



Solución de la ecuación de Onda Auto-Gravitante en Relatividad General

Tesis
para obtener el grado de

Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

presenta

Javier Vargas Arias

*Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo*

Enero del 2007

Director de tesis:
Dr. Francisco S. Guzmán Murillo
Instituto de Física y Matemáticas,
UMSNH.

Contenido

1	Introducción	5
2	Métodos Numéricos	7
2.1	Diferencias Finitas	7
2.2	Convergencia	9
3	La Ecuación de Onda en 1+1 Dimensiones.	11
3.1	Introducción.	11
3.2	Análisis Característico	13
3.3	Datos Iniciales	15
3.4	Método Explicito	16
3.4.1	Runge-Kutta de tercer orden	17
3.4.2	Condiciones de frontera	18
3.5	Resultados	20
4	La Ecuación de Onda en 3+1 y Simetría Esférica.	27
4.1	Datos Iniciales	29
4.2	Condición de frontera	29
4.3	Resultados	30
5	La Ecuación de Onda Auto-Gravitante en Relatividad General.	33
5.1	Datos Iniciales	35
5.2	Evolución	36
6	Discusión y Conclusiones.	41

Capítulo 1

Introducción

En la presente tesis se presenta la solución numérica de la ecuación de onda en diferentes casos, empezando con un caso sencillo, resolviendo la Ecuación de Onda en un espacio-tiempo plano en coordenadas cartesianas teniendo una dimensión espacial solamente, después se estudia la solución de la ecuación de onda con simetría esférica en coordenadas esféricas, que es un problema que se reduce a una coordenada espacial y una temporal, pero que involucra la singularidad de las coordenadas. Esto nos sirve para aprender algunas estrategias relacionadas con el uso de las coordenadas esféricas, pues sabemos que el laplaciano en dichas coordenadas diverge en el origen, de ahí que sea necesario determinar un método de regularización de los operadores discretos. Por último tomamos el caso anterior pero agregamos la autogravedad de la función de onda. La generalización más simple del caso anterior hacia relatividad general es considerar que la función de la onda está asociada a un campo escalar, que además tiene un tensor de la energía momento asociado. Agregamos un potencial al campo escalar con el fin de tener una función de onda con masa. La condición geométrica llamada identidad de Bianchi resulta ser una ecuación de onda generalizada, la llamada ecuación de Klein-Gordon, que es una generalización leve de la ecuación de onda si tomamos en cuenta que hemos usado el desarrollo del operador D'Alambertiano en términos de un elemento de línea.

Entre los métodos mas comunes para resolver Ecuaciones Diferenciales Parciales se encuentran los Métodos Espectrales, los Métodos de Diferencias Finitas, los Métodos de Volumen Finito y los Métodos de Elemento Finito. Los Métodos Espectrales por ejemplo, suponen que las funciones involucradas en el sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales pueden ser expandidas en una base de funciones ortogonales; entonces las condiciones de ortogonalidad y las relaciones de recurrencia permiten reducir el sistema original a Sistemas de Ecuaciones Diferenciales (por ejemplo) Ordinarias, para los coeficientes de la expansión. El Método de Diferencias Finitas supone que las funciones involucradas son analíticas y que están definidas solamente sobre una malla discreta del dominio, lo que permite usar expansiones de la serie de Taylor de las funciones involucradas con el fin de

aproximar las Ecuaciones Diferenciales originales [1].

De los métodos anteriormente mencionados el que utilizamos para el desarrollo de los cálculos en esta tesis es el Método de Diferencias Finitas, por considerar que se facilitan los cálculos y sus resultados son muy buenos, su costo tiempo-máquina es muy bajo. Además el Método de Diferencias Finitas es un método de carácter general que permite la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales definidas en recintos finitos. Es de una gran sencillez conceptual y constituye un procedimiento muy adecuado para la resolución de ecuaciones.

Una razón más es que es el método utilizado para resolver los problemas de fuentes de ondas gravitacionales en la rama de la Relatividad Numérica.

Es notable además, que bajo el esquema de Diferencias Finitas se tiene criterios de convergencia continua de las soluciones numéricas, que permiten determinar si la solución converge a una solución correcta en el límite continuo.

El trabajo está presentado del modo siguiente: en el capítulo 3 se presenta la solución de la ecuación de onda en una dimensión espacial y una temporal, en el capítulo 4 se presenta la solución de la ecuación de onda en tres dimensiones espaciales con simetría esférica, en el capítulo 5 se presenta la solución de la ecuación de onda agregándole la gravedad y en Relatividad General; y finalmente en el capítulo 6 se presenta una discusión de los resultados presentados y algunas conclusiones.

Capítulo 2

Métodos Numéricos

2.1 Diferencias Finitas

Se tiene que tomar en cuenta que al usar diferencias finitas, uno está asumiendo que el dominio de las Ecuaciones Diferenciales Parciales está siendo discretizado. Esto es, la función incógnita y sus derivadas en una EDP serán evaluadas en un número finito de puntos al igual que las variables independientes. La implicación de tal situación es que no es posible calcular la solución en el límite continuo con una precisión infinita, y habrá siempre una contribución de un orden que hará que se desvíe la solución encontrada de la solución en el continuo. De seguro, si uno piensa en la variedad de problemas que pueden ser resueltos numéricamente, el precio del error de la discretización es un buen precio a pagar. Además se muestra adelante que hay criterios para determinar si la solución discreta calculada es razonable o no, es decir, es preciso estimar si la solución encontrada converge (en el límite continuo) a una solución, lo cual requiere la introducción de un análisis de convergencia de Cauchy.

Para ilustrar cómo la discretización trabaja, se considera el caso de un dominio hipotético con una coordenada temporal t y una coordenada espacial x , así:

- Las coordenadas espaciales se definen como un conjunto discreto de puntos dados por $x_j = j\Delta x$ (j entero), y las fronteras corresponden a los puntos x_0 (en la izquierda) y x_N (en la derecha).
- El tiempo $t^n = n\Delta t$ (n entero) también se define solamente para ciertos valores del tiempo continuo, $n = 0$ corresponde al tiempo inicial.
- Así, una función se define solamente en los valores de x y t que corresponden a los puntos en el dominio de una manera tal que para una función continua dada, haya valores disponibles de f en (t^n, x_j) , denotados aquí por f_j^n .

- Se supone que la función incógnita es analítica en el dominio (tanto espacial como temporal), por lo que es posible hacer una expansión en serie de Taylor en todos los puntos del dominio para las funciones involucradas. Sea x_j un punto del dominio, entonces es posible obtener aproximaciones para las derivadas de f_j^n en términos de los valores de la función en los puntos vecinos.
- Δx y Δt indican la resolución en las coordenadas espacial y temporal respectivamente.
- Las primeras derivadas espaciales de una función suave dada f_j^n en el punto x_j es aproximada por $\frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta x}$ para todos los tiempos. Estas aproximaciones son de segundo orden de precisión, como se muestra abajo, y utilizan los valores de f en los puntos x_{i+1} y x_{i-1} , que es la razón de llamar a esta formula una aproximación de diferencias finitas centradas.
- Si uno considera solamente los puntos a la izquierda o a la derecha, que es el caso de las fronteras espaciales del dominio x_0 y x_N , entonces las derivadas de primer orden se aproximan por: $\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{-3f_0^n + 4f_1^n - f_2^n}{2\Delta x}$ en x_0 y $\frac{\partial f_N}{\partial x} = \frac{3f_N^n - 4f_{N+1}^n + f_{N+2}^n}{2\Delta x}$ en x_N . Estos operadores son muy importantes al aplicar las condiciones de frontera que contienen derivadas espaciales.
- Las derivadas espaciales de segundo orden en x_j se aproximan con segundo orden por $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \rightarrow \frac{f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$. Todas estas aproximaciones de las derivadas espaciales son válidas para todo n .
- La derivada de primer orden en el tiempo en el punto $(t^{n+1/2}, x_j)$ esta aproximada por $\frac{\partial f}{\partial t} \rightarrow \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t}$.
- La extrapolación de segundo orden para calcular f_0^n en la frontera izquierda en términos de valores en los puntos interiores es $f_0^n = 3f_1^n - 3f_2^n + f_3^n$. En la frontera derecha $f_N^n = 3f_{N-1}^n - 3f_{N-2}^n + f_{N-3}^n$. Esta operación es útil cuando se desea aproximar valores de f en términos de los puntos interiores cuando no se imponen condiciones de frontera a la función en cuestión.

A continuación se muestra cómo obtener estas operaciones para la derivada de primer orden a partir de una expansión en serie de Taylor. La expresión para las derivadas espaciales centradas en x_j se demuestra como sigue. La expansión de f_j alrededor de x_j usando tres puntos es

$$\begin{aligned}
f(x_{j-1}) &= f(x_j) - \Delta x f' + \frac{\Delta x^2}{2} f'' + O(\Delta x^3) \\
f(x_j) &= f(x_j) \\
f(x_{j+1}) &= f(x_j) + \Delta x f' + \frac{\Delta x^2}{2} f'' + O(\Delta x^3),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

donde la prima denota la derivada con respecto a x . La resta de la tercera y la primera ecuaciones implica: $f' = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$, la cuál es una expresión para la primera derivada con un error del segundo orden. Para obtener la segunda derivada es suficiente escribir la combinación $f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1}) = \Delta x^2 f'' + O(\Delta x^4)$, que implica la expresión descrita arriba. Las derivadas del tiempo se encuentran de una manera similar. Es por supuesto posible construir aproximaciones más precisas a las derivadas que darían lugar a mejores aproximaciones de las ecuaciones continuas ver ([2]). Aproximaciones más precisas implican puntos más allá de $x_{j\pm 1}$ y no se utilizan en esta tesis, de modo que los resultados presentados son aproximaciones de segundo orden.

2.2 Convergencia

Un punto importante al solucionar las ecuaciones usando diferencias finitas es que uno está discretizando las ecuaciones, y por lo tanto no se puede asumir que las soluciones calculadas corresponden a las soluciones en el continuo. Por lo tanto un error de truncamiento se introduce con el simple hecho de discretizar. Una ecuación $L(f) = 0$ con L un operador diferencial, queda aproximado por $L(f_j^n) = O(\Delta x^2, \Delta t^2)$. De aquí vemos que cuando $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ la solución tiende a la solución continua. En el mejor caso las aproximaciones utilizando la discretización, tienen características que indican que en el límite del continuo el comportamiento es aceptable. Para ilustrar qué significa convergencia y cómo se puede ver si los cálculos proporcionan resultados convergentes se pueden ver las notas en [3].

Considerando que la función f_j es solución de la versión discreta de la ecuación, con precisión de segundo orden (usando los operadores descritos arriba) tal que $f(x) = f_0(x) + E(\Delta x^2) + O(\Delta x^3)$, donde $f_0(x)$ es la solución exacta en el continuo, E denota el término desconocido del error. Si $f_0(x)$ es conocido, es suficiente comparar los resultados obtenidos con dos diferentes resoluciones f_1 obtenida usando Δx y f_2 obtenida usando $\Delta x/2$. Entonces la teoría predice lo siguiente

$$\frac{f_1 - f_0}{f_2 - f_0} = \frac{\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} = 4 + O(\Delta x^3). \tag{2.2}$$

Casos típicos son los descritos en los capítulos siguientes, sin embargo, un caso ejem-

plar es el de las ecuaciones de Einstein: es sabido que las ecuaciones de Einstein en la descomposición 3 + 1 constituyen un sistema sobredeterminado de EDPs, esto es, hay ecuaciones de evolución para variables dinámicas (el número de estas variables dependen de la formulación que uno elige, ADM y BSSN son los mas comunes, ver [4]) y hay también las ecuaciones de constricción que deben ser cumplidas. La constricción hamiltoniana y la de momento ($H = 0$ y $M^k = 0$) se asumen satisfechas durante la evolución; sin embargo el error de truncamiento introducido cuando las ecuaciones están discretizadas implica que estas constricciones no están exactamente satisfechas. La ventaja es que uno sabe que tienen que ser satisfechas (es decir $H = 0$), de modo que la solución en el límite del continuo es conocida; por lo tanto solamente dos resoluciones son suficientes para verificar si los cálculos están correctos. Este argumento aporta confiabilidad a la solución de las ecuaciones de Einstein usando la aproximación en diferencias finitas.

Cuando la solución exacta es desconocida, uno puede hacer una prueba de la convergencia tipo Cauchy, usando los resultados con tres diversas resoluciones. Es decir f_1 y f_2 arriba, y además f_4 se ha calculado usando $\Delta x/4$, entonces se tiene

$$\frac{f_1 - f_2}{f_2 - f_4} = \frac{\Delta x^2 - \frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 - \frac{1}{16}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} = \frac{\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} = 4 + O(\Delta x^3), \quad (2.3)$$

donde aparece nuevamente el 4. Este número se llama factor de convergencia, y vale 4 para aproximaciones de segundo orden.

Este cálculo es indicador de un buen o mal cálculo. Por ejemplo, si uno encuentra que los factores de la convergencia de arriba es un número < 4 , se tiene que aceptar que la convergencia de la solución no es tan buena como se esperaba. Las posibles razones de tal situación son: hay un error implementación del algoritmo o simplemente los algoritmos no convergen en el rango de Δx seleccionado. Una desventaja en la aplicación de los métodos numéricos a la solución de ecuaciones diferenciales es precisamente que no es posible saber a priori cual es la resolución adecuada para que los cálculos sean convergentes. De hecho, en el pasado las soluciones numéricas en Relatividad General no presentaban este criterio, y desde luego no eran confiables; la razón es que en el pasado (hace unos veinte años) el equipo no contaba con memoria suficiente para calcular soluciones con altas resoluciones, así que no era posible saber si las soluciones eran razonables o no. En el presente ya no existe ese problema, pues los algoritmos han evolucionado en la dirección de optimizar la memoria y en la de aplicar condiciones de norma (ver adelante) y transformaciones de coordenadas que ayudan a optimizar los recursos.

Capítulo 3

La Ecuación de Onda en 1+1 Dimensiones.

3.1 Introducción.

Empecemos con un caso sencillo, resolvamos la Ecuación de Onda en un espacio-tiempo plano en coordenadas cartesianas teniendo una dimensión espacial solamente, el elemento de línea sería:

$$ds^2 = -dt^2 + d\tilde{x}^2. \quad (3.1)$$

Para ver la ecuación anteriormente nombrada se ha supuesto que la velocidad de la luz es $c = 1$. Nuestra ecuación de onda en este caso tiene la forma:

$$\square\phi = -\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \quad (3.2)$$

donde $\square\phi$ es el operador D'Alembertiano en el espacio-tiempo plano aplicado a ϕ . Para introducir un vector de corrimiento distinto de cero y una función lapso, se hace un simple cambio de coordenadas:

$$dt = \alpha d\tilde{t}, dx = d\tilde{x} - \beta d\tilde{t}, \quad (3.3)$$

donde t y x son las nuevas coordenadas, α es la función lapso y β es el vector de corrimiento. Aquí solo consideramos los casos $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$. De tal forma que el tensor métrico estará dado por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (-\alpha^2 + \beta^2) & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

de donde obtenemos la matriz inversa

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (-1/\alpha^2) & \beta/\alpha^2 \\ \beta/\alpha^2 & (1 - \beta^2/\alpha^2) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

con $\alpha > 0$. Para una métrica en general, el operador D'Alambertiano se escribe como

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi \right] = 0. \quad (3.6)$$

De (3.4) tenemos que $\sqrt{-g} = \alpha$. Como vemos, la ecuación tal y como la tenemos contiene derivadas de segundo orden. Para estudiar las propiedades de esta ecuación y para acercarnos al formalismo de la Relatividad Numérica decidimos convertir la ecuación en un sistema de primer orden. Para hacer esta ecuación un sistema de primer orden necesitamos definir nuevas variables a partir de la ecuación de onda $\square\phi = 0$:

$$\begin{aligned} \square\phi &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi \right] \\ &= \frac{1}{\alpha}\partial_t [\alpha g^{tv}\partial_\nu\phi] + \frac{1}{\alpha}\partial_x [\alpha g^{xv}\partial_\nu\phi] \\ &= \frac{1}{\alpha}\partial_t [\alpha g^{tt}\partial_t\phi + \alpha g^{tx}\partial_x\phi] + \frac{1}{\alpha}\partial_x [\alpha g^{xt}\partial_t\phi + \alpha g^{xx}\partial_x\phi] \\ &= \frac{1}{\alpha}\partial_t \left[-\frac{1}{\alpha}\partial_t\phi + \frac{\beta}{\alpha}\partial_x\phi \right] + \frac{1}{\alpha}\partial_x \left[\frac{\beta}{\alpha}\partial_t\phi + \alpha(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2})\partial_x\phi \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

De aquí se puede ver con un poco de imaginación, dos nuevas variables $\psi := \partial_x\phi$ y $\pi := (\partial_t\phi - \beta\partial_x\phi)/\alpha$. Donde π es el argumento de la derivada temporal de primer orden en el tiempo. Lo que se desea es separar la ecuación de onda en un sistema de ecuaciones para estas dos variables. La primera se puede ver del anterior desarrollo y es:

$$\partial_t\pi = \partial_x(\alpha\psi + \beta\pi). \quad (3.8)$$

Si suponemos que la ecuación de onda es de clase igual o mayor a C^2 , entonces para ψ tenemos $\partial_t\psi = \partial_x(\partial_t\phi)$, lo que implica que

$$\partial_t\psi = \partial_x(\alpha\pi + \beta\psi). \quad (3.9)$$

Ahora tenemos la ecuación de onda en términos de las variables de primer orden π y ψ . Para recuperar el valor de ϕ basta con usar la definición de π

$$\partial_t\phi = \alpha\pi + \beta\psi. \quad (3.10)$$

Con el fin de resolver la ecuación de onda de la manera más precisa posible, a continuación se muestra el tipo de análisis que permite la aplicación de condiciones de frontera de

onda saliente en un dominio finito. La razón es que más adelante resolveremos la ecuación de onda autogravitante en un dominio finito, una práctica estándar en la solución numérica de las ecuaciones de Einstein para sistemas aislados.

3.2 Análisis Característico

Si definimos el vector de estado $\mathbf{u} = (\pi, \psi)^T$ podemos escribir las ecuaciones anteriores como

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A} \partial_x \mathbf{u} = -\partial_x (\mathbf{A}) \mathbf{u} \quad (3.11)$$

donde

$$\mathbf{A} = -\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Las direcciones locales de propagación de las señales en el plano t, x se encuentran a partir del calculo de los valores propios de $\mathbf{A}$ que son velocidades $\frac{dx}{dt}$, donde tenemos

$$\tau_1 = -\beta + 1, \tau_2 = -\beta - 1. \quad (3.13)$$

Como los dos eigenvalores son reales y diferentes tenemos un sistema hiperbólico. En el caso de que $\beta = 0$ obtenemos el cono de luz usual $x = x_0 \pm t$, el cual determina los dominios locales de influencia y dependencia de los campos que se propagan a traves de x_0 . Veamos tres casos para el valor de β ilustrados en la Figura 3.1:

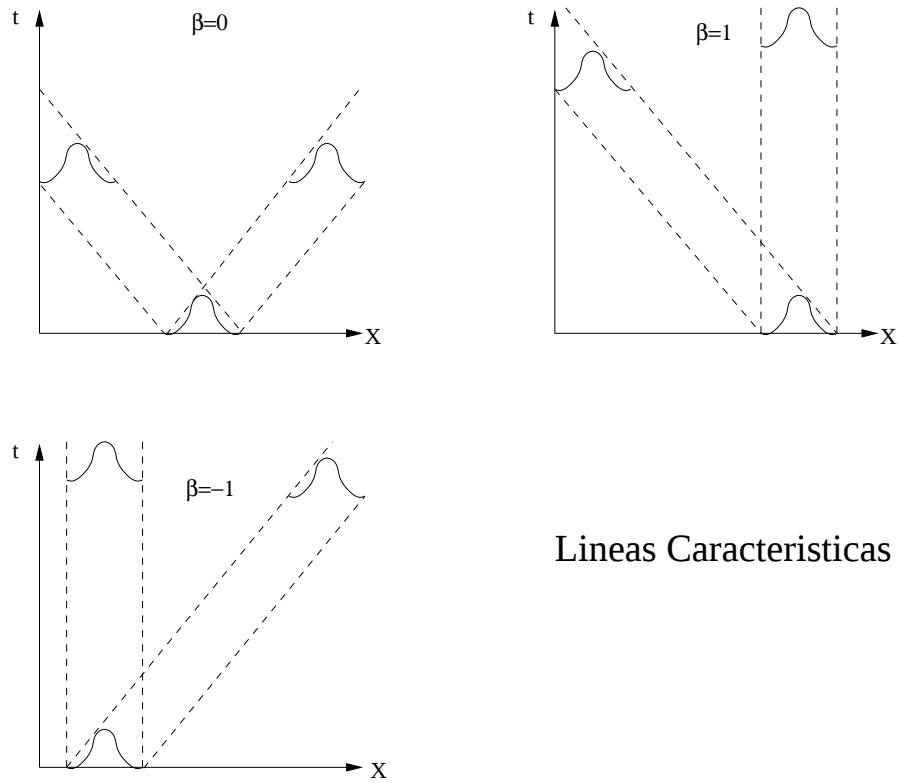
- $\beta = 0$. En cada punto x_0 del espacio-tiempo la estructura está acotada por las direcciones características $x = x_0 \pm t$.

- $\beta = 1$. En este caso los valores de τ indican que el cono que restringe el dominio de dependencia y de influencia estarán dados por la región existente entre las rectas $x = x_0 - 2t$ y $x = x_0$.

- $\beta = -1$. En este caso los valores de τ indican que el cono que restringe el dominio de dependencia y de influencia estarán dados por la región existente entre la recta $x = x_0$ y $x = x_0 + 2t$.

Los vectores propios corresponden a los dos valores propios τ_1 y τ_2 son $v_1 = (1, -1)^T$ y $v_2 = (1, 1)^T$. La matriz de vectores propios es

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$



Lineas Caracteristicas

Figura 3.1: Aquí se ilustran las Líneas Caracteristicas en los tres casos mencionados. Al suponer que los datos iniciales son de soporte compacto, estos se propagaran a lo largo de las caracteristicas, es decir, a lo largo de las franjas mostradas. fuera de las franjas en valor de la función de onda es cero.

y su inversa

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

De donde $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}$, con $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\tau_1, \tau_2)$. Multiplicando la ecuación (3.11) por $\mathbf{V}^{-1}$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{-1}\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\partial_x \mathbf{u} &= -\partial_x(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{u} \\ \partial_t \mathbf{w} + \mathbf{\Lambda}\partial_x \mathbf{w} &= -\partial_x(\mathbf{\Lambda})\mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde

$$\mathbf{w} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\pi - \psi, \pi + \psi)^T = (R, L)^T \quad (3.17)$$

se llaman las *variables características*. De este modo, las dos ecuaciones (3.8) y (3.9) se desacoplan, dado que $\mathbf{\Lambda}$ es diagonal, y la dinámica del campo escalar ha sido descompuesto en un modo que se mueve hacia la derecha ($R = \frac{1}{2}(\pi - \psi)$) y uno que se mueve hacia la izquierda ($L = \frac{1}{2}(\pi + \psi)$). La ecuación (3.17) es un par de ecuaciones de advección ($\partial_t f = \partial_x f$) para estas nuevas variables R y L .

3.3 Datos Iniciales

En este caso debemos proveer datos iniciales para $\pi(0, x)$ y $\psi(0, x)$, lo cual es equivalente a dar datos iniciales en la ecuación de onda original (3.2), donde necesitamos $\phi(0, x)$ y $\partial_t \phi(0, x)$.

Para el caso de datos inicales simétricos en el tiempo, se necesita que la derivada temporal de $\phi(0, x)$ sea cero al tiempo inicial y que $\phi(0, x)$ sea una distribución de soporte compacto. Los datos inicales para $\psi(0, t)$ son la derivada espacial del $\phi(0, x)$. Se escogen los siguientes datos iniciales

$$\pi(0, x) = 0 \quad (3.18)$$

$$\phi(0, x) = A \exp \frac{-(x-x_0)^2}{\sigma^2} \quad (3.19)$$

$$\psi(0, x) = -2 \frac{(x-x_0)}{\sigma^2} \phi(0, x). \quad (3.20)$$

La solución de la ecuación de onda es la superposición de un modo que viaja a la derecha y otro que viaja a la izquierda ($\phi(t, x) = f(x+t) + g(x-t)$). Cuando los datos iniciales son simétricos en el tiempo y se tiene un perfil gaussiano al tiempo inicial estamos suponiendo que

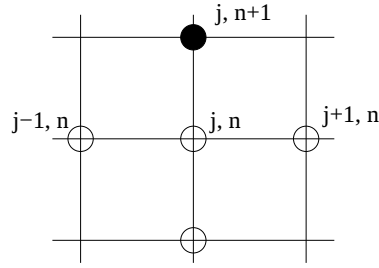


Figura 3.2: Para conocer el valor de f_j^{n+1} es necesario conocer los valores de ϕ_{j-1}^n , ϕ_{j+1}^n y ϕ_j^{n-1} .

$$\phi(0, x) = \frac{1}{2}A \exp \frac{-([x+t]-x_0)^2}{\sigma^2} + \frac{1}{2}A \exp \frac{-([x-t]-x_0)^2}{\sigma^2} \Big|_{t=0}. \quad (3.21)$$

La evolución de tales datos iniciales debería mostrar la descomposición de los datos iniciales en dos gaussianas del mismo ancho pero con la amplitud igual a la mitad de la original.

3.4 Método Explícito

Con las herramientas vistas en la sección de Métodos Numéricos escribimos la versión discretizada de la ecuación de onda (3.2) es:

$$\begin{aligned} \frac{\phi_i^{n+1} - 2\phi_i^n + \phi_i^{n-1}}{(\Delta t^2)} &= \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{(\Delta x^2)} + O(\Delta x^2, \Delta t^2) \Rightarrow \\ \phi_j^{n+1} &= 2\phi_j^n - \phi_j^{n-1} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) [\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n] + O(\Delta x^2, \Delta t^2). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para conocer el valor de la función en un punto interior de la malla al tiempo $n+1$ basta con conocer el valor de la función de onda en varios puntos vecinos en el tiempo y el espacio; la forma de la discretización de este ejemplo se muestra en la Figura 3.2. En general, para ecuaciones del tipo $\partial_t f = S(f)$ es posible construir esquemas de integración que involucren solamente dos niveles del tiempo. Un argumento poderoso está relacionado con el hecho de que para los sistemas de ecuaciones de primer orden es fácil determinar si son hiperbólicos o no, y con ello la estabilidad del sistema de ecuaciones ante pequeños errores debido a la discretización de las ecuaciones.

Una lección de la relación (3.22) es la estabilidad. En esa ecuación es evidente que

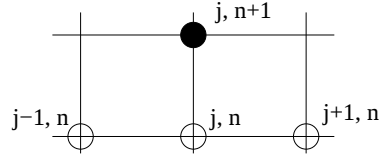


Figura 3.3: Para conocer el valor de f_j^{n+1} es necesario conocer los valores de φ_{j-1}^n , φ_{j+1}^n y φ_j^{n-1} .

para un factor de Courant $\frac{\Delta t}{\Delta x} > 1$, la amplitud de la función crecerá con el paso del tiempo; provocando la divergencia de la función de onda en un tiempo finito. Sin embargo para un factor de Courant < 1 no crecera. Se dice entonces que la discretización es estable para valores de factor de Courant menores a uno.

Para calcular el valor de f_i^{n+1} es necesario conocer los valores de f en otros puntos. Se puede ilustrar esto con el ejemplo de la discretización de la ecuación (3.8) para el caso $\alpha = 1, \beta = 0$. En este caso para discretizar la ecuación en el punto (t^n, x_i) escribimos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\pi_i^{n+1} - \pi_i^n}{\Delta t} &= \frac{\psi_{i+1}^n - \psi_{i-1}^n}{2\Delta x} \Rightarrow \\ \pi_i^{n+1} &= \pi_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\psi_{i+1}^n - \psi_{i-1}^n) \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde suponemos que Δt y Δx son pequeños pues no hay que olvidar que la aproximación es resultado de una expansión en serie de Taylor de la ecuación de onda. Con el fin de conocer el valor de $\pi(t^{n+1}, x_i)$ debemos de conocer el valor de ψ en los puntos vecinos (t^n, x_{i+1}) , (t^n, x_{i-1}) y el valor de π en el punto (t^n, x_i) . Esta discretización se conoce como hacia adelante en el tiempo y centrada en el espacio y se llama método de Euler. Es muy sencilla pero desafortunadamente inestable. La molécula usada por este método está ilustrada en la Figura 3.3

3.4.1 Runge-Kutta de tercer orden

Hay distintas maneras de integrar las ecuaciones del tipo $\partial_t f = S(f)$ con dos niveles de tiempo con algoritmos que son estables. El método de integración Runge-Kutta es una alternativa para integrar el vector de estado f^n , y se logra a través del siguiente conjunto de iteraciones.

$$\begin{aligned}
k_1 &= S(t^{n-1}, f^{n-1}) \\
k_2 &= S(t^{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, f^{n-1} + \frac{\Delta t}{2}k_1) \\
k_3 &= S(t^{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, f^{n-1} - \Delta tk_1 + 2\Delta tk_2) \\
f^n &= f^{n-1} + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) + O(\Delta t^4).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

(3.25)

Este integrador en el tiempo es estable para diversos valores de $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ y es el que se usa para obtener los resultados presentados en la tesis.

Para construir los datos en f_j^{n+1} , hemos supuesto que la ecuación diferencial es ordinaria a lo largo del punto j en el tiempo, de lo contrario no podríamos usar Runge-Kutta que sirve para resolver EDO. A este tipo de tratamiento se le conoce como Método de Líneas.

3.4.2 Condiciones de frontera

Hasta este momento nos hemos ocupado en mostrar la manera en que se evolucionan los datos de un valor del tiempo al siguiente. Sin embargo, la ecuación (3.25) necesita información en los puntos vecinos (t^n, x_{i+1}) y (t^n, x_i) al punto (t^n, x_i) . Cuando nos enfrentamos a los puntos de la frontera indicados con círculos negros en la Figura 3.4, notamos que no están disponibles los dos puntos vecinos en torno a x_0 y x_N . Pero hay dos alternativas:

- Imponer condiciones fijas sobre la función cuyo valor queremos conocer en los puntos de frontera. Ejemplo, es posible hacer la función y su derivada especial en ese punto cero para simular condiciones de potencial infinito en esos puntos.
- Usar el valor de la función incógnita en los puntos interiores de la malla para extrapolar a los puntos de frontera.
- Imponer algún tipo de ecuación diferencial para la función incógnita en esos puntos, y construir operadores diferenciales en el espacio que solamente involucren puntos vecinos de un solo lado. Por ejemplo se puede imponer la condición $\partial_t \phi = \partial_x \phi$ en la frontera derecha, que más adelante llamaremos onda saliente, pero que involucra la derivada espacial de ϕ en x_N . Para aplicar dicha Condición de Frontera es preciso usar las aproximaciones que usan puntos de un solo lado discutidas en el capítulo 2.

Condiciones periódicas.



Figura 3.4: Para conocer el valor de f_j^{n+1} es necesario conocer los valores de φ_{j-1}^n , φ_{j+1}^n y φ_j^{n-1} .

Si consideramos que el dominio espacial en el que deseamos resolver la ecuación de onda es finito, el planteamiento del problema no está completo hasta que se especifica el tipo de condiciones de frontera que debe cumplir la función de onda $\phi(t, x)$ en los extremos del dominio, que etiquetaremos con x_0 y x_N en nuestra discretización.

El tipo más simple de condiciones en los extremos es el de condiciones periódicas, es decir, que el extremo izquierdo del dominio se "pega" con el extremo derecho, imaginemos que el dominio espacial es cerrado. En este caso el efecto producido consiste en que si la onda viaja hacia la derecha del dominio, cuando llega al extremo derecho desaparece y reaparece por el lado izquierdo del dominio.

Condiciones de onda saliente.

Las condiciones de onda saliente para un sistema que se estudia en un dominio finito involucran condiciones de frontera que necesitan que el sistema sea semiabierto, es decir, que permita la salida de información del dominio finito. En el caso de la ecuación de onda pensamos en condiciones de frontera que demandan que la onda salga del dominio finito y continúe su viaje hacia $\pm\infty$.

En este caso la mayor preocupación consiste en evitar que la información que se supone que debería salir del dominio se refleje y cause interferencia con los valores de las funciones que están siendo calculados en el interior del dominio. De ahí que el planteamiento e implementación de condiciones de frontera de este tipo sean fundamentales para que el cálculo de las soluciones sea preciso.

Afortunadamente, para el caso de la ecuación de onda hemos logrado la construcción de las variables características, es decir, las variables que representan los modos que viajan hacia la derecha y hacia la izquierda en el dominio espacial. La receta para implementar condiciones de onda saliente en la frontera x_0 es la siguiente:

- Evoluciona todos los campos (π, ψ) en los puntos interiores del dominio.
- En la frontera del lado izquierdo estima el modo que viaja a la izquierda ($L_0 = \frac{1}{2}(\pi_0 + \psi_0)$) y el que viaja hacia la derecha ($R_0 = \frac{1}{2}(\pi_0 - \psi_0)$) a través de una extrapolación a partir del valor de los puntos interiores de esta variable.

- La condición de frontera saliente requiere que el modo que viaja hacia la derecha sea cero, es decir $R_0 = 0$ o sea, que no se refleje nada hacia la derecha. Esto significa que

$$\frac{1}{2}(\pi_0^n + \psi_0^n) = L_0 \frac{1}{2}(\pi_0^n - \psi_0^n) = R_0 = 0 \quad (3.26)$$

- Resolviendo estas ecuaciones encontramos que en la frontera del lado izquierdo necesitamos que

$$\pi_0^n = \psi_0^n = L_0 \quad (3.27)$$

que es una condición algebraica sobre los valores de nuestras variables de primer orden en el punto de frontera.

Para el caso de la frontera x_n tenemos:

- Evoluciona todos los campos (π, ψ) en los puntos interiores del dominio.
- En la frontera del lado derecho estima el modo que viaja a la derecha ($R_N = \frac{1}{2}(\pi_N - \psi_N)$ y $L_N = \frac{1}{2}(\pi_N + \psi_N)$) a través de una extrapolación a partir del valor de los puntos interiores de estas variable.
- Ahora queremos que $L_N = 0$:

$$\frac{1}{2}(\pi_N^n + \psi_N^n) = L_N = 0 \quad \frac{1}{2}(\pi_N^n - \psi_N^n) = R_N. \quad (3.28)$$

- Resolviendo estas ecuaciones encontramos que en la frontera del lado derecho necesitamos que

$$\pi_N = -\psi_N = R_N \quad (3.29)$$

que es una condición algebraica sobre los valores de nuestras variables de primer orden en el punto de frontera.

Veremos a continuación que estas condiciones funcionan correctamente.

3.5 Resultados

Los ingredientes desarrollados hasta ahora son: datos iniciales, un algoritmo para desarrollar funciones a partir de una rebanada de tiempo al siguiente, condiciones de frontera. Se construyó un código que contiene estos elementos con condiciones de frontera de onda saliente. A continuación se muestran unas situaciones representativas. El dominio espacial usado es de $-1 \leq x \leq 1$ y las resoluciones han sido $\Delta x = 0.002$, $\Delta t = 0.0005$.

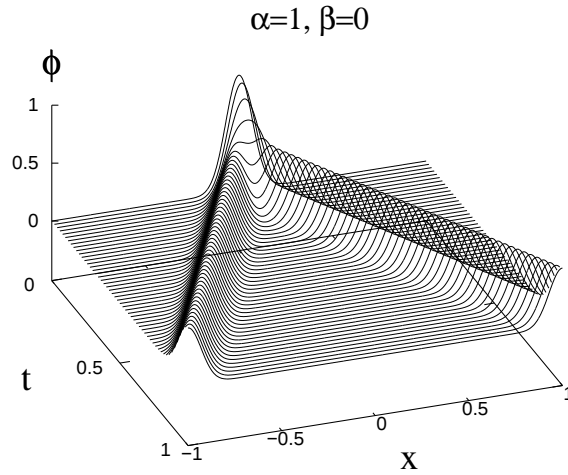


Figura 3.5: La ecuación de onda usual, se fractura la gaussiana inicial en dos gaussianas más pequeñas hasta que alcanzan las fronteras a $t \sim 1$.

En la Figura 3.5 tenemos el caso $\alpha = 1, \beta = 0$, ésta es la ecuación de onda usual y no esperamos ninguna sorpresa. Puede verse que la gaussian inicial se descompone en dos pulsos que alcanzan las fronteras al mismo tiempo alrededor de $t \sim 1$.

Por otra parte, en la Figura 3.6 se presentan dos casos $\beta = 1$ y $\beta = 0.75$, en el primer caso, las coordenadas se están moviendo hacia $x > 0$ a la velocidad de la propagación de la onda; así, el sistema coordenado está persiguiendo a uno de los pulsos, que aparece en el diagrama centrado en $x = 0$; el otro pulso alcanza la frontera en la mitad del tiempo, lo que indica que se mueve dos veces más rápido que en las coordenadas usuales; en el segundo caso se muestra el caso $\beta = 0.75$, que es un caso muy parecido, la diferencia es que el sistema coodenado se mueve un poco mas lentamente que el pulso, por lo cual en nuestro diagrama dicha gaussiana se encuentra desplazada del centro, aunque muy cerca de él.

Un ejemplo que ilustra cómo trabaja el lapso α es el mostrado en la Figura 3.7. En éste caso una versión alisada de la función escalón se elige para el lapso, trayéndo del valor 0.5 a 1.0. El efecto es que α , siendo el coeficiente de dt^2 determina cómo están separadas las rebanadas espaciales, por lo tanto, la evolución donde $\alpha = 0.5$ ($x < 0$) es más lenta que en el región donde $\alpha = 1$ ($x > 0$). De hecho, en el primer caso toma al pulso el doble de tiempo ~ 2 llegar a la frontera, mientras que en la otra región el pulso alcanza la frontera en el tiempo regular ~ 1 . Este tipo de comportamiento es muy útil en escenarios de relatividad general; por citar un ejemplo, cuando un hoyo negro se forma como resultado del colapso de una estrella, se encuentra que en la geometría comienza a diverger cerca del centro del

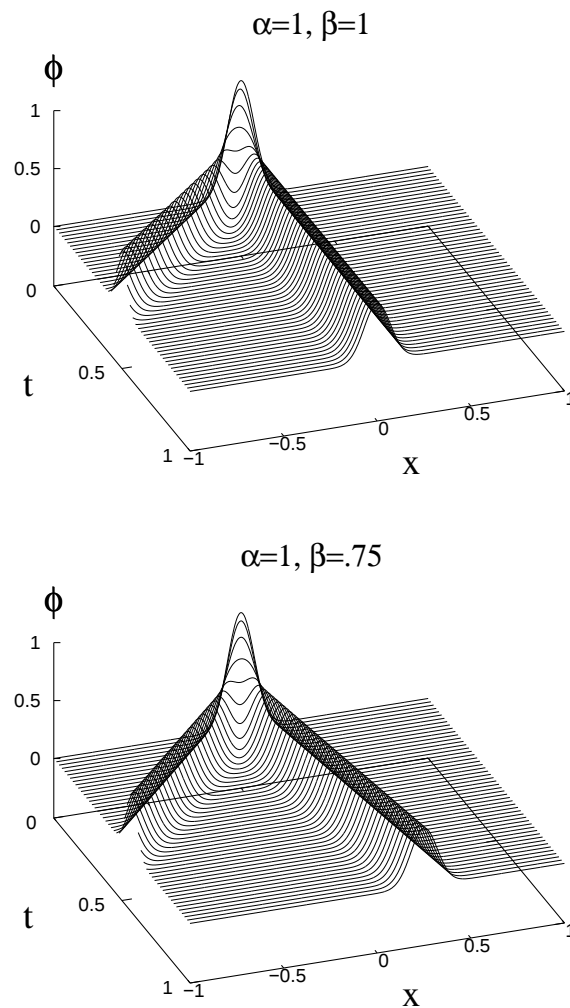


Figura 3.6: Aquí tenemos un ejemplo de la diferencia en el corrimiento hacia la frontera. (Arriba) La ecuación de onda con $\beta = 1$ que implica que nuestras coordenadas están navegando encima de una de las gaussianas pequeñas. Es decir, las coordenadas viajan a la velocidad de la onda. (Abajo) La ecuación de onda con $\beta = 0.75$ que implica que nuestras coordenadas están navegando, aunque mas lentamente.

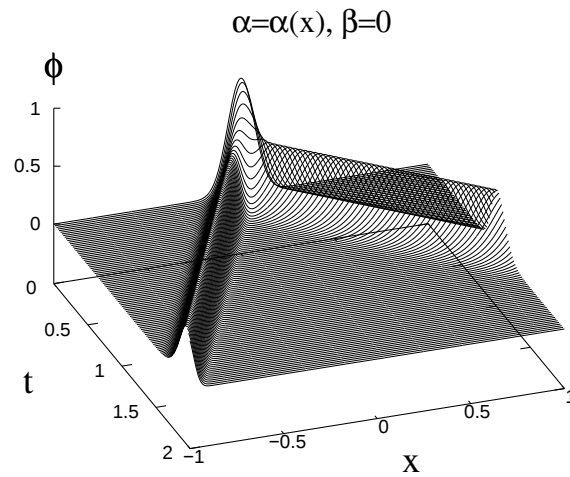


Figura 3.7: La ecuación de onda con $\beta = 0$ y $\alpha = 0.25 \tanh(10x) + 0.75$ la cuál es una versión suavizada de una función escalón que salta de 0.5 a 1.0. Puede observarse que en la región donde $\alpha = 0.5$ ($x < 0$), la onda viaja con una velocidad reducida en estas coordenadas (puede ser visto que la señal alcanza la frontera después del otro pulso). Esto es porque uno ha utilizado una foliación con el intervalo de tiempo $(0.5dt)^2$, donde están más cercanas las rebanadas espaciales que en la región con $x > 0$, para el cual el intervalo del tiempo es $(1.0dt)^2$.

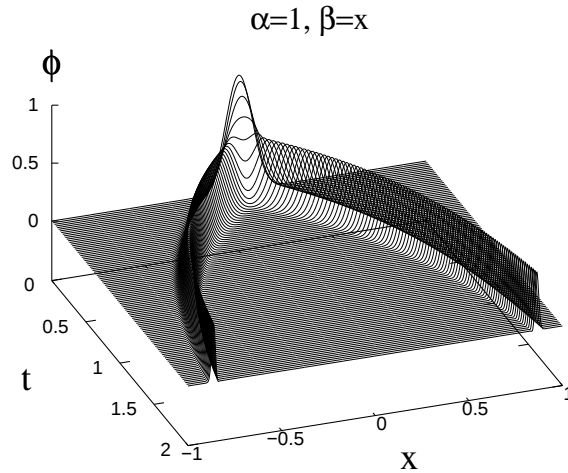


Figura 3.8: La ecuación de onda con $\beta = x$ y $\alpha = 1$. El cambio iguala la velocidad de propagación de la onda de las fronteras, las señales nunca las alcanzarán. Las gaussianas se comprimen conforme se acercan a las fronteras porque en esas regiones las coordenadas viajan a la velocidad de la propagación de la onda.

sistema, y por lo tanto uno está tentado a escoger condiciones para rebanar en esta región exigiendo $\alpha \rightarrow 0$ en esta región, de modo que la evolución se congele y los errores debidos a las divergencias de la geometría no se desarrollan y no se propagan al resto del dominio numérico. De hecho simplificamos este caso en el siguiente capítulo, antes de presentar el caso de la función de un hoyo negro.

Como ejemplo final, en la Figura 3.8 se muestra una solución con $\alpha = 1$ y $\beta = x$. Notemos que las coordenadas viajan a la velocidad de la onda en las fronteras, porque allí $\beta = \pm 1$. Esto implica que las señales nunca alcanzarán las fronteras numéricas. El efecto es que los pulsos en estas coordenadas se "comprimen" mientras se acercan a las fronteras. Por un lado esto es una ventaja, porque uno no necesita imponer condiciones de frontera (las señales nunca alcanzarán la frontera), pero por otra parte el pulso se está definiendo con menos puntos del dominio, lo cual afecta la precisión de los cálculos.

La lección más importante de la solución de este problema sencillo, es que es posible entender el significado de α como etiquetador de la foliación del espacio en el tiempo, y de β como transformador local de las coordenadas espaciales.

El caso en que α varía de 0.5 a 1 ilustra el fenómeno del corrimiento al rojo gravitacional, pues las señales se reciben a intervalos reetiquetados en el tiempo.

En Relatividad Numérica α y β se eligen dependientes del tiempo, con el fin de que las coordenadas se autocorrijan para optimizar los errores en los cálculos.

Capítulo 4

La Ecuación de Onda en 3+1 y Simetría Esférica.

Antes de estudiar el caso autogravitante es necesario aprender algunas estrategias relacionadas con el uso de las coordenadas esféricas, pues sabemos que el laplaciano en dichas coordenadas diverge en el origen, de ahí que sea necesario determinar un método de regularización de los operadores discretos. Es por ello que se estudia en este capítulo la solución de la ecuación de onda con simetría esférica en coordenadas esféricas, que es un problema que se reduce a una coordenada espacial y una temporal, pero que involucra la singularidad de las coordenadas, y además es un caso muy parecido al autogravitante que estudiamos adelante.

Dado que en el caso autogravitante no se usará el vector de corrimiento, simplificamos esta sección al uso solamente de un lapso $\alpha = \alpha(r)$ sin vector corrimiento.

En un espacio-tiempo en coordenadas esféricas teniendo tres dimensiones espaciales y simetría esférica, un elemento de línea en coordenadas esféricas es:

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.1)$$

donde r es la coordenada radial, θ, ϕ son las coordenadas angulares y t es el tiempo.

Con el fin de definir variables de primer orden, debemos escribir el operador D'Alembertiano en términos de las componentes del tensor métrico. En el presente caso, dada la simetría esférica se tiene

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

de donde obtenemos la matriz inversa

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

De (4.2) tenemos que $\sqrt{-g} = \alpha r^2 \sin \theta$. Hacemos los mismos pasos que en (3.7). La suposición de simetría esférica, significa que $\phi = \phi(t, r)$, de modo que obtenemos el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} \square \phi &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right] \\ &= \frac{1}{\alpha r^2 \sin \theta} \partial_t \left[(\alpha r^2 \sin \theta) g^{tv} \partial_\nu \phi \right] + \frac{1}{\alpha r^2 \sin \theta} \partial_r \left[(\alpha r^2 \sin \theta) g^{rv} \partial_\nu \phi \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} \partial_t \left[\alpha g^{tt} \partial_t \phi \right] + \frac{1}{\alpha r^2} \partial_r \left[(\alpha r^2) g^{rr} \partial_r \phi \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} \partial_t \left[-\frac{1}{\alpha} \partial_t \phi \right] + \frac{2}{\alpha r^2} \partial_r \left[\alpha r^2 \partial_r \phi \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$= 0. \quad (4.5)$$

De este desarrollo encontramos que las nuevas variables convenientes son $\pi = \frac{\partial_t \phi}{\alpha}$ y $\psi = \partial_r \phi$. Finalmente, en términos de estas nuevas variables, la ecuación de onda se escribe como el sistema de ecuaciones de evolución siguientes

$$\partial_t \pi = \frac{1}{r^2} \partial_r [\alpha r^2 \psi] \quad (4.6)$$

$$\partial_t \psi = \partial_r \pi \quad (4.7)$$

$$\partial_t \phi = \alpha \pi, \quad (4.8)$$

donde la tercera ecuación es la que permite reconstruir el valor de la función de onda en términos de las variables de primer orden (en esta caso solamente π) y las dos primeras son las ecauciones que resolveremos. Vale notar que en la primera de las ecuaciones hay un término que es singular en $r = 0$ y que regularizaremos de la manera siguiente.

Discretizamos el dominio espacial de modo que evitamos el origen, esto es, nuestra malla espacial estará definida por: $r_j = j\Delta r - \frac{\Delta r}{2}$. En estas circunstancias, basta con imponer condiciones de paridad sobre las funciones involucradas*, es decir, si la función de onda ϕ es una función par, entonces sabemos que π también lo es y ψ es impar.

4.1 Datos Iniciales

Debemos de proveer datos iniciales para $\pi(0, r)$ y $\psi(0, r)$, para lo cual imponemos una vez más un perfil gaussiano para la función de onda ϕ centrado en el origen, y además con simetría temporal:

$$\begin{aligned}\phi &= Ae^{-r^2/\sigma^2} \\ \psi &= -\frac{2r}{\sigma^2}\phi \\ \pi &= 0.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Sabemos que el comportamiento de este pulso, debe tener como destino la salida de la función de onda por la frontera como una superposición de ondas esféricas.

4.2 Condición de frontera

En este caso imponemos la condición de frontera de onda saliente, pues queremos aproximarnos lo más posible a lo que necesitaremos en el caso autogravitante, donde hemos de suponer que el sistema es aislado y que no recibe energía externa.

La condición de onda saliente en este caso se puede obtener usando los métodos mostrados en el capítulo anterior, pero dado que no hay vector de corrimiento, basta con factorizar el operador de onda sobre la función de onda original del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\square\phi &= -\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial t}\right)\phi\end{aligned}\tag{4.10}$$

$$= 0,\tag{4.11}$$

de donde identificamos el modo que viaja a la izquierda (al igual que en el capítulo anterior) como $\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\phi$, el cual deseamos eliminar en la frontera. Así, la condición de frontera

*Es preciso reconocer que el origen no es una frontera, sino un punto de simetría, de modo que a esta estrategia no le llamamos aplicación de condiciones de frontera.

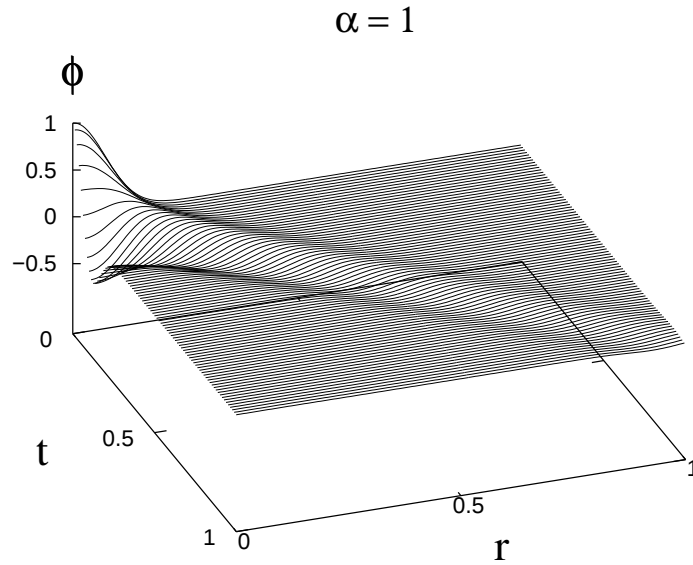


Figura 4.1: La ecuación de onda con simetría esférica con $\alpha = 1$ el pulso sale del dominio.

es la siguiente:

$$\psi + \frac{\phi}{r} + \pi = 0. \quad (4.12)$$

Esta condición de frontera aporta los resultados correctos descritos a continuación.

4.3 Resultados

A continuación se muestran unas ilustraciones representativas del caso con simetría esférica. El dominio espacial usado es de $0 \leq r \leq 1$ y $\Delta r = 0.002$, $\Delta t = 0.0005$.

Mientras en el caso anterior se variaba tanto el lapso como el vector corrimiento, ahora solo variaremos el lapso. En la figura 4.1 tenemos que $\alpha = 1$, en la cual no encontramos nada nuevo, se puede ver como el pulso alcanza la frontera en $t \sim 1$ y $r \sim 1$. En la figura ?? tenemos que $\alpha = 0.5$ con lo cual el sistema se está moviendo a la mitad de la velocidad que el pulso en su misma dirección espacial, por lo cual alcanza la frontera en $r \sim 0.5$.

Un caso más, aunque monótono, es cuando el lapso se desplaza a la misma velocidad que el pulso y en su misma dirección, aparenta que

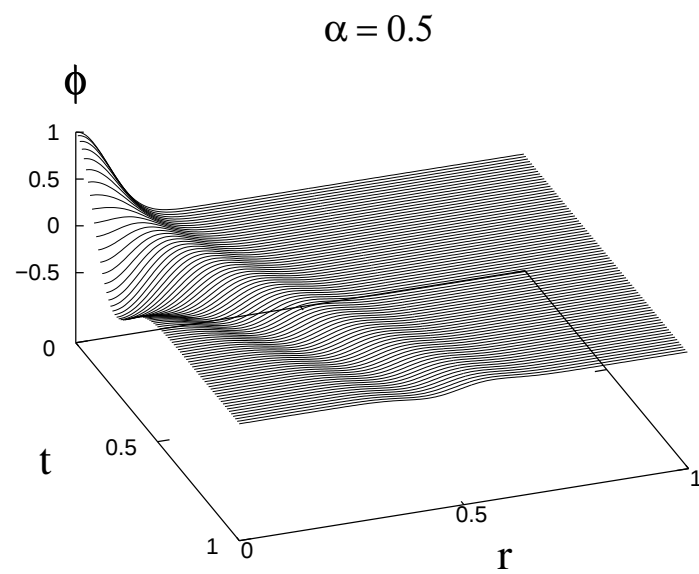


Figura 4.2: En este caso, debido a que $\alpha = 0.5$ el pulso no sale del dominio en el tiempo que duro la corrida, sin embargo, el pulso saldra del dominio más adelante, si se ampliara el rango a dos, se veria que ahi sale el pulso del dominio.

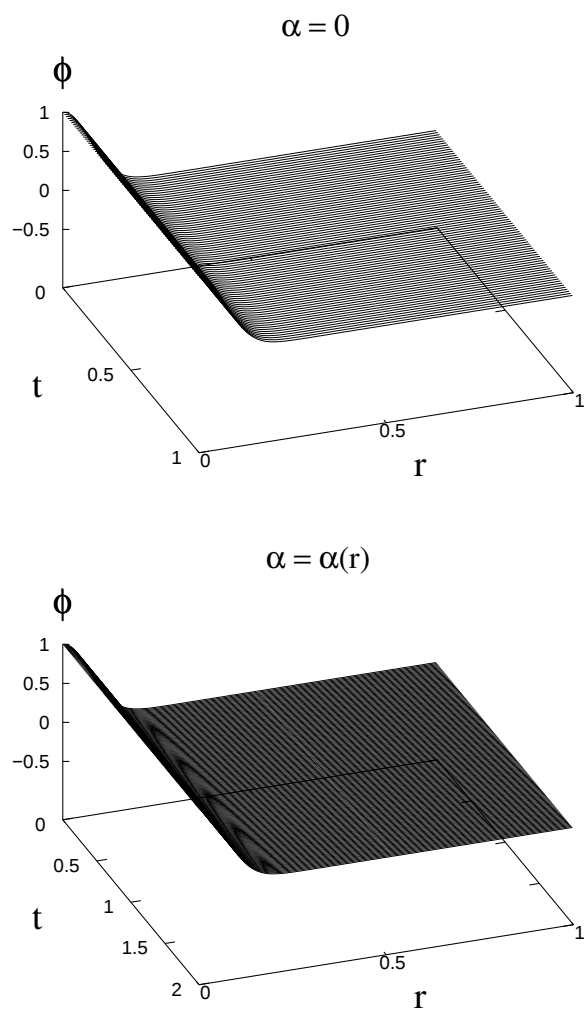


Figura 4.3: Aunque las dos ilustraciones son similares son dos casos diferentes, arriba $\alpha = 0$ el pulso jamas sale del dominio, y en el de abajo aunque su lapso es $\alpha = 0.5 \tanh(\frac{r-0.5}{0.1}) + 0.5$ tampoco sale del dominio.

Capítulo 5

La Ecuación de Onda Auto-Gravitante en Relatividad General.

El ingrediente que falta en el caso anterior es la autogravedad. La generalización más simple del caso anterior hacia relatividad general es considerar que la función de onda está asociada a un campo escalar, que además tiene un tensor de energía momento asociado. Agregamos un potencial al campo escalar con el fin de tener una función de onda con masa. La condición geométrica llamada identidad de Bichi resulta ser una ecuación de onda generalizada, la llamada ecuación de Klein-Gordon, que es una generalización leve de la ecuación de onda si tomamos en cuenta que hemos usado el desarrollo del operador D'Alambertiano en términos de un elemento de línea. Aquí es suficiente mencionar que el tensor de energía momento para un campo escalar se lee:

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} + 2V(\phi)], \quad (5.1)$$

el cuál está conectado con la geometría del espacio-tiempo a través de las ecuaciones de Einstein $G_{\mu\nu} = \kappa_0 T_{\mu\nu}$ en las unidades donde $c = G = 1$; $V(\phi)$ es el potencial del campo escalar, que será considerado aquí es de la forma $\frac{1}{2}m^2\phi^2$, donde m es interpretado en teoría de campo como la masa de un bosón representado por el campo escalar. Sobre este tipo de campo, es bien sabido que no hay soluciones estáticas a las ecuaciones de Einstein con simetría esférica a menos que haya una singularidad desnuda. Una salida para construir soluciones regulares es asumir que el espacio-tiempo es dependiente del tiempo. Bajo tal suposición es posible escribir el elemento de línea en las coordenadas de Schwarzschild como

$$ds^2 = -\alpha^2(r, t)dt^2 + a^2(r, t)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5.2)$$

donde α es la función lapso en el lenguaje de la descomposición de 3+1 y donde el vector desplazamiento se ha supuesto $\beta^r = 0$. Aquí r y t son las coordenadas radial y temporal

respectivamente. Estas coordenadas fueron elegidas porque son las mas comunes en los textos básicos. De hecho, para quitar algunas constantes es posible utilizar las variables escaladas $\phi \rightarrow \sqrt{\kappa_0}\phi \rightarrow mr$ y $t \rightarrow mt$. La identidad de Bianchi para el tensor de energía-momento implica la ecuación ya mencionada de Klein-Gordon:

$$\square\phi - \phi = 0, \quad (5.3)$$

donde como antes $\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi]$ y donde asumimos que $\phi = \phi(r, t)$. Por otra parte, hay que observar que el rescalamiento de las variables quita la presencia de las constantes m y κ_0 en las ecuaciones de Einstein. Aquí g y $g^{\mu\nu}$ ya no corresponden a un espacio tiempo plano, pues no se conocen α ni a . Notar también que dado ϕ dependiente del tiempo en general, el tensor métrico es también en general dependiente del tiempo, lo que implica que el D'Alambertiano es operador dependiente del tiempo en general. Para aprovechar las ideas de la sección anterior, se desarrolla en D'Alambertiano a partir de las componentes del tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

cuya inversa es elemental:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

A partir de estas matrices es posible ahora hacer el desarrollo del D'Alambertiano en términos de las componentes del tensor métrico

$$\begin{aligned} \square\phi - \frac{dV}{d\phi} &= \square\phi - \phi = \\ &= \frac{1}{aar^2 \sin\theta} \partial_t[(aar^2 \sin\theta)g^{tv}\partial_\nu\phi] + \frac{1}{aar^2 \sin\theta} \partial_r[(aar^2 \sin\theta)g^{rv}\partial_\nu\phi] - \phi \\ &= \frac{1}{a\alpha} \partial_t[a(\frac{-1}{\alpha})\partial_t\phi] + \frac{1}{ar^2} \partial_r[\frac{r^2}{a}\partial_r\phi] - \phi \\ &= -\frac{1}{a\alpha} \partial_t[\frac{a}{\alpha}\partial_t\phi] + \frac{2}{ra^2} \partial_r\phi + \frac{1}{a^2} \partial_r[\partial_r\phi] - \phi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

lo que sugiere la definición de las variables $\pi = a\partial_t\phi/\alpha$, $\psi = \partial_r\phi$. Con la definición de estas

nuevas variables, la ecuacion de Klein-Gordon es

$$\partial_t \phi = \frac{\alpha}{a} \pi \quad (5.7)$$

$$\partial_t \pi = \frac{1}{r^2} \partial_r \left(\frac{r^2 \alpha \psi}{a} \right) - a \alpha \phi \quad (5.8)$$

$$\partial_t \psi = \partial_r \left(\frac{\alpha \pi}{a} \right) \quad (5.9)$$

que es ahora un sistema de tres ecuaciones de primer orden que determina la evolución de un campo escalar autogravitante. Es evidente que este sistema de ecuaciones es muy semejante a los encontrados en los capítulos anteriores, pero en esta ocasión las funciones α y a son desconocidas hasta aquí, y la razón es que estas quedan determinadas por las ecuaciones de Einstein. En términos de las variables de primer orden que hemos definido, las ecuaciones de Einstein resultan ser:

$$\frac{\partial_r a}{a} = \frac{1 - a^2}{2r} + \frac{r}{4} [\psi^2 + \pi^2 + 2a^2 V] \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial_r \alpha}{\alpha} = \frac{\partial_r a}{a} + \frac{a^2 - 1}{r} - r a^2 V \quad (5.11)$$

$$\partial_t a = \frac{1}{2} r \alpha \phi \pi, \quad (5.12)$$

donde (5.10) es la constricción Hamiltoniana, (5.11) es la condición al rebanar el espacio y (5.12) es la constricción de Momento. Este sistema de ecuaciones es sobredeterminado pues hay dos incógnitas y tres ecuaciones y tienen que elegirse cuales de las ecuaciones se resolverán. Como en [5, 6] las primeras dos ecuaciones fueron utilizadas y la constricción del momento fue utilizada para supervisar la precisión y la convergencia de los cálculos. Es decir, como se mencionó en el capítulo 2, la constricción de momento se supone que es una identidad, sin embargo, el error introducido por la discretización implicará que no se satisface, y el recurso que queda es saber si al menos converge. En la práctica la constricción que se usa para monitorear la precisión de los cálculos es la Hamiltoniana, sin embargo aquí hemos decidido resolver dicha ecuación y usar la de Momento con fines de monitoreo.

5.1 Datos Iniciales

Un punto principal en relatividad numérica es la construcción de datos iniciales; no es tan simple como la colocación de una gaussiana y evolucionarla, pero hay algunas ecuaciones que tienen que ser satisfechas. Generalmente, en la descomposición 3 + 1 uno tiene

que solucionar las constricciones hamiltoniana y de momento (que a propósito son ecuaciones elípticas en general) en el tiempo inicial para el sistema físico deseado (una revisión completa puede ser encontrada en [7]). Una vez que se solucionen las constricciones, las ecuaciones de evolución se utilizan para desarrollar la evolución de los datos iniciales; en la formulación de ADM de la relatividad general las variables dinámicas que se desarrollan son la 3-métrica y la curvatura extrínseca de las hipersuperficies espaciales [4].

En el caso actual no solucionamos la constricción de momento, se fija $\beta^r = 0$ por lo cual solo se busca solución la constricción hamiltoniana, que afortunadamente estas ecuaciones son ordinarias y no elepticas.

Inspeccionando las ecuaciones (5.10) y (5.11) tenemos que uno necesita proporcionar los valores para π y ψ en el tiempo inicial. Esto puede lograrse definiendo el perfil inicial para ϕ y -según lo hecho para la ecuación de onda- asumir la simetría temporal en el tiempo inicial, que implica $\pi = 0$. Como antes, uno elige un perfil gaussiano, centrado en el origen de coordenadas $\phi(0, r) = Ae^{-r^2/\sigma^2}$ con la derivada espacial $\psi(0, r) = \partial_r \phi$. Podría ser cualquier otro perfil, pero el problema será planteado bien solamente cuando el perfil sea compacto, así uno espera que el campo sea cero a partir de cierto valor de r .

La construcción de los datos iniciales funciona como sigue: 1) dada ϕ , 2) calcula su derivado espacial ψ , 3) se asume $\pi = 0$, 4) se integra la constricción hamiltoniana del origen ($r = 0$) hasta el borde externo del dominio numérico suponiendo $a(0) = 0$, 5) se asume que el espacio-tiempo es Schwarzschild en el borde del dominio numérico, esta suposición implica $\alpha(0, r_N) = 1/a(0, r_N)$ y se integra la ecuación para α hacia adentro. La integración del lapso y de la constricción hamiltoniana se hace con un integrador de EDO Runge-Kutta de segundo o cuarto orden sin observar diferencias significativas.

5.2 Evolución

Como en el caso de la ecuación de onda, se utilizan diferencias finitas centradas y el dominio está discretizado de la misma manera que en el capítulo anterior. El sistema de las ecuaciones a resolver es (5.10, 5.11) y (5.7–5.9). Las primeras dos ecuaciones son ordinarias en r y las otras tres son ecuaciones de evolución parciales. Por lo tanto las últimas tres ecuaciones impulsan la evolución de los datos iniciales, y por lo tanto el valor del tensor de energía-momento; las otras dos ecuaciones son las ecuaciones de Einstein que deben ser resueltas en cuanto haya nuevos valores para el campo escalar y sus derivadas (π y ψ), que son los ingredientes del tensor de energía-momento.

El procedimiento para la evolución es: i) Tomar los datos iniciales contruidos en la

sección previa, *ii*) Desarrollar los datos usando (5.7 – 5.9), *iii*) Solucionar la constricción hamiltoniana (5.10) hacia fuera asumiendo $a(0) = 0$, *iv*) En la frontera supongamos que el espacio-tiempo es de Schwarzschild y definimos $\alpha(r_N) = 1/a(r_N)$, integrando la condición para α hacia el interior hasta el origen, *v*) Usando los nuevos valores de α y a para calcular nuevos valores para las variables del campo escalar usando (5.7 – 5.9), *vi*) repitiendo esta serie de pasos.

Las funciones α y a están relacionadas en el límite exterior de modo que el sistema es aislado, pero nada ha sido dicho del comportamiento del campo escalar en la frontera. Lo que se ha asumido aquí es que en el borde exterior del dominio numérico el espacio-tiempo es tan plano que el campo escalar es una función de onda esférica, es decir, cumple la relación

$$\psi = -\pi - \phi/r \quad (5.13)$$

La cuál es una relación que involucra la información de las funciones métricas también contenidas en la definición de π . Sin embargo, no toda la información necesaria está disponible; de acuerdo con la ecuación (5.7) el campo escalar puede ser integrado hasta la frontera porque el lado derecho no contiene derivadas espaciales y no hay necesidad de aplicar condiciones sobre ϕ ; dado que π es la derivada temporal del campo, uno puede suponer que satisface la ecuación de onda esférica también, eso es, cumple la ecuación:

$$\partial_r \pi + \partial_t \pi + \frac{\pi}{r} = 0. \quad (5.14)$$

Para encontrar una solución de esta ecuación, la definición de los operadores con puntos de un solo lado en la capítulo 2.1 son útiles para calcular la derivada espacial necesaria en la ecuación (5.14). Una vez que ha sido resuelta esta ecuación para $\pi(r_N)$ uno usa (5.13) para calcular $\psi(r_N)$ y el problema es solucionado.

Para ilustrar que estas soluciones pueden ser formuladas en realidad, es suficiente seguir la receta anterior con $A = 0.3$ y $\sigma = 5.35$. Cualquier otro conjunto de parámetros funciona, y fueron usados estos porque proveían una solución de largo tiempo de vida. La frontera fue escogida en la ubicación $r_N = 30$ para que la materia fuera muy bien localizada. En la Figura 5.1 el comportamiento dinámico de las funciones métricas es mostrada. El máximo de a^2 también es indicado y pueden ser observados dos modos: uno de frecuencia alta que está relacionado con un sobretono la frecuencia del campo escalar, y el modo de frecuencia baja correspondiente a un tipo de oscilación de modo cuasinormal [8].

La constricción de momento. Éste es el momento de ilustrar el comportamiento de la constricción de momento; recordemos que la ecuación (5.12) no ha sido usada para evolucionar el sistema y uno debe verificar su validez. En la Figura 5.2 el valor de la cantidad

$\partial_t a - \frac{1}{2} r \alpha \phi \pi$ es trazado para la configuración ilustrada aquí; en teoría - en el límite continuo - tal cantidad debe ser cero. Sin embargo lo que es mostrado aquí es que en el límite continuo converge en realidad a cero, que es un criterio bastante sólido que indica que los cálculos son razonables.

Otra situación ilustrativa se da con $A = 0.4$ y $\sigma = 5.35$. En tal caso se tiene una configuración tan compacta para colapsar en un agujero negro. En la 5.3 se muestra el lapso; después de algunas oscilaciones la configuración colapsa definitivamente. Las coordenadas usadas aquí son inútiles para continuar la evolución del agujero negro con exactitud, por lo cual son requeridas coordenadas "penetrantes"; en lo que respecta al caso de un vector $\beta \neq 0$ debe ser considerado en la ecuación, pero es un caso más allá del alcance de este trabajo (vea [7] para un ejemplo sobre cómo usar tales coordenadas para un sistema físico muy similar).

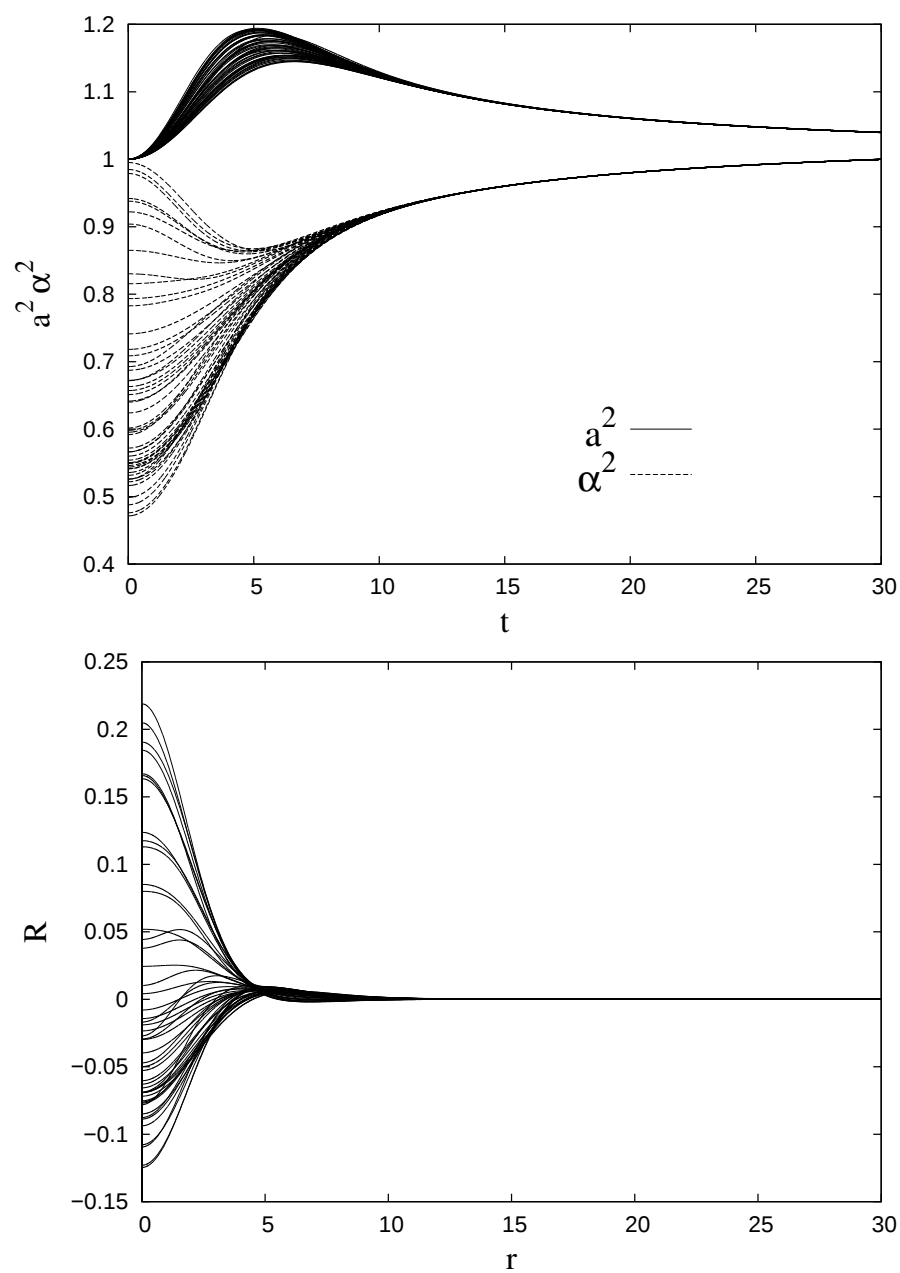


Figura 5.1: (Arriba) Ilustración de la función métrica a^2 y α^2 , para distintos valores del tiempo. (Abajo) Se muestra el Escalar de Ricci R , lo que indica que la geometría del espacio-tiempo está variando con el tiempo, y además se trata de un comportamiento oscilatorio.

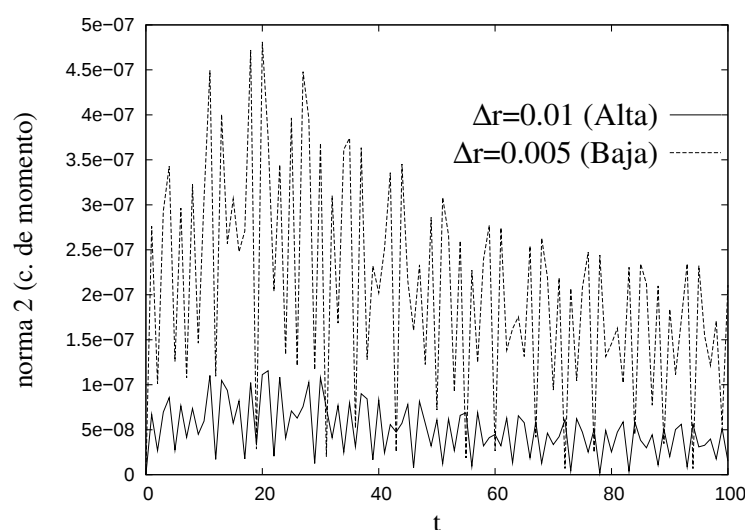


Figura 5.2: Aquí se ilustra la constricción de momento para dos resoluciones usando dos diferentes simulaciones. el valor de esta constricción con menor resolución es 4 veces mayor que la calculada con la alta resolución, lo que significa que el factor de convergencia es 4 (ver la sección 2.2).

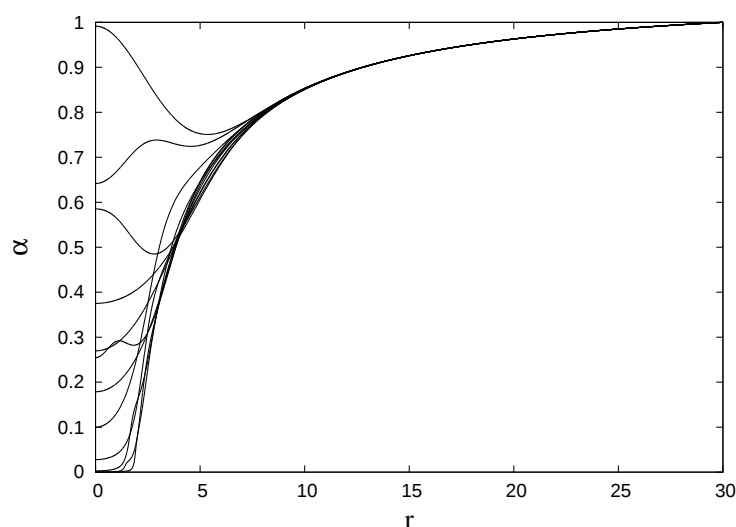


Figura 5.3: En esta imagen se muestra el lapso a distintos valores del tiempo, de la configuración que se colapsa en hoyo negro. Después de algunas oscilaciones se colapsa, lo cual indica la formación de un horizonte aparente.

Capítulo 6

Discusión y Conclusiones.

Hemos desarrollado los métodos y los programas para resolver tres problemas importantes:

La ecuación de onda en un espacio-tiempo plano con una dimensión espacial y una dimensión temporal en coordenadas cartesianas, siendo su finalidad la de irnos familiarizando con la ecuación de onda en el caso mas sencillo, dando una gaussiana ver su desarrollo variando su lapso y su vector de corrimiento, donde en un primer caso se dejo correr la gaussian dejando nuestro sistema de referencia estatico, se observo como nuestra gaussiana se dividia en dos pequeñas gaussianas que se movian simétricamente al origen, desplazandose hacia las fronteras, tocandolos al mismo tiempo en su frontera correspondiente, despues se empezaron a variar nuestro vector de corrimiento, observando que cuando crecia haciamos que nuestro sistema de referencia se moviera en sentido de la gaussiana que corria hacia la frontera derecha, con lo cual esta gaussiana parecia no moverse en el transcurso de tiempo, mientras que la gaussiana que se movia a la izquierda alcanzaba la frontera en menor tiempo. En un último caso se hizo que el cambio igualara la velocidad de propagación de la onda con lo cual se obtiene una forma curiosa, dado que nuestras gaussianas jamas tocaran las fronteras aunque se comprimiran por estarse acercando cada vez mas a ellas.

Despues complicamos un poco mas el problema pues se tomo la ecuación de onda con tres dimensiones espaciales, pero esta vez en coordenadas esféricas, con la finalidad de aprender estrategias, pues se presentaba el caso de una singularidad en el origen de las coordenadas, con lo cual se realizo un método de regularización de los operadores discretos, tomando también la restricción de manejar el problema con simetría esférica con lo cual reducimos el problema a una dimensión espacial y una dimensión temporal.

El tercer caso es el objetivo de esta tesis, es decir, la solución de un campo escalar masivo autogravitante en relatividad general. El resultado es que demostramos que existen soluciones estables y soluciones inestables, siendo las inestables aquellas que colapsan en

hoyo negro.

Mostramos el significado y la utilidad del lapso y el vector corrimiento, como funciones que corresponden a cambios de coordenadas, lo que aporta un entendimiento significativo de las ecuaciones de Einstein como un sistema de ecuaciones de evolución.

Hemos usado los algoritmos mas comunes en el area de la relatividad numerica, para reolver un caso sencillo, pero de complejidad suficiente como para describir la fromacion de un hoyo negro.

Entre otras aplicaciones, con los algoritmos descritos de anteriormente es posible estudiar los fenómenos críticos como en el trabajo clásico de Choptuik [9], donde $m = 0$.

Sin embargo restringimos nuestra atención a la construcción de las soluciones llamadas oscilatonos. Estos oscilatonos son las soluciones para el problema de valor inicial suponiendo que el campo escalar y las funciones métricas pueden ser expresadas como una serie de Fourier. El resultado es que como otro tipo de estrellas (estrellas de neutrones o estrellas de bosones) las configuraciones de equilibrio formuladas bajo la suposición de serie de fourier, demuestran las ramas estable e inestable; es decir las configuraciones estables son duraderas las configuraciones inestables se colapsan en agujeros negros. La primera referencia para oscilatonos esta en [11]; el análisis reciente y detallado de los oscilatonos puede ser encontrado en [8]; una aplicación astrofísica de oscilatonos relacionado con la materia oscura se encuentra en [10].

Los programas desarrollados para lograr esta tesis son de acceso publico y estan a disposicion de quien los solicite, esta es por supuesto la aportacion mas relevante de este trabajo de tesis.

Referencias

- [1] Susana Valdez Alvarado, Tesis de Licenciatura FCFM, 2006.
- [2] J. Thornburg, E-print: gr-qc/9906022.
- [3] I. Hawke, S. Hasu y B. Szilagy, <http://num-rel.aei.mpg.de/Education/Tutorial/School04/tov.ps>
- [4] C. Bona y C. Palenzuela-Luque, Element of Numerical Relativity, Lect. Notes Phys. **643**, Springer, Berlin Heidelberg 2005.
energía del vacío.
- [5] M. Alcubierre, R. Becerril, F. S. Gúzman, T. Matos, D. Núñez y L. A. Ureña López, Class. Quantum Grav. **19**, 5017 (2003)
- [6] M. Alcubierre, F. S. Gúzman, T. Matos, D. Núñez, L. A. Ureña López y P. Wiederhold, Class. Quantum Grav. **19**, 5017 (2002)
- [7] Gregory B. Cook, Living Reviews in Relativity. 2005-5.
<http://www.livingreviews.org/Articles/Volumen3/2000-5cook>
- [8] W. H. Press S. A., Teukolsky, W. T. Watterling y B. P. Flannery, Numerical Recipes in Fortran. Cambridge University Press, 1992.
- [9] M. W. Choptuik, Phys. Rev. Lett. **70**, 9-12 (1993).
- [10] R. Ruffini y S. Bonazolla, Phys. Rev. **187**, 1767 (1969).
- [11] E. Seidel y W.-M. Suen, Phys. Rev. Lett. **66**, 1659 (1991).