



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

Instituto de Física y Matemáticas

**Propagador Vestido del Gluón con una
Ventana Conforme en el Infrarojo y
Confinamiento de Quarks**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA

MARCO ANTONIO BEDOLLA HERNÁNDEZ

ASESOR

DR. ALFREDO RAYA MONTAÑO

MORELIA, MICH., FEBRERO 2013.



Propagador Vestido del Gluón con una Ventana
Conforme en el Infrarojo y Confinamiento de
Quarks.

Marco Antonio Bedolla Hernández

Índice general

1. Introducción	5
2. Modelos Potenciales	9
2.1. Potencial de Cornell	9
2.2. Solución de la ecuación de Schrödinger con el potencial de Cornell	10
2.2.1. Perturbaciones a la Energía	11
2.3. Potencial de Rosen-Morse Trigonométrico	13
2.3.1. Solución de la ecuación de Schrödinger con el potencial RMT	13
2.4. Propagador Instantáneo	19
3. Generación Dinámica de Masas y Confinamiento	25
3.1. Ecuaciones de Schwinger-Dyson	25
3.1.1. Ecuación de GAP en QCD	29
3.1.2. Otros Observables	31
3.1.3. Confinamiento en las Ecuaciones de Schwinger-Dyson . . .	32
3.2. Modelo de Maris-Tandy para QCD	32
4. Modelo Para el Propagador Vestido del Gluón	35
5. Conclusiones y Consideraciones Finales	45
A. Lagrangiano de QCD	47
B. Programa usado para resolver las ESD	49

Capítulo 1

Introducción

Entender el espectro de los mesones y las resonancias bariónicas es crucial para identificar mecanismo de confinamiento y la dinámica de quarks y el gluones en la región no perturbativa de la cromodinámica cuántica (QCD, por sus siglas en inglés, *Quantum Chromodynamics*). Para bariones, el explicar los estados con espín alto es un verdadero reto en la espectroscopía de quarks [1, 2]. En ese sentido, el número de resonancias observadas hasta el momento [3] es considerablemente más grande que aquellas predichas en modelos basados en un espacio de Hilbert de seis grados de libertad de sabor y la simetría más baja de las funciones de onda radiales [4]. Los candidatos obvios para reducir el número de grados de libertad son los modelos quark-diquark (q-qq) [5] basados en un diquark con momento angular acotado. El sistema q-qq ha sido promovido en este contexto por varios autores [6, 7]. Se acostumbra imponer una simetría en la función de onda mayor que $SO(3)_L$, predominando la simetría conforme como elección favorita. Esta simetría es –en buena medida– una simetría global del Lagrangiano de QCD en el sector de sabores ligeros, razón por la que es de esperarse que los datos de espectroscopía para el Nucleón y la Δ puedan ser examinados en el esquema de la correspondencia *AdS/CFT*. Los trabajos pioneros en esta conexión han construido exitosamente funciones de onda espaciales para mesones y bariones ligeros [8]. Trabajos posteriores extendieron esta idea [9, 10, 11]. En [12], una simetría conforme en el sector de bariones ligeros dentro de la correspondencia AdS_5/CFT_4 aparece en la degeneración entre parejas de paridad que es sistemáticamente observada en el espectro del Nucleón y Δ . En ese trabajo, la simetría conforme se implementa en el Hamiltoniano de quarks definido en un volumen finito. Existe una variedad de geometrías apropiadas para preservar la simetría conforme en Hamiltonianos de este tipo, siendo la hipersfera S^3 una elección notable [13, 14, 15]. Se ha mostrado que una geometría que contenga a S^3 , tal como $S^1 \otimes S^3$, puede obtenerse partiendo directamente de AdS_5 [14, 16, 17]. Este hecho fue usado en [18], obteniendo el espectro de un sistema q-qq localizado directamente sobre un espacio-tiempo de Minkowski compactificado conformemente, $R_1 \otimes S^3$, sobre el cono AdS_5 . Se observa que las geodésicas de movimiento libre en S^3 corresponden a una ecuación escalar

conforme, mientras que el potencial estático q-qq se considera como el potencial “curvo” de Coulomb.

El potencial curvo de Coulomb fue estudiado por E. Schrödinger en [19]. Corresponde a la función cotangente (\cot), que resulta ser armónica en S^3 . Debido a que el grupo de isometrías de S^3 es $SO(4)$, la función \cot respeta esta simetría [20]. Además, el potencial \cot encierra los rasgos principales de la dinámica en QCD, como se muestra en [21], ya que se interpola entre el régimen perturbativo del intercambio de un gluón (inverso con la distancia), pasando a través el régimen no perturbativo de flujo de gluones (crecimiento lineal) y el crecimiento asintótico que confina a los quarks (pared infinita). El potencial \cot es familiar en estudios de de mecánica cuántica supersimétrica [22, 23, 24], donde es conocido como potencial de Rosen-Morse, el cual, siendo de rango finito, ha capturado el interés en modelar confinamiento espacial ya sea para electrones en puntos cuánticos [25] o quarks en hadrones [18].

Conocer el potencial y las funciones de onda en el espacio de momentos demanda el diseño de un espacio fase que considere el potencial \cot como un segmento de arco en S^3 . En [26], la proyección del arco sobre el disco ecuatorial de la esfera es considerada. La parte de norma de la ecuación de Schrödinger en el espacio de los momentos se escribe en términos de la función Sinc ($\sin^2(q)/q^2$) o una función de Struve ($H_1(q)/q^2$), y puede identificarse como un propagador instantáneo efectivo del gluón. Sabiendo que el confinamiento de quark ligeros es un efecto de la teoría cuántica de campos (TCC), en esta tesis se explora el impacto de un propagador vestido del gluón que muestra confinamiento espacial, en el escenario de confinamiento de quarks en un esquema de la TCC. Se ha seleccionado el marco de las Ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD) para este propósito.

Las ESD constituyen una herramienta poderosa para la física de hadrones. Este esquema provee una explicación satisfactoria de la relación entre el Rompimiento Dinámico de la Simetría Quiral (RDSQ) y el Confinamiento, ambos fenómenos emergentes de QCD. Además, el crecimiento infrarrojo de la función de masa de los quarks se entiende como un efecto de la nube de gluones que viste al quark a bajos momentos [27]. Esos hechos pueden ser explorados a través de las ESD.

En esta tesis se explora el RDSQ y Confinamiento con un modelo efectivo para la ecuación de GAP. Bajo suposiciones minimalistas, es decir, usando el vértice desnudo y un modelo para la función de revestimiento del gluón, se conduce un análisis del propagador del quark en la norma de Landau. Para el gluón, se emplea una función de revestimiento inspirada en el propagador instantáneo del potencial de Coulomb curvo. Las predicciones son contrastadas con observables hadrónicos relevantes derivados de nuestro modelo con valores aceptados fenomenológicamente, y se observa buena coincidencia dentro de la validez de nuestras suposiciones. La tesis está organizada de la siguiente forma: en el siguiente capítulo se resuelve la ecuación de Schrödinger para el potencial de Cornell y el potencial Rosen-Morse trigonométrico; y luego se construye nuestra propuesta para el propagador efectivo del gluón. En el capítulo 3 se da una breve introducción a las ESD, se presentan los observables que pueden

ser calculados; la prueba confinamiento, el condensado quiral y la constante de decaimiento del pión. Luego se presentan resultados para el modelo de Maris-Tandy (MT) [29], que en los últimos quince años ha guiado las predicciones de las ESD para varios observables hadrónicos. En el capítulo IV se pone a prueba nuestro propagador efectivo del gluón y se compara con los resultados obtenidos en el modelo MT. Finalmente, en el último capítulo se presentan las conclusiones generales sobre este trabajo.

Capítulo 2

Modelos Potenciales

La interacción fuerte entre quarks, los constituyentes esenciales de los hadrones, está regida por la cromodinámica cuántica (QCD), la cual es una teoría de norma no Abelianiana con los gluones como bosones de norma (en el Apéndice A se presenta el Lagrangiano de QCD). Como consecuencia del carácter no Abeliano de QCD, las interacciones entre quarks van del intercambio de uno a muchos gluones y autointeracciones del gluón, siendo responsable esto último del confinamiento de quarks, que a bajas energías, permanecen confinados, pero a altas energías y momentos se comportan casi como partículas libres (libertad asintótica). Las ecuaciones de campo en QCD son no lineales y bastante complicadas, debido a los procesos de autointeracción del gluón, y para poder resolverse, se requiere el uso de técnicas altamente sofisticadas, como la discretización del espacio-tiempo, *Lattice QCD*¹. Los cálculos en *Lattice* se han establecido como una herramienta de confianza a la hora de hacer cálculos no perturbativos en QCD. Uno de los resultados obtenidos mediante esta técnica es la forma cualitativa para el potencial de confinamiento de los nucleones, tomando como modelo una interacción estática quark-diquark, que consiste en un potencial con un término tipo Coulomb (inverso a la distancia) más un término lineal: Potencial de Cornell [28]. Conociendo la forma del potencial, es posible resolver el problema mecánico cuántico para obtener el espectro de masa y las funciones de onda para la interacción entre quarks y diquarks dentro de los nucleones. A continuación, se describen algunos ejemplos de dichos potenciales siendo resueltos usando la ecuación de Schrödinger.

2.1. Potencial de Cornell

El potencial de Cornell tiene la forma

$$V(r) = -\frac{A}{r} + Br + O(r^2), \quad (2.1)$$

¹Para un estudio detallado ver [30].

donde A y B son parámetros ajustables para lograr una descripción adecuada de la dinámica de los quarks. El término inverso a r (término tipo Coulomb) puede interpretarse como el intercambio de un gluón en el modelo de quarks dentro del régimen perturbativo. Por otro lado, el término lineal en r corresponde a la región no perturbativa, que se interpreta como un flujo de gluones entre quarks, cuya intensidad va aumentando conforme los quarks se alejan, similar al comportamiento de un cuerda que se estira.

El problema de este modelo consiste en que no existe una cota máxima para la distancia entre quarks, lo que es un indicador de que sólo es válido para valores pequeños de r . Esto sugiere que se debe encontrar un modelo más preciso para la interacción de un quark-diquark dentro del nucleón. Sin embargo, se pueden obtener resultados importantes usando esta primera aproximación.

2.2. Solución de la ecuación de Schrödinger con el potencial de Cornell

La ecuación de Schrödinger con el potencial de Cornell ha sido ampliamente estudiada en la mecánica cuántica. El método estándar –que será bosquejado a continuación– consiste en tomar la parte lineal del potencial como una perturbación al potencial del tipo Coulomb y utilizar la teoría de perturbaciones ordinaria. Considérese la ecuación de Schrödinger en tres dimensiones con un potencial radial,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r) \right) \Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}), \quad (2.2)$$

donde $\Psi(\vec{r})$ es la función de onda de la partícula, E son los eigenvalores de energía y μ es la masa reducida del diquark. Para nuestro objetivo, se necesita la solución de la parte radial de la ecuación (2.2) con el potencial $V(r) = -A/r$ en coordenadas esféricas [31]. La solución de este problema es bien conocida, dado que la ecuación se reduce a la del problema del átomo de hidrógeno [32]. La única diferencia en este problema es que la constante $e^2/4\pi\epsilon_0$ se cambia por A . La ecuación radial es

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} \left[-\frac{A}{r} - E \right] R = l(l+1)R. \quad (2.3)$$

Esta ecuación se simplifica al hacer el cambio de variable

$$u(r) = rR(r), \quad (2.4)$$

obteniendo así

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[-\frac{A}{r} + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eur. \quad (2.5)$$

Tomando $k = \sqrt{-2\mu E}/\hbar$, el cual es real para $E < 0$, se obtiene

$$\frac{1}{k^2} \frac{d^2 u}{dr^2} = \left[1 - \frac{2\mu A}{\hbar^2 k} \frac{1}{kr} + \frac{l(l+1)}{(kr)^2} \right] u, \quad (2.6)$$

2.2. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER CON EL POTENCIAL DE CORNELL11

lo que sugiere los cambios de variables

$$\rho = kr, \quad \rho_0 = \frac{2\mu A}{\hbar^2 k}, \quad (2.7)$$

consiguiendo así una ecuación diferencial con dependencia en ρ ,

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] u. \quad (2.8)$$

Nótese que la ecuación (2.8) ahora sí es idéntica a la ecuación de eigenvalores para el átomo de hidrógeno [33]. Con este resultado, se puede establecer que el número cuántico principal es $\rho_0 = 2n$, donde n es entero positivo.

Por otro lado, las energías permitidas son de la forma

$$E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{2\mu A}{\hbar^2 \rho_0} \right)^2 = -\frac{2\mu A^2}{\hbar^2 \rho_0^2}. \quad (2.9)$$

Combinando los dos resultados previos, se obtiene que las energías permitidas son

$$E_n = -\left(\frac{\mu}{2\hbar^2} A^2 \right) \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.10)$$

donde

$$E_1 = \frac{\mu}{2\hbar^2} A^2, \quad (2.11)$$

es la energía del estado base. Finalmente, combinando los resultados obtenidos para ρ_0 , se tiene que

$$2n = \frac{2\mu A}{\hbar^2 k} \Rightarrow k = \frac{\mu A}{\hbar n} = \frac{1}{an}. \quad (2.12)$$

Aquí,

$$a = \frac{\hbar^2}{\mu A}, \quad (2.13)$$

ha sido identificado como el *Radio de Bohr*. El parámetro A puede ajustarse para calcular la energía del estado base no perturbado de modelos que se aproximen al potencial de Cornell. Por ejemplo, para el Charmonio se tiene $A \approx 0.48$ [34].

2.2.1. Perturbaciones a la Energía

Con el fin de obtener una solución problema para el potencial de Cornell, se usa la teoría de perturbaciones usual para la mecánica cuántica, como se ve en [35]. Considerando el Hamiltoniano

$$H = H_0 + \lambda H', \quad (2.14)$$

donde H' es la perturbación, la corrección perturbativa a primer orden para la energía del estado base viene dada por

$$E_0^1 = \langle \psi_0 | H' | \psi_0 \rangle, \quad (2.15)$$

siendo ψ_0 la función de onda del estado base. Recordando que dicha función y el Hamiltoniano de perturbación están dados por [32]

$$\psi_{100}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}, \quad (2.16)$$

$$H' = B \frac{r}{\lambda}, \quad (2.17)$$

siendo B es un parámetro pequeño, se tiene que la corrección de la energía a primer orden es

$$\begin{aligned} E_0^1 &= \langle \psi_0 | Br | \psi_0 \rangle = \frac{4B}{a^3} \int_0^\infty dr r^3 e^{2r/a} \\ &= \frac{3}{2} Ba. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Entonces, la energía corregida del estado base es

$$E_1 = -\frac{\mu}{2\hbar^2} A^2 + \frac{3}{2} Ba, \quad (2.19)$$

o, sustituyendo el valor de a ,

$$E_1 = -\frac{\mu}{2\hbar^2} A^2 + \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{\mu A} B, \quad (2.20)$$

el cual coincide en la forma con el resultado obtenido mediante un procedimiento algebraico [36].

Es importante tomar en cuenta el hecho de que las soluciones obtenidas anteriormente para el potencial de Cornell –usando teoría de perturbaciones alrededor de un potencial de Coulomb– simplemente son una primera aproximación para la interacción quark-diquark obtenida mediante *Lattice*. Como se mencionó previamente, este potencial tiene rango infinito, lo cual es indicio de que términos importantes en la expansión del potencial verdadero han sido omitidos. Se ha visto que la forma del potencial requerida es del tipo –cot, que puede aproximarse con el potencial de Cornell para valores pequeños de r , pero además tiene la ventaja de tener un rango finito, el cual cumple con los requisitos para un potencial entre quarks como se ve en [37]; el potencial cot interpola el régimen perturbativo de intercambio de un gluón (término inverso con la distancia), pasa a través del régimen no perturbativo de interacciones (crecimiento lineal) y el crecimiento asintótico libre que confina a los quarks (pared infinita). El potencial cot es familiar dentro de los estudios de Mecánica Cuántica Supersimétrica, donde se encuentra como un caso particular del potencial *Rosen-Morse Trigonométrico* (RMT) [38, 39], el cual se analizará brevemente en la siguiente sección.

2.3. Potencial de Rosen-Morse Trigonométrico

El potencial de Rosen-Morse Trigonométrico (RMT) es

$$V(r) = -2b \cot r + a(a+1) \csc^2 r, \quad (2.21)$$

el cual ha sido estudiado en la literatura y su solución ha sido reciente redescubierta en [40]. Para esta tesis, se resuelve nuevamente la ecuación de Schrödinger con dicho potencial, pero además se repite todo el procedimiento algebraico con el fin de corroborar que la solución presentada en [40].

El potencial RMT contiene el término $-\cot$, cuya expansión en serie de Taylor es de la forma

$$\cot r \approx \frac{1}{r} - \frac{r}{3} - \frac{r^3}{45} + \dots, \quad (2.22)$$

donde se puede ver que el potencial de Cornell está incluido en los primeros dos términos de \cot . La Figura 2.1 muestra la semejanza entre potenciales. Se

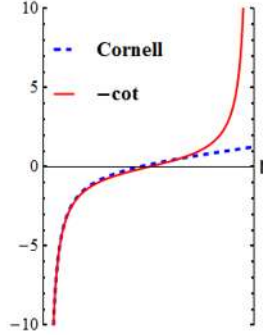


Figura 2.1: Comparación entre el potencial de Cornell y $-\cot$.

resolverá la ecuación de Schrödinger para el potencial RMT usando el método de Sturm-Liouville [41, 42] y enseguida se tomará el límite $a \rightarrow 0$.

2.3.1. Solución de la ecuación de Schrödinger con el potencial RMT

La parte radial de la ecuación de Schrödinger en tres dimensiones para el potencial RMT es [32]

$$-\frac{d^2}{dr^2}R(r) + \left(\frac{l(l+1)}{r^2} - 2b \cot r + a(a+1) \csc^2 r - \epsilon \right) R(r) = 0. \quad (2.23)$$

Nuestro enfoque será únicamente para el estado base, para lo cual se toma $l = 0$. Así, la ecuación a resolver es

$$-\frac{d^2}{dr^2}R(r) + (-2b \cot r + a(a+1) \csc^2 r - \epsilon)R(r) = 0. \quad (2.24)$$

Se propone una solución de la forma

$$R(r) = e^{-\alpha r} F(r), \quad (2.25)$$

que al sustituir en la ecuación (2.24) y usando el hecho de que

$$R''(r) = \alpha^2 e^{-\alpha r} F(r) - 2\alpha e^{-\alpha r} F'(r) + e^{-\alpha r} F''(r), \quad (2.26)$$

nos permite obtener

$$\begin{aligned} & -\alpha^2 e^{-\alpha r} F(r) + 2\alpha e^{-\alpha r} F'(r) - e^{-\alpha r} F''(r) \\ & + (-2b \cot r + a(a+1) \csc^2 r - \epsilon) e^{-\alpha r} F(r) = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Dividiendo por $e^{-\alpha r}$ y factorizando los términos que incluyen derivadas de F ,

$$F''(r) - 2\alpha F'(r) + (2b \cot r - a(a+1) \csc^2 r + \epsilon + \alpha^2) F(r) = 0. \quad (2.28)$$

Con el cambio de variable $x = \cot r$, se obtienen los diferenciales

$$\begin{aligned} dx &= -\csc^2 r dr = -(1+x^2) dr, \\ \frac{d^2}{dr^2} &= -(1+x^2) \frac{d}{dx} \left(-(1+x^2) \frac{d}{dx} \right) \\ &= (1+x^2)^2 \frac{d^2}{dx^2} + 2x(1+x^2) \frac{d}{dx}, \end{aligned}$$

que al sustituirlos en la ecuación (2.28), conducen a la ecuación diferencial final

$$(1+x^2)^2 f''(x) + 2(1+x^2)(\alpha+x)f'(x) + (2bx - a(a+1)(1+x^2) + \epsilon + \alpha^2)f(x) = 0, \quad (2.29)$$

donde se ha hecho el cambio $f(x) = F(\cot^{-1} r)$. Debido a la importancia para conocer la solución de esta ecuación, la mayoría de los pasos algebraicos son mostrados en detalle. Primero, se propone una solución de la forma

$$f(x) = (1+x^2)^{-\frac{1-\beta}{2}} C(x), \quad (2.30)$$

β es una constante que será calculada posteriormente. Las primeras derivadas de la solución $f(x)$ son:

$$f'(x) = -2x \frac{(1-\beta)}{2} (1+x^2)^{-\frac{3-\beta}{2}} C(x) + (1+x^2)^{-\frac{1-\beta}{2}} C'(x) \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(4 \frac{(1-\beta)(3-\beta)}{2} x^2 (1+x^2)^{-\frac{5-\beta}{2}} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{(1-\beta)}{2} (1+x^2)^{-\frac{3-\beta}{2}} \right) C(x) \\ &\quad - 2x(1-\beta)(1+x^2)^{-\frac{3-\beta}{2}} C'(x) + (1+x^2)^{-\frac{1-\beta}{2}} C''(x), \end{aligned} \quad (2.32)$$

que al sustituir en la ecuación (2.29), nos permite escribir

$$\begin{aligned}
(1+x^2)^2 & \left[(1-\beta)(3-\beta)x^2(1+x^2)^{-\frac{5-\beta}{2}}C(x) \right. \\
& - (1-\beta)(1+x^2)^{-\frac{3-\beta}{2}}C(x) - 2x(1-\beta)(1+x^2)^{-\frac{3-\beta}{2}}C'(x) \\
& \quad \left. + (1+x^2)^{-\frac{1-\beta}{2}}C''(x) \right] \\
& + 2(1+x^2)(\alpha+x) \left[x(1-\beta)(1+x^2)^{-\frac{3-\beta}{2}}C(x) \right. \\
& \quad \left. + (1+x^2)^{-\frac{1-\beta}{2}}C'(x) \right] \\
& + [2bx - a(a+1)(1+x^2) + \epsilon + \alpha^2](1+x^2)^{-\frac{1-\beta}{2}}C(x) = 0. \quad (2.33)
\end{aligned}$$

Con el fin de eliminar la dependencia de β en las potencias, la expresión anterior es multiplicada por $(1+x^2)^{-(1+\beta)/2}$, para así obtener

$$\begin{aligned}
(1+x^2)^2 & \left[(1-\beta)(3-\beta)x^2(1+x^2)^{-3}C(x) - (1-\beta)(1+x^2)^{-2}C(x) \right. \\
& \quad \left. - 2x(1-\beta)(1+x^2)^{-2}C'(x) + (1+x^2)^{-1}C''(x) \right] \\
& + 2(1+x^2)(\alpha+x) \left[-x(1-\beta)(1+x^2)^{-2}C(x) + (1+x^2)^{-1}C'(x) \right] \\
& + [2bx - a(a+1)(1+x^2) + \epsilon + \alpha^2](1+x^2)^{-1}C(x) = 0. \quad (2.34)
\end{aligned}$$

Factorizando las derivadas de $C(x)$, se ve que

$$\begin{aligned}
0 & = (1+x^2)C''(x) + 2(\alpha+\beta x)C'(x) \\
& - \left[\beta(1-\beta) + a(a+1) - \frac{2x[-\alpha(1-\beta) + b] + \alpha^2 - (1-\beta)^2 + \epsilon}{1+x^2} \right] C(x). \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Para obtener una ecuación más simple, se elimina la dependencia de x en el término que multiplica a $C(x)$. Se debe cumplir que

$$-\alpha(1-\beta) + b = 0, \quad \alpha^2 - (1-\beta)^2 + \epsilon = 0, \quad (2.36)$$

lo que conduce a una ecuación más simple,

$$(1+x^2)C''(x) + 2(\alpha+\beta x)C'(x) - [\beta(1-\beta) + a(a+1)]C(x) = 0. \quad (2.37)$$

De acuerdo con la teoría de Sturm-Liouville [43], cualquier ecuación diferencial puede escribirse en la forma

$$S(x)\frac{d^2C_m(x)}{dx^2} + \frac{1}{\omega(x)}\left(\frac{d(s(x)\omega(x))}{dx}\right)\frac{dC_m(x)}{dx} + \lambda_m C(x) = 0, \quad (2.38)$$

donde

$$\lambda_m = -m \left(k_1 \frac{dC_1(x)}{dx} + \frac{1}{2}(m-1) \frac{d^2s}{dx^2} \right), \quad (2.39)$$

$$C_m(x) = \frac{1}{K_m \omega(x)} \frac{d^m}{dx^m} \left(\omega(x) s^m(x) \right). \quad (2.40)$$

Mediante un simple análisis a la ecuación (2.37), inmediatamente se identifican los términos de la fórmula de Rodrigues

$$S(x) = (1 + x^2), \quad (2.41)$$

$$\lambda_m = -\beta(1 - \beta) - a(a + 1) = -m \left(k \frac{dC_1}{dx} + (m - 1) \right). \quad (2.42)$$

Por otro lado, usando el hecho de que

$$C_1(x) = \frac{1}{k\omega(x)} \frac{ds(x)\omega(x)}{dx}, \quad (2.43)$$

se encuentra el valor de la constante C_1 de la relación

$$kC_1(x) = 2(\alpha + \beta x). \quad (2.44)$$

De esta forma, se obtiene una ecuación más simple para β ,

$$-\beta(1 - \beta) - a(a + 1) = -m(2\beta + m - 1). \quad (2.45)$$

En resumen, las ecuaciones para calcular el valor de β son

$$\beta = 1 - \frac{b}{\alpha}, \quad (2.46)$$

$$\epsilon = -\alpha^2 + \left(\frac{b}{\alpha} \right)^2, \quad (2.47)$$

$$0 = \beta^2 + (2m - 1)\beta - a(a + 1) + m(m - 1). \quad (2.48)$$

Sustituyendo el valor de β en la ecuación (2.48), se llega a la ecuación de segundo orden

$$\frac{b^2}{\alpha^2} - (2m + 1) \frac{b}{\alpha} + m(m + 1) - a(a + 1), \quad (2.49)$$

cuyas soluciones son

$$\frac{b}{\alpha_1} = m - a, \quad (2.50)$$

$$\frac{b}{\alpha_2} = m + 1 + a. \quad (2.51)$$

Tomando en cuenta la solución de la ecuación (2.51) y considerando $m + 1 = n$, se obtiene

$$\beta = 1 - (n + a), \quad (2.52)$$

$$\epsilon = (n + a)^2 - \frac{b^2}{(n + a)^2}. \quad (2.53)$$

Finalmente, la función de peso $\omega(x)$ puede obtenerse a partir de

$$\frac{1}{\omega(x)} \frac{d(s(x)\omega(x))}{dx} = 2(\alpha + (1 - (n + a))x), \quad (2.54)$$

de donde se obtiene

$$(1 + x^2)\omega'(x) = 2(\alpha - (n + a))x\omega(x), \quad (2.55)$$

cuya solución es

$$\omega_n(x) = (1 + x^2)^{-(n+a)} e^{-2\alpha \cot^{-1} x}. \quad (2.56)$$

Los polinomios que resuelven la ecuación diferencial que se obtienen de la ecuación (2.40) corresponden a los polinomios de Ruth-Romanovski [44, 45], los cuales fueron redescubiertos en [40]. Si se reescribe dicha ecuación en términos de n , ésta es

$$C_n^{(a,b)}(x) = \frac{1}{K_n \omega(x)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (\omega_n(x) s(x)^{n-1}), \quad (2.57)$$

siendo K_n las constantes de normalización. Los primeros polinomios obtenidos en esta forma son

$$C_1^{(a,b)} = \frac{1}{K_1}, \quad (2.58)$$

$$C_2^{(a,b)} = \frac{2}{K_2} \left(\frac{b}{2+a} - (1+a)x \right), \quad (2.59)$$

$$C_3^{(a,b)} = \frac{2}{K_3} \left[\left(\frac{2b^2}{(3+a)^2} - (1+a) \right) - \frac{2(2a+3)b}{3+a} x + (1+a)(2a+3)x^2 \right], \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned}
C_4^{(a,b)} &= \frac{4}{K_4} \left[\left(\frac{2b^3}{(4+a)^3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(3a+4)b}{4+a} \right) - 3(2+a) \left(\frac{2b^2}{(4+a)^2} - (1+a) \right) x \right. \\
&\quad \left. + 3(a+2)(2a+3) \frac{b}{4+a} x^2 - (a+1)(2a+3)(2+a)x^3 \right], \quad (2.61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_5^{(a,b)} &= \frac{4}{K_5} \left[\left(\frac{4b^4}{(a+5)^4} - \frac{4b^2}{(a+5)^2} (3a+5) + 3(a+2)(a+1) \right) \right. \\
&\quad \left. - 4(2a+5) \left(\frac{2b^3}{(a+5)^3} - (3a+4) \frac{b}{a+5} \right) x \right. \\
&\quad \left. + 6(a+2)(2a+5) \left(\frac{2b^2}{(a+5)^2} - (a+1) \right) x^2 \right. \\
&\quad \left. - 4(2a+3)(a+2)(2a+5) \frac{b}{a+5} x^3 \right. \\
&\quad \left. + (a+1)(2a+3)(a+2)(2a+5)x^4 \right]. \quad (2.62)
\end{aligned}$$

La ortogonalidad de las funciones previas, se obtiene con la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{s(x)} (\omega_n(x))^{1/2} C_n^{(a,b)} (\omega_{n'}(x))^{1/2} C_{n'}^{(a,b)} = \delta_{nn'}, \quad (2.63)$$

mediante la cual se pueden calcular las constantes de renormalización K_n^2 . Para este caso, la ortogonalidad de las soluciones $R_n(z)$ viene dada por

$$\int_0^{\pi} dz R_n(z) (R_{n'}(z))^* = \delta_{nn'}. \quad (2.64)$$

La ecuación (2.63) muestra que estas soluciones tienen propiedades de ortogonalidad bien definidas sobre el eje real, lo cual las convierte en funciones adecuadas para resolver problemas de mecánica cuántica.

Tomando el límite $a \rightarrow 0$ se obtiene el espectro de energías para el potencial $v(r) = -2b \cot r$

$$\epsilon_n = n^2 - \frac{b^2}{n^2}, \quad (2.65)$$

y las funciones de onda son

$$R_1(r) = e^{-br} \sin r C_1^{(0,b)}(\cot r), \quad (2.66)$$

$$R_2(r) = e^{-br/2} \sin^2 r C_2^{(0,b)}(\cot r), \quad (2.67)$$

...

$$R_n(r) = e^{-br_n} \sin^n r C_n^{(0,b)}(\cot r). \quad (2.68)$$

²Un valor para la constante de normalización viene dado en [40], pero solamente es válido para $n = 1$.

En la Figura 2.2 se muestra el cuadrado de la función de onda para los primeros niveles de energía. Dado que el máximo se encuentra muy cercano a uno, se infiere que el diquark se encuentra altamente localizado. En la siguiente sección

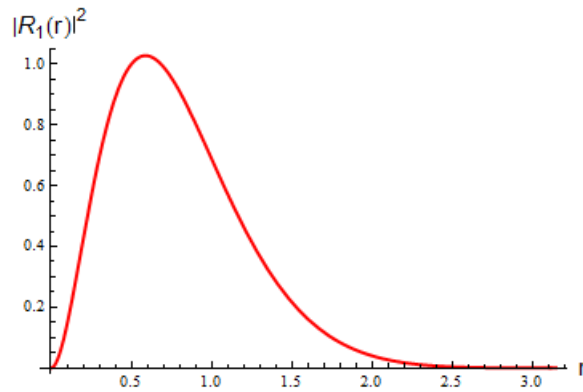
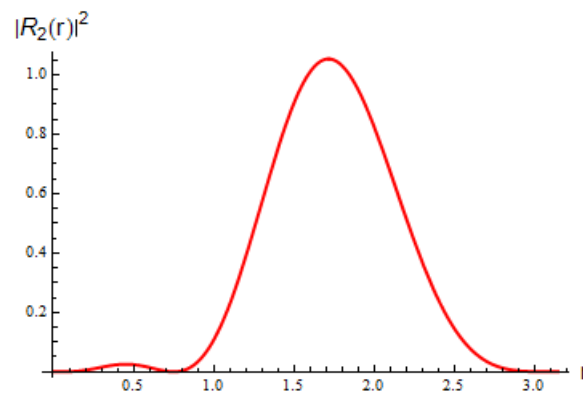
(a) $n = 1$ (b) $n = 2$

Figura 2.2: Cuadrado de la norma de la función de onda para $a = 0$, $b = 1,5$.

se considera el potencial en el espacio de momentos. Esto es el punto de partida para identificar un propagador instantáneo del gluón.

2.4. Propagador Instantáneo

El contenido de esta sección tomado directamente de [12]; solamente se ha detallado el cálculo de la transformada de Fourier del potencial.

Los potenciales en el espacio de los momentos obtenidos mediante una transformación de Fourier de potenciales centrales son de gran interés dentro de una

amplia variedad de problemas físicos, desde materia condensada hasta física de partículas. Pueden verse como propagadores instantáneos de los campos mediadores las respectivas interacciones y son especialmente importantes en los cálculos de algunos cuerpos de Faddeev, que resultan ser más eficientes cuando se realizan en el espacio de momentos. Desafortunadamente, los potenciales de potencias de una amplia variedad de problemas como el oscilador lineal y armónico no tienen una integral de Fourier bien definida [46], siendo el inverso con la distancia la única excepción.

La interacción $\cot + \csc^2$ fue introducida originalmente por Schrödinger en [19] como una función angular en una superficie con constante de curvatura positiva en tres dimensiones. La hipersfera S^3 se localiza dentro de un espacio Euclideo de 4 dimensiones E_4 . Hasta una constante aditiva, toma la forma

$$V_{RM}(\chi) = -2B \cot \chi + \frac{\hbar^2}{2\mu d^2} l(l+1) \csc^2 \chi, \quad (2.69)$$

donde l es el valor del momento angular usual en $3D$, d es una constante a ajustar y χ es el segundo ángulo polar en E_4 . Eligiendo la parametrización $\chi = r/R$ para la variable angular, donde R es el radio fijo de S^3 , mientras r es la longitud del arco en la superficie hipersférica, V_{RM} está usualmente dado en la forma de un potencial en un espacio $3D$ curvo. El espacio Euclideo $3D$ E_3 , embebido en E_4 , está descrito en términos del radio vector en valor absoluto $|r|$, definido como $|r| = R \sin \chi$. Por lo tanto, la parametrización de χ correspondiente al espacio $3D$ correctamente incrustado en E_4 es $\chi = \sin^{-1} |r|/R$. La superficies esférica se parametriza como $x_4^2 + r^2 = R^2$, con $x_4 = R \cos \chi$ y $r = R \sin \chi$.

La naturaleza del espacio, ya sea plano ó curvo, es de menor importancia para el espectro de energías y las funciones de onda; todo se reduce a la interpretación de R . En el espacio plano, R es visto como algún parámetro de longitud a ajustar, mientras que en S^3 se considera como un parámetro que describe la curvatura. Así, sin tomar en cuenta las transformaciones integrales como la transformada de Fourier al espacio de momentos, la naturaleza del espacio adquiere importancia a través de la definición de la integral de volumen. Si se intenta hacer la integral de Fourier de ondas planas en un volumen en el espacio plano E_3 , y se encuentra que el potencial $V_{RM}(\chi = r/R)$ es una función de $\arctan r$, el cual es inconsistente y diverge. Por otro lado, considerando a V_{RM} como una función del radio vector del espacio plano E_3 dentro de E_4 , permite a la integral de Fourier ser tomada de forma cerrada.

Tratar la interacción bajo discusión como una función angular en S^3 es posible debido a su simetría $SO(4)$. La ventaja de tomar este punto de vista viene de que la ecuación de Schrödinger con el potencial $\cot + \csc^2$ está cercanamente relacionado al problema de eigenvalores del momento angular $4D$ en S^3 . La parte angular $\hat{\Pi}$ del operador de Laplace-Beltrami es proporcional al operador de momento angular cuadrático $4D$ \mathcal{K}^2 ,

$$\hat{\Pi} = \left[\frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{L^2(\theta, \psi)}{\sin^2 \chi} \right] = -\kappa \mathcal{K}^2, \quad \kappa = \frac{1}{R^2}. \quad (2.70)$$

Aquí, $L^2(\theta, \psi)$ es el operador de momento angular $3D$ usual en E_3 , χ es el segundo ángulo polar en E_4 ($\chi \in [0, \pi]$), mientras que κ es la constante de curvatura. Como consecuencia, la ecuación de Schrödinger en S^3 es

$$\left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \kappa \mathcal{K}^2 - E(\kappa) \right] \psi(\chi, \kappa) = 0, \quad (2.71)$$

donde μ puede tomarse como la masa reducida del diquark. El problema de eigenvalores de \mathcal{K}^2 es [47]

$$\mathcal{K}^2 |Klm\rangle = K(K+2) |Klm\rangle, \quad |Klm\rangle \in \left(\frac{K}{2}, \frac{K}{2} \right). \quad (2.72)$$

Los niveles $|Klm\rangle$ pertenecen a la representación irreducible $SO(4)$ del tipo $(K/2, K/2)$, mientras que los números cuánticos K , l y m definen los eigenvalores de los operadores de momento angular en 4, 3 y 2 dimensiones, respectivamente. Esos números cuánticos corresponden a la cadena de reducción $SO(4) \supset SO(3) \supset SO(2)$ y satisfacen las reglas; $l = 0, 1, 2, \dots, K$ y $m = -l, \dots, l$. Multiplicando la ecuación (2.71) por $(-\sin^2 \chi)$ y cambiando la variable a $\psi(\chi, \kappa) = \sin \chi S(\chi, \kappa)$, se obtiene la siguiente ecuación de Schrödinger

$$\left[-\kappa \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{d\chi^2} + U_l(\chi, \kappa) \right] S(\chi, \kappa) = E(\kappa) S(\chi, \kappa),$$

$$U_l(\chi, \kappa) = \kappa \frac{\hbar^2}{2\mu} l(l+1) \csc^2 \chi, \quad (2.73)$$

con $U_l(\chi, \kappa)$ interpretado como el término de una barrera centrífuga en S^3 . Una interpretación de las ecuaciones (2.71) y (2.73), es que el potencial \csc^2 ; en representación de la barrera centrífuga en la hiperesfera $3D$, tiene a $SO(4)$ como álgebra potencial. Es importante observar que el álgebra potencial $SO(4)$ permanece inalterada una vez que el término \csc^2 ha sido agregado a la función armónica $\cot \chi$. Esto puede apreciarse del hecho de que la energía continúa siendo una función que depende solo de los eigenvalores de \mathcal{K}^2 , $K(K+2)$, que traslada al número cuántico principal n en $n = K + 1$. En efecto, la simetría $SO(4)$ de la interacción $\cot + \csc^2$ permite considerarla como una función en S^3 , una circunstancia que facilitará sustancialmente su transformación al espacio de momentos. Aquí se adopta la siguiente parametrización del potencial RMT como una función del segundo ángulo polar χ , sobre S^3 y la curvatura:

$$\mathcal{V}(\chi) = -2G\sqrt{\kappa} \cot \chi + \kappa \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{l(l+1)}{\sin^2 \chi}. \quad (2.74)$$

En coordenadas cartesianas, el término \cot es igual a $x_4/|r|$ y describe dos potenciales difiriendo por un signo de S^3 , correspondientes a las interacciones en los hemisferios norte y sur.

La transformada de Fourier al espacio de momentos es

$$4\pi\Pi(|q|) = -2G\sqrt{\kappa}\frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty d|x||x|^3\delta(|x|-R) \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \\ \times \int_{0,\pi/2}^{\pi/2,\pi} d\chi \sin^2\chi e^{i|q|\frac{\sin\chi}{\sqrt{\kappa\hbar^2}}|\cos\theta} \cot\chi, \quad (2.75)$$

donde la función $\delta(|x|-R)$ restringe E_4 a S^3 . Aquí, el plano $4D$ ha sido evaluado tomando el eje z como referencia del vector de momento y el vector de posición de la partícula confinada con una proyección no cero en el eje extra de E_4 :

$$e^{iqx/\hbar} = e^{i|q|\frac{|r|}{\hbar}\cos\theta} = e^{i|q|\frac{\sin\chi}{\hbar\sqrt{\kappa}}\cos\theta}, \quad |r| = \frac{\sin\chi}{\sqrt{\kappa}}. \quad (2.76)$$

En S^3 , uno tiene que distinguir entre dos tipos de potenciales en el espacio de los momentos. El primero, mostrado en la Figura 2.3, corresponde a x_4 positivo que va con $\chi \in [0, \pi/2]$ y describe un $|r|$ que va incrementando. El siguiente paso es obtener una expresión completa para el propagador instantáneo de la ecuación (2.75) en el hemisferio norte. Para ello, nótese directamente que el valor de la integral sobre $|x|$ es R^3 , mientras que el de la integral sobre ψ es 2π . Así, se tiene

$$4\pi\Pi(|q|) = -8\pi G\sqrt{\kappa}\frac{\mu}{\hbar^2} R^3 \int_{-1}^1 \int_0^{\pi/2} du \chi \sin\chi \cos\theta e^{i\frac{qu}{\hbar\sqrt{\kappa}}\sin\chi}, \quad (2.77)$$

donde se hizo el cambio $\cos\theta \rightarrow u$. Considérese la integral sobre χ en la ecuación (2.77). Para ello, se toma $qu/\hbar\sqrt{\kappa} \rightarrow \alpha$. Entonces,

$$\int_0^{\pi/2} d\chi \sin\chi \cos\theta e^{i\alpha\sin\chi} = \left(\frac{1}{i\alpha}\right)^2 \int_0^{i\alpha} dy y e^y \\ = \left(\frac{1}{i\alpha}\right)^2 \left(y e^y \Big|_0^{i\alpha} - e^y \Big|_0^{i\alpha} \right) \\ = \left(\frac{1}{i\alpha}\right)^2 \left(i\alpha e^{i\alpha} - e^{i\alpha} + 1 \right) \\ = \frac{(1-i\alpha)e^{i\alpha} - 1}{\alpha^2}. \quad (2.78)$$

Ahora solo falta hacer la integral sobre u . Antes de calcularla, nótese la expresión que se tiene para el propagador

$$\Pi(|q|) = 2G\sqrt{\kappa}\frac{\mu}{\hbar^2} R^3 \int_{-1}^1 du \frac{\hbar^2\kappa}{q^2u^2} \left[\left(i\frac{qu}{\hbar\sqrt{\kappa}} - 1 \right) e^{i\frac{qu}{\hbar\sqrt{\kappa}}} + 1 \right]. \quad (2.79)$$

Al integrar el término que no está multiplicado por el factor exponencial, se obtiene inmediatamente $-2\hbar^2\kappa/q^2$. Para integrar el término con el factor exponencial, primero se separa en la forma

$$\int_{-1}^1 du \frac{\hbar^2\kappa}{q^2u^2} \left(i\frac{qu}{\hbar\sqrt{\kappa}} - 1 \right) e^{i\frac{qu}{\hbar\sqrt{\kappa}}} = \int_{-1}^1 \left(i\frac{\hbar\sqrt{\kappa}}{qu} e^{i\frac{qu}{\hbar\sqrt{\kappa}}} - \frac{\hbar^2\kappa}{q^2u^2} e^{i\frac{qu}{\hbar\sqrt{\kappa}}} \right). \quad (2.80)$$

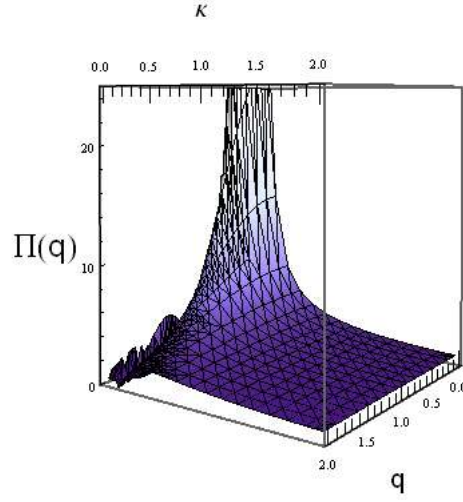


Figura 2.3: Función de revestimiento en el espacio de los momentos sobre el hemisferio norte. El hemisferio sur aparece como un reflejo con respecto al plano horizontal.

Integrando el primer sumando por partes,

$$\int_{-1}^1 \frac{\hbar\sqrt{\kappa}}{qu} e^{i\frac{qu}{\hbar\sqrt{\kappa}}} = \frac{\hbar^2\kappa}{q^2u} e^{i\frac{qu}{\hbar\sqrt{\kappa}}} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{\hbar^2\kappa}{q^2u^2} e^{i\frac{qu}{\hbar\sqrt{\kappa}}}. \quad (2.81)$$

El segundo término de la ecuación (2.80) se cancela con el de la ecuación (2.81). Así, se obtiene que

$$\begin{aligned} \Pi(|q|) &= 2G\sqrt{\kappa} \frac{\mu}{\hbar^2} R^3 \left(\frac{\hbar^2\kappa}{q^2u} e^{i\frac{qu}{\hbar\sqrt{\kappa}}} \Big|_{-1}^1 - \frac{2\hbar^2\kappa}{q^2} \right) \\ &= 2G\sqrt{\kappa} \frac{\mu}{\hbar^2} R^3 \left[\frac{\hbar^2\kappa}{q^2u} \left(e^{i\frac{q}{\hbar\sqrt{\kappa}}} + e^{-i\frac{q}{\hbar\sqrt{\kappa}}} \right) - \frac{2\hbar^2\kappa}{q^2} \right] \\ &= 4G\sqrt{\kappa} \frac{\mu}{\hbar^2} R^3 \frac{\hbar^2\kappa}{q^2} \left(\cos \frac{q}{\hbar\sqrt{\kappa}} - 1 \right) \\ &= 8G\sqrt{\kappa} \frac{\mu}{\hbar^2} R^3 \frac{\hbar^2\kappa}{q^2} \sin^2 \frac{q}{2\hbar\sqrt{\kappa}} \\ &= \frac{2G\mu}{\hbar^2\kappa} \frac{\sin^2 \frac{q}{2\hbar\sqrt{\kappa}}}{\left(\frac{q}{2\hbar\sqrt{\kappa}} \right)^2} \\ &= c \frac{\sin^2 \frac{q}{2\hbar\sqrt{\kappa}}}{\left(\frac{q}{2\hbar\sqrt{\kappa}} \right)^2}, \quad c = \frac{2G\mu}{\hbar^2\kappa}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

La expresión obtenida en la ecuación (2.82) corresponde al propagador conforme del gluón para el modelo quark-diquark. Los valores de los parámetros G , μ y κ utilizados para ajustar el espectro de nucleones y Δ 's son $G = 0,0493 GeV - fm$, $\mu = 0,3213 GeV$ y $\kappa = 1,03826 fm^{-2}$ [18]. En nuestro caso, la forma funcional de este propagador será usado en las ecuaciones de Schwinger-Dyson, que además será comparado con un modelo bien establecido conocido como modelo de Maris-Tandy [29].

En el siguiente capítulo se describen, en términos generales, las predicciones de las ESD para la generación dinámica de masas y confinamiento en la física hadrónica.

Capítulo 3

Generación Dinámica de Masas y Confinamiento

La Generación Dinámica de Masa (GDM) –debida al rompimiento dinámico de la simetría quirál– es un fenómeno no perturbativo que se estudia a través de las Ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD) [48]. Por medio de las ESD, se explica cerca del 99 % de la masa visible en el universo, que se produce debido a fenómenos de auto-interacción en QCD, masa que no se produce mediante el rompimiento espontáneo de la simetría quirál (mecanismo de *Higgs* [49]). Las ESD se obtienen de manera formal en Teoría Cuántica de Campos [50], pero en esta tesis se considera un enfoque más amigable, ya que para nuestro objetivo únicamente se necesita entender el contenido físico de estas ecuaciones.

En este capítulo se estudian la generación dinámica de masas por medio de las ESD y el fenómeno de confinamiento en QCD para el modelo de Maris-Tandy (MT [29]). En primer lugar, se explica la manera en que surgen las ESD, seguido de una breve presentación de los elementos que conforman las funciones de Green que aparecen en las ESD. Posteriormente se presentan las ESD en QCD en la aproximación arcoiris y se resuelven para el modelo MT. Para finalizar, se estudia el confinamiento para dicho modelo.

3.1. Ecuaciones de Schwinger-Dyson

Los propagadores se modifican a través de autointeracciones. Para el caso del quark, al propagador que representa la suma de todas las autointeracciones se le conoce como *propagador completo*, el cual posee todas las propiedades de propagación de dicho fermión. Para el caso en que el propagador no emite ni absorbe fotones se le nombra *propagador desnudo*. Existe una serie infinita de correcciones radiativas al propagador que, mostrado en términos de diagramas,

es ¹

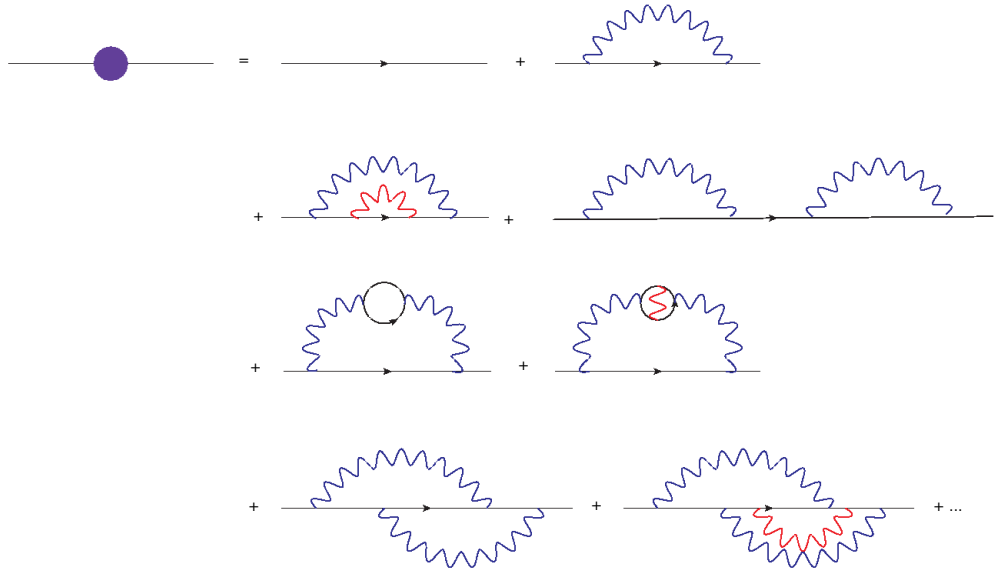


Figura 3.1: Correcciones radiativas al propagador del fermión.

Estas correcciones están clasificadas en tres tipos: la del propagador del fermión, del fotón y del vértice. Tal como aparecen en la Figura 3.1, éstas correcciones no pueden sumarse. Dyson reunió todas esas contribuciones en una sola, a la cual llamó autoenergía [52], que se representa por $\Sigma(p)$ y esquemáticamente por

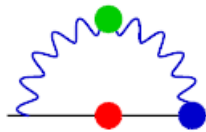


Figura 3.2: Autoenergía $\Sigma(p)$.

La autoenergía involucra todas las correcciones a las funciones de Green involucradas en el propagador, como es indicado por los puntos sobre las partes correspondientes en la Figura 3.2. En términos de $\Sigma(p)$, la expansión perturbativa para el propagador del fermión se muestra en la Figura 3.3.

¹Se ejemplifica como obtener las ESD en la electrodinámica cuántica. Más tarde se dirá como traducir estas ecuaciones para QCD.



Figura 3.3: Propagador del fermión en teoría de perturbaciones en términos de autoenergías.

Así, en términos de la expansión de Dyson, la Figura 3.3 se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 S_F(p) &= S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p) + \dots \\
 &= S_F^0(p)(1 + \Sigma(p)S_F^0(p) + \Sigma(p)S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p)) \\
 &= S_F^0 \left[\frac{1}{1 - \Sigma(p)S_F^0(p)} \right], \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

donde $S_F(p)$ representa al propagador completo y $S_F^{(0)}(p)$ a su contraparte desnuda. Si se factoriza $S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p)$ a partir del segundo término se obtiene

$$\begin{aligned}
 S_F(p) &= S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p)(1 + S_F^0(p)\Sigma(p) + \dots) \\
 &= S_F^0 + S_F^0(p)\Sigma(p) \left\{ S_F^0(p) \left[\frac{1}{1 - \Sigma(p)S_F^0(p)} \right] \right\}. \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

El término entre llaves se identifica nuevamente como el propagador completo $S_F(p)$. Si se sustituye el término del propagador completo dentro de la ecuación (3.2) se obtiene

$$S_F(p) = S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F(p). \tag{3.3}$$

La expresión anterior puede aún manipularse. Por ejemplo, si se multiplica $S_F^{-1}(p)$ por la izquierda, se obtiene

$$I = S_F^0(p)S_F^{-1}(p) + S_F^0(p)\Sigma(p), \tag{3.4}$$

y luego se multiplica $[S_F^0(p)]^{-1}$ por la derecha

$$S_F^0(p) = S_F^{-1}(p) - \Sigma(p). \tag{3.5}$$

Finalmente, los términos se reorganizan como

$$S_F^{-1}(p) = (S_F^0(p))^{-1} - \Sigma(p), \tag{3.6}$$

la cual es la ESD que corresponde a la función de Green de dos puntos del fermión. Esquemáticamente está representada por la Figura 3.4a

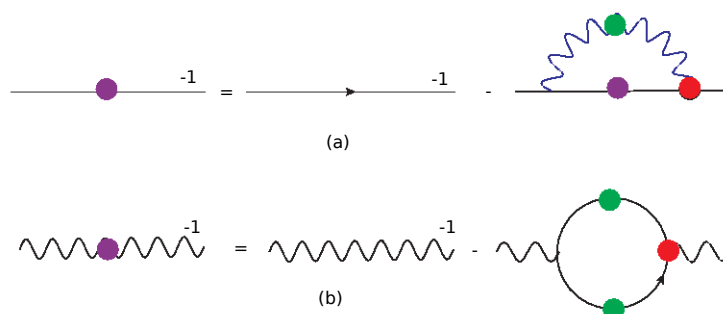


Figura 3.4: (a) ESD para el propagador del fermión. (b) ESD para el propagador del fotón.

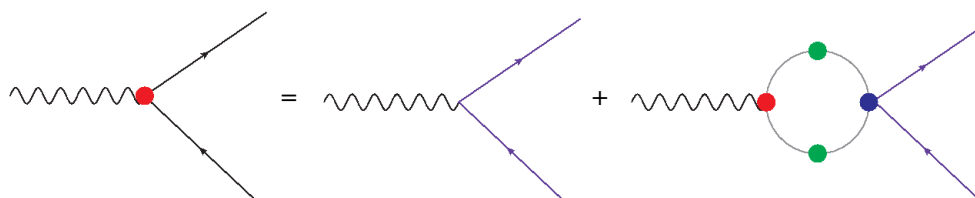


Figura 3.5: ESD para el vértice fermión-fotón.

Cada una de las funciones de Green que aparecen en la autoenergía obedecen su propia ESD. Las correspondientes al propagador del fotón y al vértice se representan en las Figuras 3.4b y 3.5.

Nótese que las funciones de Green de dos puntos están relacionadas con las de tres puntos; la de tres puntos con la de dos y la de cuatro y así sucesivamente, hasta formar una torre infinita de relaciones entre las funciones de Green. Para poder extraer información física relevante de las ESD, se debe truncar esa torre infinita de ecuaciones suponiendo una forma para las funciones de Green de varios puntos. Para tener GDM usualmente se trunca dicha torre de ESD al nivel de propagadores. En QCD es necesario conocer el propagador del quark S_F y el propagador del gluón $D_{\mu\nu}$ en el espacio Euclideo. El propagador completo del quark es

$$S(p) = \frac{F(p^2)}{-i\not{p} + M(p^2)} = \frac{F(p^2)(\not{p} + M(p^2))}{p^2 + M^2(p^2)}, \quad (3.7)$$

donde $\not{p} = \gamma_\mu p_\mu$ (siendo γ_μ las matrices de Dirac [50]). Por otro lado, $F(p^2)$ es un objeto que corrige a la función de onda llamado *renormalización de la función de onda del fermión*. $M(p^2)$ es la función de masa.

Por otro lado, el propagador del gluón en la norma de Landau es

$$D_{\mu\nu}(q) = \mathcal{D}(q^2) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right), \quad (3.8)$$

donde $\mathcal{D}(q^2)$ es un término de interacción efectivo.

En la siguiente sección se estudia la ESD para el propagador del quark. Basta, para ello, reemplazar en los diagramas y expresiones anteriores al propagador del fotón por el del gluón de QCD.

3.1.1. Ecuación de GAP en QCD

A continuación, se procede a estudiar la ecuación de gap³. De acuerdo al esquema estándar, el punto de partida consiste en expresar al propagador completo del quark en la forma general [53] en el espacio Euclideo

$$S^{-1}(p) = Z_2(i\not{p} + m_b) + Z_1\Sigma(p), \quad (3.9)$$

donde la autoenergía del quark es

$$\Sigma(p) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(k-p) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(k) \Gamma_\nu^a(k, p). \quad (3.10)$$

La ecuación de gap de QCD se muestra esquemáticamente en la Figura 3.6. Aquí, $q = k - p$, λ^a representa las matrices de Gell-Mann (ecuación (A.7)),

²Se está trabajando en un espacio Euclideo, donde las matrices de Dirac satisfacen $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$.

³A las ESD para el propagador del fermión también se le conoce como ecuación de gap o “brecha”.

m_b destaca como la masa de corriente de los quarks, g es la constante de acoplamiento del gluón, $D_{\mu\nu}(q)$ es el propagador del gluón y $\Gamma_\nu^a(k, p)$ es el vértice completo quark-gluón. Además, Z_1 y Z_2 son, respectivamente, las constantes de renormalización de la función de onda del vértice y el quark. En esta sección se exponen los resultados con la ecuación sin renormalizar. El tratamiento propiamente renormalizado es un trabajo en progreso y será presentado en [51]. El punto de partida es hacer un modelo para el producto $g^2 D_{\mu\nu}(k-p)\Gamma_\nu^a(k, p)$.



Figura 3.6: Ecuación de GAP en QCD.

Se va a tomar el caso en que

$$g^2 D_{\mu\nu}(q)\Gamma_\nu^a(k, p) = g^2 \frac{\lambda^a}{2} \mathcal{D}(q)\gamma_\nu \Delta_{\mu\nu} = \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu \mathcal{D}(q^2) \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right]. \quad (3.11)$$

Ahora, al sustituir el valor del vértice de la ecuación (3.11) en la ecuación (3.10) se tiene

$$S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) - \int d^4k \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(k) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu \mathcal{D}(q^2) \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right]. \quad (3.12)$$

El método usual para resolver la ecuación de gap en QCD consiste en separar la ecuación (3.12) en dos funciones para $M(p)$ y $F(p)$. Primero, se escribe la expresión completa para el propagador

$$\frac{\not{p} + M(p)}{F(p)} = \not{p} - m_b - \int d^4k \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \frac{F(k)}{k^2 + M^2(k^2)} \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu \mathcal{D}(q^2) \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right]. \quad (3.13)$$

Para encontrar la función de masa $M(p)$ se calcula la traza en la ecuación (3.13), entonces

$$4 \frac{M(p)}{F(p)} = 4m_b + \sum_a \frac{\lambda^a \lambda^a}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{G(q^2)}{q^2} \frac{F(k)}{k^2 + M^2(k^2)} \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k} + M(k)) \gamma_\nu] \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right]. \quad (3.14)$$

Usando el hecho de que $\sum_a \lambda^a \lambda^a = (16/3)\mathbb{I}$ y que la traza de productos de matrices γ tiene las propiedades

$$\begin{cases} \text{Tr}[\#\text{impar de } \gamma's] = 0, \\ \text{Tr}[\gamma_\alpha \gamma_\beta] = d\delta_{\alpha\beta}, \\ \text{Tr}[\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu] = d[\delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} - \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}], \end{cases} \quad (3.15)$$

se cumple

$$\sum_a \frac{\lambda^a \lambda^a}{4} \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k} + M(k)) \gamma_\nu] = \frac{16}{3} M(k) \delta_{\mu\nu}. \quad (3.16)$$

Contrayendo los índices

$$\delta_{\mu\nu} \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] = 3. \quad (3.17)$$

Finalmente, la expresión para la función de masa

$$\frac{M(p)}{F(p)} = m_b + \frac{4}{3} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M(k)F(k)}{k^2 + M^2(k^2)} \mathcal{D}(q^2). \quad (3.18)$$

Para integrar expresiones en cuatro dimensiones se usan coordenadas hipersféricas

$$\begin{aligned} d^4 k &= k^3 \sin^2 \theta \sin \phi dk d\theta d\phi d\psi \\ q^2 &= (k-p)^2 = k^2 + p^2 - 2kp \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde θ el ángulo entre los momentos de los fermiones. Además

$$\psi \in [0, 2\pi], \quad \phi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, \pi], \quad k^2 \in (0, \Lambda^2), \quad (3.20)$$

ya que se ha introducido una regularización de las integrales a la escala Λ . Integrando sobre las coordenadas angulares independientes

$$\frac{M(p^2)}{F(p^2)} = m_b + \frac{1}{2\pi^3} \int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{k^2 M(k^2) F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \mathcal{D}(q^2), \quad (3.21)$$

que es la ecuación para la función de masa.

Para calcular la ecuación para la función de renormalización de la función de onda, la expresión dada por la ecuación (3.13) es multiplicada por \not{p} previo al cálculo de la traza, obteniendo así

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(p^2)} &= 1 - \frac{1}{6\pi^3 p^2} \int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{k^2 F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \mathcal{D}(q^2) \times \\ &\times \left(\frac{2(k^2 - k \cdot p)(k \cdot p - p^2)}{q^2} - k \cdot p \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Nuestro primer objetivo será resolver las ecuaciones (3.21) y (3.22) el modelo de Maris-Tandy.

3.1.2. Otros Observables

Algunos observables relevantes de los hadrones pueden obtenerse también directamente del propagador del quark. Por ejemplo, el condensado quiral del vacío, el cual se forma por las autointeracciones de las partículas y que por lo tanto, proporciona un medio pegajoso en el cual los quarks de valencia se propagan y adquieren masa calcula como

$$-\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} N_C \text{Tr}_D \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S(k), \quad (3.23)$$

donde $N_C = 3$, además de que se calcula en el límite quiral $m_b = 0$. Un segundo ejemplo es la constante de decaimiento del pión, que puede calcularse a través de la ecuación de Pagel-Stokar [58].

$$f_\pi^2 = -\frac{N_C}{4\pi^2} \int^\Lambda dk^2 \frac{k^2 F(k^2)}{(k^2 + M(k^2))^2} \left[M^2(k^2) - \frac{k^2}{2} M(k^2) \frac{dM(k^2)}{dk^2} \right]. \quad (3.24)$$

3.1.3. Confinamiento en las Ecuaciones de Schwinger-Dyson

El fenómeno de confinamiento no se puede entender a partir de primeros principios, debido a la imposibilidad de detectar estados de color, por lo que solamente existe evidencia experimental de ello. Sin embargo, el confinamiento del quark se encuentra decodificado en su propagador. Se puede observar a través de la violación del axioma de reflexión de positividad de Osterwalder-Schrader [54]. El propagador del quark puede escribirse en el espacio Euclideo como

$$S(p) = -i\not{p}\sigma_\nu(p^2) + \sigma_s(p^2), \quad (3.25)$$

donde las partes vectorial y escalar del propagador, $\sigma_\nu(p^2)$ y $\sigma_s(p^2)$, están expresados en términos de la función de renormalización $F(p^2)$ y la función de masa $M(p^2)$ como

$$\sigma_\nu(p^2) = \frac{F(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)}, \quad (3.26)$$

$$\sigma_s(p^2) = \frac{F(p^2)M(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)}. \quad (3.27)$$

Se define el promedio espacial de la parte escalar del propagador [56, 57]

$$\Delta(t) = \int d^3x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \sigma_s(p^2). \quad (3.28)$$

Si esta función de Schwinger es positiva definida, entonces describe una excitación estable. Por ejemplo, para una partícula libre, $\Delta(t) = e^{-mt}/2$, donde m es la masa de la partícula. En caso contrario, describe una partícula confinada [54]. Un ejemplo típico es cuando la masa de la partícula desarrolla una parte imaginaria, $m = a + ib$, de modo que $\Delta(t) = e^{-at} \cos(bt + \delta)$. Si la partícula es compuesta, b puede entenderse como un ancho de decaimiento, pero si se está refiriendo a partículas fundamentales, entonces $b \neq 0$ indica que la partícula está confinada.

Ahora ya se tienen las herramientas para calcular diferentes observables y la tarea se reduce a proponer distintos modelos que se predigan o se ajusten a resultados experimentales.

3.2. Modelo de Maris-Tandy para QCD

Con los elementos vistos en la sección anterior, ahora todo el trabajo se reduce a calcular los observables mencionados para diferentes modelos. Para

esta sección, se pondrá a prueba el bien conocido modelo de Maris-Tandy [29]. Este modelo ha sido usado extensivamente en los estudios de fenomenología de hadrones que involucran a las ESD. La función de revestimiento de este modelo es

$$\mathcal{D}(q) = \frac{4\pi^2 D q^2}{\omega} e^{-q^2/\omega^2} + \frac{8\pi^2 \gamma_m Z(q^2)}{\ln[\tau + (1 + q^2/\Lambda_{\text{QCD}})^2]}, \quad (3.29)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \frac{12}{32 - 2N_F}, & m_z &= 0.5 \text{ GeV}, & N_F &= 4, \\ \tau &= e^2 - 1, & \Lambda_{\text{QCD}} &= 0.254 \text{ GeV}, & \omega &= 0.4 \text{ GeV}, \\ D &= 0.93 \text{ GeV}^2, & Z(s) &= (1 - e^{-\frac{s}{4m_z^2}})/s. \end{aligned}$$

En la Figura 3.29 se muestra la solución de la función de masa en el límite quiral $m_b = 0$. Se puede notar un crecimiento de la función de masa en la región infrarroja, que muestra el rompimiento dinámico de la simetría quiral. Se encuentra que la masa generada dinámicamente aparece dentro del rango de 300-500 MeV, como es esperado de la fenomenología de quarks ligeros. Nótese también que los efectos no perturbativos dominan en la región $0 < p^2 < 1 \text{ GeV}^2$. A altas energías, la función de masa cae suavemente hacia la masa asintóticamente corriente de los quarks libres, que es una predicción bien conocida desde hace años en los estudios de las ESD.

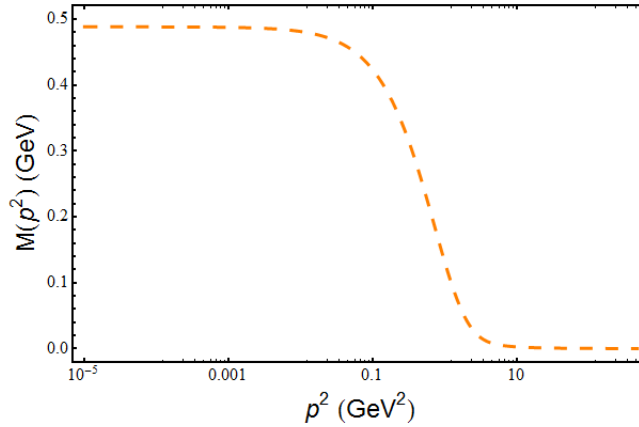


Figura 3.7: Función de masa del modelo MT para el límite quiral.

La función de renormalización de la función de onda se muestra en la Figura 3.8. En el siguiente sección se menciona su comportamiento dado que se compara con la función de renormalización de otros modelos. Los valores obtenidos para el condensado y f_π son

$$-\langle \bar{\psi}\psi \rangle^{\frac{1}{3}} = 0.383316 (\text{GeV})^{\frac{1}{3}}, \quad f_\pi = 0.0842529 \text{ GeV}. \quad (3.30)$$

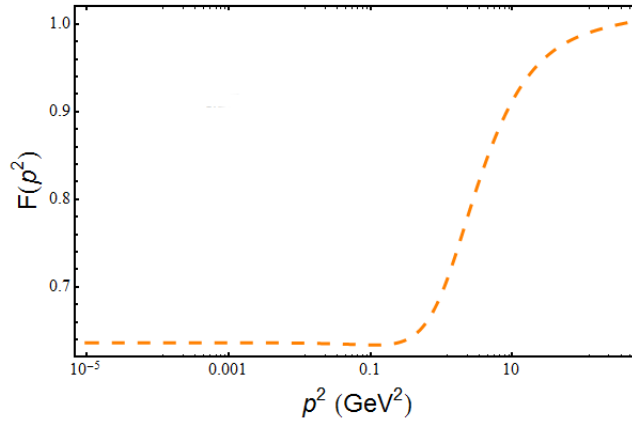


Figura 3.8: Función de renormalización para el modelo MT.

En la Figura 3.9 se muestra que nuestro modelo es confinante; el mínimo indica que la función $\Delta(t)$ pasa por cero, esto indica que hay un cambio signo y por tanto, no es positiva definida. El inverso de la posición donde se localiza el pico ayuda a dar un parámetro de orden para el confinamiento; para este modelo corresponde a una escala de unos cuantos MeV. En el siguiente capítulo se propone

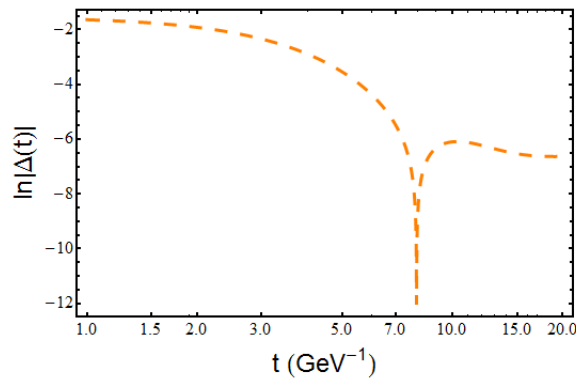


Figura 3.9: Test de confinamiento para el Modelo MT.

un término de interacción efectivo basados en el propagador vestido del gluón con una ventana conforme. Nuestra meta es reproducir lo más cercanamente posible el escenario descrito en este capítulo.

Capítulo 4

Modelo Para el Propagador Vestido del Gluón

Con los resultados de los capítulos previos, ahora se puede hacer un estudio del propagador instantáneo del gluón obtenido en el Capítulo 2. El modelo que será usado tratará de reproducir la altura de la función de masa y además se dará una prueba de confinamiento como en el Capítulo 3 para el modelo MT. Por otro lado, tres propagadores “hermanos” al presentado en el Capítulo 2 son presentados y comparados con el modelo MT.

Motivados por la forma del propagador instantáneo del gluón (ecuación (2.82)), se promueve la siguiente forma efectiva para la función de vestimiento del gluón,

$$\mathcal{D}(q^2) = c \frac{\sin^2 \frac{q}{2\hbar\sqrt{\kappa}}}{\left(\frac{q}{2\hbar\sqrt{\kappa}}\right)^2}, \quad (4.1)$$

más allá de la aproximación instantánea, ajustando el valor de c –que determina la intensidad de la interacción– con el fin de obtener una altura de la función de masa lo más cercana posible a la encontrada en el modelo de Maris-Tandy. Además, se incluyen tres variantes para el revestimiento efectivo del gluón. Los modelos son

$$\text{Modelo I : Struve : } \mathcal{D}(q^2) = c \frac{H_1(q)}{q^2}, \quad (4.2)$$

$$\text{Modelo II : Sinc : } \mathcal{D}(q^2) = c \frac{\sin(q)^2}{q^2}, \quad (4.3)$$

$$\text{Modelo III : StruveLineal : } \mathcal{D}(q^2) = c \frac{2/\pi}{q^2 + 3}, \quad (4.4)$$

$$\text{Modelo IV : RGZ : } \mathcal{D}(q^2) = c \frac{q^2 + m^2}{q^4 + q^2 m^2 + m^4}, \quad (4.5)$$

donde $H_1(x)$ es la función de Struve. El Modelo II consite en una adaptación

a la forma funcional de la función de revestimiento mostrada en la ecuación (4.1); los cambios han sido absorbidos por la constante c . El Modelo III es una linearización de la función $H_1(x)/x^2$ y el Modelo IV corresponde al propagador que captura la generación dinámica de masas para gluones en el escenario de confinamiento de Gribov-Zwanzinger refinado [59, 60], con $m_b = 2.167\text{GeV}$ (ecuación (4.6)).

$$\mathcal{D}(q^2) = \frac{q^2 + m_b^2}{q^4 + m_b q^2 + m_b^4}. \quad (4.6)$$

Las funciones de revestimiento se pueden ver en la Figura 4.1 con los valores c mostrados en el Cuadro 4.1 que arrojan una masa dinámica para los quarks de alrededor de 500MeV . De esa figura, se observa que el revestimiento instantáneo es finito en el infrarrojo y cae de manera oscilatoria en la forma $1/x^2$ para los Modelos I y II. Esas oscilaciones son el remanente de desdoblar un volumen finito sobre uno infinito. Además, se espera que estos modelos sean válidos a una escala de $p^2 \leq 1\text{GeV}^2$ [55]. Las ecuaciones (3.21) y (3.22) han sido resueltas usando el

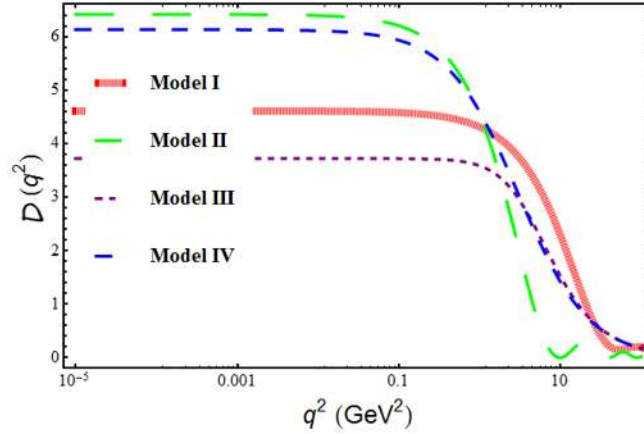


Figura 4.1: Revestimiento efectivo del gluon para los modelos (4.3-4.5).

código del Apéndice B, sustituyendo las funciones de revestimiento (4.2-4.5). En la Figura 4.2 se muestra la función de masa de los cuatro modelos junto con el valor de la función de masa del modelo de MT. En dicha figura se puede apreciar que los cinco modelos describen una masa dinámica de los quarks dentro de los rangos fenomenológicos aceptados. La función de masa perteneciente al modelo MT cae a cero de la forma dictada por Teoría de Perturbaciones antes que los otros modelos, que van a cero de manera muy similar. Esto se traduce en un valor mayor del condensado quiral como se muestra en el Cuadro 4.1.

Para la función de renormalización de la función de onda, se obtienen resultados distintos para cada modelo, tal como puede verse en la Figura 4.3. La función de renormalización para los modelos RGZ y Struve Lineal son muy similares en el infrarrojo, comenzando como una constante mayor que la uni-

Modelo	c	$M(0)(GeV)$	$-\langle\bar{\psi}\psi\rangle^{\frac{1}{3}}(GeV)^{\frac{1}{3}}$	$f_{\pi}(GeV)$
MT	1	0.49	0.383316	0.0842529
<i>Sinc</i>	29.97	0.5	0.550076	0.163578
<i>Struve</i>	21.72	0.5	0.628169	0.2173
<i>Struve Lineal</i>	28.88	0.5	0.648868	0.226299
<i>RGZ</i>	17.5	0.5	0.65344	0.231806

Cuadro 4.1: Valor de los observables para los diferentes modelos al ajustar a la altura de la función de masa de MT.

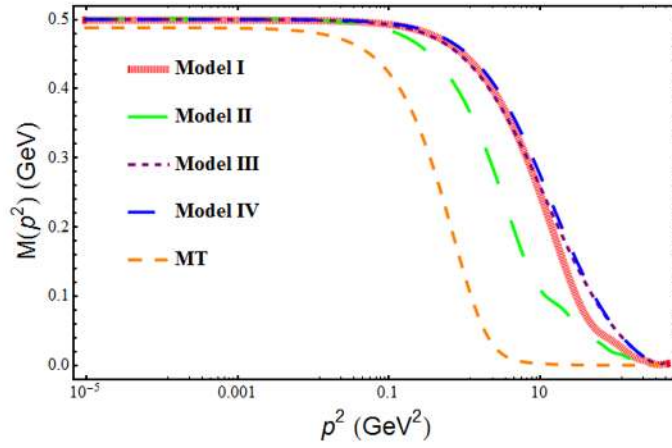


Figura 4.2: Función de masa para diferentes modelos.

dad y disminuyendo suavemente hasta el límite ultravioleta. Mientras que, por otro lado, los modelos Struve y Sinc tiene un comportamiento bastante diferente a momentum pequeño; especialmente el Sinc, que muestra oscilaciones a momentum intermedio. Algo a notar es que ninguna se asemeja a la función de renormalización del modelo MT, que es una constante menor que 1 en el límite infrarojo, pero converge a 1 conforme p crece. Esto indica que la renormalización de la función de onda que se obtiene en nuestros modelos no será necesariamente igual a la del modelo MT, excepto el límite ultravioleta, donde todos los modelos convergen al mismo valor $F(p^2) = 1$, como se espera en el límite perturbativo.

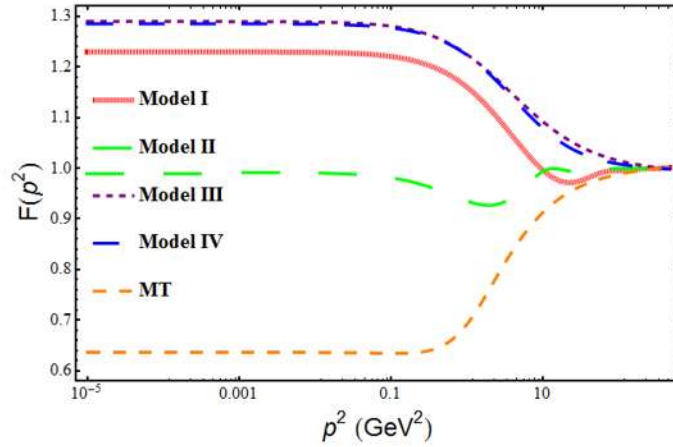


Figura 4.3: Renormalización de la función de masa para diferentes modelos al ajustar a la altura de la función de masa de MT.

La diferencia cualitativa de la solución a la ecuación de gap con el propagador gluónico en estudio se refleja en que no solo el condensado quiral, sino también la constante de decaimiento leptónico del pión se sobreestiman, como se muestra en la última columna del Cuadro 4.1. A grosso modo, $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ y f_π para nuestros modelos son al menos el doble que en el modelo MT. Por otro lado, en la Figura 4.4 se muestra la prueba de confinamiento hecha sobre los propagadores obtenidos dinámicamente con los distintos modelos. En esta ocasión, se nota que el modelo MT tiene una escala de confinamiento menor a la de los modelos propuestos.

Debido a que en los observables hadrónicos no es la masa constituyente de los quarks, sino el condensado quiral lo que se determina experimentalmente, ahora se procede a ajustar la constante c para obtener un condensado quiral similar al del modelo MT. Los resultados obtenidos se muestran en las Figuras (4.5)-(4.8) y en el Cuadro 4.2.

En la Figura 4.5 se nota que cada modelo debe pesarse de forma distinta para obtener valores similares del condensado quiral. La masa gluónica más grande se obtiene con el Modelo IV. En la Figura 4.6 puede apreciar una dramática

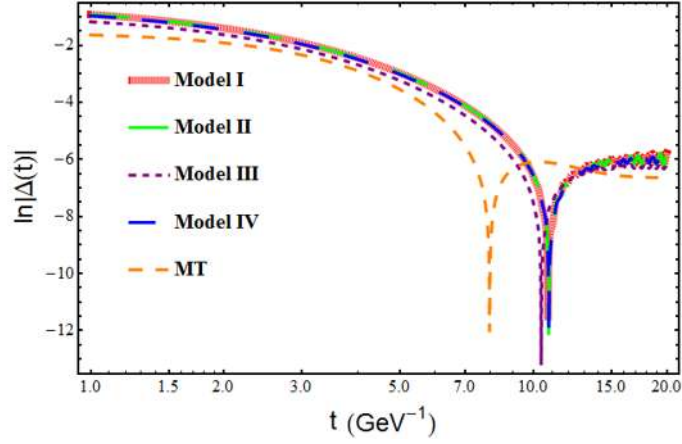


Figura 4.4: Test de confinamiento para los diferentes modelos al ajustar a la altura de la función de masa de MT.

Modelo	c	$M(0)(GeV)$	$-\langle\bar{\psi}\psi\rangle^{\frac{1}{3}}(GeV)^{\frac{1}{3}}$	$f_{\pi}(GeV)$
MT	1	0.49	0.383316	0.0842529
<i>Sinc</i>	25.4	0.0916076	0.39574	0.049967
<i>Struve</i>	20.23	0.0835128	0.435361	0.0578297
<i>Struve Linear</i>	27.5	0.0605863	0.410522	0.0451153
<i>RGZ</i>	16.66	0.0530895	0.400321	0.0412857

Cuadro 4.2: Resultados cuando se ajusta al condensado del modelo MT

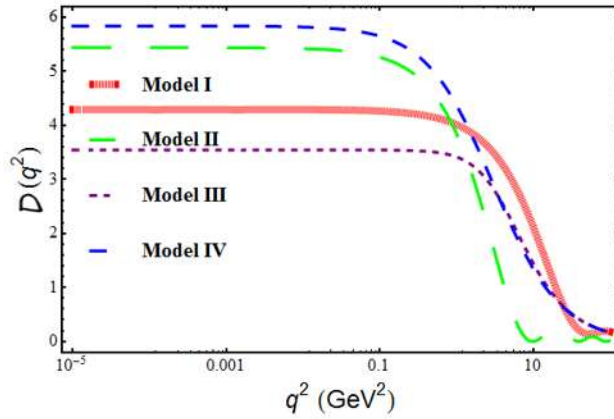


Figura 4.5: Revestimiento efectivo del gluon ajustando al condensado de MT.

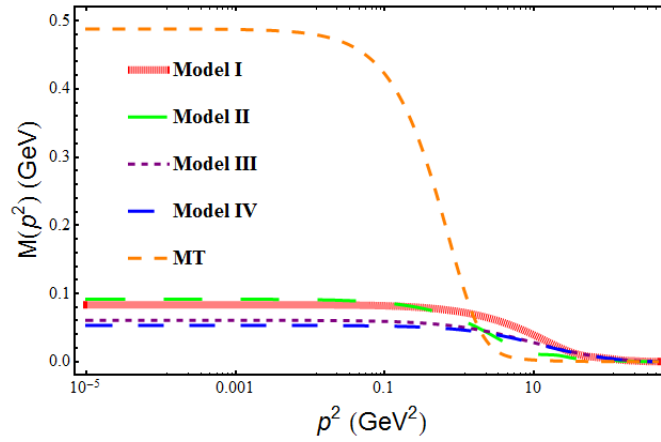


Figura 4.6: Función de masa para diferentes modelos ajustando al condensado de MT.

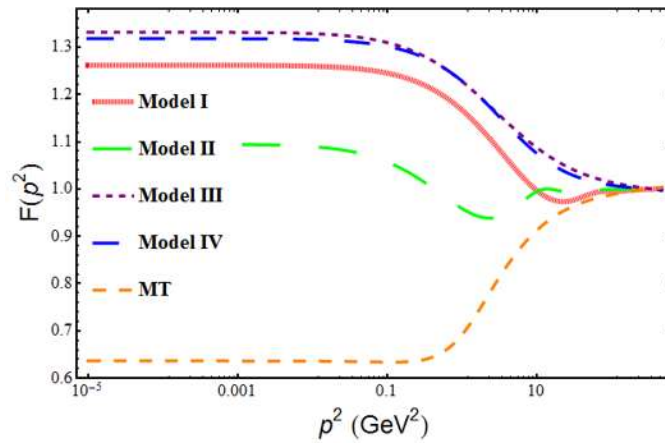


Figura 4.7: Renormalización de la función de masa para diferentes modelos ajustando al condensado de MT.

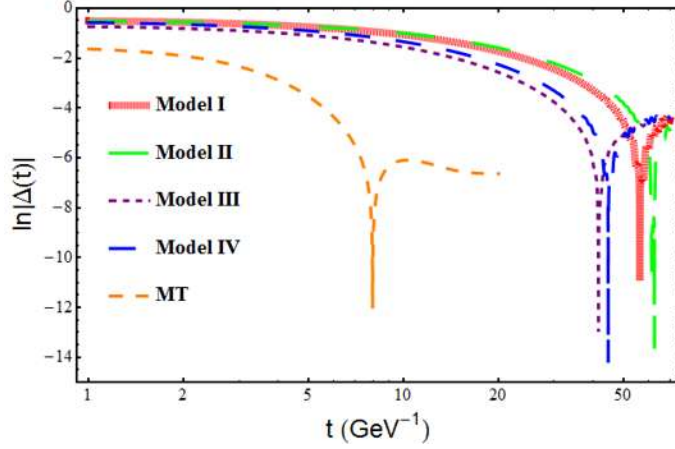


Figura 4.8: Test de confinamiento para los diferentes modelos ajustando al condensado de MT.

caída en la función de masa (menor de 0.1GeV para todos los modelos) y un incremento bastante considerable en la escala de confinamiento (Figura 4.8). Por otro lado, la constante de decaimiento del pión decrece aproximadamente a la mitad del valor obtenido en el modelo MT (Cuadro 4.2).

Con el fin de tener una mejor aproximación en el infrarojo, se propone una constante de acoplamiento que dependa del momento. Se va a tomar un caso en que la constante c dependa del momento en la forma [61]

$$c(q^2) = C \left(\frac{a_0 + a_1 q^2}{1 + a_2 q^2 + a_3 q^4 + a_4 q^6} + \frac{\pi \gamma_m}{\ln(e + q^2)} \right), \quad (4.7)$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= 1.47 & a_1 &= 0.881 & a_2 &= 0.314 \\ a_3 &= 0.00986 & a_4 &= 0.00168, \end{aligned} \quad (4.8)$$

la constante C se ajusta para obtener la altura de la función de masa igual que en el modelo de MT.

Los resultados obtenidos se muestran en las Figuras 4.9-4.12.

Se puede apreciar que en la función de masa (Figura 4.10) la caída de todos los modelos se ha suavizado –especialmente en el Modelo II donde las oscilaciones han desaparecido– y ocurre un poco antes que la mostrada en la Figura 4.2. Por otro lado, la función de renormalización ha cambiado de manera bastante notable para los Modelos I, III y IV y solamente tiene un ligero cambio en el modelo II –las oscilaciones vuelven a desaparecer–.

Finalmente, en la prueba de confinamiento (Figura 4.12) no se nota cambio significativo, pero se puede ver un ligero desplazamiento hacia la izquierda al

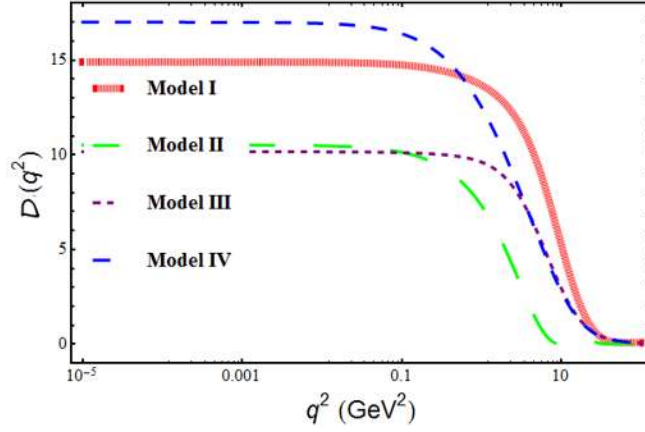


Figura 4.9: Revestimiento efectivo del gluon para los modelos (4.3-4.5) con $c = c(q)$ y ajustando la altura de la función de masa a la de MT.

Modelo	C	$M(0)(GeV)$	$-\langle\bar{\psi}\psi\rangle^{\frac{1}{3}}(GeV)^{\frac{1}{3}}$	$f_{\pi}(GeV)$
MT	1	0.49	0.383316	0.0842529
<i>Sinc</i>	16.5	0.5	0.495219	0.138744
<i>Struve</i>	23.58	0.5	0.565258	0.184668
<i>Struve Lineal</i>	26.9	0.5	0.562951	0.177719
<i>RGZ</i>	16.05	0.5	0.571528	0.183999

Cuadro 4.3: Resultados obtenidos al proponer una constante que depende del momento

comparar directamente el confinamiento para un modelos, dicha comparación se muestra en la Figura 4.13 para el Modelo II. El Cuadro 4.3 muestra que los valores observables obtenidos son más cercanos a aquellos obtenidos con el Modelo MT que los mostrados en el Cuadro 4.1. Con esto se concluye la presentación de nuestro trabajo.

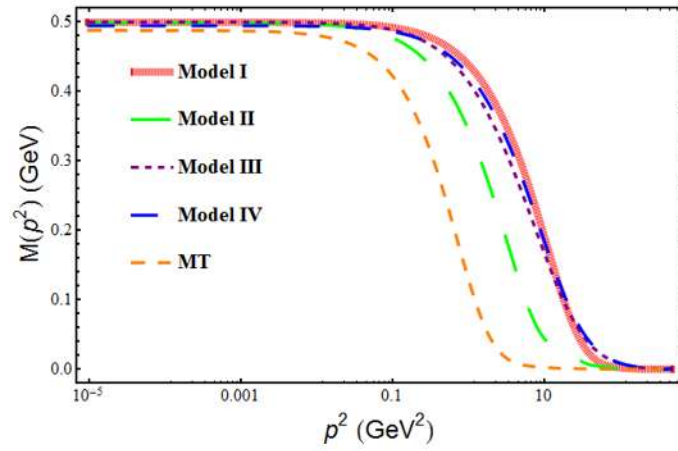


Figura 4.10: Función de masa para diferentes modelos con $c = c(q^2)$.

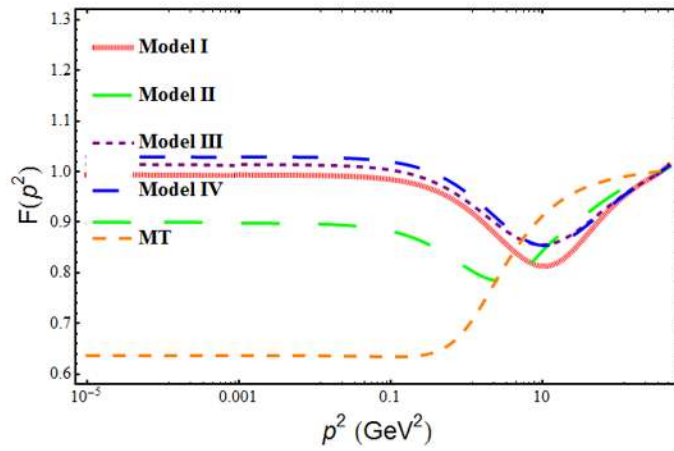


Figura 4.11: Renormalización de la función de masa para diferentes modelos con $c = c(q^2)$.

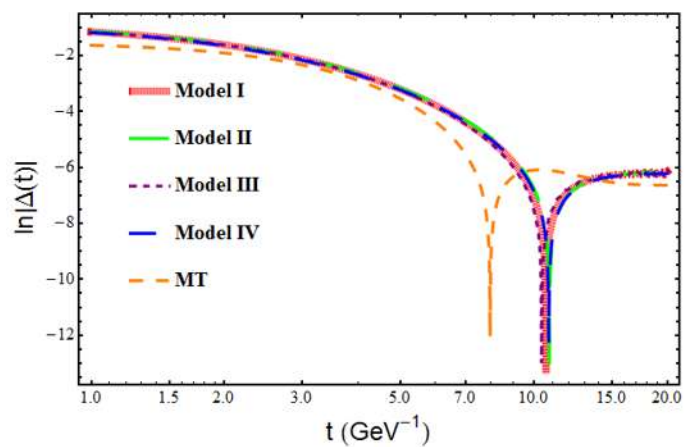


Figura 4.12: Test de confinamiento para los diferentes modelos con $c = c(q^2)$.

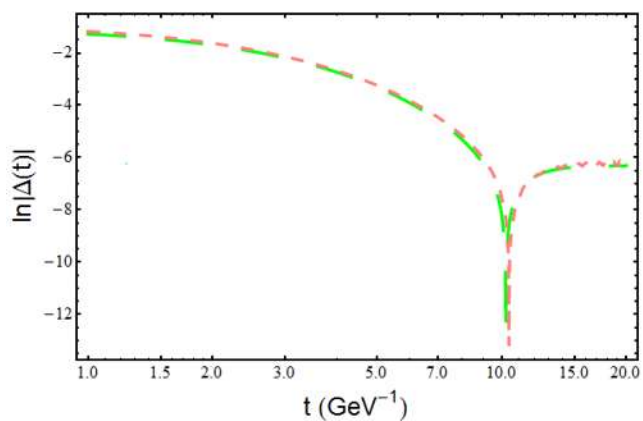


Figura 4.13: Test de confinamiento para los diferentes modelos. La línea verde representa al modelo con $c = c(q^2)$.

Capítulo 5

Conclusiones y Consideraciones Finales

En esta tesis, se han explorado dos diferentes caras del confinamiento: el primero en el sentido de una dinámica espacial efectiva para quarks y gluones sobre un volumen finito delimitado por el potencial $-cot$; del cual se han obtenido las primeras soluciones tomando $l = 0$. La otra cara es dentro de la descripción teórica del confinamiento de quarks a través de las ESD. En cualquier sistema dado, las restricciones espaciales siempre son consideradas en teorías clásicas sin preocuparse mucho sobre la naturaleza de tales restricciones. Por otro lado, de QCD se sabe que no hay estados de color libres, hecho confirmado por experimentos. Sin embargo, la dinámica espacial de quarks y gluones es un problema abierto. El potencial de Cornell puede considerarse como una primera aproximación al potencial $-cot$. La transformada de Fourier al espacio de momentos puede verse como la función de revestimiento instantánea del gluón y toma la forma vista en la ecuación (4.1).

Se ha adoptado tal función de revestimiento en una forma efectiva para incluir confinamiento espacial en nuestro modelo, y entonces, se estudia el RDSQ y confinamiento por medio de las ESD para el propagador del quark. Se observa un crecimiento dinámico de la función de masa $M(p^2)$ en la región infrarroja dirigida por el propagador efectivo del gluón, que también provee la caída $1/p^2$ esperada en el dominio perturbativo. Los efectos de desdoblar un volumen finito dentro de un espacio infinito no modifica la forma asintótica de $M(p^2)$ como se ve en la Figura 4.2. El propagador viola el axioma de reflexión de positividad, como se observa en su promedio espacial (Figura 4.4), indicando que la función de revestimiento efectivo es responsable para el confinamiento de quarks. Este es el resultado principal que presenta esta tesis.

Por otro lado, cuando se trato de ajustar a la altura de la función de masa del modelo MT se obtuvo un valor del condensado más grande y una constante de decaimiento del pión un poco más del doble (Cuadro 4.1), además de que da una escala de confinamiento relativamente mayor (Figura 4.4). Dado que,

experimentalmente, es el condensado quiral y no la masa constituyente de los quarks lo que afecta a las observables hadrónicas, cuando se trató de ajustar el condensado (Cuadro 4.2), la función de masa cae dramáticamente (Figura 4.6), la escala de confinamiento crece demasiado pero el valor de la constante del decaimiento del pión se vuelve aproximadamente la mitad a la del modelo MT. La lección fundamental de este ejercicio es que las predicciones del modelo solo deben considerarse dentro de su rango de validez. Dado que los modelos potenciales discutidos en este trabajo son válidos a escalas menores que 1GeV , un acoplamiento que capture de manera adecuada los efectos infrarrojos del modelo y su transición al dominio de libertad asintótica es deseable para extender el poder predictivo de estos modelos. Los resultados obtenidos en esta tesis posteriormente serán mostrados en un artículo que se encuentra en preparación.

La motivación para trabajos futuros consiste en una refinación de la función de revestimiento dada por la ecuación (4.1). Un primer intento se dió al agregar una constante de acoplamiento con dependencia del momento dada por la ecuación (4.7). Aunque la mejora en los resultados no es significativamente importante, al menos indica que los modelos efectivos del gluón propuestos pueden mejorarse y además seguir mostrando confinamiento (Figura 4.12). Además, se debe renormalizar apropiadamente las ecuaciones dinámicas para ajustar apropiadamente los parámetros del modelo en el contexto de las ecuaciones de Schwinger-Dyson. Como idea principal se tiene el resolver las ecuaciones (3.21) y (3.22) a temperatura finita.

Apéndice A

Lagrangiano de QCD

La densidad Lagrangiana completa para QCD (Cromodinámica Cuántica, más general para fermiones interactuando dentro del esquema de un grupo no Abeliano, QCD corresponde cuando el grupo es $G = SU(3)$), está dado por

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + i\bar{\psi}_k \gamma^\mu (D_\mu \psi)_k - m\bar{\psi}_k \psi_k, \quad (\text{A.1})$$

donde se puede poner $m = 0$ si los fermiones (quarks) son considerados sin masa. Los elementos que conforman a la ecuación (A.1) son el tensor de fuerza fuerte $F_{\mu\nu}^a$ dado por

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c = -F_{\nu\mu}^a, \quad (\text{A.2})$$

donde A_μ es el campo de norma, f^{abc} son constantes reales completamente anti-simétricas identificadas como las constantes de estructura del grupo de simetría; D_μ es la derivada covariante que actúa sobre la función de onda como

$$D_\mu \psi_k = \partial_\mu \psi_k + igT_{kl}^a A_\mu^a \psi_l = (\partial_\mu \delta_{kl} + igT_{kl}^a A_\mu^a) \psi_l. \quad (\text{A.3})$$

Aquí, los T^a 's representan los generadores del grupo de simetría interno G y se asumen Hermitianos. Los generadores satisfacen el álgebra de Lie del grupo de Lie G que tiene la forma

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c, \quad (\text{A.4})$$

y la identidad de Jacobi asociada con esta álgebra es

$$[[T^a, T^b], T^c] + [[T^c, T^a], T^b] + [[T^b, T^c], T^a] = 0. \quad (\text{A.5})$$

De acuerdo al modelo de quarks, cada sabor de quark viene en tres colores – verde, azul y rojo. Por está razón los operadores Hermitianos son matrices 3×3 , las cuales pueden escribirse en términos de 9 números reales a_1, a_2, \dots, a_8 y θ

$$H = \theta 1 + \vec{\lambda} \cdot \vec{a}, \quad (\text{A.6})$$

donde 1 es la matriz unitaria 3×3 , θ representa un factor de fase y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8$ son las matrices de Gell-Mann denotadas por

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & (A.7) \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y el producto punto denota la suma de 1 a 8

$$\vec{\lambda} \cdot \vec{a} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_8 a_8. \quad (A.8)$$

Apéndice B

Programa usado para resolver las ESD

Para resolver numéricamente las ecuaciones (3.21) y (3.22) se ha usado el siguiente código en *Mathematica 7.0* es

```
m = 30;
pmin = 10^-5;
pmax = 500;
lambda = Log[10]/m;
bb = 0;
cc = \[Pi];
y = pmin;
nr = IntegerPart[(Log[10, pmax] - Log[10, pmin]) m + 1];
\[CapitalLambda] = 0.234;
w = 0.4;
Dd = 0.93;
mt = 0.5;
\[Tau] = E^2 - 1;
\[Gamma] = 12/(33 - 8);
\[Mu] = 19;
mq = 0;

Do[h = pmin Exp[(j - 1) lambda] (Exp[lambda] - 1); p[j] = N[y];
  y = y + h, {j, 1, nr}]

Do[strip[j] = (p[j + 1] - p[j - 1])/2, {j, 2, nr - 1}]
strip[1] = (p[2] - p[1])/2;
strip[nr] = (p[nr] - p[nr - 1])/2;

MT[k_] := ((2 \[Pi])^2 Dd)/w^6 k*Exp[-k/w^2] +
  2 (2 \[Pi])^2*\[Gamma]*(1 - Exp[-k/(4 mt^2)])/(k*
```

Log[\[Tau] + (1 + k/\[CapitalLambda]^2)^2]);(*en esta parte se cambia el modelo que vaya a ser usado*)

ff[k_, p_, x_] := MT[k + p - 2 Sqrt[k p] Cos[x]]

```
For[i = 1, i <= nr, i++,
  For[j = 1, j <= nr, j++,
    angularM[i, j] =
      NIntegrate[Sin[x]^2 ff[p[i], p[j], x], {x, 0, Pi}];
    angularF[i, j] =
      NIntegrate[
        Sin[x]^2 ff[p[i], p[j],
          x] (Sqrt[p[i] p[j]] Cos[x] +
            2/(p[i] + p[j] -
              2 Sqrt[p[i] p[j]] Cos[x]) (p[i] -
                Sqrt[p[i] p[j]] Cos[x]) (Sqrt[p[i] p[j]] Cos[x] -
                  p[j])), {x, 0, Pi}]]];
```

```
Do[angularFren[i] =
  NIntegrate[
    Sin[x]^2 ff[p[i], \[Mu]^2,
      x] (Sqrt[p[i] \[Mu]^2] Cos[x] +
        2/(p[i] + \[Mu]^2 -
          2 Sqrt[p[i] \[Mu]^2] Cos[x]) (p[i] -
            Sqrt[p[i] \[Mu]^2] Cos[x]) (Sqrt[p[i] \[Mu]^2]
              Cos[x] - \[Mu]^2)), {x, 0, Pi}];
  angularMren[i] =
  NIntegrate[Sin[x]^2 ff[p[i], \[Mu]^2, x], {x, 0, Pi}], {i, 1, nr}]
```

```
Do[{kerM[i, j] =
  1/(2 (\[Pi]^3) ) (p[i]*M[i]*F[i]*F[j])/
  (p[i] + M[i]^2) (angularM[i, j] - angularMren[i]),
  kerF[i, j] =
  1/(6 (\[Pi]^3) ) (p[i]*F[i] F[j])/
  (p[i] + M[i]^2) (angularF[i, j]/p[j] -
    angularFren[i]/\[Mu]^2)}, {i, 1, nr}, {j, 1, nr}];
Do[{kernintM[j] = m F[j] + \!(
  \*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\{i = 1\}, \{nr\}\)\(kerM[i, j]*
    strip[i]\)\),
  kernintF[j] = 1 - \!(
  \*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\{i = 1\}, \{nr\}\)\(kerF[i, j]*
    strip[i]\)\)\), {j, 1, nr}];
```

```
Minic = Interpolation[mini];
Finic = Interpolation[fini];
Ecs = Table[{F[i] == kernintF[i]}, {i, 1, nr}] \[Union]
```

```

Table[M[i] == kernintM[i], {i, 1, nr}];

CondIni =
  Table[{F[i], 0.6 Finic[p[i]], 1.1 Finic[p[i]]}, {i, 1,
    nr}] \[Union]
  Table[{M[i], 0.6 Minic[p[i]] , 1.1 Minic[p[i]] }, {i, 1, nr}];

Res = FindRoot[Ecs, CondIni, MaxIterations -> 1500]

ListLogLinearPlot[TablaF, PlotRange -> All]
ListLogLinearPlot[TablaM, PlotRange -> All]
ListLogLinearPlot[TablaZ, PlotRange -> All]

Do[\[Sigma]s[j] = (-M[j] F[j])/(p[j] + M[j]^2) /. Res, {j, nr}];
Tabla\[Sigma]srencb1750 = Table[{p[j], \[Sigma]s[j]}, {j, 1, nr}];
ListLogLinearPlot[Tabla\[Sigma]srencb1750, PlotRange -> All]

Condensado =
  Re[(3/(8 \[Pi]) Sum[ \[Sigma]s[i] strip[i], {i, nr}])^(1/3)]

Promedio =
  Table[{t,
    Log[Abs[1/(2 \[Pi])
      Sum[1/Sqrt[p[i]] Cos[t Sqrt[p[i]]] \[Sigma]s[i] strip[i], {i,
        nr}]]]}, {t, 1, 20, 0.01}];
ListLogLinearPlot[Promedio,
  AxesLabel -> {t, "ln\[CapitalDelta][t]"}, PlotRange -> All]

MM = Interpolation[Table[{p[i], -M[i] /. Res}, {i, 1, nr}]]
FF = Interpolation[Table[{p[i], F[i] /. Res}, {i, 1, nr}]]

fpi = (3/(4 \[Pi]^2)
  NIntegrate[(
    k FF[k] MM[k])/(k + MM[k]^2)^2 (MM[k] - k/2 MM'[k]), {k, p[1],
    p[nr]}])^(1/2)

```


Bibliografía

- [1] V. D. Burkert and T. S. H. Lee , *Int. J. Mod. Phys. E* 13, 1035 (2004).
- [2] S. S. Afonin, *Int. J. Mod. Phys. A* 22, 4537 (2007).
- [3] S. G. Amsler et al., *Phys. Lett. B* 667, 1 (2008).
- [4] S. Capstick and N. Isgur, *Phys. Rev. D* 34, 2809 (1986).
- [5] R. L. Jaffe and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* 91, 232003 (2003); R. L. Jaffe, *Phys. Rep.* 409, 1 (2005).
- [6] E. Santopinto, *Phys. Rev. C* 72, 022201(R) (2005).
- [7] E. Klempt and J. M. Richard, *Rev. Mod. Phys.* 82, 1095 (2010).
- [8] Guy F. de Téramond and Stanley J. Brodsky, *Phys. Rev. Lett.* 94, 201601 (2005); *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.* 199, 89 (2010); Stanley J. Brodsky and Guy F. de Teramond, *Phys. Rev. Lett.* 96, 201601 (2006); International School of Subnuclear Physics, 2007 (unpublished), arXiv:0802.0514.
- [9] E. Klempt, *Eur. Phys. J. A* 38, 187 (2008).
- [10] Jaemo Park and Piljin Yi, *J. High Energy Phys.* 06, 011 (2008).
- [11] K. Nawa, H. Suganama, and T. Kojo, *Phys. Rev. D* 79, 026005 (2009).
- [12] C.B. Compean and M. Kirchbach, *J. Phys, A: Math. Theor* 42, 365301 (5pp), (2009).
- [13] M. Lüscher and G. Mack, *Commun. Math. Phys.* 41, 203 (1975).
- [14] G.W. Gibbons and A. R. Steit, *Phys. Lett. B* 346, 255 (1995).
- [15] J. L. F. Barbon and C. A. Fuertes, *JHEP*, 09, 030 (2008).
- [16] H. Nicolai, E. Sezgin, and Y. Tanii, *Nucl. Phys. B*305, 483 (1988).
- [17] C.W. Gibbons and P. K. Townsend, *Phys. Rev. Lett.* 71, 3754 (1993).
- [18] M. Kirchbach and C. B. Compean, *Phys. Rev. D* 82, 034008 (2010).

- [19] E. Schrödinger, Proc. R. Ir. Acad. A 46 9-16 (1940).
- [20] P. W. Higgs, J. Phys. A: Math. Gen. 12, 309-23 (1979).
- [21] C.B. Compean and M. Kirchbach, Eur. Phys. J., A 33 1-4 (2007).
- [22] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Phys. Rep. 251, 267-385 (1995).
- [23] G. Levai, J. Phys. A: Math. Gen. 22, 689-702 (1989).
- [24] R. De, R. Dutt and U. Sukhatme, J. Phys. A: Math. Gen. 25, L843-50 (1992).
- [25] V. V. Gritsev and A. Kurochkin Yu, Phys. Rev. B 64, 035308 (2001).
- [26] C. B. Compean and M. Kirchbach, J. Phys. A 44, 015304 (2011).
- [27] M. S. Bhagwat, I. C. Cloet and C. D. Roberts, (arXiv:0710.2059 [nucl-th]), in Proceedings of the Workshop on Exclusive Reactions at High Momentum Transfer, Newport News, Virginia, 21-24 May 2007, Eds. A. Radyushkin and P. Stoler (World Scientific, Singapore, 2007).
- [28] E. Eichten, K. Gottfried, T. Konoshita, K.D. Lane, and T.-M. Yan, Phys. Rev. D17, 3090 (1978); D21, 203 (1980).
- [29] M. Maris, P.C. Tandy, Phys. Rev. C60 055214, (1999).
- [30] G.S. Bali, Phys. Rev. 343, 1 (2001).
- [31] Arfken, George, *Mathematical Methods For Physicists, Third Edition*, Academic Press Inc., 1985, San Diego California 92101, pp 102.
- [32] Griffiths, George J. *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, Inc., 1995, Upper Saddle River, NJ 07458, pp 121-140.
- [33] Cohen-Tannoudji C., Diu B., Laloe F. *Quantum Mechanics* vol. 1, pp. 799.
- [34] Andreev Oleg, Zakharov Valentin I. *Heavy Quark Potentials and AdS/QCD* arXiv:hep-ph/0604204v3 26 26 Jul 2006.
- [35] Cohen-Tannoudji C., Diu B., Laloe F. *Quantum Mechanics* vol. 2, pp. 1096-1104.
- [36] M. Kirchbach, M. Moshinsky, Yu. F. Smirnov, Phys. Rev. D 64, 114005 (2001).
- [37] C.B. Compean and M. Kirchbach, J. Phys., A: Math. Gen. 39, 547-57. (2009)
- [38] Ed. por: R. Bijker, O. Castaños, D. Fernández, H. Morales-Técotl, L. Urrutia, C. Villareal, *Latin American School of Physics XXXV ELAF, Supersymmetries in Physics and its Applications*, AIP Conference Proceedings 744, New York, (2005).

- [39] De R., R. Dutt, U. Sukhatme, J. Phys. A: Math, Gen, L843-L850 (1992).
F. Cooper, A. Khare, U.P. Sukhatme, *Super Symmetry in Quantum Mechanics* (World Scientific, Singapore, 2001).
- [40] C.B. Compean, M. Kirchbach, J. Phys. A. Math. Gen 38(2005).
- [41] P. Dennery and A. Krzywicki, *Mathematics for Physicist* New York: Dover (1996).
- [42] Abramowitz M. and Stegun I.A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables* 2nd Ed., New York: Dover (1972).
- [43] http://en.wikipedia.org/wiki/Sturm-Liouville_theory
- [44] E. J. Routh, Proc. London Math. Soc. 16, 245 (1884).
- [45] V. I. Romanovski, Compt. Rend. Ac. Sci. Paris, 188, 1023 (1929).
- [46] H. Garcilazo, Phys. Rev., C 67, 055203, (2003)
- [47] Y.S. Kim and M.E. Noz, *Theory and Application of the Poincaré Group* (Dordrecht: Reidel), (1986)
- [48] D. Craig Roberts and Anthony G. Williams, Prog.Part.Nucl.Phys.33:477-575,(1994).
- [49] P. W. Higgs, Phys. Lett. 12, 132 (1964).
P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. 13, 508 (1964).
P. W. Higgs, Phys. Rev. 145, 1156 (1966).
T. W. B. Kibble, Phys. Rev. 155, 1554 (1967).
- [50] Das Ashok, *Lectures of Quantum Field Theory* World Scientific Publishing Company, 2008., pp. 690.
- [51] A. Bashir, M.A. Bedolla, C. Compean-Jaso y A. Raya, *Trabajo en progreso*.
- [52] Dyson F.J., Phys. Rev. 75, 1736 (1949).
- [53] C.D. Roberts and A.G. Williams, Prog. Part. Nucl. Phys. 33, 477 (1994).
- [54] K. Osterwalder and R. Schrader, Commun. Math. Phys. 31, 83 (1973); *ibid* Commun. Math. Phys. 42, 281 (1975).
- [55] M. Kirchbach, *Comunicación privada*.
- [56] L. C. L. Hollenberg, C.D. Roberts and B.H.J. McKellar, Phys Rev. C 46, 2057 (1992); F.T. Hawes, C.D. Roberts and A.G. Williams, Phys. Rev. D 49, 4683 (1994).
- [57] C.P. Hofmann, A. Raya and S. Sanchez Madrigal, Phys. Rev. D 82, 090611 (2010).

- [58] J.C. Taylor, Nucl. Phys. B33, 436 (1971).
- [59] V. N. Gribov, Nucl. Phys. B 139 (1978).
- [60] D. Zwanziger, Nucl. Phys. B 323 (1989).
- [61] P. Maris, A. Raya, C.D. Roberts and S.M. Schmidt, Eur. Phys. J. A 18, 231-235 (2003) y referencias dentro.