escoger un vértice  $x_0$  y a considerar una trayectoria fija  $\gamma_x$  de  $x_0$  a  $x$  para cada vértice  $x$  en  $X$ . Para cada arista  $A$  que no esté contenida en el árbol, definimos un lazo centrado en  $x_0$  de la siguiente manera

$$g_A = \gamma_x * f_A * \bar{\gamma}_y$$

donde  $f_A$  es una trayectoria en  $A$  que va de  $x$  a  $y$ . Demostraremos que las clases  $[g_A]$  generan  $\pi_1(X, x_0)$ .

Primero consideraremos el caso donde el número  $n$  de aristas que no están en el árbol es finito. Procederemos por inducción sobre estas aristas. Analicemos el caso cuando  $n = 1$ . Llamemos  $D$  a la arista que no está en el árbol con  $a_0$  y  $b_0$  los vértices inicial y final respectivamente; dividamos nuestra arista en tres segmentos de la siguiente manera: Sean  $a$  y  $b$  dos puntos interiores a  $D$  de manera que:

- $D_1$  tiene como punto inicial  $a_0$  y como punto final  $a$  y trazamos una trayectoria  $f_1$  desde  $a_0$  hasta  $a$ .

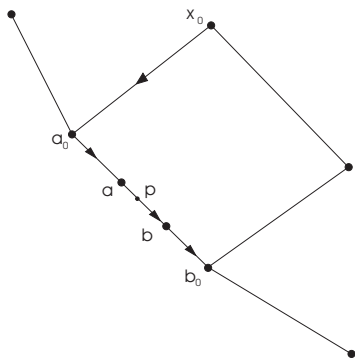


Figura 3.7:

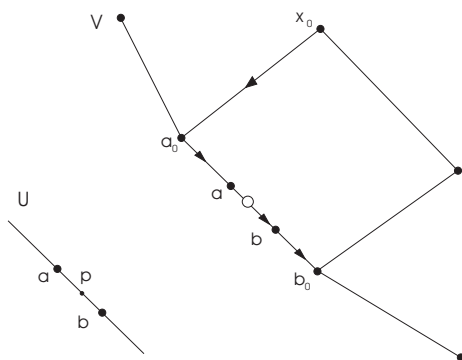


Figura 3.8:

- $D_2$  tiene como punto inicial a  $a$  y como punto final a  $b$  y trazamos una trayectoria  $f_2$  desde  $a$  hasta  $b$ .
- $D_3$  tiene como punto inicial  $b$  y como punto final a  $b_0$  y trazamos una trayectoria  $f_3$  desde  $b$  hasta  $b_0$ .

Sea  $p$  un punto interior a  $D_2$ . Ahora definamos  $U = D - a_0 - b_0$  y  $V = X - p$ .  $U$  y  $V$  son abiertos cuya intersección es un conjunto con dos componentes conexas,  $U \cap V$  es conexo por trayectorias, así que podemos utilizar el lema 3.6 para ver que  $\pi_1(X, a)$  está generado por  $\alpha = f_2$  y  $\beta = f_3 * \overline{\gamma_{b_0}} * \gamma_{a_0} * f_1$  por lo que tendríamos que

$$[\alpha * \beta] = [f_2] * [f_3] * [\overline{\gamma_{b_0}}] * [\gamma_{a_0}] * [f_1]$$

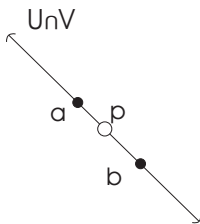


Figura 3.9:

ahora  $\pi_1(X, x_0)$  está generado por  $\hat{\delta}[\alpha * \beta]$  donde  $\delta$  es la trayectoria desde  $a$  hasta  $x_0$  dada por  $\overline{f_1 * \gamma_0}$ . Ahora calculamos la clase de homotopía de caminos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}[\alpha * \beta] &= [\gamma_0 * f_1] * [\alpha * \beta] * [\overline{\gamma_0} * \overline{f_1}] \\ &= [\gamma_0] * [f_1 * (f_2 * f_3)] * [\gamma_1] \\ &= [\gamma_0] * [f_D] * [\gamma_1] \\ &= [g_D] \end{aligned}$$

por lo tanto  $g_D$  genera  $\pi_1(X, x_0)$ . Falta demostrar que el grupo es cíclico infinito. Para ver esto sólo hay que observar que la función  $h : X \rightarrow S^1$  que manda al árbol  $T$  a un punto  $p$  del círculo y al interior de  $D$  lo manda a  $S^1 - p$ , tenemos que  $h \circ \gamma_0$  y  $h \circ \overline{\gamma_1}$  son caminos constantes, así que

$$h_*([g_D]) = [\pi \circ f_D]$$

Esta clase genera  $\pi_1(S^1, p)$  y el grupo fundamental del círculo es cíclico infinito, así que  $[g_D]$  también tiene orden infinito.

Ahora que tenemos nuestro primer paso de inducción, suponemos el resultado cierto para  $n$  aristas. Hay que demostrarlo para  $n + 1$  aristas. Construimos dos conjuntos abiertos  $U$  y  $V$  cuya intersección sea igual a dos componentes conexas. Sean  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  las aristas orientadas que no están en nuestro árbol maximal  $T$  y para cada arista escogemos un punto interior  $p_i$ , al lazo centrado en  $x_0$ ,  $g_{A_i}$  lo denotamos como  $g_i$ . Sean  $U = X - p_1 - p_2 - \dots - p_n$  y  $V = X - p_{n+1}$  ahora nuestros conjuntos son abiertos,  $U \cap V$  es simplemente conexo porque tiene a  $T$  como retracts por deformación, por lo tanto cumplen con las hipótesis del corolario 3.5, así que  $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$  por el corolario del teorema de Seifert-Van Kampen. Ahora bien,  $T \cup A_{n+1}$  es



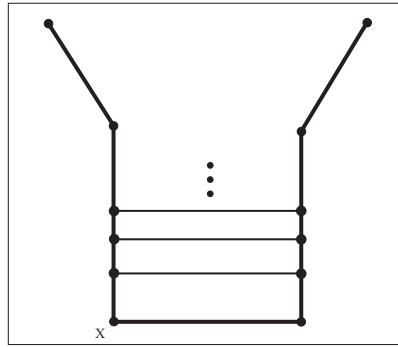


Figura 3.10:

retracto por deformación de  $U$  y es una gráfica con una arista, entonces, por la hipótesis de inducción, está generado por  $[g_{n+1}]$ . Con  $V$  pasa algo similar,  $T \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  es retracto de  $V$  y por la hipótesis de inducción tenemos que está generado por la clase  $[g_1] * [g_2] * \dots * [g_n]$ , por lo tanto tenemos que  $X$  está generado por la clase

$$[g_1] * [g_2] * \dots * [g_{n+1}],$$

con lo cual terminamos esta parte de la demostración.

Ya nada más falta ver que pasa con el caso infinito. Sea  $f$  un lazo centrado en  $x_0$ ;  $f$  es un conjunto compacto, por lo tanto está contenido en una subgráfica finita, y de esta manera tenemos el caso anterior. ■

**Ejemplo 3.8** *La gráfica 3.10 sirve para ilustrar como se utiliza el teorema anterior. En la gráfica trazamos un árbol maximal de manera que se vea claramente cuales serían las aristas que determinan el grupo fundamental de la gráfica.*

En figura 3.11 ya no es tan sencillo determinar cuales podrían ser las aristas que determinen el grupo fundamental de la gráfica.

**Ejemplo 3.9** *El número de generadores de una gráfica finita completa de  $n$  vértices se determina trazando un árbol que recorra las aristas que están en*

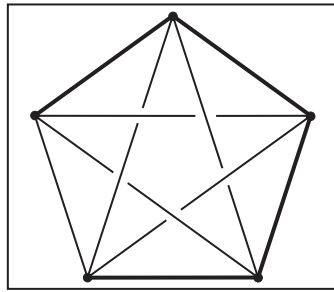


Figura 3.11:

la periferia de la gráfica; este árbol tiene  $n - 1$  aristas y además es maximal. Ahora, la gráfica tiene en total  $\binom{n}{2}$  aristas, así que el número de generadores es

$$\binom{n}{2} - (n - 1)$$

# Capítulo 4

## Espacios cubrientes

### 4.1. Definiciones básicas

Al estudiar el grupo fundamental de espacios topológicos, una herramienta muy poderosa está basada en la construcción de espacios cubrientes. Recordemos por ejemplo que la función  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  (donde  $S^1$  denota el círculo unitario en  $\mathbb{C}$ ) definida por  $\phi(x) = e^{2\pi i x}$  se utiliza para probar que el grupo fundamental de  $S^1$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$  y que esto se hace "levantando" lazos en  $S^1$  a trayectorias en  $\mathbb{R}$ . Recordemos aquí las definiciones básicas de espacios cubrientes y desarrollaremos un poco esta teoría. Esto nos ayudará a determinar el grupo fundamental de cualquier gráfica y con ello el teorema principal de este trabajo: Subgrupo de libre es libre.

**Definición:** Sea  $p : E \rightarrow B$  una función continua y suprayectiva. Un conjunto abierto  $U$  de  $B$  está *parejamente cubierto* por  $p$  si la imagen inversa  $p^{-1}(U)$  puede escribirse como una unión ajena de conjuntos abiertos  $V_\alpha$  de  $E$  tales que, para cada  $\alpha$ , la restricción de  $p$  a  $V_\alpha$  es un homeomorfismo de  $V_\alpha$  en  $U$ . La colección  $\{V_\alpha\}$  es una *partición* de  $p^{-1}(U)$  en *rebanadas*.

**Definición:** Sea  $p : E \rightarrow B$  una función continua y suprayectiva. Si todo punto  $b$  de  $B$  tiene una vecindad  $U$  que está parejamente cubierta por  $p$ , entonces  $p$  se dice que es una *proyección cubriente* y  $E$  es un *espacio cubriente* de  $B$ .

**Definición:** Sea  $p : E \rightarrow B$  una proyección cubriente con  $B$  conexo. Si  $p^{-1}(b)$  tiene  $k$  elementos para todo  $b \in B$  decimos que  $E$  es un *espacio cubriente de  $k$  hojas* de  $B$ .

**Teorema 4.1** *Sea  $p : E \rightarrow B$  una proyección cubriente. Si  $B_0$  es un subespacio de  $B$  y si  $E_0 = p^{-1}(B_0)$  entonces la función  $p_0 : E_0 \rightarrow B_0$ , obtenida al restringir  $p$ , es proyección cubriente.*

**Demostración:** Dado  $b \in B_0$  y  $U$  un conjunto abierto en  $B$  que contenga a  $b$ , tenemos que la imagen inversa de  $U$ ,  $p^{-1}(U)$ , está parejamente cubierta por  $p$ , entonces  $p^{-1}(U)$  tiene una partición  $\{V_\alpha\}$  en rebanadas de conjuntos abiertos en  $E$ . Ahora,  $U \cap B_0$  es un abierto de  $b$  en  $B_0$  y la imagen inversa está dada por los conjuntos abiertos ajenos  $V_\alpha \cap E_0$  y cada uno de ellos se aplica homeomórficamente en  $B_0$  por medio de  $p$ ; entonces tenemos que la restricción de  $p$  a  $p_0 : E_0 \rightarrow B_0$  es una proyección cubriente. ■

**Teorema 4.2** *Sea  $B$  conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias. Sea  $p : E \rightarrow B$  una proyección cubriente. Si  $E_0$  es una componente conexa por trayectorias de  $E$ ; entonces la función  $p_0 : E_0 \rightarrow B$  obtenida por restricción de  $p$  es una proyección cubriente.*

**Demostración:** Como  $E_0$  es componente conexa por trayectorias de  $E$ ,  $E_0$  es un conjunto abierto y la función  $p : E \rightarrow B$  es abierta por ser proyección cubriente. Concluimos que  $p(E_0)$  es abierto en  $B$ .

Ahora mostraremos que  $p(E_0)$  es cerrado. Sea  $x \in \overline{p(E_0)}$  y sea  $U$  vecindad de  $x$  conexa por trayectorias y parejamente cubierta por  $p$ . Entonces  $p^{-1}(U) = \cup V_\alpha$  con  $V_\alpha$  homeomorfo a  $U$ . Ahora bien, como  $U \cap p(E_0) \neq \emptyset$ , tenemos que  $V_\alpha \cap E_0 \neq \emptyset$  para algunas  $\alpha$ 's. Como  $V_\alpha$  es conexa por trayectorias,  $V_\alpha \subseteq E_0$  y como  $p$  es abierta,  $U = p(V_\alpha) \subseteq p(E_0)$ , por lo tanto  $x \in p(E_0)$ , de lo que concluimos que  $\overline{p(E_0)} = p(E_0)$ . En consecuencia  $p(E_0) = B$ . Ahora nada mas faltaría verificar que  $p|_{E_0} = p_0$  es una proyección cubriente, pero esto se deduce de que  $p^{-1}(U) = \cup V_\alpha$  está parejamente cubierta por  $p$  y para la restricción  $p_0$  únicamente tomamos los  $V_\alpha$  que están contenidos en  $E_0$ . Por lo tanto  $p_0$  es proyección cubriente. ■

El siguiente teorema es muy importante pues nos dice que dado un subgrupo  $H$  de  $\pi_1(B, b_0)$ , existe un espacio cubriente cuya imagen sobre  $\pi_1(B, b_0)$  en la categoría de grupos, es isomorfa a  $H$ .

**Teorema 4.3** *Sea  $B$  conexo por trayectorias, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente simplemente conexo. . Sea  $b_0 \in B$ . Dado un subgrupo  $H$  de  $\pi_1(B, b_0)$ , existen una proyección cubriente  $p : E \rightarrow B$  y un punto  $e_0 \in p^{-1}(b_0)$  tales que*

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = H.$$

**Demostración:** Primero construimos  $E$ . Sea  $\mathcal{P}$  el conjunto de todos los trayectorias en  $B$  que parten de  $b_0$ . Se define una relación de equivalencia en  $\mathcal{P}$  poniendo  $\alpha \sim \beta$  si  $\alpha$  y  $\beta$  acaban en el mismo punto de  $B$  y

$$[\alpha * \bar{\beta}] \in H.$$

Es fácil ver que se trata de una relación de equivalencia. La clase de equivalencia del camino  $\alpha$  se indicará por  $\alpha^\#$ .

Sea  $E$  la colección de las clases de equivalencia y definamos  $p : E \rightarrow B$  por la ecuación

$$p(\alpha^\#) = \alpha(1).$$

Como  $B$  es conexo por trayectorias,  $p$  es suprayectiva. Dotaremos a  $E$  de una topología de manera que  $p$  sea una proyección cubriente.

En primer lugar, observemos dos hechos:

- i) Si  $[\alpha] = [\beta]$ , entonces  $\alpha^\# = \beta^\#$ .
- ii) Si  $\alpha^\# = \beta^\#$ , entonces  $(\alpha * \delta)^\# = (\beta * \delta)^\#$ , para cualquier camino  $\delta$  en  $B$  partiendo de  $\alpha(1)$ .

La primera se sigue teniendo en cuenta que si  $[\alpha] = [\beta]$ , entonces  $[\alpha * \bar{\beta}]$  es el elemento neutro, el cual pertenece a  $H$ . La se obtiene segunda observando que  $\alpha * \delta$  y  $\beta * \delta$  acaban en el mismo punto de  $B$  y

$$[(\alpha * \delta) * \overline{(\beta * \delta)}] = [(\alpha * \delta) * \bar{\delta} * \bar{\beta}] = [\alpha * \bar{\beta}],$$

que pertenece a  $H$  por hipótesis.

Vamos a dar una topología para  $E$  de la siguiente manera.

Sean  $\alpha$  un elemento cualquiera de  $\mathcal{P}$  y  $U$  una vecindad conexa por trayectorias de  $\alpha(1)$ . Se define

$$B(U, \alpha) = \{(\alpha * \delta)^\# \mid \delta \text{ es una trayectoria en } U \text{ partiendo de } \alpha(1)\}.$$

Observemos que  $\alpha^\#$  es un elemento de  $B(U, \alpha)$ , ya que  $\alpha^\# = (\alpha * e_{\alpha(1)})^\#$ ; por definición este elemento pertenece a  $B(U, \alpha)$ . Afirmamos que los conjuntos  $B(U, \alpha)$  forman una base para una topología sobre  $E$ .

En primer lugar probamos que si  $\beta^\# \in B(U, \alpha)$  se tiene que  $\alpha^\# \in B(U, \beta)$  y  $B(U, \alpha) = B(U, \beta)$ .

Si  $\beta^\# \in B(U, \alpha)$  entonces  $\beta^\# = (\alpha * \delta)^\#$  para algún camino  $\delta$  en  $U$ . Entonces

$$\begin{aligned} (\beta * \bar{\delta})^\# &= ((\alpha * \delta) * \bar{\delta})^\# \\ &= \alpha^\#, \end{aligned}$$

de manera que  $\alpha^\# \in B(U, \beta)$  por definición (véase figura 4.1). Demostraremos primero que  $B(U, \beta) \subseteq B(U, \alpha)$ . Nótese que el elemento general de  $B(U, \beta)$  es de la forma  $(\beta, \gamma)^\#$ , donde  $\gamma$  es un camino  $U$ . Entonces se observa que

$$\begin{aligned} (\beta * \gamma)^\# &= ((\alpha * \delta) * \gamma)^\# \\ &= (\alpha * (\delta * \gamma))^\# \end{aligned}$$

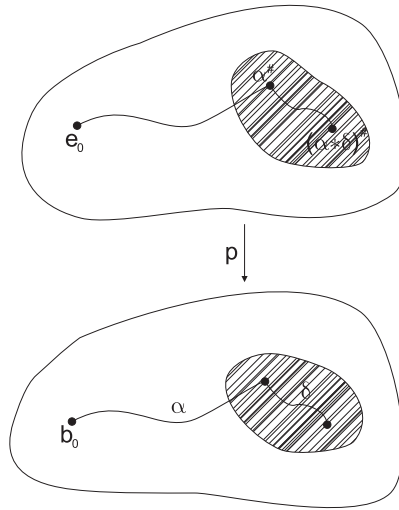
que pertenece a  $B(U, \alpha)$  por definición. Por simetría se tiene la inclusión  $B(U, \alpha) \subseteq B(U, \beta)$ .

Ahora demostramos que los conjuntos  $B(U, \alpha)$  forman una base. Si  $\beta^\#$  pertenece a la intersección  $B(U_1, \alpha_1) \cap B(U_2, \alpha_2)$ , sólo necesitamos escoger una vecindad conexa por trayectorias de  $V$  de  $\beta(1)$  contenido en  $U_1 \cap U_2$ . La inclusión

$$B(V, \beta) \subseteq B(U_1, \beta) \cap B(U_2, \beta)$$

se sigue de la definición de estos conjuntos, y la parte derecha de la ecuación es igual a  $B(U_1, \alpha_1) \cap B(U_2, \alpha_2)$  por el resultado que acabamos de probar.

La función es continua y abierta. Es fácil ver que  $p$  es abierta, pues la imagen del elemento básico  $B(U, \alpha)$  es el conjunto abierto  $U$  de  $B$ : dado

Figura 4.1: Espacio cubriente  $E$  y  $B$ 

$x \in U$  elegimos un camino  $\delta$  en  $U$  desde  $\alpha(1)$  hasta  $x$ ; entonces  $(\alpha * \delta)^\#$  está en  $B(U, \alpha)$  y  $p((\alpha * \delta)^\#) = x$ .

Para ver que  $p$  es continua, tomemos un elemento  $\alpha^\#$  de  $E$  y un vecindad  $W$  de  $p(\alpha^\#)$ . Elijamos una vecindad conexa por trayectorias  $U$  del punto  $p(\alpha^\#) = \alpha(1)$  en  $W$ . Entonces  $B(U, \alpha)$  es un vecindad de  $\alpha^\#$  que aplica  $\alpha^\#$  en  $W$ . Así  $p$  es continua en  $\alpha^\#$ .

Cada punto de  $B$  tiene una vecindad que está parejamente cubierta por  $p$ . Dado  $b_1 \in B$ , tomemos  $U$  un vecindad conexo por trayectorias de  $b_1$  que satisface la condición adicional de que el homomorfismo  $\pi_1(U, b_1) \rightarrow \pi_1(b, b_1)$  inducido por la inclusión es trivial. Afirmamos que  $U$  está parejamente cubierta por  $p$ .

En primer lugar probamos que  $p^{-1}(U)$  es igual a la unión de los conjuntos  $B(U, \alpha)$ , cuando  $\alpha$  recorre todas las trayectorias en  $B$  de  $b_0$  a  $b_1$ . Como  $p$  aplica cada conjunto  $B(U, \alpha)$  sobre  $U$ , es claro que  $p^{-1}(U)$  contiene la unión. Por otra parte, si  $\beta^\#$  pertenece a  $p^{-1}(U)$ , entonces  $\beta(1) \in U$ . Escojamos un camino  $\delta$  en  $U$  desde  $b_1$  hasta  $\beta(1)$  y sea  $\alpha$  el camino  $\beta * \bar{\delta}$  de  $b_0$  a  $b_1$ . Entonces  $[\beta] = [\alpha * \delta]$ , de manera que  $\beta^\# = (\alpha * \delta)^\#$ , que pertenece a  $B(U, \alpha)$ . Así  $p^{-1}(U)$  está contenido en la unión de los conjuntos  $B(U, \alpha)$ .

En segundo lugar observemos que los distintos conjuntos  $B(U, \alpha)$  son ajenos. Pues si  $\beta^\# \in B(U, \alpha_1) \cap B(U, \alpha_2)$ , entonces  $B(U, \alpha_1) = B(U, \beta) = B(U, \alpha_2)$ , por el paso 2.

En tercer lugar, demostramos que  $p$  define una función biyectiva entre  $B(U, \alpha)$  y  $U$ . Se sigue que  $p|_{B(U, \alpha)}$  es un homeomorfismo, siendo biyectiva, continua y abierta. Ya sabemos que  $p$  aplica  $B(U, \alpha)$  sobre  $U$ . Para probar la inyectividad, supongamos que

$$p((\alpha * \delta_1)^\#) = p((\alpha * \delta_2)^\#),$$

donde  $\delta_1$  y  $\delta_2$  son trayectorias en  $U$ . Entonces  $\delta_1(1) = \delta_2(1)$ . Como el homomorfismo  $\pi_1(U, b_1) \rightarrow \pi_1(B, b_1)$  inducido por la inclusión es trivial,  $\delta_1 * \overline{\delta_2}$  es un camino homotópico en  $B$  al lazo constante. Entonces  $[\alpha * \delta_1] = [\alpha * \delta_2]$ , de manera que  $(\alpha * \delta_1)^\# = (\alpha * \delta_2)^\#$ , como deseábamos.

Se sigue que  $p : E \rightarrow B$  es una proyección cubriente. Para ver si lo es, debemos probar que  $E$  es conexo por trayectorias, lo que haremos en breve.

Sea  $e_0$  la clase de equivalencia del camino constante en  $b_0$ ; entonces  $p(e_0) = b_0$  por definición. Dado un camino  $\alpha$  en  $B$  partiendo de  $b_0$ , calculamos su levantamiento a un camino en  $E$  partiendo de  $e_0$  y probamos que este levantamiento acaba en  $\alpha^\#$ .

Para empezar, dado  $c \in [0, 1]$ , sea  $\alpha_c : I \rightarrow B$  el camino definido por la ecuación

$$\alpha_c(t) = \alpha(tc), \text{ para } 0 \leq t \leq 1.$$

Entonces  $\alpha_c$  es el trozo de  $\alpha$  que va de  $\alpha(0)$  a  $\alpha(c)$ . En particular,  $\alpha_0$  es el camino constante en  $b_0$  y  $\alpha_1 = \alpha$ . Definimos  $\tilde{\alpha} : I \rightarrow E$  por la ecuación

$$\tilde{\alpha}(c) = (\alpha_c)^\#$$

y probamos que  $\tilde{\alpha}$  es continua. Entonces  $\tilde{\alpha}$  es un levantamiento de  $\alpha$ , puesto que  $p(\tilde{\alpha}(c)) = \alpha_c(1) = \alpha(c)$ ; además,  $\tilde{\alpha}$  comienza en  $(\alpha_0)^\# = e_0$  y acaba en  $(\alpha_1)^\# = \alpha^\#$ .

Para estudiar la continuidad, introducimos la siguiente notación. Dados  $0 \leq c < d \leq 1$ , sea  $\delta_{c,d}$  el camino que es igual a la función lineal positiva de



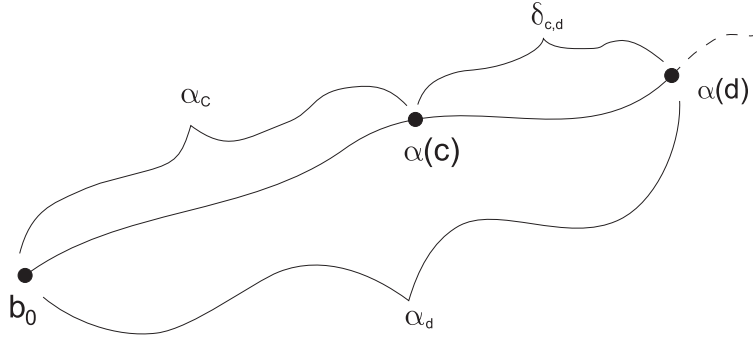


Figura 4.2:

$I$  sobre  $[c, d]$  compuesta con  $\alpha$ . Observemos que los trayectorias  $\alpha_d$  y  $\alpha_c * \delta_{c,d}$  son homotópicas porque uno es justamente una reparametrización del otro (véase la figura 4.2).

Verificamos ahora la continuidad de  $\tilde{\alpha}$  en el punto  $c$  de  $[0, 1]$ . Sea  $W$  un elemento básico en  $E$  alrededor del punto  $\tilde{\alpha}(c)$ . Entonces  $W$  es igual a  $B(U, \alpha_c$  para alguna vecindad conexa por trayectorias  $U$  de  $\alpha(c)$ . Escojamos  $\epsilon > 0$  tal que para  $|c - t| < \epsilon$ , el punto  $\alpha(t)$  esté en  $U$ . Probamos que si  $d$  es un punto de  $[0, 1]$  que satisface  $|c - d| < \epsilon$ , entonces  $\tilde{\alpha}(d) \in W$ ; esto prueba la continuidad de  $\tilde{\alpha}$  en  $c$ . Suponemos que  $|c - d| < \epsilon$ . Tomemos primeramente el caso en que  $d > c$ . Sea  $\delta = \delta_{c,d}$ ; entonces, como  $[\alpha_d] = [\alpha_c * \delta]$ , tenemos

$$\tilde{\alpha}(d) = (\alpha_d)^\# = (\alpha_c * \delta)^\#.$$

Como  $\delta$  está en  $U$ , tenemos que  $\tilde{\alpha}(d) \in B(U, \alpha_c)$ , como deseábamos. Si  $d < c$ , ponemos  $\delta = \delta_{d,c}$  y procedemos de manera análoga.

La función  $p : E \rightarrow B$  es una proyección cubriente.. Solamente necesitamos verificar que  $E$  es conexo por trayectorias, y esto es fácil, pues si  $\alpha^\#$  es un punto cualquiera de  $E$ , entonces el levantamiento  $\tilde{\alpha}$  del camino  $\alpha$  es un camino en  $E$  de  $e_0$  a  $\alpha^\#$ .

Finalmente veamos que  $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$ . Sea  $\alpha$  un lazo en  $B$  basado en  $b_0$ . Sea  $\tilde{\alpha}$  su levantamiento a  $E$  partiendo de  $e_0$ . El teorema de levantamiento de homotopías nos dice que  $[\alpha] \in p_*(\pi_1(E, e_0))$  si, y solo si,  $\alpha$  es un lazo en  $E$ . Ahora bien, el punto final de  $\tilde{\alpha}$  es el punto  $\alpha^\#$ , y  $\alpha^\# = e_0$  si, y solo si,  $\alpha$  es equivalente al lazo constante en  $b_0$ , es decir, si, y sólo si,  $[\alpha * \bar{e}_{b_0}] \in H$ . Esto ocurre precisamente cuando  $[\alpha] \in H$ . ■

**Ejemplo 4.4** Si tenemos a  $B = S^1$  y  $H = n\mathbb{Z}$ , por el teorema anterior, existe un espacio cubriente  $E$  tal que  $p(\pi_1(E, x_0)) = H$ . un espacio que cumple esta propiedad es el mismo  $S^1$  con la función  $p : E \rightarrow B$  definida como  $x \mapsto x^n$ .

**Definición:** Sea  $p : E \rightarrow B$  una proyección cubriente y sea  $b_0 \in B$ . Elijamos  $e_0$  de forma que  $p(e_0) = b_0$ . Dado un elemento  $[f]$  de  $\pi_1(B, b_0)$ , sea  $\tilde{f}$  el levantamiento de  $f$  a una trayectoria en  $E$  que comience en  $e_0$ . Denotemos por  $\phi([f])$  el punto final  $\tilde{f}(1)$  de  $\tilde{f}$ . Entonces  $\phi$  es una función bien definida

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0).$$

Denominamos a  $\phi$  correspondencia del levantamiento derivada de la proyección cubriente  $p$ . Desde luego  $\phi$ , depende de la elección del punto  $e_0$ .

**Teorema 4.5** Sea  $p : E \rightarrow B$  una proyección cubriente con  $p(e_0) = b_0$ . Si  $E$  es conexo por trayectorias, entonces la correspondencia del levantamiento

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$$

es suprayectiva. Si  $E$  es simplemente conexo, entonces es biyectiva.

**Demostración:** Si  $E$  es conexo por trayectorias entonces, dado  $x \in p^{-1}(b_0)$ , existe un camino  $\tilde{f}$  en  $E$  de  $e_0$  a  $x$ , de modo que  $f = p \circ \tilde{f}$  es un lazo en  $B$  centrado en  $b_0$  y  $\phi([f]) = x$ , por definición.

Para demostrar la inyectividad suponemos que  $E$  es simplemente conexo. Sean  $[f]$  y  $[g]$  dos elementos de  $\pi_1(B, b_0)$  tales que  $\phi([f]) = \phi([g])$ . Sean  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  dos levantamientos de  $f$  y  $g$ , respectivamente, a trayectorias en  $E$  que comienzan en  $e_0$ ; entonces  $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ . Como  $E$  es simplemente conexo, existe una homotopía de trayectorias  $\tilde{F}$  en  $E$  entre  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$ . Entonces  $p \circ \tilde{F}$  es una homotopía de trayectorias en  $B$  entre  $f$  y  $g$ . ■

## 4.2. Espacio cubriente de una gráfica

**Teorema 4.6** Sea  $p : E \rightarrow X$  una proyección cubriente, donde  $X$  es una gráfica lineal. Si  $A_\alpha$  es una arista de  $X$  y  $B$  es una componente conexa de

$p^{-1}(A_\alpha)$ , entonces  $p$  aplica  $B$  homeomórficamente sobre  $A_\alpha$ . Además, el espacio  $E$  es una gráfica lineal, con las componentes conexas de los espacios  $p^{-1}(A_\alpha)$  como sus aristas.

**Demostración:** Primero demostraremos que  $p$  aplica homeomórficamente  $B$  sobre  $A_\alpha$ . Como  $A_\alpha$  es conexo por trayectorias y localmente conexo por trayectorias, los teoremas 4.1 y el 4.2 nos dicen que la función  $p_0 : B \rightarrow A_\alpha$  es una proyección cubriente. Ahora, como  $B$  es conexo por trayectorias, la correspondencia de levantamientos  $\Phi : \pi_1(A_\alpha, a) \rightarrow p_0^{-1}(a)$  con  $a \in A_\alpha$  es suprayectiva. Como  $A_\alpha$  es simplemente conexo, tenemos que  $p_0^{-1}(a)$  sólo tiene un elemento. Por lo tanto  $p_0$  es una función biyectiva que aplica homeomórficamente  $B$  sobre  $A_\alpha$ , o sea,  $p_0$  es un homomorfismo.

De aquí deducimos que el espacio  $E$  es unión de los arcos  $B = p^{-1}(A_\alpha)$ . Vamos a ver que estos arcos sólo se pueden intersectar a lo más en un punto. Sean  $B$  y  $B'$  dos componentes conexas distintas de  $p^{-1}(A_\alpha)$  y  $p^{-1}(A_\beta)$  respectivamente. Analicemos los diferentes casos: Si  $A_\alpha = A_\beta$ , entonces  $B$  y  $B'$  son ajenos, Si  $A_\alpha$  y  $A_\beta$  son ajenos, también lo son  $B$  y  $B'$ , por lo tanto si  $B$  y  $B'$  se intersectan tiene que ser en un punto porque  $p(B) = A_\alpha$  y  $p(B') = A_\beta$  y estos solo se intersectan en un punto, así que  $B \cap B'$  es un solo punto que es un extremo de cada uno.

Falta probar que la topología de  $E$  es coherente con los arcos  $B$ . Sea  $W$  un subconjunto de  $E$  tal que  $W \cap B$  es abierto en  $B$ , para cada arco  $B$  de  $E$ . Probemos que  $W$  es abierto en  $E$ .

En primer lugar demostraremos que  $p(W)$  es abierto en  $X$ . Si  $A_\alpha$  es una arista de  $X$ , entonces  $p(W) \cap A_\alpha$  es la unión de los conjuntos  $p(W \cap B)$ , cuando  $B$  recorre todas las componentes conexas de  $p^{-1}(A_\alpha)$ . Cada uno de los conjuntos  $p(W \cap B)$  es abierto en  $A_\alpha$ , ya que  $p$  aplica  $B$  homeomórficamente sobre  $A_\alpha$ ; por consiguiente su unión  $p(W) \cap A_\alpha$  es abierta en  $A_\alpha$ . Como  $X$  tiene la topología coherente con los subespacios  $A_\alpha$ , el conjunto  $p(W)$  es abierto en  $X$ .

En segundo lugar, probemos nuestro resultado en el caso especial donde el conjunto  $W$  está contenido en una de las rebanadas  $V$  de  $p^{-1}(U)$ , donde  $U$  es un abierto de  $X$  que está parejamente cubierto por  $p$ . Por el resultado que acabamos de probar, sabemos que el conjunto  $p(W)$  es abierto en  $X$ . Se sigue que  $p(W)$  es abierto en  $U$ . Como la función de  $V$  sobre  $U$  obtenida por

restricción de  $p$  es un homeomorfismo,  $W$  debe ser abierto en  $V$  y por tanto abierto en  $E$ .

Finalmente, demostremos nuestro resultado en general. Escojamos una cubierta  $\mathcal{A}$  de  $X$  por abiertos  $U$  que estén parejamente cubiertos por  $p$ . Entonces las rebanadas  $V$  de los conjuntos  $p^{-1}(U)$ , para  $U \in \mathcal{A}$ , cubren  $E$ . Para cada una de tales rebanadas  $V$ , sea  $W_V = W \cap V$ . El conjunto  $W_V$  tiene la propiedad de que para cada arco  $B$  de  $E$ , el conjunto  $W_V \cap B$  es abierto en  $B$ , pues  $W_V \cap B = (W \cap B) \cap (V \cap B)$  y los conjuntos  $W \cap B$  y  $V \cap B$  son abiertos en  $B$ . El resultado del párrafo anterior implica que  $W_V$  es abierto en  $E$ . Como  $W$  es la unión de los conjuntos  $W_V$ , es también abierto en  $E$ . ■

# Capítulo 5

## Subgrupos de grupos libres

Ahora podemos demostrar el teorema principal.

**Teorema 5.1** *Si  $H$  es un subgrupo de un grupo libre  $F$ , entonces  $H$  es libre.*

**Demostración:** Vamos a construir una gráfica cuyo grupo fundamental sea isomorfo a  $F$ , a cada generador  $\alpha$  de  $F$  le corresponde un círculo, vamos a construir la gráfica  $X$  uniendo  $\alpha$  círculos en un punto  $x$ , le damos la estructura de gráfica dividiendo cada círculo en tres arcos, dos de los cuales tienen como extremo a  $x$ . Ahora tenemos que  $\pi_1(X, x) \simeq F$ . La gráfica  $X$  es conexa por trayectorias, localmente conexa por trayectorias y semilocalmente simplemente conexa, por lo tanto cumple con todas las propiedades del teorema 4.3. Entonces, existe un espacio cubriente  $E$  de  $X$  y una proyección cubriente  $p : E \rightarrow X$  tal que para algún punto  $e_0$  de  $p^{-1}(x)$ , tenemos que:

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = H$$

El espacio cubriente  $E$  es una gráfica por el teorema 4.6 y por lo tanto su grupo fundamental es un grupo libre por el teorema 3.7. ■

**Lema 5.2** *Si  $X$  es una gráfica lineal conexa finita, entonces el cardinal de un sistema de generadores finito para el grupo fundamental de  $X$  es  $1 - \chi(X)$ , donde  $\chi(X)$  es la característica de Euler de  $X$ .*

**Demostración:** Ahora sea  $X$  una gráfica finita con árbol maximal  $T$  con  $n$  aristas fuera del árbol. Vamos a calcular el número de Euler de  $X$ , la gráfica  $X$  tiene  $n$  aristas más que el árbol  $T$ , por lo que el número de Euler de la gráfica es:

$$\chi(X) = \chi(T) - n = 1 - n,$$

Despejando  $n$  tenemos

$$n = 1 - \chi(X).$$

■

**Teorema 5.3** Sean  $F$  un grupo libre con  $n + 1$  generadores libres y  $H$  un subgrupo de  $F$ . Si  $H$  tiene índice  $k$  en  $F$ , entonces  $H$  tiene  $kn + 1$  generadores libres.

**Demostración:** Procederemos como en la demostración 5.1. Construimos una gráfica  $X$  uniendo  $n + 1$  círculos en un punto; entonces tendríamos  $\pi_1(X, x_0) \cong F$ . Escojamos un espacio cubriente  $p : E \rightarrow X$  tal que

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = H.$$

Ahora, por la correspondencia de levantamientos

$$\Phi : \pi_1(X, x_0)/H \rightarrow p^{-1}(x_0)$$

es una biyección, por lo tanto  $E$  es un espacio cubriente de  $k$  hojas de  $X$ . Ahora bien, como  $E$  es un espacio cubriente, tenemos que por cada arista  $A$  de  $X$ ,  $p^{-1}(A)$  consta de  $k$  aristas en  $E$ ; esto quiere decir que  $E$  tiene  $k$  veces el número de aristas y de vértices que tiene  $X$ , o sea que  $\chi(E) = k\chi(X)$ . Ahora, el número de generadores de  $X$  es  $n + 1$  por lo que  $\chi(X) = 1 - (n + 1) = -n$ . Ahora podemos determinar el número de generadores de el subgrupo  $H$ :

$$1 - \chi(E) = 1 - k\chi(X) = 1 + kn$$

■

La importancia del resultado anterior es que existen subgrupos libres con mayor número de generadores que el grupo libre original. Así podríamos tener un grupo libre  $F$  con 2 generadores y éste podría contener un subgrupo libre con 3 generadores. El resultado anterior está limitado a subgrupos que tengan índice finito; si el subgrupo  $H$  tuviese orden infinito no se podría decir nada acerca del número de generadores.

# Bibliografía

- [1] James R. Munkres: *Topología*, Pearson Educación, 2002.
- [2] Joseph J. Rotman *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer, 1995.
- [3] Thomas W. Hungerford *Algebra*, Springer-Verlag, 1974
- [4] María Luisa Pérez Seguí *Combinatoria*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, 2003
- [5] Harady *Graph Theory*, Addison-Wesley, 1972

# Índice alfabético

- árbol, 9
- arco, 1
- arista, 2
  
- conjunto independiente, 14
- conmutador, 19
  
- distancia, 27
  
- encajes, 22
- espacio cubriente, 45
  - de  $k$  hojas, 46
  
- gráfica lineal, 2
- grupo libre, 15
  - abeliano, 14
  
- número de Euler, 12
  
- palabra, 16
  - inversa, 16
  - longitud, 16
  - reducida, 16
  - vacía, 16
- parejamente cubierto, 45
- presentación, 18
- producto directo, 13
- proyección cubriente, 45, 47, 50–53, 55
  
- rebanadas, 45
- relaciones, 18
  
- semilocalmente simplemente conexo, 7,  
8, 47, 55
- subgráfica, 5
- subgrupo conmutador, 19
- suma directa, 13
  
- topología
  - coherente, 1
  - trayecto, 8
  - trayecto cerrado, 8
  - trayecto reducido, 9
  
- vértices, 2
- van der Warden, 17