



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS

“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ “

*“USO DE LA LUZ POLARIZADA PARA MEDIR ÍNDICES DE
REFRACCIÓN COMPLEJOS UTILIZANDO DIFERENTES
TÉCNICAS“*

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE
LICENCIADO EN CIENCIAS FISICO-MATEMÁTICAS

PRESENTA:

CLAUDIA IVETTE GARCIA GIL

ASESORADA POR:

DR. MAURICIO ORTIZ GUTIÉRREZ
PROFESOR INVESTIGADOR DE LA
FACULTADA DE CS. FISICO MATEMATICAS
U.M.S.N.H.

COASESORA:

DRA. MARIA EUGENIA CONTRERAS
PROFESORA INVESTIGADORA DEL
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES METALÚRGICAS
U.M.S.N.H.

AGOSTO 2007

MORELIA, MICH.

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Índice de Refracción	3
1.2. Objetivo General	4
1.3. Objetivos Específicos	4
2. Polarización	5
2.1. Definición de Polarización	5
2.2. Estados de Polarización	6
2.2.1. Polarización lineal	6
2.2.2. Polarización circular	7
2.2.3. Polarización elíptica	8
2.3. Mecanismos para producir luz polarizada	10
2.3.1. Dicroísmo	10
2.3.2. Birrefringencia	10
2.3.3. Esparcimiento	11
2.3.4. Reflexión	11
2.4. Representación Matemática de la Polarización	12
2.4.1. Los Parámetros de Stokes	12
2.4.2. Las Matrices de Mueller	14
2.4.3. La Esfera de Poincaré	17
3. Elipsometría	21
3.1. Introducción	21
3.2. Ecuación Fundamental de la Elipsometría Clásica	21
3.3. Medición Clásica de los Parámetros Elipsométricos Psi y Delta	23
3.4. Representación de la Matriz de Mueller	25
3.5. Cálculo de los Coeficientes de Elipsometría con los parámetros Stokes	30
3.6. Coeficientes de Fresnel	31
3.6.1. Ondas en una Interfaz	31
3.6.2. Las Ecuaciones de Fresnel	33
3.7. Solución de la Ecuación Fundamental de Elipsometría	36
4. Caracterización del equipo	39
4.1. LCD	39
4.1.1. Atenuador de Cristal Líquido	39
4.1.2. Medición del retardamiento	39
4.2. Polarímetro	40
4.3. Análisis del Cambio de Fase	40

5. Diseño Experimental y Resultados	43
5.1. Técnica por Ángulo de Brewster	43
5.2. Técnica por Transmitancia	46
5.3. Técnica por Elipsometría	47
5.3.1. Medición del índice BK7 con un polarizador a 110 grados con la muestra a un ángulo de 56 grados	49
5.3.2. Medición del índice del BK7 incidiendo polarización circular a cualquier ángulo	49
5.4. Técnica por Elipsometría Nula	49
6. Conclusiones	51

Capítulo 1

Introducción

La naturaleza ondulatoria de la luz presenta propiedades interesantes cuando la luz interacciona con materiales. Es bien conocido que la polarización de la luz se refiere a la selección por medios naturales (esparcimiento de Rayleigh), o artificiales (por elementos polarizantes creados por el hombre) de la vibración de los campos eléctrico y magnético de la luz. La vibración de otros campos puede estar contenido en un plano si es vertical, horizontal o alguna otra forma. Esto es posible si las fases de las componentes de la onda varían o difieren entre si en cantidades determinadas. Esta de variación de fase se puede presentar cuando un haz de luz incide en un material. Esto es, parte de la luz incidente se puede transmitir al material (se dice que se refracta), otra parte de la onda puede ser absorbida (creando lo que se conoce como índice de refracción complejo) y una cantidad más se refleja. El estado de polarización de un haz de luz puede cambiar al reflejarse. Analizando la polarización del haz reflejado se puede obtener información del material tal como su índice de refracción y/o su espesor. Existe una técnica conocida como elipsometría usada principalmente para el estudio de las propiedades ópticas y microestructuras en películas delgadas. Elipsometría puede ser usada para determinar el grosor y los índices de refracción en películas delgadas por un ajuste de las mediciones de los parámetros en modelos ópticos.

1.1. Índice de Refracción

El índice de refracción es una propiedad fundamental de un material

El índice de refracción n puede ser descrito de varias maneras. Sin embargo, la más simple es como el cociente de la velocidad de la luz en el vacío entre en el material.

Todos los valores del índice de refracción son mayores que 1.0, indicando que la velocidad de la luz es menor en el material que en el vacío.

El comportamiento de la luz en un contorno o superficie es determinada principalmente por los índices de refracción relativos y el ángulo incidente. No sólo la velocidad y la longitud de onda cambia abruptamente cuando la luz encuentra un medio de diferente índice de refracción, sino que también cambia la dirección de la luz. Este fenómeno es llamado refracción.

El índice de refracción es una simplificación de una variable compleja, el coeficiente de refracción, n^*

La parte real de n es simplemente el índice de refracción, y la parte imaginaria de k trata con el fenómeno de absorción o pérdida y es llamada **índice de absorción** k . Cuando la absorción es mínima, entonces k es pequeño, y el índice de refracción n puede ser usado para describir fenómenos ópticos.

Existen diferentes técnicas para medir el índice de refracción de un material. Una técnica muy simple es la llamada por condición nula. Una técnica actual y avanzada es aquella en la que se utilizando elipsómetros, estos son equipos de la laboratorio muy finos que permiten medir el índice de refracción. En esta tesis se utiliza la teoría de elipsometría para medir índices de refracción complejos con el uso de un polarímetro y de un modulador electroóptico. Para entender la teoría y la técnica de elipsometría, esta tesis se dividió en lo siguientes capítulos. En el capítulo 2 se

encuentran los conceptos básico de polarización y su mecanismos para obtener luz polarizada. En el capítulo 3 habla la técnica de elipsometría, su medición y el cálculo de sus parámetros. En el capítulo 4 se muestra toda la caracterización del equipo que fue utilizado para la realización de este trabajo. En el capítulo 5 se muestra el diseño experimental, los arreglos de las cuatro técnicas utilizadas y los resultados obtenidos del cálculo del índice de refracción. Y por último en el capítulo 6 se presentan las conclusiones.

1.2. Objetivo General

El cálculo para medir los índices de refracción complejo de materiales por medio del uso de la luz parcialmente polarizada empleando diferentes técnicas. con la técnica de elipsometría.

1.3. Objetivos Específicos

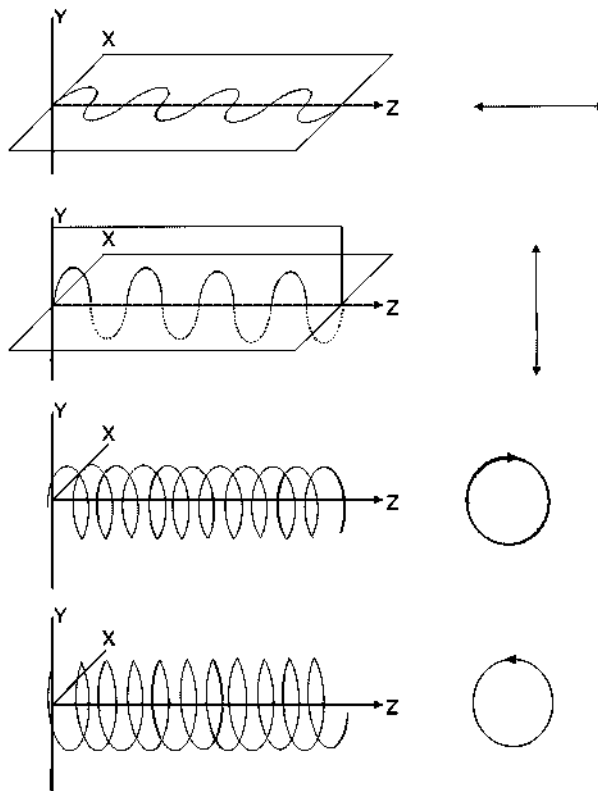
1. Comprender la teoría de polarización y elipsometría.
2. Caracterización del equipo del polarímetro.
3. Caracterización del equipo de un modulador electro-óptico.
4. Desarrollar la técnica de elipsometría con los vectores de Stokes.
5. Desarrollar la técnica de elipsometría no nula para el caso general.
6. Calcular los índices de refracción de materiales.

Capítulo 2

Polarización

2.1. Definición de Polarización

La luz polarizada tiene su campo eléctrico cuya vibración transversal tiene un patrón simple, el cual es ejemplificado en la siguiente figura.



Aquí la luz viaja a lo largo del eje Z de un sistema de coordenadas derecho. Las vibraciones eléctricas son horizontales, y por consiguiente la luz se dice que está linealmente polarizada y horizontalmente, cuya orientación del campo eléctrico es constante aunque su magnitud y signo varían con el tiempo. En este caso, el campo eléctrico o la perturbación óptica reside en lo que se conoce como el **plano de vibración**. Ese plano fijo contiene tanto a \mathbf{E} como a \mathbf{k} , el vector de campo eléctrico y el vector de propagación en la dirección del movimiento.

2.2. Estados de Polarización

Supongamos que tenemos dos ondas de luz armónicas, linealmente polarizadas, de la misma frecuencia, moviéndose a través de la misma región del espacio, en la misma dirección. Si sus vectores de campo eléctrico son colineales, las perturbaciones superpuestas se combinarán simplemente para formar una onda resultante linealmente polarizada. En el caso de que sus campos eléctricos sean perpendiculares entre sí, la onda resultante puede o no ser linealmente polarizada. A continuación se serán examinadas las diversas condiciones y sus resultados.

2.2.1. Polarización lineal

Podemos representar las dos perturbaciones ópticas ortogonales mencionadas anteriormente por medio de:

$$\mathbf{E}_x(z, t) = \hat{\mathbf{i}}E_{0x} \cos(kz - \omega t) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{E}_y(z, t) = \hat{\mathbf{j}}E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta) \quad (2.2)$$

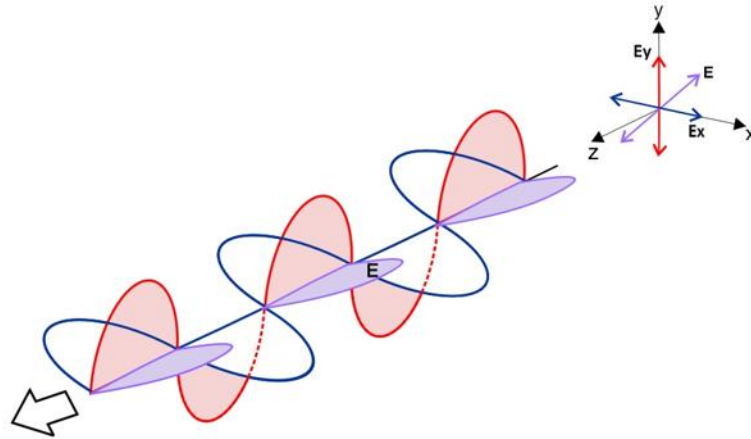
donde δ es la diferencia de fase relativa entre las ondas, ambas viajando en la dirección Z . La perturbación óptica resultante es la suma vectorial de estas dos ondas perpendiculares:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_x(z, t) + \mathbf{E}_y(z, t) \quad (2.3)$$

Si δ es cero o un múltiplo entero de $\pm 2\pi$, se dice que las ondas están en fase. En este caso la ecuación (2.3) queda

$$\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{i}}E_{0x} + \hat{\mathbf{j}}E_{0y}) \cos(kz - \omega t) \quad (2.4)$$

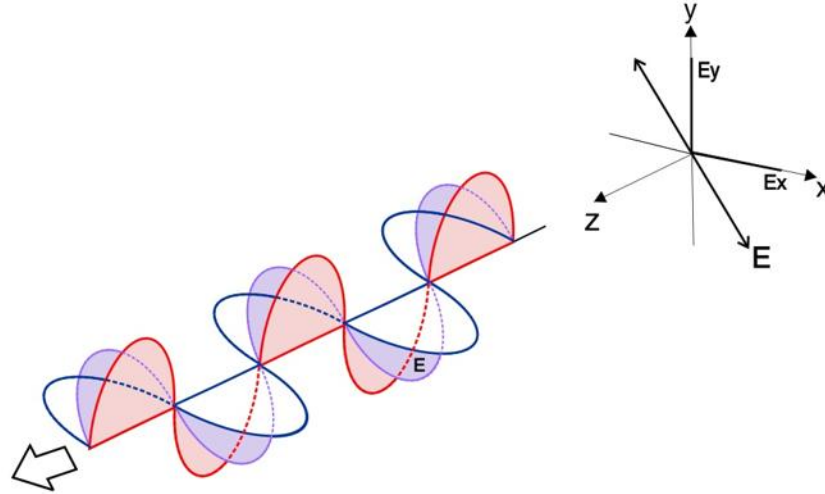
La onda resultante también es linealmente polarizada.



Supongamos ahora que δ sea un múltiplo entero impar de $\pm 2\pi$. La dos ondas están desfasadas 180° y

$$\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{i}}E_{0x} - \hat{\mathbf{j}}E_{0y}) \cos(kz - \omega t) \quad (2.5)$$

Esta onda está de nuevo linealmente polarizada pero se ha girado el plano de vibración respecto de la onda descrita en la ecuación (2.4) tal como se muestra en la figura.



Cuando las dos ondas que interfieren tienen sus planos de polarización perpendiculares, se producen ondas cuyo estado de polarización no es necesariamente lineal, como veremos ahora el caso cuando $\delta = \pm\pi/2$

2.2.2. Polarización circular

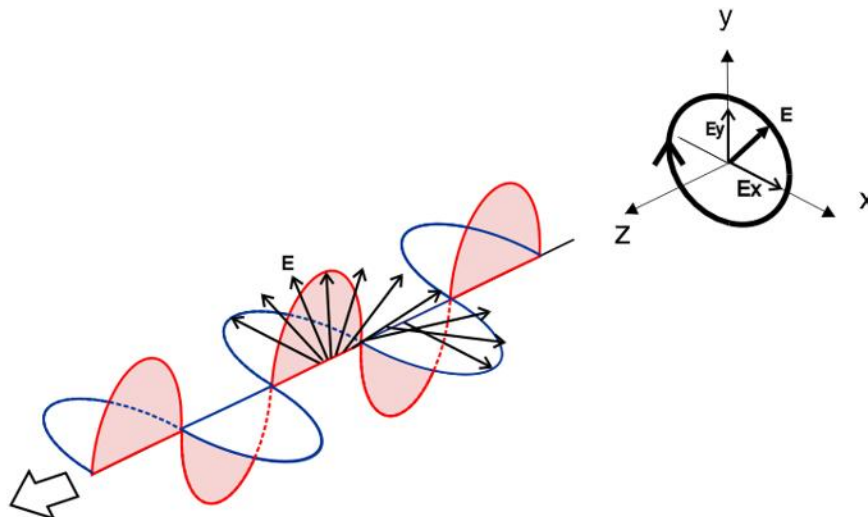
Este caso aparece cuando ambas ondas constitutivas tienen igual amplitud, es $E_{0x} = E_{0y} = E_0$, y además su diferencia de fase relativa tiene un valor dado por $\delta = -\pi/2 + 2m\pi$, donde $m = \pm 1, \pm 2, \dots$. Por lo tanto

$$\mathbf{E}_x(z, t) = \hat{\mathbf{i}}E_0 \cos(kz - \omega t) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{E}_y(z, t) = \hat{\mathbf{j}}E_0 \sin(kz - \omega t) \quad (2.7)$$

y la onda resultante de la superposición es:

$$\mathbf{E} = E_0[\hat{\mathbf{i}}\cos(kz - \omega t) + \hat{\mathbf{j}}\sin(kz - \omega t)] \quad (2.8)$$



La dirección de \mathbf{E} es variable con el tiempo y no está restringida, como antes, a un solo plano. El vector del campo eléctrico resultante gira en el sentido de las agujas del reloj a una frecuencia angular ω vista por un observador hacia quien la onda se está moviendo. Tal onda tiene **polarización circular derecha**. El vector \mathbf{E} realiza una rotación completa cuando la onda avanza a través de una longitud de onda.

En comparación, si $\delta = \pi/2, 5\pi/2, 9\pi/2$, etc., es decir, $\delta = \pi/2 + 2m\pi$, donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, entonces

$$\mathbf{E} = E_0[\hat{\mathbf{i}}\cos(kz - \omega t) - \hat{\mathbf{j}}\sin(kz - \omega t)] \quad (2.9)$$

La amplitud no se ve afectada, pero ahora \mathbf{E} gira a la izquierda, o sea la onda tiene **polarización circular izquierda**.

Una onda linealmente polarizada se puede sintetizar partiendo de dos ondas con polarización circular opuesta de igual amplitud. En concreto, si sumamos la onda circular derecha y la onda circular izquierda, obtenemos

$$\mathbf{E} = 2E_0\hat{\mathbf{i}}\cos(kz - \omega t) \quad (2.10)$$

que tiene un vector de amplitud constante $2E_0\hat{\mathbf{i}}$, siendo por consiguiente linealmente polarizada.

2.2.3. Polarización elíptica

La luz con polarización lineal como circular se pueden considerar como casos especiales (o degeneraciones) de luz **elípticamente polarizada**. Esto significa que, en general el vector de campo eléctrico resultante \mathbf{E} girará cambiando también su magnitud. Este vector describe un sitio de puntos en el espacio y la curva generada por estos trazarán una elipse en un plano fijo perpendicular a \mathbf{k} , cuando la onda avanza.

Recordemos que

$$\mathbf{E}_x(z, t) = \hat{\mathbf{i}}E_{0x}\cos(kz - \omega t) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{E}_y(z, t) = \hat{\mathbf{j}}E_{0x}\cos(kz - \omega t + \delta). \quad (2.12)$$

La ecuación de la curva que estamos buscando no debe de ser función ni de la posición ni del tiempo, es decir, debemos poder librarnos de la dependencia de $(kz - \omega t)$. Desarrollemos la expresión para E_y en

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(kz - \omega t)\cos\delta - \sin(kz - \omega t)\sin\delta \quad (2.13)$$

y combinémosla con $\frac{E_x}{E_0}$ para que dé

$$\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}}\cos\delta = -\sin(kz - \omega t)\sin\delta \quad (2.14)$$

De la ecuación (2.11) se deduce que

$$\sin(kz - \omega t) = \left[1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right]^{1/2} \quad (2.15)$$

y así de la ecuación (2.13) nos lleva a

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}}\cos\delta\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right]^{1/2}\sin^2\delta \quad (2.16)$$

Finalmente, al ordenar los términos, tenemos

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos\delta = \text{sen}^2\delta \quad (2.17)$$

Esta es la ecuación de una elipse ya que sabemos por definición que la ecuación de segundo grado con 2 variables del tipo

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.18)$$

representa una elipse si el discriminante $B^2 - 4AC < 0$ en cuyo caso, los ejes de la elipse son oblicuos respecto a los ejes de coordenadas.

Tenemos de nuestra ecuación (2.17) que

$$A = 1 \quad (2.19)$$

$$B = -2\cos\delta \quad (2.20)$$

$$C = 1 \quad (2.21)$$

$$F = -\text{sen}^2\delta \quad (2.22)$$

calculando el discriminante :

$$B^2 - 4AC = (-2\cos\delta)^2 - 4(1)(1) \quad (2.23)$$

$$= 4\cos^2\delta - 4 \quad (2.24)$$

$$= 4(\cos^2\delta - 1) \quad (2.25)$$

$$= 4(-\text{sen}^2\delta) \quad (2.26)$$

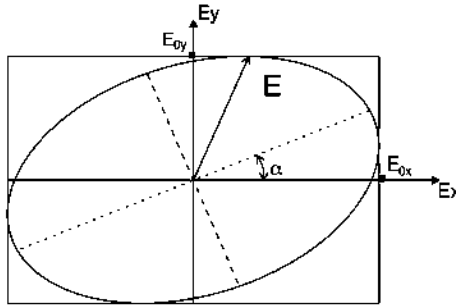
por lo que

$$-4\text{sen}^2\delta < 0 \quad (2.27)$$

cumpliendo con la condición del discriminante $B^2 - 4AC < 0$.

Por lo que nuestra ecuación (2.17) es una elipse que forma un ángulo ψ con el sistema coordenado (E_x, E_y) (**FIGURA!!!!**) tal que

$$\tan 2\psi = \frac{2E_{0x}E_{0y}\cos\delta}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \quad (2.28)$$



Se mencionaba anteriormente que podíamos llamar a los demás estados como formas degeneradas de la elipse. Esto se demuestra si los ejes principales de la elipse estuvieran alineados con los ejes coordenados es decir $\psi = 0$ o de manera equivalente, $\delta = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \dots$ en cuyo caso tenemos la forma conocida

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 = 1 \quad (2.29)$$

que corresponde a la ecuación más familiar de una elipse.

Pero si $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ esto se reduce a

$$E_y^2 - E_x^2 = E_0^2 \quad (2.30)$$

lo cual, de acuerdo con nuestros resultados anteriores, la ecuación (2.30) es un círculo, obteniendo polarización circular.

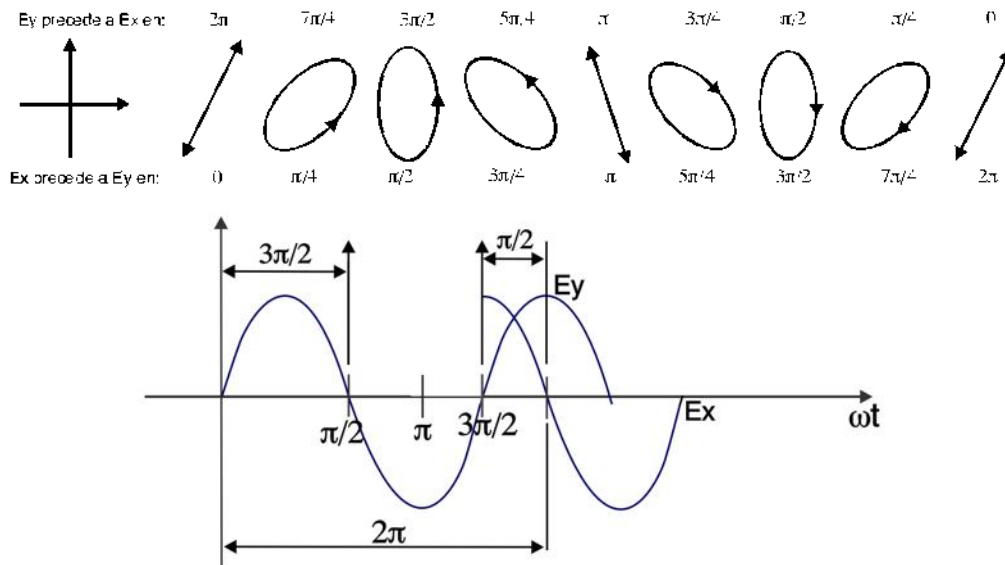
Por otra parte si δ es un múltiplo de π , la ecuación (2.17) resulta en

$$E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x \quad (2.31)$$

de manera similar para múltiplos impares de π

$$E_y = -\frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x \quad (2.32)$$

donde ambas son líneas rectas con pendientes de $\pm E_{0y}/E_{0x}$, es decir, tenemos luz con polarización lineal.



2.3. Mecanismos para producir luz polarizada

Un haz linealmente polarizado se puede obtener en la práctica por varios métodos, que a continuación se mencionarán.

2.3.1. Dicroísmo

El término dicroísmo se refiere a la absorción selectiva de una de las dos componentes ortogonales del estado de polarización de un haz incidente. Un polarizador dicroico es anisótropo, produciendo una absorción preferencial de una componente del campo mientras que es esencialmente transparente para la otra.

2.3.2. Birrefringencia

La luz se propaga a través de una sustancia transparente por excitación de los átomos dentro del medio. Los electrones son impulsados por el campo \mathbf{E} y reradian; estas onditas secundarias se recombinan y onda refractada avanza. La velocidad de la onda y , por consiguiente, el índice de

refracción están determinados por la diferencia entre la frecuencia del campo \mathbf{E} y la frecuencia natural o característica de los átomos. Una anisotropía en la fuerza de enlace se manifestará, por lo tanto, en una anisotropía en el índice de refracción.

Un material ópticamente anisotrópico refracta con diferente ángulo rayos de luz linealmente polarizados en los planos s y p . Estos materiales son los cristales.

Un material de este tipo que exhibe dos índices de refracción es birrefringente.

Usando cristales se pueden construir prismas de diversas formas con el fin de obtener luz polarizada a partir de un haz no polarizado.

2.3.3. Esparcimiento

Cuando un rayo de luz incide sobre un átomo, molécula o partícula cuyas dimensiones sean mucho menores que la longitud de onda, ésta absorbe la energía y luego la reemite en la forma de una onda esférica. Este fenómeno recibe el nombre de esparcimiento.

En el efecto de esparcimiento, el campo eléctrico de la onda reemitida no puede tener orientaciones que no estén presentes en el haz de luz incidente. Por lo tanto, si la luz incidente no está polarizada, la onda reemitida tampoco lo estará en la dirección del haz incidente, pero en cambio tendrá polarización lineal completa en las direcciones perpendiculares a él. En direcciones intermedias, la polarización será parcial.

En el caso en que el haz luminoso atraviesa un medio que contiene partículas cuyo tamaño es comparable con la longitud de onda de la radiación se produce el fenómeno de esparcimiento o cambio múltiple de la dirección de propagación. La ley de Rayleigh establece que la intensidad de la luz esparcida es inversamente proporcional a la cuarta potencia de la longitud de onda. Por esto las radiaciones de longitud de onda corta son más esparcidas que las de onda larga. El color azul del cielo es debido al esparcimiento de la luz solar en las moléculas de aire. Fuera de la atmósfera el cielo es negro.

2.3.4. Reflexión

Consideremos una onda plana incidente linealmente polarizada de tal forma que su campo \mathbf{E} sea perpendicular al plano de incidencia. La onda se refracta en la interfaz entrando con un ángulo de transmisión θ_t . Su campo eléctrico impulsa a los electrones enlazados, en este caso normalmente al plano de incidencia, y ellos a su vez reradian. Una parte de esa energía reemitida aparece bajo forma de onda reflejada. Entonces, debe quedar claro de la geometría y de la distribución de radiación del dipolo que tanto las ondas reflejadas como las refractadas también tienen que hallarse en un estado de polarización lineal normal al plano de incidencia. Por el contrario, si el campo \mathbf{E} incidente se halla en el plano de incidencia de los osciladores de la onda refractada. La onda reflejada, su densidad de flujo es ahora relativamente baja porque la dirección del rayo reflejado forma un ángulo θ pequeño con el eje del dipolo. Si pudiéramos hacer que $\theta = 0$ ó, de forma equivalente, $\theta_r + \theta_t = 90^\circ$, la onda reflejada desaparecerá completamente. Bajo estas circunstancias, para una onda incidente no polarizada conformada por dos estados linealmente polarizados ortogonales incoherentes, se reflejará sólo la componente polarizada normalmente al plano de incidencia, y por consiguiente paralela a la superficie. El ángulo de incidencia particular para el que ocurre esta situación se designa por θ_p y recibe el nombre de ángulo de polarización o ángulo de Brewster, donde $\theta_p + \theta_t = 90^\circ$. Por consiguiente, de la ley de Snell

$$n_i \sin \theta_p = n_t \sin \theta_t \quad (2.33)$$

y el hecho de que $\theta_p = 90^\circ - \theta_t$ se obtiene que

$$n_i \sin \theta_p = n_t \sin \theta_p \quad (2.34)$$

y

$$\tan \theta_p = \frac{n_t}{n_i} \quad (2.35)$$

2.4. Representación Matemática de la Polarización

2.4.1. Los Parámetros de Stokes

G. Stokes en 1852 encontró que cualquier estado de luz polarizada puede ser descrita completamente por cuatro cantidades medibles, ahora conocidas como los parámetros de Stokes. Son usados para describir luz no polarizada, parcialmente polarizada y completamente polarizada.

El primer parámetro expresa la intensidad total del campo óptico, y los otros tres parámetros describen el estado de polarización.

Los parámetros de Stokes representados por las ecuaciones obtenidas de la elipse polarizada

$$E_x(t) = E_{0x}(t) \cos[\omega t + \delta x(t)] \quad (2.36)$$

$$E_y(t) = E_{0y}(t) \cos[\omega t + \delta y(t)] \quad (2.37)$$

son los siguientes:

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \quad (2.38)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \quad (2.39)$$

$$S_2 = 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta \quad (2.40)$$

$$S_3 = 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta \quad (2.41)$$

donde el parámetro S_0 representa la irradiancia del haz. Solamente tres de estos parámetros son independientes, ya que ellos se relacionan entre sí por:

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (2.42)$$

donde S_1 es la cantidad de polarización vertical u horizontal, o sea la cantidad de luz polarizada linealmente. La componente S_2 es la cantidad de polarización lineal a 45° y -45° . Y por último la componente S_3 es la cantidad de polarización circular derecha e izquierda contenida en el haz.

Los parámetros de Stokes nos permiten describir el grado de polarización P para cualquier estado de polarización. Por definición:

$$P = \frac{I_{pol}}{I_{tot}} = \frac{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2}}{S_0} \quad (2.43)$$

donde I_{pol} es la intensidad de la suma de las componentes polarizadas e I_{tot} es la intensidad total del haz. El valor $P = 1$ corresponde a la luz completamente polarizada, $P = 0$ corresponde a la luz no polarizada, y $0 < P < 1$ corresponde a luz parcialmente polarizada.

A continuación se muestran algunos ejemplos de la representación de luz polarizada en términos de los parámetros de Stokes.

Luz polarizada linealmente horizontal

Para el caso $E_{0y} = 0$.

$$S_0 = E_{0x}^2 \quad (2.44)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 \quad (2.45)$$

$$S_2 = 0 \quad (2.46)$$

$$S_3 = 0 \quad (2.47)$$

Luz polarizada linealmente vertical

para el caso $E_{0x} = 0$.

$$S_0 = E_{0y}^2 \quad (2.48)$$

$$S_1 = -E_{0y}^2 \quad (2.49)$$

$$S_2 = 0 \quad (2.50)$$

$$S_3 = 0 \quad (2.51)$$

Luz polarizada linealmente a 45°

Las condiciones para obtener este estado son $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ y $\delta = 0^\circ$. Usando estas condiciones y la definición de los parámetros de Stokes, encontramos que

$$S_0 = 2E_0^2 \quad (2.52)$$

$$S_1 = 0 \quad (2.53)$$

$$S_2 = 2E_0^2 \quad (2.54)$$

$$S_3 = 0 \quad (2.55)$$

Luz polarizada linealmente a -45°

Las condiciones para este estados son las mismas que para el pasado, pero la diferencia de fase es $\delta = 180^\circ$.

$$S_0 = 2E_0^2 \quad (2.56)$$

$$S_1 = 0 \quad (2.57)$$

$$S_2 = -2E_0^2 \quad (2.58)$$

$$S_3 = 0 \quad (2.59)$$

Luz polarizada circularmente derecha

Las condiciones para obtener este estado son $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ y $\delta = 90^\circ$.

$$S_0 = 2E_0^2 \quad (2.60)$$

$$S_1 = 0 \quad (2.61)$$

$$S_2 = 0 \quad (2.62)$$

$$S_3 = 2E_0^2 \quad (2.63)$$

Luz polarizada circularmente izquierda

Son las mismas condiciones que para el anterior pero el cambio de fase entre las componentes ortogonales es $\delta = 270^\circ$.

$$S_0 = 2E_0^2 \quad (2.64)$$

$$S_1 = 0 \quad (2.65)$$

$$S_2 = 0 \quad (2.66)$$

$$S_3 = -2E_0^2 \quad (2.67)$$

El Vector de Stokes

Los cuatro parámetros de Stokes pueden ser arreglados en una matriz columna y escritos como

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

Esta matriz columna es conocida como el vector de Stokes aunque matemáticamente no lo sea. El vector de Stokes para luz polarizada elípticamente es entonces escrita de la forma:

$$S = \begin{pmatrix} E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \\ E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \\ 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta \\ 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

Calculando su vector de Stokes para diferentes estados obtenemos que:

Luz polarizada linealmente horizontal

Para el caso $E_{0y} = 0$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

Luz polarizada linealmente vertical

Para el caso $E_{0x} = 0$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

Luz polarizada linealmente a 45°

En este caso $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ y $\delta = 0^\circ$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

Luz polarizada linealmente a -45°

De nuevo $E_{0x} = E_{0y} = E_0$, pero $\delta = 180^\circ$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

Luz polarizada circularmente derecha

Con las condiciones $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ y $\delta = 90^\circ$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

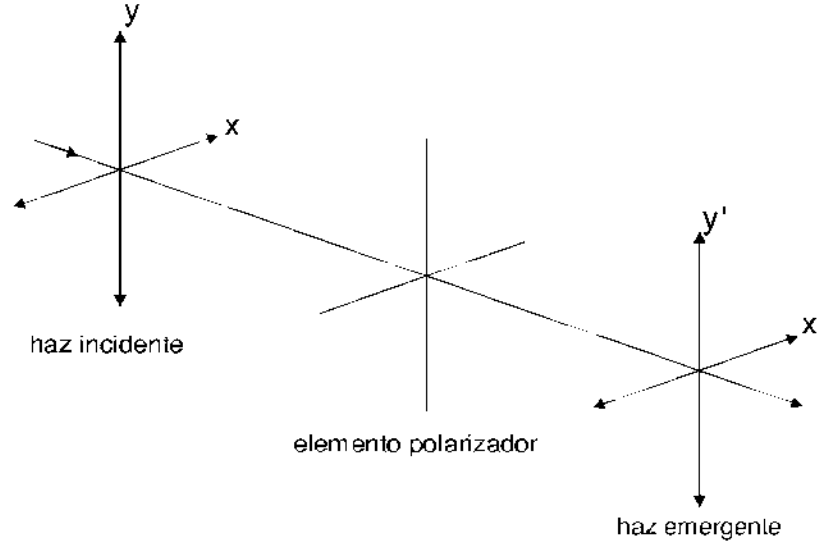
Luz polarizada circularmente izquierda

De nuevo, $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ pero $\delta = 270^\circ$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

2.4.2. Las Matrices de Mueller

En 1943, Hans Mueller, entonces profesor de física del Instituto Tecnológico de Massachusetts, diseñó un método de matrices para trabajar con los vectores de Stokes.



En la figura anterior muestra el haz incidente interactuando con un elemento polarizador y el haz emergente. En esta figura el haz incidente es caracterizado por los parámetros de Stokes S_i donde $i = 0, 1, 2, 3$. El haz incidente polarizado interactúa con el polarizador de en medio y sale un haz el cual es caracterizado por un nuevo conjunto de parámetros de Stokes S'_i donde $i = 0, 1, 2, 3$. Ahora asumimos que S'_i puede ser expresado como una combinación lineal de cuatro parámetros de Stokes del haz incidente por la relación siguiente:

$$S'_0 = m_{00}S_0 + m_{01}S_1 + m_{02}S_2 + m_{03}S_3 \quad (2.76)$$

$$S'_1 = m_{10}S_0 + m_{11}S_1 + m_{12}S_2 + m_{13}S_3 \quad (2.77)$$

$$S'_2 = m_{20}S_0 + m_{21}S_1 + m_{22}S_2 + m_{23}S_3 \quad (2.78)$$

$$S'_3 = m_{30}S_0 + m_{31}S_1 + m_{32}S_2 + m_{33}S_3 \quad (2.79)$$

Estas ecuaciones pueden ser escritas en términos del vector de Stokes y de una matriz:

$$\begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

La ecuación (2.80) puede ser representada simplemente como una ecuación matriz llamada:

$$S' = M \cdot S \quad (2.81)$$

La matriz de 4x4 en (2.80) es conocida como la matriz de Mueller. Cuando un haz interactúa con la materia su estado de polarización casi siempre es cambiado, ya sea porque esta cambiando su amplitud, su fase o la dirección de las componentes ortogonales del campo. Este elemento óptico que cambia las amplitudes ortogonales es llamado polarizador. Similarmente un dispositivo óptico el cual introduce un cambio de fase entre las componentes ortogonales es llamado retardador. Finalmente el dispositivo óptico el cual rota las componentes ortogonales de un haz por un ángulo θ mientras se propaga por el elemento es llamado retardador.

A continuación se mencionan las matrices de Mueller para los dispositivos anteriormente mencionados.

Polarizador lineal horizontal

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

Polarizador lineal vertical

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

Polarizador lineal horizontal a $+45^\circ$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

Polarizador lineal horizontal a -45°

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

Lámina de cuarto de onda, con eje rápido vertical

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

Lámina de cuarto de onda, con eje rápido horizontal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

Polarizador homogéneo circular derecho

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

Polarizador homogéneo circular izquierdo

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

Retardador con un cambio de fase de ϕ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ 0 & 0 & \text{sen } \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

Matriz de Mueller para una rotación de θ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \text{sen } 2\theta & 0 \\ 0 & -\text{sen } 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

2.4.3. La Esfera de Poincaré

Antes de descubrir los parámetros de Stokes tratados como elementos de una matriz columna, una construcción geométrica fue usada para determinar el efecto de un medio anisotrópico en luz polarizada. Los parámetros s_1 , s_2 , s_3 son vistos como coordenadas cartesianas de un punto en una esfera con radio s_0 . Esta esfera es llamada la esfera de Poincaré .

En la Esfera, polarización derecha es representada por los puntos en la mitad superior la superficie. La polarización lineal es representada por los puntos en el ecuador. La polarización circular es representada por los polos.

Para determinar de forma completa el estado de polarización de un haz son necesarios tres parámetros independientes, los semiejes a y b y la orientación ψ de la elipse. G. Stokes con el propósito de poder describir en forma matemática la luz parcialmente polarizada introdujo los cuatro parámetros que determinan por completo la elipse de polarización.

Los parámetros de Stokes para una onda completamente polarizada, están definidos en términos de a_1 , a_2 y δ , donde $a_1 = E_{0x}$ y $a_2 = E_{0y}$ y son:

$$S_0 = a_1^2 + a_2^2 \quad (2.92)$$

$$S_1 = a_1^2 - a_2^2 \quad (2.93)$$

$$S_2 = 2a_1a_2 \cos \delta \quad (2.94)$$

$$S_3 = 2a_1a_2 \text{sen } \delta \quad (2.95)$$

donde el parámetro S_0 representa la irradiancia del haz. Solamente tres de estos parámetros son independientes, ya que ellos se relacionan entre sí por:

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (2.96)$$

Si definimos ahora una cantidad χ mediante

$$\tan \chi = \frac{b}{a} \quad (2.97)$$

entonces

$$\operatorname{sen} 2\chi = \frac{2 \tan \chi}{1 + \tan^2 \chi} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \quad (2.98)$$

como

$$a^2 b^2 = a_1^2 a_2^2 \operatorname{sen}^2(\delta) \quad (2.99)$$

y

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + a_2^2 \quad (2.100)$$

usando estas ecuaciones se puede escribir como :

$$\operatorname{sen} 2\chi = \frac{2a_1 a_2 \operatorname{sen} \delta}{a_1^2 + a_2^2}, \quad (2.101)$$

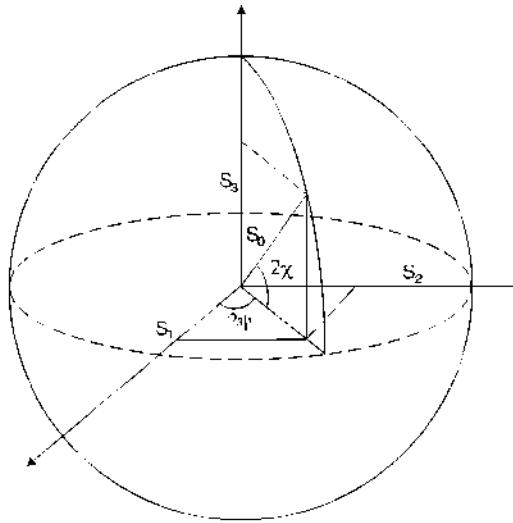
debido a que a y substituyendo aquí los valores de S_0 y S_3 dados por la ecuación (2.73 y 2.76 :

$$\operatorname{sen} 2\chi = \frac{S_3}{S_0}. \quad (2.102)$$

Por otro lado, utilizando las ecuaciones (2.74 y (2.75 en la ecuación (2.28) podemos ver que:

$$\tan 2\chi = \frac{S_2}{S_1}. \quad (2.103)$$

La relación dada por la ecuación 2.77 sugiere que se pueden representar los parámetros S_1, S_2, S_3 por puntos en una esfera con radio S_0 . Examinando las ecuaciones 2.9 y 2.10 observamos que los ángulos 2χ y 2ψ están representados como en la figura.



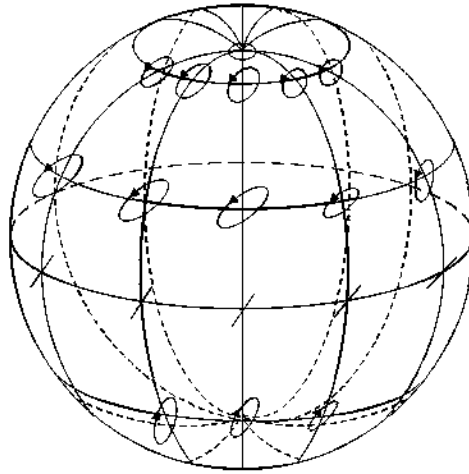
Esta figura representa la esfera de Poincaré, donde podemos ver que los parámetros de Stokes se pueden escribir como:

$$S_1 = S_0 \cos 2\chi \cos 2\psi \quad (2.104)$$

$$S_2 = S_0 \cos \chi \sin 2\psi \quad (2.105)$$

$$S_3 = S_0 \sin 2\chi \quad (2.106)$$

Diferentes puntos en esta esfera representan elipses con diferentes excentricidades y orientaciones. En los polos las elipses toman la forma de círculos y en el ecuador se transforman en rectas. En el hemisferio norte están las elipses con sentido derecho, y en el hemisferio sur las elipses con sentido izquierdo. Así, diferentes estados de polarización corresponden a diferentes puntos de la esfera de Poincaré.



Capítulo 3

Elipsometría

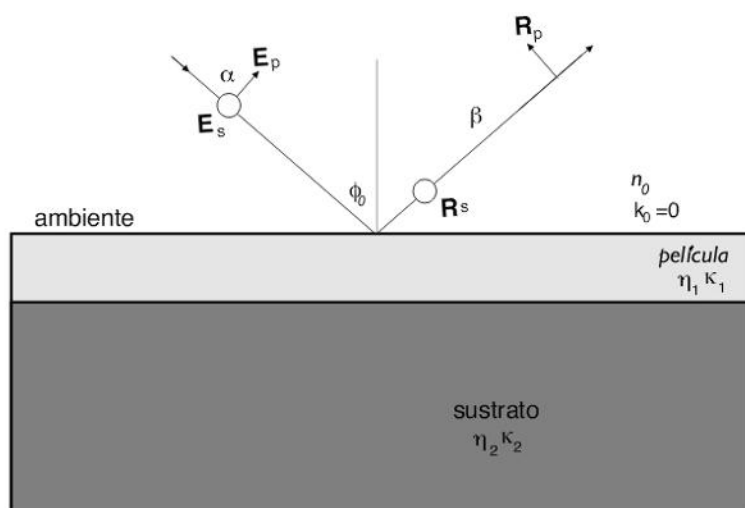
3.1. Introducción

Una de las más importantes aplicaciones de la luz polarizada es la medición del índice de refracción complejo y el grosor de películas delgadas. Este campo de la óptica ha sido desarrollado para hacer esto durante todo el siglo veinte y se le conoce como elipsometría. En su más amplio sentido elipsometría es el arte de medición y análisis de la luz polarizada elíptica. En su fundamental forma es un método óptico para la medición de parámetros ópticos de una película delgada analizando la luz polarizada reflejada. Los parámetros ópticos son el índice de refracción n , el coeficiente de extinción κ , y el grosor d de una película delgada depositada en un sustrato.

3.2. Ecuación Fundamental de la Elipsometría Clásica

La ecuación la cual relaciona la amplitud y la fase de un haz incidente y reflejado de una película delgada, llamados parámetros elípsométricos, al índice de refracción complejo y el grosor de la película se le conoce como la ecuación fundamental de la elipsometría.

Para obtener esta ecuación consideremos la siguiente figura.



En la figura E_p y E_s son las componentes de los campos de incidencia paralelo (p) y perpendicular (s) al plano del papel. Similarmente R_p y R_s son las componentes reflejadas paralelas y

perpendiculares respectivamente. Para las componentes del campo de incidencia podemos escribirlas como:

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_{0p} e^{i\alpha p} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_{0s} e^{i\alpha s} \quad (3.2)$$

Un par de ecuaciones similares pueden ser también escritas para el campo reflejado:

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_{0p} e^{i\beta p} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{R}_{0s} e^{i\beta s} \quad (3.4)$$

En las ecuaciones anteriores, el factor de propagación $\omega t - \kappa z$ ha sido suprimido. Las mediciones han mostrado que $R_{p,s}$ está directamente relacionado con $E_{p,s}$, y, en general, para materiales ópticos absorbentes el campo de incidencia será atenuado y experimentará un cambio de fase. Para describir este comportamiento introduciremos los coeficientes complejos de reflexión, ρ_p y ρ_s ,

$$\mathbf{R}_p = \rho_p \mathbf{E}_p \quad (3.5)$$

$$\mathbf{R}_s = \rho_s \mathbf{E}_s \quad (3.6)$$

o, en general:

$$\rho_m = \frac{\mathbf{R}_{0m}}{\mathbf{E}_{0m}} e^{i(\beta_m - \alpha_m)} \quad m = p, s \quad (3.7)$$

De (3.7) podemos definir un coeficiente ρ de reflexión "normalizado"

$$\rho = \frac{\rho_p}{\rho_s} = \frac{\mathbf{R}_{0p}/\mathbf{E}_{0p}}{\mathbf{R}_{0s}/\mathbf{E}_{0s}} e^{i(\beta - \alpha)} \quad (3.8)$$

donde $\alpha = \alpha_p - \alpha_s$, y $\beta = \beta_p - \beta_s$. Las cantidades α y β describen la fase antes y después de la reflexión, respectivamente.

Tradicionalmente, los factores en (3.8) son escritos en términos de tangente del ángulo ψ

$$\tan \psi = \frac{\mathbf{R}_{0p}/\mathbf{E}_{0p}}{\mathbf{R}_{0s}/\mathbf{E}_{0s}} \quad (3.9)$$

y un ángulo de fase Δ ,

$$\Delta = \beta - \alpha = (\beta_p - \beta_s) - (\alpha_p - \alpha_s) \quad (3.10)$$

De estas dos ecuaciones anteriores podemos expresar (3.8) como

$$\rho = \tan \psi e^{i\Delta} \quad (3.11)$$

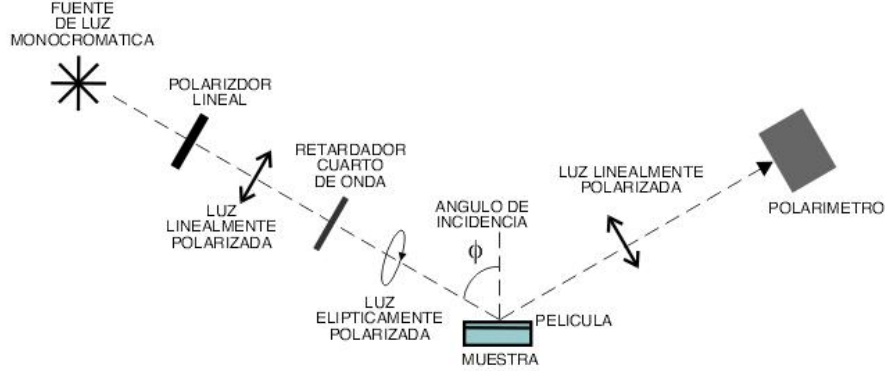
Así, elipsometría implica las mediciones de $\tan \psi$, el cambio en el cociente de la amplitud y Δ , el cambio en la fase. Las cantidades ψ y Δ son funciones de las constantes ópticas del medio, la película delgada y el substrato, la longitud de onda de la luz, el ángulo de incidencia, y su grosor. Con estos factores en mente podemos ahora expresar (3.11) como

$$\rho = \tan \psi e^{i\Delta} = f(n, \kappa, d) \quad (3.12)$$

La ecuación (3.12) es llamada *ecuación fundamental de la elipsometría*.

3.3. Medición Clásica de los Parámetros Elipsométricos Psi y Delta

La medición clásica de ψ y Δ se realiza utilizando un polarizador y en seguida un retardador antes de la muestra y un polarizador que servirá de analizador después de la muestra. El objetivo del análisis es relacionar los ajustes angulares en el polarizador y el retardador con ψ y Δ . La siguiente figura muestra la configuración experimental.



Primero determinaremos la matriz de Mueller de la combinación del polarizador lineal y el retardador. El polarizador lineal puede ser rotado a cualquier ángulo P . El retardador, por otra parte, tendrá su eje rápido fijo a 45° , pero su fase ϕ puede variar de 0° a 360° . Entonces las matrices de Mueller son, respectivamente:

$$M_{pol}(P) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2P & \sin 2P & 0 \\ \cos 2P & \cos^2 2P & \cos 2P \sin 2P & 0 \\ \sin 2P & \cos 2P \sin 2P & \sin^2 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

y

$$M_{ret}(+45^\circ) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

La Matriz de Mueller de la combinación de ambos instrumentos es

$$M = M_{ret}(\phi) \cdot M_{pol}(P) \quad (3.15)$$

entonces

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2P & \sin 2P & 0 \\ \cos \phi \cos 2P & \cos \phi \cos^2 2P & \cos \phi \cos 2P \sin 2P & 0 \\ \sin 2P & \cos 2P \sin 2P & \sin^2 2P & 0 \\ \sin \phi \cos 2P & -\sin \phi \cos^2 2P & -\sin \phi \cos 2P \sin 2P & 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

El vector de Stokes del haz incidente de la combinación de los instrumentos es representado por su forma general

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Multiplicando el vector con la matriz M anterior, obtenemos el vector de Stokes incidente en la muestra:

$$S' = \begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(S_0 + S_1 \cos 2P + S_2 \sin 2P) \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \phi \cos 2P \\ \sin 2P \\ -\sin \phi \cos 2P \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

el cual es un vector de Stokes para luz polarizada elíptica.

Escribimos el vector anterior simplemente como

$$S = I_0 \frac{1}{2}(S_0 + S_1 \cos 2P + S_2 \sin 2P) \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \phi \cos 2P \\ \sin 2P \\ -\sin \phi \cos 2P \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

El cambio de fase entre las componentes emergiendo del polarizador-retardador de acuerdo a la relación encontrada en la sección anterior es expresada como α . Los parámetros de Stokes del haz incidente en la muestra pueden ser escritos en términos de sus componentes de campo como

$$S_0 = E_s E_s^* + E_p E_p^* = E_{0s}^2 + E_{0p}^2 \quad (3.20)$$

$$S_1 = E_s E_s^* - E_p E_p^* = E_{0s}^2 - E_{0p}^2 \quad (3.21)$$

$$S_2 = E_s E_p^* + E_p E_s^* = 2E_{0s} E_{0p} \cos \alpha \quad (3.22)$$

$$S_3 = i(E_s E_p^* - E_p E_s^*) = 2E_{0s} E_{0p} \sin \alpha \quad (3.23)$$

El cambio de fase α es

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{S_3}{S_2} = \frac{-\sin \phi \cos 2P}{\sin 2P} \quad (3.24)$$

Ahora

$$\sin(2P - 90^\circ) = -\cos 2P \quad (3.25)$$

$$\cos(2P - 90^\circ) = \sin 2P \quad (3.26)$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en (5.24) obtenemos que

$$\tan \alpha = \sin \phi \tan(2P - 90^\circ) \quad (3.27)$$

Así, variando la fase α de le haz emergente de la combinación polarizador-retardador puede variar ajustando el cambio de fase ϕ del retardador y la orientación del ángulo P . En particular si tenemos un retardador de cuarto de onda entonces $\phi = 90^\circ$, entonces de la ecuación (3.27) $\alpha = 2P - 90^\circ$. Rotando el ángulo de polarización de $P = 0$ ($\alpha = -90^\circ$) a $P = 90^\circ$ ($\alpha = 90^\circ$), el cambio de fase total es de 180° . En términos del vector de Stokes S , para $\phi = 90^\circ$ tenemos

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sin 2P \\ -\cos 2P \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Esta ecuación es el vector de Stokes para luz polarizada elíptica; su ángulo de orientación es siempre 45° . Sin embargo, de acuerdo a esta ecuación los ángulos de elipticidad correspondientes a $P = 0^\circ, 45^\circ$ y 90° , son $\chi = -45^\circ, 0^\circ$ y 45° , y sus respectivos vectores de Stokes son $(1, 0, 0, -1)$, $(1, 0, 1, 0)$ y $(1, 0, 0, +1)$; estos vectores corresponden a luz polarizada circular izquierda, luz polarizada lineal a $+45^\circ$, y luz polarizada circular derecha, respectivamente. Esto significa que rotando el polarizador generamos cualquier estado de polarización elíptica.

3.4. Representación de la Matriz de Mueller

Consideremos que tenemos un haz incidente en una superficie óptica. El vector de Stokes del haz incidente es:

$$S_0 = E_s E_s^* + E_p E_p^* \quad (3.29)$$

$$S_1 = E_s E_s^* - E_p E_p^* \quad (3.30)$$

$$S_2 = E_s E_p^* + E_p E_s^* \quad (3.31)$$

$$S_3 = i(E_s E_p^* - E_p E_s^*) \quad (3.32)$$

Similarmente el vector de Stokes del haz reflejado es:

$$S'_0 = R_s R_s^* + R_p R_p^* \quad (3.33)$$

$$S'_1 = R_s R_s^* - R_p R_p^* \quad (3.34)$$

$$S'_2 = R_s R_p^* + R_p R_s^* \quad (3.35)$$

$$S'_3 = i(R_s R_p^* - R_p R_s^*) \quad (3.36)$$

Ya habíamos visto antes que el coeficientes de reflexión complejo es definido como

$$\rho_m = \frac{\mathbf{R}_{0m}}{\mathbf{E}_{0m}} e^{i(\beta_m - \alpha_m)} \quad m = p, s \quad (3.37)$$

o

$$\mathbf{R}_p = \rho_p \mathbf{E}_p \quad (3.38)$$

$$\mathbf{R}_s = \rho_s \mathbf{E}_s \quad (3.39)$$

Sustituyendo las 2 ecuaciones anteriores en las ecuaciones del vector de Stokes para el haz reflejado, obtenemos:

$$S_0 = (\rho_s \rho_s^*) E_s E_s^* + (\rho_p \rho_p^*) E_p E_p^* \quad (3.40)$$

$$S_1 = (\rho_s \rho_s^*) E_s E_s^* - (\rho_p \rho_p^*) E_p E_p^* \quad (3.41)$$

$$S_2 = (\rho_s \rho_p^*) E_s E_p^* + (\rho_p \rho_s^*) E_p E_s^* \quad (3.42)$$

$$S_3 = i[(\rho_s \rho_p^*) (E_s E_p^* - (\rho_p \rho_s^*) E_p E_s^*)] \quad (3.43)$$

Ahora sustituimos el vector de Stokes del haz incidente en el anterior, y obtenemos una matriz de relación entre el vector de Stokes del reflejado y el incidente:

$$S' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \rho_s \rho_s^* + \rho_p \rho_p^* & \rho_s \rho_s^* - \rho_p \rho_p^* & 0 & 0 \\ \rho_s \rho_s^* - \rho_p \rho_p^* & \rho_s \rho_s^* + \rho_p \rho_p^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_s \rho_p^* + \rho_p \rho_s^* & \rho_s \rho_p^* - \rho_p \rho_s^* \\ 0 & 0 & \rho_s \rho_p^* - \rho_p \rho_s^* & \rho_s \rho_p^* + \rho_p \rho_s^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

También vimos que

$$\tan \psi = \frac{\mathbf{R}_{0p}/\mathbf{E}_{0p}}{\mathbf{R}_{0s}/\mathbf{E}_{0s}} \quad (3.45)$$

$$\Delta = \beta - \alpha \quad (3.46)$$

y

$$\rho = \frac{\rho_p}{\rho_s} = \tan \psi e^{i\Delta} \quad (3.47)$$

La relación anterior puede ser escrita como:

$$\rho_p = \rho_s \tan \psi e^{i\Delta} \quad (3.48)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la matriz de relación de los vectores incidente y reflejado, encontramos:

$$\begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \frac{\rho_s \rho_s^*}{2} \begin{pmatrix} 1 + \tan^2 \psi & 1 - \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ 1 - \tan^2 \psi & 1 + \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \tan \psi \cos \Delta & -2 \tan \psi \sin \Delta \\ 0 & 0 & 2 \tan \psi \sin \Delta & 2 \tan \psi \cos \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Esta ecuación representa ψ y Δ en términos de la matriz de Mueller. La matriz puede ser utilizada a pesar de el tiempo de duración de la fuente óptica, esto es, con ambas fuentes de onda continua o pulsada. debido a esta formulación general esta ecuación es de gran importancia en Elipsometría, ya que con ella podemos determinar ψ y Δ usando un estado de polarización específico del haz incidente. Por ejemplo, consideremos un haz incidente el cual su estado de polarización es circular derecho, entonces su vector de Stokes es

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Multiplicando la matrices obtenemos el producto:

$$S' = \begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \frac{\rho_s \rho_s^* I_0}{2} \begin{pmatrix} 1 + \tan^2 \psi \\ 1 - \tan^2 \psi \\ -2 \tan \psi \sin \Delta \\ -2 \tan \psi \cos \Delta \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Resolviendo la ec. anterior para ψ y Δ en términos de los parámetros de Stokes, S' , encontramos que:

$$\tan \psi = \frac{S'_0 - S'_1}{S'_0 + S'_1}^{\frac{1}{2}} \quad (3.52)$$

$$\tan \Delta = -\frac{S'_2}{S'_3} \quad (3.53)$$

Así, midiendo cada uno de los cuatros parámetros de Stokes del haz reflejado, podemos determinar ψ y Δ . En el producto de la multiplicación de la matriz, podemos cancelar el factor $(\rho_s \rho_s^*) I_0 / 2$, sin embargo dejamos el término $1/2$ ya que nos permite representar el uso de un polarizador o un retardador. Entonces la matriz de Mueller para elipsometría es

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \tan^2 \psi & 1 - \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ 1 - \tan^2 \psi & 1 + \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \tan \psi \cos \Delta & -2 \tan \psi \sin \Delta \\ 0 & 0 & 2 \tan \psi \sin \Delta & 2 \tan \psi \cos \Delta \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Para un polarizador y un retardador ideal la manera de encontrar su matriz es la siguiente. Para un polarizador perfecto no hay cambio de fase, esto es $\Delta = 0$ y entonces su matriz es escrita

$$M_{pol} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \tan^2 \psi & 1 - \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ 1 - \tan^2 \psi & 1 + \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \tan \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \tan \psi \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Que no es mas que otra representación de un polarizador ideal. Como ejemplo de esto, un polarizador lineal horizontal es descrito por

$$M_{pol} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

Comparando ambas matrices anteriores podemos observar que $\tan \psi = 0$. De acuerdo a la definición de

$$\tan \psi = \frac{\mathbf{R}_{0p}/\mathbf{E}_{0p}}{\mathbf{R}_{0s}/\mathbf{E}_{0s}} \quad (3.57)$$

esto es exactamente lo que esperábamos si no hubiera la componente \mathbf{R}_{0s} y sólo una componente \mathbf{R}_{0p} . Similarmente, la matriz de Mueller para un retardador es

$$M_{ret} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ 0 & 0 & \text{sen } \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

Comparando la matriz anterior con la matriz M, vemos que debemos tener

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Delta & -\text{sen } \Delta \\ 0 & 0 & \text{sen } \Delta & \cos \Delta \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

y $\tan^2 \psi = 1$; la matriz anterior muestra que el haz emergente no es atenuado y que la magnitud de el haz reflejado no cambia de la del haz incidente. Esto, también, es el comportamiento esperado para un material que cambia la fase. De la matriz del retardador M_{comp} y de la anterior matriz podemos ver también que $\Delta = 0$ como se esperaba.

Ahora determinemos ψ y Δ en la matriz de Mueller de Elipsometría generando un haz con un estado elípticamente polarizado, usando un polarizador lineal y un retardador de cuarto de onda con su eje a $+45^\circ$. El vector de Stokes del haz incidente en la muestra es

$$S = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \text{sen } 2P \\ -\cos 2P \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

Ahora multiplicando la matriz M (general) con el vector S anterior, encontramos el vector de Stokes del haz reflejado

$$S' = \frac{I_0}{2} \begin{pmatrix} 1 + \tan^2 \psi \\ 1 - \tan^2 \psi \\ 2 \tan \psi \text{sen } \Delta + 2P \\ 2 \tan \psi \cos \Delta + 2P \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Esto es el vector del un haz polarizado elípticamente. Para obtener luz polarizada lineal en el haz reflejado debemos tener

$$\cos \Delta + 2P = 0 \quad (3.62)$$

Para que se cumpla, debemos entonces tener

$$\Delta + 2P_1 = 90^\circ \quad (3.63)$$

o

$$\Delta + 2P_2 = 270^\circ \quad (3.64)$$

Resolviéndolas

$$\Delta = 90^\circ - 2P_1 \quad (3.65)$$

$$\Delta = 270^\circ - 2P_2 \quad (3.66)$$

y podemos ver que

$$P_2 = 90^\circ + P_1 \quad (3.67)$$

Notemos que para la condición anterior el vector de Stokes del haz reflejado se convierte en

$$S' = \frac{I_0}{2} \begin{pmatrix} 1 + \tan^2 \psi \\ 1 - \tan^2 \psi \\ \pm 2 \tan \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

Para encontrar $\tan \psi$, o ψ , debemos de considerar la condición de intensidad nula la cual es creada usando el polarizador analizador. La matriz de Mueller del analizador es

$$M = \frac{I_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \cos 2\theta \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

Asumimos que el ángulo P ha sido ajustado de tal manera que el haz reflejado se convierta en su polarización en lineal representada por (numerito de la penultima matriz). la intensidad del haz emergente del analizador es obtenida multiplicado las dos matrices anteriores. Escribiendo el primer parámetro del vector de Stokes como $I(\psi, \theta)$:

$$I(\psi, \theta) = \frac{I_0}{4} [(1 + \tan^2 \psi) + (1 - \tan^2 \psi) \cos 2\theta \pm 2 \tan \psi \sin 2\theta] \quad (3.70)$$

donde el signo \pm se refiere ala condición P_1 y el signo $-$ a la condición de P_2 . Las condiciones de intensidad nula para θ_1 y θ_2 correspondientes a P_1 y P_2 respectivamente, son:

$$I(\psi_1, \theta_1) = 0 = (1 + \tan^2 \psi) + (1 - \tan^2 \psi) \cos 2\theta_1 + 2 \tan \psi \sin 2\theta_1 \quad (3.71)$$

$$I(\psi_1, \theta_2) = 0 = (1 + \tan^2 \psi) + (1 - \tan^2 \psi) \cos 2\theta_2 - 2 \tan \psi \sin 2\theta_2 \quad (3.72)$$

Restándolas obtenemos

$$(1 + \tan^2 \psi)[\cos 2\theta - \cos 2\theta_2] + 2 \tan^2 \psi[\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2] = 0 \quad (3.73)$$

Esta ecuación sólo se satisface si

$$\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2 = 0 \quad (3.74)$$

y

$$\text{sen } 2\theta_1 + \text{sen } 2\theta_2 = 0 \quad (3.75)$$

Sumando el cuadrado de cada uno de las ecuaciones obtenemos:

$$\cos 2\theta_1 \cos 2\theta_2 - \text{sen } 2\theta_1 \text{sen } 2\theta_2 = 1 \quad (3.76)$$

o

$$\cos (2\theta_1 + 2\theta_2) = 1 \quad (3.77)$$

Así, encontramos que

$$\theta_2 = -\theta_1 \quad (3.78)$$

$$\theta_2 = 180^\circ - \theta_1 \quad (3.79)$$

Conociendo el valor de θ_1 o θ_2 podemos encontrar el valor de $\tan \psi$. De la ecuación $I(\psi_1, \phi_1)$ podemos arreglarla como una ecuación cuadrática.

$$I(\psi, \theta_1) = (1 + \tan^2 \psi) + (1 - \tan^2 \psi) \cos 2\theta_1 + 2 \tan \psi \text{sen } 2\theta_1 = 0 \quad (3.80)$$

$$1 + \tan^2 \psi + \cos 2\theta_1 - \tan^2 \psi \cos 2\theta_1 + 2 \tan \psi \text{sen } 2\theta_1 = 0 \quad (3.81)$$

$$1 + \tan^2 \psi (1 - \cos 2\theta_1) + 2 \tan \psi \text{sen } 2\theta_1 + \cos 2\theta_1 = 0 \quad (3.82)$$

$$\tan^2 \psi (1 - \cos 2\theta_1) + 2 \tan \psi \text{sen } 2\theta_1 + (1 + \cos 2\theta_1) = 0 \quad (3.83)$$

Resolviendo ahora la ecuación cuadrática

$$\tan \psi = \frac{-2 \text{sen } 2\theta_1 \pm \sqrt{4 \text{sen}^2 2\theta_1 - 4(1 - \cos 2\theta_1)(1 + \cos 2\theta_1)}}{2(1 - \cos 2\theta_1)} \quad (3.84)$$

$$\tan \psi = \frac{-2 \text{sen } 2\theta_1 \pm \sqrt{4 \text{sen}^2 2\theta_1 - 4(1 + \cos^2 2\theta_1)}}{2(1 - \cos 2\theta_1)} \quad (3.85)$$

$$\tan \psi = \frac{-2 \text{sen } 2\theta_1 \pm \sqrt{4(\text{sen}^2 2\theta_1 - 1 + \cos^2 2\theta_1)}}{2(1 - \cos 2\theta_1)} \quad (3.86)$$

$$\tan \psi = \frac{-2 \text{sen } 2\theta_1 \pm 2\sqrt{(1 - 1)}}{2(1 - \cos 2\theta_1)} \quad (3.87)$$

$$\tan \psi = \frac{-\text{sen } 2\theta_1}{(1 - \cos 2\theta_1)} \quad (3.88)$$

La cual:

$$\tan \psi = \frac{-\text{sen } 2\theta_1}{(1 - \cos 2\theta_1)} = \frac{-2 \text{sen } \theta_1 \cos \theta_1}{(1 - (1 - 2 \text{sen}^2 \theta_1))} = \frac{-2 \cos \theta_1}{2 \text{sen } \theta_2} \quad (3.89)$$

se reduce a:

$$\tan \psi = -\cot \theta_1 \quad (3.90)$$

Esta ecuación puede ser reescrita pero en términos de las funciones seno y coseno, así:

$$\cos (\psi - \theta_1) = 0 \quad (3.91)$$

y finalmente tenemos:

$$\psi = 90^\circ + \theta_1 = 270^\circ + \theta_1 \quad (3.92)$$

La intensidad del haz es encontrado multiplicando (chechar al final los numeros), y tenemos

$$I(\psi, \Delta, P, \theta) = \frac{I_0}{4} [1 + \tan^2 \psi + (1 - \tan^2 \psi) \cos 2\theta + 2 \tan \psi \sin \Delta + 2P \sin 2\theta] \quad (3.93)$$

Y la intensidad mínima es encontrada de las condiciones:

$$\frac{\partial I(\psi, \Delta, P, \theta)}{\partial P} = 0 \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial I(\psi, \Delta, P, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (3.95)$$

Diferenciando, vemos la sig. condición:

$$\cos(\Delta + 2P) = 0 \quad (3.96)$$

la cual es exactamente el resultado obtenido, esto es:

$$\Delta + 2P = 90^\circ, 270^\circ \quad (3.97)$$

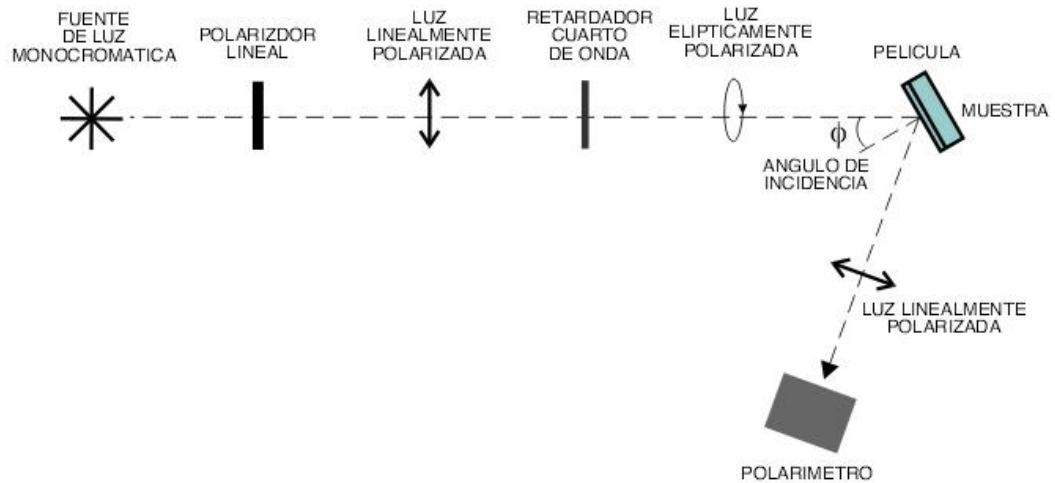
pendiente sig renglones.

Vimos que los parámetros de polarización de Stokes y la Matriz de Mueller permiten obtener fácilmente las fórmulas de elipsometría.

3.5. Cálculo de los Coeficientes de Elipsometría con los parámetros Stokes

Con la sección anterior, podemos calcular los coeficientes de Elipsometría con los parámetros de Stokes para el caso en general.

La siguiente figura muestra el arreglo que se usará



En nuestro caso, tenemos que aplicar la matriz de rotación

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.98)$$

a la matriz (2.54)

$$M = \begin{pmatrix} 1 + \tan^2 \psi & 1 - \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ 1 - \tan^2 \psi & 1 + \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \tan \psi \cos \Delta & -2 \tan \psi \sen \Delta \\ 0 & 0 & 2 \tan \psi \sen \Delta & 2 \tan \psi \cos \Delta \end{pmatrix} \quad (3.99)$$

debido a que tenemos la muestra perpendicular a la superficie (a la mesa).

Multiplicando

$$M_R = R^{-1}MR \quad (3.100)$$

obtenemos:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 + \tan^2 \psi & -(1 - \tan^2 \psi) & 0 & 0 \\ -(1 - \tan^2 \psi) & 1 + \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \tan \psi \cos \Delta & 2 \tan \psi \sen \Delta \\ 0 & 0 & -2 \tan \psi \sen \Delta & 2 \tan \psi \cos \Delta \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

Para obtener los parámetros de elipsometría multiplicaremos el vector de Stokes incidente por la matriz anterior, obteniendo el vector de Stokes reflejado en términos de ψ y Δ

$$\begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \tan^2 \psi & -1 + \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ -1 + \tan^2 \psi & 1 + \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \tan \psi \cos \Delta & 2 \tan \psi \sen \Delta \\ 0 & 0 & -2 \tan \psi \sen \Delta & 2 \tan \psi \cos \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (3.102)$$

multiplicando

$$\begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0(1 + \tan^2 \psi) - S_1(1 - \tan^2 \psi) \\ -S_0(1 - \tan^2 \psi) + S_1(1 + \tan^2 \psi) \\ S_2(2 \tan \psi \cos \Delta) + S_3(2 \tan \psi \sen \Delta) \\ -S_2(2 \tan \psi \sen \Delta) + S_3(2 \tan \psi \cos \Delta) \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

Despejando, obtenemos:

$$\tan \psi = \frac{S'_0 + S'_1}{S'_0 - S'_1} \frac{S_0 - S_1}{S_0 + S_1} \quad (3.104)$$

$$\tan \Delta = \frac{S'_2 S_3 - S'_3 S_2}{S'_2 S_2 + S'_3 S_3} \quad (3.105)$$

Así, calculamos dos ecuaciones para calcular los parámetros de elipsometría en términos de los vectores de Stokes para el caso general.

3.6. Coeficientes de Fresnel

3.6.1. Ondas en una Interfaz

Supongamos que la onda de luz monocromática incidente es plana y tiene por lo tanto la forma:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} \exp[i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)] \quad (3.106)$$

o, expresado más sencillamente,

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} \cos(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t) \quad (3.107)$$

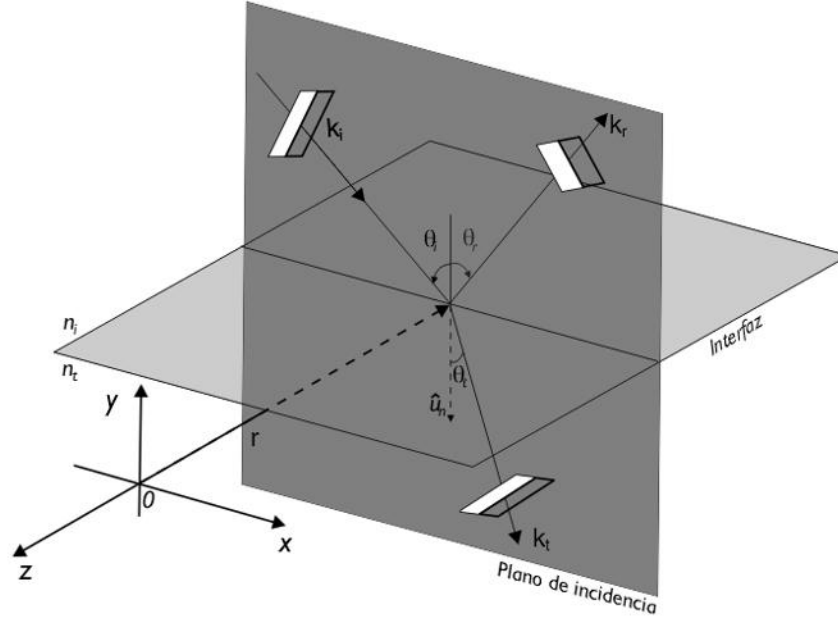
Supongamos que \mathbf{E}_{0i} sea constante en el tiempo, es decir que la onda es linealmente polarizada o polarizada en un plano. Observemos que así como el origen de tiempos, $t = 0$, es arbitrario,

también lo es el origen o en el espacio, donde $\mathbf{r} = 0$. Por lo tanto, podemos formular las ondas reflejadas y transmitidas como

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r} \cos(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \epsilon_r) \quad (3.108)$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} \cos(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \epsilon_t) \quad (3.109)$$

Aquí ϵ_r y ϵ_t son *constantes de fase* relativas a \mathbf{E}_i , y se introducen debido a que la posición del origen no es única.



La figura muestra las ondas en la vecindad de la interfaz plana entre dos medios homogéneos dieléctricos y sin pérdida, cuyos índices sean n_i y n_t .

Las leyes de la teoría electromagnética exigen ciertos requisitos que los campos han de cumplir, a los que nos referimos como las *condiciones de frontera*. En concreto, uno de estos requisitos es que la componente del campo eléctrico \mathbf{E} , que es tangente a la interfaz, debe ser continua a través de él (lo mismo deberá aplicarse para \mathbf{H}). Dicho de otro modo, la componente tangencial total de \mathbf{E} en un lado de la superficie deberá ser igual a la del otro lado. De este modo, dado que $\hat{\mathbf{u}}_n$ es el vector unitario normal a la interfaz independientemente de la dirección del campo eléctrico que haya dentro del frente de onda, el producto vectorial del campo con $\hat{\mathbf{u}}_n$ será perpendicular a $\hat{\mathbf{u}}_n$ y, por consiguiente, tangente a la interfaz. Así pues,

$$\hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_i + \hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_r = \hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_t \quad (3.110)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_{0i} \cos(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t + \epsilon_i) + \hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_{0r} \cos(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \epsilon_r) \quad (3.111)$$

$$= \hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_{0t} \cos(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \epsilon_t) \quad (3.112)$$

Esta relación debe mantenerse en cualquier instante en el tiempo y en todo punto de la interfaz ($y = b$). Como consecuencia, \mathbf{E}_i , \mathbf{E}_r , \mathbf{E}_t deberán tener precisamente la misma dependencia funcional en las variables t y r , lo cual significa que

$$(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)|_{y=b} = (\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \epsilon_r)|_{y=b} = (\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \epsilon_t)|_{y=b} \quad (3.113)$$

En este caso los cosenos en la ecuación (3.8) se anulan dejando una expresión independiente de t y r , como en efecto debe ser. Esto deberá cumplirse para todos los valores del tiempo, por lo que los coeficientes de t deberán ser iguales. Así obtendremos

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \quad (3.114)$$

Los electrones dentro del medio están sujetos a vibraciones forzadas a la frecuencia de la onda incidente, por lo que cualquier luz que sea dispersada, tendrá la misma frecuencia. Además

$$(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})|_{y=b} = (\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} + \epsilon_r)|_{y=b} = (\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} + \epsilon_t)|_{y=b} \quad (3.115)$$

donde \mathbf{r} termina en la interfaz. Los valores de ϵ_r y ϵ_t corresponden a una determinada posición de O y, por lo tanto, permiten que la relación sea válida independientemente de esa ubicación. De los dos primeros términos obtenemos

$$[(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r}]|_{y=b} = \epsilon_r \quad (3.116)$$

Vemos que $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r)$ es paralelo a $\hat{\mathbf{u}}_n$. Sin embargo, la onda incidente y la onda reflejada están en el mismo medio, o sea, $k_i = k_r$. Del hecho que $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r)$ no tiene componentes en el plano de la interfaz, es decir, $\hat{\mathbf{u}}_n \times (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) = 0$, concluimos que

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r \quad (3.117)$$

y por consiguiente, obtenemos la ley de reflexión, es decir

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r \quad (3.118)$$

Por otro lado, ya que $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r)$ es paralelo a $\hat{\mathbf{u}}_n$, los tres vectores \mathbf{k}_i , \mathbf{k}_r y $\hat{\mathbf{u}}_n$ están en el mismo plano en el de incidencia. De nuevo, de la ecuación (3.10) obtenemos

$$[(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r}]|_{y=b} = \epsilon_t \quad (3.119)$$

y por consiguiente \mathbf{k}_i , \mathbf{k}_t es también normal a la interfaz. Entonces \mathbf{k}_i , \mathbf{k}_r , \mathbf{k}_t y $\hat{\mathbf{u}}_n$ son coplanares. Las componentes tangenciales de \mathbf{k}_i y \mathbf{k}_t deben ser iguales y por tanto

$$k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t \quad (3.120)$$

Pero como $\omega_i = \omega_t$ podemos multiplicar ambos lados por c/ω_i para obtener

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t \quad (3.121)$$

con lo que llegamos a la ley de Snell.

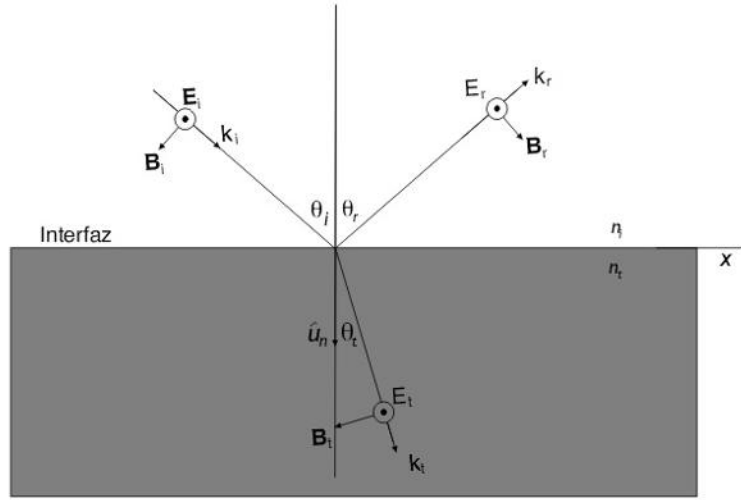
3.6.2. Las Ecuaciones de Fresnel

Acabamos de encontrar la relación que existe entre las fases de $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t)$ en la frontera. Hay aún una interdependencia compartida por las amplitudes \mathbf{E}_{0i} , \mathbf{E}_{0r} y \mathbf{E}_{0t} que ahora podemos calcular.

Supongamos que una onda monocromática plana incide en una superficie plana que separa dos medios isótropos. Sea cual sea la polarización de la onda, resolveremos sus campos \mathbf{E} y \mathbf{B} y en componentes paralelas y perpendiculares al plano de incidencia.

E perpendicular al plano de incidencia

Supongamos que **E** sea perpendicular al plano de incidencia y que **B** es paralela a él.



Recordemos que $E = \nu B$, de modo que

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = \nu \mathbf{B} \quad (3.122)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.123)$$

Haciendo uso de la continuidad de las componentes tangenciales del campo **E**, tenemos que en la frontera, en cualquier tiempo y en cualquier punto

$$\mathbf{E}_{0i} + \mathbf{E}_{0r} = \mathbf{E}_{0t} \quad (3.124)$$

donde los cosenos se anulan. Cabe señalar que los vectores de campo mostrados realmente deberían ser visualizados en $y = 0$, o sea en la superficie. Observemos también que aunque \mathbf{E}_r y \mathbf{E}_t han de ser normales al plano de incidencia por simetría, estamos suponiendo que apuntan hacia afuera en la interfaz cuando \mathbf{E}_i lo hace. Las direcciones de los campos **B** se derivan entonces de la ecuación (3.17).

Con el fin de obtener una nueva ecuación, es necesario que recordemos otra de las condiciones de frontera. La presencia de sustancias materiales que la onda polariza eléctricamente tiene un efecto definitivo en la configuración del campo. De este modo, mientras que la componente tangencial de **E** es continua al pasar la frontera, su componente normal no lo es. En su lugar la componente normal del producto $\epsilon \mathbf{E}$ es la misma en ambos lados de la interfaz. Del mismo modo, la componente normal de **B** es continua, al igual que la componente tangencial de $\mu^{-1} \mathbf{B}$. El efecto magnético de los dos medios aparece aquí a través de sus permeabilidades μ_i y μ_t . Esta condición de frontera será la más fácil de usar, sobre todo al aplicarla a la reflexión en la superficie de un conductor. Así pues, la continuidad de la componente tangencial de \mathbf{B}/μ requiere que

$$-\frac{\beta_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{\beta_r}{\mu_i} \cos \theta_r = -\frac{\beta_t}{\mu_t} \cos \theta_t \quad (3.125)$$

donde los lados izquierdo y derecho son las magnitudes totales de \mathbf{B}/μ paralelas a la interfaz en el medio incidente y en el transmitido, respectivamente. La dirección positiva es aquella en la que x aumenta de tal forma que las componentes escalares de \mathbf{B}_i y \mathbf{B}_t aparecen con signos negativos. De la ecuación (3.17) tenemos

$$B_i = E_i/\nu_i \quad (3.126)$$

$$B_r = E_r/\nu_r \quad (3.127)$$

$$B_t = E_t/\nu_t \quad (3.128)$$

Por consiguiente, dado que $\nu_i = \nu_r$ y $\theta_i = \theta_r$, la ecuación (3.20) puede escribirse como

$$\frac{1}{\mu_i \nu_i} (E_{0i} - E_{0r}) \cos \theta_i = \frac{1}{\mu_t \nu_t} E_{0t} \cos \theta_t \quad (3.129)$$

Usando las ecuaciones del inicio del capítulo y recordando que los cosenos que ahí aparecen son iguales entre sí en $y = 0$, obtenemos

$$\frac{n_i}{\mu_i} (E_{0i} - E_{0r}) \cos \theta_i = \frac{n_t}{\mu_t} E_{0t} \cos \theta_t \quad (3.130)$$

Combinando esto con la ecuación (3.19), se obtiene

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i - \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t} \quad (3.131)$$

y

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t} \quad (3.132)$$

El subíndice \perp sirve como recordatorio de que estamos tratando un caso en el que \mathbf{E} es perpendicular al plano de incidencia. Estas dos expresiones, que se aplican a cualquier medio homogéneo, isotrópico y lineal, son dos de las denominadas Ecuaciones de Fresnel. Lo más frecuente es tratar con dieléctricos para los cuales $\mu_i \approx \mu_t \approx \mu_0$; en consecuencia, la fórmula más común de estas ecuaciones es simplemente

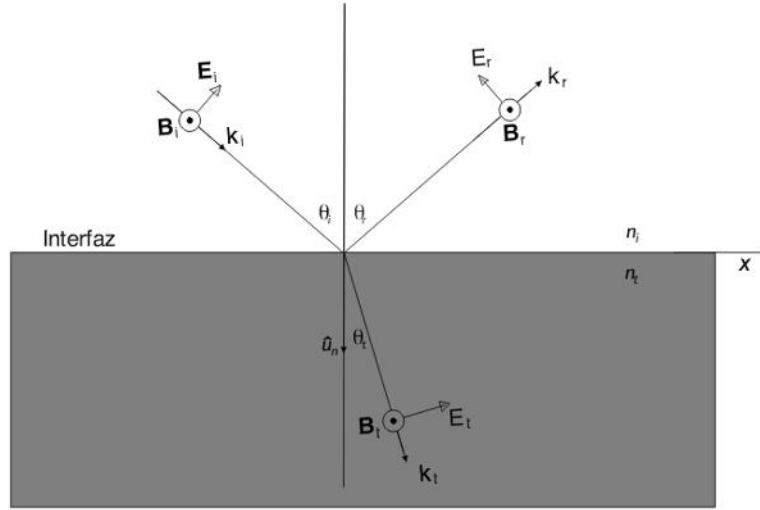
$$r_\perp = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \quad (3.133)$$

$$t_\perp = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \quad (3.134)$$

Aquí r_\perp denota el coeficiente de reflexión para amplitud y t_\perp representa el coeficiente de transmisión para la amplitud.

E paralelo al plano de incidencia

Cuando el campo incidente \mathbf{E} está en el plano de incidencia, tal y como se muestra en la figura



es posible deducir un par de ecuaciones similares. La continuidad de las componentes tangenciales de \mathbf{E} en ambos lados de la frontera nos lleva a

$$E_{0i} \cos \theta_i - E_{tr} \cos \theta_r = E_{0t} \cos \theta_t \quad (3.135)$$

De forma muy parecida a la anterior, la continuidad de las componentes tangenciales de \mathbf{B}/μ , da

$$\frac{1}{\mu_i \nu_i} E_{0i} + \frac{1}{\mu_r \nu_r} E_{0r} = \frac{1}{\mu_t \nu_t} E_{0t} \quad (3.136)$$

Dado que $\mu_i = \mu_r$ y que $\theta_i = \theta_r$, podemos combinar estas fórmulas para obtener las otras dos ecuaciones de Fresnel:

$$r_{\parallel} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{\frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_i - \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_t}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t} \quad (3.137)$$

$$t_{\parallel} = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2 \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_t + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_i} \quad (3.138)$$

Cuando los dos medios que forman la interfaz son dieléctricos, los coeficientes de amplitud resultantes son:

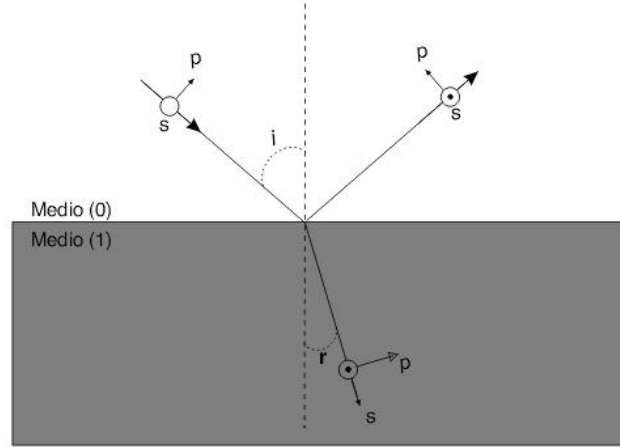
$$r_{\parallel} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i} \quad (3.139)$$

$$t_{\parallel} = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2 n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i} \quad (3.140)$$

3.7. Solución de la Ecuación Fundamental de Elipsometría

Un haz óptico que incide en una película delgada tendrá múltiples reflexiones dentro de la película. Conociendo el estado de polarización de los haces incidente y reflejados, el índice de refracción, el coeficiente de extinción, y el grosor de la película pueden ser determinados.

Lo primero es determinar la relación entre los índices refractivos de dos medios diferentes y la refractividad compleja ρ .



En la figura se muestra reflexión oblicua y transmisión de una onda plana incidente en la superficie.

Las ecuaciones de Fresnel para los coeficientes de reflexión r_p u r_s pueden ser escritos como

$$r_p = \frac{n_2 \cos i - n_1 \cos r}{n_2 \cos i + n_1 \cos r} \quad (3.141)$$

$$r_s = \frac{n_1 \cos i - n_2 \cos r}{n_1 \cos i + n_2 \cos r} \quad (3.142)$$

El coeficiente de reflexión complejo ρ es definido por

$$\rho = \frac{r_p}{r_s} \quad (3.143)$$

sustituyendo los coeficientes, obtenemos

$$\rho = \frac{r_p}{r_s} = \frac{x \cos i - \cos r}{x \cos i + \cos r} \frac{\cos i + x \cos r}{\cos i - x \cos r} \quad (3.144)$$

donde $x = n_2/n_1$. El ángulo de refracción r puede ser eliminado usando la ley de Snell

$$\text{sen } r = \frac{\text{sen } i}{x} \quad (3.145)$$

entonces nos queda que

$$\rho = \frac{r_p}{r_s} = \frac{x^2 \cos i - \sqrt{x^2 - \text{sen}^2 i} \cos i + \sqrt{x^2 - \text{sen}^2 i}}{x^2 \cos i + \sqrt{x^2 - \text{sen}^2 i} \cos i - \sqrt{x^2 - \text{sen}^2 i}} \quad (3.146)$$

Definimos

$$a = \cos i \quad (3.147)$$

y

$$b = \sqrt{x^2 - \text{sen}^2 i} \quad (3.148)$$

entonces

$$\rho = \frac{U + V}{U - V} \quad (3.149)$$

donde

$$U = a^2 x^2 - b^2 \quad (3.150)$$

$$V = ab(1 - x^2) \quad (3.151)$$

Fijando $f = U/V$, resolvemos las ecuaciones anteriores para x^2 y encontramos

$$x^2 = \text{sen}^2 i \left[1 + \frac{\tan^2 i}{f^2} \right] \quad (3.152)$$

Ecuación puede ser resuelta para ρ

$$f = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad (3.153)$$

Finalmente se convierte en

$$\frac{n_2}{n_1} = \text{sen} \left[1 + \left(\frac{1 - \rho}{1 + \rho} \right)^2 \tan^2 i \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.154)$$

la cual es la relación deseada entre n_2 , n_1 , y ρ .

Capítulo 4

Caracterización del equipo

4.1. LCD

Los componentes básicos de un LCD consiste en una delgada capa de cristal líquido que esta entre dos pares de polarizadores. Para controlar la transmisión óptica del display electrónicamente, la capa de cristal líquido está colocado entre electrodos transparentes. Los polarizadores y los electrodos están cementados en las superficies de las placas de cristal. El grueso de la capa de cristal líquido es guardada uniformemente usando los espacios que son hechos de fibras de cristal o microesferas plásticas. Aplicando voltaje a través de los electrodos, un campo eléctrico dentro del cristal líquido puede ser obtenido para controlar la transmisión de luz por la celda de cristal líquido.

4.1.1. Atenuador de Cristal Líquido

El atenuador variable funciona sin ninguna pieza móvil mecánica. El corazón del sistema es un retardador de cristal líquido en combinación con varias opciones del polarizador. La birrefringencia óptica del material de cristal líquido se puede cambiar por medio de un campo eléctrico aplicado. Cambiando la birrefringencia se modifica el índice de refracción a lo largo de un eje preferido visto por un haz incidente de luz. Así variando el voltaje aplicado al elemento de cristal líquido, las características de la polarización de un haz transmitido pueden ser modificadas.

4.1.2. Medición del retardamiento

El atenuador es un retardador variable que cambia la fase entre dos componentes de polarización de la luz incidente. Los índices de refracción son diferentes para el e- y o- ondas electromagnéticas causando que la longitud de camino sea diferente por el retardador. Esta diferencia de longitud de camino es denotada por

$$L = d(|n_o - n_e|) \quad (4.1)$$

donde d es el grosor del cristal. La diferencia de fase entre dos polarizadores está dada por:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \bullet (|n_o - n_e|) \quad (4.2)$$

también conocida como retardancia.

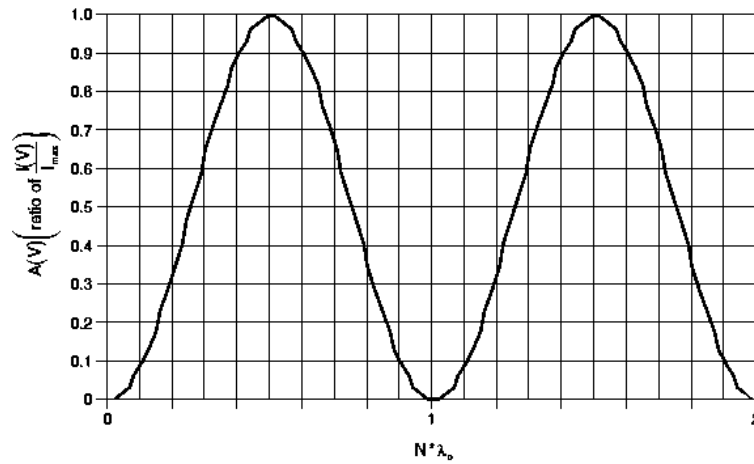
para el retardador variable, los valores de retardancia son dadas como las diferencias de camino en varios rms voltaje que aplicados para una longitud de onda específica.

Insertando el atenuador entre dos polarizadores puede ser medido el cociente de atenuación dado por $(A(V) = I(V)/I_{max})$, que será usado para calcular la retardancia . Este cociente esta relacionado con la diferencia de fase entre dos polarizadores perpendiculares como:

$$A(V) = \text{sen}^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \quad (4.3)$$

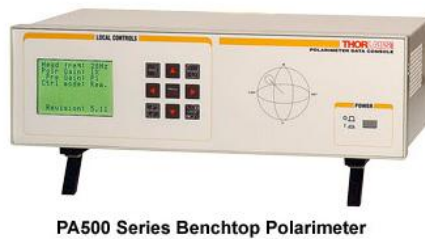
despejando $\Delta\Phi$, tenemos que:

$$\Delta\Phi = 2 \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{A(v)}) \quad (4.4)$$



4.2. Polarímetro

Es un instrumento para medir el estado de la polarización de un haz de luz o de otra forma de radiación electromagnética.



PA500 Series Benchtop Polarimeter



4.3. Análisis del Cambio de Fase

Utilizando la ecuación (4.4) se calculó el cambio de fase por el atenuador al aplicarle cierto voltaje

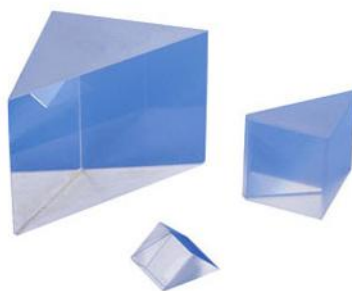
Voltaje (volts)	Intensidad	Cociente de Atenuación	Fase °C
0	0,028	0,02333	17,57
0,5	0,027	0,0225	17,25
0,8	0,024	0,02	16,26
1	0,019	0,01583	14,46
1,3	0,042	0,035	21,57
1,35	0,092	0,07667	32,15
1,4	0,176	0,14667	45,04
1,45	0,297	0,2475	59,67
1,5	0,424	0,35333	72,94
1,8	1,1	0,91667	146,44
2	1,12	0,93333	150,07
2,3	0,81	0,675	110,49
2,5	0,581	0,48417	88,19
2,8	0,335	0,27917	63,79
3	0,219	0,1825	50,58
3,3	0,11	0,09167	35,25
3,5	0,071	0,05917	28,16
3,8	0,031	0,02583	18,50
4	0,015	0,0125	12,84
4,3	0,004	0,00333	6,62
4,5	0,0015	0,00125	4,05
5	0,004	0,00333	6,62
5,3	0,01	0,00833	10,47
5,5	0,015	0,0125	12,84
5,8	0,023	0,01917	15,92
6	0,029	0,02417	17,89
6,3	0,038	0,03167	20,50
6,5	0,042	0,035	21,57
6,8	0,051	0,0425	23,79
7	0,058	0,04833	25,40
7,3	0,068	0,05667	27,54
7,5	0,072	0,06	28,36
7,8	0,078	0,065	29,54
8	0,086	0,07167	31,06
8,3	0,094	0,07833	32,51
8,5	0,101	0,08417	33,73
9	0,111	0,0925	35,41
9,3	0,114	0,095	35,90
9,5	0,121	0,10083	37,03
9,8	0,131	0,10917	38,59
10	0,135	0,1125	39,19
10,3	0,14	0,11667	39,95
10,5	0,147	0,1225	40,97
10,8	0,149	0,12417	41,27
11	0,151	0,12583	41,55
11,3	0,151	0,12583	41,55
11,5	0,162	0,135	43,11
11,8	0,166	0,13833	43,67
12	0,171	0,1425	44,36
12,3	0,173	0,14417	44,63
12,5	0,177	0,1475	45,17
12,8	0,182	0,15167	45,84
13	0,182	0,15167	45,84

Voltaje (volts)	S_0	S_1	S_2	Fase °C
0	0,949	0,043	-0,27 1	5,66
1	0,963	0,042	-0,224	12,94
1,19	0,991	0,041	0,005	-0,29
1,26	0,958	0,041	0,228	-13,18
1,47	0,37	0,025	0,929	-68,28
1,62	-0,335	-0,003	0,939	-69,88
1,91	-1	0,009	-0,004	0,23
2	-0,947	-0,003	-0,309	17,99
2,5	-0,006	-0,014	-0,998	86,38
3	0,619	-0,007	0,776	-50,90
3,5	0,875	0,002	-0,466	27,77
4	0,955	0,004	-0,22 1	2,71
4,44	0,986	0,019	-0,059	3,38
4,5	0,998	0,018	-0,034	1,95
5	0,998	0,016	0,111	-6,37
5,5	0,96	0,016	0,218	-12,59
6	0,942	0,009	0,304	-17,70
6,5	0,915	0,011	0,373	-21,90
7	0,89	0,009	0,431	- 25,53
7,5	0,864	60,01	0,479	-28,62
8	0,853	0,008	0,519	-31,27
8,5	0,823	0,008	0,533	-32,21
9	0,805	0,003	0,585	-35,80
9,5	0,786	0,009	0,613	-37,81
10	0,765	0,009	0,631	-39,12
10,5	0,758	0	0,652	-40,692
11	0,737	0	0,674	-42,38
11,5	0,722	0,004	0,69	-43,63
12	0,716	0,007	0,702	-44,59
12,5	0,7	-0,001	0,716	-45,73
13	0,689	0,003	0,723	-46,30

Capítulo 5

Diseño Experimental y Resultados

El objetivo de éste trabajo es el cálculo de los índices de refracción. Se emplearon cuatro técnicas: por ecuaciones de Fresnel, ángulo de Brewster, Elipsometría y Elipsometría Nula. En cada una de las tres últimas técnicas la base de ellas son el Método de Polarización por Reflexión. El material que se utilizó para calcular su índice de refracción fue un prisma de BK7



5.1. Técnica por Ángulo de Brewster

Recordando la sección 2.3.4, el ángulo de incidencia θ que hace que el ángulo entre los rayos reflejado y refractado sea 90° recibe el nombre de ángulo de Brewster. Este ángulo se puede calcular por medio de la ley de Snell:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = N \quad (5.1)$$

y la condición

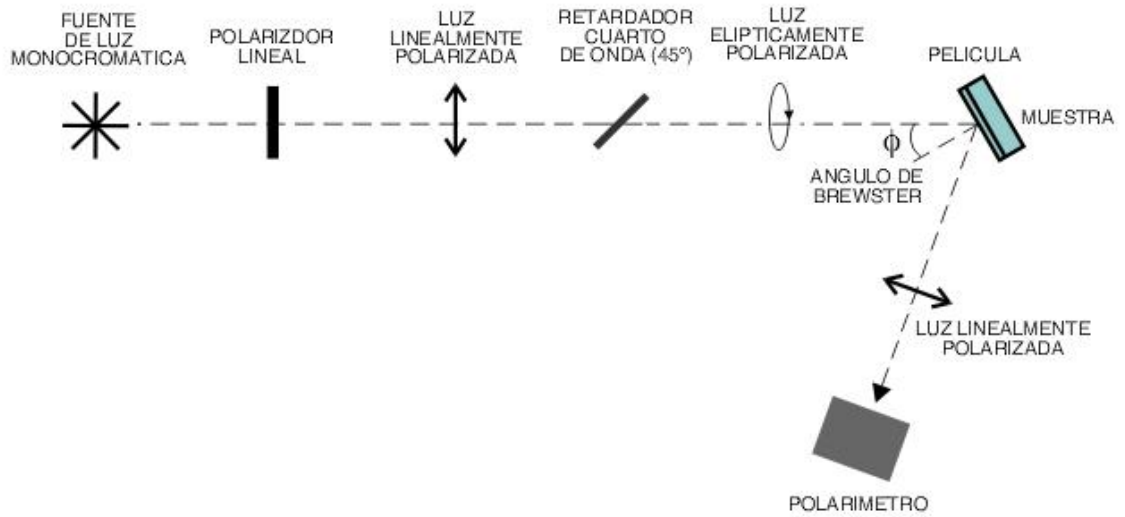
$$\theta_i + \theta_r = 90^\circ \quad (5.2)$$

las cuales al combinarse dan el resultado

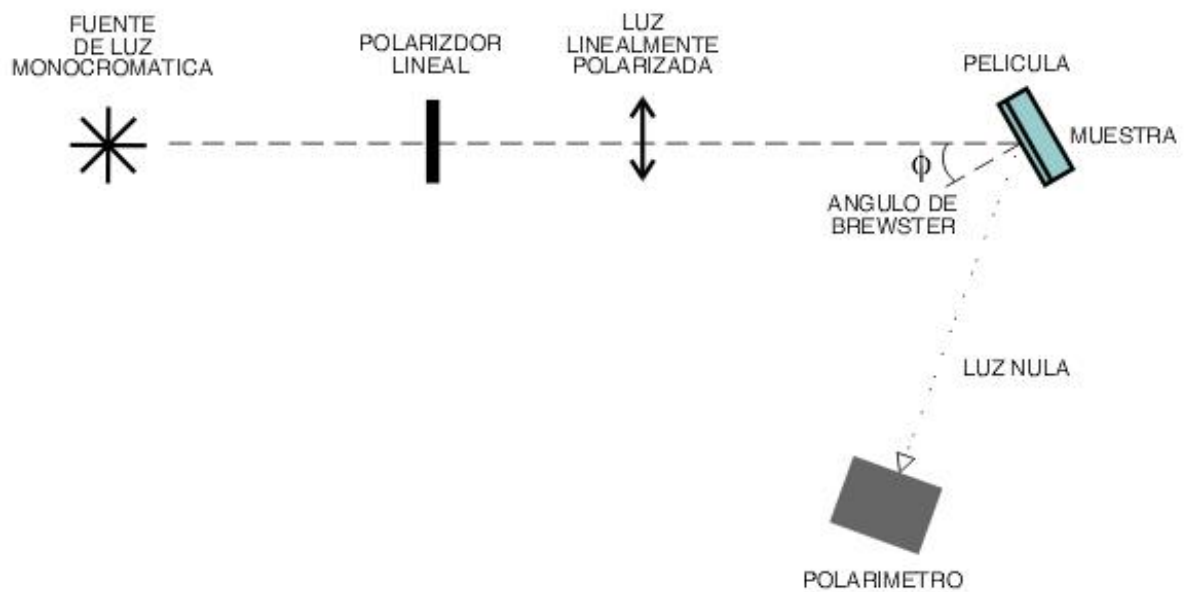
$$\tan \theta_r = N \quad (5.3)$$

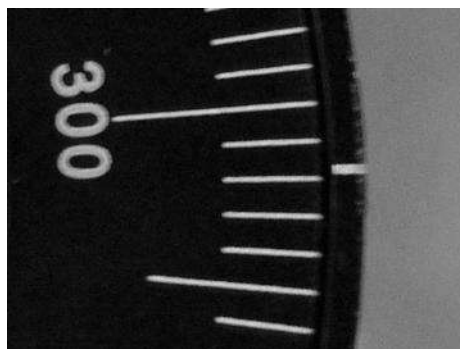
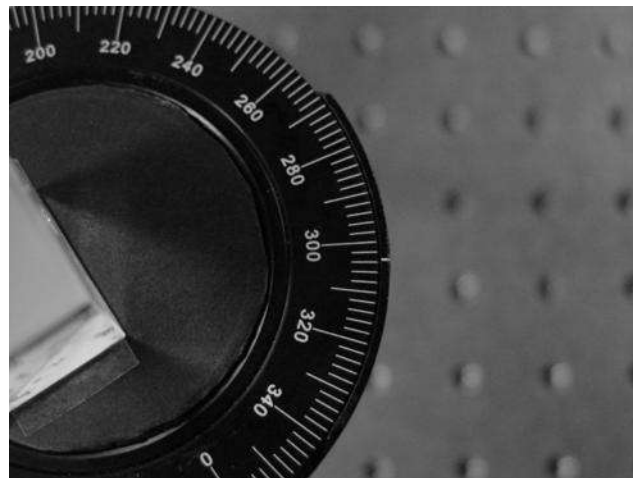
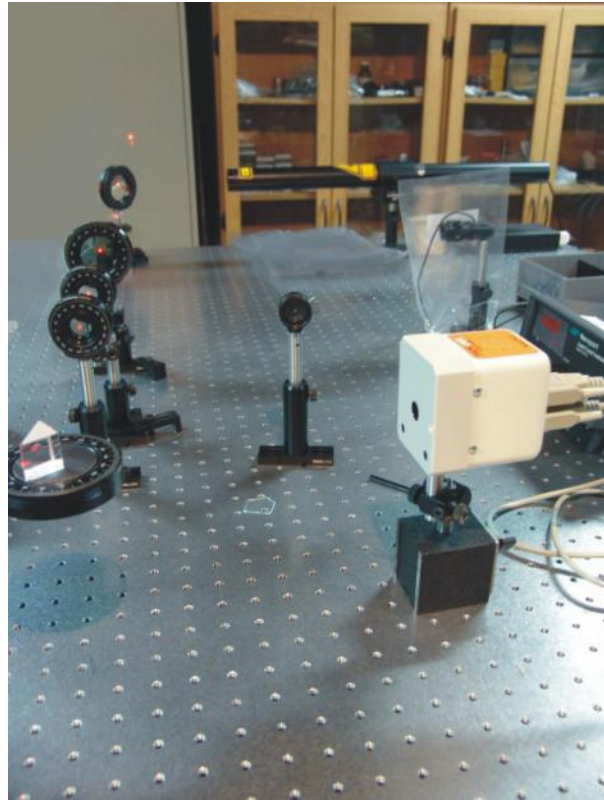
La luz reflejada está polarizada linealmente por completo si el ángulo de incidencia es igual al ángulo de Brewster en cualquier material dieléctrico.

Con la teoría anterior, se armó el siguiente diseño experimental:



Donde incidimos luz linealmente polarizada en una muestra, en este caso lo hicimos con un prisma de BK7, al ángulo de Brewster. Para calcular el ángulo de Brewster experimentalmente, rotamos la montura de tal manera que el haz reflejado fuera nulo.





El ángulo de Brewster encontrado fue : 1.519

5.2. Técnica por Transmitancia

Para esta técnica se utilizó el Espectrómetro del Laboratorio de Holografía en el cual se midió el porcentaje de Transmitancia del material.

Definimos la reflectancia R como el cociente entre la potencia (o flujo) reflejada y la potencia incidente, es decir

$$R = \frac{I_r A \cos \theta_t}{I_i A \cos \theta_i} = \frac{I_r}{I_i} \quad (5.4)$$

La transmitancia T se define como el cociente entre el flujo transmitido y el flujo incidente y viene dada por

$$T = \frac{I_t \cos \theta_t}{I_i \cos \theta_i} \quad (5.5)$$

El cociente I_r/I_i es igual a $(v_r \epsilon_r E_{0r}^2/2)/(v_i \epsilon_i E_{0i}^2/2)$, y dado que la onda reflejada y la incidente están en el mismo medio, $v_r = v_i$, $\epsilon_r = \epsilon_i$, y

$$R = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)^2 = r^2 \quad (5.6)$$

teniendo en cuenta el hecho que $\mu_0 \epsilon_t = 1/v_t^2$ y $\mu_0 v_t \epsilon_t = n_t/c$ y suponiendo $\mu_i = \mu_t = \mu_0$

$$T = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)^2 = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i}\right) t^2 \quad (5.7)$$

Conocemos también que

$$R + T = 1 \quad (5.8)$$

Para nuestro experimento, es conveniente usar la forma T con su componentes, es decir,

$$T_{\perp} = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i}\right) t_{\perp}^2 \quad (5.9)$$

y

$$T_{\parallel} = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i}\right) t_{\parallel}^2 \quad (5.10)$$

Cuando $\theta_i = 0$, el plano de incidencia queda indefinido y cualquier distinción entre las componentes paralela y perpendicular de R y T desaparece. En este caso las ecuaciones anteriores llevan a

$$T = T_{\parallel} = T_{\perp} = \frac{4n_t n_i}{(n_t + n_i)^2} \quad (5.11)$$

Una vez encontrada T con el espectrómetro, usamos la última fórmula anterior para encontrar el índice de refracción.

$$T = \frac{4n_t n_i}{(n_t + n_i)^2} \quad (5.12)$$

entonces,

$$\frac{1}{T} = \frac{(n_t + n_i)^2}{4n_t n_i} \quad (5.13)$$

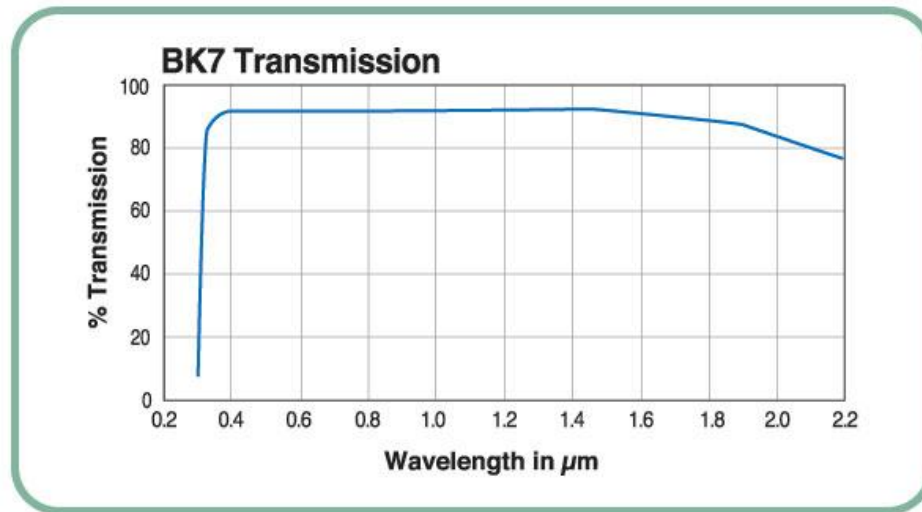
despejando y teniendo en cuenta que $n_i = 1$

$$0 = Tn_t^2 + 2Tn_t + T + 4n_t \quad (5.14)$$

$$0 = n_t^2(T) + n_t(2T - 4) + T \quad (5.15)$$

calculando sus raíces

$$T = \frac{-2T + 4 \pm 4\sqrt{1 - T}}{2T} \quad (5.16)$$

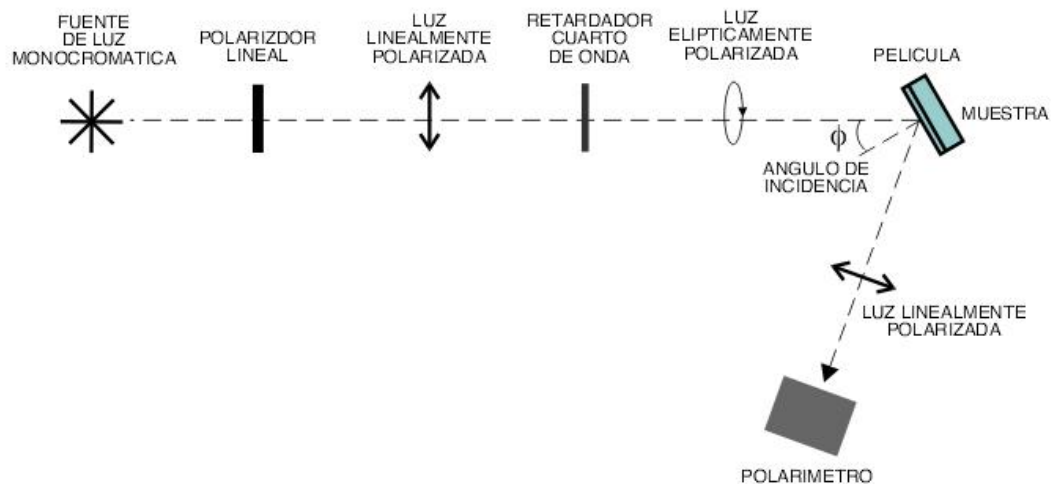


Donde obtenemos un índice de 1.52

5.3. Técnica por Elipsometría

En esta técnica se calcula primer los coeficientes de Elipsometría con los parámetros de Stokes como en la sección 3.4 para ahora para el caso en general

La siguiente figura muestra el arreglo que se usará



En nuestro caso, tenemos que aplicar la matriz de rotación

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sen 2\theta & 0 \\ 0 & -\sen 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

a la matriz (2.54)

$$M = \begin{pmatrix} 1 + \tan^2 \psi & 1 - \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ 1 - \tan^2 \psi & 1 + \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \tan \psi \cos \Delta & -2 \tan \psi \sen \Delta \\ 0 & 0 & 2 \tan \psi \sen \Delta & 2 \tan \psi \cos \Delta \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

debido a que tenemos la muestra perpendicular a la superficie (a la mesa).

Multiplicando

$$M_R = R^{-1} M R \quad (5.19)$$

obtenemos:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 + \tan^2 \psi & -(1 - \tan^2 \psi) & 0 & 0 \\ -(1 - \tan^2 \psi) & 1 + \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \tan \psi \cos \Delta & 2 \tan \psi \sen \Delta \\ 0 & 0 & -2 \tan \psi \sen \Delta & 2 \tan \psi \cos \Delta \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Para obtener los parámetros de elipsometría multiplicaremos el vector de Stokes incidente por el la matriz anterior, obteniendo el vector de Stokes reflejado en términos de ψ y Δ

$$\begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \tan^2 \psi & -1 + \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ -1 + \tan^2 \psi & 1 + \tan^2 \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \tan \psi \cos \Delta & 2 \tan \psi \sen \Delta \\ 0 & 0 & -2 \tan \psi \sen \Delta & 2 \tan \psi \cos \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

multiplicando

$$\begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0(1 + \tan^2 \psi) - S_1(1 - \tan^2 \psi) \\ -S_0(1 - \tan^2 \psi) + S_1(1 + \tan^2 \psi) \\ S_2(2 \tan \psi \cos \Delta) + S_3(2 \tan \psi \sen \Delta) \\ -S_2(2 \tan \psi \sen \Delta) + S_3(2 \tan \psi \cos \Delta) \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Despejando, obtenemos:

$$\tan \psi = \frac{S'_0 + S'_1}{S'_0 - S'_1} \frac{S_0 - S_1}{S_0 + S_1}^{\frac{1}{2}} \quad (5.23)$$

$$\tan \Delta = \frac{S'_2 S_3 - S'_3 S_2}{S'_2 S_2 + S'_3 S_3} \quad (5.24)$$

Así, calculamos dos ecuaciones para calcular los parámetros de elipsometría en términos de los vectores de Stokes para el caso general.

Una vez encontrados los parámetros de elipsometría, calculamos los índices de refracción :

$$\frac{n_2}{n_1} = \sen \left[1 + \left(\frac{1 - \rho}{1 + \rho} \right)^2 \tan^2 i \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.25)$$

Para, el cálculo se desarrolló en Mathematica un programa.

5.3.1. Medición del índice BK7 con un polarizador a 110 grados con la muestra a un ángulo de 56 grados

incidente:

Stokes: [1.000,0.959,0.311,0.008]

Reflejado:

Stokes: [1.000,-0.932,0.072,-0.009]

n= 1.51623

5.3.2. Medición del índice del BK7 incidiendo polarización circular a cualquier ángulo

Se incidió polarización circular izquierda sobre la muestra y la vamos a rotar desde 10 hasta 80 grados, aplicando al modulador de cristal líquido a 2.45 Volts a 45 grados.

Se tomaron 2 vectores de stokes para la luz incidente y estos son

Stokes: [1.000,0.009,-0.005,-0.998]

Tue Jul 03 17:44:48 2007

Stokes: [1.000,-0.004,-0.011,-0.997]

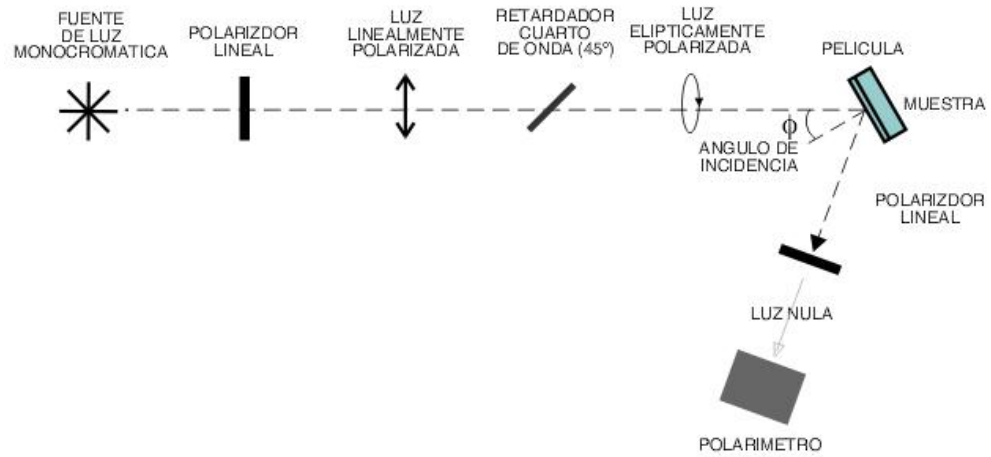
Tue Jul 03 17:45:25 2007

Los vectores de Stokes encontrados para diferentes ángulos del haz reflejado y sus índices de refracción fueron:

Grados	S_0	S_1	S_2	S_3	índice
10	1.000	-0.026	0.019	1.001	1,518
10	1.000	-0.043	0.003	0.994	1,52
20	1.000	-0.158	-0.001	0.984	1,47
20	1.000	-0.164	0.000	0.984	1,493
30	1.000	-0.386	0.010	0.919	1,508
40	1.000	-0.382	0.013	0.919	1,51
40	1.000	-0.678	0.011	0.728	1,505
44	1.000	-0.680	0.021	0.729	1,515
44	1.000	-0.7956	0.010	0.599	1,517
50	1.000	-0.794	0.012	0.600	1,524
50	1.000	-0.935	0.013	0.342	1,514
60	1.000	-0.980	0.013	-0.191	1,503
60	1.000	-0.979	0.010	-0.185	1,498
70	1.000	-0.758	0.004	-0.646	1,519
70	1.000	-0.760	0.004	-0.648	1,523
80	1.000	-0.388	0.007	-0.917	1,515
80	1.000	-0.393	-0.006	-0.916	1,527

5.4. Técnica por Elipsometría Nula

En esta técnica se utilizó el siguiente arreglo experimental



Y se utilizó la teoría de la sección 3.4 las fórmulas (3.90) y (3.96)

$$\tan \psi = -\cot \theta_1 \quad (5.26)$$

$$\cos(\Delta + 2P) = 0 \quad (5.27)$$

Donde se obtuvo un resultado de 1.512 para el BK7

Capítulo 6

Conclusiones

Para el entendimiento en el desarrollo de esta tesis, se tuvieron que reafirmar los conceptos de polarización tanto en teoría como de forma experimental, además de otros conocimientos de la óptica en general.

Se desarrollaron las técnicas para el cálculo del índice de refracción, por transmitancia, ángulo de Brewster, elipsometría no nula y elipsometría nula.

Se encontró el índice de refracción del BK7 con las cuatro técnicas anteriores.

Se desarrolló y mejoró la técnica del cálculo del índice de refracción complejo con elipsometría no nula para el caso general, lo que permite el cálculo de éste para otros materiales de estructuras no simples.

Se caracterizó el equipo del laboratorio, el polarímetro y la celda de cristal líquida.

Bibliografía

- [1] EDWARD COLLETT, 1992. *Polarized Light: fundamentals and applications*, Marcel Dekker, Inc.
- [2] EUGENE HECHT, 2000. *Óptica*, Addison-Wesley Iberoamericana.
- [3] WILLIAM A. SHURCLIFF AND STANLEY S. BALLARD, 1964. *Polarized Light*, D. Van Nostrand Company.
- [4] DANIEL MALACARA, 1989. *Óptica Básica*, Fondo de Cultura Económica, México.
- [5] JOHN WILEY & SONS., 1999. *Optics of Liquid Crystal Displays*.
- [6] JAMES P. SHAFFER, 1999 *The Science and Design of Engineering Materials*, McGraw-Hill.