



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE  
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

*Instituto de Física y Matemáticas*

**Acreción no lineal radial de una gas ideal en un  
hoyo negro esférico**

**T E S I S**

**PARA OBTENER EL TITULO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA**

**PRESENTA  
MIGUEL GRACIA LINARES**

**ASESOR  
DR. FRANCISCO S. GUZMÁN MURILLO**

**MORELIA, MICH., FEBRERO 2013.**



# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Métodos Numéricos</b>	<b>7</b>
2.1	Diferencias Finitas . . . . .	7
2.2	Método de alta resolución por captura de choques . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Formulación 3+1 de la Relatividad General</b>	<b>19</b>
3.1	Formalismo 3+1 . . . . .	20
3.2	Hidrodinámica desde la perspectiva de la descripción 3+1 . . . . .	28
3.3	Reducción al caso con simetría esférica en coordenadas esféricas . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Evolución de un hoyo negro en el vacío</b>	<b>37</b>
4.1	Evolución de la solución exacta en la norma de Eddington-Finkelstein . . . . .	37
4.2	Evolución de la solución exacta usando una norma distinta . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Acreción de Michel</b>	<b>45</b>
5.1	Solución exacta . . . . .	45
5.2	Solución numérica . . . . .	47
5.3	Convergencia . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Evolución no lineal de la acreción de un gas ideal</b>	<b>55</b>
6.1	Diagnóstico y resultados . . . . .	57
<b>7</b>	<b>Conclusiones y comentarios finales</b>	<b>65</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Desde la perspectiva de la teoría general de la relatividad, la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, lo cual nos dice que el estado dinámico de un sistema estará determinado a partir de la distribución de materia y viceversa; en la actualidad los procesos astrofísicos involucran la presencia de campos gravitacionales fuertes, producidos por objetos compactos como las estrellas conocidas como enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros, todos ellos producto del colapso gravitacional de estrellas en alguna fase en que se han quedado sin el combustible necesario para contrarrestar la gravedad. Por tanto, una herramienta importante en la astrofísica relativista es el conocimiento y manejo de la evolución de espacio-tiempo con materia es decir, parece importante saber resolver las ecuaciones de Einstein en presencia de materia.

Desde luego no es un tema trivial, se requiere del conocimiento de la teoría general de la relatividad y la descomposición 3+1 del espacio-tiempo y conforme los modelos son más realistas, las ecuaciones que se presentan no tienen una solución analítica como en una situación ideal, entonces se recurre a los métodos numéricos para que una computadora haga los cálculos, y así ser capaces de aproximar la solución de algún problema. En este trabajo se presentan los elementos necesarios para evolucionar el proceso de acreción de un gas ideal en un hoyo negro esféricamente simétrico, con flujos radiales solamente, lo cual quiere decir que se supondrá que el gas ideal se mueve radialmente hacia el agujero negro, lo cual producirá que éste acrete materia y aumente su tamaño lo cual producirá un cambio en el espacio-tiempo.

Dicho sistema requiere de la evolución de la geometría y del gas, problemas que involucran dos métodos numéricos distintos, y por ello en este trabajo se discuten por separado y se presentan pruebas de dichos métodos en dos situaciones particulares, a saber: por una parte la evolución de la geometría sin el gas usando diferencias finitas y por otra la evolución del gas sin evolucionar la geometría del hoyo negro usando métodos de alta resolución con captura de choques. Posteriormente, una vez que se muestra que ambos métodos funcionan bien por separado se ensamblan los programas y se construye la versión acoplada para la evolución simultánea de la geometría y del gas.

El problema de la evolución del hoyo negro es ya bien conocido y se reproducen las pruebas estándar. Por otra parte el caso de la evolución del gas como fluido de prueba sin evolucionar la geometría tiene solución exacta en el caso estacionario, lo cual permite comparar la solución numérica con la exacta. Para nuestra sorpresa descubrimos que el caso de la acreción no lineal es poco discutido en la literatura. De hecho en este trabajo se muestra cómo crece el horizonte de eventos en el tiempo, resultado que no encontramos que tuviera antecedentes.

En el capítulo 2, describimos con detalle los métodos numéricos que se utilizaron en el trabajo, la primera sección dedicada al método de diferencias finitas y la segunda dedicada a los métodos de alta resolución por captura de choques. En el capítulo 3 damos una breve introducción a la Relatividad General y describimos con cierto detalle la formulación 3+1 de dicha teoría, así como la reducción de las ecuaciones en simetría esférica, finalmente dedicamos una sección a describir la hidrodinámica relativista desde un enfoque Euleriano. En el capítulo 4 se estudia el problema de evolución del espacio-tiempo para un agujero negro en el vacío, primero utilizando como datos iniciales la solución exacta de un hoyo negro de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein, y segundo se utiliza una norma más dinámica que sirve como prueba de nuestro código, utilizando métodos de diferencias finitas. En el capítulo 5 se estudia el problema de acreción de una gas ideal en simetría esférica en un panorama en el que el espacio-tiempo es fijo, en la primera sección se muestra la construcción e implementación de la solución exacta a dicho problema, en la segunda sección se muestra el resultado de la evolución numérica utilizando métodos de alta resolución por captura de choques y finalmente en la tercera sección se muestra una prueba del código al comparar la solución exacta con la solución numérica. En el capítulo 6 se estudia el proceso de acreción de un gas ideal en simetría esférica, resolviendo el problema de evolución del espacio-tiempo junto con el del gas, esto significa que se acoplan los casos tratados en los capítulos 4 y 5, como resultado importante se presenta la localización del horizonte de eventos para dicho problema.

# Capítulo 2

## Métodos Numéricos

### 2.1 Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas es un método numérico para resolver ecuaciones diferenciales parciales. Consiste en definir una versión discreta de la ecuación diferencial parcial (EDP) y calcular una solución a dicha aproximación discretizando el dominio continuo de la EDP. La aproximación en diferencias finitas de una ecuación diferencial parcial (EDP) consiste en definir las funciones y variables involucradas en un conjunto discreto de puntos del dominio donde se busca una solución, pero, ¿cómo discretizamos una EDP?; los pasos a seguir básicamente son dos:

1. Supongamos que una función  $f$ , involucrada en nuestra EDP, está definida en un dominio bidimensional  $(t, x)$  (por ejemplo, el tiempo y una coordenada espacial). Definimos entonces el arreglo  $x_j = j\Delta x$  y  $t^n = n\Delta t$  en el espacio y tiempo respectivamente, donde  $j$  y  $n$  son enteros que etiquetan los puntos donde estará definida la ecuación; en esta forma la función  $f$  queda definida únicamente en los puntos  $(t^n, x_j)$  que denotaremos como  $f_j^n$ . Como sabemos, una computadora carece de memoria infinita, hecho que denotamos al acotar los valores de  $n$  y  $j$  ( $n = 0, 1, \dots, N_t$  y  $j = 0, 1, \dots, N$ ). El procedimiento de discretización define una malla en el dominio, en cuyos nodos quedan definidas las funciones involucradas en la EDP. Es importante mencionar que el criterio para determinar una discretización es arbitrario, elegir la forma dependerá de las propiedades de la EDP involucrada en el problema en específico que se desea resolver; la malla más elemental es aquella cuyos nodos se encuentran uniformemente espaciados y es la que usaremos para ilustrar el método (Fig. 2.1).
2. Una vez definido el dominio discreto de la EDP es necesario aproximar los operadores diferenciales involucrados, esto se logra al expandir las funciones en serie de Taylor utilizando los valores de las funciones en puntos de la malla, es claro que dichas funciones deben ser analíticas o al menos permitir una expansión tipo Taylor hasta cierto orden finito.

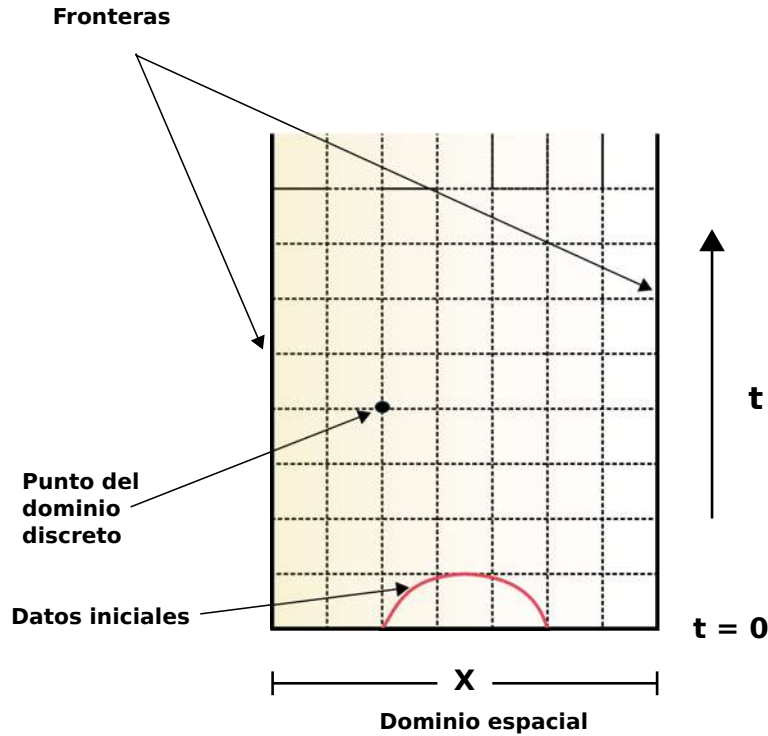


Figura 2.1: En la figura se muestra el dominio discreto que define una malla sobre la que quedan definidas las funciones involucradas en una EDP.

Derivada de primer orden. Dada  $f_j^n$ , una función como la definida antes con  $n$  fijo, es posible calcular valores aproximados de la función en los puntos adyacentes a partir de expansiones en serie de Taylor truncadas de  $f$  en torno a  $f_j^n$ . El número de puntos cercanos a  $x_j$  en los que se expanda la serie de Taylor y el orden del error de truncado de ésta, determinarán el orden de precisión de la aproximación. Para ilustrar la construcción de la aproximación de segundo orden de la derivada de primer orden espacial, se usarán las siguientes tres expansiones con error de truncado de tercer orden  $O(\Delta x^3)$ , suponiendo  $n$  fijo, por lo que se omite aquí:

$$\begin{aligned}
 f_{j-1} &= f_j - \Delta x f_j' + 2\Delta x^2 f_j'' + O(\Delta x^3), \\
 f_j &= f_j, \\
 f_{j+1} &= f_j + \Delta x f_j' + 2\Delta x^2 f_j'' + O(\Delta x^3),
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

donde la prima denota derivada con respecto a  $x$ . A partir de estas aproximaciones es posible construir diferentes operadores diferenciales para las derivadas de  $f_j^n$ . Por ejemplo, sumando la primera y la tercera expresiones, y dividiendo por  $2\Delta x$ , se obtiene la expresión

para la primera derivada en el punto  $x_j$  con un error de segundo orden:

$$f'_j = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (2.2)$$

Observamos que para calcular este tipo de aproximación necesitamos conocer los valores de la función en  $f_{j+1}^n$  y en  $f_{j-1}^n$  a ambos lados de  $x_j$  por lo que se llamará centrada. También es posible aproximar la derivada de primer orden utilizando aproximaciones no centradas, desbalanceadas, comunmente llamadas *upwind* y *downwind*, para ilustrarlo sirve hacer uso de la siguientes expansiones:

$$\begin{aligned} f_j &= f_j, \\ f_{j+1} &= f_j + \Delta x f'_j + \frac{\Delta x^2}{2} f''_j + O(\Delta x^3), \\ f_{j+2} &= f_j + 2\Delta x f'_j + \frac{4\Delta x^2}{2} f''_j + O(\Delta x^3), \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde ahora se ha hecho la expansión hasta dos puntos a la derecha de  $x_j$ . Combinando estas ecuaciones podemos construir la expresión para la derivada de  $f$  en  $x_j$  usando solamente valores de  $f$  a la derecha, en los puntos,  $x_{j+1}$  y  $x_{j+2}$ .

De manera análoga, la construcción de la aproximación de la derivada que usa solamente puntos a la izquierda de  $x_j$  es la siguiente:

$$f'_j = \frac{f_{j-2} - 4f_{j-1} + 3f_j}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (2.4)$$

Supongamos que ahora queremos que los operadores tengan un orden de aproximación mayor, por ejemplo, si se desea calcular la derivada de primer orden con un error de cuarto, basta considerar el siguiente conjunto de series truncadas conservando los términos de hasta cuarto orden:

$$\begin{aligned} f_{j-2} &= f_j - 2\Delta x f'_j + \frac{4\Delta x^2}{2} f''_j - \frac{8\Delta x^3}{6} f'''_j + \frac{16\Delta x^4}{24} f''''_j + O(\Delta x^5), \\ f_{j-1} &= f_j - \Delta x f'_j + \frac{\Delta x^2}{2} f''_j - \frac{\Delta x^3}{6} f'''_j + \frac{\Delta x^4}{24} f''''_j + O(\Delta x^5), \\ f_j &= f_j, \\ f_{j+1} &= f_j + \Delta x f'_j + \frac{\Delta x^2}{2} f''_j + \frac{\Delta x^3}{6} f'''_j + \frac{\Delta x^4}{24} f''''_j + O(\Delta x^5), \\ f_{j+2} &= f_j + 2\Delta x f'_j + \frac{4\Delta x^2}{2} f''_j + \frac{8\Delta x^3}{6} f'''_j + \frac{16\Delta x^4}{24} f''''_j + O(\Delta x^5). \end{aligned}$$

Para calcular la primera derivada de  $f$  en  $x_j$  es necesario encontrar la combinación lineal correcta del tipo  $af_{j-2} + bf_{j-1} + cf_j + df_{j+1} + ef_{j+2}$  tal que los coeficientes de  $f_j$  y de las derivadas de segundo, tercero y cuarto orden sean cero. En el caso centrado la expresión es la siguiente:

$$f'_j = \frac{f_{j-2} - 8f_{j-1} + 8f_{j+1} - f_{j+2}}{12\Delta x} + O(\Delta x^4) \quad (2.5)$$

y para combinaciones desbalanceadas se procede usando las expansiones truncadas para distintos puntos vecinos de  $x_j$ ; los resultados de varias elecciones de puntos vecinos se resumen en la Tabla 2.1 [Guzmán 2010].

Hasta ahora solo hemos visto cómo se aproxima el operador de derivada espacial de primer orden, pero el método presentado anteriormente es útil para aproximar derivadas de cualquier orden, lo único que debemos hacer es buscar una combinación de las expansiones en serie de Taylor en distintos puntos vecinos de  $x_j$ , pero en esta ocasión imponemos la condición de que los coeficientes de las derivadas de orden no deseado sean cero, por ejemplo, procediendo de dicha manera la aproximación de la derivada de segundo orden con una aproximación a segundo orden puede estimarse a partir de las expresiones (2.1) desarrolladas hasta  $O(\Delta x^4)$  como:

$$f''_j = \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \quad (2.6)$$

que resulta ser una aproximación centrada. Así, el algoritmo para construir aproximaciones en diferencias finitas de operadores diferenciales es el siguiente:

- Hacer la expansión en serie de Taylor de  $f$  en puntos cercanos a aquel donde se quiera evaluar la derivada de  $f$ .
- Encontrar una combinación lineal de tales expansiones que cumpla con la condición de que los coeficientes de las derivadas de orden superior e inferior a la derivada del orden deseado sean cero.

Ahora que sabemos cómo proceder para calcular aproximaciones de derivadas de funciones, en las Tablas 2.1 y 2.2 presentamos los coeficientes de las combinaciones lineales necesarias para calcular los operadores diferenciales de primero y segundo orden, centrados y desbalanceados con distintos órdenes de precisión. En la tabla 2.1 se muestran los coeficientes de las funciones evaluadas en los distintos puntos vecinos de  $x_j$  en las expresiones para el cálculo de las derivadas de primer orden con precisión de segundo orden y los coeficientes cuando la precisión es de cuarto orden. En la tabla 2.2 se muestran aquellos coeficientes para las derivadas de segundo orden.

El método de diferencias finitas provee de una versión aproximada de la EDP en el continuo, debemos tener en mente que la ecuación que se resolverá en adelante es solamente



	$x_{j-4}$	$x_{j-3}$	$x_{j-2}$	$x_{j-1}$	$x_j$	$x_{j+1}$	$x_{j+2}$	$x_{j+3}$	$x_{j+4}$
Segundo orden				1	0	-1			
			1	-4	3				
					-3	4	-1		
Cuarto orden	3	-16	36	-48	25				
		-1	6	-18	10	3			
			1	-8	0	8	-1		
				-3	-10	18	-6	1	
					-25	48	-36	16	-3

Tabla 2.1: Coeficientes de la aproximación a segundo y cuarto orden de precisión de la derivada de primer orden usando distintas combinaciones de puntos vecinos. Para las de segundo orden debe multiplicarse cada coeficiente por el factor  $\frac{1}{2\Delta x}$  y para el de cuarto por  $\frac{1}{12\Delta x}$ . Por ejemplo, la derivada espacial de primer orden con cuarto orden de precisión con un punto vecino a la izquierda y tres a la derecha se aproxima como  $f'_j = \frac{-3f_{j-1}-10f_j+18f_{j+1}-6f_{j+2}+f_{j+3}}{12\Delta x} + O(\Delta x^4)$ .

	$x_{j-5}$	$x_{j-4}$	$x_{j-3}$	$x_{j-2}$	$x_{j-1}$	$x_j$	$x_{j+1}$	$x_{j+2}$	$x_{j+3}$	$x_{j+4}$	$x_{j+5}$
Segundo orden				1	-2	1					
			-1	4	-5	2					
						-2	-5	4	-1		
Cuarto orden	-10	61	-156	214	-154	45					
		1	-6	14	-4	-15	10				
				-1	16	-30	16	-1			
					10	-15	-4	14	-6	1	
						45	-154	214	-156	61	-10

Tabla 2.2: Coeficientes de la aproximación a segundo y cuarto orden de precisión de la derivada de segundo orden usando distintas combinaciones de puntos vecinos. Para las de segundo orden debe multiplicarse cada coeficiente por el factor  $\frac{1}{\Delta x^2}$  y para el de cuarto por  $\frac{1}{12\Delta x^2}$ . Por ejemplo, la derivada espacial de primer orden con segundo orden de precisión tres puntos vecinos a la derecha se aproxima como  $f''_j = \frac{-2f_j-5f_{j+1}+4f_{j+2}-f_{j+3}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$ .

una aproximación de la original, es decir, la que es definida en el dominio continuo. Es preciso entonces establecer criterios que indiquen que cuando se resuelve la versión discreta de una EDP, al menos en el límite continuo se está calculando la solución correcta.

Ahora presentaremos a la ecuación de onda como un ejemplo del método presentado anteriormente. El hecho de haber elegido un dominio espacio-temporal, permite considerar directamente la discretización de la ecuación :

$$\partial_{tt}\phi - \partial_{xx}\phi = 0, \quad (2.7)$$

donde el subíndice indica una derivada con respecto a la variable representada con el índice. Para construir la aproximación en diferencias finitas (DF) de (2.7) basta con escribir la aproximación de derivadas espaciales de segundo orden y la aproximación de la derivada temporal, lo cual se consigue intercambiando  $x_j$  por  $t^n$  y el índice  $n$  en lugar de  $j$  en la expresión (2.6). El resultado es el siguiente: cuando se usan operadores con aproximación de segundo orden de tipo centrado en el punto  $(t^n, x_j)$ :

$$\frac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2} = O(\Delta x^2, \Delta t^2), \quad (2.8)$$

para todo  $j = 1, \dots, N - 1$  y  $n = 1, \dots, N_t - 1$ , los casos en que  $j = 0$ ,  $N = 0$  y  $n = 0$ ,  $N_t$  se discuten enseguida se definen al momento condiciones de frontera y condiciones iniciales. En este punto es preciso notar que la aproximación con diferencias finitas ha introducido un error, es decir, el lado derecho de la ecuación no es necesariamente cero, sino que es del orden  $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$ .

### Convergencia

Hemos mostrado que las aproximaciones de los operadores diferenciales son solamente una aproximación con un error asociado de cierto orden (segundo y cuarto orden en los ejemplos mostrados en las tablas 2.1 y 2.2). Cuanto mayor sea la resolución con que se construya la malla (valores más pequeños de  $\Delta x$  y  $\Delta t$ ), cuanto menor será el error con que se están aproximando los operadores diferenciales a sus contrapartes en el continuo, y por tanto la aproximación en diferencias finitas de una ecuación diferencial es más precisa. Siendo que se resuelve la versión aproximada de una EDP, es necesario verificar si dicha solución converge a la solución de la ecuación en el continuo. Para mostrar un criterio de convergencia consideremos como ejemplo la Ec. (2.8). Como veremos enseguida, es útil definir la razón  $\Delta t = C\Delta x$ , donde  $C$  es constante, o sea, que los errores en ambas variables son proporcionales, entonces si llamamos a la parte derecha de (2.8)

$$Error_1 = O(\Delta x^2, \Delta t^2) = E\Delta x^2$$

con  $E$  un coeficiente de error en la aproximación de las diferencias finitas con respecto a la ecuación continua. Si ahora se define una nueva resolución  $\Delta x_\kappa = \frac{\Delta x}{\kappa}$  con  $\kappa > 1$  se tiene

que  $Error_\kappa = E \frac{\Delta x^2}{\kappa^2}$ . De tales expresiones se tiene que:

$$\frac{Error_1}{Error_\kappa} = \kappa^2, \quad (2.9)$$

es decir, si la resolución aumenta por un factor de  $\kappa$ , la aproximación de la versión discreta se aproxima a la versión continua de manera cuadrática con el aumento de la resolución. El hecho de que sea cuadrática es consecuencia de que la aproximación que se construyó involucra errores de segundo orden. Si la aproximación se hiciera con errores de cuarto orden, la versión discreta se aproximaría a la continua de manera cuártica y así para las aproximaciones de mayor precisión. Para ilustrar el concepto de convergencia en diferencias finitas de manera más general, considérese una función  $f_i$  que es solución numérica de una EDP a un tiempo dado, y que ha sido construida bajo la discretización de dicha ecuación con una aproximación de segundo orden. Suponiendo además que se conoce la solución exacta  $f_0$ , el resultado numérico puede escribirse en la forma:

$$f = f_0 + E(x)\Delta x^2 + O(\Delta x^3),$$

Dado que se conoce la solución exacta, es posible conocer el error con que se calcula la solución numérica usando distintos valores de  $\Delta x$ . Sean  $f_1$  y  $f_2$  dos soluciones numéricas calculadas usando las resoluciones  $\Delta x$  y  $\frac{\Delta x}{2}$  respectivamente o sea  $\kappa = 2$  en (2.9). La razón entre los errores es la siguiente:

$$\frac{f_1 - f_0}{f_2 - f_0} = \frac{\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} = 4 + O(\Delta x). \quad (2.10)$$

En este caso se ha supuesto que la función  $f$  depende solamente de la variable  $x$  porque se calcula el error para un valor de  $t^n$  fijo. El número cuatro en (2.10) se llama factor de convergencia y debe ser evaluado en cada punto de la malla donde se ha calculado la función  $f$ . Cuando en un cálculo numérico que se ha llevado a cabo a partir de una aproximación de segundo orden el factor de convergencia es  $4 = 2^2$  en (2.9), se dice que la solución converge a segundo orden, es decir, cumple con lo predicho por la teoría en (2.10). De manera análoga, es posible mostrar que si la aproximación es de cuarto orden, el factor será  $16 = 2^4$ .

Por ejemplo, para la ecuación de onda (2.7) se conoce la solución exacta  $\phi(x, t) = f(x + t) + g(x - t)$  con  $f$  y  $g$  dadas por las condiciones iniciales del problema, y bastará calcular la solución numérica con dos resoluciones distintas para determinar si los algoritmos utilizados producen una solución que converge correctamente a la exacta.

Para el caso en que se desconoce la solución exacta es posible hacer un estudio de convergencia usando los resultados numéricos calculados con tres distintas resoluciones (no dos como en el caso anterior) llamado estudio de autoconvergencia. Si además de  $f_1$  y  $f_2$  definidas antes se calcula la solución  $f_3$  de la EDP con resolución  $\Delta x/4$ , se puede calcular la razón siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{f_1 - f_2}{f_2 - f_3} &= \frac{\Delta x^2 - \frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 - \frac{1}{16}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} \\
&= \frac{\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} = 4 + O(\Delta x)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

donde una vez más el resultado se llama factor de convergencia, y una vez más resulta ser cuatro cuando la aproximación de la EDP es de segundo orden. De igual modo, si la aproximación fuera de cuarto orden el factor sería 16 en lugar de 4. Finalmente, es útil saber que cuando el factor de convergencia es menor que el esperado, es necesario aceptar varias posibilidades:

- (a) hay un error en la implementación del programa,
- (b) los algoritmos no permiten la convergencia en el rango  $\Delta x$  elegido, es decir, no se han hecho los cálculos en el régimen de convergencia y es necesario ensayar con otros valores de  $\Delta x$ .

## 2.2 Método de alta resolución por captura de choques

### Volúmenes finitos

En la Hidrodinámica aparecen discontinuidades por lo que los el método de diferencias finitas que se fundamente en dicha propiedad de las funciones falla, por lo que se opta por otros métodos que eviten dicha dificultad. Uno de los métodos alternativos que comunemente se utiliza es el método de volúmenes finitos; como primera diferencia, este método, consiste en discretizar al espacio-tiempo en celdas en vez de en una malla de puntos, esto es, discretiza al tiempo como antes  $t = n\Delta t$  pero el el espacio es discretizado como celdas centradas en  $x_i = i\Delta x$  como se muestra en la Fig. 2.2. Ya que se ha discretizado así el dominio, el siguiente paso es discretizar en su forma integral las ecuaciones de tipo balance de flujo:

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{S}, \tag{2.12}$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector de variables conservativas,  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$  son los flujos con dependencia de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{S}$  es un vector de fuentes.

El primer paso para discretizar una ecuación del tipo (2.12) en su forma integral es calcular el promedio en la celda de espacio-tiempo  $C_i^{n+1/2}$  como:

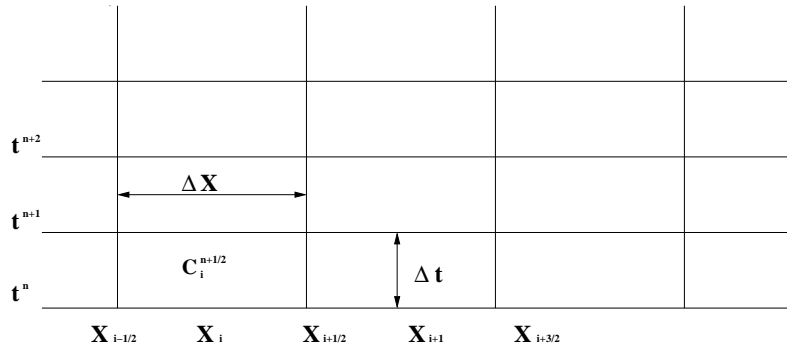


Figura 2.2: Se presenta la estructura de celda del espacio-tiempo, donde  $C_i^{n+1/2}$  es la etiqueta de la celda centrada en  $x_i$  y delimitada por  $t^n$  y  $t^{n+1}$ .

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{x^n}^{x^{n+1}} \partial_t \mathbf{u} dx dt + \\
& \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{x^n}^{x^{n+1}} \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{u}) dx dt = \\
& \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{x^n}^{x^{n+1}} \mathbf{S} dx dt,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

utilizando el teorema de Gauss, la ecuación anterior se escribe como:

$$\bar{\mathbf{u}}_i^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{n+1/2} - \bar{\mathbf{F}}_{i-1/2}^{n+1/2}) + \bar{\mathbf{S}}_i^{n+1/2} \Delta t. \tag{2.14}$$

Aquí  $\bar{\mathbf{u}}_i^{n+1}$  es el promedio espacial de las variables conservativas,  $\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{n+1/2}$ , son el promedio temporal de los flujos y  $\bar{\mathbf{S}}_i^{n+1/2}$  el promedio espacial y temporal de las fuentes.

### Reconstrucción de celdas

Las ecuaciones (2.14) dan la evolución de las variables conservativas, sin embargo aún se tiene una dificultad con los promedios temporales de los flujos en las fronteras de cada celda. Una de las formas en que se puede resolver este problema es considerar al problema como un problema de Riemann en cada frontera intercelda. Para resolverlo se puede utilizar el método de reconstrucción simple introducido por Godunov, el cual, consiste en reconstruir cada variable y así cada uno de los flujos asociados a las variables conservativas  $\bar{\mathbf{u}}$  con una función constante a pedazos  $\bar{\mathbf{u}}$ .

Debido a que cada uno de los flujos en las interceldas es reconstruido con una función constante a pedazos, únicamente se tiene una aproximación a primer orden, lo cual puede

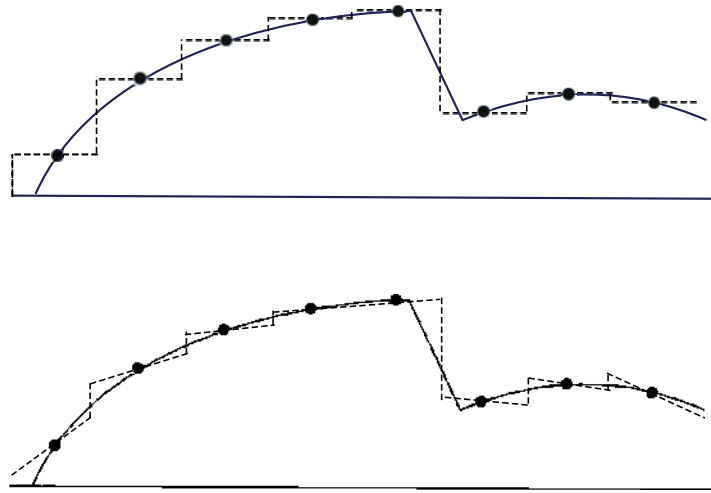


Figura 2.3: Se ilustran los dos tipos de aproximación en las interceldas, utilizando una función contante a pedazos (superior) y una función lineal a pedazos (inferior).

mejorar. Para ello se recurre a otros métodos para reconstruir las variables y por tanto dichos flujos conocidos como de alta resolución, los cuales consisten en la aproximación de las variables y flujos pero ahora con una función lineal a pedazos, para este caso las variables  $\tilde{\mathbf{u}}$  son reconstruidas con un limitador de pendientes *minmod*, el cual precisamente limita las penientes de las funciones lineales definiendo las variables en cada intercelda, esto es, se aproxima la variable  $\tilde{\mathbf{u}}$  a la derecha (D) e izquierda (I) de cada intercelda como:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^I &= \bar{\mathbf{u}}_i + \sigma_i(x_{i+1/2} - x_i), \\ \tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^D &= \bar{\mathbf{u}}_i + \sigma_{i+1}(x_{i+1/2} - x_{i+1}),\end{aligned}$$

aquí es calculada como  $\sigma_i = \text{minmod}(m_{i-1/2}, m_{i+1/2})$ , la función  $m_{i+1/2}$  es la derivada de las variables conservativas  $\bar{\mathbf{u}}$  centrada en cada interfase,

$$m_{i+1/2} = \frac{\bar{\mathbf{u}}_{i+1} - \bar{\mathbf{u}}_{i-1}}{x_{i+1} - x_i}, \quad (2.15)$$

y el limitador de pendientes *minmod* definido como:

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| > |b| \text{ y } ab > 0, \\ b & \text{si } |a| < |b| \text{ y } ab > 0, \\ 0 & \text{si } ab < 0. \end{cases}$$

Dicha reconstrucción se ilustra en la parte inferior de la Fig. 2.3. Una vez que se conocen las variables en las interceldas, procedemos a calcular los promedios de los flujos utilizando un resolvidor de Riemann aproximado; existen distintos tipos y cada uno de ellos,

necesita de información acerca de las propiedades características de la matriz jacobiana  $\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{u}}$  del sistema (2.12), por ejemplo el resolvidor *Roe*, demanda los eigenvalores y eigenvectores, por otro lado el HLLC solo requiere conocer los eigenvalores  $\lambda_i$  de la matriz jacobiana [Harten et al. 1983 & Einfeldt 1988] y es el que usaremos en el presente trabajo. La fórmula de flujos HLLC es:

$$\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{HLLC} = \frac{\lambda^+ \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^I) - \lambda^- \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^D) + \lambda^+ \lambda^- (\tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^D - \tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^I)}{\lambda^+ \lambda^-} \quad (2.16)$$

en donde:

$$\lambda^+ = \max(0, \lambda_i^D, \lambda_{i+1}^D, \lambda_{i+3}^D, \dots)$$

$$\lambda^- = \max(0, \lambda_i^I, \lambda_{i+1}^I, \lambda_{i+3}^I, \dots)$$

Finalmente, con ésta fórmula se integran (2.14) y se evoluciona las variables conservativas.





## Capítulo 3

# Formulación 3+1 de la Relatividad General

La Teoría General de la Relatividad es la teoría de Einstein sobre la gravedad, se basa en la idea de que el campo gravitacional no implica una fuerza Newtoniana, sino que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo producido por la materia, esto quiere decir que el estado dinámico de un sistema va a depender de la distribución de la materia que hay en el universo y viceversa.

Las ecuaciones de campo gravitacional en la teoría de la Relatividad se deducen de utilizar los postulados:

- *Principio de covarianza general.* Indica que las leyes de la Física adoptan la misma forma para cualquier observador y por ello deben poder escribirse en forma tensorial.
- *Principio de equivalencia.* Establece que un sistema uniformemente acelerado, localmente, es equivalente a un sistema que está en reposo en un campo, esto es, que localmente se debe entender como un efecto inercial, esto quiere decir que una fuerza inercial debe ser tratada igual que un campo gravitacional localmente.

Como consecuencia del principio de equivalencia, en un sistema de referencia cayendo libremente, los efectos de un campo gravitacional no existen, lo cual significa que valen las reglas de la relatividad especial. Esto quiere decir que la relatividad general generaliza a la relatividad especial considerando que el espacio-tiempo puede ser curvo pero con la gran diferencia de que en él, no existe un sistema de referencia inercial global. La idea de Einstein consiste en asociar alguna cantidad relacionada con la curvatura del espacio-tiempo al contenido de materia. La pregunta es ¿Qué cantidad geométrica es la conveniente?

- Debe ser independiente del sistema de coordenadas, entonces debe ser un tensor.

- Se elige un tensor de tipo  $\binom{0}{2}$  que contenga la información de la materia (densidad de energía, densidad de momento, transferencia de momento). Se denota por  $T$  con componentes  $T_{\mu\nu}$  y se llamará tensor de energía-momento.
- Se elige un tensor de tipo  $\binom{0}{2}$  que describa la curvatura del espacio-tiempo y se relacione con el tensor de energía-momento. Además, debe cumplir con la condición de que su divergencia sea cero y así, sea compatible con la ley de conservación de energía-momento  $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ ; el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  es el candidato más sencillo que cumple con estas condiciones.

La elección de estas cantidades define las ecuaciones de campo gravitacional de Einstein para la relatividad general:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

donde  $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ , es el tensor de Einstein y  $R_{\mu\nu}$  el tensor de Ricci del espacio-tiempo.

### 3.1 Formalismo 3+1

Las ecuaciones del campo gravitacional de Einstein están escritas de manera covariante, donde claramente no hay una diferencia en la forma en que se trata al espacio y al tiempo. Es bastante común escribir las ecuaciones en esta forma y usarla en el punto de vista de la geometría diferencial, sin embargo existen otras situaciones en las que nos convendría utilizar una idea más intuitiva y sencilla, en donde podamos ver estas ecuaciones de campo como un sistema que evoluciona en el tiempo; esto quiere decir que deberíamos ser capaces de separar al tiempo del espacio, y ver al campo gravitacional como algo que evoluciona en el tiempo, en otras palabras, reducirlo a un problema de Cauchy de valores iniciales. Existen diferentes métodos para lograr construir el problema de Cauchy de valores iniciales, por ejemplo, el formalismo "conforme", el formalismo "característico", etc, todo dependerá del sistema en cuestión que se desee tratar. En el presente trabajo nos enfocaremos en el formalismo 3+1, el cual, separa al espacio-tiempo, en una parte espacial de 3-dimensiones de otra temporal uno dimensional.

Para lograr estudiar la evolución en el tiempo es necesario formular un problema de Cauchy de valores iniciales, estos es, dadas condiciones iniciales (y de frontera), deberíamos ser capaces de predecir el futuro (o pasado) del sistema.

Cuando se intenta escribir las ecuaciones de campo de Einstein como un problema de Cauchy, inmediatamente nos topamos con un problema, las ecuaciones del campo gravitacional están escritas de tal manera que el tiempo y el espacio, no pueden ser distinguidos (concepto de covarianza). Esta covarianza de las ecuaciones en términos generales es bastante elegante e importante desde un punto de vista teórico, pero no nos permite pensar en

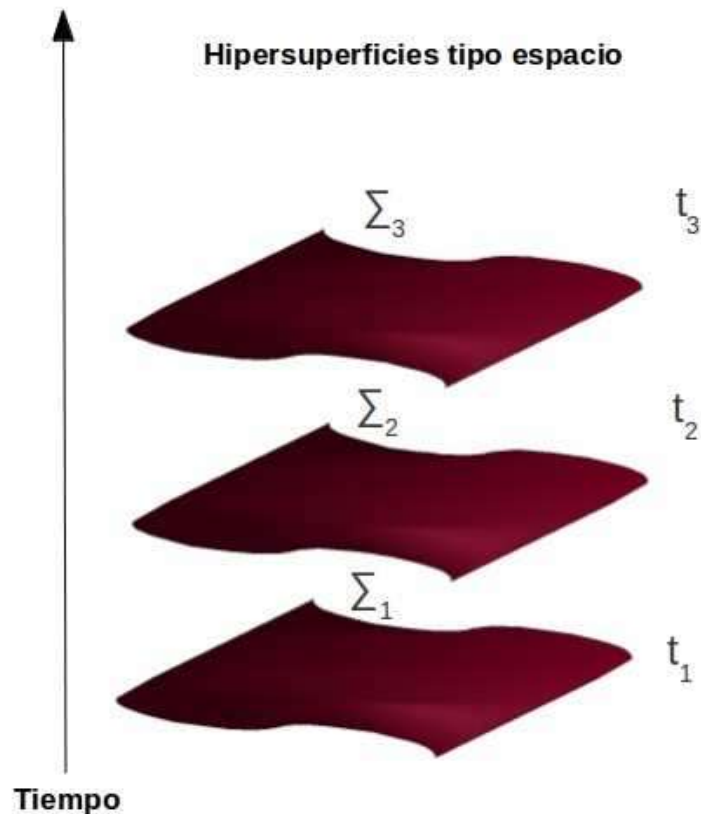


Figura 3.1: Se muestra la foliación del espacio-tiempo en la formulación 3+1,  $\Sigma_i$  representa una hipersuperficie tipo espacio y  $t_i$  el tiempo correspondiente a dicha hipersuperficie.

el campo gravitacional como algo que evolucione en el tiempo. Por lo tanto, lo primero que debemos realizar para reescribir las ecuaciones del campo como un problema de Cauchy es separar al tiempo del espacio de una manera clara. La formulación de la Relatividad General que resulta de hacer esto es conocida como el *formalismo 3 + 1*.

Comencemos por considerar un espacio-tiempo con métrica  $g_{\mu\nu}$ , asumimos que este espacio-tiempo es globalmente hiperbólico, esto quiere decir que, puede ser foliado, por ejemplo con hipersuperficies de 3 dimensiones tipo espacio. Podemos utilizar a  $t$  como el parámetro de dicha foliación, el cual será considerado como el tiempo coordenado sin que esto signifique que  $t$  sea estrictamente el tiempo propio de algún observador, la Fig. 3.1 ilustra lo anterior.

Consideremos una foliación específica, y tomemos dos hipersuperficies adyacentes  $\Sigma_t$  y  $\Sigma_{t+dt}$ . La geometría de la región que se encuentra entre las hipersuperficies, puede ser determinada utilizando los siguientes 3 ingredientes (ver Fig.3.2):

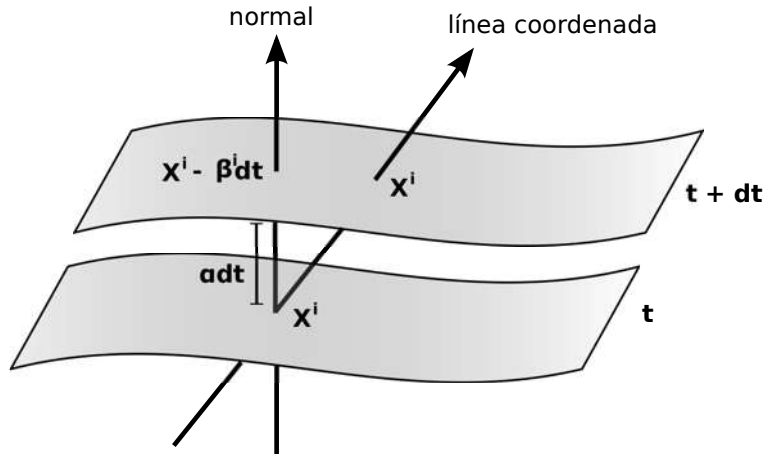


Figura 3.2

- La 3-métrica  $\gamma_{ij}$  (métrica inducida) que nos permitirá medir la distancia entre puntos en la hipersuperficie:

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.2)$$

los índices  $i$  y  $j$  corren de 1-3 que etiquetan coordenadas espaciales.

- El lapso del tiempo propio  $d\tau$  entre las dos hipersuperficies, medida por un observador que se mueve en dirección normal a las hipersuperficies (observador Euleriano):

$$d\tau = \alpha(t, x^i) dt. \quad (3.3)$$

Aquí  $\alpha$  se conoce como función *lapso*.

- La velocidad relativa  $\beta^i$  entre el observador Euleriano y las líneas de coordenadas espaciales constantes:

$$x^i_{t+dt} = x^i_t - \beta^i(t, x^j) dt, \quad (3.4)$$

el vector  $\beta^i$  se conoce como vector *shift*.

Notamos que no hemos impuesto ninguna condición sobre el *shift* y el *lapso*, los cuales nos dicen la forma en que el espacio-tiempo es foliado y la forma en que el sistema de coordenadas espaciales se propaga de una hipersuperficie a otra, esto nos deja con un sin fin de posibilidades para describir a nuestro espacio-tiempo, por esto mismo a este par se le conoce como *funciones de norma*.

En términos de las funciones  $\{\alpha, \beta^i, \gamma_{ij}\}$ , la métrica 3+1 del espacio-tiempo se escribe de la siguiente forma:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.5)$$

donde hemos utilizado la 3-métrica  $\gamma_{ij}$  para subir y bajar índices de vectores tangentes a  $\Sigma$ , por ejemplo el vector *shift*  $\beta_i = \gamma_{ij}\beta^j$ ; en forma matricial, el tensor métrico en la formulación 3+1 adquiere la forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k\beta^k & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix},$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^j/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i\beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Como se ha dicho,  $\gamma_{ij}$  es la métrica inducida sobre las hipersuperficies espaciales  $\Sigma$  y sus componentes son:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \quad (3.6)$$

donde  $n_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0)$  es la 1-forma dual del vector normal  $n^\mu$  normal a la hipersuperficie. De hecho el operador que proyecta cantidades del espacio-tiempo sobre las hipersuperficies  $\Sigma$  se define como: (3.6)  $P^\mu_\nu = \gamma^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + n^\mu n_\nu$ .

Las ecuaciones de Einstein relacionan las contracciones del tensor de curvatura de Riemann (Tensor y escalar de Ricci), con el tensor de energía-momento, por lo que requerimos escribirlos en la formulación 3+1 como objetos tridimensionales. La curvatura extrínseca en un punto de  $\Sigma$  se define como el cambio del vector normal en alguna dirección, esto es, la derivada de  $n^\nu$  a lo largo de la dirección  $\mu$  proyectada sobre  $\Sigma$  define el objeto *curvatura extrínseca* cuyas componentes son

$$K_{\mu\nu} \equiv -P^\alpha_\mu \nabla_\alpha n_\nu = -(\nabla_\mu n_\nu + n_\mu n^\alpha \nabla_\alpha n_\nu). \quad (3.7)$$

Podemos hacer las siguientes observaciones acerca de la curvatura extrínseca:

- La curvatura extrínseca es simétrica y espacial.
- Está definida sobre las hipersuperficies tipo espacio, tiene dos índices, uno que etiqueta la componente de la normal a  $\Sigma$  y otra que nos dice la dirección en la que se hace la variación.
- Como consecuencia del cambio en el vector normal, la curvatura extrínseca mide el ritmo en que la hipersupecficie se deforma en alguna dirección.
- Por la forma en que es definida la curvatura extrínseca, se puede escribir de forma equivalente como una derivada de Lie de la métrica como:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\vec{n}}\gamma_{ij} \quad (3.8)$$

Lo cual se puede ver fácilmente de la definición de derivada de Lie de un tensor  $\binom{0}{2}$  a lo largo de un vector normal  $\mathbf{n}$ .

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{\vec{n}}\gamma_{ij} &= n^\alpha \nabla_\alpha \gamma_{ij} + \gamma_{ik} \nabla_j n^k + \gamma_{jk} \nabla_i n^k \\
&= n^k \nabla_k (n_i n_j) + g_{ik} \nabla_j n^k + g_{jk} \nabla_i n^k \\
&= n^k n_i \nabla_k n_j + n^k n_j \nabla_k n_i + \nabla_j n_i + \nabla_i n_j \\
&= (\gamma_i^k - g_i^k) \nabla_k n_j + (\gamma_j^k - g_j^k) \nabla_k n_i + \nabla_j n_i + \nabla_i n_j \\
&= \gamma_i^k \nabla_k n_j + \gamma_j^k \nabla_k n_i = -2K_{ij}
\end{aligned}$$

donde usamos el hecho de que la derivada covariante del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  es cero y también que  $n^\alpha \nabla_\mu n_\alpha = 0$ , básicamente lo que hemos encontrado es una relación entre la curvatura extrínseca y la 3-métrica [Alcubierre 2008].

Es importante notar que la curvatura extrínseca depende únicamente del comportamiento del vector normal  $n^\mu$ , que es un vector definido en  $\Sigma$ , por lo que es una propiedad geométrica de la propia hipersuperficie. Como consecuencia de que  $n^\mu$  es un vector normal a la hipersuperficie, para cualquier función escalar  $\phi$ , la derivada de Lie se comporta de la siguiente manera:

$$\mathfrak{L}_{\vec{n}}\gamma_{ij} = \frac{1}{\phi} \mathfrak{L}_{\phi \vec{n}}\gamma_{ij}. \quad (3.9)$$

Si escogemos como función escalar al lapso  $\alpha$  se tiene que:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2} \mathfrak{L}_{\alpha \vec{n}}\gamma_{ij} = \frac{1}{2\alpha} (\mathfrak{L}_{\vec{r}} - \mathfrak{L}_{\vec{\beta}})\gamma_{ij}, \quad (3.10)$$

lo que implica que:

$$(\mathfrak{L}_{\vec{r}} - \mathfrak{L}_{\vec{\beta}})\gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij}, \quad (3.11)$$

utilizando el hecho que  $\mathfrak{L}_{\vec{r}} = \partial_t$  se obtiene:

$$\partial_t \gamma_{ij} - \mathfrak{L}_{\vec{\beta}}\gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij}, \quad (3.12)$$

lo cual se puede escribir como:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + P_i^k \nabla_k \beta_j + P_j^k \nabla_k \beta_i, \quad (3.13)$$

donde  $P_i^k \nabla_k$  es la proyección sobre las hipersuperficies  $\Sigma$  de la derivada covariante. Este resultado nos acerca en gran parte a reescribir las ecuaciones de Einstein, pues se ha obtenido una ecuación de evolución para la métrica espacial  $\gamma_{ij}$ ; ahora nos enfocaremos en cerrar el sistema, lo cual consiste en obtener una ecuación de evolución para la *curvatura extrínseca*

$K_{ij}$ . Hasta ahora únicamente hemos hablado de conceptos geométricos, no se han mencionado las ecuaciones de campo de Einstein aún, precisamente la ecuación de evolución de  $K_{ij}$ , que nos hace falta para cerrar dicho sistema, se obtendrá de dichas ecuaciones.

### Constricciones

Como se había mencionado, las ecuaciones de campo de Einstein en su forma covariante son poco convenientes para tratar al campo gravitacional como un sistema que evoluciona en el tiempo, por lo que debemos escribirlas en la formulación 3+1, para ello requerimos de proyectarlas en las hipersuperficies con la ayuda del operador de proyección  $P_\nu^\mu$ . Para lograrlo comenzamos proyectando el tensor de Riemann  $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ , después se proyecta un índice en la dirección normal y finalmente una vez más se hace la proyección de dos índices en la dirección normal, por las simetrías del tensor de Riemann, todas estas proyecciones son cero, por lo que se tiene:

$$P_\alpha^\delta P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda n^\nu R_{\delta\kappa\lambda\nu} = D_\beta K_{\alpha\mu} - D_\alpha K_{\beta\mu}, \quad (3.14)$$

$$\gamma_\alpha^\delta \gamma_\beta^\kappa \gamma_\mu^\lambda \gamma_\nu^\sigma, R_{\delta\kappa\lambda\sigma} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + K_{\alpha\mu} K_{\beta\nu} - K_{\alpha\nu} K_{\beta\mu}, \quad (3.15)$$

donde  $D$  es la derivada covariante 3-dimensional  $D_\mu = P_\mu^\alpha \nabla_\alpha$ ; notamos que:

$$\begin{aligned} P^{\alpha\mu} P^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= (g^{\alpha\mu} + n^\alpha n^\mu)(g^{\beta\nu} + n^\beta n^\nu) R_{\alpha\beta\mu\nu} \\ &= R + 2n^\mu n^\nu R_{\mu\nu} \\ &= 2n^\mu n^\nu G_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

donde tenemos que  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein; por otro lado tenemos que:

$$P^{\alpha\mu} P^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

sustituyendo en la ecuación anterior se tiene:

$$2n^\mu n^\nu G_{\mu\nu} = R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}, \quad (3.17)$$

utilizando las ecuaciones de Einstein tenemos (3.1):

$$R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} = 16\pi\rho, \quad (3.18)$$

donde  $\rho \equiv n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$  corresponde a la densidad de energía medida por un observador Euleriano. Notamos que ésta no es una ecuación de evolución, pero sí una restricción que debe satisfacerse a todo tiempo. Esta ecuación es conocida como restricción *Hamiltoniana* o de *energía*.

Consideremos ahora la contracción del tensor de Einstein:

$$P^{\alpha\mu}n^\nu G_{\mu\nu} = P^{\alpha\mu}n^\nu R_{\mu\nu} \quad (3.19)$$

las ecuaciones de Codazzi-Mainardi implican:

$$\gamma^{\alpha\mu}n^\nu G_{\mu\nu} = D^\alpha K - D_\mu K^{\alpha\mu}, \quad (3.20)$$

ocupando las ecuaciones de campo de Einstein tenemos:

$$D_\mu(K^{\alpha\mu} - \gamma^{\alpha\mu}K) = 8\pi j^\alpha, \quad (3.21)$$

donde  $j^\alpha \equiv -P^{\alpha\mu}n^\nu T_{\mu\nu}$  es la densidad de momento medida por un observador Euleriano. Las ecuaciones (3.21) se conocen como *constricciones de momento*; finalmente las constricciones Hamiltoniana y de momento (3.18), (3.21) toman la forma:

$$\begin{aligned} R + K^2 - K_{ij}K^{ij} &= 16\pi\rho, \\ D_\mu(K^{\alpha\mu} - \gamma^{\alpha\mu}K) &= 8\pi j^\alpha. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Es importante notar que (3.22) no son ecuaciones de evolución y son independientes de la norma  $(\alpha, \beta^i)$ , esto era de esperarse pues estas funciones únicamente determinan cómo es que las coordenadas cambian de una hipersuperficie  $\Sigma_t$  a la siguiente  $\Sigma_{t+1}$ , mientras que las constricciones son relaciones que deben cumplir las variables que describen el campo gravitacional  $(\gamma_{ij}, K_{ij})|_\Sigma$  de la hipersuperficie  $\Sigma_i$ .

### Ecuaciones ADM

Las constricciones Hamiltoniana y de momento son 4 ecuaciones del campo de Einstein, y como se vió, estas no corresponden a las ecuaciones de evolución del campo gravitacional, pero nos dan las relaciones que las variable dinámicas deben satisfacer a todo tiempo. La evolución del campo gravitacional se encuentra dentro de las 6 ecuaciones de Einstein restantes. Para lograr encontrar estas ecuaciones es necesario proyectar el tensor de Riemann a lo largo de un vector normal dos veces.

$$P_\mu^\delta P_\nu^\kappa n^\lambda n^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma} = \mathfrak{L}_{\vec{n}}K_{\mu\nu} + K_{\mu\lambda}K_\nu^\lambda + \frac{1}{\alpha}D_\mu D_\nu \alpha, \quad (3.23)$$

donde (3.23) involucra la derivada de Lie de la curvatura extrínseca a lo largo de la dirección normal, la cual representa la evolución temporal, por otro lado se tiene:

$$P_\mu^\delta P_\nu^\kappa (n^\lambda n^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma} + R_{\delta\kappa}) = R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - K_{\mu\lambda}K_\nu^\lambda, \quad (3.24)$$

que junto con (3.23) permite llegar a la relación:



$$\mathfrak{L}_{\vec{t}}K_{\mu\nu} - \mathfrak{L}_{\vec{\beta}}K_{\mu\nu} = -D_\mu D_\nu \alpha + \alpha(-P_\mu^\delta P_\nu^\kappa R_{\delta\kappa} + R_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} - 2K_{\mu\lambda}K_\nu^\lambda). \quad (3.25)$$

Usando las ecuaciones de Einstein (3.1) escritas en términos del tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{\vec{t}}K_{\mu\nu} - \mathfrak{L}_{\vec{\beta}}K_{\mu\nu} &= -D_\mu D_\nu \alpha + \alpha(R_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} - 2K_{\mu\lambda}K_\nu^\lambda) \\ &\quad + 4\pi\alpha[\gamma_{\mu\nu}(S - \rho) - 2S_{\mu\nu}], \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde hemos defido  $S_{\mu\nu} \equiv P_\mu^\alpha P_\nu^\beta T_{\alpha\beta}$  como el tensor de energía-momento medido por un observador Euleriano ( $S \equiv S_\mu^\mu$  la traza); finalmente escribiendo  $\mathfrak{L}_{\vec{t}} = \partial_t$ ,  $\mathfrak{L}_{\vec{\beta}} = \beta^\lambda \partial_\lambda K_{\mu\nu} + K_{\lambda\mu} \partial_\nu \beta^\lambda + K_{\lambda\nu} \partial_\mu \beta^\lambda$  y concentrándonos en las componentes espaciales, la relación (3.26) queda:

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} &= \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ki} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k - D_i D_j \alpha \\ &\quad + \alpha(R_{ij} + KK_{ij} - 2K_{ik}K_j^k) + 4\pi\alpha[\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Finalmente, la evolución temporal de las variables dinámicas queda determinada por las ecuaciones *Arnowitt-Deser-Misner (ADM)*:

$$\begin{aligned} \partial_t \gamma_{ij} &= -2\alpha K_{ij} + P_i^k \nabla_k \beta_j + P_j^k \nabla_k \beta_i, \\ \partial_t K_{ij} &= \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ki} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k - D_i D_j \alpha \\ &\quad + \alpha(R_{ij} + KK_{ij} - 2K_{ik}K_j^k) + 4\pi\alpha[\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} H &\equiv \nu R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho, \\ M &\equiv D_\mu(K^{\alpha\mu} - \gamma^{\alpha\mu}K) = 8\pi j^\alpha. \end{aligned} \quad (3.29)$$

que son las ecuaciones de campo de Einstein (3.1) representadas como un problema de Cauchy de valores iniciales.

## 3.2 Hidrodinámica desde la perspectiva de la descripción 3+1

En esta sección trataremos la dinámica de un fluido macroscópico relativista desde el punto de vista de la formulación, consideraremos al gas como un medio continuo, esto quiere decir que cualquier elemento del gas siempre se supondrá que está constituido por un gran número de moléculas; estrictamente cuando nos refiramos a un elemento de fluido, estaremos hablando de algo infinitesimalmente pequeño respecto al volumen total del fluido en cuestión, pero grande en comparación con la distancia entre sus moléculas. Para describir un fluido existen dos tipos de enfoques:

1. Euleriano. Consiste en describir al fluido desde la perspectiva de un observador fijo que se encuentra fuera del fluido, analizando las propiedades físicas que describen el estado del fluido en movimiento. Por llamarlo de alguna manera, ésta descripción corresponde a la de un observador espectador.
2. Lagrangiano. Consiste en describir al fluido desde el punto de vista de un elemento de fluido. Esto es, analizar cómo cambian las cantidades inherentes al fluido en dicho elemento de volumen, lo cual implica que nuestro sistema de referencia se mueve junto con el elemento de fluido. A este sistema de referencia se le llama comóvil.

En el presente trabajo consideraremos un fluido perfecto, esto es, un fluido que no presenta efectos de viscosidad ni conducción de calor. El modelo correspondiente a un fluido está descrito por el tensor de energía momento:

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 h u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (3.30)$$

donde  $g^{\mu\nu}$  es el tensor métrico,  $u^\mu$  la quadri-velocidad de los elementos de fluido,  $p$  la presión,  $\rho_0$  la densidad de masa en reposo,  $\epsilon$  la energía interna y  $h \equiv 1 + \epsilon + p/\rho_0$  la entalpía específica.

Para cerrar el sistema es necesario introducir una ecuación de estado; en termodinámica clásica es posible relacionar las variables termodinámicas entre sí, por ejemplo, la presión  $p$  con la densidad  $\rho_0$  y entropía  $s$ , etc, esta relación representa un estado de equilibrio posible del sistema y en general es de la forma:

$$f(p, \rho, s) = 0, \quad (3.31)$$

en principio sólo necesitamos conocer un par de estas variables para determinar las restantes, así que resolviendo para una de ellas tendríamos la relación:

$$p = p(\rho, s). \quad (3.32)$$

En un fluido perfecto únicamente ocurren procesos adiabáticos en los elementos que lo conforman, es decir, la entropía se mantiene constante. Para un gas ideal, sabemos que la energía interna  $U$  es función únicamente de la temperatura y no del volumen, es decir  $U = U(T)$ , esto nos lleva a la relación:

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT = C_V dT \quad (3.33)$$

donde  $C_V$  es el calor específico a volumen constante; intergrando ambos lados llegamos a:

$$U = C_V T. \quad (3.34)$$

Por otro lado conocemos la ecuación de estado para un mol de gas ideal,  $pV = RT$ , sustituyendo en la ecuación (3.34) la energía interna será:

$$U = \frac{C_V}{R} pV = \frac{C_V}{C_V - C_p} pV = \frac{1}{\Gamma - 1} pV, \quad (3.35)$$

donde  $\Gamma$  es el cociente entre calores específicos y donde se ocupó del hecho de que para un gas ideal  $R = C_p - C_V$ . Finalmente, en términos de la energía interna específica  $\epsilon$  y la densidad de masa  $\rho_0$  en reposo, llegamos a:

$$P = \frac{1}{\Gamma - 1} \rho_0 \epsilon. \quad (3.36)$$

La relación (3.36) es la ecuación de estado para un gas ideal. El tensor de energía-momento comúnmente se puede encontrar en la literatura escrito en la forma  $T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}$ , donde  $\rho$  es la densidad de energía total del fluido que puede expresarse en términos de la densidad de masa en reposo y la energía interna como  $\rho = \rho_0(1 + \epsilon)$ .

Las ecuaciones de evolución de un fluido perfecto están dadas por la conservación de la masa en reposo y la conservación local del tensor de energía-momento, consecuencia de las identidades de Bianchi, que respectivamente son

$$\nabla_\mu(\rho_0 u^\mu) = 0, \quad (3.37)$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.38)$$

Usando la relación:

$$\nabla_\mu \zeta^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \zeta^\mu), \quad (3.39)$$

donde  $g$  es el determinante del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , podemos escribir las ecuaciones (3.37) y (3.38) como:

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\rho u^\mu) = 0, \quad (3.40)$$

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}T^\mu_\nu) = \sqrt{-g}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}T^\mu_\nu. \quad (3.41)$$

Usando la métrica 3+1 (3.5) tenemos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} &= \alpha \sqrt{\gamma}, \\ v^j &= \frac{u^j}{W} + \frac{\beta^j}{\alpha}, \\ W &= \alpha u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma_{ij}v^i v^j}}, \end{aligned}$$

aquí  $v^i$  es la 3-velocidad del fluido medida por un observador Euleriano,  $W$  el factor de Lorentz.

El desarrollo de (3.40) y (3.41) constituye el sistema de ecuaciones de Euler. Es posible escribir dicho sistema de modo apropiado para aplicar los métodos numéricos basados en volúmenes finitos, esto es, definiendo las nuevas variables  $D$ ,  $J_k$  y  $\tau$  como

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{\gamma}\rho W, \\ J_i &= \sqrt{\gamma}\rho h W^2 v_i, \\ \tau &= \sqrt{\gamma}(\rho h W^2 - p - \rho W), \end{aligned} \quad (3.42)$$

las ecuaciones de conservación (3.40) y (3.41) se reescriben como:

$$\begin{aligned} \partial_t D + \partial_k[D(\alpha v^k - \beta^k)] &= 0, \\ \partial_t J_i + \partial_k[J_i(\alpha v^k - \beta^k) + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_i^k] &= \alpha \sqrt{\gamma} \Gamma^\mu_{\nu i} T^\nu T_\mu, \\ \partial_t \tau + \partial_k[\tau(\alpha v^k - \beta^k) + \alpha \sqrt{\gamma} p v^k] &= \alpha^2 \sqrt{\gamma} (\Gamma^\mu_{\nu i} T^\nu T_\mu). \end{aligned} \quad (3.43)$$

De este modo el sistema de ecuaciones de evolución para  $D$ ,  $J_i$ , y  $\tau$  es del tipo balance de flujos:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^i(\mathbf{u})}{\partial x^i} = \mathbf{S}, \quad (3.44)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector de variables conservativas,  $\mathbf{F}$  el vector de flujos y  $\mathbf{S}$  el vector de fuentes. En forma matricial este sistema de ecuaciones se escribe:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} D \\ J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ \tau \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^i = \begin{pmatrix} \alpha \left( v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) D \\ \alpha \left( v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) J_1 + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_1^i \\ \alpha \left( v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) J_2 + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_2^i \\ \alpha \left( v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) J_3 + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_3^i \\ \alpha \left( v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) \tau + \alpha \sqrt{\gamma} p v^i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu 1}^\sigma \\ \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu 2}^\sigma \\ \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu 3}^\sigma \\ \alpha \sqrt{\gamma} (T^{\mu 0} \partial_{\mu\alpha} - \alpha T^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0) \end{pmatrix},$$

con la relación entre variables conservativas ( $D, J_i, \tau$ ) y primitivas ( $\rho, \epsilon, p, v^i$ ):

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{\gamma} \rho W, \\ J_i &= \sqrt{\gamma} \rho h W^2 v_i, \\ \tau &= \sqrt{\gamma} (\rho h W^2 - p - \rho W), \end{aligned} \tag{3.45}$$

con lo cual se tiene un sistema de 5 ecuaciones y 6 variables por determinar, por lo que se requiere una ecuación de estado  $p = p(p, \epsilon)$  para cerrar el sistema.

En el formalismo 3+1 de la relatividad general, las ecuaciones de evolución (3.28) y las constricciones (3.22), involucran a la densidad de energía de la materia como la fuente del campo gravitacional, esta densidad de energía está asociada a observadores Eulerianos cuya cuadri-velocidad  $u^\mu$  es normal a la hipersuperficie espacial, que en general no concuerda con la de un observador Lagrangiano. Para evitar confusión entre las cantidades medidas entre ambos observadores definimos las relaciones entre las variables conservativas ( $D, J_i, \tau$ ) y las cantidades que se utilizan en las ecuaciones ADM de la geometría, producto de la proyección en las hipersuperficies espaciales:

$$\begin{aligned} \rho_{ADM} &\equiv n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} = \rho h W^2 - p = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\tau + D), \\ j^i &\equiv -n^\mu P^{vi} T_{\mu\nu} = \rho h W^2 v^i = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} J^i, \\ S^{ij} &\equiv P^{\mu i} P^{\nu j} T_{\mu\nu} = \rho h W^2 v^i v^j + \gamma^{ij} p. \end{aligned} \tag{3.46}$$

### 3.3 Reducción al caso con simetría esférica en coordenadas esféricas

Para el caso esféricamente simétrico, el elemento de línea del espacio-tiempo (3.5) en coordenadas esféricas se reduce a:

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \gamma_{rr}\beta^r\beta^r)dt^2 + 2\gamma_{rr}\beta^r dt dr + \gamma_{rr}dr^2 + \gamma_{\theta\theta}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.47)$$

donde  $t$  es la coordenada temporal y  $(r, \theta, \phi)$  son las coordenadas esféricas y se asumen unidades geométricas donde  $G = c = 1$ . El vector *shift* es  $\beta^i = (\beta^r, 0, 0)$  pues al usar coordenadas esféricas el espacio-tiempo se está foliado con esferas y solamente  $\beta^r$  tiene sentido; además  $\beta^r = \beta^r(t, r)$  al igual que el lapso  $\alpha = \alpha(t, r)$  y las funciones métricas  $\gamma_{rr} = \gamma_{rr}(t, r)$  y  $\gamma_{\theta\theta} = \gamma_{\theta\theta}(t, r)$ . Por otra parte, trataremos el caso de flujo radial, entonces suponemos que la 3-velocidad  $\mathbf{v} = (v^r, 0, 0)$  sólo tiene componente radial, entonces las variables  $J_\phi = \sqrt{\gamma}\rho h W^2 \gamma_{\phi\phi} v^\phi = 0$ ,  $J_\theta = \sqrt{\gamma}\rho h W^2 \gamma_{\theta\theta} v^\theta = 0$  y por lo tanto, los flujos, las fuentes y las variables conservativas se convierten en:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} D \\ J_r \\ J_\theta \\ J_\phi \\ \tau \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^r = \begin{pmatrix} \alpha \left( v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) D \\ \alpha \left( v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) J_r + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_r^r \\ \alpha \left( v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) J_\theta + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_\theta^r \\ \alpha \left( v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) J_\phi + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_\phi^r \\ \alpha \left( v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) \tau + \alpha \sqrt{\gamma} p v^r \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}^\theta = \begin{pmatrix} \alpha \left( v^\theta - \frac{\beta^\theta}{\alpha} \right) D \\ \alpha \left( v^\theta - \frac{\beta^\theta}{\alpha} \right) J_r + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_r^\theta \\ \alpha \left( v^\theta - \frac{\beta^\theta}{\alpha} \right) J_\theta + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_\theta^\theta \\ \alpha \left( v^\theta - \frac{\beta^\theta}{\alpha} \right) J_\phi + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_\phi^\theta \\ \alpha \left( v^\theta - \frac{\beta^\theta}{\alpha} \right) \tau + \alpha \sqrt{\gamma} p v^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \sqrt{\gamma} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}^\phi = \begin{pmatrix} \alpha \left( v^\phi - \frac{\beta^\phi}{\alpha} \right) D \\ \alpha \left( v^\phi - \frac{\beta^\phi}{\alpha} \right) J_r + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_r^\phi \\ \alpha \left( v^\phi - \frac{\beta^\phi}{\alpha} \right) J_\theta + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_\theta^\phi \\ \alpha \left( v^\phi - \frac{\beta^\phi}{\alpha} \right) J_\phi + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_\phi^\phi \\ \alpha \left( v^\phi - \frac{\beta^\phi}{\alpha} \right) \tau + \alpha \sqrt{\gamma} p v^\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \sqrt{\gamma} p \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu 1}^\sigma \\ \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu 2}^\sigma \\ \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu 3}^\sigma \\ \alpha \sqrt{\gamma} (T^{\mu 0} \partial_\mu \alpha - \alpha T^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0). \end{pmatrix},$$

y por tanto hay solamente 3 ecuaciones no triviales, estas son las concernientes a las variables  $\{D, J_r, \tau\}$ ; las demás ecuaciones se cancelan debido la única entrada de  $\mathbf{F}^\theta$  y  $\mathbf{F}^\phi$

dependen sólo de  $(r, t)$  por lo que al derivar respecto a  $\theta$  y  $\phi$ , desaparecen, lo cual hace que nos quede un sistema de 3 ecuaciones únicamente:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} D \\ J_r \\ \tau \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^r = \begin{pmatrix} \alpha \left( v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) D \\ \alpha \left( v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) J_r + \alpha \sqrt{\gamma} p \\ \alpha \left( v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) \tau + \alpha \sqrt{\gamma} p v^r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu r}^{\sigma} \\ \alpha \sqrt{\gamma} (T^{\mu 0} \partial_{\mu} \alpha - \alpha T^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0) \end{pmatrix}.$$

Para expresar las ecuaciones anteriores explícitamente es necesario calcular las componentes del tensor energía-momento (3.30), así como los símbolos de conexión no triviales ( $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ ), con ayuda de las componentes de la métrica (3.47). Las componentes del tensor energía-momento no triviales son:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{\alpha^2} (\rho h W^2 - p), \\ T^{r0} &= \frac{\rho h W^2}{\alpha} \left( v^r - \frac{\beta}{\alpha} \right) + p \frac{\beta}{\alpha^2}, \\ T^{rr} &= \rho h W^2 \left( v^r - \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 + p \left( \frac{1}{\gamma_{rr}} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right), \\ T^{\theta\theta} &= \frac{p}{\gamma_{\theta\theta}}, \\ T^{\phi\phi} &= \frac{p}{\gamma_{\phi\phi}}, \end{aligned} \tag{3.48}$$

todas las demás componentes son cero ya sea porque  $u^{\theta} = u^{\phi} = 0$  ó porque  $g^{\mu\nu} = 0$ .

Para calcular los símbolos de conexión necesarios  $\{\Gamma_{\mu r}^{\sigma}, \Gamma_{\mu\nu}^0\}$  recurrimos a la fórmula:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{g^{\alpha\mu}}{2} \left( \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\mu}} \right) \tag{3.49}$$

y los no triviales son:

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{\beta}{\alpha^2}[\alpha\alpha' - \frac{1}{2}\gamma_{rr}\beta\beta' - \beta^2\gamma'_{rr}] + \frac{1}{2\alpha^2}\beta^2\partial_t\gamma_{rr}, \\
\Gamma^0_{0r} &= \frac{1}{\alpha^2}[\alpha\alpha' - \frac{1}{2}\beta^2\gamma'_{rr} - \beta\beta'\gamma_{rr}] + \frac{1}{2\alpha^2}\beta^2\partial_t\gamma_{rr}, \\
\Gamma^0_{rr} &= -\frac{1}{\alpha^2}[\gamma_{rr}\beta' + \frac{1}{2}\beta\gamma'_{rr}] + \frac{1}{2\alpha^2}\partial_t\gamma_{rr}, \\
\Gamma^0_{\theta\theta} &= -\frac{\beta}{2\alpha^2}\gamma'_{\theta\theta} + \frac{1}{2\alpha^2}\partial_t\gamma_{\theta\theta}, \\
\Gamma^0_{\phi\phi} &= \sin^2\theta\Gamma^0_{\theta\theta}, \\
\Gamma^r_{0r} &= \frac{\beta}{\alpha^2}[-\alpha\alpha' + \gamma_{rr}\beta\beta' + \frac{1}{2}\beta^2\gamma'_{rr}] + \frac{\partial_t\gamma_{rr}}{2\gamma_{rr} - \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\partial_t\gamma_{rr}}, \\
\Gamma^r_{rr} &= \frac{\beta}{\alpha^2}[\gamma_{rr}\beta' + \frac{1}{2}\beta\gamma'_{rr} + \frac{1}{2}\frac{\gamma'_{rr}}{\gamma_{rr}}] - \frac{\beta}{2\alpha^2}\partial_t\gamma_{rr}, \\
\Gamma^\theta_{\theta r} &= \frac{\gamma'_{\theta\theta}}{2\gamma_{\theta\theta}}, \\
\Gamma^\phi_{\phi r} &= \frac{\gamma'_{\phi\phi}}{2\gamma_{\phi\phi}}.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Utilizando esta información podemos calcular la segunda entrada del vector de fuentes

$$\begin{aligned}
\alpha\sqrt{\gamma}T^{\mu\nu}g_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu r} &= \alpha\sqrt{\gamma}\{T^{00}[(-\alpha^2 + \gamma_{rr}\beta^2)\Gamma^0_{0r} + \gamma_{rr}\beta\Gamma^r_{0r}] \\
&\quad + T^{r0}[(-\alpha^2 + \gamma_{rr}\beta^2)\Gamma^0_{rr} + \gamma_{rr}\Gamma^r_{0r} + \gamma_{rr}\beta(\Gamma^r_{rr} + \Gamma^0_{0r})] \\
&\quad + T^{rr}[\gamma_{rr}\Gamma^r_{rr} + \gamma_{rr}\beta\Gamma^0_{rr}] \\
&\quad + p\Gamma^\theta_{\theta r} + p\Gamma^\phi_{\phi r}, \}
\end{aligned}$$

y de igual forma la tercera entrada de las fuentes

$$\alpha\sqrt{\gamma}(T^{\mu 0}\partial_\mu\alpha - \alpha T^{\mu\nu}\Gamma^0_{\mu\nu}) = T^{r0}(-\alpha - 2\alpha\Gamma^0_{r0}) - \alpha T^{00}\Gamma^0_{00} - \alpha T^{rr}\Gamma^0_{rr} - 2\alpha T^{\theta\theta}\Gamma^0_{\theta\theta}.$$

Las ecuaciones ADM para la geometría (3.28) y evolución de la métrica en el caso con simetría esférica en coordenadas esféricas con métrica (3.47) y shift  $\beta^r = (\beta, 0, 0)$  omitiendo el superíndice  $r$  se reducen a:



$$\begin{aligned}
\partial_t \gamma_{rr} &= -2\alpha K_{rr} + \beta^k \partial_k \gamma_{rr} + \gamma r k \partial_r \beta^k + \gamma_{rk} \partial_r \beta^r \\
&= -2\alpha K_{rr} + \beta \gamma'_{rr} + 2\beta' \gamma_{rr}, \\
\partial_t \gamma_{\theta\theta} &= -2\alpha K_{\theta\theta} + \beta^k \partial_k \gamma_{\theta\theta} + \gamma_{\theta k} \partial_\theta \beta^k + \gamma_{\theta k} \partial_\theta \beta^k \\
&= -2\alpha K_{\theta\theta} + \beta \gamma'_{\theta\theta}, \\
\partial_t K_{rr} &= -\nabla_r \nabla_r \alpha + \alpha (R_{rr} - 2\gamma^{kl} K_{rk} K_{rl} + \beta^k \partial_k K_{rr} \\
&\quad + K_{rk} \partial_r \beta^k + 4\pi\alpha [(T - \rho_{ADM})\gamma_{rr} - 2T_{rr}]) \\
&= -\alpha'' + \alpha' \frac{\gamma'_{rr}}{2\gamma_{rr}} - \alpha \frac{\gamma''_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} + \frac{1}{2}\alpha \left( \frac{\gamma'_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} \right)^2 \\
&\quad + \alpha \frac{\gamma'_{rr} \gamma'_{\theta\theta}}{2\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} + 2\alpha \frac{K_{rr} K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} - \alpha \frac{K_{rr}^2}{\gamma_{rr}} + \beta K'_{rr} \\
&\quad + 2\beta' K_{rr} + 4\pi\alpha [(T - \rho_{ADM})\gamma_{rr} - 2T_{rr}], \\
\partial_t K_{\theta\theta} &= -\alpha' \frac{\gamma_{\theta\theta}}{2\gamma_{rr}} - \alpha \frac{\gamma''_{\theta\theta}}{2\gamma_{rr}} + \alpha \frac{\gamma'_{rr} \gamma'_{\theta\theta}}{4\gamma_{rr}^2} + \alpha \left( 1 + \frac{K_{rr} K_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}} \right) \\
&\quad + \beta K'_{\theta\theta} + 4\pi\alpha [(T - \rho_{ADM})\gamma_{\theta\theta} - 2T_{\theta\theta}], \\
H &= R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi\rho_{ADM}, \\
M &= \nabla_j K^{rj} - \nabla^r K = 8\pi j^r.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Estas son las ecuaciones de evolución y de constricción de la geometría que tienen que ser resueltas simultáneamente junto con las de la hidrodinámica que explícitamente son:

$$\begin{aligned}
\partial_t D &= \partial_r [\alpha(v^r - \beta^r/\alpha)D], \\
\partial_t J_r &= \partial_r [\alpha(v^r - \beta^r/\alpha)J_r] + \alpha \sqrt{\gamma} p + \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu r}^\sigma, \\
\partial_t \tau &= \partial_r [\alpha(v^r - \beta^r/\alpha)\tau] + \alpha \sqrt{\gamma} p v^r + \alpha \sqrt{\gamma} (T^{\mu 0} \partial_\mu \alpha - \alpha T^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0).
\end{aligned} \tag{3.53}$$

El conjunto de ecuaciones (3.51) y (3.53) pueden ser resueltas con los métodos numéricos explicados en el capítulo 2, esto se mostrará en el siguiente par de capítulos, primero en el capítulo 4, la evolución de la geometría se hará utilizando el método de diferencias finitas para el caso en que no hay fuentes para el campo gravitacional (vacío), en simetría esférica en coordenadas esféricas. Las ecuaciones de la hidrodinámica se resolverán con los métodos de alta resolución por captura de choque en el capítulo 5, finalmente, en el capítulo 6 se evolucionan (3.51), (3.53) simultáneamente.

### ¿Cómo lidiar con la singularidad de un agujero negro?

Una dificultad que surge al atacar el problema de evolución de un hoyo negro, es la existencia de singularidades asociadas, por una parte, a la naturaleza física de dicho objeto y por otra a las coordenadas que se utilizan para describir dicho objeto; esta complicación podría convertirse en un problema al momento de resolver las ecuaciones de Einstein numéricamente, por ejemplo, podrían hacer que el tiempo que nuestro programa funcione sea corto o que simplemente desde un inicio diverjan los resultados de nuestro cálculo, por lo mismo, es necesario encontrar una manera de evitar dichas singularidades. Un ejemplo típico del uso de coordenadas singulares es procesos de acreción se da cuando se usan coordenadas de Schwarzschild para describir un hoyo negro esféricamente simétrico. Una manera de evitar la singularidad producida por las coordenadas consiste en elegir coordenadas que sean regulares en los puntos donde aparecen las singularidades.

Por otra parte, en el caso del hoyo negro de Schwarzschild hay una singularidad en  $r = 0$ , pues los invariantes escalares de curvatura son singulares ahí. Para evitar la evolución del espacio-tiempo en regiones que contienen este tipo de singularidades se diseñó el método de excisión, que consiste en remover un trozo del dominio numérico que contiene la singularidad en cada hipersuperficie espacial, y que esté contenido en la intersección del horizonte de eventos y dicha hipersuperficie. Así, lo que ocurra en la frontera del dominio removido tendrá la propiedad de que tenderá a desplazarse hacia la singularidad [Seidel & Suen 1992]. La frontera del trozo removido se conoce como frontera de excisión y en el caso especial de hoyos negros esféricamente simétricos descritos en coordenadas esféricas, dicha frontera es solamente un punto. Finalmente, en la frontera de excisión no es necesario aplicar condiciones de frontera, lo que se hace es simplemente extrapolar los valores de las variables que se evolucionan, usando valores en los puntos vecinos cercanos [Seidel & Suen 1992, Thornburg 1996].

# Capítulo 4

## Evolución de un hoyo negro en el vacío

La primera prueba antes de estudiar el problema de la acreción del gas con evolución del hoyo negro es preciso verificar que los métodos numéricos usados para evolucionar la geometría funcionan adecuadamente. Por ello en este capítulo se presentan dos pruebas que garantizan que la implementación de esta parte del programa funciona correctamente. Para ello se plantean dos pruebas, una en la que las coordenadas exigen que tanto las funciones métricas como las componentes de la curvatura extrínseca se mantengan aproximadamente independientes del tiempo y otra, en la que se eligen coordenadas que hacen más dinámica la evolución, para poner a prueba en condiciones menos favorables la evolución del espacio-tiempo.

### 4.1 Evolución de la solución exacta en la norma de Eddington-Finkelstein

Una primera prueba que debe superar el código es que debe ser capaz de evolucionar el hoyo negro sin materia, partiendo de los datos iniciales en las coordenadas penetrantes Eddington-Finkelstein (4.3), Fig. 4.1. Para verificarlo, se considera el sistema de ecuaciones (3.51), omitiendo los términos que involucran materia:

$$\begin{aligned}
\partial_t \gamma_{rr} &= -2\alpha K_{rr} + \beta \gamma'_{rr} + 2\beta' \gamma_{rr} \\
\partial_t \gamma_{\theta\theta} &= -2\alpha K_{\theta\theta} + \beta \gamma'_{\theta\theta} \\
\partial_t K_{rr} &= -\alpha'' + \alpha' \frac{\gamma'_{rr}}{2\gamma_{rr}} - \alpha \frac{\gamma''_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} + \frac{1}{2} \alpha \left( \frac{\gamma'_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} \right)^2 \\
&\quad + \alpha \frac{\gamma'_{rr} \gamma'_{\theta\theta}}{2\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} + 2\alpha \frac{K_{rr} K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} - \alpha \frac{K_{rr}^2}{\gamma_{rr}} + \beta K'_{rr} + 2\beta' K_{rr} \\
\partial_t K_{\theta\theta} &= -\alpha' \frac{\gamma'_{\theta\theta}}{2\gamma_{rr}} - \alpha \frac{\gamma''_{\theta\theta}}{2\gamma_{rr}} + \alpha \frac{\gamma'_{rr} \gamma'_{\theta\theta}}{4\gamma_{rr}^2} + \alpha \left( 1 + \frac{K_{rr} K_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}} \right) + \beta K'_{\theta\theta}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

El sistema de ecuaciones de nuestro problema se resolvió como un problema de valores iniciales, utilizando el método de aproximación en diferencias finitas en una malla uniformemente espaciada, a continuación se menciona la metodología del problema:

### Datos iniciales

La evolución del sistema se realizó en un dominio numérico de  $r \in [1.5M, 251M]$ , con un factor de courant de  $\Delta t/\Delta x = 0.25$  y una resolución de  $1 \times 10^{-3}$  con una aproximación de cuarto orden en las derivadas espaciales de primer orden. Los valores al tiempo inicial de las variables geométricas corresponden a los valores de la solución exacta de Schwarzschild en la de norma de Eddington-Finkelstein (4.3) por lo que cumplen con las constricciones Hamiltoniana y de momento al tiempo inicial:

$$\begin{aligned}
R + K^2 - K_{ij} K^{ij} &= 0, \\
\nabla_j K^{rj} - \gamma'^j \nabla_j K &= 0,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{rr} &= 1 + \frac{2M}{r} & \gamma_{\theta\theta} &= r^2 \\
K_{rr} &= -\frac{2M \left(1 + \frac{M}{r}\right)}{r^2 \sqrt{1 + \frac{2M}{r}}} & K_{\theta\theta} &= \frac{2M}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}} \\
\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}} & \beta &= \frac{2M}{r \left(1 + \frac{2M}{r}\right)}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

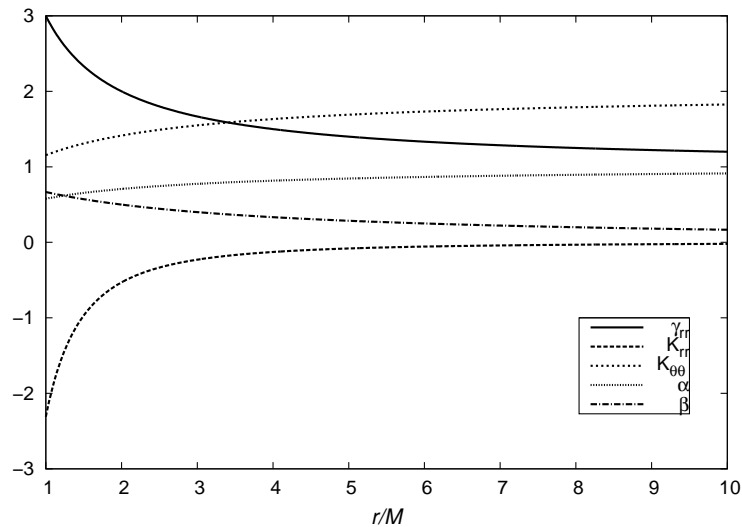


Figura 4.1: Solución de Schwarzschild en la norma de Eddington-Finkelstein, se omite la componente  $\gamma_{\theta\theta} = r^2$ , se presentan las componentes  $\gamma_{rr}$ ,  $K_{rr}$  y  $K_{\theta\theta}$  así como las componentes de la norma  $\alpha, \beta$ .

## Resultados

Se implementó el código que soluciona el sistema en cuestión (4.1), para lograrlo se utilizó el método de diferencias finitas introducido en el capítulo 2, utilizando un integrador Runge-Kutta de 3er orden para la evolución temporal de las variables. Debido a que se resuelven las ecuaciones de Einstein en el vacío, las variables geométricas deben permanecer constantes en el tiempo (o al menos deberian) como se muestra en la Fig. 4.2.

Que las funciones métricas se mantengan casi independientes del tiempo, no basta para mostrar que el código es correcto. En cambio, debe verificarse que se satisfagan las constricciones Hamiltoniana y de momento, las cuales representan el error en sí de nuestros cálculos, dichas expresiones deben tender a cero conforme se aumenta la resolución, este comportamiento se muestra en la Fig. 4.3, donde se grafica la norma  $L_2$  contra tiempo, como se muestra  $H$  y  $M$  convergen a cero con segundo orden.

## 4.2 Evolución de la solución exacta usando una norma distinta

Como se ha visto en el capítulo 3, las constricciones Hamiltoniana y de momento deben satisfacerse a todo tiempo, signo de que estamos resolviendo las ecuaciones de Einstein, esto debe ser independientemente de la norma elegida. En esta sección se satisfacen para cualquier valor de  $\alpha$  y  $\beta$ .

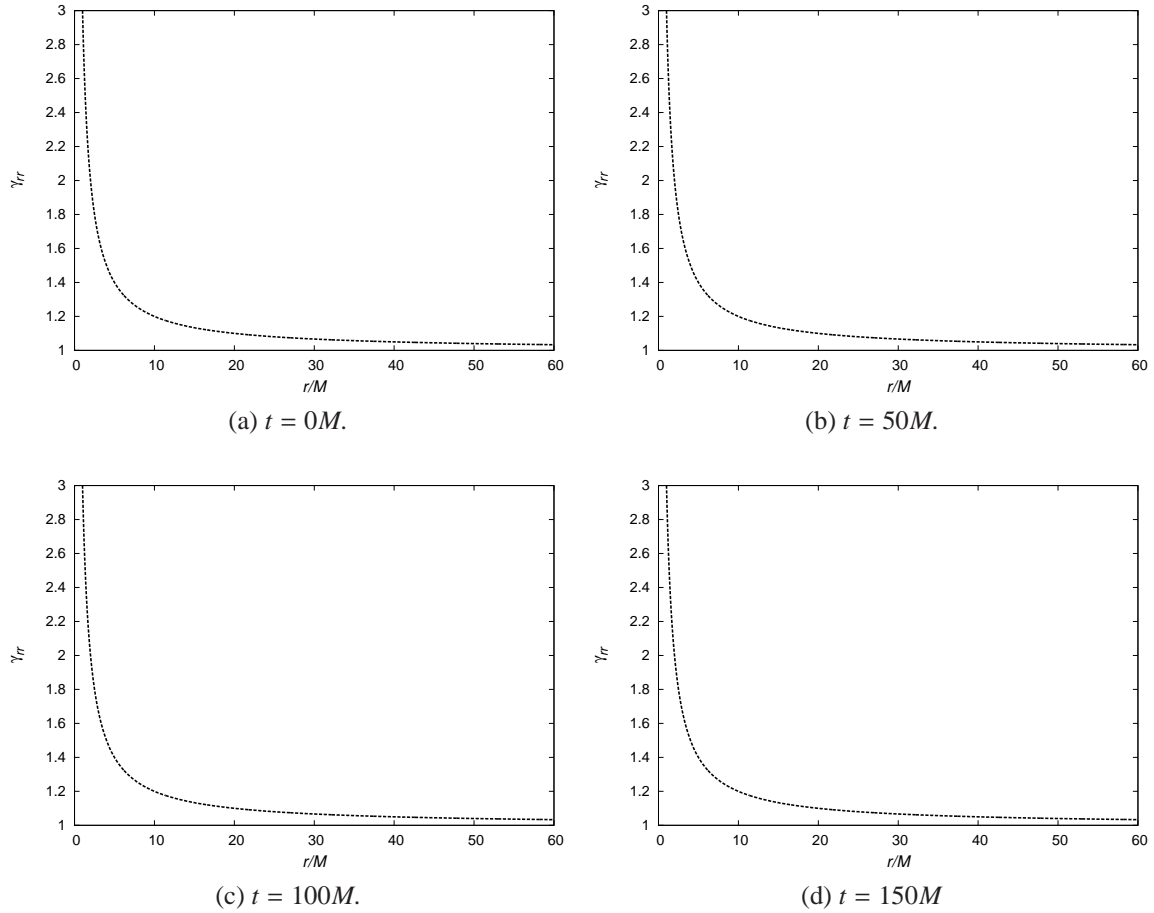


Figura 4.2: Se muestra la evolución de la componente  $\gamma_{rr}$  de la 3-métrica con el gauge exacto EF, para un valor de  $\Gamma = 4/3$  en un dominio de  $r = [1, 250]$  y resolución  $\Delta r = 0.01$ .

### Datos Iniciales

La evolución del sistema se realizó en un dominio numérico de  $r \in [1M, 101M]$ , con un factor de courant de  $\Delta t/\Delta x = 0.25$  y una resolución de  $1 \times 10^{-3}$  con una aproximación de segundo orden en las derivadas espaciales de primero y segundo orden, los valores al tiempo inicial de las variables geométricas y del *shift*  $(\gamma_{rr}, \gamma_{\theta\theta}, K_{rr}, K_{\theta\theta}, \beta)$  corresponden a los valores de la solución exacta de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein y el valor del *lapso*  $\alpha$  se eligió como:

$$\alpha = \alpha_{EF} + \tilde{\alpha}, \quad (4.4)$$

donde  $\alpha_{EF} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2M}{r}}}$  el valor exacto del lapso de la solución de Schwarzschild en coorde-

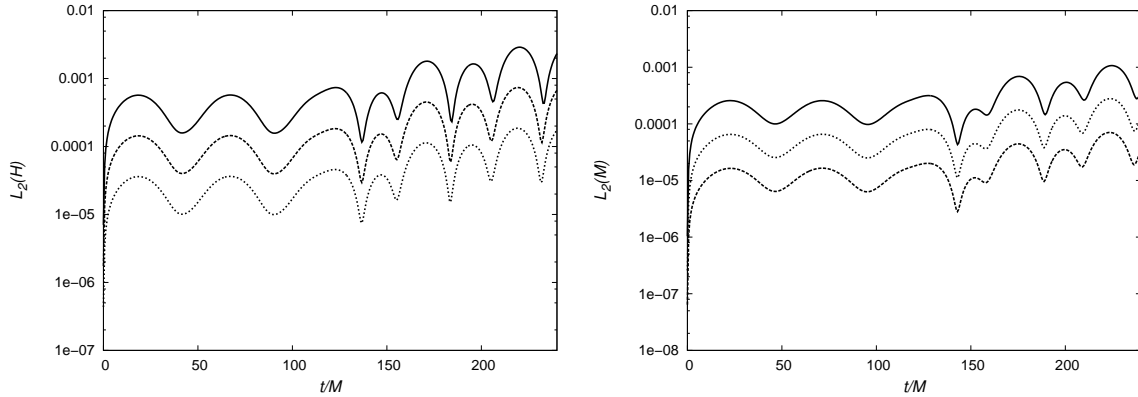


Figura 4.3: Se muestra la norma  $L_2$  de las constricciones Hamiltoniana y de momento usando tres resoluciones distintas,  $\Delta r_1 = 0.001$ ,  $\Delta r_2 = \Delta r_1/2$  y  $\Delta r_3 = \Delta r_2/2$  se observa que conforme aumenta la resolución, el error tiende a cero a segundo orden.

nadas Eddington-Finkelstein y  $\tilde{\alpha} = Ae^{-(r-r_0)^2/\sigma^2}$  un perfil gaussiano; explícitamente:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{rr}(t=0, r) &= 1 + \frac{2M}{r} & \gamma_{\theta\theta}(t=0, r) &= r^2 \\
 K_{rr}(t=0, r) &= -\frac{2M\left(1 + \frac{M}{r}\right)}{r^2\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}} & K_{\theta\theta}(t=0, r) &= \frac{2M}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}} \\
 \alpha(t=0, r) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}} + Ae^{-(r-r_0)^2/\sigma^2} & \beta(t=0, r) &= \frac{2M}{r\left(1 + \frac{2M}{r}\right)}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

## Resultados

Se implementó el código que soluciona el sistema en cuestión (4.1), para lograrlo se utilizó el método de diferencias finitas introducido en el capítulo 2, utilizando un integrador Runge-Kutta de 3er orden para la evolución temporal de las variables. Para dar dinámica de la norma se supuso a la función *lapso* como variable de evolución  $\alpha = \alpha(r, t)$  en la cual  $\tilde{\alpha}$  es la componente con dependencia en  $t$  que cumple con la ecuación de onda:

$$\square \tilde{\alpha} = 0, \tag{4.6}$$

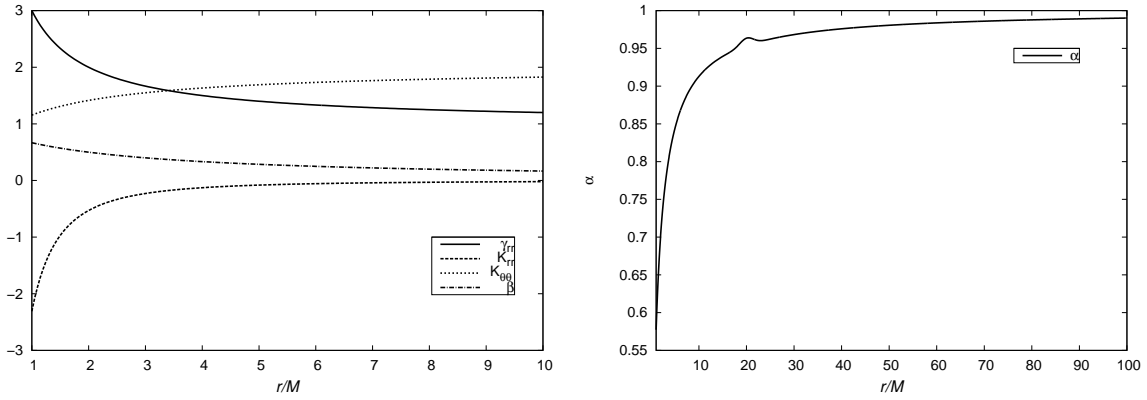


Figura 4.4: Solución de Schwarzschild en la norma de Eddington-Finkelstein, se omite la componente  $\gamma_{\theta\theta} = r^2$ , se presentan las componentes  $\gamma_{rr}$ ,  $K_{rr}$ ,  $K_{\theta\theta}$  y  $\beta$  (derecha) así como el lapso  $\alpha$ , para los parámetros  $A = 1 \times 10^{-2}$ ,  $\sigma = 2$ ,  $r_0 = 20M$  (izquierda).

donde el operador D'Lambertiano se define como  $\square := \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu]$ . La ecuación (4.6) se resolvió como un sistema de primer orden:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\alpha} &= \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} \Pi + \beta \Psi, \\ \partial_t \Pi &= \partial_r \left[ \frac{\alpha \gamma_{\theta\theta}}{\sqrt{\gamma_{rr}}} \Psi + \beta \Pi \right], \\ \partial_t \Psi &= \partial_r \left[ \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} \Pi + \beta \Psi \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde  $\Pi := \sqrt{\gamma}(\partial_t \tilde{\alpha} - \beta \Psi)/\alpha$ ,  $\Psi := \partial_r \tilde{\alpha}$  son las variables de primer orden, las cuales se resolvieron simultáneamente con las demás variables de evolución.

Debido a que se resuelven las ecuaciones de Einstein en el vacío para una función lapso que evoluciona, las variables geométricas deben presentar un cambio respecto a las de la solución exacta hecho que se ilustra en la Fig. 4.5.

En la Fig. 4.6 se muestra la convergencia de las constricciones  $H$  y  $M$ .



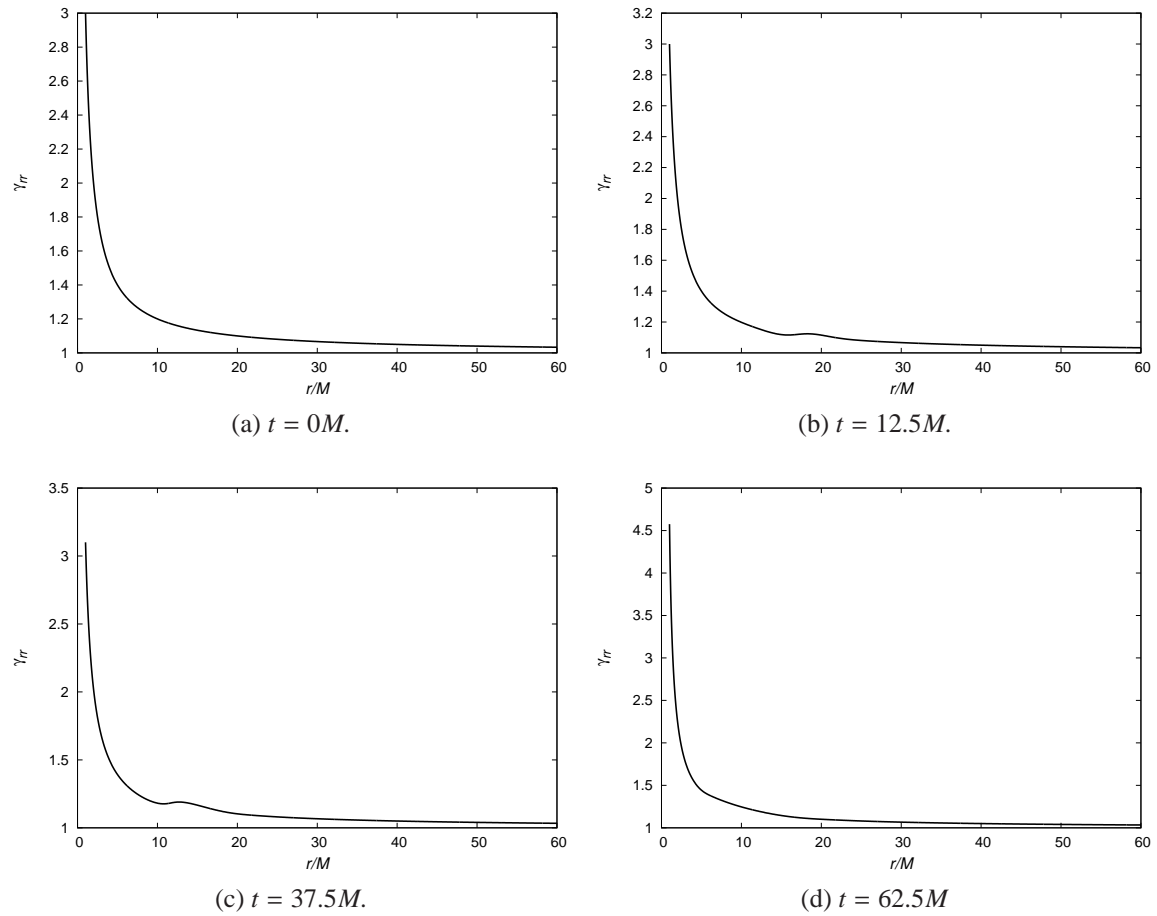


Figura 4.5: Se muestra la evolución de la componente  $\gamma_{rr}$  de la 3-métrica utilizando una norma distinta a la exacta EF en el vacío en un dominio de  $r = [1M, 250M]$  y resolución  $\Delta r = 0.01$ . y parametros de  $\tilde{\alpha}$ ;  $A = 1 \times 10^{-2}$ ,  $\sigma = 2$ ,  $r_0 = 20M$ .

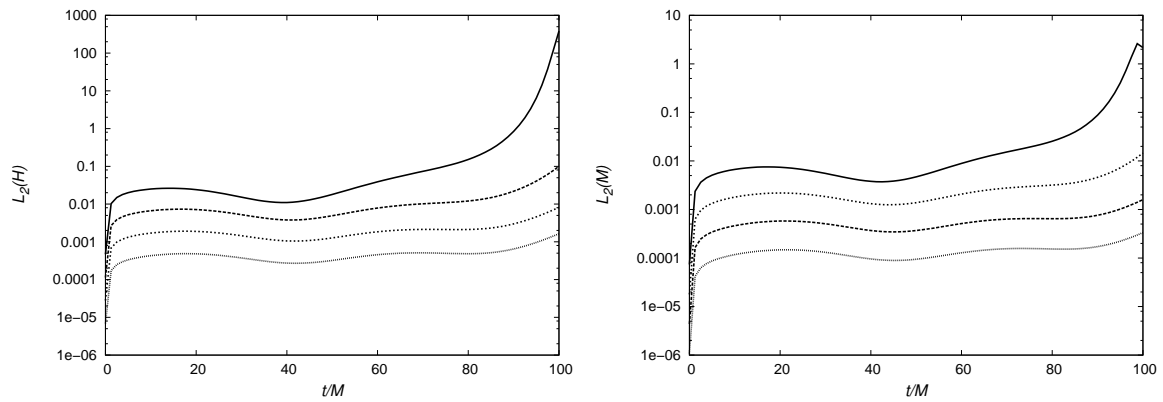


Figura 4.6: Se muestra la norma  $L_2$  de las constricciones Hamiltoniana y de momento usando 4 resoluciones distintas,  $\Delta r_1 = 0.001$ ,  $\Delta r_2 = \Delta r_1/2$  y  $\Delta r_3 = \Delta r_2/2$  y  $\Delta r_4 = \Delta r_3/2$  se observa que conforme aumenta la resolución, el error tiende a cero a segundo orden, notamos que el código funciona bien conforme la resolución aumenta, de otra forma a partir de  $100M$ , el código deja de funcionar con la resolución  $\Delta r_1$ .

# Capítulo 5

## Acreción de Michel

Antes de resolver el sistema gas más evolución de la geometría del espacio-tiempo se desea someter a prueba la solución de las ecuaciones de la hidrodinámica. Para ello afortunadamente existe una solución exacta de la evolución en equilibrio de un gas con presión y simetría esférica entrando en un hoyo negro de Schwarzschild.

Dicho escenario fue descrito originalmente por F. C. Michel [Michel 1972], quien lo resolvió usando coordenadas de Schwarzschild. Posteriormente se ha presentado también cuando el hoyo negro está descrito en coordenadas penetrantes de Eddington-Finkelstein, que son las que usamos aquí [Papadopoulos & Font 1998]. Aquí describimos la solución exacta en dicho caso, con la finalidad de comparar la precisión y convergencia de los resultados de la implementación numérica para la evolución del gas usando la solución exacta.

### 5.1 Solución exacta

En la presente sección se derivará la solución estacionaria a las ecuaciones de movimiento de un gas ideal en simetría esférica acretada por un hoyo negro, se supondrá que el fluido no induce efecto alguno sobre la geometría del espacio-tiempo lo cual se logra suponiendo que la densidad del gas es tan baja que no distorsiona el espacio-tiempo, se consideran coordenadas penetrantes Eddington-Finkelstein para describir el campo gravitacional.

Para la construcción de dicha solución, partimos de las ecuaciones de evolución para un fluido perfecto (3.40), (3.41) introducidas en la sección 3.2 para el caso esféricamente simétrico y estático. Podemos integrar fácilmente la ley de conservación de la masa ( $\partial_\mu[\sqrt{-g}\rho u^\mu] = 0$ ) obteniendo que

$$\sqrt{-g}\rho u^r = c_1 \tag{5.1}$$

donde  $c_1$  es una constante de integración y hemos usado que en el caso de simetría esférica  $u^\mu = u^r$ .

La ley de conservación  $\nabla_\mu T^\mu_0 = 0$  se puede escribir como  $\partial_\mu(\sqrt{-g}T^\mu_0) = 0$ , la cual podemos integrar fácilmente para en el caso estático como:

$$\sqrt{-g}\rho h u^r u_0 = c_2. \quad (5.2)$$

Dividiendo la ecuación (5.2) entre la ecuación (5.1) y elevando al cuadrado nos queda el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}\rho u^r &= c_1 \\ h^2 u_0^2 &= \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 = c_3, \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde el valor de  $u_0^2$  sale del hecho  $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$ ; diferenciando respecto a  $\rho$ ,  $u^r$  y  $r$  se obtiene:

$$\frac{1}{\rho}d\rho + \frac{1}{u^r}du^r + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_r \sqrt{-g}dr = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{2\partial_\rho h}{h}d\rho + \frac{2u^r}{u_0^2}du^r - \frac{\partial_r g_{00}}{u_0^2}dr = 0, \quad (5.5)$$

despejando el valor  $d\rho/\rho$  de (5.4), sustituyéndolo en (5.3) y ordenando términos semejantes se obtiene:

$$\frac{du^r}{u^r} \left[ 2\frac{\partial \ln h}{\partial \ln \rho} - 2\left(\frac{u^r}{u_0^2}\right)^2 \right] + \frac{dr}{r} \left[ 2r\frac{\partial \ln h}{\partial \ln \rho} \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_r \sqrt{-g} + \frac{r}{u_0^2}\partial_r g_{00} \right] = 0. \quad (5.6)$$

Utilizando las componentes de la métrica en coordenadas de Eddington-Finkelstein (4.3) y del hecho que  $\sqrt{-g} = \alpha \sqrt{\gamma} = \alpha \sqrt{\gamma_{rr}r^2 \sin^2 \theta}$  la ecuación (5.6) se reduce a:

$$\frac{du^r}{u^r} \left[ V^2 - \left(\frac{u^r}{u_0}\right)^2 \right] + \frac{dr}{r} \left[ 2V^2 - \frac{M}{ru_0^2} \right] = 0, \quad (5.7)$$

donde hemos definido  $V^2 \equiv \frac{d \ln(\rho h)}{d \ln \rho} - 1$ . Es necesario conocer los valores de las constantes  $c_1$  y  $c_2$ , esto se logra haciendo un análisis de los puntos críticos de la ecuación (5.7). Se encontraron los valores de  $V$ ,  $u^r$  y  $u_0$  los cuales satisfacen el sistema:

$$V^2 - \left(\frac{u^r}{u_0}\right)^2 = 0,$$

$$2V^2 - \frac{M}{ru_0^2} = 0,$$

y resolviendo se encuentra que:

$$u_c^r = \frac{M}{2r_c},$$

$$(u_0)_c = (u_c^r)^2 - (g_{00})_c,$$

$$V_c^2 = \left(\frac{u_c^r}{(u_0)_c}\right). \quad (5.8)$$

Utilizando la ecuación para un gas politrópico  $P = \kappa\rho^\Gamma$ , con  $\Gamma$  el coeficiente adiabático, la ecuación (5.8) y un valor de la densidad de masa crítico  $\rho_c$  se puede calcular la constante politrópico  $\kappa$ . Conociendo los valores críticos para la densidad de masa  $\rho_c$  y el radio  $r_c$ , se calculan las constantes  $c_1$  y  $c_2$ .

Una vez calculadas las constantes, se resuelve el sistema de ecuaciones (5.3) utilizando el método para encontrar raíces Newton-Raphson.

En la Fig. 5.1 se muestra el resultado obtenido de la solución exacta de Michel para el caso en el que  $\rho_c = 1 \times 10^{-2}$  y  $r_c = 400M$  y  $\Gamma = 4/3$  [Papadopoulos & Font 1998].

## 5.2 Solución numérica

En esta sección se presenta la solución numérica del sistema (3.53), únicamente se evolucionan las variables de la hidrodinámica, las variables concernientes a la geometría del espacio-tiempo se consideran como constantes a lo largo de toda la evolución por lo que si en los términos necesarios para construir las fuentes  $S^i$  de (3.50) aparecen  $\partial_t$  de alguna variable geométrica se desechan.

$$\begin{aligned} \partial_t D &= \partial_r[\alpha(v^r - \beta^r/\alpha)D], \\ \partial_t J_r &= \partial_r[\alpha(v^r - \beta^r/\alpha)J_r] + \alpha\sqrt{\gamma}p + \alpha\sqrt{\gamma}T^{\mu\nu}g_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu r}^\sigma, \\ \partial_t \tau &= \partial_r[\alpha(v^r - \beta^r/\alpha)\tau] + \alpha\sqrt{\gamma}pv^r + \alpha\sqrt{\gamma}(T^{\mu 0}\partial_\mu\alpha - \alpha T^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^0), \end{aligned} \quad (5.9)$$

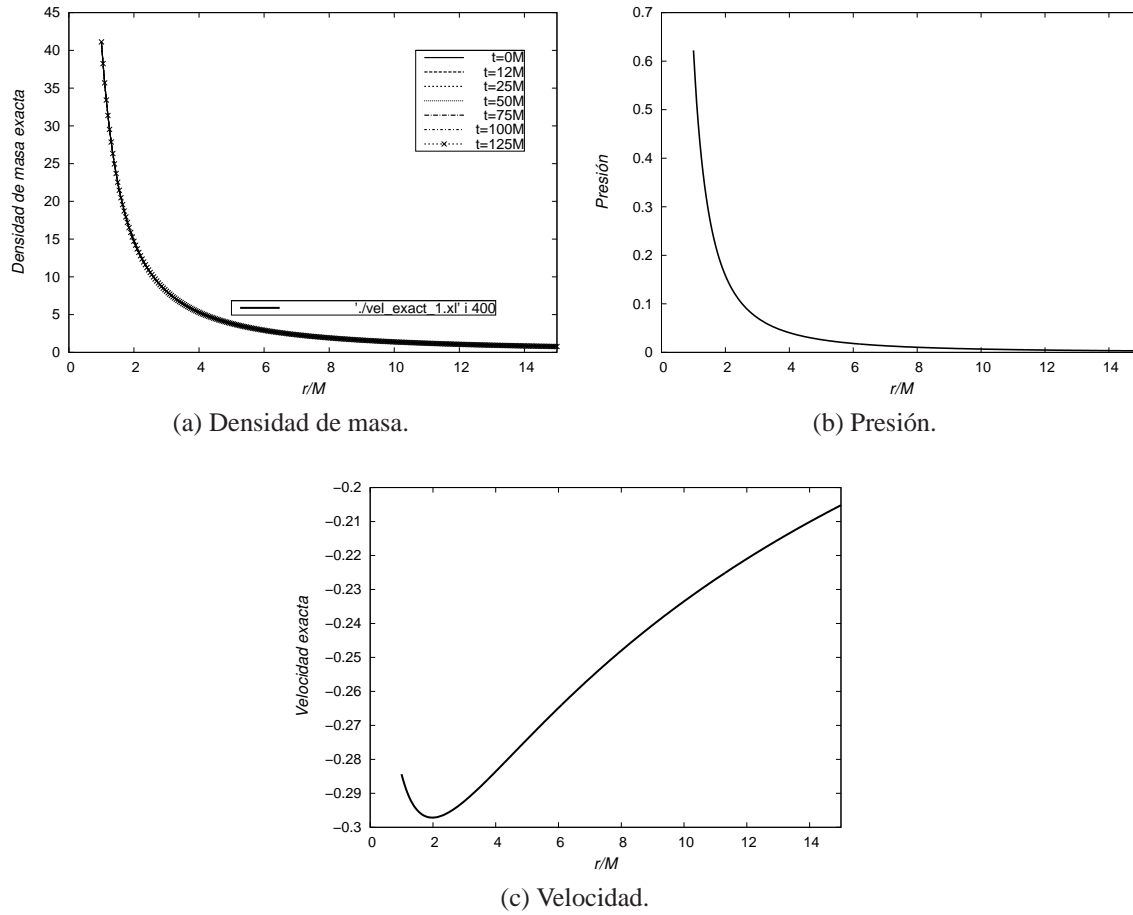


Figura 5.1: Se muestran los perfiles exactos de Michel para los parámetros  $\Gamma = 4/3$  en un dominio  $r = [1M, 15M]$ , con resolución  $\Delta r = 0.01$ .

### Condiciones iniciales

Recordamos que estamos solucionando un problema de valores iniciales por lo que antes de comenzar la evolución de las ecuaciones 3+1 de la hidrodinámica relativista (5.9), se requiere fijar valores iniciales para la densidad de masa inicial en reposo  $\rho_0$  la velocidad radial del fluido  $v^r$ , el coeficiente adiabático  $\Gamma$ , presión inicial y el valor de la energía interna  $\epsilon$ . Inicialmente se proponen los valores de  $\rho_0$ ,  $v^r$ ,  $p$ ,  $\epsilon$  y se construyen las variables conservativas  $D$ ,  $J_r$ ,  $\tau$  usando las relaciones (5.10) para inicializar (5.9)

$$\begin{aligned}
D &= \sqrt{\gamma}\rho W, \\
J_i &= \sqrt{\gamma}\rho h W^2 v_i, \\
\tau &= \sqrt{\gamma}(\rho h W^2 - p - \rho W).
\end{aligned}
\tag{5.10}$$

Se contemplaron dos casos para la solución del problema, caracterizados por el conjunto de datos iniciales implementados:

- **Caso I.** Se eligió como valor inicial de la densidad del gas  $\rho_0$  una constante, la velocidad radial del gas  $v_0^r$  fue considerada una constante correspondiente al caso en que el gas se mueve radialmente hacia el agujero negro, la presión inicial  $p$  fue calculada utilizando la ecuación de estado  $p = \rho_0(\Gamma - 1)\epsilon$ .
- **Caso II.** Se consideró como valor de la densidad, velocidad radial y presión los valores arrojados de la solución exacta de Michel, lo cual significa que comenzamos desde un inicio, con la solución exacta del sistema.

Para ambos casos, el sistema en cuestión se resolvió utilizando métodos de volúmenes finitos, junto con los métodos de alta resolución de captura de choques descritos en el capítulo 2, se utilizó un resolvidor de Riemann HLLC, así como la aproximación lineal a pedazos para la reconstrucción de variables (*minmod*) en cada intercelda, se introdujo una atmósfera que evita que la densidad de masa en reposo sea muy pequeña y así evitar que  $h = 1 + \epsilon + p/\rho_0$  diverja; se eligió la densidad de dicha atmósfera  $\rho_{am} = 10^{-10}$ .

### Condiciones de frontera

La solución numérica del problema fue realizada en un dominio finito  $r_{exc} \leq r \leq r_{max}$ . En el cual se implementó la técnica de excisión en la frontera interior definiendo al radio de excisión en  $r_{exc} = M$ , el cual está suficientemente lejos de la singularidad  $r = 0$  y permite ver el comportamiento del sistema sin problemas; debido a las coordenadas utilizadas no es necesario imponer condiciones de frontera en  $r = r_{exc}$ , y el valor de las variables conservativas en dicha frontera se ha extrapolado. Por otro lado la frontera exterior está causalmente desconectada.

### Resultados

Caso I. Para este caso se comenzó con una densidad de masa, velocidad radial y presión constantes, se observó que después de un tiempo el proceso de acreción se estabiliza, esto es, el perfil de las variables  $\rho_0$ ,  $p$  y  $v^r$  adquiere el de una solución atractora en el tiempo, dicho comportamiento se ilustra en la Fig. 5.2.

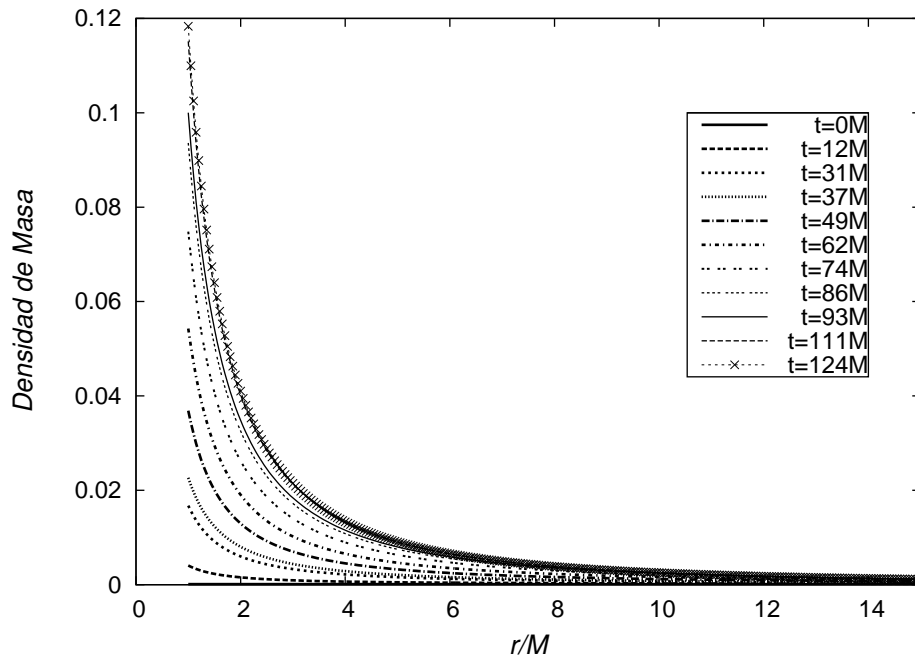


Figura 5.2: Se muestra la evolución del perfil de densidad de masa para el caso I, a distintos tiempos con  $v_0^r = -0.5$ , y datos iniciales  $\rho_0 = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\Gamma = 4/3$ ,  $p_0 = 7 \times 10^{-7}$ ,  $\epsilon_{ini} = 2.31 \times 10^{-2}$  en un dominio de  $r = [1M, 15M]$  y resolución  $\Delta r = 0.01$ , se observa que a partir de  $t = 90M$  el perfil se estabiliza.



Se realizaron distintas corridas abarcando un conjunto de parámetros para observar si el comportamiento de las variables es el mismo para el caso I. En la Fig. 5.3, se muestran los perfiles obtenidos de iniciar la evolución con distintos valores para la velocidad radial inicial  $v_0^r$ ; en todos los casos se muestra el perfil una vez que el proceso se ha estabilizado.

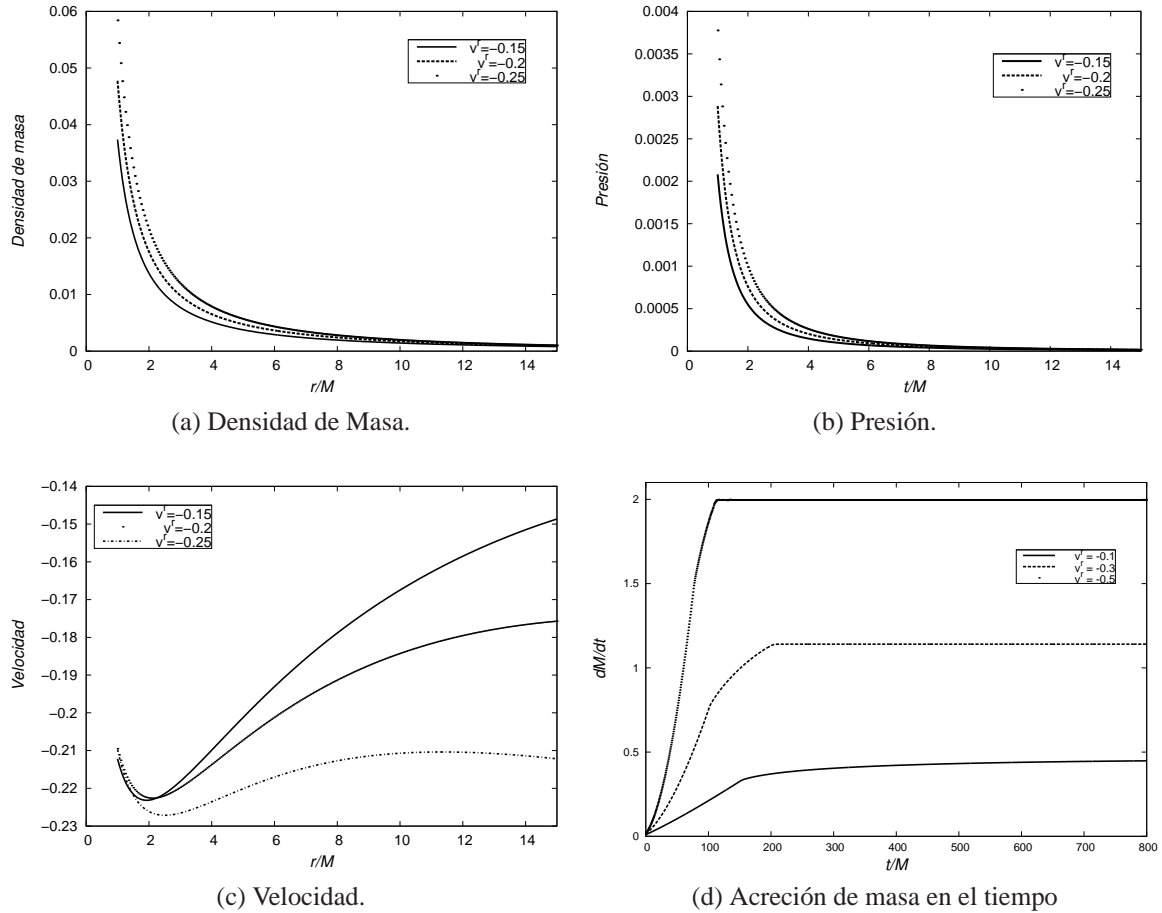


Figura 5.3: Se muestran los perfiles estables para distinto valor inicial de la velocidad radial,  $v_0^r = -0.1, -0.2, -0.25$ ,  $\rho_0 = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\Gamma = 4/3$  y  $p_0 = 7 \times 10^{-7}$ ,  $\epsilon_{ini} = 2.31 \times 10^{-2}$ , en un dominio de  $r = [1M, 15M]$ , resolución  $\Delta r = 0.01$ ,  $dM/dt$  fue calculada en el detector situado en  $r = 4.01$ .

Como diagnóstico de nuestra simulación, se implementaron detectores a diferentes posiciones del dominio numérico, dichas posiciones definen superficies esféricas, podemos medir en cada una de estas superficies, cuanta masa por unidad de tiempo atraviesa dicha esfera, para ello definimos el flujo de masa por unidad de tiempo que pasa por una superficie esférica como:

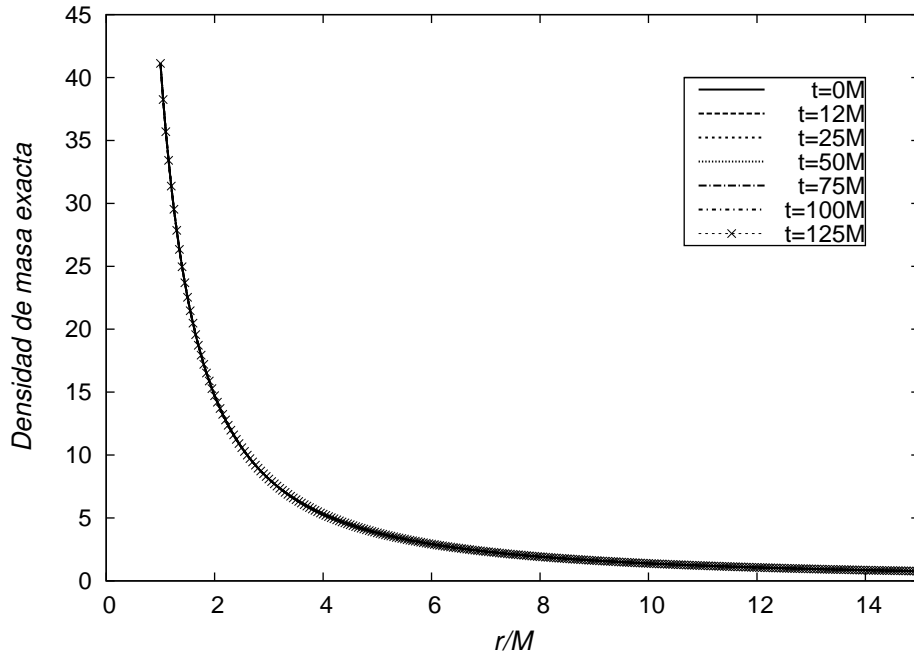


Figura 5.4: Se muestra la evolución del perfil de densidad de masa para el caso II, a distintos tiempos para  $\Gamma = 4/3$ , en un dominio  $r = [1M, 15M]$  y resolución  $\Delta r = 0.005$ .

$$\frac{dM}{dt} = - \int_0^{2\pi} D d\phi, \quad (5.11)$$

$$= - \int_0^{2\pi} \alpha \sqrt{\gamma} \rho W \left( v^r - \frac{\beta}{\alpha} \right) d\phi, \quad (5.12)$$

integrando y utilizando el hecho que  $\sqrt{\gamma} = r^2 \sqrt{\gamma_{rr}} \sin \theta$  y que  $\alpha \sqrt{\gamma_{rr}} = 1$  en coordenadas EF, la expresión para calcular la cantidad de masa que pasa a través de una superficie esférica es:

$$\dot{M} = -4\pi r^2 \rho W \left( v^r - \frac{\beta}{\alpha} \right). \quad (5.13)$$

En la Fig. 5.3 se muestra la masa acretada en el tiempo, se pudo observar que después de un tiempo el proceso se estabiliza. Sería interesante estudiar la trayectoria en el espacio-fase del sistema y verificar si en efecto estos perfiles corresponden a una solución exacta de Michel.

Caso II. En este caso arranca la evolución con una solución exacta como dato inicial. Se observó que las variables densidad, presión y velocidad, mantienen su forma conforme el tiempo transcurre (ver Fig. 5.4).

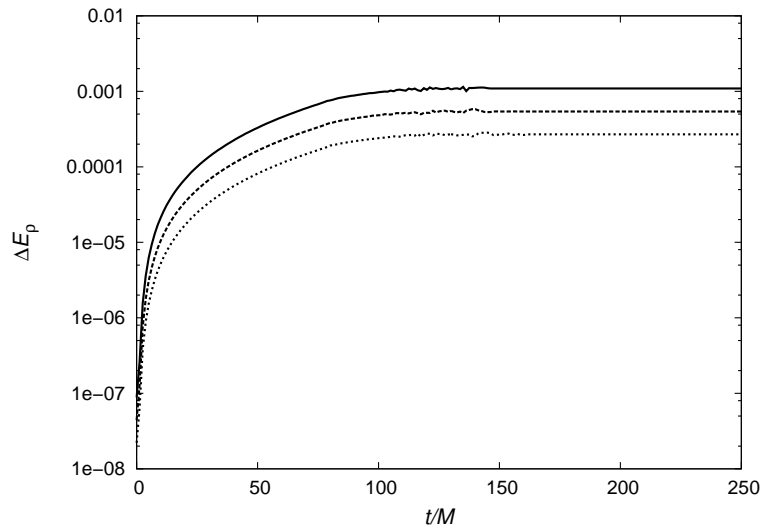


Figura 5.5: Se muestra la auto-convergencia de  $\rho_0$  para datos iniciales  $v^r = -0.5$ ,  $\rho_0 = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\Gamma = 4/3$  y  $p_0 = 7 \times 10^{-7}$   $\epsilon = 2.31 \times 10^{-2}$ , la cual se calculó utilizando la norma  $L_1$  de la diferencia entre el valor de la densidad para cuatro diferentes resoluciones  $\Delta r_1 = 0.05$ ,  $\Delta r_2 = \Delta r_1/2$ ,  $\Delta r_3 = \Delta r_2/2$  y  $\Delta r_4 = \Delta r_3/2$ .

## 5.3 Convergencia

Caso I. Para validar nuestros resultados numéricos se presenta una prueba de convergencia de la solución numérica, para este caso no se tiene una solución exacta con que comparar por lo que se realizó una prueba de autoconvergencia de tipo Cauchy en las variables primitivas. En la Fig. 5.5 se muestra la autoconvergencia de la densidad de masa en reposo  $\rho_0$ , también en la Fig. 5.6 se muestra el cálculo del factor de convergencia que es 1.

Caso II. Como prueba de que se está resolviendo el problema de manera correcta, se compararon los perfiles exactos de las variables de la hidrodinámica de Michel con los obtenidos de nuestra simulación numérica.

Se calculó el error del código de evolución comparando la solución exacta de Michel, con la arrojada de nuestra simulación numérica. Definiendo el error como:

$$error = \rho_{exact} - \rho_{num}, \quad (5.14)$$

en la Fig. 5.7, se observa que conforme aumentamos la resolución, el error disminuye, además converge a segundo orden lo cual es correcto.

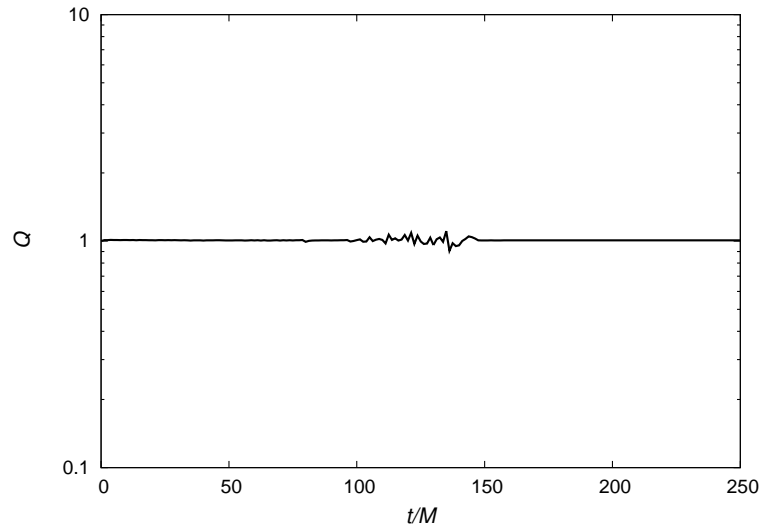


Figura 5.6: Se muestra el orden de auto-convergencia de  $\rho_0$ , para datos iniciales  $v^r = -0.5$ ,  $\rho_0 = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\Gamma = 4/3$  y  $p_0 = 7 \times 10^{-7}$   $\epsilon = 2.31 \times 10^{-2}$ , se usó la norma  $L_1$  de la diferencia del valor de la densidad a tres distintas resoluciones  $\Delta r_1 = 0.05$ ,  $\Delta r_2 = \Delta r_1/2$  y  $\Delta r_3 = \Delta r_2/2$ , el factor de convergencia se calculó de la expresión  $2^Q = \Delta E_1/\Delta E_2$  de donde  $\Delta E_1 = L_1(\rho_1 - \rho_2)$  y  $\Delta E_2 = L_1(\rho_2 - \rho_3)$ .

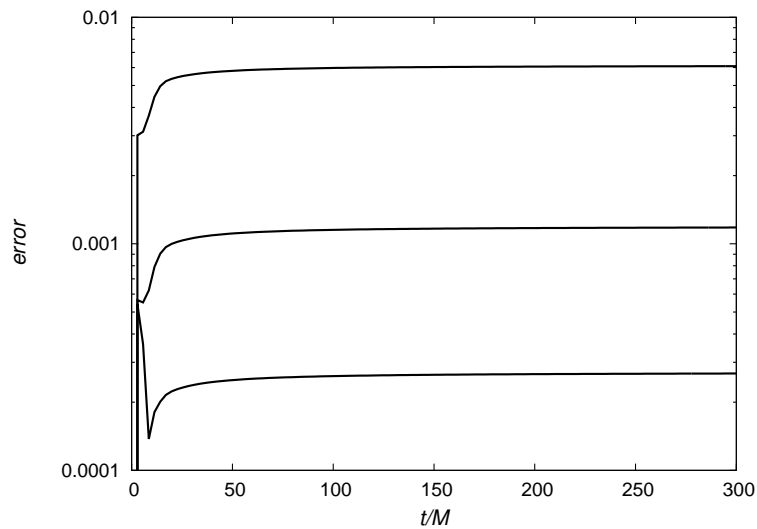


Figura 5.7: Se muestra el error (5.14) para la densidad usando tres resoluciones distintas,  $\Delta r = 0.01$ ,  $\Delta r_2 = \Delta r_1/2$  y  $\Delta r_3 = \Delta r_2/2$ .

## Capítulo 6

# Evolución no lineal de la acreción de un gas ideal

En los capítulos 4 y 5 se abordó el problema de evolución de la geometría para un hoyo de Schwarzschild en el vacío y el de la hidrodinámica al resolver las ecuaciones de Euler relativistas con un fondo fijo respectivamente, en esta sección se generaliza dicho problema al juntar ambos casos, esto es, resolviendo las ecuaciones de la hidrodinámica simultáneamente a las de la geometría. La solución a este problema numéricamente es importante, pues no conocemos antecedentes. Para lograr evolucionar el hoyo negro con materia, es necesario resolver las ecuaciones para la geometría que aquí reescribimos:

$$\begin{aligned}
 \partial_t \gamma_{rr} &= -2\alpha K_{rr} + \beta^k \partial_k \gamma_{rr} + \gamma_{rk} \partial_r \beta^k + \gamma_{rk} \partial_r \beta^r \\
 &= -2\alpha K_{rr} + \beta \gamma'_{rr} + 2\beta' \gamma_{rr}, \\
 \partial_t \gamma_{\theta\theta} &= -2\alpha K_{\theta\theta} + \beta^k \partial_k \gamma_{\theta\theta} + \gamma_{\theta k} \partial_\theta \beta^k + \gamma_{\theta k} \partial_\theta \beta^k, \\
 &= -2\alpha K_{\theta\theta} + \beta \gamma'_{\theta\theta}, \\
 \partial_t K_{rr} &= -\nabla_r \nabla_r \alpha + \alpha (R_{rr} - 2\gamma^{kl} K_{rk} K_{rl} + \beta^k \partial_k K_{rr} \\
 &\quad + K_{rk} \partial_r \beta^k + 4\pi\alpha [(T - \rho_{ADM})\gamma_{rr} - 2T_{rr}]) \\
 &= -\alpha'' + \alpha' \frac{\gamma'_{rr}}{2\gamma_{rr}} - \alpha \frac{\gamma''_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} + \frac{1}{2} \alpha \left( \frac{\gamma'_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} \right)^2 \\
 &\quad + \alpha \frac{\gamma'_{rr} \gamma'_{\theta\theta}}{2\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} + 2\alpha \frac{K_{rr} K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} - \alpha \frac{K_{rr}^2}{\gamma_{rr}} + \beta K'_{rr} \\
 &\quad + 2\beta' K_{rr} + 4\pi\alpha [(T - \rho_{ADM})\gamma_{rr} - 2T_{rr}], \\
 \partial_t K_{\theta\theta} &= -\alpha' \frac{\gamma'_{\theta\theta}}{2\gamma_{rr}} - \alpha \frac{\gamma''_{\theta\theta}}{2\gamma_{rr}} + \alpha \frac{\gamma'_{rr} \gamma'_{\theta\theta}}{4\gamma_{rr}^2} + \alpha \left( 1 + \frac{K_{rr} K_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}} \right) \\
 &\quad + \beta K'_{\theta\theta} + 4\pi\alpha [(T - \rho_{ADM})\gamma_{\theta\theta} - 2T_{\theta\theta}],
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

simultáneamente con las de la hidrodinámica relativista:

$$\begin{aligned}
\partial_t D &= \partial_r [\alpha(v^r - \beta^r/\alpha)D], \\
\partial_t J_r &= \partial_r [\alpha(v^r - \beta^r/\alpha)J_r] + \alpha \sqrt{\gamma} p + \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu r}^{\sigma}, \\
\partial_t \tau &= \partial_r [\alpha(v^r - \beta^r/\alpha)\tau] + \alpha \sqrt{\gamma} p v^r + \alpha \sqrt{\gamma} (T^{\mu 0} \partial_{\mu} \alpha - \alpha T^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0),
\end{aligned} \tag{6.2}$$

donde recordamos que  $\rho_{ADM} = \rho h W^2 - p$ ,  $j^r = \rho h W^2 v^r$  y  $T = \rho h W^2 v_r v^r + 3p$ .

El sistema de ecuaciones de nuestro problema se resolvió, utilizando el método de aproximación en diferencias finitas en una malla uniformemente espaciada para las ecuaciones de la geometría y métodos de volúmenes finitos junto con los métodos de alta resolución de captura de choques para la hidrodinámica, en el cual se utilizó un resolvidor de Riemann HLLE así como la aproximación lineal a pedazos para la reconstrucción de variables en cada intercelda. Se utilizó el método de líneas con un integrador Runge-Kutta de 3er orden para la evolución temporal de las variables, en un dominio numérico finito, el método de excisión fue implementado y frontera externa es causalmente desconectada.

### Condiciones iniciales

Se construyen condiciones iniciales para el problema de evolución de la hidrodinámica relativista simultáneo al de la evolución de la geometría, para esto se deben fijar valores iniciales para las variables hidrodinámicas ( $\rho$ ,  $v^r$ ,  $p$ ), y las de la geometría ( $\gamma_{rr}$ ,  $\gamma_{\theta\theta}$ ,  $K_{rr}$ ,  $K_{\theta\theta}$ ) de modo que se satisfagan las constricciones (3.52). Se eligió como valor inicial de la densidad del gas  $\rho_0$  un perfil gaussiano, la velocidad radial del gas  $v_0^r$  fue considerada una constante correspondiente al caso físico en que el gas se mueve radialmente hacia el agujero negro, la presión inicial  $p$  fué calculada utilizando la ecuación de estado  $p = \rho_0(\Gamma - 1)\epsilon$ , se fijó un valor para el coeficiente adiabático  $\Gamma = 4/3$  y la energía interna  $\epsilon$ . Para las variables geométricas, se fijó el valor de  $\gamma_{\theta\theta} = r^2$  y  $K_{rr} = -\frac{2M(1+\frac{M}{r})}{r^2 \sqrt{1+\frac{2M}{r}}}$ . Con todo esto, el valor inicial de  $\gamma_{rr}$  y  $K_{\theta\theta}$  debe cumplir con las constricciones  $H$  y  $M$ :

$$\begin{aligned}
\partial_r \gamma_{rr} &= \frac{\gamma_{rr}}{r} \left( 1 - \gamma_{rr} - \frac{\gamma_{rr} K_{\theta\theta}^2}{r^2} \right) - 2 \frac{\gamma_{rr}}{r} K_{rr} K_{\theta\theta} + 8\pi r \gamma_{rr}^2 \rho_{ADM}, \\
\partial_r K_{\theta\theta} &= r \frac{K_{rr}}{\gamma_{rr}} + \frac{K_{\theta\theta}}{r} - 4\pi r^2 s \gamma_{rr} j^r.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Para resolver (6.3) fue implementado un integrador Runge-Kutta de cuarto orden.

## 6.1 Diagnóstico y resultados

### Evolución del gas

Las variables que describen al gas y las variables concernientes a la geometría del espacio-tiempo ahora se resuelven simultáneamente por lo que para construir las fuentes  $S^i$  necesarias para las ecuaciones de evolución del gas (6.2), es necesario tomar en cuenta los términos de (3.50), en los que aparecen términos de la forma  $\partial_t A$  donde  $A$  es alguna variable geométrica además, de los valores iniciales de  $(\rho_0, v^r, p, \epsilon)$ , se construyen las variables conservativas  $D, J_r, \tau$  usando las relaciones (5.10) para inicializar (6.2). Se observaron dos etapas del proceso de acreción, una primera etapa en el proceso de acreción se observa que el perfil inicial gaussiano de densidad de masa en reposo es acretado en un tiempo de transición (aproximado de  $50M$  en nuestros ejemplos), una vez concluido dicha etapa muy dinámica, el proceso de acreción continúa, ya no del perfil inicial, sino de la atmósfera que hemos colocado desde un inicio.

### Evolución del espacio-tiempo

La evolución de componentes de la curvatura extrínseca  $K_{rr}$  y  $K_{\theta\theta}$  se muestra en las Fig. 6.2, 6.3. Se observa que al tiempo inicial la presencia de materia modifica la curvatura con respecto al caso del vacío (mostrado en el capítulo 4), conforme avanza el tiempo esta deformación se propaga y eventualmente sale por las fronteras. Las imágenes nos dan una idea de cómo la materia deforma la geometría del espacio-tiempo conforme el tiempo transcurre. Una vez más debe verificarse que converjan las constricciones Hamiltoniana y de momento. En la Fig. 6.1 se grafica la norma  $L_2$  para distintas resoluciones de  $H$  y  $M$  cuya convergencia es de segundo orden.

### Horizonte aparente

Es fundamental en el estudio de los hoyos negros dinámicos la evolución del horizonte del hoyo negro. Existen distintos conceptos de horizonte y uno de ellos es el horizonte aparente (HA). El HA se define como la superficie marginalmente atrapada más externa, esto es, que cumple con la condición de que los rayos nulos salientes que apuntan al futuro, cuya proyección sobre una hipersuperficie espacial  $\Sigma$  a un tiempo dado es normal a tal superficie es saliente y además tiene expansión cero en toda la superficie. La expresión que representa una superficie marginalmente atrapada es:

$$\Theta := \nabla_i n^i + K_{ij} n^i n^j - K = 0,$$

donde  $n^i$  es el 3-vector normal al horizonte, en el caso con simetría esférica en coordenadas esféricas se reduce a:

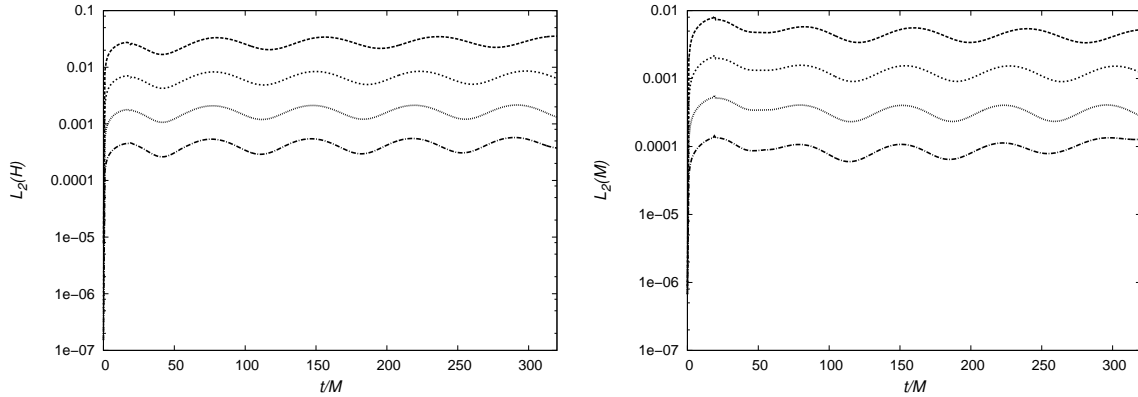


Figura 6.1: Se muestra la norma  $L_2$  de las constricciones Hamiltoniana y de momento usando 4 resoluciones distintas,  $\Delta r_1 = 0.001$ ,  $\Delta r_2 = \Delta r_1/2$ ,  $\Delta r_3 = \Delta r_2/2$  y  $\Delta r_4 = \Delta r_3/2$  se observa que conforme aumenta la resolución, el error tiende a cero a segundo orden, notamos que el código funciona mejor conforme la resolución aumenta.

$$\Theta = \frac{\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\sqrt{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}}} - 2 \frac{K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} = 0. \quad (6.4)$$

En el caso de simetría esférica en coordenadas esféricas el HA es una esfera de radio  $r_{HA}$  y radio de área  $R_{HA} = \sqrt{\gamma_{\theta\theta}}$  en que se satisface la condición (6.4). El HA es una superficie de dos dimensiones localizado localmente en cada hipersuperficie  $\Sigma$  de la foliación de espacio-tiempo, esto quiere decir que nos deja conocer información de lo que ocurre con el espacio-tiempo durante la evolución.

El hecho de que se localice un AH, para un espacio-tiempo que cumple con la condición de la energía, existe un Teorema de singularidad de la relatividad general que establece horizonte aparente existe en una de las hipersuperficies que folian el espacio-tiempo, debe encontrarse dentro del horizonte de eventos [Hawking & Ellis 1973] (Teorema 9.2.1). Por ello es muy útil localizar el HA.

Cálculo. El HA fué localizado, encontrando la raíz más externa de (6.4) seguida de una la interpolación a primer orden del valor de las funciones métricas en el valor de  $r$  de dicha raíz, esto es, se buscaron los ceros de la función  $\Theta$ , debido a que puede situarse en un punto que no se encuentra en la malla. En la Fig. 6.4 se muestra el cálculo del horizonte aparente para distintos valores iniciales de la velocidad radial del gas ideal. En cada una de la imágenes se observa que conforme transcurre el tiempo el agujero comienza a acretar la atmósfera que hemos impuesto hasta que llega el perfil gaussiano de densidad  $\rho_0$  y entonces el proceso de acreción es bastante más notorio, por lo que el HA crece en mucho mayor medida, después de acretar el perfil gaussiano de gas ideal, el proceso de acreción se estabiliza y se observa que crece en menor medida, en todos los casos, se observa un com-



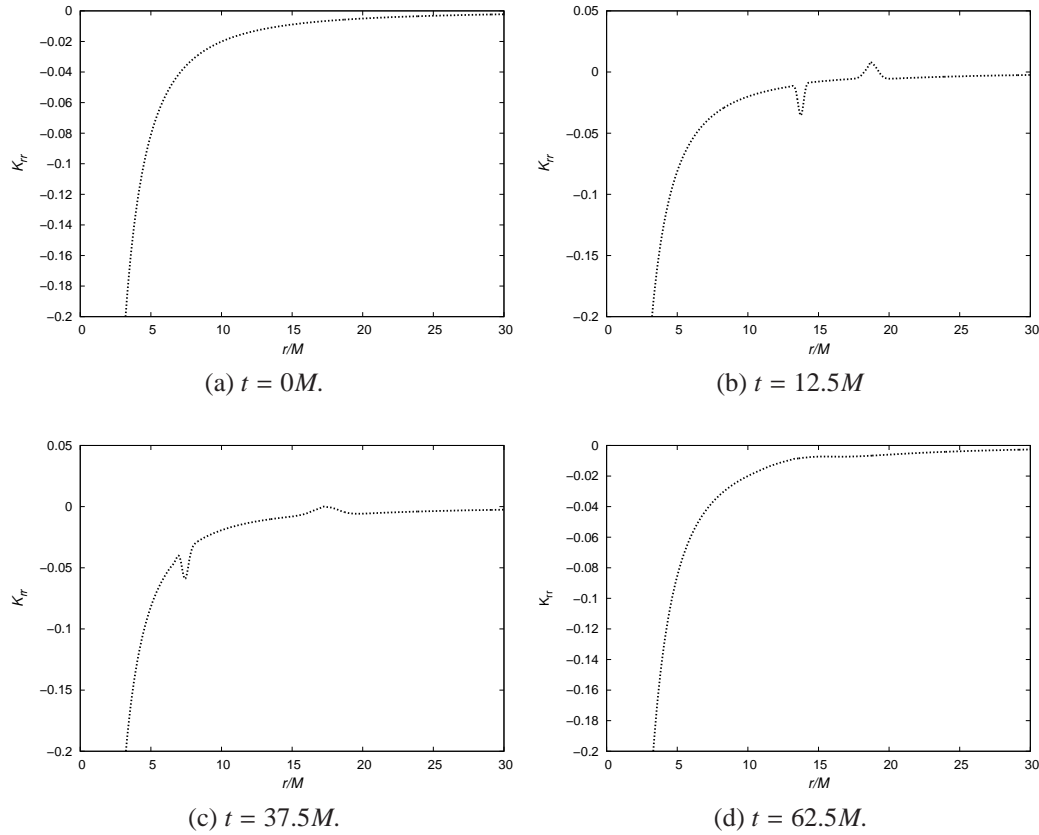


Figura 6.2: Evolución de la componente  $K_{rr}$  de la curvatura extrínseca para  $\Gamma = 4/3$  en un dominio de  $r \in [1M, 250M]$  y resolución  $\Delta r = 0.01$ .

portamiento oscilatorio del HA después de que el agujero negro ha acreetado en su totalidad al perfil gaussiano de densidad, la amplitud de dichas oscilaciones disminuye conforme se aumenta la resolución, sin embargo no desaparecen, la razón de dicho fenómeno se desconoce. Por otro lado, se puede asociar una masa al HA que vale  $M_{HA} = R_{HA}/2$  la cual tomará un papel importante más adelante.

### Horizonte de eventos

El horizonte de eventos, a diferencia del horizonte aparente, es una superficie de 3 dimensiones que sirve como una membrana de un solo sentido, la materia o luz que la atraviese hacia dentro del agujero negro no puede escapar debido al campo gravitacional. Localizar el HE en un problema de evolución del espacio-tiempo es primordial para extraer información física del hoyo negro, como la masa o equivalentemente el tamaño del hoyo negro al igual que el HA.

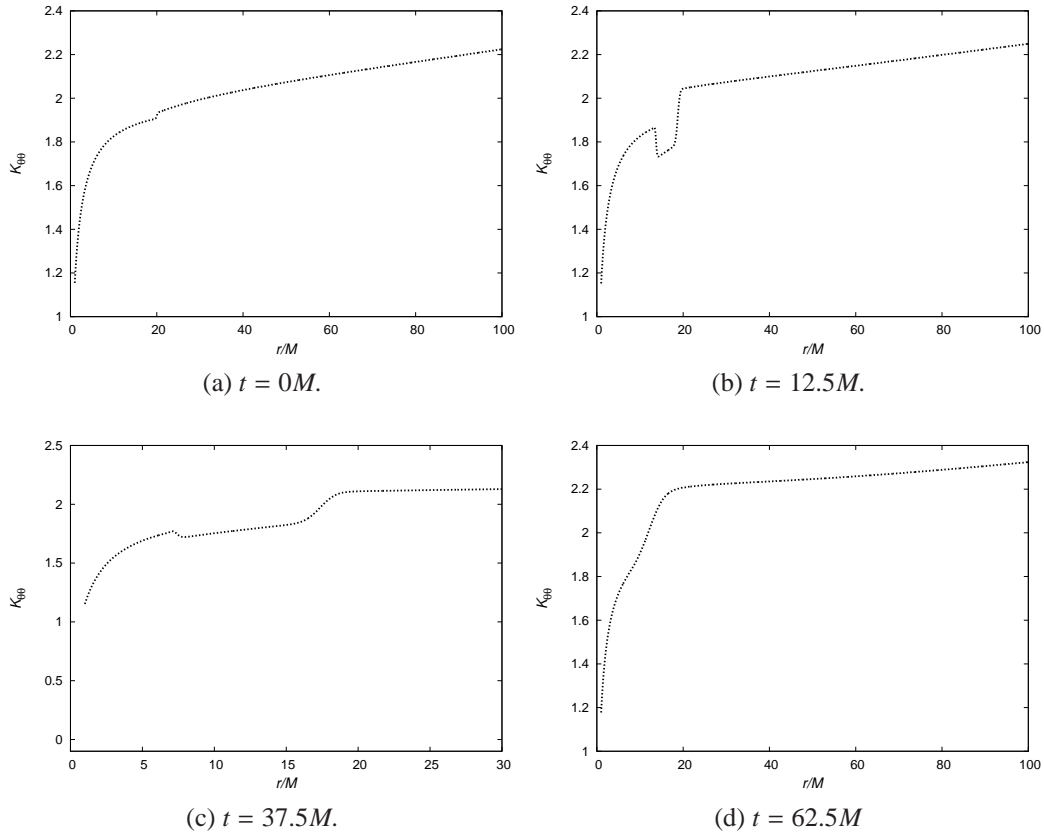


Figura 6.3: Se muestra la evolución de la componente  $K_{\theta\theta}$  de la curvatura extrínseca para  $\Gamma = 4/3$  en un dominio de  $r \in [1M, 250M]$  y resolución  $\Delta r = 0.01$ .

La diferencia más importante entre el HA y el EH es que el EH es independiente de la definición de la  $\Sigma$ , y en consecuencia de las coordenadas del espacio-tiempo. Por eso se dice que el HE es independiente de la norma.

Para localizar al horizonte de eventos, el cual esta se determina por la frontera entre dos rayos nulos, uno que escapa hacia el infinito alejándose de la singularidad y otro que cae dentro de la misma, es necesario conocer la evolución total (o una parte significativa de ella) del espacio-tiempo, en nuestro caso una parte significativa de los resultados arrojados de nuestra simulación numérica hasta que haya terminado de ejecutarse dicha simulación.

Cálculo. Supongamos que ya se conoce completamente la evolución del espacio-tiempo de nuestra solución numérica, es necesario ahora observar el comportamiento de los rayos nulos y así localizar la frontera que define al horizonte, para ello se debe resolver la ecuación de las geodésicas nulas radiales, que para el caso con simetría esférica se reduce a:

$$ds^2 = \gamma_{rr} \frac{dr}{dt} \frac{dr}{dt} + 2\beta_r \frac{dr}{dt} - (\alpha^2 - \beta_r \beta^r) = 0, \quad (6.5)$$

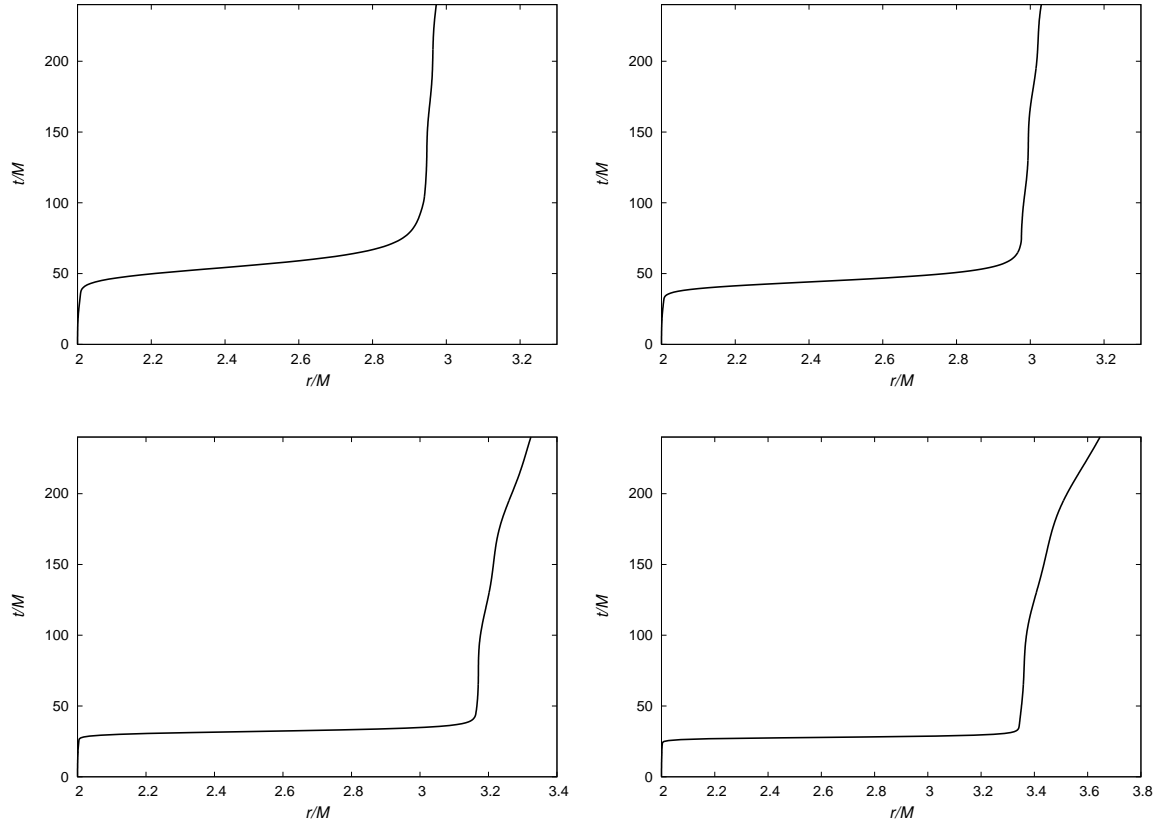


Figura 6.4: Se muestra el HA para distinto valor inicial de la velocidad radial,  $v_0^r = -0.1, -0.2, -0.4, -0.5$ ,  $\Gamma = 4/3$ ,  $A = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $r_0 = 20M$  en un dominio de  $r = [1M, 251M]$  y resolución  $\Delta r = 0.01$ .

recurriendo a la métrica 3+1 (3.5), donde las coordenadas angulares no intervienen puesto que sabemos que el HE es una esfera y (6.5) debe cumplirse para cada valor de las coordenadas angulares. Explícitamente (6.5) se reduce a:

$$\frac{dr}{dt} = -\beta \pm \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_{rr}}} \quad (6.6)$$

que es una ecuación de evolución para la posición de una geodésica nula.

En principio basta resolver (6.6) para conocer la trayectoria de una o muchas geodésicas nulas, lo cual no basta para conocer la posición del horizonte de eventos. Debemos localizar la frontera que separa una geodesica nula que entra y otra que sale de dicha superficie, esto en la práctica puede ser laborioso y bastante complicado. Una manera de encontrar el horizonte de eventos es integrando hacia el pasado la ecuación (6.6), en este caso las geodésicas nulas son atraídas y convergen al horizonte de eventos en el pasado.

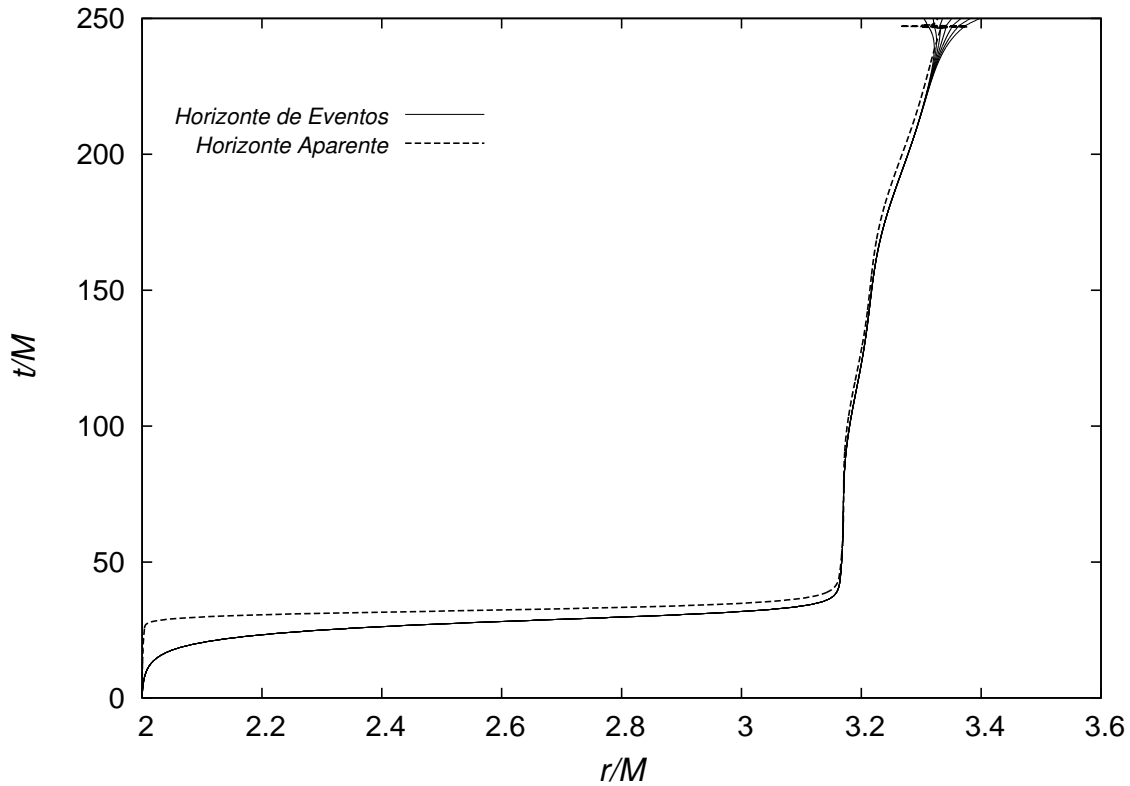


Figura 6.5: Se muestra el horizonte de eventos y el horizonte aparente, para los parámetros  $v^r = -0.4$ ,  $\Gamma = 4/3$ ,  $A = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $r_0 = 20$  en un dominio de  $r \in [1, 251M]$ ,  $dt = 0.6 \times 10^2$  y resolución  $\Delta r = 0.01$ .

El HE se obtuvo de la evolución de las variables métricas a cada paso de tiempo, dichos valores se guardaron en bloques de datos, luego, se integró la ecuación de las geodésicas nulas (6.6), integrando del futuro hacia el pasado y de fuera hacia dentro, esto es, se inició la lectura de los bloques finales que correspondían al tiempo final de la evolución y se ha realizando un cambio de signo a  $t$  por  $-t$  que transforma a la ecuación (6.6) en  $\frac{dr}{dt} = \beta - \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma r}}$ , dicha integración se realizó mediante la implementación de un integrador Runge-Kutta de cuarto orden, cada paso de tiempo  $dt$  es igual al paso de tiempo de la evolución de la variables geométricas. En la Fig. 6.5 se muestra tanto el HA como el HE. Nuevamente después de acretar el perfil gaussiano, el HE sigue aumentando su tamaño y aparece una oscilación muy interesante.

### Masa

Se sabe que cuando se estudia un sistema físico, es de vital importancia hablar de cantidades invariantes o que cumplan con una ley de conservación, la masa es una de esas

cantidades por lo que una vez que hemos planteado nuestro problema y sabemos que se ha procedido de una manera correcta. Al resolver un problema numérico es importante monitorear dichas cantidades conservadas, lo cual sirve para probar el código y comprobar que se está realizando de manera correcta la integración.

En un sistema en que se tiene una fuente de campo gravitacional de vacío Para el caso que se trata, se tiene un sistema físico por lo que la expresión Se midió la masa Misner-Sharp [] definida para el caso en simetría esférica como:

$$M_{MS} = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma_{\theta\theta}} \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{(\partial_r \gamma_{\theta\theta})^2}{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} + \frac{K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} \right), \quad (6.7)$$

la cual nos ayuda a estimar la masa ADM  $M_{ADM} = \lim_{r \rightarrow \infty} M_{MS}$  dicha masa toma sentido definirla en un espacio-tiempo asintóticamente plano, por lo que se presenta únicamente como comparación

If a system containing gravitational sources is surrounded by an infinite vacuum region, the geometry of the space-time will tend to approach the flat Minkowski geometry of special relativity at infinity. Such space-times are known as "asymptotically flat" space-times. For systems in which space-time is asymptotically flat, the ADM and Bondi energy, momentum, and mass can be defined. In terms of Noether's theorem, the ADM energy, momentum, and mass are defined by the asymptotic symmetries at spatial infinity, and the Bondi energy, momentum, and mass are defined by the asymptotic symmetries at null infinity. Note that mass is computed as the length of the energy-momentum four vector, which can be thought of as the energy and momentum of the system "at infinity".



# Capítulo 7

## Conclusiones y comentarios finales

El trabajo presentado se centra en la evolución de un hoyo negro acretaando un gas ideal. Para conseguirlo ha sido necesario estudiar a detalle, por una parte, las propiedades de la evolución de la geometría del espacio-tiempo basadas en la teoría de la relatividad general y por otra, la evolución de un gas gobernado por las leyes de la hidrodinámica relativista. Al combinar ambos temas y haciendo uso de métodos numéricos, se ha obtenido la evolución no-lineal de dicho sistema. Antes de pasar al sistema principal, se realizaron pruebas por separado, primero la evolución del espacio-tiempo en simetría esférica de un hoyo negro sin materia y segundo la solución del problema de acreción de un gas en un fondo fijo.

Al combinar ambos temas hemos obtenido la evolución no-lineal del proceso en simetría esférica.

Se han implementado las herramientas de diagnóstico necesarias para lograr el seguimiento y estudio del comportamiento del proceso de acreción, se implementó un encontrador de horizonte aparente, encontrador de horizonte de eventos y el cálculo de la masa ADM del espacio-tiempo.

Al no haber antecedentes de trabajos semejantes en el régimen no lineal, hemos encontrado un comportamiento oscilatorio tanto del horizonte aparente como el de eventos que desconocíamos. Es posible que éste comportamiento oscilatorio sea un indicio de las propiedades de oscilación del horizonte del hoyo negro al acretar de manera no lineal un gas. Se trata potencialmente de un tema interesante que desafortunadamente queda fuera del alcance de esta tesis, pero que se puede atacar en un proyecto de mayor duración, pues requiere comparación por ejemplo con la teoría de perturbaciones de hoyos negros.

Por último, los resultados numéricos de la solución de un sistema físico no deben tomarse a la ligera, sea cual sea el método o forma de implementarlo, debe ponerse a prueba, esto es, debe ser capaz de simular o resolver problemas de sistemas físicos ya conocidos ó cuyo comportamiento sea predecible antes de simular algo más complejo o desconocido, además, debe ser acompañado de una prueba de convergencia para gozar de credibilidad. Nunca se debe desviar la atención de los objetivos principales que es resolver un problema del mundo real, que nos rodea y aportar al desarrollo del conocimiento humano y estamos

avanzando en esa dirección.



# Referencias

- [Alcubierre 2008] Miguel Alcubierre. Introduction to 3+1 Numerical Relativity Oxford Science Publications Phys, 2008.
- [Baumgarte 2010] Baumgarte, T. W. y Shapiro, S. L. Numerical Relativity: Solving Einsteins Equations on the Computer (Cambridge University Press, 2010).
- [Font & Miller 2000] J. A. Font, M. Miller, W-M. Suen, M. Tobias, Phys. Rev. D 61, 044011 (2000).
- [Guzmán 2010] F. S. Guzmán, Solución de la ecuación de onda como un problema de valores iniciales usando diferencias finitas, Rev. mex. de física 56 (1) 51-68.
- [Guzmán & Lora-Clavijo] Guzman, F. S., Lora-Clavijo, F. D., Spherical non-linear absorption of cosmological scalar field onto a black hole, Phys. Rev.D85,2012,024-036.
- [Harten et al. 1983 & Einfeldt 1988] Harten, A., Lax, P. D., & van Leer, B., SIAM Rev. 25 (1983) 35. Einfeldt, B., SIAM, J. Num. Anal. **25** (1988) 294.
- [Hawking & Ellis 1973] The large scale structure of space-time. Cambridge University press,Cambridge 1973.
- [Leveque 2002] Randall J. Leveque. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems Cambridge texts in applied mathematics 2002.
- [Michel 1972] F. C. Michel, Astrophys. Space Sci. **15** (1972) 153.
- [Papadopoulos & Font 1998] P. Papadopoulos and J. A. Font, Phys. rev. **D 58** (1998) 024005.
- [Roe 1981] Roe, P. L. (1981), Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, J. Comput. Phys. 43 (2): 357-372.
- [Seidel & Suen 1992] E. Seidel and W-M. Suen, Towards a singularity proof scheme in numerical relativity. Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 1845.

[Thornburg 1996] Thornburg J. Finding apparent horizons in numerical relativity Phys. Rev. D **54**, 4899-4918.

[Toro 2009] E. F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction (Springer-Verlag, 2009).