



**UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
“Mat. LUIS MANUEL RIVERA GUTIERREZ”

**“MODELO Y SIMULACION NUMÉRICA DE LA
INFILTRACIÓN DE AGUA EN SUELOS AGRÍCOLAS
NO SATURADOS CON AIRE USANDO EL MÉTODO
DE LOS ELEMENTOS FINITOS”**

PARA OBTENER EL GRADO DE:

LIC. FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA

Luis Miguel Carreón Silva

TUTOR: Dr. Mario César Suárez Arriaga.

Morelia Mich., Agosto del 2006

ÍNDICE

NOMENCLATURA

1. RESUMEN

| | |
|-------------------|---|
| Resumen..... | 1 |
| Introducción..... | 3 |

2. ANTECEDENTES HISTÓRICOS

| | |
|--|----|
| 2.1 Desarrollo Histórico De Los Elementos Finitos..... | 6 |
| 2.2 Etapa Medieval..... | 7 |
| 2.3 Etapa Renacentista..... | 8 |
| 2.4 La Etapa Barroca..... | 11 |
| 2.5 La Etapa Híbrida Post-Barroca..... | 11 |
| 2.6 La Etapa De Los Elementos Sin Malla..... | 12 |
| 2.7 Las Matemáticas Y La Ingeniería En El Desarrollo Del Método De Los Elementos Finitos..... | 12 |
| 2.8 Razones Por Las Que El Mef Se Hizo Tan Popular..... | 13 |
| 2.9 El Método De Los Elementos Finitos (Mef), Las Diferencias Finitas (Mdf), Superficies Finitas Integradas (Msf) Y Elementos De Frontera (Bem)..... | 14 |
| 2.10 Antecedentes Históricos: Ecuación De Richards..... | 15 |

3. SUELOS

| | |
|---|----|
| Introducción..... | 22 |
| 3.1 Propiedades Moleculares Del Agua..... | 24 |
| 3.2 Composición Mecánica Del Suelo..... | 25 |
| 3.3 Estructura Del Suelo..... | 26 |

| | |
|---|----|
| 3.4 Aeración..... | 27 |
| 3.5 Temperatura..... | 27 |
| 3.6 Almacenamiento De Agua..... | 29 |
| 3.7 Humedad Y Potencial Del Agua..... | 30 |
| 3.8 Irrigación..... | 31 |
| 3.9 Movimiento Del Agua En El Suelo..... | 35 |
| 3.10 Movimiento De Agua En Suelos No Saturados..... | 36 |

4. MODELO DE INFILTRACIÓN DE AGUA EN SUELOS NO SATURADOS

| | |
|--|----|
| Introducción..... | 38 |
| 4.1 Ecuaciones De Comportamiento..... | 38 |
| 4.2 Ley De Darcy..... | 40 |
| 4.3 Relaciones Constitutivas..... | 41 |
| 4.4 Teoría De Mualem..... | 43 |
| 4.5 Formulación De La Ecuación Para Las Dos Presiones..... | 47 |

5. EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL NO LINEAL DE RICHARDS

| | |
|--|----|
| Introducción..... | 50 |
| 5.1 Forma Débil..... | 52 |
| 5.2 Discretización Del Espacio: Elementos Finitos..... | 56 |
| 5.3 Elementos Integrales..... | 57 |
| 5.4 Los Términos De Fuentes O Sumideros Y Las Condiciones De Frontera..... | 58 |
| 5.5 Ecuación Para El Aire..... | 59 |

6. SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO

| | |
|--|----|
| Introducción..... | 62 |
| 6.1 Conceptos Básicos..... | 63 |
| 6.2 Propiedades Del Suelo A Modelar, Condiciones Iniciales Y De Frontera..... | 64 |
| 6.3 El Entorno Femlab (Finite Element Method Laboratory)..... | 67 |
| 6.4 Planteamiento Del Problema En El Entorno Femlab..... | 69 |
| 6.5 Solución De La Ecuación Diferencial Y Simulación..... | 73 |
| 6.6 Resultados..... | 78 |

7 CONCLUSIONES

| | |
|-------------------|----|
| CONCLUSIONES..... | 90 |
|-------------------|----|

NOMENCLATURA

| | |
|------------------|--|
| α | Subíndice que denota la fase de la que se habla. En este caso solo se usan agua (w) y aire (a) como fases. |
| ϕ | Porosidad $[L^3/L^3]$. |
| ρ_α | Densidad $[M] [L]^{-3}$. |
| S_α | Saturación $[L^3/L^3]$. |
| \bar{q}_α | Flujo volumétrico (Flujo de Darcy) $[L] [T]^{-1}$. |
| F_α | Fuente o Sumidero $[M] [L]^{-3}[T]^{-1}$. |
| θ_α | Contenido de flujo volumétrico de la fase α . |
| k | Tensor de permeabilidad intrínseca del medio $[L]^2$. |
| k_r | Permeabilidad relativa del agua $[\]$. |
| μ | Viscosidad dinámica del fluido $[M] [L]^{-1}[T]^{-1}$. |
| P_α | Presión de la fase $[M] [L]^{-1}[T]^{-2}$. |
| P_c | Presión Capilar $[M] [L]^{-1}[T]^{-2}$. |
| \bar{g} | Aceleración debida a la gravedad $[L] [T]^{-2}$. |
| ρ_{0w} | Densidad del agua en condiciones normales de temperatura y presión $[M]/[L]^3$. |
| ρ_{0a} | Densidad del aire en condiciones normales de temperatura y presión $[M]/[L]^3$. |
| g | Magnitud de la aceleración debida a la gravedad $[L]/[T]^2$. |
| $K_{s\alpha}$ | Conductividad hidráulica cuando el medio poroso está saturado en fase α . |
| θ_{ws} | Contenido de humedad de saturación $[L^3/L^3]$. |
| θ_{wr} | Residuo del contenido de humedad $[L^3/L^3]$. |
| a | Función de la medida de densidad de los poros $[L]^{-1}$. |
| θ_e | Saturación efectiva $[\]$. |
| h_α | Potencial de presión $[L]$. |
| i_z | Vector unitario normal, en dirección de la aceleración de la gravedad. |

- h_c Potencial de presión capilar [L].
- h_{0a} Potencial de presión del aire a presión atmosférica [L].
- F_α Término de fuente o sumidero (puntual) [V]/[T].
- K_{xx} Término en dirección “x” del tensor de Conductividad hidráulica [L]/[T].
- K_{zz} Término en dirección “z” del tensor de Conductividad hidráulica [L]/[T].
- C_w Capacidad específica de la humedad [L]⁻¹.
- w Función de peso en el método de los residuos ponderados o método de Ritz-Galerkin.
- Ω Dominio en cual se da la solución de la ecuación.
- $\partial\Omega$ Frontera del dominio Ω .
- \vec{n} Vector normal a la superficie del dominio.
- $\phi(x, z)$ Funciones de forma o funciones interpoladoras en el método del elemento finito.

RESUMEN

El rápido crecimiento de la población mundial ha hecho que el empleo eficiente del agua de riego sea de importancia vital, particularmente en los países más pobres donde el mayor potencial para aumentar la producción alimentaria y los ingresos rurales se encontraría frecuentemente en las zonas de riego.

Uno de los objetivos principales de este trabajo es estudiar un sistema de riego que sea óptimo en el gasto de agua y que sea suficiente para el cultivo. Para esto se pretende crear un modelo matemático que nos ayude a visualizar el flujo de agua en suelos de cultivo, el cual favorezca a la investigación agrícola particularmente a las siembras en temporada de riego.

Existen varias formas de riego, sin embargo en este trabajo se consideran solo: el riego por goteo y el riego por gravedad, a partir de estas dos técnicas de riego, se realiza una simulación numérica, en base a un modelo matemático y finalmente se analizan las características de los resultados obtenidos de la simulación.

Para lograr la simulación primero se presenta un ente matemático abstracto que represente numéricamente el fenómeno, este ente es llamado ecuación diferencial, que nos recrea el fenómeno de acuerdo a su solución. Para calcular la solución de la ecuación diferencial es necesario recurrir a varias técnicas. Las más conocidas son las analíticas, sin embargo, como veremos más adelante, la aplicación de éstas implican muchas suposiciones que empobrecen el análisis del fenómeno real. En estos casos las técnicas más usadas son las numéricas, las diferencias finitas, superficies finitas integradas, los elementos integrales de frontera y el elemento finito.

La ecuación diferencial que modela el movimiento de agua en zonas (suelos) no saturadas es la ecuación de Richards. Para dar solución a la ecuación diferencial que usaremos en esta tesis aplicaremos el método numérico de los elementos finitos (MEF).

A grandes rasgos lo que se hace sistemáticamente en un modelo matemático es: Obtener primero los parámetros, que en este caso son los del suelo y aire circundante, después, insertar estos parámetros en un programa por computadora, y finalmente interpretar físicamente los resultados de la simulación obtenidos aprovechándolos a la hora de tomar decisiones en la práctica.

Las simulaciones por computadora han sido muy socorridas, pues se alcanza una optimización en cuanto al tiempo de cálculo y precisión. Se presentará una simulación por computadora que nos ayudará a entender mejor el fenómeno de irrigación y a plantear opciones de optimización del riego.

INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia humana, se ha tratado de alcanzar una supervivencia principalmente en los inicios de la colonización en la tierra, nuestros ancestros, por ejemplo, cazaban animales y recolectaban frutos para obtener su alimento y vestido; por ello era importante desarrollar, modificar y perfeccionar los métodos de caza y recolección. Con el paso del tiempo las civilizaciones con más idea descubren otras alternativas para obtener el alimento y utilizan la siembra y métodos más efectivos de caza con ese objetivo, con esto, la siembra se desarrolla y se trata de perfeccionar para de esa manera obtener buenas cosechas. Surge entonces lo que hoy conocemos como la agricultura, que hasta la fecha ha sido la base para la obtención de productos que ofrece la madre naturaleza para la supervivencia y nuestro desarrollo.

En las dos últimas décadas del siglo XX, la adopción de tecnologías de riego de alta eficiencia, en Chile por ejemplo, ha presentado un crecimiento significativo, fundamentalmente por la incorporación de cultivos de alta rentabilidad asociada por lo general, a la actividad de exportación.

Una buena parte de la producción agrícola se obtiene en temporada de lluvias, la otra parte se produce en temporada de secas. Los agricultores buscan la manera de producir en cantidades iguales en ambas épocas, ya que es vital el consumo de estos productos todo el año. Cultivos como el maíz, el frijol, la papa, el jitomate, el tomate, la cebolla, el arroz y las distintas frutas, son indispensables para la población, es por ello que se busca tener estos productos todo el año.

La agricultura es el cultivo o labranza de la tierra, se ha desarrollado desde los tiempos de las civilizaciones antiguas. En los tiempos modernos, en México particularmente, la agricultura es la base del desarrollo, sin embargo, el apoyo

que se le ha dado al campo ha sido insuficiente para la producción de los cultivos que generalmente se siembran en el país.

Uno de los principales problemas del campo, en tiempo de sequía (temporadas de riego), ha sido la forma de regar los cultivos con el objetivo de mantener una buena producción, tanto en calidad como en cantidad. De ahí deviene el problema o la pregunta de ¿cómo hacerlo en forma óptima y razonada? Otro problema incluso mundial es la escasez de agua, problema que se agudiza conforme pasa el tiempo. Es por esta razón que el cuidado y el uso concienzudo del líquido vital, deben ser los principios que debemos adoptar en cualquier lugar donde se esté usando para la prosperidad y supervivencia de la humanidad.

Otro elemento importante en la agricultura es el suelo del cual nos alimentamos de manera indirecta mediante el consumo de productos naturales, los cuales crecen y se desarrollan precisamente en los suelos.

El suelo constituye el soporte indispensable sobre el que se asientan todos los ecosistemas terrestres, sirve no solo como asiento para la vegetación, a la que nutre y sostiene, sino que también sirve de soporte y medio de vida para una enorme cantidad de animales y microorganismos que en él se desenvuelven.

Ambos elementos, suelo y agua, forman la espina dorsal de la agricultura, y en estos momentos las técnicas y métodos agrícolas necesitan de un refinamiento para que ambos elementos ayuden lo más posible en el proceso agrícola.

Este trabajo está hecho sobre la base de una investigación de campo a cargo de investigadores del Instituto Investigaciones Agropecuarias y Forestales de la UMSNH. El Dr. Philippe Lobit (2005), realiza experimentos con semillas de fresas utilizando algunas formas óptimas de riego. Otro punto importante en toda investigación es el modelado matemático, el cual estudiaremos en este trabajo, que se encarga de dar otro punto de vista al investigador de manera que en base a este, pueden hacer diferentes acotaciones de los parámetros involucrados en el fenómeno, es decir, que éstos sean razonables con respecto al problema físico, y

Modelo Y Simulación Numérica De La Infiltración De Agua En Suelos Agrícolas No Saturados Usando MEF.

también brinda la posibilidad de que en un momento dado, se puedan tomar decisiones en el desarrollo de la investigación.

En general, el trabajo consistió en realizar un modelo matemático de riego en una siembra de fresas, con parámetros experimentales proporcionados por el Dr Philippe Lobit (2005).

ANTECEDENTES HISTÓRICOS

2.1 DESARROLLO HISTÓRICO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El texto de Suárez (2005), presenta el siguiente desarrollo histórico sobre el elemento finito:

La necesidad es la madre de la invención, reza el viejo y adecuado adagio para explicar numerables inventos humanos en cualquier área de la creatividad humana, lo mismo ocurrió con los métodos numéricos que permitieron efectivamente resolver una cantidad de problemas casi imposible de enumerar en matemáticas y física. Desde la técnica de exhaustión de Arquímedes, pasando por los algoritmos árabes y hasta los métodos intuitivos de Newton, las cuadraturas de Gauss y los algoritmos de Runge-Kuta. Siempre fue la necesidad de resolver problemas matemáticos difíciles lo que procrea a los métodos numéricos que usamos hoy en día.

Las nociones para aproximar derivadas que ya habían empleado Newton y Euler, fueron puestas bajo una nueva luz por el calculista Sonthwell a principios de 1940 bajo la terminología general de método de Diferencias finitas (MFD), el cual devino rápidamente muy usado con el surgimiento de las primeras computadoras electrónicas de gran tamaño.

No fueron matemáticos, ni físicos, los que descubrieron el elemento finito; sino un grupo de ingenieros trabajando en problemas arduos de cálculos en la deformación de estructuras quienes inventaron verdaderamente el proceso conocido como Método de los Elementos Finitos (MEF) a mediados de la década

de los 50's. El gran experto Galés en el MEF, Zienkiewicz, divide cronológicamente el progreso gradual del MEF en tres eras evolutivas.

- 1) Era medieval (la fe mueve montañas).
- 2) Era renacentista (se reconocen los modelos clásicos).
- 3) Etapa barroca (se agrega decoración y se buscan nuevas bases; 1973).

A estas tres eras de Zienkiewicz, habrá que agregarles, al menos otras dos:

- 4) La era de los elementos híbridos (1990).
- 5) La era de los MEF sin malla (2000).

2.2 ETAPA MEDIEVAL

Los problemas que requieren aplicación de las matemáticas a las ciencias y a las ingenierías, frecuentemente son muy difíciles, y no precisamente a causa del nivel matemático requerido, sino que simplemente el número de componentes individuales involucrados es enorme. Imagínese simplemente todos los componentes de una nave espacial, o todas las partes que forman la catedral de Morelia, o los elementos del estadio Morelos, o los de una placa tectónica.

En esta etapa primaria del MEF se observa la naturaleza de cada componente individual, especificando sus variables y los puntos de conexión entre cada elemento con los demás elementos de la estructura global. Este proceso constituye el ensamblado del MEF.

Es natural entonces que un medio continuo (estructura o sistema) sea modelado como un ensamblaje discreto (finito) de cierto número de componentes individuales llamados por lo mismo Elementos Finitos que representan de manera sólo aproximada a la estructura original. Este modelo solamente es

aproximado debido a que el medio continuo tiene, por definición matemática, un número infinito de componentes (puntos (x, y, z)), o bien por que físicamente contiene una cantidad excesivamente grande de partículas materiales (de moléculas por ejemplo). Como es prácticamente imposible modelar todos y cada una de las moléculas del medio, la representación finita o discreta es necesaria. Sin embargo esta aproximación casi siempre da muy buenos resultados.

En esta primera etapa del desarrollo histórico del MEF, la intuición física predomina. Turner y coautores (1956), al parecer fueron los primeros en emplear el concepto de “Elemento Finito” notando que, al separar un elemento de una estructura y suponiendo patrones de tensión y de desplazamiento simples ligados, las relaciones entre desplazamientos y fuerzas nodales pueden lograrse en forma adecuada. Esos pioneros e ingenieros aeronáuticos y mecánicos, guiados por el sentido común y la intuición, derivaron varios elementos finitos simples: el famoso Triángulo de Turner, el rectángulo de Clough y la placa doblada o curvada de Melosh.

2.3 ETAPA RENACENTISTA

(Los modelos clásicos)

Después de agotar las primeras intuiciones brevemente descritas en los párrafos anteriores, se descubrió que una perspectiva claramente intuitiva basada en el sentido común, fallaban cuando se intentaban nuevas aplicaciones con elementos más complejos. Entonces surgió el principio del “Trabajo Virtual” como una herramienta auxiliar del MEF, más general y poderosa en el análisis estructural.

Este principio consiste en un teorema clásico que asegura que si un conjunto de tensiones está en equilibrio, en todos los puntos, con un conjunto de tracciones externas, entonces la suma de trabajos virtuales internos y externos a la estructura, hechos durante cualquier desplazamiento virtual, debe de ser igual a

cero (Zienkiewicz, 1973 – Finite Elements – The Background Story). Tal uso del trabajo virtual en el MEF permitió asegurar que el proceso del desplazamiento virtual puede también representarse como la minimización aproximada de un potencial de energía.

Esta representación usando la minimización de un funcional como la energía potencial de la estructura, permitió introducir otro concepto clásico, el principio variacional de Hellinger-Reissner. Tal principio resulta muy poderoso, pues entonces cualquier modelo de un proceso físico en el cual se puede definir un funcional con algún valor estacionario, puede ser modelado inmediatamente con el MEF. Como ejemplo general la técnica variacional se ilustra considerando una funcional $X(\mu)$ definido como: $X(\mu) = \int_{\Omega} F(\bar{\mu}) d\Omega$ con Ω representando el dominio espacial de la estructura. Entonces una aproximación para $\bar{\mu} = M\bar{a}$, donde M es una matriz de la estructura y \bar{a} es la deformación a desplazamientos, conduce por minimización con respecto a \bar{a} , hacia un conjunto de ecuaciones aproximadas: $\frac{\partial X}{\partial \bar{a}} = 0$ (Proceso de Rayleigh-Ritz).

La extensión variacional del MEF condujo en 1965 a Zienkiewicz y Cheng, a formular y resolver problemas no estructurales. Después de este trabajo se hicieron un buen número de investigaciones y se publicaron varios artículos sobre la aplicación del MEF a diferentes procesos físicos. Es importante hacer aquí un breve resumen de la situación del MEF hasta mediados de la década de 1960:

- 1) Se comprendió que la formulación usando el principio del trabajo virtual (PTV) en elasticidad lineal da resultados idénticos que el principio de minimización de la energía potencial, si la función de peso virtual es idéntica a la función forma del elemento finito.

- 2) El PTV establece la relación elástica en forma más simple y directa que el principio variacional, cuando ambos conduzcan a la misma aproximación.
- 3) Si se empleaban otras funciones de ponderación, esto conducía a una formulación alternativa que no podía ser derivada del principio variacional.
- 4) Si existen propiedades no-lineales de la estructura, entonces el PTV sigue siendo válido y conduce a un conjunto de ecuaciones no lineales discretas. En este caso el principio variacional se hace más complicado y, de existir el funcional, éste deja de tener un sentido físico claramente definido.
- 5) En las aplicaciones no estructurales del MEF las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan y describen el problema físico, pueden ser correctamente formuladas, pero el funcional a minimizar puede, no formularse en forma simple, o bien, puede no existir.

En estos casos importantes el PTV clásico se descubrió que podía ser reemplazado por métodos clásicos de Residuos Ponderados (MRP o Weighted Residual Methods) ya usados en otros problemas antes de 1956. A partir de este descubrimiento se reencontró otro proceso clásico de formulación especial del RMP llamado de Galerkin, que databa de 1951 y que devino muy popular a partir de entonces.

A partir de 1969 se reconoció ante la comunidad internacional que ya usaba el MEF, que el método de Galerkin, consiste en procedimientos especiales de residuos ponderados, es muy ventajoso y general en la formulación del MEF, y tal vez sea también el más sencillo.

2.4 LA ETAPA BARROCA

La etapa barroca tanto en el arte como en la ciencia, se ha caracterizado por la búsqueda de nuevas formas o nuevos territorios, por lo tanto, de un alejamiento de los modelos clásicos. Hacia el exterior, lo barroco se hace evidente por una elaboración creciente en el refinamiento de las formas y de la decoración. A partir de 1970 el MEF entró a una fase barroca de mucha elaboración de los detalles matemáticos.

Enseguida enfrentó la yuxtaposición de varios detalles físicos y buscó nuevas bases científicas y nuevos campos de aplicación.

A esta era corresponde el reemplazo de las formas iniciales simples de los elementos (triángulos, rectángulos, etc.) por otras formas más complejas y con más grados de libertad. Como ejemplo, surgieron los elementos isoparamétricos con numerosos nodos, elementos curvos y elementos tipo concha con varios nodos. También en esta etapa surgieron los principios variacionales mixtos, en la solución de problemas de elasticidad.

2.5 LA ETAPA HIBRIDA POST-BARROCA

Aunque todavía nos encontramos en ella, esta era se caracteriza por una proliferación impresionante de trabajos originales en el modelado de una enorme cantidad de problemas físicos y en la ingeniería ya no solo civil o estructural, sino en la mecánica de fluidos, en el flujo en medios porosos, el flujo en fronteras, la transferencia de calor y en aplicaciones a la biomecánica, a la biofísica y a la ingeniería espacial. También se generaliza el uso del MEF en diversos problemas de fisuras, rupturas y fracturas, las bibliografías sobre MEF proliferan y se calculan 9,000 artículos al año publicados en todo el planeta.

2.6 LA ETAPA DE LOS ELEMENTOS SIN MALLA

Al aumentar la complejidad de los problemas tratados con el MEF, se han hecho cada vez más evidentes algunas limitaciones del método, por ello, desde principios de este siglo, una nueva y más poderosa clase de técnicas numéricas está emergiendo. Se les ha dado el nombre genérico de Métodos Numéricos Sin Malla (MNSM) o “Meshless Method” aunque se trata más bien de varias técnicas y no de una sola. Con los MNSM se han podido resolver complejos problemas de mecánica de sólidos y de fluidos, con una reducción de tiempo en pre-procesamiento muy significativa.

2.7 LAS MATEMATICAS Y LA INGENIERÍA EN EL DESARROLLO DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Históricamente hablando, fueron ingenieros mecánicos los que inventaron el MEF y su trabajo desempeñó un papel crucial en el desarrollo y aceptación generalizada de esta poderosa herramienta de cálculo. Sin embargo es muy importante y justo, mencionar que el trabajo del gran matemático alemán Richard Courant, contenía ya algunos componentes y fases teórico-prácticas del MEF desde 1943.

Lo mismo puede decirse del trabajo de Prager y Synge con una aproximación de elasticidad basada en el concepto de espacio de función (1947). Lo mismo podrá decirse del método de exhaustión de Arquímedes, quien dividía una figura compleja en figuras más simples elementales para calcular su área. Estos trabajos fueron pioneros, sin embargo, no tuvieron ninguna influencia directa en las invenciones ingenieriles originales del MEF; ni tampoco influyeron en los años subsiguientes, ni en otros matemáticos para proseguir en esa línea de investigación.

Está bien documentado que no fue hasta que se comprendió la relación del MEF con los principios variacionales y los residuos ponderados, que algunos miembros de la comunidad matemática empezaron a interesarse seriamente en el MEF. Esto ocurrió aproximadamente entre los años 1969 y 1970, hasta entonces se comprendió que en realidad el MEF es una herramienta de aproximación numérica general, pero que no puede equipararse exactamente con ninguna de las técnicas matemáticas que lo sustentan. El tema común es el proceso general de ensamblado de los elementos. El MEF también ha servido, epistemológicamente hablando, para adecuar más al ingeniero y al físico en su soporte matemático (la infraestructura matemática de la realidad), pero sobretodo, a educar al matemático a pensar en términos de la ingeniería práctica y de las aplicaciones de su ciencia a la realidad física.

2.8 RAZONES POR LAS QUE EL MEF SE HIZO TAN POPULAR

Son tres, al menos, las principales razones por las cuales el MEF devino como una herramienta de cálculo tan popular internacionalmente:

- A) Tiene una gran analogía física con el ensamblado de partes que es típico de la ingeniería (estructural, mecánica, biofísica, etc.), y por tanto es conceptualmente muy intuitivo.
- B) Tiene una gran capacidad para trabajar con formas geométricas complejas empleando elementos simples de forma arbitraria.
- C) Debido a la naturaleza de las interconexiones entre los elementos directos del MEF, en el proceso Terminal de ensamblado, se forma un conjunto de ecuaciones cuya matriz tiene una “estructura de bandas” la cual facilita su solución.

2.9 EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (MEF), LAS DIFERENCIAS FINITAS (MDF), SUPERFICIES FINITAS INTEGRADAS (MSFI) Y ELEMENTOS DE FRONTERA (BEM).

Hoy en día se puede visualizar al MEF como una variante o caso especial de varios procesos clásicos de aproximación numérica, tal y como se mencionó en las etapas históricas del MEF, pero ¿que pasa con el MDF? Que también es capaz de resolver muchos problemas gobernados por ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Las diferencias finitas surgieron desde 1666 con el invento del cálculo diferencial, pero se desarrollaron extensamente hacia el contexto físico de solución de problemas prácticos, con el trabajo de R. Southwell en 1946. El MDF es una aproximación directa de las EDP y EDO que gobiernan el fenómeno con condiciones de frontera, en puntos (nodos) discretos de una malla, mediante el valor de la función en otros puntos de la misma, previamente calculados. En el sistema inicial de ecuaciones a resolver, cada ecuación aparece ensamblada inmediatamente.

Debido a la aproximación de las condiciones de frontera, las matrices resultantes son frecuentemente no simétricas. Pero la principal ventaja del MEF sobre el MDF es, la representación de geometrías complejas curvadas, en los cuales el proceso de ensamblado de elementos con distintas propiedades físicas no representa ninguna dificultad.

Con respecto a los otros dos métodos, llamados MSFI Y BEM, no se puede establecer una respuesta general a la pregunta: para la misma cantidad de trabajo y esfuerzo en un problema dado, ¿Cuál es mejor, más rápido y más preciso? Dependerá siempre de cada problema particular.

El doctor Mario Cesar Suárez ha trabajado con el MSFI y ha notado que el método es mucho más sencillo de implementar, más rápido, e igual de potente

que el MEF en problemas de transferencia de calor en sólidos, y en los flujos de masa y energía en medios porosos.

Pero por ejemplo si se resuelve un problema de Dirichlet con una malla regular de un dominio rectangular, los cuatro métodos mencionados dan resultados numéricamente idénticos con el mismo trabajo de cómputo.

Por último, conviene mencionar el tipo de problemas donde el MEF falla o es muy impreciso o muy difícil de implementar.

Estos son:

- 1) Simulación de singularidades por carga concentrada.
- 2) Dislocaciones, esquinas o micro fisuras (en estos casos las soluciones numéricas convergen mal).
- 3) Los problemas que requieren un refinamiento muy intenso de las mallas, demandan un consumo de tiempo y de creación muy alto.
- 4) Es muy difícil simular el comportamiento de una fisura con trayectos complejos y arbitrarios que generan discontinuidades.
- 5) Es casi imposible simular el rompimiento de un material en muchos fragmentos, pues la hipótesis básica es el continuo.

2.10 ANTECEDENTES HISTÓRICOS: ECUACIÓN DE RICHARDS

Existen muchos trabajos en la literatura que tratan el estudio del movimiento de agua en zonas no saturadas, muy pocos estudios se han enfocado al movimiento de la fase aire.

El modelo desarrollado en este trabajo es usado para estudiar también el flujo de aire en zonas no saturadas o parcialmente saturadas de agua y parcialmente saturadas con aire. La literatura disponible acerca de los modelos de flujo multifásico a través de medios porosos cuenta con un amplio rango de disciplinas

que van desde ciencias de la tierra hasta ingeniería petrolera, imperando esta última en cuanto a trabajos y a literatura.

Los problemas de petróleo cambian y difieren entre si cuando se trata de problemas en zonas no saturadas puesto que las altas presiones se hacen presentes en profundas formaciones de poros. Las condiciones de frontera para estos problemas también tienden a ser diferentes en zonas no saturadas.

El siguiente desarrollo histórico acerca de las ecuaciones y métodos involucrados en la resolución de la ecuación de Richards, es propuesto por Philip John Binning (1994) en su trabajo “Modelado de flujo en zonas no saturadas y transporte de contaminante en dos fases”. Revisando algunos trabajos que tratan del estudio de transporte y flujo en las zonas no saturadas encontramos los siguientes: Gee (1991)- Flujo y transporte en zonas vadosas; Abriola (1989)- estados de migración multifásica de químicos orgánicos en aguas subterráneas; Vauclin (1989)- Modelos de flujo de aire y agua en zonas no saturadas usando la ecuación de Richards (1928); Nielsen (1986)- Procesos de flujo y transporte en fase aire y agua dentro de zonas no saturadas.

La aproximación más común del flujo multifásico y transporte en zonas no saturadas es la suposición de inmovilidad de la fase aire. Algunos modelos que incluyen esta suposición son: Pinder y Abriola (1986), y Culrer (1991), mientras que estos modelos dan excelentes resultados bajo muchas condiciones, se han cuestionado grandemente la suposición de inmovilidad de la fase gaseosa. Por ejemplo: Green (1970) fue de los primeros en reconocer la importancia de la fase aire en zonas no saturadas e incluye esto en un modelo de diferencias finitas en una dimensión con dos fases.

Sin embargo, el enfoque de estos modelos del flujo multifásico en zonas no saturadas ha sido sobre la fase agua.

El objetivo de investigaciones anteriores sobre las dos fases aire-agua debía mejorar las estimaciones de las razones de infiltración mediante la inclusión de una fase aire dinámica. Un ejemplo de tal estudio es el trabajo de Touma y Vauclin (1986) quienes observaron la influencia de la fase aire en el movimiento del agua de manera experimental y con un modelo en diferencias finitas.

Recientemente ha habido una renovación en el enfoque sobre la fase aire en zonas no saturadas. Una gran parte de estos enfoques está motivada por la necesidad de entender el funcionamiento de las nuevas tecnologías.

Hasta la fecha han sido sólo un número limitado número de modelos de acoplamiento del flujo aire-agua en zonas no saturadas. Sin embargo hay una gran cantidad de modelos que consideran solo la fase aire, ejemplos: Johnson (1990) quien supone un contenido de humedad constante para derivar una solución analítica del movimiento del aire. Otros que incluyen esta aproximación: Mohsen (1980), Weeks (1982), Baehr y Corapcioglu (1987), Melcalfe y Farquhar (1987), Mendoza y Mc Alary (1990), Mendoza y Frind (1990), Rathfelder (1991), Benson (1941) y Mc Carty y Johnson (1993).

Existen dos principales dificultades a la hora de resolver las ecuaciones que gobiernan el flujo multifásico. La primera, las ecuaciones se acoplan a través del fluido contenido el cual es una función de la presión capilar, o la diferencia de presiones entre los dos fluidos. La segunda es la no linealidad de la ecuación. Cualquier intento de resolver estas ecuaciones deberá tomar en cuenta estas dos situaciones.

En general predominan cuatro metodologías para la resolución de las ecuaciones de flujo multifásico. Estas están agrupadas en la siguiente forma:

1) **Métodos analíticos.**

La solución analítica puede ser obtenida para estas ecuaciones bajo estrictas suposiciones y simplificaciones, esto implica la inaplicabilidad del método en problemas reales. Sin embargo estos modelos pueden ser potentes herramientas de diagnóstico que pueden dar algunas buenas ideas preliminares y básicas en situaciones donde se usen. Esto es ejemplificado por Johnson (1991) que combinó una simple interfaz de usuario con un modelo analítico del flujo de aire para crear una poderosa herramienta para la evaluación inicial de un esquema de ventilación. Hay muchos otros modelos analíticos para el flujo de aire y agua en zonas no saturadas. Se incluyen numerosas soluciones: Phillip (1965), Brustkern y Morel Seytoux (1970), Parlange y Hill (1979), Baehr (1987), Sanders et. al. (1988), y Mc Whorter y Sunada (1990).

2) **Método de diferencias finitas.**

Es la técnica más común en la resolución de las ecuaciones. La fuerte tradición del uso de estos métodos data desde la aplicación a problemas de reservorios de petróleo. Entre los numerosos usuarios de este método están: Pinder y Abriola (1986) quienes resolvieron completo el problema de acoplamiento trifásico usando un modelo en diferencias finitas implícito con un esquema iterativo no lineal de Newton-Rapshon, con la suposición de una presión constante e inmovilidad de la fase gaseosa; Pruess (1987) con el modelo TOUGH de acoplamiento transiente de calor y flujo de masa (el espacio es modelado con superficies finitas); Sleek y Sykes (1989); Culver (1991), Moridis y Reddel (1991); Sleek y Sykes (1993) cuyo modelo es probablemente el mejor actualmente disponible. Este modelo resuelve completamente el acoplamiento del flujo de aire y agua e incluye un transporte de contaminante en ambas fases.

3) El método de los elementos finitos.

El MEF es el preferido por muchos autores por su flexibilidad en el aspecto de las condiciones de frontera y por su estabilidad, trabaja con muchas formas del dominio y tipos de elementos. Este método ha sido aplicado al problema de flujo multifásico por mucho menos autores que han escogido las diferencias finitas. Entre los autores que han empleado este método: Binning (1992), Kaluarachchy y Parker (1989); Mendoza y Frind (1990); Schrefler y Xiaoyong (1993) quienes también incluyeron la consolidación de la fase sólida en su trabajo.

La principal dificultad en la resolución de las ecuaciones radica en la linealización y el método para hacer el acoplamiento de las ecuaciones. Uno de los estudios acerca de la no linealidad en la ecuación de flujo no saturado es el estudio de Paniconi (1991), quien analizó una variedad de aproximaciones a la linealización de la ecuación de Richards. Kaluarachchi y Parker (1989) también compararon el método iterativo de Picard con el de Newton-Raphson para modelar el flujo multifásico. Encontraron que el método iterativo de Picard funciona mejor que el de Newton-Raphson.

El esquema iterativo de Picard no es probablemente el esquema más eficiente de linealización para otros problemas, sin embargo, es extremadamente amplio, provee soluciones donde otros métodos fallan en la convergencia.

La otra dificultad que puede ser superada es el acoplamiento entre las ecuaciones del agua y el aire. Una aproximación común es desacoplar las ecuaciones, esto es el corazón del IMPES (Implicit Pressure, Explicit Saturation) que es una estrategia usada en la industria del petróleo, este

esquema resuelve las ecuaciones implícitamente en la presión de una fase y explícitamente en la saturación de la otra, esto desacoplando las ecuaciones.

El IMPES fue usado por Phuc y Morel-Seytoux (1972). El trabajo de Sleep y Sykes (1989), también usando IMPES resolvieron la ecuación de Richards para la fase agua y entonces calcularon explícitamente el comportamiento de la fase aire. En un más reciente trabajo, Sleep y Sykes (1993) compararon la precisión y eficiencia de ambas; un esquema IMPES y un esquema completamente explícito. Ellos encontraron que el IMPES fue más restrictivo en el tamaño de paso en el tiempo, que el esquema completamente implícito. Sin embargo, el esquema IMPES requiere menos memoria, lo cual puede ser algo considerable por lo largo del problema.

El IMPES trabaja mejor donde hay un pequeño acoplamiento entre las dos fases: agua-aire. Esto es verdad para la mayoría de lo comúnmente ocurrido en las condiciones de frontera. Sin embargo, el estudio de Touma y Vauclin (1986) muestran que si el aire esta atrapado por la infiltración del agua entonces retardará significativamente el movimiento del agua. Una solución tipo IMPES puede esperarse que sea una mala predictora de este tipo de comportamientos. La exactitud del IMPES es también dependiente de la fuerte no linealidad en la ecuación.

Las ecuaciones del flujo multifásico escritas con las dos presiones del fluido así como las variables dependientes, son similares en cuanto a su forma, a la ecuación de Richards.

Muchas aproximaciones han sido usadas para resolver esta ecuación desde el trabajo de Freeze (1971). Celia (1990) identificó dos cuestiones que han sido importantes para la solución numérica de la ecuación de Richards:

La primera es la forma de la ecuación, la cual es importante para el balance de masas en la aproximación numérica y la segunda es el tratamiento numérico de la parte temporal.

La forma de la ecuación gobernante esta decidida por la elección de la variable dependiente, con 2 tipos de elecciones posibles: el potencial de presión y el contenido de humedad.

La formulación basada en el contenido de humedad posee excelentes propiedades en el balance de masas. Las formas basadas en el potencial de presión son válidas en zonas saturadas, pero no conservan la masa.

Celia (1990) demostró estos comportamientos numéricamente y mostró las aproximaciones numéricas basadas en la forma mixta de la ecuación. La derivada del tiempo esta descrita en términos del contenido de humedad y la derivada espacial en términos de la humedad de presión.

El tratamiento de la derivada del tiempo en una aproximación numérica de la ecuación de Richards es igualmente importante para el éxito del método. Esto fue notado primeramente por Newman (1973), después por Milly (1981), Bouloutas (1989), Ross (1990) y Celia (1990). Ellos mostraron los beneficios del esquema compacto en MEF.

Celia (1990) concluyó que una combinación del esquema compacto con la forma mixta de las ecuaciones es el método más efectivo para resolver la ecuación de Richards.

SUELOS

INTRODUCCIÓN

El suelo tiene la capacidad de retener el agua contra la fuerza de gravedad, por esta razón se le puede considerar como un gran almacén.

Sin embargo, considerando el suelo desde el punto de vista de la física de suelos, es un sistema de gran complejidad, heterogéneo, trifásico (sólido, líquido y gas), en donde además, en contraste con lo que la mayoría de las personas piensan saber acerca de lo que sucede en el suelo, en él ocurren gran cantidad de procesos físicos, químicos, termodinámicos y todos relacionados entre sí, más que una simple “infiltración de agua”.

Fuentes (1998), señala que el suelo es un sistema complejo, compuesto por partículas sólidas (minerales y orgánicas), agua con sustancias en disolución (formando la solución del suelo) y aire. El aire y la solución del suelo ocupan los espacios o poros comprendidos en la matriz sólida.

Otro punto de vista mas general, propone el suelo como el soporte indispensable sobre el que se asientan todos los ecosistemas terrestres, sirve no sólo como asiento para la vegetación, a la que nutre y sostiene, sino que también sirve de soporte y medio de vida para una enorme cantidad de animales y microorganismos que en él se desenvuelven. (Sampat A. Gavande, 1972).

Nuestro interés en los suelos radicará en algunos fenómenos que ocurren en los procesos físicos, principalmente lo relacionado con la cantidad de humedad en el suelo a diferentes profundidades.



FIGURA #.- El suelo como precursor de actividad orgánica, biológica, física y química.

Nuestro interés en los suelos radicará en algunos fenómenos que ocurren en los procesos físicos, principalmente lo relacionado con la cantidad de humedad en el suelo a diferentes profundidades.

Así pues, la física de suelos comprende el estudio de un grupo de factores y procesos físicos que tienen lugar dentro del suelo y en su superficie, en particular se comprende lo relacionado con el crecimiento de plantas, labranza de suelos y aguas y otras actividades que se llevan a cabo en procesos agrícolas.

Las propiedades físicas del suelo, entre otras propiedades, determinan el valor que se puede obtener en la producción del cultivo, y consecuentemente repercute en el bolsillo del productor agrícola.

Tener conocimiento principalmente de las propiedades físicas de un suelo, da una ventaja enorme en comparación con las viejas técnicas de laboreo, ya que permite conocer mejor las actividades agrícolas vitales, tales como: la fertilización, el drenaje, la irrigación, la conservación de suelos y aguas, etc.

Entonces el objetivo de la física de suelos es el de desarrollar técnicas que optimicen los problemas relacionados con la producción de cultivos. El desarrollo de técnicas implica conocer las leyes que gobiernan la naturaleza física de el sistema (suelo). En el caso de este trabajo, será lo relacionado con el flujo de agua y el contenido de humedad dentro del suelo, que viene dada por la ecuación de Richards, que en capítulos posteriores será presentada, y además de conocer físicamente lo que ocurre en el suelo y que se debe tener la habilidad de usar los métodos necesarios para determinar algunas propiedades del suelo y también los recursos, como aparatos de mediciones para modificarlo adecuadamente, es decir, sin alterar las condiciones del suelo. Los parámetros utilizados en éste trabajo fueron proporcionados por P. Lobit (2006) de una “maqueta” localizada en la posta veterinaria a la salida de la Cd. de Morelia.

En éste capítulo presentaremos a *grosso modo*, algunas características físicas del suelo y el agua.

3.1 PROPIEDADES MOLÉCULARES DEL AGUA

Aunque nuestro trabajo será macroscópico, es bueno leer aunque sea una vez, algunas propiedades del agua.

En su estado más común, el agua es líquida inodora, incolora e insípida. Bajo condiciones naturales puede existir como vapor o como sólido (hielo), en realidad, en la naturaleza se encuentra en las tres fases. Una molécula de agua es muy pequeña. Un mol de agua, que contiene un volumen ligeramente mayor de 18cm^3 contiene 6.02×10^{23} moléculas individuales. Las moléculas de agua tienen un diámetro de 3×10^{-10} m. Cada molécula de agua está formada por dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno. Los átomos de hidrógeno están orientados a un ángulo de 105° uno del otro con respecto al átomo de oxígeno. Debido a la distribución no balanceada de las cargas eléctricas en las moléculas de agua,

dicha molécula resulta polarizada, es decir, hay un lado de carga positiva y otro de carga negativa. Estas moléculas se llaman bipolares. Esta propiedad hace que el agua sea atraída a superficies eléctricamente activas.

El agua no sólo es de importancia directa para las plantas, sino que juega muchos roles en el suelo, actuando como disolvente, hidratante, amortiguador de temperatura, agente dilatador y debilitador de estructura del suelo, entre otros. Un alto contenido de humedad facilita el movimiento y distribución de agua y solutos en el perfil de suelo (Terrón y Hernández 1992).

3.2 COMPOSICIÓN MECÁNICA DEL SUELO

Ya mencionamos que el suelo es trifásico, intervienen las fases sólida, líquida y gaseosa. En condiciones normales, el 50% de los componentes debe corresponder a la fase sólida, del 15%-35% a la fase líquida y del 15%-35% a la fase gaseosa. Las variaciones en porcentaje de los últimos componentes se deben a la cantidad de agua presente (Sampat A. Gavande, 1972)

La parte líquida del suelo la conforma principalmente el agua, y la parte gaseosa la conforma principalmente el aire. La parte sólida está formada por una asociación de constituyentes orgánicos e inorgánicos, el conjunto de éstos conforma el esqueleto del suelo, y la disposición o arreglo de las partículas sólidas determina la porosidad, la estructura y la densidad aparente del suelo.

El valor económico del suelo “agronómicamente” hablando, depende de la textura, es decir si es arenoso, limoso, arcilloso u otro.

La textura del suelo está relacionada con el tamaño de las partículas minerales. Específicamente se refiere a la proporción relativa de los tamaños de las partículas de varios grupos de partículas de un suelo. Esta propiedad ayuda a

determinar no sólo el abastecimiento de nutrientes, sino también agua y aire, tan importantes para la vida de las plantas.

3.3 ESTRUCTURA DEL SUELO

Desde el punto de vista morfológico, el término **estructura del suelo**, se ha definido como la disposición de las partículas elementales (arena, limo y/o arcilla) que forman partículas compuestas, separadas de las contiguas, y que tienen propiedades diferentes de las de una masa igual de las partículas elementales sin agregación (U.S.D.A 1957).

Un buen suelo, estructuralmente hablando es aquel que se desmorona con facilidad, no se vuelve pegajoso al mojarlo y no se dificulta al ararlo. Debido a la composición y a la estructura del suelo, el crecimiento de los cultivos se ve afectado por el aire que se encuentra dentro del suelo y por la cantidad de agua que puede entrar y que puede almacenar.

La estructura del suelo es elemento importante a considerar cuando se va a cultivar, ya que al arar la tierra, por la irrigación, por las lluvias y por el crecimiento de las plantas, la estructura del suelo puede cambiar, por eso se deben tener buenas técnicas de arado y buena planeación en las formas de irrigación principalmente, para no alterar sustancialmente la estructura del suelo y en consecuencia tener mejor producción.

En resumen, la estructura del suelo influencía prácticamente a la mayoría de los factores de crecimiento de las plantas. Una buena estructura del suelo hace que los factores del crecimiento funcionen a su máxima eficiencia y se obtengan mayores rendimientos en las cosechas.

3.4 AERACIÓN

En éste proyecto nosotros no trabajaremos con la fase del aire, pero debido a su importancia en el crecimiento de la planta, no es perdida de tiempo leer algo sobre aeración.

Aeración es el proceso mediante el que se intercambian los gases consumidos o producidos bajo la superficie del suelo con los gases de la atmósfera.

La mayoría de las reacciones biológicas que se realizan en un suelo, consumen oxígeno, y producen, como consecuencia, bióxido de carbono (CO_2). Este proceso general, conocido como respiración aeróbica, hace que la aeración del suelo sea un problema importante cuando se considera el crecimiento de la planta.

3.5 TEMPERATURA

Como es bien sabido por todos, sin el calor del sol nada en la tierra estaría vivo, la temperatura del suelo es un factor que cambia según la época del año, hora del día y profundidad, así también procesos tales como la transpiración, respiración y fotosíntesis dependen de la temperatura. A mayor temperatura los procesos químicos ocurren con mayor rapidez, así mismo algunos procesos físicos de flujo dependen de la temperatura.

Las plantas en un suelo caliente ocupan de más agua que en un suelo frío, por que un suelo caliente retiene menos agua.

Aunque en éste trabajo no trataremos lo relacionado a la temperatura, es útil conocer algunos conceptos térmicos:

Calor: Cantidad de energía interna de un cuerpo debido a la movilidad de sus partículas internas. Sus unidades son Joule (o KJ). Todas las unidades que se

usan comúnmente en la energía calórica, se definen en términos de la cantidad de calor requerido para elevar un grado en la temperatura de una unidad de masa de agua. En el sistema métrico, la unidad de calor es la caloría (Cal), que es la cantidad de calor necesaria para elevar un grado centígrado la temperatura de un gramo de agua. La definición especifica el intervalo entre 15 y 16 °C.

Temperatura: La temperatura es la intensidad o nivel de calor. En el sistema internacional de medidas se manejan grados Kelvin.

Calor específico: Es la capacidad que tienen los cuerpos de almacenar calor y sus unidades son J/kg/°C.

Capacidad térmica: La cantidad de calor existente en un cuerpo se denomina capacidad térmica o capacidad calorífica. La capacidad térmica de una sustancia puede definirse como la cantidad de calor requerido para cambiar la temperatura de una masa dada.

Conductividad térmica: La conductividad térmica es la capacidad de una sustancia para transferir calor de una molécula a otra. Se define como la cantidad de calor transmitida a través de una sustancia, por unidad de sección transversal, por unidad de gradiente de temperatura. Se expresa en Calorías por segundo, por metros cuadrados, por gradiente de temperatura en grados centígrados.

Difusividad térmica: La Difusividad térmica es expresión de la velocidad de una sustancia caliente como resultado de un gradiente térmico. Es proporcional a la conductividad térmica e inversamente proporcional a la capacidad de calor con base en su volumen.

Radiación: La radiación térmica es la transferencia de energía calórica a través del espacio sin un medio transportador.

3.6 ALMACENAMIENTO DE AGUA

Como ya mencionamos en el primer párrafo de este capítulo el suelo puede considerarse como un gran almacén, ya que está compuesto de partículas sólidas de muchas formas y tamaños, entremezcladas con espacios porosos que pueden llenarse de aire y agua.

Algunas veces se ha supuesto erróneamente, que una vez que el agua es almacenada, no podrá entrar más agua en el suelo y toda ésta será aprovechada por las plantas. Debido a esto se ha producido un considerable desperdicio de agua y de nutrientes por parte de algunos agricultores.

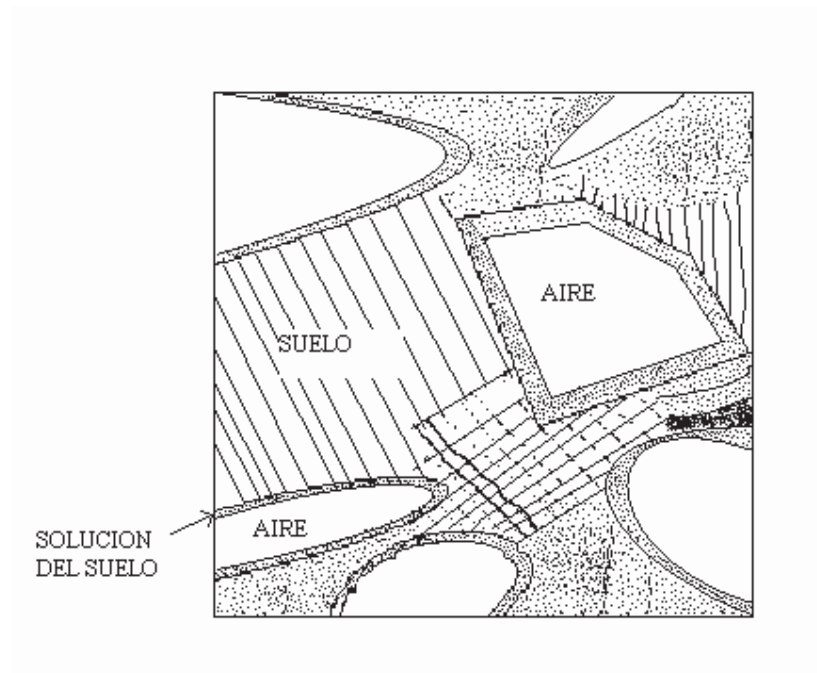


Figura 5.1.- El suelo está compuesto de partículas sólidas de formas y tamaños diferentes, entremezcladas con espacios porosos que recíprocamente contienen cantidades variables de solución de suelo y aire.

Entonces, el agua siempre se encuentra en movimiento y por eso no podemos dejar de mencionar el ciclo hidrológico, que es el balance de agua y se compone de: precipitación, escurrimientos superficial y subterráneo, drenaje, percolación, evapotranspiración y agua almacenada.

En el trabajo “Estudio del comportamiento del riego localizado subterráneo en comparación con riego localizado superficial, en el cultivo del tomate” de Marcelo Tornería Martínez menciona que “muchas son las propiedades del suelo que afectan a la retención del agua en él mismo, destacando entre todas, la textura, estructura y porosidad (De Santa Olalla y De Juan Valero 1993).

La porosidad está muy relacionada con la textura, pero depende también en gran medida, del grado de agregación (influenciado por el contenido de materia orgánica e inorgánica) o la compactación que presente (De Santa Olalla y De Juan Valero 1993). Según Kramer (1989), existen dos clases de poros determinados por su dimensión; los poros grandes o “no capilares”, que no retienen fuertemente el agua por capilaridad, y los poros pequeños, “capilares”, que sí la retienen. Los poros que no son capilares atraen libremente el agua después de lluvias o riego, y se supone que normalmente están llenos de aire. Los poros capilares contienen el agua que queda después de que la mayor parte del desagüe libre se halla efectuado, o sea, el agua retenida en el suelo a capacidad de campo”.

3.7 HUMEDAD Y POTENCIAL DEL AGUA

Hay dos objetivos principales en la medición de agua del suelo. El primero es el contenido de *humedad del suelo*, que es la cantidad de agua contenida en un volumen del suelo, información necesaria que se necesita para restaurar la humedad del suelo a la capacidad de campo (útil para realizar cálculos prácticos de cantidades aprovechables de agua). El segundo, es determinar la magnitud del *potencial de agua del suelo*, que es la cantidad de trabajo necesario para remover

una cantidad equivalente a una unidad de agua retenida más débilmente. Muchas propiedades del suelo, desde el punto de vista de la ingeniería, están más íntimamente relacionadas con el potencial del agua que con la cantidad de ella.

Es útil que el agricultor que aplica técnicas de riego conozca bien el potencial de agua, ya que éste indica directamente cuándo debe regarse. Pero también, el control adecuado de la humedad del suelo en el campo es la clave del éxito en la agricultura bajo riego.

Se sabe que el aumento de humedad de los suelos incrementa el crecimiento y rendimiento de los cultivos.

El factor más importante para que la planta aproveche la humedad del suelo es que la planta misma sea capaz de extraer el agua del suelo con tal velocidad que pueda soportar o igualar las pérdidas por transpiración y por su desarrollo. Así mismo, la aplicación excesiva de agua durante las primeras etapas de crecimiento de las plantas frecuentemente crea condiciones desfavorables, ya que tales prácticas mantienen el suelo excesivamente húmedo y frío.

3.8 IRRIGACIÓN

El término irrigación se refiere a la tecnología que sirve con el propósito de mejorar la distribución de agua sobre un campo, Büro Mayer (2001).

La irrigación técnica consiste en agregar el agua cuando su potencial (el del agua) llega a un valor predeterminado, que se considera apropiado para un cultivo particular, bajo determinadas condiciones de suelo y clima.

La evaporación está también relacionada con la superficie del terreno. Indica el momento en el que el agua del suelo ha llegado a un contenido de humedad crítico, de acuerdo con el potencial de agua en el suelo.

Con estas medidas y prácticas cuidadosas de riego, es posible mantener el contenido de agua del suelo en un nivel favorable para el crecimiento de una planta en particular. Así también es necesario conocer las condiciones del agua del suelo para la producción óptima de las plantas, y cómo se pueden mantener, económicamente esas condiciones.

Algunas características que vale la pena mencionar acerca de la irrigación son las siguientes:

La técnica de irrigación de riego por goteo está adquiriendo mucha importancia en regiones donde el agua es escasa y costosa. Además hay necesidad de métodos rápidos y exactos para medir la humedad del suelo en el instante de la irrigación sin causar mucho daño al sitio.

En la tecnología de la irrigación se han hecho avances cruciales durante los últimos 30 años, afirma Büro Mayer en su texto “Evaluación y selección de criterios para usar los métodos de irrigación”. En respuesta a la demanda de los agricultores de técnicas de irrigación que faciliten la regulación, reduzcan los métodos de laboreo intensivo y finalmente garanticen óptimos resultados a pesar de los recursos limitados del agua, la tercera generación de técnicas de irrigación están en servicio. La transición de irrigación superficial a irrigación mediante tuberías, al uso de máquinas de aspersión e irrigación por goteo han tomado lugar después de la exhaustiva actividad de investigación en el campo de la agricultura, ingeniería y tecnología.

Los diferentes métodos de irrigación agrícola pueden ser clasificados así:

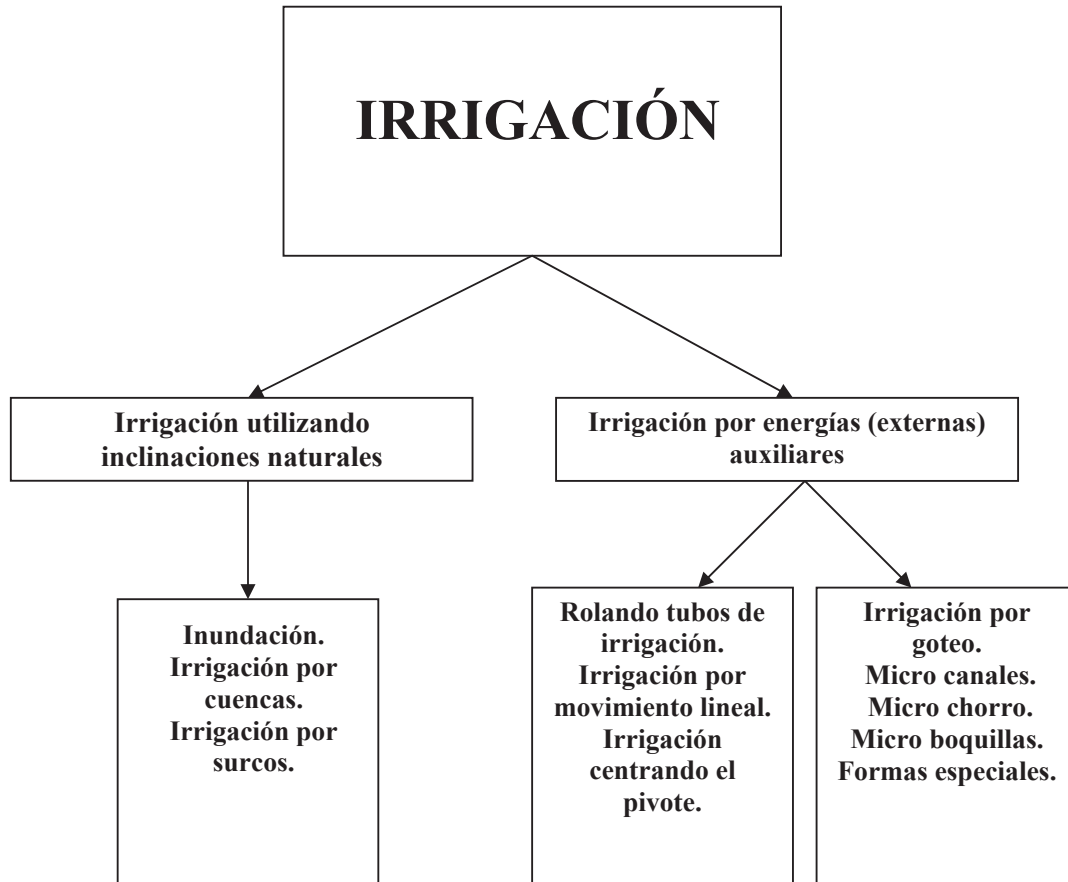


FIGURA #.- Clasificación sistemática de los métodos de irrigación (Büro Mayer, Alemania 2002).

A continuación haremos mención de los métodos de irrigación más usados:

1.- Irrigación superficial: es uno de los métodos más viejos de irrigación, está familiarizado en el área de inundación, irrigación por cuencas, irrigación por surcos en pequeñas cantidades y por represas. Con este tipo de irrigación por gravedad asistida, el gradiente natural de la superficie del suelo es explotado, y el agua se dirige al área deseada mediante barreras de retención. Este tipo de irrigación es usada en cultivos de arroz o vegetales, por ejemplo, y representa una buena práctica establecida desde hace siglos.



FIGURA #.- Diferentes tipos de irrigación aprovechando la inclinación de la superficie del suelo y la gravedad.

2.- Microirrigación: Dispuesto para reducir o evitar totalmente pérdidas por evaporación y filtración en el campo de irrigación, a partir de los años 60's se desarrollaron varias técnicas de microirrigación, los métodos de irrigación facilitan la distribución de la cantidad de agua deseada – está definida por los requerimientos de la planta en su estado actual de crecimiento. Los métodos estudiados aquí son micro canales goteros o boquillas goteros, y más adelante irrigación por micro chorros.



MICROIRRIGACIÓN

FIGURA #.- Método de microirrigación, pequeños tubos agujerados de manera que se formen micro goteros que aportan el agua necesaria para el cultivo.

En esta tesis se modela la técnica de microirrigación por goteo, que según la clasificación, se encuentra en la irrigación por energías externas. Este tipo de irrigación también es llamado en otras bibliografías como riego localizado de alta

frecuencia (RLAF). Esta técnica consiste en la aplicación de agua, precisa y lenta en forma de gotas o pequeños chorros a través de unos mecanismos llamados emisores situados en determinadas posiciones de una línea distribuidora de agua (Francisco Ramírez de Cartagena Bisbe).

Como el estudio de la matemática aplicada puede proporcionar soluciones cuantitativas al problema de riego por goteo, contribuyendo a diseñar sistemas adecuados, optimizados y a bajo costo, nosotros decidimos modelar éste fenómeno.

3.9 MOVIMIENTO DEL AGUA EN EL SUELO

El movimiento de agua en el suelo ocurre debido a la diferencia de potenciales entre diferentes puntos del sistema. El agua tiende a moverse de alto a bajo potencial.

Según la naturaleza de los procesos y leyes de la fuerza, pueden reconocerse tres fases de movimiento de agua: movimiento de agua en el interior del suelo, movimiento y drenaje del agua a través de un suelo saturado y ajuste del agua en suelos no saturados.

Movimiento del agua en el interior de los suelos.

El agua que penetra en el suelo proviene de irrigación, lluvia, inundación o filtración de canales de agua. Si toda la superficie está mojada, el área a través de la que penetra el agua al suelo es mayor que cuando sólo una porción de la superficie está mojada y el movimiento será en una sola dirección: vertical hacia abajo. Si sólo parte de la superficie está mojada, el agua se moverá hacia abajo y lateralmente.

Cuando el agua se infiltra en el suelo, llena el reservorio de humedad hasta rebasarlo en cada intervalo sucesivo de profundidad. Por lo tanto, la cantidad de agua que entra en el suelo, en cierto tiempo, depende de la cantidad de agua que ese suelo puede almacenar y de la velocidad con que el exceso de agua se transmite a través del suelo húmedo al frente de mojadura en contacto con el suelo.

El total de agua que entra en un suelo es mayor cuando el suelo está seco que cuando está mojado, sin embargo, la velocidad es mayor cuando el suelo está húmedo que estando seco. El agua se mueve a más o menos a la misma velocidad en suelos homogéneos que están uniformemente húmedos.

3.10 MOVIMIENTO DE AGUA EN SUELOS NO SATURADOS

El movimiento del agua en suelo saturado es más fácil de comprender y describir matemáticamente que el movimiento en suelos no saturados, por que en general, el término de almacenamiento permanece constante y la velocidad del flujo es directamente proporcional a la fuerza impulsora.

La primera Ley de flujo de infiltración de la humedad (Ley de Darcy) dice que en un suelo saturado el agua se mueve en dirección de la disminución de presión hidráulica, con velocidad directamente proporcional a la diferencia de presión hidráulica entre dos puntos, y la conductividad del suelo al agua, e inversamente a la distancia entre los dos puntos.

El movimiento del agua en suelos no saturados interesa a todos los que se dediquen a estudiar las relaciones suelo-planta-agua. El agua no solamente se infiltra y se almacena para su uso futuro, sino que se mueve de un suelo no saturado a las raíces de la planta, y a los sitios de evaporación o se pierde por percolación profunda.

Cuando el agua se mueve hacia abajo, desde un canal de irrigación o desde la superficie hacia el suelo seco, el agua tiene un potencial más bajo que el del agua libre (en el suelo húmedo), y la presión hidráulica equivalente es menor que la presión atmosférica.

La segunda ley del flujo de humedad se refiere al estado de los suelos no saturados y puede enunciarse de la siguiente manera: “el agua fluirá a través de una interfaz aire-agua solamente cuando la presión hidráulica sea suficientemente mayor que la presión atmosférica para que venza la tensión superficial del fluido”.

En realidad, se ha estudiado mucho acerca del movimiento de agua en el suelo, sin embargo la mayoría de estos estudios se han hecho con otro propósito diferente al de este trabajo. Sin embargo, estos estudios han beneficiado al campo de la edafología y la agricultura. Manejaremos como bibliografía y base de nuestro trabajo estos estudios.

MODELO DE INFILTRACIÓN DE AGUA EN SUELOS NO SATURADOS

INTRODUCCIÓN

Interesados en el estudio del flujo de agua en suelos no saturados, debido a la importancia del conocimiento acerca de su comportamiento en cultivos de riego, se trabajó con un modelo matemático en ecuaciones diferenciales parciales para realizar una simulación en dos dimensiones del flujo.

Para este trabajo utilizamos un modelo numérico el cual se basa en el método de los Elementos Finitos y debido a la no linealidad de la ecuación a resolver (Ecuación de Richards), que más adelante veremos, usamos el algoritmo de Picard para linealizarla, luego presentamos la solución en forma de simulación en un software interactivo.

4.1 ECUACIONES DE COMPORTAMIENTO

La zona no saturada es, por definición, un sistema multifásico. Una descripción macroscópica de este sistema usa propiedades de sólidos y fluidos definidos sobre todo el medio poroso continuo, y se basa en las leyes de conservación aplicadas a cada fase fluida presente. Las leyes de balance están basadas en las relaciones entre la presión capilar y la permeabilidad. La combinación de la ecuación del balance de masas y las ecuaciones constitutivas apropiadas dan como resultado un conjunto de ecuaciones para la zona no saturada.

El modelo propuesto se desarrolla para dos fases (agua-aire) y las ecuaciones serán escritas para ambas, frecuentemente en el estudio del flujo en zonas no

saturadas la fase aire es eliminada, pues suponen que el aire permanece esencialmente a presión atmosférica, sin embargo se considera en este trabajo, que la movilidad de la fase del aire es mayor que la del agua, debido a la diferencia de viscosidad entre ambos fluidos. Suponemos además que la densidad de agua permanece constante y que la porosidad del suelo no cambia, esto nos lleva a la ecuación de Richards.

La ecuación de Richards es usualmente adecuada para representar y modelar el movimiento de agua en suelos no saturados.

Comenzamos con la ecuación del balance de masa o ecuación de continuidad para ambas fases descrita por Bear (1979).

$$\frac{\partial(\phi\rho_{\alpha}S_{\alpha})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{\alpha}\vec{q}_{\alpha}) = F_{\alpha} \quad \text{(Ec. 1)}$$

El primer término de la ecuación describe el cambio instantáneo de masa en un volumen fijo y el segundo la divergencia de flujo de masa en el mismo volumen, y el término del lado derecho representa la fuente o sumidero de manera interna. Esta ecuación puede ser escrita de diferentes formas, dependiendo de las variables y relaciones constitutivas.

En ciencias del suelo es muy común introducir el concepto de contenido de flujo volumétrico de la fase α definido como:

$$\theta_{\alpha} = \phi S_{\alpha} \quad \text{(Ec. 2)}$$

Cuando el contenido de flujo volumétrico, de la fase α , es usado en la ecuación de flujo (Ec. 1), resulta:

$$\frac{\partial(\rho_{\alpha}\theta_{\alpha})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{\alpha}\vec{q}_{\alpha}) = F_{\alpha} \quad (\text{Ec. 3})$$

4.2 LEY DE DARCY.

La ley de Darcy es una relación empírica que describe la relación entre el flujo y presión del fluido en la fase α . La ley de Darcy está dada por:

$$\vec{q}_{\alpha} = -\frac{\mathbf{k}k_{r\alpha}}{\mu_{\alpha}}(\nabla P_{\alpha} - \rho_{\alpha}\vec{g}) \quad (\text{Ec. 4})$$

En la ecuación (4) introducimos la función de permeabilidad relativa. Suponemos que la función de permeabilidad relativa es una función no lineal de la saturación. La función de permeabilidad varía de 0 cuando fluido no está presente, a 1 cuando está presente.

La ley de Darcy es lineal en relación con el gradiente de la presión y con el flujo, y es válida para flujo a bajas velocidades. Cuando la velocidad es muy alta, la ley de Darcy debe ser modificada incluyendo términos adicionales.

En las disciplinas de hidrología y ciencias del suelo es muy común remplazar la definición de presión en (Ec. 4) con la presión equivalente a la altura de una columna de agua. Este es llamado el potencial de presión, y es definido por:

$$h_{\alpha} = \frac{P_{\alpha}}{\rho_{0w}g}$$

Al mismo tiempo, es muy común introducir el tensor no lineal K de conductividad, el cual está relacionado con la permeabilidad por:

$$K_{\alpha} = \frac{\rho_{0w} g k k_{r\alpha}}{\mu_{\alpha}} = K_{\alpha s} k_{r\alpha} \quad (\text{Ec. 5})$$

Usando estas definiciones, la ley de Darcy se puede escribir de manera equivalente como:

$$\bar{q}_{\alpha} = -K_{\alpha} (\nabla h_{\alpha} - \frac{\rho_{\alpha}}{\rho_{0w}} i_z) \quad (\text{Ec. 6})$$

Con i_z vector unitario normal hacia abajo en la dirección de la gravedad. Con el eje z hacia abajo tomado positivo. El flujo volumétrico se puede idealizar como el volumen de agua pasando a través de una unidad de área de un medio poroso en una unidad de tiempo. Con esta variable es natural hacer el balance de flujo de masas.

4.3 RELACIONES CONSTITUTIVAS

Las ecuaciones (Ec. 3) y (Ec. 4) describen las condiciones de flujo del sistema. En estas ecuaciones hay varias variables desconocidas. Hay que relacionar las ecuaciones constitutivas para determinar las dichas variables. Estas relaciones constitutivas pueden ser escritas de diversas formas, según la variable independiente del sistema. La elección más común como variable independiente es la presión.

La saturación del fluido es una función de la diferencia entre las presiones de los dos fluidos en el medio poroso. Esta diferencia de presiones es llamada presión capilar y está definida como:

$$P_c \equiv P_a - P_w$$

Que corresponde con la definición del potencial de presión capilar:

$$h_c \equiv h_a - h_w$$

Ahora, una de las relaciones constitutivas, utilizada en este trabajo, es la relación de presión- saturación.

Muchas formas diferentes han sido propuestas para describir la relación presión- saturación, generalmente empíricas. Una de las funciones más usadas es la propuesta por Van Genuchten (1980):

$$\theta_w = \frac{\theta_{ws} - \theta_{wr}}{[1 + (-ah_c)^n]^m} + \theta_{wr} \quad \text{(Ec. 7)}$$

Donde θ_{ws} , θ_{wr} , n , m , a son parámetros de ajuste.

Estas funciones favorecen muchos modelos numéricos debido a su suavidad, otras funciones como las de Brooks y Corey (1964) tienen discontinuidades en sus derivadas, las cuales causan dificultades numéricas. Ambas relaciones ignoran los efectos de la histéresis (Philip John Binning, 1994). En este trabajo también se ignoran los efectos de la histéresis.

El flujo de aire contenido puede ser encontrado con el contenido de agua notando que la suma de los contenidos de los fluidos debe ser el volumen del espacio vacío (porosidad).

$$\theta_w + \theta_a = \phi$$

O de manera equivalente:

$$S_w + S_a = 1$$

La permeabilidad relativa es una función de la saturación del fluido. La función es empírica, Van Genuchten aplicó la teoría de Mualem (1976) a su relación presión-saturación para deducir la ecuación:

$$k_{rw}(\theta_w) = \theta_e^{1/2} (1 - (1 - \theta_e^{1/m})^m)^2 \quad \text{(Ec. 8)}$$

Con: $m=1-1/n$;

Y la saturación efectiva en términos de:

$$\theta_e = \frac{\theta_w - \theta_{wr}}{\theta_{ws} - \theta_{wr}}.$$

Van Genuchten no derivó la función de permeabilidad relativa de la fase aire en su trabajo. Sin embargo esto fue hecho por Parker (1987, 1989) quien aplicó nuevamente la teoría de Mualem (1976) a la relación de la presión capilar de Van Genuchten para encontrar:

$$k_{ra}(\theta_w) = (1 - \theta_e)^{1/2} (1 - \theta_e^{1/m})^{2m} \quad \text{(Ec. 9)}$$

4.4 TEORIA DE MUALEM

Mualem (1976), derivó un modelo para la predicción para la conductividad hidráulica conocidas las curvas de retención aceite-agua, y la conductividad de saturación. Llega a una simple formula integral para la conductividad hidráulica no saturada, la cual a su vez deriva una expresión analítica cerrada, esta provee una ecuación que proviene de las curvas de retención suelo-agua. Los resultados en el modelo de conductividad generalmente contienen 3 parámetros

independientes, los cuales pueden ser obtenidos ajustando las curvas de retención propuestas a los datos experimentales.

Del artículo “Una forma cerrada de la ecuación para predecir la conductividad hidráulica en suelos no saturados” por M. Th. Van Genuchten (1980) recuperamos la siguiente información.

La siguiente ecuación fue obtenida por Mualem (1976) para predecir la conductividad hidráulica relativa de la curva de retención suelo-agua.

$$K_r = \Theta^{1/2} \left[\int_0^\Theta \frac{1}{h(x)} dx / \int_0^1 \frac{1}{h(x)} dx \right]^2 \quad (\text{Ec. 10})$$

Donde h como se sabe, es el potencial de presión en términos del contenido de agua.

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (\text{Ec. 11})$$

Luego, para resolver (Ec. 10), es necesario una expresión para relacionar el contenido de agua y el potencial de presión. Una función atractiva es la dada por la siguiente relación:

$$\Theta(h) = \left[\frac{1}{1 + (ah)^n} \right]^m \quad (\text{Ec. 12})$$

Para simplificar la notación que viene, h en la (Ec. 12) se supone positiva.

La (Ec. 12), con $m=1$, ha sido usada satisfactoriamente en algunos estudios para describir los datos de retención suelo-agua.

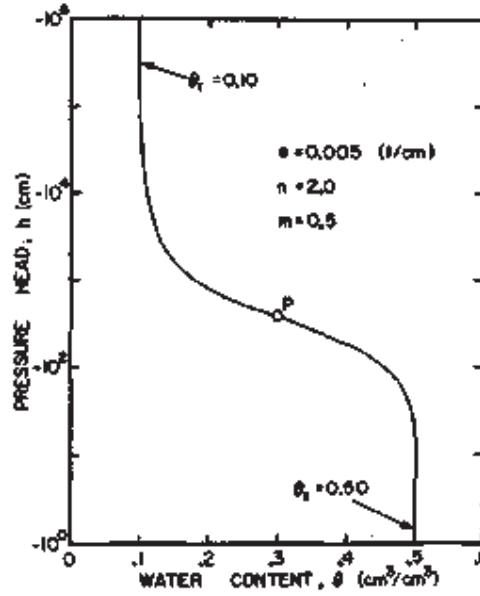


FIGURA #.- Típica curva $\Theta(h)$ basada en (Ec. 11) y (Ec. 12). El punto P de la curva está localizado en medio de $\theta_r (=0.10)$ y $\theta_s (0.50)$.

Note que la forma de la curva es cercanamente simétrica a una forma de “S”, y que el término $\frac{d\theta}{dh}$ tiende a cero cuando θ tiende a los valores de saturación y el valor residual.

La expresión de la forma cerrada para $K_r(\Theta)$ puede ser derivada cuando se imponen ciertas restricciones para los valores de m y n en (Ec. 12). Resolviendo esta ecuación para $h = h(\theta)$:

$$h = a \left[\frac{(1 - \Theta^{1/m})}{\Theta^{1/m}} \right]^{1/n}$$

Y sustituyendo el resultado dentro de (Ec. 10) obtenemos:

$$K_r = \Theta^{1/2} \left[\int_0^\Theta a \left[\frac{x^{1/m}}{(1-x^{1/m})} \right]^{1/n} dx / \int_0^1 a \left[\frac{x^{1/m}}{(1-x^{1/m})} \right]^{1/n} dx \right]^2$$

Es decir:
$$K_r(\Theta) = \Theta^{1/2} \left(\frac{f(\Theta)}{f(1)} \right)^2 \quad \text{(Ec. 13)}$$

Donde:
$$f(\Theta) = \int_0^\Theta \left[\frac{x^{1/m}}{1-x^{1/m}} \right]^{1/n} dx \quad \text{(Ec. 14)}$$

Ahora sustituyendo $x=y^m$ dentro de (Ec. 14) nos lleva a:

$$f(\Theta) = m \int_0^{\Theta^{1/m}} \left\{ \frac{y}{1-y} \right\}^{1/n} y^{m-1} dy = m \int_0^{\Theta^{1/m}} \{ [1-y]^{-1/n} y^{1/n} y^{m-1} \} dy$$

Por lo tanto:

$$f(\Theta) = m \int_0^{\Theta^{1/m}} [y^{m-1+1/n} (1-y)^{-1/n}] dy \quad \text{(Ec. 15)}$$

La ecuación anterior representa una forma particular de las funciones beta incompletas y en el caso más general puede ser derivada una expresión de la forma no cerrada. Sin embargo se muestra fácilmente que para todos los valores enteros de $k=m-1+1/n$ la integración puede ser llevada a cabo sin dificultades. Para el caso particular cuando $k=0$ la integración de (Ec. 15) produce

$$f(\Theta) = m \left[\left(-\frac{1}{m} (1-y)^m \right) \right]_0^{\Theta^{1/m}} = 1 - [1 - \Theta^{1/m}]^m; \quad m = 1 - 1/n \quad \text{(Ec. 16)}$$

Obsérvese que $f(1) = 1$, con esto (Ec. 13), se convierte en:

$$K_r(\Theta) = \Theta^{1/2} [1 - (1 - \Theta^{1/m})^m]^2 \quad \text{(Ec. 17)}$$

A esta relación se le conoce como la ecuación de Van Genuchten. Para $m=1-1/n$ ($0 < m < 1$). K_r puede ser expresada en términos del potencial de presión sustituyendo (Ec. 12) en (Ec. 17):

$$K_r(\Theta) = \frac{\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{1+(ah)^n}\right)^m\right\}^2}{[1+(ah)^n]^{m/2}} = \frac{\left\{1 - \left(\frac{(ah)^n}{1+(ah)^n}\right)^m\right\}^2}{[1+(ah)^n]^{m/2}} = \frac{\left\{1 - ((ah)^n)^m [1+(ah)^n]^{-m}\right\}^2}{[1+(ah)^n]^{m/2}}$$

Luego recordemos que $m=1-1/n$; entonces:

$$K_r(\Theta) = \frac{\left\{1 - (ah)^{n-1} [1+(ah)^n]^{-m}\right\}^2}{[1+(ah)^n]^{m/2}} \quad \text{(Ec. 18)}$$

4.5 FORMULACIÓN DE LA ECUACIÓN PARA LAS DOS PRESIONES.

Hemos dado, entonces, una ecuación base a la variable de presión, y otra para el balance de masas, (Ec. 3) y (Ec. 6) respectivamente, el objetivo es encontrar una relación entre ellas y buscar una formulación general.

Sustituyendo la ley de Darcy en (Ec. 3) derivamos la versión final de la ecuación para el flujo de agua (Ecuación de Richards):

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} - \nabla \cdot (K_w (\nabla h_w - i_z)) = F_w \quad \text{(Ec. 19)}$$

Esta ecuación esta en forma mixta. La diferencial temporal se aplica al término del contenido de humedad y la diferencial espacial al potencial de presión.

La ecuación para el aire está escrita en base a expandir la derivada temporal de la ecuación del balance de masas. La derivada temporal de la densidad del aire se

escribe sustituyendo en la ecuación, relacionando la presión del aire con la densidad. La derivada temporal del contenido de aire se cambia a la derivada con respecto al contenido de agua.

La ecuación con estas modificaciones se escribe:

$$(\phi - \theta_w) \frac{\rho_{0a}}{h_{0a}} \frac{\partial h_a}{\partial t} - \rho_a \frac{\partial \theta_w}{\partial t} - \nabla \cdot \left[(\rho_a K_a) \left(\nabla h_a - \frac{\rho_a}{\rho_{0w}} \right) \right] = F_a \quad \text{(Ec. 20)}$$

Estas dos ecuaciones (Ec.19) y (Ec. 20) serán referidas como la “formulación de las dos presiones para el flujo de agua y aire”. Estas ecuaciones son aplicadas tanto en zonas saturadas como en zonas no saturadas. La Ecuación de Richards será resuelta para la variable h_w y h_a .

Dos tipos de condiciones de frontera se pueden especificar para la ecuación, de Dirichlet o de Neuman.

El término de fuente o sumidero que aparece al lado derecho de (Ec. 19) y (Ec. 20) los supondremos puntuales. Tal suposición es conveniente en el desarrollo de la aproximación numérica de la ecuación, pues permite localizar una fuente o sumidero en algún punto o puntos de la malla. El lado derecho de (Ec. 19) y (Ec. 20) puede escribirse entonces como:

$$F^{n+1} = \sum_{j=1}^{\text{no.de pozos}} Q^{n+1} \delta(x - x_j) \delta(z - z_j)$$

Donde el subíndice j indican las coordenadas del nodo donde se localiza el pozo, (x_j, z_j) y $\delta(z - z_j)$ es la función delta de Dirac localizada en el nodo j .

Las ecuaciones (Ec. 19) y (Ec. 20) se pueden representar en coordenadas cartesianas. Primero escribimos el tensor de conductividad para dos dimensiones:

$$K = \begin{pmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{zz} \end{pmatrix}$$

Finalmente la ecuación (Ec. 19) en coordenadas cartesianas queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[K_{w_{xx}} \frac{\partial h_w}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[K_{w_{zz}} \left(\frac{\partial h_w}{\partial z} - i_z \right) \right] = F_w \quad \text{(Ec. 21)}$$

Y la ecuación para el aire:

$$\begin{aligned} & (\phi - \theta_w) \frac{\rho_{0a}}{h_{0a}} \frac{\partial h_a}{\partial t} - \rho_a \frac{\partial \theta_w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[(\rho_a K_{a_{xx}}) \frac{\partial h_a}{\partial x} \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left[(\rho_a K_{a_{zz}}) \left(\frac{\partial h_a}{\partial z} - \frac{\rho_a}{h_{0w}} \right) \right] = F_a \end{aligned} \quad \text{(Ec. 22)}$$

EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA RESOLVER LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL NO LINEAL DE RICHARDS

INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se han descrito los elementos finitos y su desarrollo analítico, como una técnica muy potente de aproximación numérica de ecuaciones diferenciales parciales. En este trabajo aplicamos este método numérico para resolver la (Ec. 11), basado en la técnica usada por Celia y Binning (1992). El modelo numérico, como ya se mencionó, es usado para estudiar el flujo en zonas no saturadas.

Existe una dificultad al tratar de resolver la ecuación de Richards debido a que es altamente no lineal. Esto se puede observar en el término del flujo de fluido, o la ley de Darcy, en la conductividad hidráulica, la cual es función del contenido de agua la que a su vez, es función del potencial de presión. Cualquier intento de resolver esta ecuación debe tener en cuenta esta característica fundamental de la ecuación. Si embargo, si se quiere resolver analíticamente se necesita hacer una serie de suposiciones que alejan al modelo de toda realidad física.

El método de diferencias finitas es una técnica muy común utilizada en la resolución de este tipo de ecuaciones. Años atrás, por ejemplo, se usaba para la resolución de problemas en ingeniería petrolera, incluso todavía se usa.

El método de *Elemento Finito* es más flexible en cuanto a las condiciones de frontera y a la forma de los dominios, y además, es más general que el método de diferencias finitas ya que escogiendo adecuadamente las funciones de prueba y la discretización obtenemos el método de diferencias finitas.

En general el método de *Elemento Finito* es escogido por su gran flexibilidad y mayor aproximación a la solución.

La principal dificultad para resolver la ecuación radica entonces en el proceso de linealización, el cual se puede obtener mediante el método llamado iteración de Picard, pues probablemente no sea el método más eficiente para la linealización para la mayoría de los problemas, sin embargo, provee soluciones en situaciones donde otros métodos fallan en su convergencia.

Es bien sabido de la dificultad para resolver la ecuación de Richards siendo esta la infiltración en suelo inicialmente seco, involucrando muchos pasos en el gradiente de presión. Celia (1990), identificó dos cuestiones siendo importantes para la solución numérica de la ecuación. La primera es la forma de la ecuación la cual es importante en el balance de masas de la aproximación numérica, y la segunda, es el tratamiento numérico de la derivada temporal.

El balance de masas de la aproximación numérica depende totalmente de la forma de la ecuación. La forma de la ecuación depende de la elección de la variable dependiente, siendo el potencial de presión o el contenido de humedad. Si se escoge el contenido de humedad se tendrán excelentes propiedades de balance de masas. No es muy aplicable para zonas saturadas. Por otro lado si

escogemos el potencial de presión, trabaja en zonas saturadas pero no conserva la masa. Celia (1990).

En la forma mixta, se tiene la ventaja de las dos formas anteriores. En esta forma, parte temporal se escribe en términos del contenido de humedad y la parte espacial en términos del potencial de presión. El esquema numérico basado en esta forma conserva la masa y también se aplica para zonas saturadas. Para los propósitos de este trabajo se hará para zonas no saturadas (parte temporal en términos de el contenido de humedad y parte espacial en términos del potencial de presión).

Celia (1990), afirma que el tratamiento numérico, para la aproximación de la ecuación de Richards, es la parte temporal, una de las partes más importantes para su resolución, de hecho dice también que un esquema nodal, que se tratará en temas posteriores, frecuentemente da buenas soluciones en esas instancias. Una combinación de este esquema con la forma mixta de la ecuación es el método más efectivo para solucionar la ecuación de Richards.

5.1 FORMA DÉBIL

Para la solución numérica en dos dimensiones del flujo de agua procederemos de la siguiente forma. La forma de la ecuación gobernante dada en el capítulo 5, (Ec. 11):

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[K_{wx} \frac{\partial h_w}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[K_{wz} \left(\frac{\partial h_w}{\partial z} + 1 \right) \right] = F_w \quad (\text{Ec. 23})$$

$$\begin{aligned}
 & (\phi - \theta_w) \frac{\rho_{0a}}{h_{0a}} \frac{\partial h_a}{\partial t} - \rho_a \frac{\partial \theta_w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[(\rho_a K_{a_{xx}}) \frac{\partial h_a}{\partial x} \right] - \\
 & - \frac{\partial}{\partial z} \left[(\rho_a K_{a_{zz}}) \left(\frac{\partial h_a}{\partial z} - \frac{\rho_a}{\rho_{0w}} \right) \right] = F_a
 \end{aligned} \tag{Ec. 24}$$

6.1-1 Discretización temporal: Método de Picard modificado.

El esquema numérico utilizado se basa en el trabajo de Celia (1990). La ecuación es discretizada en el tiempo utilizando el método de Euler implícito, el cual es más estable. Entonces para la parte temporal tenemos:

$$\frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} = \dot{\theta}^{n+1}$$

Luego, lo antes mencionado para linealizar la ecuación, utilizamos el método de Picard. Entonces la ecuación diferencial tiene la siguiente forma:

$$\frac{\theta_w^{n+1,m+1} - \theta_w^n}{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[K_w^{n+1,m} \left(\frac{\partial h_w^{n+1,m+1}}{\partial z} + 1 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[K_w^{n+1,m} \left(\frac{\partial h_w^{n+1,m+1}}{\partial x} \right) \right] = F_w^{n+1} \tag{Ec. 25}$$

$$\begin{aligned}
 & (\phi - \theta_w^{n+1,m}) \frac{\rho_{0a}}{h_{0a}} \frac{h_a^{n+1,m+1} - h_a^n}{\Delta t} - \rho_a^{n+1,m} \frac{\theta_w^{n+1,m+1} - \theta_w^n}{\Delta t} - \\
 & - \frac{\partial}{\partial x} \left[(\rho_a K_{a_{xx}})^{n+1,m} \frac{\partial h_a^{n+1,m}}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[(\rho_a K_{a_{zz}})^{n+1,m} \left(\frac{\partial h_a^{n+1,m}}{\partial z} - \frac{\rho_a^{n+1,m}}{\rho_{0w}} \right) \right] = \\
 & = F_a^{n+1,m}
 \end{aligned} \tag{Ec. 26}$$

En las ecuaciones anteriores el superíndice n denota el nivel en el tiempo, m el nivel en las iteraciones, y $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ es el tamaño de paso en el tiempo. Para cada paso del tiempo la solución es iterada hasta que el potencial de presión converja.

Durante cada iteración las ecuaciones son resueltas para encontrar el potencial de presión para el nuevo nivel de iteración. Los coeficientes no lineales son evaluados usando el potencial de presión del nivel de la iteración anterior así linealizamos la ecuación. Puesto que las ecuaciones serán resueltas para el nuevo nivel de iteración, el contenido de humedad debe ser escrito en términos del potencial de presión al nuevo nivel de iteración. Esto se consigue usando la expansión en serie de Taylor, así tenemos:

$$\theta_w^{n+1,m+1} \approx \theta_w^{n+1,m} + \left(\frac{\partial \theta_w}{\partial h_c} \right)^{n+1,m} (h_c^{n+1,m+1} - h_c^{n+1,m}) \quad \text{(Ec. 27)}$$

En la ecuación anterior denotaremos a $\left(\frac{\partial \theta_w}{\partial h_c} \right)^{n+1,m}$, que es la derivada del contenido de humedad con respecto a la presión, como una función C_w , la cual es conocida como la función de capacidad específica de la humedad.

Esto es usado para reescribir las ecuaciones (Ec. 25) y (Ec. 26) en términos del incremento de la presión a cada nivel de iteración.

$$\delta h_\alpha^{n+1,m} = h_\alpha^{n+1,m+1} - h_\alpha^{n+1,m} \quad \text{(Ec. 28)}$$

Usando la expansión en serie de Taylor (Ec. 27) y la definición (Ec. 28) las ecuaciones están escritas:

$$\begin{aligned}
 C_w^{n+1,m} \frac{\delta h_a^{n+1,m} - \delta h_w^{n+1,m}}{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{w_{xx}}^{n+1,m} \frac{\partial \delta h_w^{n+1,m}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{w_{zz}}^{n+1,m} \frac{\partial \delta h_w^{n+1,m}}{\partial z} \right) &= \\
 = -\frac{\theta_w^{n+1,m} - \theta_w^n}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{w_{xx}}^{n+1,m} \frac{\partial h_w^{n+1,m}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{w_{zz}}^{n+1,m} \frac{\partial h_w^{n+1,m}}{\partial z} + 1 \right) + F^{n+1} &\equiv R_w^{n+1,m}
 \end{aligned} \tag{Ec. 29}$$

$$\begin{aligned}
 (\phi - \theta_w^{n+1,m}) \frac{\rho_{0a}}{h_{0a}} \frac{\delta h_a^{n+1,m+1}}{\Delta t} - \rho_a^{n+1,m} C_w^{n+1,m} \frac{\delta h_a^{n+1,m+1} - \delta h_w^{n+1,m+1}}{\Delta t} - \\
 - \frac{\partial}{\partial x} \left[(\rho_a K_{a_{xx}})^{n+1,m} \frac{\partial \delta h_a^{n+1,m}}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[(\rho_a K_{a_{zz}})^{n+1,m} \left(\frac{\partial \delta h_a^{n+1,m}}{\partial z} \right) \right] &= \\
 = \rho_a^{n+1,m} \frac{\theta_w^{n+1,m} - \theta_w^n}{\Delta t} - (\phi - \theta_w^{n+1,m}) \frac{\rho_{0a}}{h_{0a}} \frac{h_a^{n+1,m} - h_a^n}{\Delta t} + \\
 + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\rho_a K_{a_{xx}})^{n+1,m} \frac{\partial h_a^{n+1,m}}{\partial x} \right] + \\
 + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\rho_a K_{a_{zz}})^{n+1,m} \left(\frac{\partial h_a^{n+1,m}}{\partial z} \right) - \frac{(\rho_a^{n+1,m})^2}{\rho_0 w} K_{a_{zz}}^{n+1,m} \right] + F_a^{n+1,m} &\equiv \\
 \equiv R_a^{n+1,m}
 \end{aligned} \tag{Ec. 30}$$

A cada iteración las ecuaciones son resueltas para el incremento de la presión durante la iteración $\delta h_\alpha^{n+1,m}$. La ecuación se vuelve lineal en $\delta h_\alpha^{n+1,m}$ el cual aparece solamente en el lado izquierdo de la ecuación (Ec. 30).

La convergencia de las iteraciones se comprueba mediante dos medidas. La primera de convergencia es que el incremento en la presión $\delta h_\alpha^{n+1,m}$ para cada paso en la iteración. La segunda prueba es que el lado derecho de la ecuación tiende a cero. Como este esquema de iteración hace que el lado derecho de la ecuación converja entonces tenemos una medida buena y directa de la solución para la presión $h_\alpha^{n+1,m}$ la cual satisface la versión discreta de la ecuación.

Modelo Y Simulación Numérica De La Infiltración De Agua En Suelos Agrícolas No Saturados Usando MEF.

Enseguida se examina la discretización espacial, para ello usamos el método de los elementos finitos usando funciones bases lineales, y también usando un esquema nodal en el tiempo.

5.2 DISCRETIZACIÓN DEL ESPACIO: ELEMENTOS FINITOS

Escribimos la ecuación (Ec. 29) para encontrar la forma débil de la misma:

Entonces integramos sobre una función de peso w :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} C_w^{n+1,m} \frac{\delta h_a^{n+1,m} - \delta h_w^{n+1,m}}{\Delta t} w d\Omega - \\
 & - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{w_{xx}}^{n+1,m} \frac{\partial \delta h_w^{n+1,m}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{w_{zz}}^{n+1,m} \frac{\partial \delta h_w^{n+1,m}}{\partial z} \right) \right] w d\Omega = \\
 & = - \int_{\Omega} \frac{\theta_w^{n+1,m} - \theta_w^n}{\Delta t} w d\Omega + \\
 & + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{w_{xx}}^{n+1,m} \frac{\partial h_w^{n+1,m}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{w_{zz}}^{n+1,m} \frac{\partial h_w^{n+1,m}}{\partial z} + 1 \right) + F_w^{n+1} \right] w d\Omega
 \end{aligned} \tag{Ec. 31}$$

Donde Ω es el dominio donde se tratará la solución del problema.

La divergencia del flujo, en la ecuación anterior, puede ser integrada por partes, esto incorpora las condiciones de frontera dentro de la formulación. Luego, aplicando el teorema de Green, resulta la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left(C_w^{n+1,m} \frac{\delta h_a^{n+1,m} - \delta h_w^{n+1,m}}{\Delta t} \right) w d\Omega + \\
 & + \int_{\Omega} \left(\left[K_{w_{xx}}^{n+1,m} \frac{\partial \delta h_w^{n+1,m}}{\partial x} \right] \frac{\partial w}{\partial x} + \left[K_{w_{zz}}^{n+1,m} \frac{\partial \delta h_w^{n+1,m}}{\partial z} \right] \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\Omega = \\
 & = - \int_{\Omega} \left(\frac{\theta_w^{n+1,m} - \theta_w^n}{\Delta t} \right) w d\Omega - \\
 & - \int_{\Omega} \left(\left[K_{w_{xx}}^{n+1,m} \frac{\partial h_w^{n+1,m}}{\partial x} \right] \frac{\partial w}{\partial x} + \left[K_{w_{zz}}^{n+1,m} \left(\frac{\partial h_w^{n+1,m}}{\partial z} + 1 \right) \right] \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\Omega + \\
 & + \int_{\partial\Omega} (q_w^{n+1} \cdot \bar{n}) w dS + \int_{\Omega} F_w^{n+1} w d\Omega
 \end{aligned} \tag{Ec. 32}$$

5.3 ELEMENTOS INTEGRALES

Ahora como se mencionó en capítulos anteriores, las variables de la ecuación pueden ser aproximadas mediante funciones forma o interpoladoras $\phi_j(x, z)$, para este caso, entonces las aproximaciones quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 h_w(z, t) &\approx \sum_{j=1}^N H_{w_j}(t) \phi_j(x, z) \\
 K_{w_{xx}}(h_c) &\approx \sum_{k=1}^N K_{w_{xx} c_k}(t) \phi_k(x, z) = \sum_{k=1}^N K_{xxk} \phi_k(x, z) \\
 K_{w_{zz}}(h_c) &\approx \sum_{k=1}^N K_{w_{zzk}} \phi_k(x, z) \\
 C_w(h_c) &\approx \sum_{k=1}^N C_{w_k}(t) \phi_k(x, z) \\
 \theta_w &\approx \sum_{j=1}^N \Theta_{w_j} \phi_j(x, z)
 \end{aligned}$$

Con las aproximaciones anteriores la ecuación en cada elemento son escritas:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N C_{w_k}^{n+1, m} \frac{\delta H_{a_j}^{n+1, m} - \delta H_{w_j}^{n+1, m}}{\Delta t} A_{ijk}^e + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N K_{w_{xxk}}^{n+1, m} \delta H_{w_j}^{n+1, m} B1_{ijk}^e + \\
 &+ \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N K_{w_{zzk}}^{n+1, m} \delta H_{w_j}^{n+1, m} B2_{ijk}^e = \\
 &= - \sum_{j=1}^N \frac{\Theta_{w_j}^{n+1, m} - \Theta_{w_j}^n}{\Delta t} D_{ij}^e - \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N K_{w_{xxk}}^{n+1, m} H_{w_j}^{n+1, m} B1_{ijk}^e + K_{w_{zzk}}^{n+1, m} H_{w_j}^{n+1, m} B2_{ijk}^e + \\
 &+ \sum_{k=1}^N K_{w_{zzk}}^{n+1, m} E_{ik}^e + \int_{\partial\Omega_e} (q_w^{n+1} \cdot \vec{n}) \phi_i dS + \int_{\Omega_e} F_w^{n+1, m} \phi_i d\Omega
 \end{aligned} \tag{Ec. 33}$$

Esto para toda $i=1, N$.

Donde:

$$A_{ijk}^e = \int_{\Omega_e} \phi_k \phi_j \phi_i d\Omega$$

$$B1_{ijk}^e = \int_{\Omega_e} \phi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega$$

$$B2_{ijk}^e = \int_{\Omega_e} \phi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} d\Omega$$

$$D_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \phi_j \phi_i d\Omega$$

$$E_{ik}^e = \int_{\Omega_e} \phi_k \frac{\partial \phi_i}{\partial z} d\Omega$$

Al final, estos elementos son ensamblados para formar la aproximación por elementos finitos para la ecuación de Richards (2-dimensiones) en el dominio dado. Ahora, la aproximación a la derivada temporal es una aproximación de nueve puntos. Luego para completar la discretización para la ecuación, los términos de las fuentes o sumideros y las condiciones de frontera deben ser especificados.

5.4 LOS TÉRMINOS DE FUENTES O SUMIDEROS Y LAS CONDICIONES DE FRONTERA.

Las fuentes o sumideros los tenemos descritos en las ecuaciones del elemento por el término $\int_{\Omega_e} F_w^{n+1} d\Omega$. Estos se incorporan después del ensamble y la aproximación global. Las fuentes o sumideros están descritas por:

$$F_w^{n+1} = \sum_{j=0}^{No.F/S} Q_{w_j}^{n+1} \delta(x - x_j) \delta(z - z_j)$$

El subíndice j indica las fuentes o sumideros localizados en los nodos (x_j, z_j) y $\delta(z - z_j)$ que es la función delta de Dirac localizada en el nodo j . con esta definición, las fuentes o sumideros aparecen en la aproximación global a través de:

$$\int_{\Omega} F_w^{n+1} \phi_i d\Omega = \begin{cases} Q_{w_i}, & i=\text{Fuente/Sumidero} \\ 0, & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Cuando la aproximación del elemento finito global se encuentra sumando los elementos de las ecuaciones, los términos de la frontera que aparecen en las integrales $\int_{\partial\Omega_e} (\vec{q}_w \cdot \vec{n}) \phi_i dS$ deben ser evaluadas. Dos tipos condiciones de frontera son considerados. Para una de Dirichlet, o condición de frontera de potencial fijo, la ecuación del elemento finito a la frontera en el nodo i es reemplazada declarando que:

$$\delta H_{\alpha_i}^{n+1,m} = 0, \text{ Dado } H_{\alpha_i}^{n+1}$$

Otra forma de condiciones de frontera son un segundo tipo o especificando la condición de flujo de fluido (Condición de Newman). Una condición de flujo en la frontera es incorporado dentro del ensamblado o aproximación global a la frontera en el nodo i a través de:

$$\int_{\partial\Omega_e} (\vec{q}_w \cdot \vec{n}) \phi_i dS = \frac{q_{n1} l_2}{2} + \frac{q_{n2} l_1}{2}$$

Donde q_n son los flujos a través de la frontera de los elementos de longitud l , adyacentes al nodo i .

5.5 ECUACIÓN PARA EL AIRE

La aproximación por elementos finitos de la ecuación del aire, se hace de manera muy similar que con la ecuación del agua.

De acuerdo con la ecuación (Ec. 30) tenemos la ecuación del aire. Integramos (Ec. 30) sobre una función de peso w .

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left((\phi - \theta_w^{n+1,m}) \frac{\rho_{0a}}{h_{0a}} \frac{\delta h_a^{n+1,m+1}}{\Delta t} - \rho_a^{n+1,m} C_w^{n+1,m} \frac{\delta h_a^{n+1,m+1} - \delta h_w^{n+1,m+1}}{\Delta t} \right) w d\Omega - \\
 & - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[(\rho_a K_{a_{xx}})^{n+1,m} \frac{\partial \delta h_a^{n+1,m}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\rho_a K_{a_{zz}})^{n+1,m} \left(\frac{\partial \delta h_a^{n+1,m}}{\partial z} \right) \right] \right) w d\Omega = \\
 & = \int_{\Omega} \left(\rho_a^{n+1,m} \frac{\theta_w^{n+1,m} - \theta_w^n}{\Delta t} - (\phi - \theta_w^{n+1,m}) \frac{\rho_{0a}}{h_{0a}} \frac{h_a^{n+1,m} - h_a^n}{\Delta t} \right) w d\Omega + \\
 & + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[(\rho_a K_{a_{xx}})^{n+1,m} \frac{\partial h_a^{n+1,m}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\rho_a K_{a_{zz}})^{n+1,m} \left(\frac{\partial h_a^{n+1,m}}{\partial z} \right) - \frac{(\rho_a^{n+1,m})^2}{\rho_{0w}} K_{a_{zz}}^{n+1,m} \right] \right) w d\Omega + \\
 & + \int_{\Omega} F_a^{n+1,m} d\Omega
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 34}$$

Donde Ω es el dominio donde se tratará la solución del problema.

La divergencia del flujo, en la ecuación anterior, puede ser integrada por partes, esto incorpora las condiciones de frontera dentro de la formulación. Al aplicar el teorema de Green, resulta la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left((\phi - \theta_w^{n+1,m}) \frac{\rho_{0a}}{h_{0a}} \frac{\delta h_a^{n+1,m}}{\Delta t} - \rho_a^{n+1,m} C_w^{n+1,m} \frac{\delta h_a^{n+1,m} - \delta h_w^{n+1,m}}{\Delta t} \right) w d\Omega + \\
 & + \int_{\Omega} \left(\left[(\rho_a K_{a_{xx}})^{n+1,m} \frac{\partial \delta h_a^{n+1,m}}{\partial x} \right] \frac{\partial w}{\partial x} + \left[(\rho_a K_{a_{zz}})^{n+1,m} \frac{\partial \delta h_a^{n+1,m}}{\partial z} \right] \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\Omega = \\
 & = \int_{\Omega} \left(\rho_a^{n+1,m} \frac{\theta_w^{n+1,m} - \theta_w^n}{\Delta t} - (\phi - \theta_w^{n+1,m}) \frac{\rho_{0a}}{h_{0a}} \frac{h_a^{n+1,m} - h_a^n}{\Delta t} \right) w d\Omega + \\
 & - \int_{\Omega} \left(\left[(\rho_a K_{a_{xx}})^{n+1,m} \frac{\partial h_a^{n+1,m}}{\partial x} \right] \frac{\partial w}{\partial x} + \left[(\rho_a K_{a_{zz}})^{n+1,m} \frac{\partial h_a^{n+1,m}}{\partial z} - \frac{(\rho_a^{n+1,m})^2}{\rho_{0w}} K_{a_{zz}}^{n+1,m} \right] \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\Omega - \\
 & + \int_{\partial\Omega} (\vec{q}_a^{n+1} \cdot \vec{n}) w dS + \int_{\Omega} F_a^{n+1} w d\Omega
 \end{aligned}
 \tag{Ec.35}$$

Llegando a la forma débil de la ecuación para el aire.

La no linealidad de los coeficientes en la ecuación del aire son aproximados a través de:

$$\rho_a(h_a)K_{a_{zz}}(h_c) \approx \sum_{j=1}^N (\rho_{a_j} K_{w_{zj}}) \phi_j(x, z)$$
$$\rho_a^2(h_a)K_{a_{zz}}(h_c) \approx \sum_{j=1}^N (\rho_{a_j}^2 K_{w_{zj}}) \phi_j(x, z)$$

Y de igual manera se procede a sustituir las aproximaciones en la forma débil de la ecuación del aire.

La aproximación global del aire para dos dimensiones no se discierne explícitamente pues el interés de la tesis se enfoca en la ecuación del flujo de agua. Veremos los efectos del aire en la simulación de una manera muy general.

SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO

INTRODUCCIÓN

Dispuesto todo el marco teórico se procede a buscar la solución de la ecuación de Richards con los parámetros y propiedades que distingue a los suelos agrícolas. El programa de simulación fue hecho en FEMLAB para dos dimensiones y con dos fases (agua y aire), se verifican los distintos efectos que pueden tener los parámetros que actúan alrededor del fenómeno.

Se analizarán las repercusiones que tiene la fase aire en el problema, tomando en cuenta que la aeración o barbecho, como comúnmente se dice en agricultura, es importante, pues alimenta al suelo y las raíces del cultivo de gases como dióxido de carbono, oxígeno y nitrógeno. Se analizarán también dos sistemas de riego por goteo y por gravedad, los cuales, en la simulación, numérica nos ayudarán a entender mejor la forma y desarrollo de la planta.

El cultivo en que se enfoca este trabajo es el de las fresas en suelos no saturados de arcilla, que se encuentra en la posta veterinaria de Morelia Michoacán. Este tipo de cultivo, tiene un efectivo sistema radicular que crece de 15 a 30 cm. de la superficie del suelo, si no hay suficiente agua, la sequedad es motivo de lesiones graves en este tipo de cultivo. Un uniforme y adecuado suplemento de humedad es esencial para un óptimo desarrollo.

6.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Riego por Goteo: Es la aplicación de agua precisa y lenta en forma de gotas o pequeños chorros a través de unos mecanismos llamados emisores, situados en determinadas posiciones de una línea distribuidora de agua.

Riego por Gravedad: Sistema de riego que se caracteriza por la entrada de agua mediante una especie de zanja, por la cual el agua es succionada gracias a los efectos de la gravedad.

Frente de Humedad: Capas de agua que se acumulan en el suelo debido al paso del agua por esa zona.

Evapotranspiración: Es la pérdida de agua del suelo debido a dos propiedades físicas; evaporación, que es la pérdida de agua debido a la acción del calor en el suelo haciendo que la fase agua se transforme a la fase de gas. Y la transpiración que repercute particularmente en las hojas de la planta, las cuales transpiran el agua que se almacena en las hojas, también por efectos del calor. La evapotranspiración, es expresada normalmente en milímetros por unidad de tiempo, es decir, la cantidad de agua perdida del cultivo en unidades de profundidad de agua.

La profundidad del agua también puede ser expresada en términos de la energía recibida por unidad de área, refiriéndose a la energía como el calor requerido para vaporizar el agua libre. Esta energía es llamada calor latente de vaporización, y es una función de la temperatura del agua.

6.2 PROPIEDADES DEL SUELO A MODELAR, CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA.

Para comenzar a dar conocimiento de las propiedades del suelo, primero definiremos la región donde se trabajó con el modelo, es decir, con el dominio. Las unidades que se manejan por conveniencia y comodidad son cm., gr., hrs. (cgh).

En las zonas agrícolas de Michoacán, es muy común ver surcos de aproximadamente 1 metro de ancho y un montículo en el centro de 40 ó 50 cm. Dependiendo del arado y el tipo de cultivo.

En este trabajo se realiza una simulación en el siguiente dominio en dos dimensiones (Fig 7.1):

- a) 85 cm de ancho.
- b) 80 cm de largo.
- c) Un “montículo” de 40 cm de largo y 20 cm de ancho.

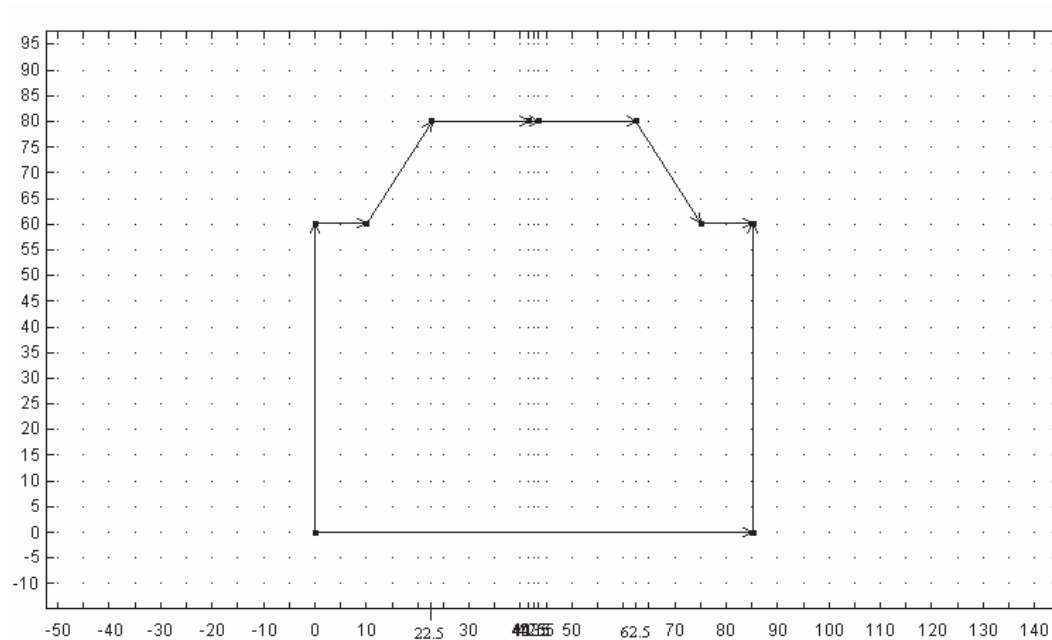


Figura 6.1 Especificación del dominio del problema a tratar, representación en FEMLAB, software gráfico para la resolución de problemas por elemento finito.

Luego tenemos que precisar los parámetros del suelo a modelar dados por la relación de Van Genuchten:

- a) **Constante $m=0.5$, para suelos estándar. Para suelos arcillosos $m=0.2$**
- b) **$\theta_{ws}=0.55 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, contenido de humedad a saturación, fase agua.**
- c) **$\theta_{wr}=0.1 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, contenido de humedad relativa, fase agua.**
- d) **$k_s=1 \text{ cm/hr}$, conductividad hidráulica a saturación.**
- e) **$a=0.044 \text{ cm}^{-1}$, función de la medida de la densidad de los poros.**

Ahora bien las condiciones iniciales y de frontera:

- f) **$\theta_{0w}=0.42 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, contenido de humedad inicial.**
- g) **$F_{drip}=10.2 \text{ cm}^3/\text{hr}$, frecuencia de irrigación ó de goteo.** Esta se toma en un segmento del dominio en la parte superior o montículo.
- h) **$evap=(HR_s-(HR_a/(1-HR_a)))*ET_0$, evaporación de agua en el suelo.**
- i) **$transpiración = k_c * ET_0$, transpiración de la planta.** Ambas propiedades evaporación y transpiración se miden en **cm/hr**.
- j) **Suponemos que el sistema es un sistema cerrado, el método de elementos finitos se aplica para dominios cerrados donde se respete la**

continuidad. Por lo tanto, existe una condición de frontera en la parte inferior del dominio, un potencial de presión de -100 cm.

La siguiente figura ilustra las condiciones de frontera del problema:

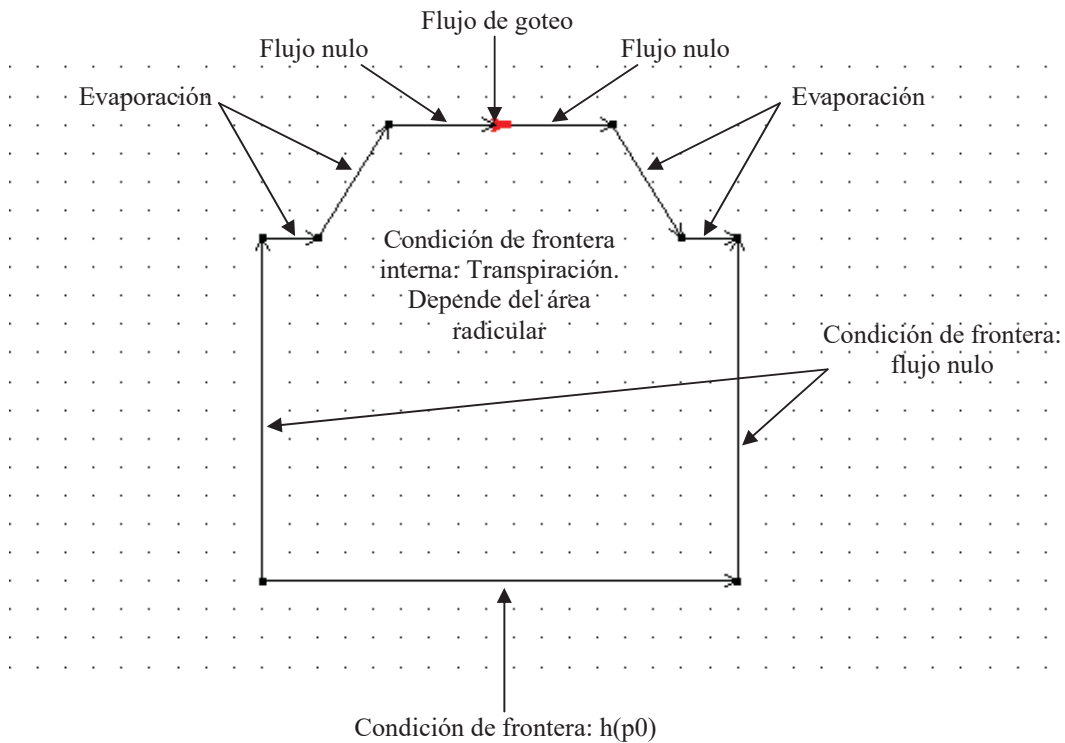


Figura 6.2 Condiciones de frontera del problema a tratar, la transpiración y evaporación del sistema son importantes en el análisis.

Los datos anteriormente mencionados fueron medidos y analizados anteriormente por **Philippe Lobit** en experimentos con fresas en la posta veterinaria, Morelia.

6.3 EL ENTORNO FEMLAB (FINITE ELEMENT METHOD LABORATORY)

El programa FEMLAB, como sus siglas en inglés lo indican (Finite Element Method Laboratory), es un programa elaborado para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales por el método de los elementos finitos.

FEMLAB es una herramienta para ingenieros y científicos, que permite el modelado de situaciones físicas en un medio totalmente interactivo muy eficiente.

FEMLAB está diseñado precisamente para hacer tanto fácil como posible, un modelo y una simulación del fenómeno físico estudiado. En este programa, podemos hacer en forma libre ecuaciones diferenciales parciales clásicas, o usar los especializados modos de aplicación física. Estos modos físicos, consisten en patrones e interfaces de usuario preconstruidas con ecuaciones y variables para áreas específicas de la física. Cualquier combinación de estos modos de aplicación, dentro de una descripción de un problema simple, da como resultado un modelo de un problema multi-físico (FEMLAB Documentation, Introducing FEMLAB 3.1, Lars Langemyr, 14 septiembre 2004), lo cual FEMLAB trabaja muy bien.

Con FEMLAB es posible extender modelos físicos convencionales dentro de los que son los modelos multi-físicos, los cuales, resuelven problemas de fenómenos físicos acoplados de manera simultánea. Usando los modos preconstruidos es posible realizar modelos definiendo las cantidades físicas relevantes, tales como propiedades del material, cargas, constricciones, fuentes y/o flujos, con los cuales se define la ecuación fundamental a resolver.

Con FEMLAB se puede trabajar de dos maneras, accediendo a una interfaz gráfica de usuario, la cual es muy flexible, o mediante un programa en el lenguaje MATLAB (Matrix Laboratory).

La estructura matemática fundamental en FEMLAB, es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Se proveen tres caminos diferentes de describir ecuaciones diferenciales parciales a través de los siguientes modos matemáticos:

Coefficient form (En forma de coeficientes): Conveniente para modelos lineales o cuasi-lineales.

General form (En forma general): Conveniente para modelos no lineales.

Weak form (En la forma débil): Para modelos de EDP's sobre fronteras, puntos o ejes, o para modelos usando términos con espacios mixtos y derivadas en el tiempo.

Cuando resolvemos las EDP's, FEMLAB usa el probado método de los elementos finitos. El software corre el análisis de elementos finitos, junto con un mallado adaptativo y un control de errores, usando una variedad de métodos numéricos.

Ahora bien, muchos de los problemas del mundo real envuelven sistemas o fenómenos acoplados de ecuaciones diferenciales parciales, es decir, problemas multifísicos. Ejemplos de estos problemas, pues el planteado en este trabajo de la dinámica del agua en el suelo tomando en cuenta la fase aire. A lo largo de estas líneas, hemos hablado de los fenómenos multifísicos, extenderemos este concepto y lo veremos desde el punto de vista del FEMLAB.

Multifísica: Es el uso de variables acopladas para conectar modelos en ecuaciones diferenciales parciales dentro de diferentes geometrías. Una característica del FEMLAB es la de trabajar y resolver problemas multifísicos.

Otra característica del programa usado, es la habilidad para mezclar dominios de diferentes dimensiones en el mismo problema. Por medio de eso, se simplifica el modelo y decrece el tiempo de cálculo. Puedes usar diferentes tipos de elementos de la malla en la parte geométrica, y por medio de eso, reducir el tamaño del modelo.

En su configuración base, FEMLAB ofrece modelos y análisis potentes para muchas áreas de aplicación. Para algunas de las más importantes, se crearon módulos opcionales de aplicación específica, que simplifican creando y analizando modelos usando terminología y métodos de solución específica para la disciplina correspondiente. La versión 3.1 de FEMLAB incluye por ejemplo el módulo de ingeniería química, electromagnetismo, el módulo de transferencia de calor, el módulo de la mecánica estructural, el módulo de microistemas y el módulo de ciencias de la tierra el cual usaremos en este trabajo. Cabe destacar que cada módulo cuenta con submódulos, que no son más que las ecuaciones específicas relacionadas con el fenómeno físico.

Bien, así hemos definido y establecido una visión general de lo que es el entorno del programa FEMLAB. En los próximos temas, se tratará un poco más a profundidad las especificaciones de este programa que usaremos para resolver nuestro problema planteado.

6.4 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA EN EL ENTORNO FEMLAB

Como ya hemos visto, el programa FEMLAB nos ofrece una manera bastante flexible de resolver nuestro problema debido a los modos de aplicación con los que cuenta. Para nuestro problema de la dinámica del agua en el suelo con dos

fases, utilizaremos el módulo de ciencias de la tierra en el submódulo de la ecuación de Darcy con un análisis transiente del potencial de presión. Debido a la similitud de la ecuación de Richards con la ecuación de Darcy, usaremos esta opción de FEMLAB (Ver Fig. 7.1).

Simultáneamente usaremos la opción de multifísica, es decir, especificamos un problema acoplado en donde la primera variable será el potencial de presión del agua, y la otra variable será el potencial de presión del aire, y la variable de acoplamiento es la presión capilar, que sencillamente se toma como la diferencia entre el potencial.

Observemos la ecuación de Darcy en su forma general, tal como nos la presenta el FEMLAB:

$$S \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (-K / (\rho_f g) \nabla (p + \rho_f g D)) = Q_s \quad (\text{Ec. 36})$$

Cabe aclarar la notación de la ecuación:

- S Término de Saturación.
- K Conductividad hidráulica.
- ρ_f Densidad del fluido.
- g Aceleración debida a la gravedad.
- p Presión.
- D Coordenada vertical.
- Q_s Flujo volumétrico.

Modelo Y Simulación Numérica De La Infiltración De Agua En Suelos Agrícolas No Saturados Usando MEF.

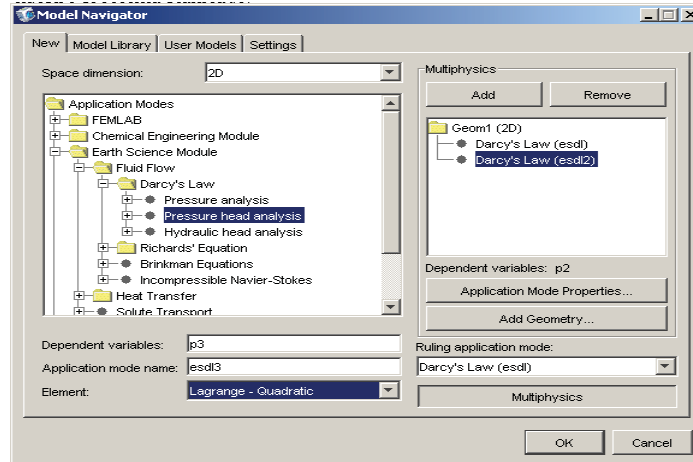


FIGURA 6.3: Para la solución del problema usamos el programa FEM-LAB, el cual es muy flexible para abordar problemas acoplados. En este problema usaremos su módulo de ciencias de la tierra, y como submódulo la ecuación de Darcy en la opción de *multifísica*.

La ecuación de Richards de manera análoga se escribe:

$$[C + SeS] \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (-K / (\rho_f g) k_r \nabla (p + \rho_f g D)) = Q_s \quad (\text{Ec. 37})$$

Donde:

$C = \frac{\partial \theta}{\partial h}$ La derivada parcial del contenido de humedad con respecto a la presión.

Se Saturación efectiva.

k_r Permeabilidad relativa.

Los demás términos se especifican en (Ec. 36).

FEMLAB especifica también que $h = \frac{p}{\rho_f g} \Rightarrow p = \rho_f gh$

Los valores de la densidad y la gravedad son constantes, y consideremos también que tenemos flujo no saturado. La ecuación 37 se modifica a:

$$C\rho_f g \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (-K / (\rho_f g) k_r \nabla (\rho_f gh + \rho_f gD)) = Q_s$$

Dividimos por $\rho_f g$:

$$C \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (-K / (\rho_f g) k_r \nabla (h + D)) = \frac{Q_s}{\rho_f g}$$

Luego $C = \frac{\partial \theta}{\partial h}$ y $K_w = \frac{K}{\rho_f g} k_r$; entonces:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (-K_w \nabla (h + D)) = Q_s \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (K_w (\nabla h - \nabla D)) = Q_s \quad \text{(Ec. 38)}$$

Ahora bien, recordemos la Ecuación de Richards (Ec. 19):

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} - \nabla \cdot (K_w (\nabla h_w - i_z)) = F_w$$

En el caso de la ecuación 19 la coordenada vertical la tenemos como i_z , y el flujo volumétrico como F_w .

Esto demuestra que la ecuación de Richards que FEMLAB maneja es la misma que escribimos en capítulos anteriores, por lo tanto podemos trabajar indistintamente con cualquiera de ellas.

Consideremos las ecuaciones 36 y 37.

$$S \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (-K / (\rho_f g) \nabla (p + \rho_f gD)) = Q_s \quad \text{Ecuación de Darcy.}$$

$$C \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (-K / (\rho_f g) k_r \nabla (p + \rho_f g D)) = Q_s \quad \text{Ecuación de Richards.}$$

En FEMLAB lo que haremos será hacer $S = C = \frac{\partial \theta}{\partial t}$, y $K_D = K_R k_r$.

Donde el subíndice en mayúsculas indica si la conductividad es de Darcy o de Richards, y daremos la solución dentro del apartado de la ecuación de Darcy en el programa FEMLAB.

Así, procedemos entonces, a dar el modelo del flujo no saturado en medios porosos.

6.4 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL Y SIMULACIÓN.

De acuerdo a los subcapítulos anteriores, procederemos a dar la solución del problema mediante un programa en FEMLAB.

El **dominio** usado, es el presentado en el subcapítulo 7.2.

Como se mostró anteriormente en la figura 7.1, este es un dominio idealizado. El flujo de agua nos interesa más precisamente en la zona donde se encuentren las raíces del cultivo, por lo que este dominio es una buena aproximación al real.

MALLA: Generalmente el problema de la construcción de una malla es muy pesado de abordar en cuanto a la programación. FEMLAB se basa en el algoritmo de Delaunay para la construcción de mallas. La malla que construye para el dominio dado es una malla triangular con 838 elementos.

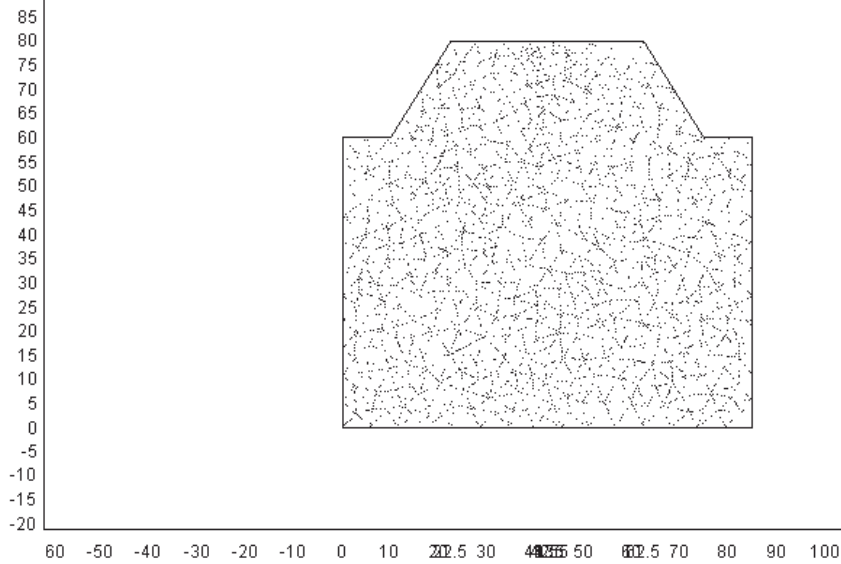


FIGURA 6.4: Malla del dominio con 838 elementos triangulares, en los cuales se calcula la solución según el método de los elementos finitos.

Recordemos que la ecuación a resolver es la ecuación 36.

$$S \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (-K / (\rho_f g) \nabla (p + \rho_f g D)) = Q_s$$

En FEMLAB, lo que hacemos es especificar los parámetros de la ecuación y las condiciones de frontera.

PARÁMETROS: En FEMLAB, los parámetros se declaran mediante una “ventana” llamada “subdomain settings”, como se muestra en la siguiente figura. Recordemos que se resolverá la ecuación para la fase agua y la fase aire, por lo tanto, especificaremos los parámetros para ambas fases.

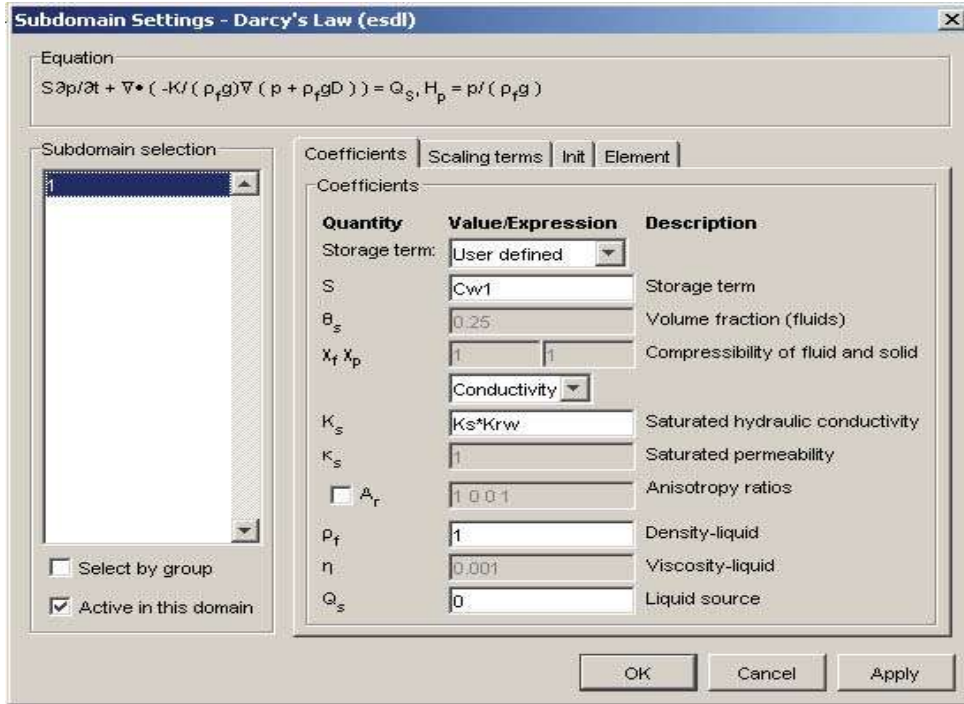


FIGURA 6.5: Definición de los parámetros de la ecuación diferencial para la fase agua.

Donde, para la fase agua: $C_{w1} = \frac{\partial \theta}{\partial h}$

Con: $\theta = \frac{\theta_{ws} - \theta_{wr}}{[1 + (-ah)^n]^m} + \theta_{wr}$

$$K_s = k_s k_r$$

Donde k_s es constante y k_r depende de h .

$$k_r = \frac{\{1 - (ah)^{n-1} [1 + (ah)^n]^{-m}\}^2}{[1 + (ah)^n]^{m/2}}$$

La densidad del fluido, del agua, es de 1 g/cm^3 .

Modelo Y Simulación Numérica De La Infiltración De Agua En Suelos Agrícolas No Saturados Usando MEF.

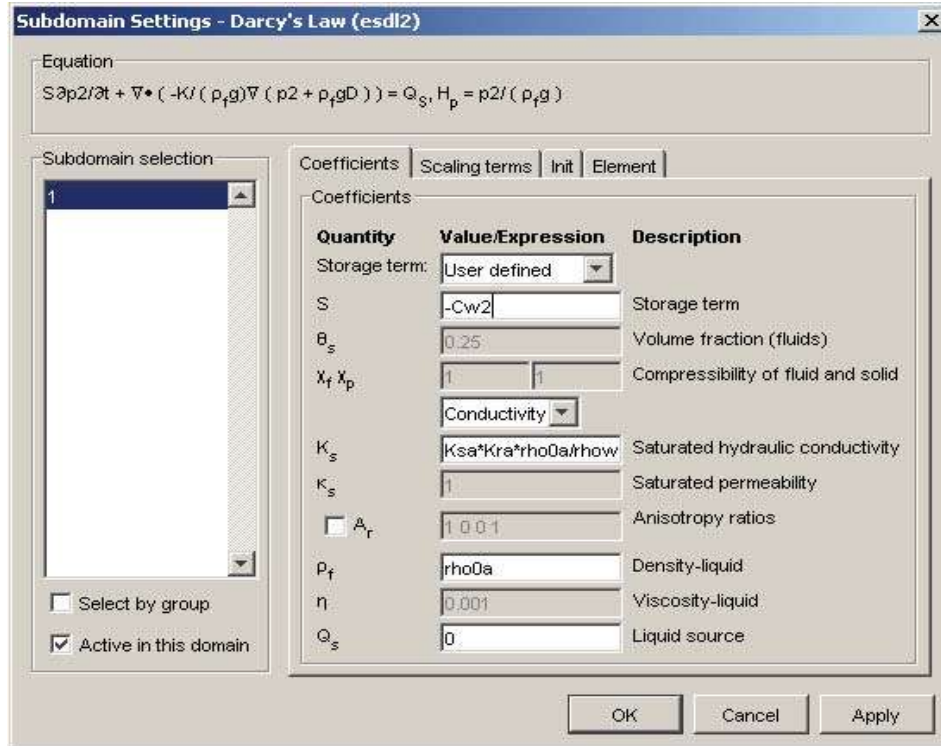


FIGURA 6.6: Definición de los parámetros de la ecuación diferencial para la fase aire.

Observamos la figura anterior observamos tres parámetros.

Para la fase aire:

El término de almacenamiento C_{w2} .

$$C_{w2} = \rho_a \frac{\partial \theta}{\partial h}$$

ρ_a Densidad del aire, depende de h_a .

ρ_{0a} Densidad del aire en condiciones normales de temperatura y presión.

h_{0a} Presión atmosférica.

La conductividad hidráulica a saturación, está dada por:

$$K_s = Ksa * Kra * \frac{\rho_{0a}}{\rho_{0w}}$$

K_s Conductividad hidráulica a saturación.

Ksa Conductividad hidráulica a saturación del aire.

Kra Conductividad hidráulica residual del aire.

La densidad del aire es:
$$\rho_a = \rho_{0a} \left(1 + \frac{h_a}{h_{0a}} \right)$$

Recordemos que esta notación depende completamente de la notación de FEMLAB, y puede ser distinta con respecto a la notación de los capítulos anteriores, la notación de este capítulo se especifican en las ecuaciones.

CONDICIONES INICIALES: Las condiciones de iniciales se definen también en la opción de subdominio de FEMLAB.

Para el agua:
$$h(t=0) = -100 \text{ cm}.$$

Para el aire:
$$h_a(t=0) = -\frac{0.1204}{80}y + 0.1204 \text{ cm}.$$

En este caso, como habíamos ya visto, la presión inicial del aire varía de acuerdo a la profundidad a la que se esté calculando la solución.

CONDICIONES DE FRONTERA: Para las condiciones de frontera tenemos que definir las en la opción de frontera o “Boundary Settings” en FEMLAB.

Físicamente, las condiciones de frontera en la parte del agua son las ya estudiadas en el subcapítulo 7.2:

CONDICIONES DE FRONTERA DE DIRICHLET (FLUJO ENTRANTE Y SALIENTE):

La irrigación por goteo del cultivo.

Esta se toma en un segmento del dominio en la parte superior o montículo.

Las pérdidas de agua por evaporación.

El suelo está expuesto a la radiación solar, por lo que tiende a evaporar el agua retenida.

Las pérdidas de agua por absorción de la planta.

La planta absorbe sus nutrientes mediante las raíces. El agua, cuando queda dentro del suelo, disuelve distintas sales y minerales que le permiten a la planta nutrirse. Por fisiología la planta evapora agua mediante las hojas por radiación solar.

CONDICIONES DE FRONTERA DE NEWMAN (VALOR DEL POTENCIAL DE PRESIÓN EN DETERMINADA POSICIÓN DE LA FRONTERA).

Potencial de presión a una profundidad de 80 cm.

6.6 RESULTADOS

Se realizaron en total 4 simulaciones o escenarios con diferentes condiciones iniciales y de frontera. La última simulación, que para nosotros fue la más completa, muestra un panorama general del riego por goteo y requirió de todos los parámetros especificados anteriormente.

PRIMER ESCENARIO:

Una simulación para 50 hrs. con los parámetros anteriores en una sola fase (agua), con una condición inicial de $h=-100$ cm, y dos condición de frontera $h=-$

Modelo Y Simulación Numérica De La Infiltración De Agua En Suelos Agrícolas No Saturados Usando MEF.

100 cm en la parte inferior, y un flujo por la parte superior, simulando el goteo, de $10.2 \text{ cm}^3/\text{hr}$.

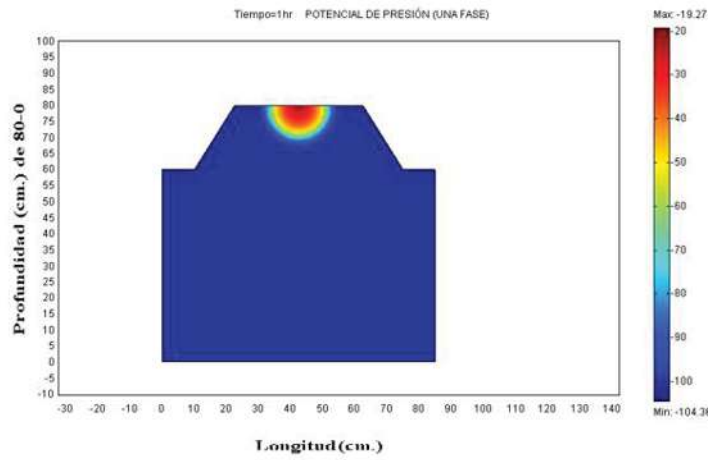


FIGURA 7.7a

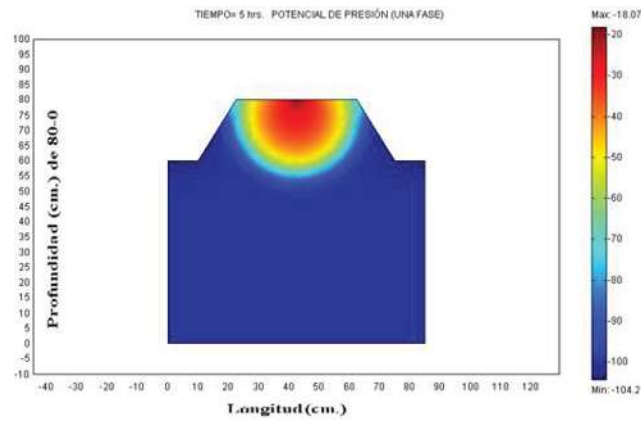


FIGURA 6.7b

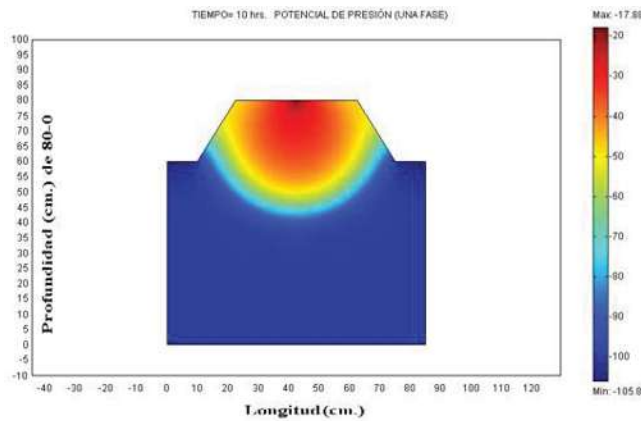


FIGURA 6.7c

Modelo Y Simulación Numérica De La Infiltración De Agua En Suelos Agrícolas No Saturados Usando MEF.

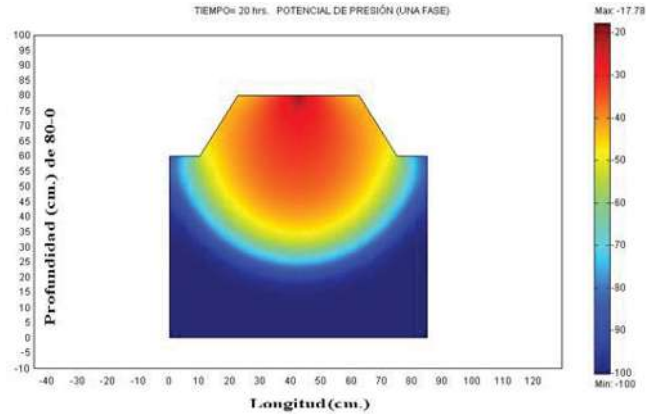


FIGURA 6.7d

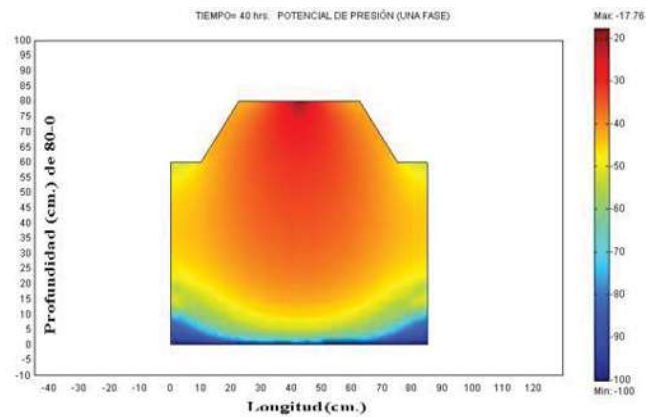


FIGURA 6.7e

En las figuras anteriores se muestran las superficies del potencial de presión en el dominio de estudio, según Van Genuchten, existe una relación entre el contenido de humedad y el potencial de presión por lo que podemos hablar de manera más clara del contenido de humedad en el medio. Obsérvese que el contenido de humedad del dominio va aumentando conforme el flujo avanza hacia la parte inferior.

Otro punto importante es el potencial de presión en la parte donde el flujo de agua entra. Ahí el potencial de presión viene aumentando con el tiempo hasta hacerse casi constante al final de la simulación, además se realizó la simulación para 60 hrs., con los mismos parámetros, y a partir de 45 hrs. el potencial de presión permanece constante en el punto de riego, lo cual es bastante creíble pues

el goteo es constante, sin embargo, al principio se humedece ese punto y al paso del tiempo disminuye un poco y llega a un equilibrio.

Lo que sucede realmente, es que al regar estamos haciendo que el agua entre hacia la zona y emplee los poros que existen, si seguimos proveyendo de agua llega un momento en que los poros no soportan más cantidad de agua y ésta se infiltra.

Sin embargo esta primera simulación sienta las bases para las que vienen, y nos ayuda a comprender acerca del flujo de agua en zonas no saturadas.

SEGUNDO ESCENARIO:

Flujo de agua en una fase con evaporación. La evaporación de agua en suelo está dada por una relación (como vimos anteriormente).

$$\text{evap} = \left(\text{HRs} - \frac{\text{HRa}}{1 - \text{HRa}} \right) * \text{ET0}$$

Donde HRs (Humedad relativa del suelo) depende del tiempo y HRa (Humedad relativa del aire) es una constante.

La evaporación en el modelo viene incluida obviamente como una condición de frontera a los lados del dominio que se encuentra en la superficie, como se muestra en la figura 7.2.

Se realizó una simulación hasta 50 hrs.

Modelo Y Simulación Numérica De La Infiltración De Agua En Suelos Agrícolas No Saturados Usando MEF.

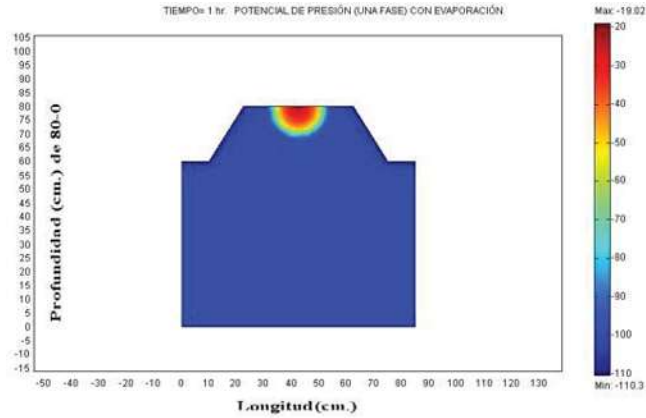


FIGURA 6.8a

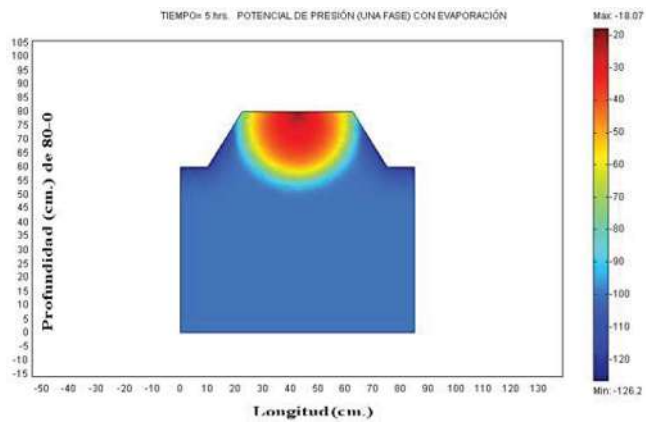


FIGURA 6.8b

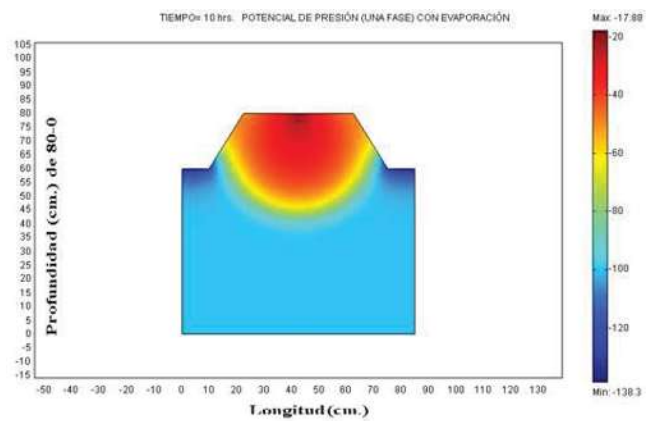


FIGURA 6.8c

Modelo Y Simulación Numérica De La Infiltración De Agua En Suelos Agrícolas No Saturados Usando MEF.

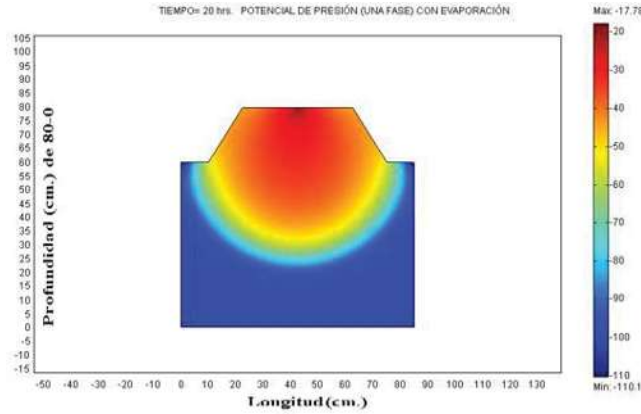


FIGURA 6.8d

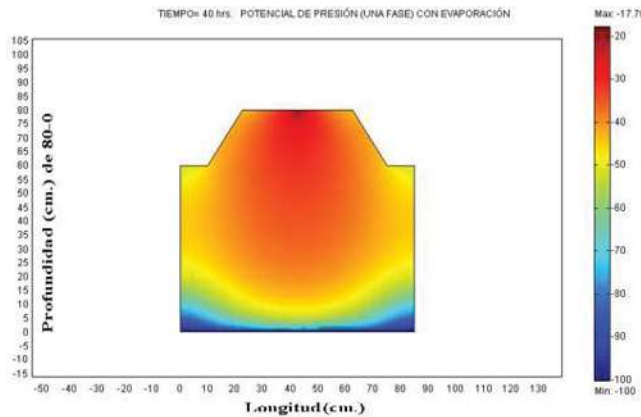


FIGURA 6.8e

En esta parte es importante observar el valor del potencial de presión en regiones cerca de las fronteras de evaporación. Notamos que el potencial es un poco menor en la zona de evaporación con respecto al primer escenario, para cualquier tiempo. Esto nos reafirma la idea que teníamos en un principio acerca de la evaporación. Recordemos que la evaporación la estamos tomando como un flujo de agua que sale del dominio por estas fronteras, haciendo que el contenido de humedad disminuya. Otra cosa importante de destacar es que la forma de entrar del agua no cambia con respecto al primer escenario; es decir, el bulbo de humedad se distribuye de igual manera a pesar de la evaporación en las fronteras.

TERCER ESCENARIO:

Veamos ahora a la simulación del flujo del agua en presencia de la fase aire, con evaporación.

Este fenómeno es análogo a los otros dos escenarios, en este caso veremos la influencia de la fase aire en el riego. Teóricamente, en los cultivos, la presencia del aire oxigena las raíces y ayuda en el transporte de gases útiles a la planta.

La simulación se realizó para $t=50$ hrs.

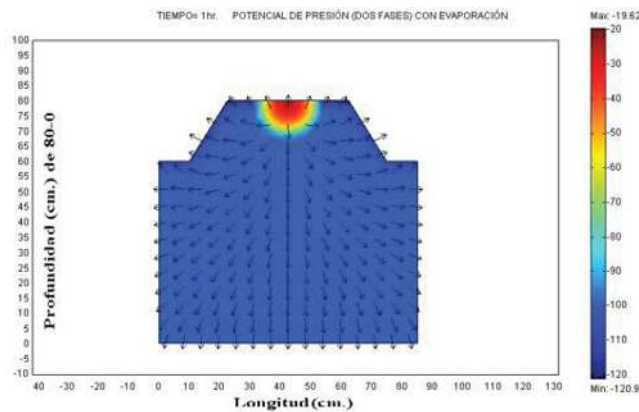


FIGURA 6.9a

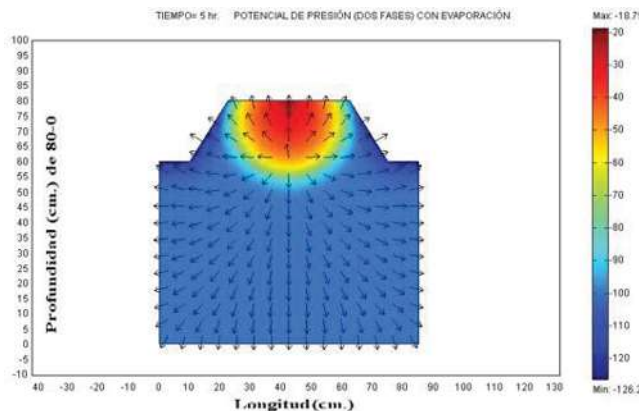


FIGURA 6.9b

Modelo Y Simulación Numérica De La Infiltración De Agua En Suelos Agrícolas No Saturados Usando MEF.

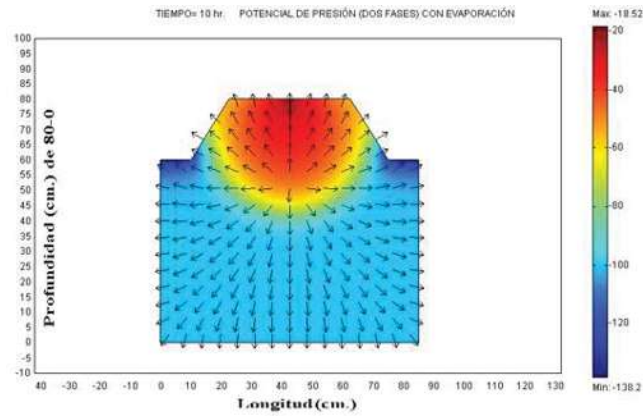


FIGURA 6.9c

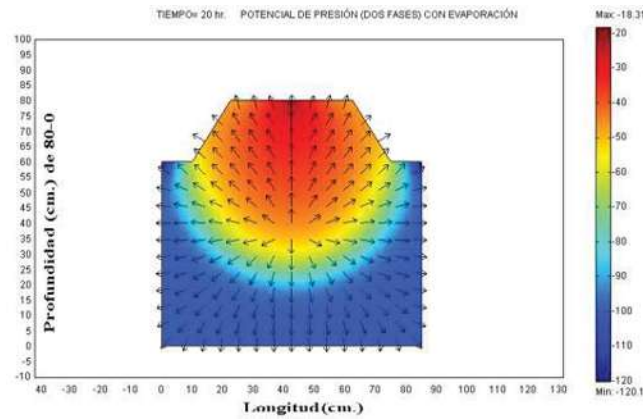


FIGURA 6.9d

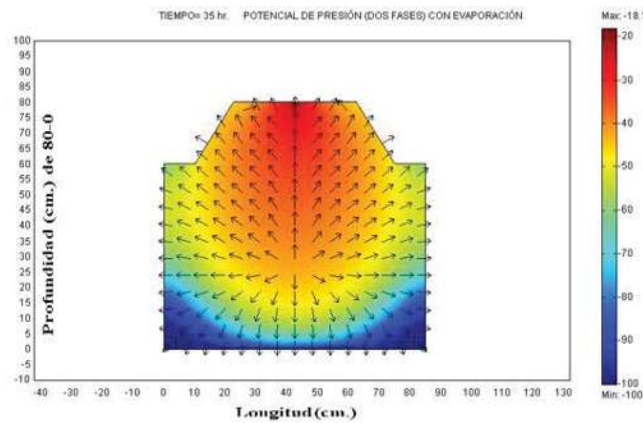


Figura 6.9e

Modelo Y Simulación Numérica De La Infiltración De Agua En Suelos Agrícolas No Saturados Usando MEF.

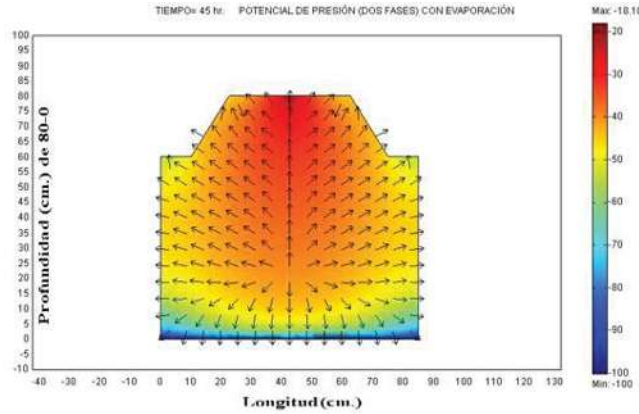


Figura 6.9f

Por diferencia de densidades en las respectivas fases, el aire tiende a salir de los poros y fluye hacia afuera del dominio conforme el agua entra en ellos.

CUARTO ESCENARIO:

En este escenario mostramos la simulación del flujo de agua con la fase aire tomando en cuenta el cultivo en términos de su transpiración y la evaporación de la zona (evapotranspiración).

Como ya mencionamos en el capítulo 4, la planta recibe sus nutrientes por medio de la raíz, los nutrientes son digeridos por la planta y fisiológicamente el agua llega hacia las hojas. Los efectos del sol hacen que la planta transpire por medio de las hojas.

Tomamos la transpiración como una condición de frontera interna, es decir, el área ocupada por las raíces absorberá agua.

La simulación se realizó para $t=50$ hrs.

Modelo Y Simulación Numérica De La Infiltración De Agua En Suelos Agrícolas No Saturados Usando MEF.

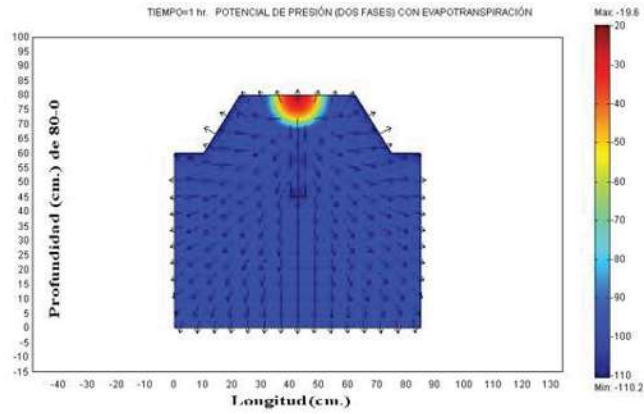


FIGURA 6.10a

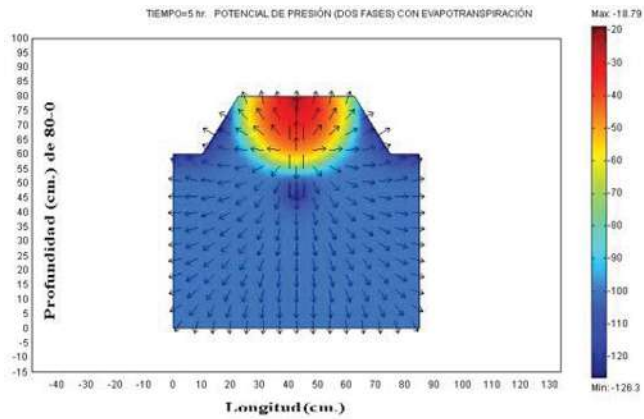


FIGURA 6.10b

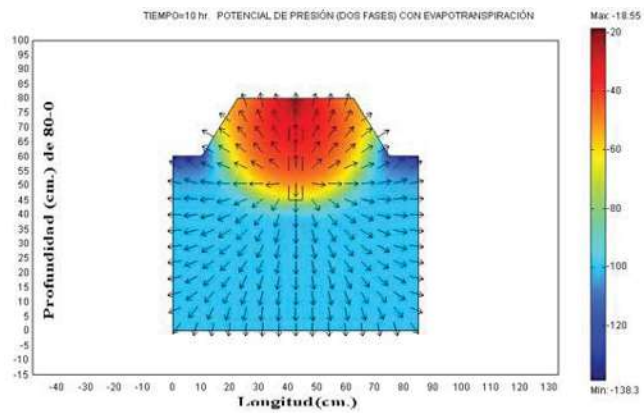


Figura 6.10c

Modelo Y Simulación Numérica De La Infiltración De Agua En Suelos Agrícolas No Saturados Usando MEF.

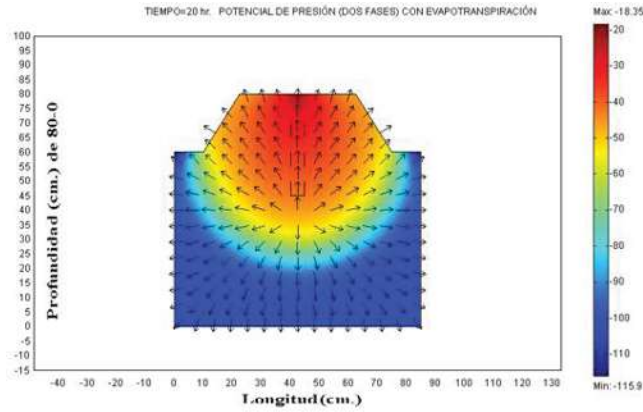


Figura 6.10d

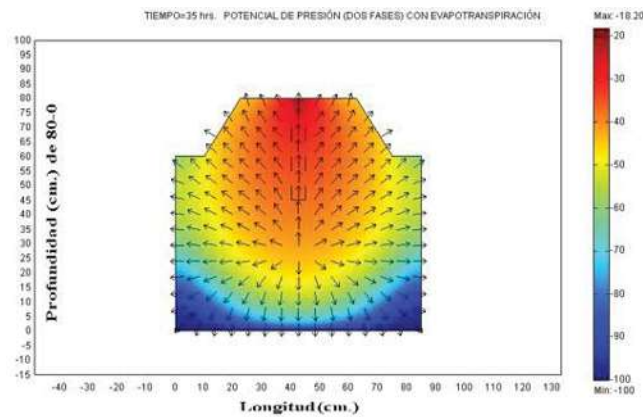


Figura 6.10d

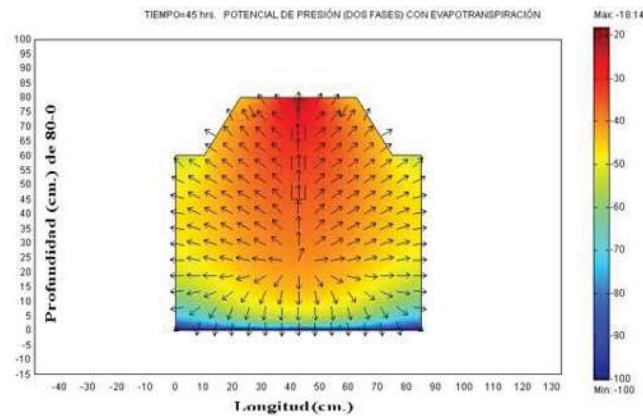


Figura 6.10e

En las figuras anteriores se muestra la infiltración de agua con evapotranspiración. Básicamente es muy similar el comportamiento con respecto

al tercer escenario, sin embargo para 10 hrs., por ejemplo, se observa una deformación en el bulbo de humedad debido al efecto de condición de frontera interna con una pérdida de flujo de agua. También se observa que la humedad es menor que con respecto a los otros escenarios, en la zona central del dominio.

La transpiración de la planta es una variable importante en cultivos que tienen la necesidad de absorber mayor cantidad de agua para nutrirse.

CONCLUSIONES

Estudiamos el flujo de agua en zonas no saturadas en términos cuantitativos, los cuales, son importantes de tomar en cuenta, antes de aplicar estas técnicas de riego en la práctica, nos da una idea general de cómo se verá el fenómeno y de la manera, el tiempo y el espacio de riego dependiendo del cultivo, evitando así el exceso o la insuficiencia de agua en la planta.

Todo esto ayuda al agricultor para la toma de decisiones en la etapa de la irrigación ya que los cultivos que se siembran en las secas o en invernaderos dependen totalmente del riego para su buen crecimiento y producción.

Otra cosa importante es el uso razonable del agua. Gran parte del agua que se tiene para uso común es destinada para el riego agrícola. La simulación en este caso juega un papel importante, pues funciona como una medida para regar, con más de idea de lo que está pasando dentro de la zona de interés. Por lo tanto se tiene un panorama más amplio para evitar desperdiciar agua.

He quedado muy satisfecho por los resultados de este proyecto, en cuanto a que se ha abierto un panorama muy general de este problema tratado con el Método de los Elementos Finitos, además que se trabajó de la manera más completa posible, lo cual, sienta las bases para trabajos posteriores en esta área.

Las experiencias recogidas de este trabajo, en particular de la simulación, me abre las puertas hacia otro punto de vista de los fenómenos físicos que nos rodean y al mismo tiempo me doy cuenta el poder que generan las ideas

Modelo Y Simulación Numérica De La Infiltración De Agua En Suelos Agrícolas No Saturados Usando MEF.

abstractas y a veces filosóficas de las áreas de ciencias exactas, pudiéndose entender el origen de estas ideas.

BIBLIOGRAFIA

Bastos de Vasconcellos C. A., Carlos J. C., Amorim C., “Numerical Simulation of unsaturated flow in porous media using a mass conservative model”, COBEM 2001.

Binning P. J., “Modeling Unsaturated Zone Flow and Contamination Transport in the Air and Water Phases”, Tesis Doctoral, pp 48-56, Enero 1994.

Celia M. A., Phillip Binning, “Two Phase Unsaturated Flow: One Dimensional Simulation And Air Phase Velocities”, Water Resources Research, pp 2819-2828, 1992a.

Ewing R. E., Lazarov R. D., J. E. Pasciak, Vassilev A. T., “Mathematical modeling, Numerical techniques, and Computer simulation of flows and transport in porous media”, CTAC95 world Scientific, pp 2-9.

Huang K., Mohanty B. P., Leij F J., Van Genuchten M. Th., “Solution of the non linear transport equation using modified Picard iteration”, Elsevier, Mayo 1996.

Martínez M. T., “Estudio del comportamiento de riego localizado subterráneo en comparación con riego localizado superficial, en el cultivo del tomate”, www.monografias.com, Chile, pp1-3.

Mayer B., “Assessment of and Selection Criteria Irrigation Methods using PVPS”, GTZ Seminar, pp 3-6, Germany 2001.

Ramirez F., “Simulación Numérica de la Dinámica del agua en el suelo. Aplicación al diseño de sistema de riego localizado de alta frecuencia.”, Universitat de Lleida, Mayo 1989, pp 10-15.

Reddy J. N., Gartling D. K., "The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics", CRC Press 2001, Segunda Edición, pp 31-78.

Richard G. A., Pereira L. S., Raes D., Smith M., "Crop Evapotranspiration", FAO Irrigation and Drainage Papers, pp 1-5.

Soucie C. A., "Mixed Finite Element Method for Variably Saturated Subsurface Flow", Tesis Doctoral, Houston Texas, Abril 1996.

Van Genuchten M. Th., "A Closed Form Equation For Predicting The Hydraulic Conductivity in Soils", Soil Sci. Soc. Am. J., Vol. 44,pp 892-898, 1980