



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Mat. Luís Manuel Rivera Gutiérrez

UNA FORMULA DE CUADRATURA PARA UNA INTEGRAL DE POISSON

T E S I S

Que para obtener el título de:
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

P r e s e n t a :
ERICK CORONADO JUAREZ

Asesor:

Dr. Rafael González Campos

Morelia Michoacán. SEPTIEMBRE de 2007

Agradecimientos.

Primero que nada quiero agradecer a mis padres, Estela Juárez Ponce y Jesús Coronado García por darme la vida y guiarme por el camino de la educación. por todo su apoyo y comprensión.

A Marilú que me enseñó que para poder lograr las cosas solo hace falta poner empeño y esforzarse. gracias por todo el apoyo y cariño que me has brindado.

A mis hermanos Cesar, Claudia y Nancy, a mis abuelos Ernestina y Jesús.

A toda mi familia y a toda la bola de primos que tengo. A la azul y a la Eliz en especial.

A todos mis cuates, Pancho, Omar, Paco, Oliver, Athziri, Nacho, Marcos, Diego, Ivan, Didier, Pedro, Juan Pablo, y todos los que faltan, por que siempre estuvieron cuando los necesite para brindarme su amistad.

Gracias a la Fac. Cs. Fisico Matemáticas por enseñarme tantas cosas, a todos los maestros que en algún momento me dieron clases de todos aprendí algo.

Y por ultimo pero no por eso menos importante. gracias a mi asesor de tesis, Rafael González Campos, por aguantarme y por todo el apoyo, ya ve si se pudo.

Índice General

Capítulo 1. Introducción	3
Capítulo 2. ELEMENTOS DE INTEGRACION NUMÉRICA	5
1. Integración Numérica Compuesta	6
2. Cuadratura Gaussiana	7
3. Cuadratura Gaussiana y Problema de Valores Propios	11
Capítulo 3. PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS DE LAGUERRE	17
1. Propiedades Elementales de los Polinomios de Laguerre	17
2. Relaciones de Recurrencia y Ecuaciones Diferenciales	19
3. Representación Integral de los Polinomios de Laguerre.	21
4. Una Ecuación integral Satisfecha por los Polinomios de Laguerre	23
5. Ortogonalidad de los Polinomios de Laguerre	24
6. Representación asintótica de los polinomios de Laguerre de grado n	26
7. Expansión de Funciones en Series de Polinomios de Laguerre	30
8. Ejemplos de Expansiones en Serie de Polinomios de Laguerre	31
Capítulo 4. INTEGRALES DE POISSON PARA SERIES DE LAGUERRE	35
1. Un Teorema Importante	35
Capítulo 5. FORMULA DE CUADRATURA	41
1. Problema de eigenvalores	41
2. Normalización	44
3. Formulas Asintóticas y Kernel de la Transformada	45
4. Casos Límites	48
Capítulo 6. APLICACIONES DE LA FORMULA DE CUADRATURA	53
1. Probando la cuadratura con la función $I_\alpha(b_jx)$	53
2. Probando la cuadratura con la función $J_\alpha(y_jx)$	58
Capítulo 7. CONCLUSIONES	61
Bibliografía	63

CAPÍTULO 1

Introducción

Este trabajo está dirigido a las personas que se interesan en encontrar resultados a integrales a veces difíciles de calcular. El objetivo en esta tesis será el de proponer una fórmula de cuadratura para la integral de Poisson con series de polinomios de Laguerre. En los primeros capítulos se trata de dar una visión general de los polinomios de Laguerre desde como se definen, como también sus propiedades, sus fórmulas asintóticas, la propiedades de ortogonalidad. Con el fin de irnos adentrando hacia las fórmulas de cuadratura. Se dará un vistazo rápido a las cuadraturas más simples, utilizando las fórmulas de Newton-Cotes de primero y segundo orden (Regla de Trapecio y Regla de Simpson respectivamente). Así como también elementos de **integración** numérica, hasta pasar a definir la cuadratura Gaussiana, esta es la técnica empleada para obtener una aproximación de la integral de Poisson.

Nos basamos en un problema de valores propios para llegar a la fórmula de cuadratura, esto fue haciendo uso de las técnicas desarrolladas por Rafael G. Campos. En el transcurso del desarrollo de la tesis nos dimos cuenta que el método para la obtención de la cuadratura, coincide con el trabajo de G. H. Golub y J. H. Welsh cuando a finales de la década de los sesentas propusieron un novedoso método para obtener cuadraturas gaussianas, así como también de W. Gautschi por otra parte. Debemos reconocer los resultados que nos dieron estos y otros personajes al proponer métodos novedosos para la aproximación de integrales complicadas o que no tienen un resultado analítico tal es el caso de la $\int e^{-x^2} dx$, mediante las fórmulas de cuadratura.

Para una función $f(x)$ continua definida en el intervalo $[a, b]$. Nuestro objetivo será encontrar fórmulas aproximadas para calcular la integral $\int_a^b f(x)dx$. En caso de conocer la primitiva $F(x)$, es evidente que podemos encontrar el valor exacto de la integral, utilizando el Teorema fundamental del cálculo integral: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Sin embargo no siempre esto es posible. Por ejemplo, para la función $f(x) = e^{-x^2}$ no existe ninguna primitiva que podamos escribir utilizando funciones elementales.

La fórmula de cuadratura en pocas y sencillas palabras es una herramienta útil para aproximar una función $g(x) = \int_a^b f(x)dx$, mediante una suma de una función sobre el integrando $f(x)$. Como se verá en los capítulos siguientes, existen varias fórmulas de cuadratura conocidas para aproximar funciones numéricamente tal es el caso de la fórmula de los rectángulos, de los trapecios, el método de Simpson, etc. Todas estas son fórmulas de cuadratura. En nuestro caso trataremos de encontrar una fórmula que aproxime una

integral de Poisson en series de polinomios de Laguerre.

Al final llegaré a las pruebas numéricas de la cuadratura que obtuvimos para la integral de Poisson, esto para ver el grado de exactitud de la fórmula de cuadratura, en esa sección presentaré algunos ejemplos de cálculo numérico, con sus respectivas graficas de las aproximaciones y del error encontrado, tengo que decir que los cálculos así como las gráficas estuvieron hechos en Mathematica ©, y arrojaron resultados bueno.

CAPÍTULO 2

ELEMENTOS DE INTEGRACION NUMÉRICA

Con frecuencia surge la necesidad de evaluar la integral definida de una función que no tiene una antiderivada o cuya antiderivada tiene valores que no son fácilmente obtenibles. El método básico involucrado para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ se conoce como cuadratura numérica y usa una suma del tipo

$$\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

para aproximar $\int_a^b f(x)dx$.

Antes de discutir la situación general de las fórmulas de cuadratura Gaussianas. [12] mencionaré otras fórmulas de cuadratura que se obtienen usando polinomios de Lagrange de primero y segundo grado con nodos x_0, \dots, x_n de un intervalo $[a, b]$ uniformemente espaciados. Estas fórmulas son la regla del trapecio y la regla de Simpson, las cuales se obtiene integrando los polinomios de Lagrange de primer y segundo grado respectivamente, estas también son conocidas como fórmulas de Newton-Cotes cerradas. Las cuales solo por mencionarlas están dadas en la siguiente forma, no entraré en detalles con estas fórmulas de cuadratura

Regla del Trapecio: Sean $x_0 = a$, $x_1 = b$ donde $h = b - a$. $x_0 < \xi < x_1$,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12}f''(\xi).$$

Regla de Simpson: Sean $x_0 = a$, $x_2 = b$ y $x_1 = a + h$ donde $h = (b - a)/2$. $x_0 < \xi < x_2$,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi).$$

También existen las fórmulas de Newton-Cotes abiertas en las cuales, se usan los nodos $x_i = x_0 + ih$ para cada $i = 0, 1, \dots, n$, donde $h = (b - a)/(n + 2)$ y $x_0 = a + h$. Esto implica que $x_n = b - h$; así, si marcamos los puntos extremos tomando $x_{-1} = a$ y $x_{n+1} = b$, las fórmulas se transforman en

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i),$$

donde $a_i = \int_a^b L_i(x)dx$, y $L_i(x)$ es el polinomio de interpolante de Lagrange.

1. Integración Numérica Compuesta

Las fórmulas de Newton-Cotes no son generalmente apropiadas para usarse sobre intervalos de integración grande. Sobre estos intervalos se necesita utilizar fórmulas de muy alto grado cuyos valores para los coeficientes son difíciles de obtener. Aún más importante, las fórmulas de Newton-Cotes están basadas en polinomios interpolantes que usan nodos igualmente espaciados. éste es un procedimiento inexacto sobre intervalos grandes debido a la naturaleza oscilatoria de los polinomios de alto grado.

El enfoque principal es el segmentario de la integración numérica que utiliza las fórmulas de Newton-Cotes de orden bajo. Esto quiere decir que si tenemos un intervalo $[a, b]$ lo dividimos en una colección de subintervalos y se construye un polinomio interpolante diferente para cada subintervalo. a esto se le conoce como aproximación polinómica segmentaria.

El tipo más simple de aproximación polinómica segmentaria es la interpolación lineal segmentaria que consiste en unir un conjunto de datos de puntos

$$((x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))),$$

con una serie de líneas. Este es el método de interpolación que se utiliza cuando se tienen funciones trigonométricas o logarítmicas cuando se requieren valores intermedios de una colección de valores tabulados.

La desventaja de enfocar un problema de aproximación usando funciones de este tipo es que en cada uno de los extremos de los subintervalos, no hay ninguna seguridad de diferenciabilidad, lo cual, en un contexto geométrico, significa que la función interpolante no es "lisa" en esos puntos. Frecuentemente por las condiciones físicas es claro que se requiere esta condición y en estos casos la función aproximante debe ser continuamente diferenciable.

La aproximación polinómica segmentaria más común usando polinomios cúbicos entre parejas sucesivas de nodos se llama interpolación cúbica de trazador. Un polinomio cúbico general involucra cuatro constantes; así que hay suficiente flexibilidad en el procedimiento del trazador cúbico para garantizar no solamente que la interpolante sea continuamente diferenciable en el intervalo, sino que tenga también una segunda derivada continua. La construcción del trazador cúbico, sin embargo, no supone que las derivadas de la interpolante coincidan con las de la función ni siquiera en los nodos.

Siendo de esta manera los trazadores cúbicos se pueden definir de la siguiente manera:

DEFINICIÓN 1. *Dada una función f definida en $[a, b]$ y un conjunto de números, llamados los nodos, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, un interpolante cúbico de trazador, S , para f es una función que satisface las siguientes condiciones:*

a) S es un polinomio cúbico, denotado S_j , en el subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$

- b) $S(x_j) = f(x_j)$ para cada $j = 0, 1, \dots, n$
 c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$
 d) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$
 e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$
 f) se satisface una del siguiente conjunto de condiciones de frontera:

i) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (frontera libre)

ii) $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ (frontera sujeta)

Aunque los trazadores cúbicos pueden definirse con otras condiciones de frontera, las condiciones dadas arriba son suficientes para nuestros propósitos. Cuando se satisfacen las condiciones de frontera libre, el trazador se llama trazador natural y su forma se aproxima a la forma que tomaría una varilla larga flexible si se forzara a pasar por cada uno de los puntos de los datos $((x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n)))$.

En general las condiciones de frontera sujeta nos llevarán a aproximaciones más exactas ya que incluyen más información acerca de la función; sin embargo, para que este tipo de condición a la frontera se implemente, es necesario tener, ya sea los valores de la derivada en los extremos, o una aproximación precisa de estos valores.

TEOREMA 1.1. *Si f es una función definida en $[a, b]$, entonces f tiene un único interpolante de trazador natural, o sea un único interpolante de trazador que satisface las condiciones de frontera libre $S''(a) = S''(b) = 0$*

TEOREMA 1.2. *Si f es una función definida en $[a, b]$, f tiene un único interpolante de trazador que satisface las condiciones de frontera sujeta $S'(a) = f'(a)$ y $S'(b) = f'(b)$.*

2. Cuadratura Gaussiana

Las fórmulas de Newton-Cotes presentadas anteriormente se derivaron integrando los polinomios interpolantes de Lagrange. Como el término de error en el polinomio interpolante de grado n involucra la derivada $(n+1)$ de la función que se está aproximando, hay notar previamente el hecho que la fórmula es exacta cuando se aproxima cualquier polinomio de grado menor o igual a n . Consecuentemente, las fórmulas de Newton-Cotes tienen un grado de precisión de, al menos, n . En realidad, el grado de precisión de las formulas impares es exactamente n , mientras que las fórmulas pares tienen un grado de precisión $(n+1)$.

Todas las fórmulas de Newton-Cotes requieren que se conozcan los valores de la función cuya integral se va a aproximar en puntos uniformemente espaciados, que puede ser la situación esperada si se usan datos tabulados de la función. Sin embargo si la función está dada explícitamente, los puntos pueden escogerse de otra manera que nos lleve a una mayor precisión de la aproximación.

La cuadratura gaussiana se preocupa en escoger los puntos de evaluación de una manera óptima. Esta presenta un procedimiento para escoger los valores x_1, x_2, \dots, x_n en el intervalo $[a, b]$ y las constantes c_1, c_2, \dots, c_n , que se espera minimicen el error obtenido al realizar la aproximación

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i).$$

para una función arbitraria f . Para medir esta precisión, se supone generalmente que la mejor elección de estos valores será la que maximice el grado de precisión de la fórmula.

Como los valores de c_1, c_2, \dots, c_n son arbitrarios y los de x_1, x_2, \dots, x_n están restringidos sólo en el sentido de que la función, cuya integral se está aproximando, debe estar definida en estos puntos, hay $2n$ parámetros involucrados: n datos por las constantes c_1, c_2, \dots, c_n y n datos por x_1, x_2, \dots, x_n .

Si los coeficientes de un polinomio se consideran también como parámetros, la clase de polinomios de grado a los más $(2n - 1)$ contienen $2n$ parámetros y es la clase de polinomios más grande de polinomios para la cual es razonable esperar que la ecuación (1) sea exacta. De hecho, para la elección apropiada de los valores y de las constantes se puede obtener exactitud en este conjunto. Esto implica que la ecuación (1) puede ser diseñada para tener un grado de precisión de $(2n - 1)$.

Antes de entrar en detalles con la cuadratura Gaussiana es necesario discutir algo del material de conjuntos de funciones ortogonales. Se dice que el conjunto de funciones $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ es ortogonal en $[a, b]$ con respecto a la función de peso $w(x) \geq 0$, ($w(x) \neq 0$), siempre y cuando

$$\int_a^b \phi_k(x) \phi_j(x) w(x) dx,$$

es cero cuando $j \neq k$ y positiva cuando $j = k$.

A continuación se presenta un teorema que es útil para el estudio de polinomios ortogonales.

TEOREMA 2.1. *Si $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ es un conjunto de polinomios ortogonales definidos en $[a, b]$ con respecto a una función de peso continua w y ϕ_k es un polinomio de grado k para cada $k = 0, 1, \dots, n$, entonces ϕ_k tiene k raíces distintas y estas se encuentran en el intervalo (a, b) .*

Demostración. Como ϕ_0 es un polinomio de grado cero, existe una constante $C \neq 0$ tal que $\phi_0(x) = C$. Esto implica que para $k \geq 1$

$$0 = \int_a^b \phi_k(x) \phi_0(x) w(x) dx = C \int_a^b \phi_k(x) w(x) dx.$$

Como w es una función de peso, $w(x) \geq 0$, pero $w(x) \neq 0$. Por lo tanto ϕ_k debe cambiar de signo al menos una vez en (a, b) .

Supongamos que ϕ_k cambia de signo precisamente j veces en (a, b) , en los puntos $\{r_i\}_{i=1}^j$, donde $a < r_1 < r_2 < \dots < r_j < b$ y que $j < k$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\phi_k(x) > 0$ en (a, r_1) . Consecuentemente, $\phi_k(x) < 0$ en (r_1, r_2) , $\phi_k(x) > 0$ en (r_2, r_3) , y en general ϕ_k es de signo opuesto en cada uno de los intervalos adyacentes $(a, r_1), (r_1, r_2), \dots, (r_j, b)$.

Definamos el polinomio de grado j , P , como

$$P(x) = (-1)^j \prod_{i=1}^j (x - r_i).$$

Nótese que el signo de P coincide con el de ϕ_k en cada uno de los subintervalos $(a, r_1), (r_1, r_2), \dots, (r_j, b)$ y consecuentemente, $P(x)\phi_k(x) > 0$ en cada uno de estos subintervalos. Como $w(x) \geq 0$ en (a, b) pero $w(x) \neq 0$, esto implica que

$$(2) \quad \int_a^b P(x)\phi_k(x)w(x)dx > 0.$$

Sin embargo, P es un polinomio de grado $j < k$, así que

$$P(x) = \sum_{i=0}^j \alpha_i \phi_i(x)$$

para alguna colección de constantes $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_j$, lo cual implica que

$$\int_a^b P(x)\phi_k(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^j \alpha_i \int_a^b \phi_i(x)\phi_k(x)w(x)dx$$

en contradicción con la desigualdad (2).

La única suposición hecha en este procedimiento fue que ϕ_k cambia de signo j veces en (a, b) , donde $j < k$; así que esta afirmación debe ser errónea. Esto implica que ϕ_k cambia de signo al menos k veces en (a, b) . El teorema del valor intermedio implica que existe una raíz en cada cambio de signo; así que ϕ_k debe tener k raíces distintas en (a, b) .

Ahora se hablará un poco más del grado de precisión de las fórmulas de cuadratura gaussiana y los polinomios ortogonales [6].

Se dice que la fórmula de cuadratura tiene grado de precisión d si es exacta para todo polinomio de grado menor o igual que d . Como hemos visto, una fórmula de tipo interpolatorio con n nodos posee al menos grado de precisión $n - 1$.

Puede probarse mediante la teoría de polinomios ortogonales (para ver una demostración ver [5]) que no puede construirse una fórmula del tipo interpolatorio con n nodos y grado de precisión $2n$. En consecuencia, el grado de precisión óptimo usando n nodos es de $2n - 1$. Las fórmulas de cuadratura gaussianas son las que alcanzan dicho grado de precisión óptimo.

La teoría de las fórmulas de cuadratura gaussianas se basa en la teoría de polinomios ortogonales, que se resumirán un poco en aspectos básicos, a continuación.

Una sucesión de polinomios $\{p_j\}_{j=0}^{\infty}$, con $p_n(x)$ de grado n , se llamará sucesión de polinomios ortogonales respecto al producto escalar

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x)dw(x),$$

(dicho de otra forma, respecto a la medida $dw(x)$) si se verifica

$$(p_j, p_k) = 0, \quad j \neq k.$$

Dada una sucesión de polinomios ortogonales respecto a una cierta medida, cada $p_n(x)$ está unívocamente determinado salvo multiplicidades no nulas. Por lo tanto una manera sencilla y general de establecer una única sucesión de polinomios ortogonales para cada medida es especificar que todos ellos sean mónicos.

Dada una medida dw tal que existe y es finito

$$u_k = \int_a^b x^k dw(x).$$

(el momento de orden k) para todo k , una condición suficiente para la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales respecto a dicha medida es que la integral

$$\int_a^b q(x)dw(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

sea positiva para todo polinomio $q(x)$ no idénticamente nulo y no negativo para todo x del intervalo (a, b) .

El siguiente teorema establece una propiedad clave de los polinomios ortogonales de cara a la construcción de una fórmula de cuadratura, cual es el hecho de que las n raíces

(en principio complejas) del polinomio ortogonal de grado n son reales y distintas.

TEOREMA 2.2. *Sea $p_n(x)$ el polinomio ortogonal (mónico) de grado n . Entonces, las n raíces de $p_n(x)$ son reales, simples y pertenecientes al intervalo abierto (a, b) .*

Otro aspecto fundamental de la teoría de polinomios ortogonales es la existencia de relaciones de recurrencia, que son cruciales para el cálculo efectivo de los polinomios ortogonales y de las fórmulas de cuadratura gaussianas. A continuación se presentan tres teoremas los cuales no se demuestran. para una demostración se puede consultar [5], estos resumen la teoría básica acerca de las fórmulas de cuadratura gaussianas.

TEOREMA 2.3. *Sean x_1, \dots, x_n las raíces del polinomio ortogonal $p_n(x)$ (de grado n) para la medida $d(w)$ en (a, b) . Supongamos que se hallan los pesos w_1, \dots, w_n , imponiendo la exactitud para los polinomios de grado menor o igual que $n-1$, es decir que se construye la fórmula de tipo interpolatorio*

$$\int_a^b f(x)dw(x) \approx w_1f(x_1) + \dots + w_nf(x_n).$$

entonces dicha fórmula tiene grado de precisión $2n - 1$.

El segundo resultado afirma que no es posible hallar por otro procedimiento otra fórmula de tipo interpolatorio con grado de precisión $2n - 1$:

TEOREMA 2.4. *Si una fórmula*

$$\int_a^b f(x)dw(x) \approx w_{*1}f(x_{*1}) + \dots + w_{*n}f(x_{*n})$$

El último resultado afirma la positividad de los pesos.

TEOREMA 2.5. *En una fórmula de cuadratura gaussiana, todos los pesos w_i son positivos.*

3. Cuadratura Gaussiana y Problema de Valores Propios

Uno de los elementos fundamentales de la teoría de polinomios ortogonales es que pueden calcularse mediante una relación de recurrencia, tal como describimos a continuación.

Sea $\{p_j\}_{j=0}^{\infty}$ una sucesión de polinomios mónicos ortogonales respecto al producto escalar,

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dw(x),$$

es decir tales que

$$(p_j, p_k) = 0, \quad j \neq k.$$

Entonces, los polinomios p_j verifican la siguiente relación de recurrencia:

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - a_0,$$

$$p_{k+1}(x) = (x - a)p_k(x) - b_k p_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

con coeficientes

$$a_k = \frac{(p_k, x p_k)}{p_k, p_k}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$b_k = \frac{(p_k, p_k)}{p_{k-1}, p_{k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Notemos que los coeficientes b_k son todos positivos y que por lo tanto podemos tomar la raíz cuadrada positiva $\sqrt{b_k}$ de cada uno de ellos.

Se suele definir también

$$b_0 = \int_a^b dw(x).$$

es decir, la medida del intervalo (a, b) .

Observemos que, partiendo de $p_0(x) = 1$, podemos combinar la relación de recurrencia con la expresión de los a_k y b_k para construir tantos coeficientes a_k y b_k (y tantos polinomios $p_k(x)$) como deseemos.

No obstante, el procedimiento de Stieltjes puede ser llevado a la práctica en muchos casos si se hace uso de un sistema de cálculo simbólico para evaluar los coeficientes de manera exacta o con precisión finita pero con un número de cifras significativas suficientemente elevado para contrarrestar la posible inestabilidad numérica.

Partiendo solamente del conocimiento de los coeficientes a_k y b_k , el cálculo efectivo de los nodos x_i y los pesos w_i de la correspondiente fórmula de cuadratura gaussiana puede reducirse a un problema de valores y vectores propios para una matriz tridiagonal simétrica. Este resultado y el algoritmo correspondiente se debe a Golub y Welsh [9].

Pese a que dicho algoritmo se remonta (en su versión publicada) a 1969, casi tres décadas después en [10] que es el algoritmo definitivo para el cálculo de las fórmulas de cuadratura gaussianas.

El resultado es el siguiente:

TEOREMA 3.1. *Sea*

$$M_n = \begin{pmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & \dots & \dots & 0 \\ \sqrt{b_1} & a_1 & \sqrt{b_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{b_{n-2}} & a_{n-2} & \sqrt{b_{n-1}} \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{b_{n-1}} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

la matriz de Jacobi (de orden n , tridiagonal y simétrica) construida a partir de los coeficientes a_k y b_k de la relación de recurrencia para los polinomios mónicos ortogonales respecto al producto escalar

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dw(x).$$

Entonces, los nodos x_i de la correspondiente fórmula de cuadratura gaussiana con n puntos son los valores propios de M_n , y los pesos w_i vienen dados por

$$w_i = b_0 v_{i1}^2, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde v_{i1} es la primera componente del vector v_i , el vector propio de norma euclidiana igual a 1 asociado al valor propio x_i , y

$$b_0 = \int_a^b dw(x).$$

La afirmación del teorema anterior respecto a los nodos no es sorprendente: siendo M_n una matriz tridiagonal simétrica, si denotamos por M_k ($1 \leq k \leq n$) la submatriz de M_n formada tomando sus primeras k filas y columnas. entonces se tiene que los polinomios característicos q_1, \dots, q_n de esas n matrices (definidos como $q_k = \det(xI - M_k)$ para que todos ellos tengan coeficiente director igual a 1) verifican ($q_0(x) = 1$) la misma relación de recurrencia que los polinomios ortogonales mónicos p_1, \dots, p_n . En particular, $p_n = q_n$ y así las raíces del polinomio ortogonal p_n son las raíces de q_n , es decir los valores propios de M_n .

Naturalmente, es también conocido que cualquier polinomio mónico es el polinomio característico (si definimos el polinomio característico de A como $\det(xI - A)$) de una cierta matriz: la llamamos matriz compañera del polinomio. Lo realmente notable en el caso de los polinomios ortogonales es que son polinomios característicos de matrices tridiagonales simétricas.

Mucho menos evidente es la afirmación del teorema acerca de los pesos w_k . Golub y Welsh se basan en resultados que aparecen en [11], haciendo referencia en particular a la

identidad de Christoffel-Darboux.

Merece la pena exponer la demostración de esta parte, ya que en el artículo debido a Golub y Welsh [9] no parten de la relación de recurrencia para los polinomios ortogonales mónicos.

Observemos en primer lugar que las relaciones de recurrencia para los polinomios mónicos

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - a_0,$$

$$p_{k+1}(x) = (x - a) p_k(x) - b_k p_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

pueden escribirse como

$$\begin{aligned} x p_0(x) &= a_0 p_0(x) + p_1(x), \\ x p_k(x) &= b_k p_{k-1}(x) + a_k p_k(x) + p_{k+1}(x). \end{aligned}$$

A su vez, las relaciones anteriores pueden expresarse en forma matricial como sigue:

$$x \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \\ p_{n-2}(x) \\ p_{n-1}(x) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \\ p_{n-2}(x) \\ p_{n-1}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p_n(x) \end{pmatrix}$$

donde

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ b_1 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{b_{n-2}} & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

es una matriz tridiagonal.

Ahora bien, si x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) son las n raíces del $p_n(x)$ se tiene

$$x_i P_i = T P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde

$$P_i = (p_0(x_i), \dots, p_{n-1}(x_i))^T.$$

Es decir x_1, \dots, x_n son los valores propios de la matriz T y P_1, \dots, P_n son los correspondientes vectores propios.

Sin embargo, la matriz T no es simétrica. Para obtener una matriz simétrica, consideremos la matriz diagonal D de orden n con elementos en la diagonal d_0, d_1, \dots, d_{n-1} , siendo $d_k = 1/\sqrt{\gamma_k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$), donde

$$\gamma_k = \int_a^b (p_k(x))^2 dw(x).$$

Observamos que, a partir de la definición de los coeficientes b_k de la relación de recurrencia, se tiene

$$b_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}},$$

es decir

$$\sqrt{b_k} = \frac{\sqrt{\gamma_k}}{\sqrt{\gamma_{k-1}}}.$$

De este modo se tiene, para $k = 1, 2, \dots, n-1$,

$$\frac{d_{k-1}}{d_k} = \sqrt{b_k}, \quad \frac{d_k}{d_{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{b_k}},$$

y por lo tanto

$$DTD^{-1} = M_n,$$

donde M_n es la matriz de Jacobi de orden n del enunciado.

Ahora, M_n es una matriz semejante a T y por lo tanto tiene los mismos valores propios que T : los ceros del polinomio ortogonal $p_n(x)$.

Por otro lado, es fácil ver que si P_i es un vector propio de T asociado al valor propio de x_i , entonces DP_i es un vector propio de $M_n = DTD^{-1}$ asociado al mismo valor propio. En consecuencia, para $i = 1, \dots, n$,

$$Q_i = DP_i = \left(\frac{p_0(x_i)}{\sqrt{\gamma_0}}, \dots, \frac{p_{n-1}(x_i)}{\sqrt{\gamma_{n-1}}} \right)^T$$

es un vector propio de M_n correspondiente al valor propio x_i .

Haciendo uso de la relación siguiente la cual es consecuencia de la fórmula confluyente de identidad de Christoffel-Darboux

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(p_k(x_i))^2}{\gamma_k} = \frac{1}{w_i},$$

se tiene la norma euclídea de Q_i la cual es $1/\sqrt{w_i}$. Es decir si v_i es el vector propio de M_n correspondiente a x_i con norma euclídea igual a 1, se tendrá

$$v_i = \sqrt{w_i}Q_i,$$

Finalmente, de esta relación se deduce fácilmente (teniendo en cuenta que $p_0(x_i) = 1$ para $i = 1, \dots, n$, y que hemos definido $b_0 = \gamma_0$) que

$$w_i = b_0 v_{i1}^2,$$

donde v_{i1} es la primera componente del vector v_i , y

$$b_0 = \int_a^b dw(x).$$

Es importante observar el papel y el valor de b_0 en el enunciado del teorema, ya que es ocasiones se cita el resultado como de modo evidentemente incorrecto. Lo que explica este aparente error es que páginas atrás se ha propuesto (o simplemente se supone sin afirmar expresamente) $b_0 = 1$, y no vuelve a recordarse este hecho a la hora de enunciar el resultado.

CAPÍTULO 3

PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS DE LAGUERRE

1. Propiedades Elementales de los Polinomios de Laguerre

Los polinomios de Laguerre $L_n^\alpha(x)$, son una clase de polinomios que se encuentran en las aplicaciones, especialmente en la física matemática, y se definen mediante la siguiente fórmula [4]

$$(3) \quad L_n^\alpha(x) = e^x \frac{x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}), \quad n=0,1,2,\dots$$

para un valor arbitrario real $\alpha > -1$. De acuerdo a la ecuación (3), algunos de los primeros polinomios de Laguerre son

$$\begin{aligned} L_0^\alpha(x) &= 1, \\ L_1^\alpha(x) &= 1 + \alpha - x, \\ L_2^\alpha(x) &= \frac{1}{2}[(1 + \alpha)(2 + \alpha) - 2(2 + \alpha)x + x^2], \dots, \end{aligned}$$

y en general usando la fórmula de Leibniz's, tenemos

$$(4) \quad L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(k + \alpha + 1)} \frac{(-x)^k}{k!(n - k)!},$$

donde para todo $k < n$ el cociente de funciones gamma puede ser reemplazado por el producto siguiente

$$(n + \alpha)(n + \alpha - 1) \dots (n + \alpha - (n - k - 1)).$$

Más adelante se demostrará que los polinomios de Laguerre $L_n^\alpha(x)$ son ortogonales con una función de peso $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ sobre el intervalo $0 \leq x < \infty$. El polinomio $L_n^0(x) = L_n(x)$ de la clase más simple de los polinomios de Laguerre.

Otra importante clase consiste en los polinomios $L_n^{1/2}(x)$, los cuales están relacionados con los polinomios de Hermite.

Como punto de partida para la teoría de los polinomios de Laguerre, comenzaremos con la siguiente expansión

$$(5) \quad w(x, t) = (1 - t)^{-\alpha-1} e^{-xt/(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n, \quad |t| < 1$$

de la función generadora $w(x, t)$. Para probar (5), debemos de notar que el lado izquierdo, visto como una función de variable compleja t , es analítica en el disco $|t| < 1$, por lo tanto debe tener una expansión de la forma

$$w(x, t) = (1 - t)^{-\alpha-1} e^{-xt/(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^\alpha(x) t^n, \quad |t| < 1.$$

De acuerdo a un teorema familiar de la teoría de la variable compleja, los coeficientes $c_n^\alpha(x)$ pueden ser escritos como integrales de contorno

$$(6) \quad c_n^\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (1 - t)^{-\alpha-1} e^{-xt/(1-t)} t^{-n-1} dt,$$

evaluada a lo largo de cualquier contorno cerrado C al rededor de el punto $t = 0$, y dentro del disco $|t| < 1$. Eligiendo un contorno lo suficientemente pequeño de tamaño e introduciendo la nueva variable de integración $u = x/(1 - t)$, encontramos que

$$(7) \quad c_n^\alpha(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{2\pi i} \int_{C'} \frac{e^{-u} u^{n+\alpha}}{(u - x)^{n+1}} du,$$

donde C' es un contorno cerrado pequeño al rededor del punto $u = x$. Evaluando está integral por el teorema de los residuos, obtenemos

$$(8) \quad c_n^\alpha(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \left[\frac{d^n}{du^n} e^{-u} u^{n+\alpha} \right]_{u=x} \equiv L_n^\alpha(x),$$

de tal modo se verifica (5).

Existe otra expansión muy relacionada a (5), i.e.,

$$(9) \quad W(x, y, t) = (1 - t)^{-1} e^{-(x+y)t/(1-t)} (xyt)^{-\alpha/2} I_\alpha \left[\frac{2(xyt)^{1/2}}{1 - t} \right] \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y)}{\Gamma(n + \alpha + 1)} t^n, \quad |t| < 1, \quad \alpha > -1,$$

donde $I_\alpha(z)$ es la función modificada de Bessel de primer orden. Aquí la función $W(x, y, t)$ puede ser vista como una función generadora de productos de polinomios de Laguerre. El siguiente es un caso especial de (9), obtenido por la sustitución de $y = x$, esto es importante en las aplicaciones:

$$(10) \quad W(x, x, t) = (1 - t)^{-1} e^{-2xt/(1-t)} x^{-\alpha} t^{-\alpha/2} I_\alpha \left(\frac{2xt^{1/2}}{1 - t} \right) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! [L_n^\alpha]^2}{\Gamma(n + \alpha + 1)} t^n, \quad |t| < 1, \quad \alpha > -1$$

2. Relaciones de Recurrencia y Ecuaciones Diferenciales

Sustituyendo (5) en la siguiente identidad

$$(1-t)^2 \frac{\partial w}{\partial t} + [x - (1-t)(1+\alpha)]w = 0,$$

encontramos que

$$(1-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} n L_n^\alpha(x) t^{n-1} + [x - (1-t)(1+\alpha)] \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n = 0$$

la cual da la siguiente e importante ecuación

$$(11) \quad (n+1)L_{n+1}^\alpha(x) + (x - \alpha - 2n - 1)L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0,$$

con $n = 1, 2, \dots$

cuando el coeficiente de t^n es fijado en cero. Similarmente, reemplazando (5), en la siguiente identidad

$$(1-t) \frac{\partial w}{\partial x} + tw = 0,$$

obtenemos lo siguiente

$$(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} + \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^{n-1} = 0,$$

la cual implica que

$$(12) \quad \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} - \frac{dL_{n-1}^\alpha(x)}{dx} + L_{n-1}^\alpha(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Eliminando el termino $L_{n-1}^\alpha(x)$ de las ecuaciones (11) y (12) se obtiene la siguiente ecuación

$$(13) \quad (x - n - 1) \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} + (n+1) \frac{dL_{n+1}^\alpha(x)}{dx} + (2n+2+\alpha-x) L_n^\alpha(x) - (n-1)L_{n+1}^\alpha(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Finalmente reemplazando n por $n-$ en (13) y usando la ecuación (12) para eliminar $(d/dx)L_{n-1}^\alpha$, obtenemos

$$(14) \quad x \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} = nL_n^\alpha - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

La fórmula (14) nos permite expandir la derivada de un polinomio de Laguerre en términos de otro polinomio de Laguerre.

Otro tipo de relaciones de recurrencia, que involucren a los polinomios de Laguerre con diferentes exponentes pueden ser obtenidas con la función generadora como una función

del parámetro α , y con las ecuaciones $w(x, t, \alpha)$ y $w(x, t, \alpha + 1)$. Así, sustituyendo (5) en la identidad

$$(1-t)w(x, t, \alpha + 1) = w(x, t, \alpha),$$

y comparando los coeficientes de los exponentes de t en ambos lados de la ecuación resultante, se obtiene

$$(15) \quad L_n^\alpha(x) - L_{n-1}^{\alpha+1}(x) = L_n^\alpha, \quad n = 1, 2, \dots$$

Similarmente, sustituyendo (5) en la identidad

$$\frac{\partial w(x, t, \alpha)}{\partial x} = -tw(x, t, \alpha + 1),$$

entonces obtenemos otra fórmula de este tipo:

$$(16) \quad \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Utilizando las relaciones de recurrencia (12), (14), podemos derivar una ecuación diferencial satisfecha por los polinomios de Laguerre. De hecho, diferenciando (14) con respecto a x y utilizando (12), (14) para eliminar $(d/dx)L_{n-1}^\alpha(x)$ y $L_{n-1}^\alpha(x)$, entonces encontramos que

$$(17) \quad x \frac{d^2 L_n^\alpha(x)}{dx^2} + (\alpha + 1 - x) \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} + nL_n^\alpha(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Se sigue de (17) que si $u = L_n^\alpha(x)$ es una solución particular de la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$(18) \quad xu'' + (\alpha + 1 - x)u' + nu = 0.$$

La ecuación (18) es encontrada en la física matemática y juega un importante rol en la teoría de los polinomios de Laguerre. Haciendo cambios de variable, podemos derivar fácilmente otra ecuación diferencial cuyas integrales pueden ser expresadas en términos de los polinomios de Laguerre. Por ejemplo es fácil de ver que las ecuaciones diferenciales

$$(19) \quad xu'' + (\alpha + 1 - 2\nu)u' + \left[n + \frac{\alpha + 1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{\nu(\nu - \alpha)}{x} \right] u = 0$$

y

$$(20) \quad u'' + \left[4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{1/4 - \alpha^2}{x^2} \right] u = 0$$

tiene las soluciones particulares siguientes

$$u = e^{-x/2} x^\nu L_n^\alpha(x)$$

y

$$u = e^{-x^2/2} x^{\alpha+1/2} L_n^\alpha(x),$$

respectivamente.

3. Representación Integral de los Polinomios de Laguerre.

Los polinomios de Laguerre tienen representación simple en términos de integrales definidas que contienen a la variable x como parámetro. Para obtener esta representación, suponemos que x es un número real positivo. Entonces

$$(21) \quad e^{-x} x^{n+\alpha} = \int_0^\infty (\sqrt{xt})^{n+\alpha} J_{n-\alpha}(2\sqrt{xt}) e^{-t} dt,$$

donde $J_\nu(x)$ es la función de Bessel de orden ν . Diferenciando (21) con respecto de x y tomando en cuenta la identidad

$$\frac{d}{du} u^{\nu/2} J_\nu(2\sqrt{u}) = u^{(\nu-1)/2} J_{\nu-1}(2\sqrt{u}),$$

se obtiene fijando $z = 2\sqrt{u}$ en la ecuación $J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = (2\nu/z)J_\nu(z)$, encontramos que

$$(22) \quad \frac{d^m}{dx^m} (e^{-x} x^{m+\alpha}) = \int_0^\infty (\sqrt{xt})^{n-m+\alpha} J_{n-m+\alpha}(2\sqrt{xt}) e^{-t} t^m dt, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Fijando $m = n$ en (22) y tomando cuenta de (3), obtenemos la representación integral deseada de los polinomios de Laguerre:

$$(23) \quad L_n^\alpha(x) = \frac{e^x x^{-\alpha/2}}{n!} \int_0^\infty t^{n-1/2\alpha} J_\alpha(2\sqrt{xt}) e^{-t} dt, \quad \alpha > 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Aunque esta fórmula ha sido derivada bajo la suposición que x es un número real positivo, puede ser extendido fácilmente para un valor complejo arbitrario de x , usando el principio de continuación analítica.

Ahora fijando $\alpha = \pm 1/2$ en (23) y utilizando las siguientes formulas de la teoría de funciones de Bessel

$$\begin{aligned} J_{1/2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+1/2}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+3/2)} = \left(\frac{2z}{\pi}\right)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} \\ &= \left(\frac{2}{\pi z}\right) \sin z, \end{aligned}$$

y

similarmente

$$J_{-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos z.$$

Entonces obtendremos

$$(24) \quad \begin{aligned} L_n^{-1/2}(x) &= \frac{e^x}{n! \sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1/2} \cos(2\sqrt{xt}) dt \\ &= \frac{e^x}{n! \sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2n} \cos(2u\sqrt{x}) du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_n^{1/2}(x) &= \frac{e^x}{n! \sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-t} t^n \sin(2\sqrt{xt}) dt \\ &= \frac{e^x}{n! \sqrt{x}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2n-1} \sin(2u\sqrt{x}) du, \end{aligned}$$

Las cuales tomadas en cuenta con las siguientes relaciones de los polinomios de Hermite

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1} (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n} \cos(2xt) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

similarmente, para los índices impares tenemos

$$H_{2n-1}(x) = \frac{2^{2n+2} (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n+1} \sin(2xt) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Teniendo las relaciones anteriores y lo dicho antes, implica que

$$(25) \quad \begin{aligned} L_n^{-1/2}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(\sqrt{x}), \\ L_n^{1/2}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} n!} \frac{H_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

Estas fórmulas establecen una relación entre dos clases de polinomios ortogonales, y nos permiten observar la teoría de los polinomios de Hermite como una rama especial de la teoría de los polinomios de Laguerre.

4. Una Ecuación integral Satisfecha por los Polinomios de Laguerre

Los polinomios de Laguerre satisfacen una simple ecuación integral con un kernel simétrico. Para obtener esta ecuación, reemplazamos x por y en la expansión

$$(26) \quad (1-t)^{-\alpha-1} e^{-xt/(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n, \quad |t| < 1, \quad \alpha > -1$$

multiplicando el resultado por

$$e^{-y/2} y^{\alpha/2} J_\alpha(\sqrt{xy}),$$

donde $J_\alpha(z)$ es la función de Bessel de orden α , y entonces integrarlo de 0 a ∞ . Esto da

$$(27) \quad (1-t)^{-\alpha-1} \int_0^\infty e^{-y(1+t)/2(1-t)} y^{\alpha/2} J_\alpha(\sqrt{xy}) dy \\ = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_0^\infty e^{-y/2} y^{\alpha/2} J_\alpha(\sqrt{xy}) L_n^\alpha(y) dy$$

proporcionando que el proceso de **integración término por término** sea permisible. Para probar la legitimidad de este proceso, se supone que $|t| < 1/3$. Entonces, usando las **desigualdades** siguientes

$$|L_n^\alpha| \leq L_n^\alpha(-x), \quad |J_\alpha(x)| \leq I_\alpha(x), \quad x \geq 0, \quad \alpha > -1$$

donde $I_\alpha(x)$ es la función modificada de Bessel de primer orden, entonces tenemos

$$\int_0^\infty |J_\alpha(\sqrt{xy})| e^{-y/2} y^{\alpha/2} \sum_{n=0}^{\infty} |t|^n |L_n^\alpha(y)| dy \\ \leq \int_0^\infty I_\alpha(\sqrt{xy}) e^{-y/2} y^{\alpha/2} \sum_{n=0}^{\infty} |t|^n |L_n^\alpha(-y)| dy \\ = (1-|t|)^{-\alpha-1} \int_0^\infty I_\alpha(\sqrt{xy}) y^{\alpha/2} e^{-y(1-3|t|)/2(1-|t|)} dy,$$

en la anterior fórmula se ha utilizado la evaluación de la suma (26) una vez más. Para $|t| < 1/3$, $\alpha > -1$ la última integral de la derecha converge, como puede verificarse considerando el comportamiento de la función asintótica de $I_\alpha(x)$ para una x grande y una pequeña. Por lo tanto el lado derecho de (27) es **absolutamente** convergente, lo cual garantiza que se puede invertir el orden de la suma y de la integración.

Ahora haciendo el cambio de variable $\sqrt{y} = u$, en el lado derecho de la ecuación (27) y usando la fórmula

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx = \frac{b^{\nu}}{(2a^2)^{\nu+1}} e^{-b^2/4a^2}, \quad a, b > 0, \operatorname{Re} \nu > -1$$

Esto da lo siguiente

$$\begin{aligned} (1-t)^{-\alpha-1} \int_0^{\infty} e^{-y(1-t)/2(1-t)} y^{\alpha/2} J_{\alpha}(\sqrt{xy}) dy \\ = 2(1+t)^{-\alpha-1} x^{\alpha/2} e^{-x(1-t)/2(1+t)} = 2x^{\alpha/2} e^{-x/2} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) (-t)^n, \end{aligned}$$

para todo $|t| < 1$. Así, para todo $|t| < 1/3$, tenemos la identidad

$$2e^{-x/2} x^{\alpha/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n^{\alpha}(x) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-y/2} y^{\alpha/2} J_{\alpha}(\sqrt{xy}) L_n^{\alpha}(y) dy$$

y entonces, comparando los coeficientes de la potencia de t , obtenemos la ecuación integral deseada

$$(28) \quad e^{-x/2} x^{\alpha/2} L_n^{\alpha}(x) = \frac{(-1)^n}{2} \int_0^{\infty} J_{\alpha}(\sqrt{xy}) e^{-y/2} y^{\alpha/2} L_n^{\alpha}(y) dy$$

para $\alpha > -1$, $n = 0, 1, 2, \dots$

5. Ortogonalidad de los Polinomios de Laguerre

Ahora probaremos una de las propiedades más importante de los polinomios de Laguerre, es decir, su ortogonalidad con la función de peso $e^{-x} x^{\alpha}$ en el intervalo $0 \leq x < \infty$. Dando la función

$$u_n(x) = e^{-x/2} x^{\alpha/2} L_n^{\alpha}(x)$$

y retomando la ecuación (19), observemos que $u_n(x)$ y $u_m(x)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$(xu_n')' + \left(n + \frac{\alpha+1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{\alpha^2}{4x} \right) u_n = 0,$$

$$(xu_m')' + \left(m + \frac{\alpha+1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{\alpha^2}{4x} \right) u_m = 0.$$

Al restar la segunda ecuación y multiplicarla por u_n a la primera ecuación multiplicada por u_m , e integrando de 0 a ∞ , obtenemos lo siguiente

$$x(u'_n u_m - u'_m u_n) \Big|_0^\infty + (n - m) \int_0^\infty u_m u_n dx = 0.$$

Para $\alpha > -1$ el primer término desaparece en ambos límites, y así tenemos

$$\int_0^\infty u_m(x) u_n(x) dx = 0 \quad \text{if } m \neq n$$

o

$$(29) \quad \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_m^\alpha(x) L_n^\alpha(x) dx = 0 \quad \text{if } m \neq n, \alpha > -1$$

El valor de la integral (??) para $m = n$ puede ser encontrado como sigue: Reemplazando el valor del índice n por $n - 1$ en la relación de recurrencia (11) y multiplicando el resultado por $L_n^\alpha(x)$, obteniendo

$$\begin{aligned} n[L_n^\alpha(x)]^2 &= (n + \alpha)[L_{n-1}^\alpha(x)]^2 - (n - 1)L_{n-1}^\alpha(x)L_{n-1}^\alpha(x) \\ &+ 2L_n^\alpha(x)L_{n-1}^\alpha(x) + (n + \alpha - 1)L_n^\alpha(x)L_{n-2}^\alpha(x) = 0, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación anterior por $e^{-x} x^\alpha$, integrando de 0 hasta ∞ , y utilizando la propiedad de ortogonalidad (29), encontramos que

$$n \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha [L_n^\alpha(x)]^2 dx = (n + \alpha) \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha [L_{n-1}^\alpha(x)]^2 dx, \quad n = 2, 3, \dots$$

Aplicando la fórmula en repetidas ocasiones da lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha [L_n^\alpha(x)]^2 dx &= \frac{(n + \alpha)(n + \alpha - 1) \dots (\alpha + 2)}{n(n - 1) \dots 3 \cdot 2} \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha [L_n^\alpha(x)]^2 dx \\ &= \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Se sigue por sustitución directa que esta fórmula es válida también para $n = 0, 1, 2, \dots$ y así tenemos que

$$(30) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} [L_n^{\alpha}(x)]^2 dx = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

para un sistema ortonormal en el intervalo $0 \leq x < \infty$.

Las fórmulas (29), (30) juegan un papel importante en el problema de expansión de funciones de los polinomios de Laguerre.

6. Representación asintótica de los polinomios de Laguerre de grado n

Así como los otros polinomios ortogonales, los polinomios de Laguerre tienen una representación asintótica simple la cual describe su comportamiento para valores grandes de el grado n . Para obtener esta representación, escribimos

$$(31) \quad u = e^{-x/2} L_n^{\alpha}(x),$$

tome en cuenta de que u es la solución de la ecuación diferencial

$$(32) \quad xu'' + (\alpha + 1)u' + \left(n + \frac{\alpha + 1}{2}\right)u = \frac{xu}{4}$$

la cual es analítica en una región al rededor del punto $x = 0$ y satisface la condición inicial

$$(33) \quad u(0) = L_n^{\alpha}(0) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)}.$$

El resto del argumento depende de si α es positivo o negativo, pero dado que esta diferencia no es natural, vamos a considerar solo el caso en que $\alpha \geq 0$.

Así de esta manera el lado derecho de la ecuación (32) es una función conocida, entonces encontramos que

$$(34) \quad u(x) = A_1 u_1(x) + A_2 u_2(x) + \frac{\pi}{4N} \int_0^{\infty} (Ny)^{\alpha+1} u(y) [u_1(y)u_2(x) - u_1(x)u_2(y)] dy,$$

donde

$$u_1(x) = (\sqrt{Nx})^{-\alpha} J_{\alpha}(2\sqrt{Nx}), \quad u_2(x) = (\sqrt{Nx})^{-\alpha} Y_{\alpha}(2\sqrt{Nx}),$$

$$N = n + \frac{\alpha + 1}{2},$$

y $J_{\alpha}(x)$, $Y_{\alpha}(x)$ son las funciones de Bessel de primer y segundo tipo, respectivamente.

Tomando en cuenta el comportamiento asintótico de las funciones de Bessel presentadas a continuación

$$(35) \quad J_\nu \approx \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(1 + \nu)}, \quad x \rightarrow 0,$$

$$J_\nu \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - 1/2\nu\pi - 1/4\pi), \quad x \rightarrow \infty.$$

Por otra parte tenemos

$$(36) \quad Y_\nu(x) \approx -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\pi x^\nu}, \quad x \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow 0,$$

$$Y_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - 1/2\nu\pi - 1/4\pi), \quad x \rightarrow \infty,$$

$$Y_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \log \frac{2}{x}, \quad x \rightarrow 0,$$

la cual muestra que, en particular, $Y_\nu(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0$.

Entonces por las ecuaciones anteriores encontramos que cuando $x \rightarrow 0$,

$$u_1(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad u_2(x) \rightarrow \infty,$$

mientras que la integral es $O(x^2)$. Por lo tanto los valores de las constantes de integración son

$$(37) \quad A_1 = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}, \quad A_2 = 0$$

y (34) puede ser escrita en la forma siguiente

$$(38) \quad u(x) = A_1 [u_1(x) + r_n(x)],$$

donde

$$(39) \quad r_n(x) = \frac{\pi}{4 A_1 N} \int_0^x (Ny)^{\alpha+1} u(y) [u_1(y)u_2(x) - u_1(x)u_2(y)] dy.$$

Ahora se mostrará que para un $x \geq 0$ fijo, el tamaño del residuo en (38) es pequeño comparado con el primer término. Probando esto, vamos a dividirlo en dos caso (a) $0 \leq x \leq N^{-1}$ y (b) $x > N^{-1}$. Primero encontramos una cota superior denotada por M_n , para el valor absoluto de $|u(x)|$ en el intervalo $0 \leq x \leq N^{-1}$. Entonces para este intervalo tenemos

$$(40) \quad u_1(x) = O(1), \quad u_2(x) = \begin{cases} O(N^{-\alpha}x^{-\alpha}), & \alpha > 0, \\ O\left(\log \frac{1}{Nx}\right), & \alpha = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, si $\alpha > 0$, se sigue de (34) y (37) que

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq A_1 O(1) + M_n N^{-1} \int_0^x (Ny)^{\alpha+1} [O(N^{-\alpha}x^{-\alpha}) + O(N^{-\alpha}y^{-\alpha})] dy \\ &= A_1 O(1) + M_n x^2 O(1) = A_1 O(1) + M_n O(N^{-2}), \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$(41) \quad M_n = A_1 O(1),$$

para un n , grande el resultado sigue siendo valido para $\alpha = 0$. Utilizando (41), encontramos que

$$(42) \quad |r_n(x)| \leq x^2 O(1) = O(N^{-2}),$$

para $0 \leq x \leq N^{-1}$, $\alpha > 0$, mientras que

$$(43) \quad |r_n(x)| \leq x^2 \log(N^{-1}x^{-1}) O(1) = O(N^{-2}),$$

para $0 \leq x \leq N^{-1}$, $\alpha = 0$.

Estimando $r_n(x)$ para $x > N^{-1}$, escribimos (39) como una suma de integrales:

$$(44) \quad r_n(x) = \frac{\pi}{4A_1N} \left[\int_0^{1/N} \dots + \int_{1/N}^x \dots \right] = \Psi_1 + \Psi_2.$$

Entonces en el intervalo $N^{-1} < x < \infty$ tenemos

$$(45) \quad u_1(x) = O(N^{-1/2\alpha-1/4}x^{-1/2\alpha-1/4}), \quad u_2(x) = O(N^{-1/2\alpha-1/4}x^{-1/2\alpha-1/4}).$$

Por lo tanto, si $\alpha > 0$, encontramos como antes que

$$(46) \quad \begin{aligned} |\Psi_1| &\leq N^{-1} \int_0^\infty (Ny)^{\alpha+1} (Nx)^{-1/2\alpha-1/4} [O(1) + O(N^{-\alpha}y^{-\alpha})] dy \\ &= N^{-2} O(N^{-1/2\alpha-1/4} x^{-1/2\alpha-1/4}), \end{aligned}$$

este resultado permanece valido para $\alpha = 0$, y más aún

$$\begin{aligned} |\Psi_2| &\leq (A_1 N)^{-1} O(N^{-1/2\alpha-1/4} x^{-1/2\alpha-1/4}) \int_{1/N}^x (Ny)^{\alpha+1} |u(y)| (Ny)^{-1/2\alpha-1/4} dy \\ &\leq A_1^{-1} N^{1/2\alpha-1/4} O(N^{-1/2\alpha-1/4} x^{-1/2\alpha-1/4}) \int_0^x y^{1/2\alpha+3/4} |u(y)| dy. \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Schwarz's y la fórmula (30), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^x y^{1/2\alpha+3/4} |u(y)| dy &\leq \left[\int_0^x y^{1/2\alpha+3/4} dy \right]^{1/2} \left[\int_0^x u^2(y) dy \right]^{1/2} \\ &= A_1^{1/2} x^{1/2\alpha+5/4} (\alpha+5/2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

siendo así se obtiene

$$|\Psi_2| \leq A_1^{-1/2} N^{1/2\alpha-1/4} x^{1/2\alpha+5/4} O(N^{-1/2\alpha-1/4} x^{-1/2\alpha-1/4}),$$

lo cual se transforma en

$$(47) \quad |\Psi_2| \leq N^{-1/4} x^{1/2\alpha+5/4} O(N^{-1/2\alpha-1/4} x^{-1/2\alpha-1/4}),$$

donde $A = O(N^\alpha)$, de acuerdo con (37). Se sigue de (44), (46), (47) que

$$(48) \quad |r_n(x)| \leq O(N^{-1/2\alpha-1/4} x^{-1/2\alpha-1/4}) [N^{-1/4} x^{1/2\alpha+5/4} + N^{-2} O(1)].$$

Una comparación de (40) con (42) y (43), y de (45) con (48), muestra que el tamaño del termino de el residuo en (38) es pequeño comparado con $u_1(x)$ para todo $0 \leq x \leq a$ con $a < \infty$ arbitrario, con la condición de que n es grande. Por lo tanto finalmente, tenemos que la fórmula asintótica

$$(49) \quad u(x) \approx A_1 u_1(x), \quad n \rightarrow \infty$$

o

$$(50) \quad L_n^\alpha(x) \approx \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} e^{x/2} (Nx)^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{Nx}), \quad n \rightarrow \infty, \quad N = n + \frac{\alpha + 1}{2}.$$

En el intervalo $0 < \delta \leq x \leq a$ podemos reemplazar la función de Bessel por la representación asintótica (35). Esto reduce (50) a la forma simple

$$(51) \quad L_n^\alpha \approx \pi^{-1/2} e^{x/2} n^{1/2\alpha-1/4} x^{-1/2\alpha-1/4} \cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

7. Expansión de Funciones en Series de Polinomios de Laguerre

Una de las propiedades más importantes de los polinomios de Laguerre es el hecho de que para una función real $f(x)$ definida en el intervalo infinito $(0, \infty)$ se puede expresar en una serie de la forma

$$(52) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x), \quad 0 < x < \infty$$

con la condición de que $f(x)$ satisface ciertas condiciones generales. Los coeficientes c_n pueden ser determinados formalmente utilizando la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Laguerre. De hecho, multiplicando (52) por $e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x)$ e integrando término por término sobre el intervalo $(0, \infty)$, encontramos que

$$(53) \quad c_n = \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha f(x) L_n^\alpha(x) dx.$$

Esta expresión es válida si $f(x)$ es suave en cada intervalo finito $[x_1, x_2]$ y adecuadamente bien comportada cerca de los puntos $x = 0$ y $x = \infty$. En particular, tenemos

TEOREMA 7.1. *Si la función real $f(x)$, definida en el intervalo infinito $(0, \infty)$, es suave en cada subintervalo finito $[x_1, x_2]$, donde $0 < x_1 < x_2 < \infty$, y si la integral*

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha f^2(x) dx$$

es finita, entonces la serie (52), con coeficientes calculados por (53), converge hacia $f(x)$ en cualquier punto continuo de $f(x)$. En algún punto de discontinuidad, la serie converge hacia

$$1/2[f(x+0) + f[x-0]].$$

8. Ejemplos de Expansiones en Serie de Polinomios de Laguerre

Aplicando el Teorema 7.1 para una función dada $f(x)$, tenemos primero que evaluar las integrales en (53). En la mayoría de los casos esto puede ser hecho reemplazando $L_n^\alpha(x)$ por su expresión explícita (3) o por la representación integral (23). Ayuda en algunas ocasiones utilizar la función generadora (5). El siguiente ejemplo sirve para ilustrar la técnica para expandir funciones en serie de polinomios de Laguerre.

Ejemplo 1. La función

$$f(x) = x^\nu$$

satisface las condiciones del Teorema 7.1 si $\nu > 1/2(\alpha + 1)$, y tenemos

$$x^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x),$$

donde

$$c_n = \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^\infty e^{-x} x^{\nu-\alpha} L_n^\alpha(x) dx.$$

Sustituyendo de (3) e integrando por partes n veces, encontramos que

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^\infty x^\nu \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n-\alpha}) dx \\ &= \frac{(-1)^n \nu(\nu-1)\dots(\nu-n+1)}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^\infty e^{-x} x^{\nu+\alpha} dx \\ &= (-1)^n \frac{\Gamma(\nu + \alpha + 1)\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(n + \alpha + 1) + \Gamma(\nu - n + 1)} \end{aligned}$$

y así

$$(54) \quad x^\nu = \Gamma(\nu + \alpha + 1)\Gamma(\nu + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n L_n^\alpha(x)}{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(\nu - n + 1)},$$

$$0 < x < \infty, \quad \alpha > -1.$$

En particular, si ν es un entero positivo p , la serie (54), termina después de un número finito de términos, y entonces tenemos

$$(55) \quad x^p = \Gamma(\nu + \alpha + 1)p! \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n L_n^\alpha(x)}{\Gamma(n + \alpha + 1)(p-n)!}$$

$$0 < x < \infty, \quad \alpha > -1, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Ejemplo 2. La función

$$f(x) = e^{-ax},$$

satisface las condiciones del teorema 7.1 si $a > -1/2$. En este caso,

$$e^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x),$$

donde

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^{\infty} e^{-(a+1)x} x^\alpha L_n^\alpha(x) dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}) dx \\ &= \frac{a^n}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^{\infty} e^{-(a+1)x} x^{n+\alpha} dx \\ &= \frac{a^n}{(a+1)^{n+\alpha+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Con estos valores de c_n tenemos

$$(56) \quad e^{-ax} = (a+1)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1} \right)^n L_n^\alpha(x), \quad 0 \leq x < \infty$$

Se obtiene el mismo resultado sustituyendo $t = a/(a+1)$ en la expresión (5) la cual es la función generadora de los polinomios de Laguerre.

Ejemplo 3. Considérese la función

$$f(x) = (ax)^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{ax}), \quad x > 0, a > 0, \alpha > -1.$$

En este caso, la expansión deseada es

$$(ax)^{-\alpha/2} J_\alpha(\sqrt{ax}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x),$$

Para evaluar la integral, multiplicamos (5) por

$$e^x \binom{x}{a}^{\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{ax})$$

e integrando con respecto a x desde 0 hasta ∞ . Entonces, suponiendo que $|t|$ es suficientemente pequeña, obtenemos

$$\begin{aligned} & (1-t)^{-\alpha-1} \int_0^{\infty} e^{-x/(1-t)} \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha/2} J_{\alpha}(2\sqrt{ax}) dx = e^{-a(1-t)} \\ & = e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha/2} J_{\alpha}(2\sqrt{ax}) L_n^{\alpha}(x) dx, \end{aligned}$$

donde se utilizó la fórmula

$$\begin{aligned} J_0(\lambda R) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda r_1) J_m(\lambda r_2) e^{im\theta} \\ (57) \quad &= J_0(\lambda r_1) J_0(\lambda r_2) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\lambda r_1) J_m(\lambda r_2) \cos m\theta. \end{aligned}$$

Entonces comparando los coeficientes de las potencias de t , encontramos que

$$c_n = \frac{e^{-\alpha} a^n}{\Gamma(n + \alpha + 1)},$$

y así

$$(58) \quad (ax)^{-\alpha/2} J_{\alpha}(2\sqrt{ax}) = e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\Gamma(n + \alpha + 1)} L_n^{\alpha}(x),$$

Ejemplo 4. si multiplicamos (56) por $(a+1)^{\alpha-1}$ e integrando con respecto a a de 0 hasta ∞ , vamos a obtener

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} (a+1)^{\alpha-1} da = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) \int_0^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n \frac{da}{(a+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{\alpha}(x)}{n+1}.$$

La integral del lado derecho de la ecuación anterior puede ser expresada en términos de la función complementaria Gamma incompleta. Esto da

$$(59) \quad e^x x^{-\alpha} \Gamma(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{\alpha}(x)}{n+1}, \quad 0 \leq x < \infty, \alpha > -1$$

donde para $\alpha = 0$ se reduce a la forma

$$(60) \quad -e^x Ei(-x) \equiv e^x \Gamma(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{\alpha}(x)}{n+1}, \quad 0 \leq x < \infty$$

CAPÍTULO 4

INTEGRALES DE POISSON PARA SERIES DE LAGUERRE

En este capítulo se dará una introducción a los conceptos relacionados con la integral de Poisson para series de Laguerre en la cuál se centra el desarrollo de la fórmula de cuadratura que deseamos obtener. Primeramente empezaremos con algunos resultados importantes sobre la teoría de la integral de Poisson [13].

1. Un Teorema Importante

Para esta sección habrá que asumirse que dado un intervalo fijo I y una medida finita continua absolutamente, μ , en I . Como es usual el símbolo $\|f\|_p$ será utilizada para

$$\left(\int_I |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

y $\|f\|_\infty$ será el $\sup|f|$. Dada una función $f(y)$ en $L^1(d\mu)$, es apropiado considerar el análogo de la función maximal de Hardy, f^* , definida por

$$(61) \quad f^*(y) = \sup_{y \neq z; y, z \in I} \left(\int_y^z |f(y)| d\mu(y) / \int_y^z d\mu(y) \right).$$

LEMA 1.1. *Si μ es una medida finita continua absolutamente sobre el intervalo I y $f(y)$ esta en $L^1(d\mu)$, entonces $f^*(y)$ es finita para casi todo y . Para cualquier $a > 0$, sea $E_{alpha} = \{y | f^*(y) > a\}$. Entonces $\mu(E_{alpha}) \leq (2/a) \int_I |f| d\mu$. Además $f \in L^p(d\mu)$, $1 < p \leq \infty$, entonces $f^* \in L^p(d\mu)$ y $\|f^*\|_p \leq A_p \|f\|_p$.*

La prueba de este lema es exactamente la misma que la dada para el Lema 2 en [14].

El teorema principal de esta sección, es una generalización de el resultado en [[15], p. 16], el cuál se presenta a continuación.

TEOREMA 1.2. *Si μ es una medida continua finita absoluta sobre el intervalo I , y las funciones f y g están en $L^1(d\mu)$, y $g(z)$ es no negativa, y es monótona creciente para $z \leq y$ y monótona decreciente para $z \geq y$, entonces*

$$(62) \quad \left| \int_I fg d\mu \right| \leq \|g\|_1 f^*(y).$$

Demostración. Sea χ_E una función característica del espacio $E_\alpha = \{y | f^*(y) > a, a > 0\}$. Si g es una simple función, entonces posiblemente excepto para un número finito de puntos se puede escribir en la siguiente forma $\sum a_i \chi_{[y_i, z_i]} + \sum b_j \chi_{[x_j, y_j]}$ donde a_i y b_i son positivos. Entonces sustituyendo esto por g en (62) pasa lo siguiente

$$(63) \quad \left| \int_I fg \, d\mu \right| \leq \sum_i a_i \mu([y, z_i]) f^*(y) + \sum_j b_j \mu([x_j, y]) f^*(y),$$

para un intervalo J con un extremo en y , $|\int_J f \, d\mu| \leq \mu(J) f^*(y)$. El lado derecho de (63), sin embargo es solamente $\|g\|_1 f^*(y)$. Para el caso general se elige una secuencia monótona de incrementos de funciones no negativas, g_n , las cuales son monótonas crecientes para $z \leq y$ y convergen al punto g . Entonces utilizando dos veces el teorema de convergencia monótona esto da

$$(64) \quad \left| \int_I fg \, d\mu \right| \leq \int_I |fg| \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I |f| g_n \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f^*(y) \|g_n\|_1 = f^*(y) \|g\|_1.$$

Esto nos conduce al siguiente colorario

COROLARIO 1.3. *Sea μ una medida finita continua absolutamente sobre el intervalo I . Sea $L(y, z)$ una función no negativa, monótona creciente en z para $z \leq y$, monótona decreciente en z para $z \geq y$, y $\int_I L(y, z) d\mu(z) \leq B$, donde B es independiente de y . Sea $f(z)$ en $L^1(d\mu)$ y $g(y) = \int_I L(y, z) f(z) d\mu(z)$. Entonces $|g(y)| \leq B f^*(y)$ y*

$$\mu(\{y \mid |g(y)| > a\}) \leq \frac{2B}{a} \int_I |f| d\mu.$$

Es más, si $f \in L^p(d\mu)$, entonces $\|g\|_p$ donde A_p depende solamente de p .

El corolario anterior se deriva en su primera parte del teorema 1.2 y el resto es consecuencia inmediata del lema 1.1.

Desafortunadamente, los kernels que serán considerados usualmente no tienen la propiedad de monotocidad deseadas. La siguiente modificación es usualmente la más útil.

COROLARIO 1.4. *Sean μ, L, B y f tales que satisfacen las propiedades de el corolario 1.3 y $|K(y, z)| \leq L(y, z)$. Entonces las conclusiones del corolario 1.3 son válidas para la función $h(y) = \int_I K(y, z) f(z) d\mu(z)$.*

Se sigue entonces del hecho de que $|f|^*$ es la que f^* y entonces tenemos que

$$h(y) \leq \int_I |K(y, z)| |f(z)| d\mu(z) \leq \int_I L(y, z) |f(z)| d\mu(z).$$

DEFINICIÓN 2. *Si $f(y)$ esta en $L^1(y^\alpha \exp(-y))$, con $\alpha > -1$, se define su integral de Poisson, $g(r, y)$, para $0 \leq r < 1$ como*

$$(65) \quad g(r, y) = \int_0^\infty K(r, y, z) f(z) z^\alpha \exp(-z) dz$$

donde

$$(66) \quad K(r, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n L_n^{\alpha}(y) L_n^{\alpha}(z) / \Gamma(\alpha + 1) \binom{n + \alpha}{n}.$$

Entonces también se puede definir K como se muestra a continuación

$$(67) \quad K(r, y, z) = \frac{(-ryz)^{-\alpha/2}}{1-r} \exp\left(\frac{-r(y+z)}{1-r}\right) J_\alpha\left(\frac{2(-ryz)^{1/2}}{1-r}\right)$$

donde J_α es la función estándar de Bessel.

Utilizando la expresión para la función de Bessel con un argumento imaginario, sus funciones asintóticas y la monotonía de estas funciones se muestra que existen constantes positivas c y C que dependen solamente de α tal que

$$(68) \quad \begin{aligned} cw^\alpha &\leq i^{-\alpha} J_\alpha(iw) \leq Cw^\alpha & 0 \leq w \leq 1; \\ cw^{-1/2}e^w &\leq i^{-\alpha} J_\alpha(iw) \leq Cw^{-1/2}e^w & 1 \leq w. \end{aligned}$$

Utilizando (68) en (67), es claro que existe una constante positiva c y C que dependen solamente de α , tal que

$$(69) \quad cH(r, y, z) \leq K(r, y, z) \leq CH(r, y, z)$$

donde

$$(70) \quad \begin{aligned} H(r, y, z) &= (1-r)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{-r(y+z)}{1-r}\right), & 0 \leq z < \frac{(1-r)^2}{4ry} \\ &= \frac{(4ryz)^{-\alpha/2-1/4}}{c(1-r)^{1/2}} \exp\left(\frac{-ry + 2(ryz)^{1/2} - rz}{1-r}\right), & \frac{(1-r)^2}{4ry} \leq z. \end{aligned}$$

Para y , r y α fijos, H es una función límite de z . Por lo tanto, $g(r, y)$ existe para toda $f(y)$ en $L^1(y^\alpha e^{-y})$ si o no tiene una expansión de Laguerre. La relación entre varias posibles definiciones de g es dada en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3. Si $f(y)$ tiene la expansión de Laguerre $\sum a_n L_n^\alpha(y)$, entonces para cada r , $0 \leq r < 1$, $g(r, y)$ tiene la expansión de Laguerre $\sum r^n a_n L_n^\alpha(y)$. Si $f(y)$ está en $L^2(y^\alpha e^{-y})$, entonces

$$\sum r^n a_n L_n^\alpha(y)$$

converge absolutamente a $g(r, y)$ casi donde sea. Para todo p , $1 \leq p < 2$, existe una función $f(y)$ en $L^p(y^\alpha e^{-y})$ y un $r < 1$ tal que $\sum r^n a_n L_n^\alpha(y)$ diverge para toda y .

Para α y z $|L_n^\alpha(z)| \leq Cn^{\alpha/2-1/4}$. Entonces usando (5.7.16), p. 109 de [1]. Entonces se produce lo siguiente

$$(71) \quad \int_0^{\min\{t,y\}} K(r, y, z) L_n^\alpha(y) e^{-y} y^\alpha dy = r^n L_n^\alpha(z).$$

La demostración de la definición 3 no se detalla aquí (para ver una demostración ver [13]).

DEFINICIÓN 4. Existe una función $L(r, y, z)$, tal que para cada r , $0 \leq r < 1$, $L(r, y, z)$ se incrementa monótonamente en z para $z \leq y$, decrece monótonamente para $z \geq y$ y $H(r, y, z) \leq L(r, y, z)$. Además existen una constante C independiente de r y tal que $\int_0^\infty L(r, y, z) e^{-z} z^\alpha dz \leq C$.

Definiendo $L(r, y, z)$ para cada z para ser más grande que $H(r, y, z)$ y cualquier máximo de $H(r, y, t)$ esto ocurre para t en el lado opuesto de z de y . Entonces L claramente tiene las propiedades monótonas deseadas y permanece para probar los límites de la integral.

Haciendo $n = 0$ en (71) y utilizando el hecho de que $K(r, y, z)$ es simétrica en y y z da

$$(72) \quad \int_0^\infty K(r, y, z) e^{-z} z^\alpha dz = 1.$$

Utilizando (69) entonces existe una constante C tal que

$$(73) \quad \int_0^\infty H(r, y, z) e^{-z} z^\alpha dz \leq C.$$

Entonces será necesario considerar para un r fijo y y , los valores m_1, m_2, \dots de z para los cuales $H(r, y, z)$ toma un máximo. Con esta notación es claro que

$$(74) \quad \int_0^\infty L(r, y, z) e^{-z} z^\alpha dz \leq \int_0^\infty H(r, y, z) e^{-z} z^\alpha dz + \sum_i H(r, y, m_i) \left| \int_y^{m_i} e^{-z} z^\alpha dz \right|.$$

Entonces (73) da un límite para el primer término del lado derecho de la ecuación (74), esto será suficiente para mostrar que la suma (74) esta acotada.

Analizando (??), es claro que un máximo de H ocurrirá en $z = 0$. En este caso se tiene

$$(75) \quad H(r, y, 0) \int_0^y e^{-z} z^\alpha dz = (1-r)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{-ry}{1-r}\right) \int_0^\infty e^{-z} z^\alpha dz.$$

Si $r \geq 1/2$, utilizando el hecho de que la integral es menor que $y^{\alpha+1}/(\alpha+1)$, esto muestra que la integral (75) es menor que

$$\frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{y}{1-r}\right)^{\alpha+1} \exp\left(\frac{-1/2y}{1-r}\right).$$

el cual es menor que una constante dependiendo solamente de α . Is $r < 1/2$, utilizando el hecho de que la integral es menor que $\Gamma(\alpha + 1)$ es suficiente.

No puede haber otro máximo para $0 \leq z < (1 - r)^2/4ry$, entonces H decrece en este intervalo.

A continuación se presentan las propiedades de la integral de Poisson para expansiones de Laguerre.

TEOREMA 1.5. *Sea $f \in L^p(e^{-y}y^\alpha)$ sobre $[0, \infty)$, donde $1 \leq p < \infty$ y $\alpha > -1$. Sea $g(r, y)$ que denota la integral de Poisson (65), y $f^*(y)$ la función (61), con $d\mu(y) = e^{-y}y^\alpha dy$ y $I = [0, \infty)$. Entonces si $0 \leq r < 1$, existe una constante C que depende solamente de α y una constante A_p **dependiente** solo de α y p , tal que:*

- (76)
- (a) $|g(r, y)| \leq C f^*(y)$,
 - (b) $\|g(r, y)\|_p \leq \|f(y)\|_p, 1 \leq p \leq \infty$
 - (c) $\|g(r, y) - f(y)\|_p \rightarrow 0$, como $r \rightarrow 1^-$, para $1 \leq p \leq \infty$,
 - (d) $\lim_{r \rightarrow 1^-} g(r, y) = f(y)$, casi en cualquier lado, $1 \leq p \leq \infty$,
 - (e) $\|\sup_{r < 1} g(r, y)\|_p \leq A_p \|f\|_p, 1 < p \leq \infty$.

Para más sobre este tema se puede consultar [13].

CAPÍTULO 5

FORMULA DE CUADRATURA

En este capítulo se obtendrá la fórmula de cuadratura para la integral de Poisson en series de polinomios de Laguerre, primeramente planteando un problema de eigenvalores, utilizando los polinomios de Laguerre, sus ecuaciones de recurrencia y sus fórmulas asintóticas. Este se puede considerar como el capítulo principal de la tesis ya que se presentan los resultados principales de mi trabajo.

1. Problema de eigenvalores

Consideremos el conjunto de funciones $U_n^\alpha(x) = x^{\alpha/2}e^{-x/2}L_n^\alpha(x)$, denso en $L^2(0, \infty)$. También consideremos la ecuación de recurrencia de los polinomios de Laguerre, dada en la siguiente forma $(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) = (-x+2(n+1)+\alpha-1)L_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x)$. Multiplicando por $x^{\alpha/2}e^{-x/2}$, es posible poner la ecuación de recurrencia en términos de $U_n(x)$, y obtener la siguiente ecuación:

$$(n+1)U_{n+1}^\alpha(x) = (-x+2(n+1)+\alpha-1)U_n^\alpha(x) - (n+\alpha)U_{n-1}^\alpha(x),$$

donde $n = 1, 2, 3, \dots$

Cabe resaltar que $L_0^\alpha(x) = 1$ y $L_1^\alpha(x) = -x + \alpha + 1$. Ahora desarrollando la ecuación para el índice de recurrencia en $U_n(x)$, desde $n = 0$, hasta $n = N - 1$, se puede escribir como aparece a continuación:

$$\begin{aligned} U_1^\alpha(x) + \alpha U_{-1}^\alpha(x) &= (-x+1+\alpha)U_0^\alpha(x), \\ 2U_2^\alpha(x) + (1+\alpha)U_0^\alpha(x) &= (-x+3+\alpha)U_1^\alpha(x), \\ 3U_3^\alpha(x) + (2+\alpha)U_1^\alpha(x) &= (-x+5+\alpha)U_2^\alpha(x), \\ 4U_4^\alpha(x) + (3+\alpha)U_2^\alpha(x) &= (-x+7+\alpha)U_3^\alpha(x), \\ &\vdots \\ (N-1)U_{N-1}^\alpha(x) + (N-2+\alpha)U_{N-3}^\alpha(x) &= (-x+2(N-2)+1+\alpha)U_{N-2}^\alpha(x), \\ NU_N^\alpha(x) + (N-1+\alpha)U_{N-2}^\alpha(x) &= (-x+2(N-1)+1+\alpha)U_{N-1}^\alpha(x). \end{aligned} \tag{77}$$

Donde hemos truncando la relación de recurrencia, esto es haciendo $U_N = 0$. Entonces las ecuaciones (77) pueden escribirse en la forma matricial $MV = VX$, siendo así la presente a continuación:

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (1+\alpha) & 3+\alpha & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(2+\alpha) & 5+\alpha & -3 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -(N-2+\alpha) & (2N-3+\alpha) & (N-1) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -(N-1+\alpha) & 2N-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}.$$

Con lo anterior hemos de notar que tenemos un problema de eigenvalores y resaltamos que esta es una matriz de eigenvalores x_j .

Como $U_n^\alpha(x) = x^{\alpha/2} e^{-x/2} L_n^\alpha(x)$, y se tenía que $U_N(x) = 0$ (esto debido al truncamiento de la relación de recurrencia), $L_n^\alpha(x)$ debe de ser cero, lo cual solamente se logra si los x_j son ceros de $L_n^\alpha(x)$. Esto es muy importante ya que $L_n^\alpha(x)$ y $U_n(x)$ comparten los mismos ceros. Por este hecho los eigenvalores de la matriz anterior corresponden a los ceros de los polinomios de Laguerre, los cuales son reales y están dispersos en el intervalo $(0, \infty)$.

Es conveniente obtener eigenvectores ortogonales, para esto es necesario simetrizar la matriz M del problema de eigenvalores $MV = VX$, ya que como se sabe, las matrices simétricas tienen eigenvectores ortogonales y la matriz formada por sus eigenvectores es ortogonal. Así, para simetrizar la matriz hagamos una transformación de similitud sobre M, es decir

$$A = SMS^{-1},$$

donde esperamos que S sea una matriz diagonal con entradas s_i , ya que M es tridiagonal. Si S es en efecto diagonal entonces tenemos $A_{ij} = S_j M_{jk} / S_k$, donde A será la matriz ortogonal que necesitamos.

Para simetrizar utilizamos la relación de similaridad dada por

$$A = SMS^{-1}, \text{ con S diagonal entonces } A = SM/S$$

y necesitamos que $s_2/s_1(1+\alpha) = s_1/s_2$ entonces $s_2 = s_1/\sqrt{1+\alpha} \dots$, donde $s_k = \sqrt{(k-1)! \Gamma(\alpha+1) / \Gamma(\alpha+k)}$, de esta manera la matriz A es simétrica y

$$A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -s_1/s_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (1+\alpha)s_2/s_1 & 3+\alpha & -2s_2/s_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(2+\alpha)s_3/s_2 & (5+\alpha) & -3s_3/s_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -(N-2+\alpha)s_{N-1}/s_{N-2} & (2N-3+\alpha) & (N-1)s_{N-1}/s_N \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -(N-1+\alpha)s_N/s_{N-1} & 2N-1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la relación para s_k , la matriz simetrizada A toma la forma siguiente:

$$(78) \quad \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\sqrt{1+\alpha} & 0 & & \dots & 0 \\ -\sqrt{1+\alpha} & 3+\alpha & -\sqrt{2(2+\alpha)} & & \dots & 0 \\ 0 & -\sqrt{2(2+\alpha)} & 5+\alpha & -\sqrt{3(3+\alpha)} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -\sqrt{3(3+\alpha)} & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & -\sqrt{(N-1)(N-1+\alpha)} & 2(N-1)-1+\alpha & -\sqrt{N(N+\alpha)} \\ 0 & \dots & & & -\sqrt{N(N+\alpha)} & 2N-1+\alpha \end{pmatrix}.$$

Así de esta manera las ecuaciones de recurrencia asociadas a la matriz anterior (78) son las siguientes:

$$(79) \quad \begin{aligned} (1+\alpha)u_1(x) - \sqrt{1+\alpha}u_2(x) &= xu_1(x), \\ &\vdots \\ -\sqrt{k(k+\alpha)}u_{k-1}(x) + (k+2+\alpha)u_k(x) - \sqrt{(k+1)(k+1+\alpha)}u_{k+1}(x) &= xu_k(x), \\ &\vdots \\ -\sqrt{(N-1)(N-1+\alpha)}u_{N-1}(x) + (2N-1+\alpha)u_N(x) &= xu_N(x). \end{aligned}$$

Solucionando el sistema de ecuaciones anterior por el método de sustitución hacia adelante se obtiene la siguiente solución, para los eigenvectores ortogonales. Nótese que, a pesar de que este sistema de ecuaciones se ha obtenido a partir del sistema (77), la solución es decir los valores $u_k(x)$ no son iguales a la solución de (77) ya que este sistema de ecuaciones es infinito, mientras que (79) es un sistema finito.

Hay que notar que la solución de (79) depende de x_j , esto se debe que al resolver el sistema de ecuaciones de manera natural van apareciendo los polinomios de Laguerre, esto no es de sorprender ya que partimos del hecho de que donde los polinomios de Laguerre aparecen implícitos $U_n^\alpha = x^{\alpha/2}e^{-x/2}L_n^\alpha$.

$$(80) \quad u_k(x_j) = \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+1)(k-1)!}{\Gamma(\alpha+k)}}u_1(x_j)L_{k-1}^\alpha(x_j).$$

Estas soluciones forman la matriz de eigenvectores con entradas $u_N(x_j)$, la cual es ortogonal debido a la simetrización hecha anteriormente. Ahora como se observa necesitamos tener el valor de $u_1(x_j)$, y este se va a obtener mediante el proceso de normalización que se verá a continuación.

2. Normalización

Anteriormente en (80) teníamos:

$$u_k(x_j) = \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(k)}{\Gamma(\alpha + k)}} u_1(x_j) L_{k-1}^\alpha(x_j).$$

Como los $u_k(x_j)$ son ortogonales por ser vectores propios de una matriz simétrica, deben cumplir la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_j(x_N) u_N(x_l) &= \delta_{jl} = \\ &= u_1^2(x_j) \Gamma(\alpha + 1) \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha + n)} L_{n-1}^\alpha(x_j) L_{n-1}^\alpha(x_l) \\ (81) \quad &= \sum_{n=1}^N u_1^2(x_j) \left[\binom{n-1+\alpha}{n-1} \right]^{-1} L_{n-1}^\alpha(x_j) L_{n-1}^\alpha(x_l). \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de Christoffel-Darboux [1],

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{N-1} \left[\binom{\nu+\alpha}{\nu} \right]^{-1} L_\nu^\alpha(x_j) L_\nu^\alpha(x_l) &= \\ &= (N+1) \left[\binom{N+\alpha}{N} \right]^{-1} \frac{L_N^\alpha(x_j) L_{N+1}^\alpha(x_l) - L_{N+1}^\alpha(x_j) L_N^\alpha(x_l)}{(x_j - x_l)}, \end{aligned}$$

y sustituyéndola en (81), queda lo siguiente:

$$(82) \quad \sum_{n=1}^N u_j(x_N) u_N(x_l) = u_1^2 N \left[\binom{N-1+\alpha}{N-1} \right]^{-1} \frac{L_{N-1}^\alpha(x_j) L_N^\alpha(x_l) - L_N^\alpha(x_j) L_{N-1}^\alpha(x_l)}{x_j - x_l}.$$

La fórmula (82) vale para cuando $x_j \neq x_l$, pero para el caso en que $x_j = x_l$ tenemos un cociente y no se puede evaluar directamente. entonces necesitamos aplicar el límite cuando $x_j \rightarrow x_l$ en este caso será útil la regla de L'Hopital para poder aplicar el límite. Utilizando también que $d/dx L_n^\alpha(x) = x^{-1}(nL_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x))$, entonces derivando con respecto de x_j e igualando a 1 para la normalización, y tomando en cuenta que $L_n^\alpha(x) = 0$, la ecuación (82) queda de la manera siguiente:

$$u_1^2(x_j) n \left[\binom{N-1+\alpha}{N-1} \right]^{-1} x^{-1} (N+\alpha) [L_{N-1}^\alpha(x_j)]^2 = 1.$$

De la formula anterior encontramos el valor de $u_1(x_j)$:

$$u_1(x_j) = \frac{1}{L_{N-1}^\alpha(x_j)} \left[\frac{x_j(N+\alpha-1)!}{N!(\alpha)!(N+\alpha)} \right]^{1/2}.$$

De esta manera sustituyendo en la ecuación (80) el valor de $u_1(x_j)$ se tiene la fórmula para el vector k -ésimo normalizado:

$$(83) \quad u_k(x_j) = \left[x_j \frac{(k-1)!}{N!} \frac{(N+\alpha-1)!}{(k+\alpha-1)!(N+\alpha)} \right]^{1/2} \frac{L_{k-1}^\alpha(x_j)}{L_{N-1}^\alpha(x_j)}.$$

Es muy importante resaltar que la matriz U formada por los u_{kj} cumple las siguientes relaciones de ortogonalidad $V \cdot V^T = V^T \cdot V = 1$, este hecho nos llevará hacia la fórmula de cuadratura.

3. Formulas Asintóticas y Kernel de la Transformada

Encaminándonos hacia la fórmula para la integral de Poisson en series de polinomios de Laguerre utilizaremos la función generadora bilineal de Hardy y una fórmulas asintóticas de los polinomios de Laguerre [1], esto será indispensable para encontrar la forma del kernel de la fórmula de cuadratura que deseamos obtener. La función generadora y la fórmula asintótica son las siguientes:

$$(84) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y) z^n = (1-z)^{-1} e^{-z \frac{x+y}{1-z}} (xyz)^{-\alpha/2} I_\alpha \left[2 \frac{(xyz)^{1/2}}{1-z} \right]$$

y

$$(85) \quad L_n^\alpha(x) = \pi^{-1/2} e^{x/2} x^{-\alpha/2-1/4} n^{\alpha/2-1/4} \left[\cos[2(nx)^{1/2} - \alpha\pi/2 - \pi/4] + (nx)^{-1/2} O(1) \right].$$

Construyémoslo la suma siguiente y haciendo el producto de las $u_{kj} = u_k(x_j)$ y $u_{kj*} = u_k(x_{j*})$ que aparecen en la ecuación (83) y multiplicando por z^k , tenemos lo siguiente (la razón de tomar la suma de esta manera se verán más adelante):

$$(86) \quad K_{jj*} = \sum_{k=1}^N z^{k-1} u_{kj} u_{kj*} = \frac{C_{Njj*}}{L_{N-1}^\alpha(x_j) L_{N-1}^\alpha(x_{j*})} \sum_{k=1}^N z^{k-1} \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(\alpha+k)} L_{k-1}^\alpha(x_j) L_{k-1}^\alpha(x_{j*}),$$

donde $C_{Njj*} = (x_j x_{j*})^{1/2} (\Gamma(N+\alpha)) / N!(N+\alpha)$.

Haciendo uso de la ecuación (84) en la ecuación (86) tenemos el siguiente resultado aproximado para N muy grande:

$$K_{jj*} \approx \frac{C_{Njj*}}{L_{N-1}^\alpha(x_j) L_{N-1}^\alpha(x_{j*})} \left[\frac{1}{1-z} \exp \left[\frac{-z(x_j + x_{j*})}{1-z} \right] (x_j x_{j*} z)^{-\alpha/2} I_\alpha \left[2 \frac{(x_j x_{j*} z)^{1/2}}{1-z} \right] \right].$$

Ahora utilizaremos la ecuación (85) para sustituirla en la ecuación anterior en el producto de los polinomios de Laguerre. Tomando en cuenta que N es grande y que x_j es un cero de $L_N^\alpha(x)$, de (85) vemos que $L_{N-1}(x_j)$ depende del valor de $\cos(2\sqrt{(N-1)x_j} - \alpha\pi/2 - \pi/4)$, ya que N es grande, el $(-1)^j$ de la ecuación (87) proviene del hecho de que $L_{N-1}^\alpha(x_j) = -d/dx L_N^\alpha(x_j)$ es decir, $L_{N-1}^\alpha(x)$ evaluada en los ceros de $L_N^\alpha(x)$ es proporcional a la derivada de L_N^α . Ya que x_j es un cero simple de $L_N^\alpha(x)$, el valor de la derivada cambia de signo es cuando cambiamos de x_j a x_{j+1} , siendo negativa la primera pendiente (en x_1). Análogamente sucede para $(-1)^{j^*}$. Dicho lo anterior de tiene el siguiente resultado para la aproximación de (86) .

$$(87) \quad \cos(2\sqrt{(N-1)x_j} - \alpha\pi/2 - \pi/4) \approx (-1)^j \sin \sqrt{\frac{x_j}{N}} \approx (-1)^j \sqrt{x_j/N},$$

La constante C_{Njj^*} que depende de N y α fue aproximada al valor π/\sqrt{N} . Esto se hizo aproximando las funciones Gama mediante la fórmula de Stirling [2], la cual propone que:

$$\Gamma(z) \sim e^{-z} z^{z-1/2} (2\pi)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{228z^2} + \frac{1}{51840z^3} + \dots \right]; (z \rightarrow \infty \text{ en } |\arg z| < \pi).$$

Para nuestros fines despreciaremos los términos divididos entre z , ya que en nuestro caso z depende de N , $N \rightarrow \infty$ y $N \gg \alpha$. Entonces de esta manera aplicando la fórmula de Stirling a las funciones Gama y aproximando los términos de acuerdo a las restricciones anteriores queda la siguiente aproximación las constantes en (88) :

$$C_{Njj^*} \sim \frac{\pi}{\sqrt{N}}.$$

Este valor se confirmará más adelante y se espera que C_{Njj^*} jugará el papel de una medida de Riemann de la forma $\Delta x_j^{1/2}$ en una suma que dará lugar a la transformada integral que deseamos obtener.

Siendo así se de una mejor aproximación para (86) a continuación.

$$(88) \quad K_{jj^*} \approx \frac{\pi}{\sqrt{N}} (-1)^{j-j^*} (x_j x_{j^*})^{1/4} \exp \left[-\frac{1+z}{2(1-z)} (x_j + x_{j^*}) \right] \frac{z^{-\alpha/2}}{1-z} I_\alpha \left[2 \frac{(x_j x_{j^*} z)^{1/2}}{1-z} \right],$$

Dejando a un lado los resultados anteriores sólo por un momento voy a proceder a encontrar el valor de x_j (cero de Laguerre), el cual será necesario para determinar el valor del incremento $\Delta x_j^{1/2}$, que cuando se multiplica T_{jj^*} por $f(x_j)$ convierte a $\sum_{j=1}^N T_{jj^*} f(x_j)$ en una suma de Riemann, donde $f(x)$ es cualquier función. Este hecho nos llevará a la fórmula de cuadratura. Siendo así vamos a partir de la ecuación (85), teniendo en cuenta de que $L_N^\alpha(x_j) = 0$, lo cual es claro que sólo puede pasar si:

$$(89) \quad \cos[2(Nx_j)^{1/2} - \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}] = 0,$$

y por las propiedades del coseno y sus ceros se obtiene el valor de $x_j^{1/2}$:

$$x_j^{1/2} = \frac{\pi}{2^2 \sqrt{N}} (2j + \alpha - \frac{1}{2}).$$

Los $x_j^{1/2}$, cumplen la propiedad de ser equiespaciados. Cabe resaltar que éste será el valor que tomaremos como incremento $\Delta x_j^{1/2}$. Obteniendo:

$$\Delta x_j^{1/2} = x_{j+1}^{1/2} - x_j^{1/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{N}}.$$

Este valor apareció en la aproximación de las constantes que dependen de N y α en T_{jj^*} (88) y que nos servirá como referencia para saber que vamos por buen camino.

Anteriormente teníamos que $K_{jj^*} = \sum_{k=1}^N z^{k-1} u_{kj} u_{kj^*}$, entonces construyendo la suma siguiente la cual del lado derecho se comporta como una suma de Riemann, donde la razón $\Delta x^{1/2} = \pi/2\sqrt{N}$, esto con el fin de llegar a la integral de Poisson en series de polinomios de Laguerre.

$$\begin{aligned} \sum_{j^*=1}^N (-1)^{j+j^*} K_{jj^*} f(x_{j^*}) &= \\ &= \frac{2z^{-\alpha/2}}{1-z} \sum_{j^*=1}^N \exp \left[-\frac{1+z}{2(1-z)} (x_j + x_{j^*}) \right] (x_j x_{j^*})^{1/4} I_\alpha \left[\frac{2\sqrt{x_j x_{j^*} z}}{1-z} \right] f(x_{j^*}) \Delta x_j^{1/2}. \end{aligned}$$

Cuando $N \rightarrow \infty$ la suma de Riemann de la derecha por definición se convierte en una integral definida y así se tiene el siguiente resultado el cual es la integral de Poisson en series de polinomios de Laguerre, la suma del lado izquierdo será nuestra formula de cuadratura la cual aproxima a la integral de Poisson en series de polinomios de Laguerre, este es el resultado más importante en esta tesis, ya que era el resultado principal encontrar.

Cambiando la variable $\sqrt{x} \rightarrow x$, se tiene la fórmula siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{j^*=1}^N (-1)^{j+j^*} K_{jj^*} f(x_{j^*}) &\approx \\ (90) \quad &\approx 2 \frac{z^{-\alpha/2}}{1-z} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{1+z}{2(1-z)} (x_j + x^2) \right] \sqrt{x} (x_j)^{1/4} I_\alpha \left[\frac{2\sqrt{x_j z x}}{1-z} \right] f(x^2) d(x). \end{aligned}$$

A continuación se hacen algunos cambios de variable para facilitar la lectura de la integral cambiando el subíndice j^* por k , cambiando la variable $\sqrt{x} \rightarrow x$. Después se reescribe $f(x^2)$ por $f(x)$, también se hace $x_j = x_j^2$, para $|z| < 1$ y definiendo los puntos $y_k = \sqrt{x_k}$, $k = 1, 2, \dots$ se tiene la fórmula siguiente:

$$(91) \quad \sum_{k=1}^N (-1)^{j+k} K_{jk} f(x_k) \approx 2 \frac{z^{-\alpha/2}}{1-z} \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{1+z}{2(1-z)} (y_j^2 + x^2) \right] \sqrt{xy_j} I_{\alpha} \left[\frac{2\sqrt{z}}{1-z} y_j x \right] f(x) d(x).$$

Por lo que antes se dijo quedará probado el siguiente teorema.

TEOREMA 3.1. *Sea $f(x)$ una función arbitraria y sea la integral de Poisson en series de polinomios de Laguerre (91) para $|z| < 1$, damos su fórmula de cuadratura, de tal manera que si definimos*

$$a = \frac{1+z}{2(1-z)} \quad y \quad b_j = \frac{2\sqrt{z}}{1-z} y_j,$$

entonces se tiene que la formula de cuadratura para la integral del Poisson en series de polinomios de Laguerre es la del lado derecho de la siguiente ecuación, donde $y_k = \sqrt{x_k}$, con X_k raíz de $L_N^{\alpha}(x)$.

$$(92) \quad \int_0^{\infty} e^{-ax^2} f(x) I_{\alpha}(b_j x) dx \approx \frac{z^{\alpha/2}(1-z)}{2} \frac{e^{ay_j^2}}{\sqrt{y_j}} \sum_{k=1}^N (-1)^{j+k} K_{jk} \frac{f(x_k)}{\sqrt{y_k}}.$$

Donde

$$K_{jk} = \sum_{l=1}^N z^{j+l} u_{jl} u_{kl} \quad ; \quad u_{nk} = \left(\frac{x_k(n-1)!(N-1+\alpha)!}{N!(N+\alpha)(n-1+\alpha)} \right)^{1/2} \frac{L_{n-1}^{\alpha}(x_k)}{L_{N-1}^{\alpha}(x_k)}.$$

Siendo el teorema (3.1) el resultado central de la tesis ya que se consiguió dar una fórmula de cuadratura para la integral de Poisson en series de polinomios de Laguerre. Ahora vamos a proceder a resolver algunos casos límites de nuestra fórmula de cuadratura para observar el comportamiento y ver que propiedades posee.

4. Casos Límites

Vamos a proceder primero tomando el caso de $z \rightarrow -1$, entonces la fórmula (90) se reducirá a la fórmula siguiente:

$$(i)^{-\alpha} \int_0^{\infty} x_j^{1/4} \sqrt{x} I_{\alpha}(i\sqrt{x_j}x) f(x^2) dx \approx \sum_{k=1}^N (-1)^{j+k} K_{jk} F(x_k).$$

Pero si tomamos en cuenta la relación que cumplen las funciones de Bessel $I_\alpha(iy) = i^\alpha J_\alpha(y)$, se tiene el siguiente resultado (el cual es bien conocido ya que se trata de la bien conocida Transformada de Hankel de la función $f(x^2)$).

$$(93) \quad x_j^{1/4} \int_0^\infty \sqrt{x} J_\alpha(x\sqrt{x}) f(x^2) \approx \sum_{k=1}^N (-1)^{j+k} K_{jk} F(x_k).$$

Siendo así a continuación vamos a proceder a hacer una comprobación de la fórmula de cuadratura, para la bien conocida transformada de Hankel $\int_0^\infty \sqrt{xy} J_\alpha(xy) f(x) dx$, con $y > 0$, de la función

$$(94) \quad f(x) = x^{\alpha+1/2} e^{-x/2} L_n^\alpha(x^2)$$

es la siguiente

$$(95) \quad (-1)^n y^{\alpha+1/2} e^{-y^2/2} L_n^\alpha(y^2)$$

Así que si hacemos en (93), que la función $f(x) = x^{\alpha/2-1/4} e^{-x/2} L_n^\alpha(x)$ y los cambios de variable siguientes $\sqrt{x_j} = y_j$, así como también $x_j = y_j^2$, entonces la ecuación (93) se convierte en lo que a continuación se presenta

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\alpha+1/2} e^{-x^2/2} L_n^\alpha(x^2) \sqrt{xy_j} J_\alpha(y_j x) dx &\approx \sum_{k=1}^N (-1)^{j+k} K_{jk} x_k^{\alpha/2+1/4} e^{-x_k/2} L_n^\alpha(x_k) \\ &\approx \sum_{k=1}^N (-1)^{j+k} K_{jk} y_k^{\alpha+1/2} e^{-y_k^2/2} L_n^\alpha(y_k^2). \end{aligned}$$

Anteriormente habíamos hecho la suposición de que $z=-1$, entonces del teorema (3.1) se tiene $K_{jk} = \sum_{m=1}^N (-1)^{m-1} u_{jm} u_{mk}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N (-1)^{j+k} K_{jk} x_k^{\alpha/2-1/4} e^{-x_k/2} L_n^\alpha(x_k) &= \\ &= \sum_{m=1}^N (-1)^{m-1} u_{jm} (-1)^j \sum_{k=1}^N u_{mk} x_k^{\alpha/2-1/4} e^{-x_k/2} L_n^\alpha(x_k) (-1)^k = \\ (96) \quad &= \sum_{m=1}^N (-1)^{m-1} u_{mj} (-1)^j S_n, \end{aligned}$$

donde

$$(97) \quad S_n = \sum_{k=1}^N u_{nk} x_k^{\alpha/2+1/4} e^{-x_k/2} L_n^\alpha(x_k) (-1)^k.$$

Hay que recordar de secciones anteriores que teníamos en (83):

$$u_{nk} = \left(\frac{x_k(n-1)!(N-1+\alpha)!}{N!(N+\alpha)(n-1+\alpha)!} \right)^{1/2} \frac{L_{n-1}^\alpha(x_k)}{L_{N-1}^\alpha(x_k)}.$$

Entonces por (85) y (87) tenemos la siguiente expresión antes mencionada, y que ahora resulta útil de nuevo para obtener el valor de $x_k^{\alpha/2-1/4} e^{-x_k/2}$ y poder utilizarlo para calcular S_n

$$(98) \quad L_{N-1}^\alpha(x_k) \approx \frac{(N-1)^{\alpha/2-1/4} \exp(x_k/2)}{\sqrt{\pi} x_k^{\alpha/2+1/4}} (-1)^k \sqrt{\frac{x_k}{N}}.$$

Entonces de (98) se obtiene lo que a continuación aparece:

$$(99) \quad x_k^{\alpha/2-1/4} e^{-x_k/2} \approx \frac{(N-1)^{\alpha/2-1/4} (-1)^k}{\sqrt{\pi} L_{N-1}^\alpha(x_k)} \sqrt{\frac{x_k}{N}}.$$

De este modo sustituyendo la ecuación (99) en (97) se obtiene el siguiente valor para S_n

$$S_n = \frac{(N-1)^{\alpha/2-1/4}}{\sqrt{N\pi}} \sum_{k=1}^N u_{nk} \sqrt{x_k} \frac{L_m^\alpha(x_k)}{L_{N-1}^\alpha(x_k)},$$

ya que $\sqrt{x} L_m^\alpha(x_k) / L_{N-1}^\alpha(x_k) = \left[\frac{N!(N+\alpha)(\alpha+m)!}{N\pi m!(N-1+\alpha)!} \right]^{1/2} u_{m+1,k}$ se tiene el siguiente resultado para S_n .

$$S_n = (N-1)^{\alpha/2-1/4} \left[\frac{N!(N+\alpha)(\alpha+m)!}{N\pi m!(N-1+\alpha)!} \right]^{1/2} \sum_{k=1}^N u_{nk} u_{m+1,k}.$$

Por las propiedades de ortogonalidad de las funciones u_{nk} y $u_{m+1,k}$ vistas en secciones pasadas se obtiene lo siguiente

$$S_n = \left[\frac{(N-1)^{\alpha-1/2} N!(N+\alpha)(\alpha+m)!}{N\pi(N-1+\alpha)!m!} \right]^{1/2} \delta_{n,m}.$$

Debido a lo anterior sustituyendo S en la ecuación (96) y haciendo algunas cuentas esta se convierte a

$$\sum_{k=1}^N (-1)^{j+k} K_{jk} x_k^{\alpha/2+1/4} e^{-x_k/2} L_n^\alpha(x_k) \approx (-1)^m x_j^{\alpha/2+1/4} e^{-x_j/2} L_m^\alpha(x_j).$$

O de otra forma haciendo el cambio de variable $x_j = y_i^2$ tenemos lo siguiente

$$\sum_{k=1}^N (-1)^{j+k} K_{jk} x_k^{\alpha/2+1/4} e^{-x_k/2} L_n^\alpha(x_k) \approx (-1)^m y_i^{\alpha+1/2} e^{-y_i^2/2} L_m^\alpha(y_i^2).$$

Lo que nos lleva a lo que esperábamos la transformada de Hankel de dicha función (94) fue obtenida mediante la fórmula de cuadratura y el resultado coincide con el de la ecuación (95).

Ahora vamos a proceder a mostrar que pasa con el Kernel K_{jk} de la fórmula de cuadratura cuando $z \rightarrow 1$. Partiendo de la ecuación (88) donde tomaremos los cambios de variables $x_j = x_j^2$ y $x = x^2$, haciendo las cuentas y aproximando la función de Bessel queda la siguiente aproximación

$$\begin{aligned} K(z, \alpha, x_j, x) &= \frac{z^{-\alpha/2}}{1-z} \exp \left[\frac{-(1+z)}{2(1-z)}(x_j + x_{j*}) \right] \sqrt{x_j x_{j*}} I_\alpha \left[2 \frac{\sqrt{x_j x_{j*} z}}{1-z} \right] \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi(1-z)}} \exp \left(\frac{-(x - x_j)^2}{1-z} \right), \quad z \rightarrow 1, \end{aligned}$$

pero se tiene que

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-z)}} \exp \left(\frac{-(x - x_j)^2}{1-z} \right),$$

entonces por lo anterior se tiene el siguiente resultado al cual se aproxima el Kernel $K(z, \alpha, x_j, x)$ tiende a la Delta de Dirac,

$$K(z, \alpha, x_j, x) \approx \delta(x - x_j) \quad \text{si } z \rightarrow 1$$

CAPÍTULO 6

APLICACIONES DE LA FORMULA DE CUADRATURA

1. Probando la cuadratura con la función $I_\alpha(b_j x)$

En este capítulo se presentarán pruebas numéricas para la fórmula de cuadratura las cuales fueron programadas en Mathematica. presentaré algunos ejemplos de integrales las cuales serán calculadas con la fórmula de cuadratura mencionada en el teorema (3.1), esto con el fin de calcular el grado de exactitud de la aproximación y observar la eficiencia de la misma.

Ejemplo 1. Ahora vamos a proceder a utilizar la fórmula de cuadratura que obtuvimos esto se hará utilizando los resultados que se tienen en la definición 3.1. La integral que vamos a aproximar es la siguiente, como se observa el valor exacto es bien conocido.

$$(100) \quad L = \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} = 0.526497.$$

Como se observa se forma una función de a , o lo que es lo mismo de z (ya que $a(z)$, ver definición 3.1). Lo primero que se tiene que hacer es tomar el valor del $f(x) = 1/I_\alpha(b_j x)$ y sustituirlo en la ecuación (92) esto para obtener la integral (100) del lado izquierdo de la ecuación y entonces del lado derecho obtendremos la forma de la fórmula de cuadratura para la integral (100), la cual se presenta a continuación

$$L \approx \frac{z^{\alpha/2}(1-z)}{2} \frac{e^{ay_j^2}}{\sqrt{y_j}} \sum_{k=1}^N (-1)^{j+k} K_{jk} \frac{f(x_k)}{\sqrt{y_k}}.$$

Como se puede notar la fórmula de cuadratura depende de α , y_j , z , donde j es el grado del polinomios de Laguerre de más alto grado que utilizaremos de la definición (3.1) para el valor de u_{kj} , esto es un hecho relevante ya que estos valores se deben de tomar en cuenta a la hora de programar la fórmula de cuadratura y dependen directamente en los cálculos ya que el grado de exactitud dependerá en gran medida de como se combinen estos valores. En nuestro caso elegimos $\alpha = -1/2$, $j = 31$, hay que observar que la fórmula de cuadratura dependerá del parámetro z , por lo que hay que tomar varios valores de esta para evaluar la cuadratura.

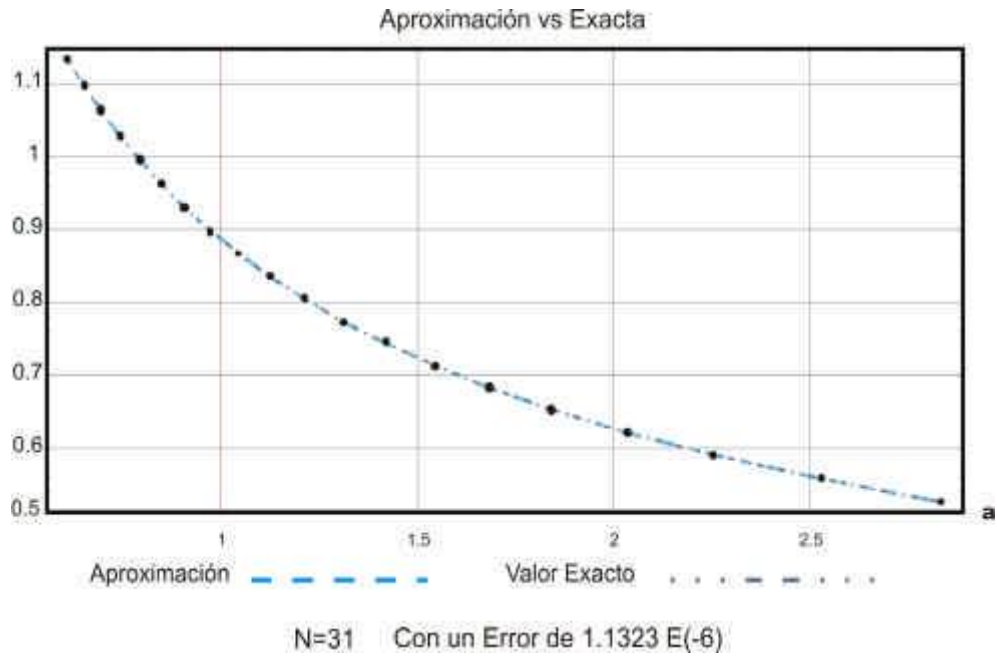


Figura 1: Aproximación de grado 31.

La siguiente es una gráfica del error, como se observa decrece el error de la aproximación en este caso

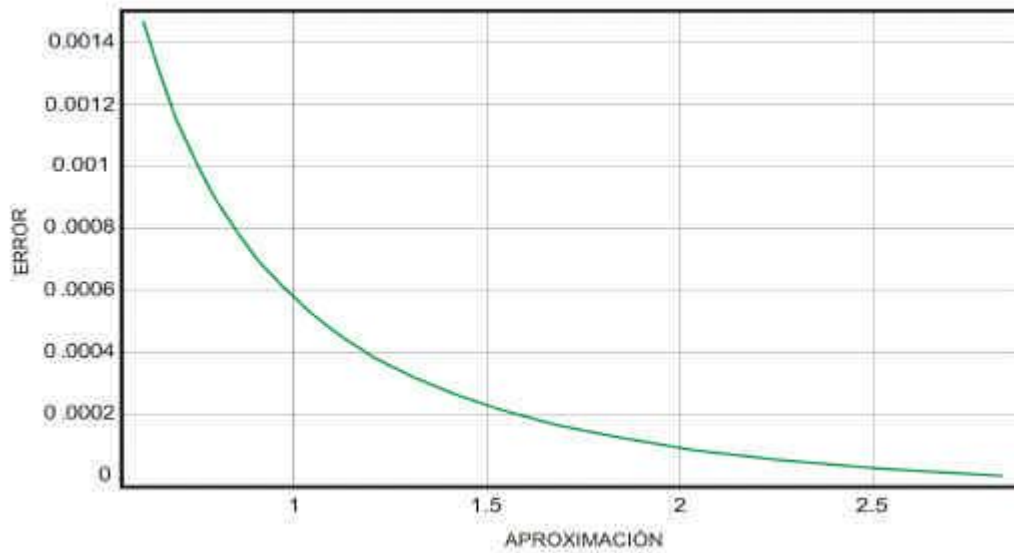


Figura 2: Gráfica de Error. Error = 1.13230 E-6 %Error=0.0002

Solo por mencionar también calcule para la integral (muy conocida) $\int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.886227$ una aproximación. El resultado de la aproximación fue de 0.885981, lo que arroja un error de 0.000246049, esto quiere decir que representa un error del 0.02%.

Ejemplo 2. Ahora procederemos a realizar la aproximación de la integral siguiente

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} x J_\alpha(cx) I_\alpha(b_jx) dx = \frac{1}{2a} \exp\left(\frac{b_j^2 - c^2}{4a}\right) J_\alpha\left(\frac{cb_j}{2a}\right)$$

Lo primero es tomar un valor fijo para el subíndice j y tomar varios valores de c esto para construir una función que dependa de c . n y α son como en el ejemplo 1, $c = 1, \dots, 10$.

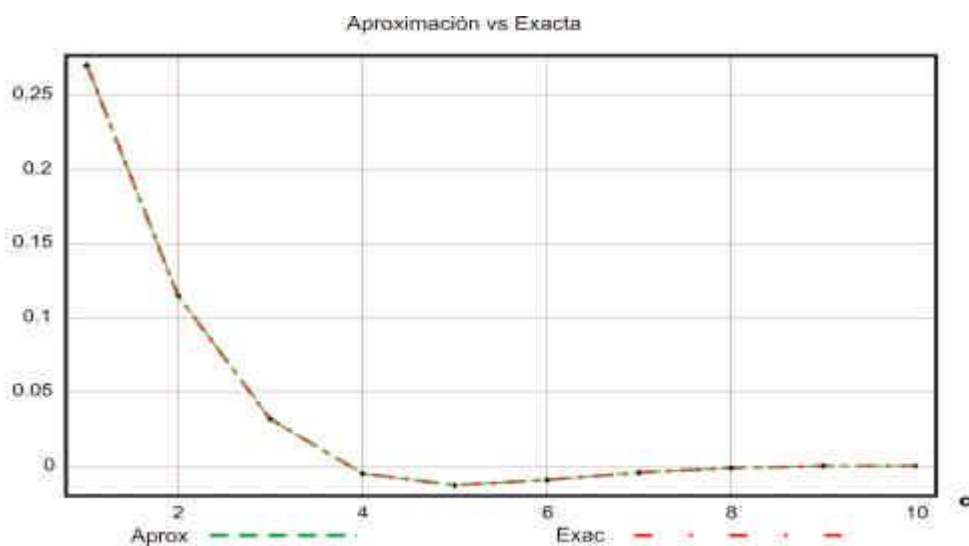


Figura 3: Como se observa la aproximación es buena

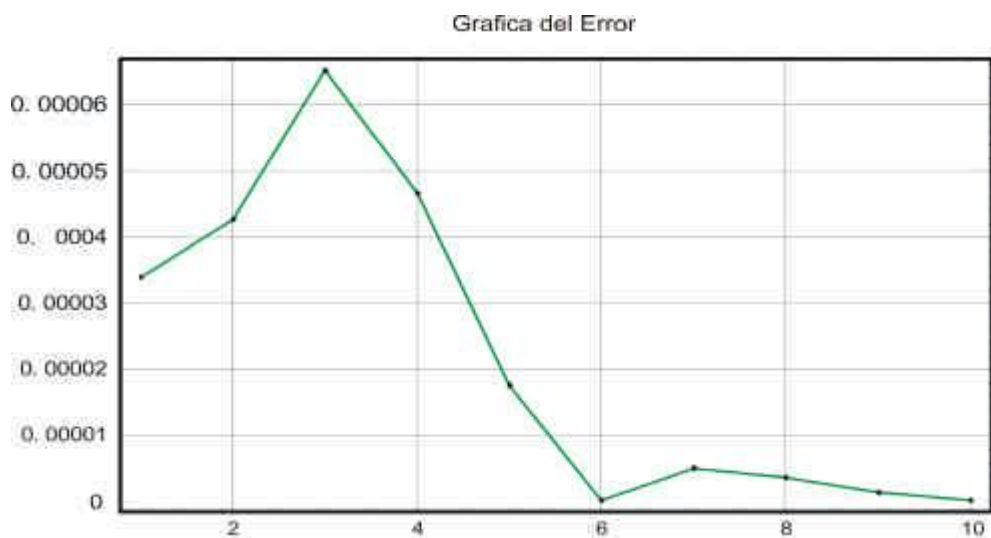


Figura 4: Se puede observar que la aproximación es buena ya que las dos gráficas parecen ser la misma

Ejemplo 3. En el siguiente ejemplo vamos a fijar el valor de j y tomamos varios valores de a (o sea de z), para construir una función de a (de z). La integral que se aproximará es la siguiente:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} I_{\alpha}(b_j x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \exp(b_j^2/8a) I_{\alpha/2}\left(\frac{b_j^2}{8a}\right)$$

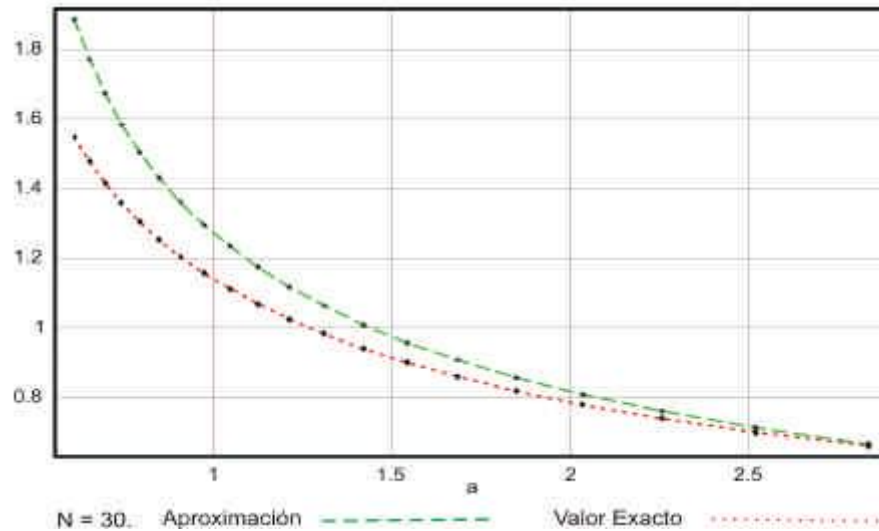


Figura 5: Curva de aproximación contra exacta.

La siguiente es la gráfica del error, la cual se observa el decrecimiento del error conforme avanza la aproximación.

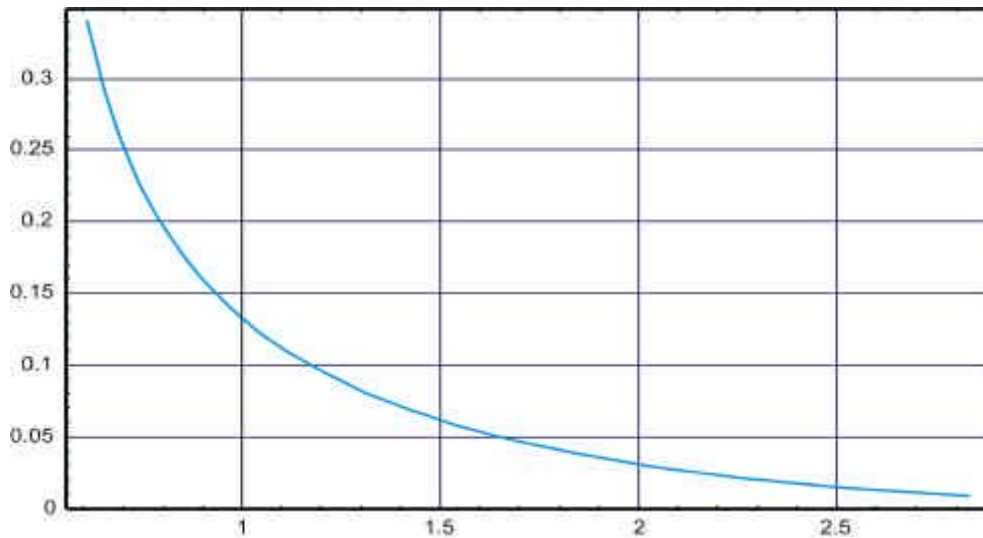


Figura 6: Curva de error. Error = 0.00811683, %Error = 1.22113

En este caso el valor exacto de la integral fue 0.6565 y el valor aproximado obtenido mediante el uso de la fórmula de cuadratura fue 0.66469, con un error = 0.00811683 lo que representa un error del 1.22113 %. Los parámetros utilizados fueron $\alpha = -1/9$, $z = 0.7$.

Ejemplo 4.

$$\int_0^\infty \exp(-b_j^2 x^2 / 2a) x K_\alpha(b_j x) [I_\alpha(b_j x) + I_\alpha(b_j x)] dx = \frac{a}{b_j^2} e^a K_\alpha(a)$$

$$-1 < \operatorname{Re} \alpha < 1$$

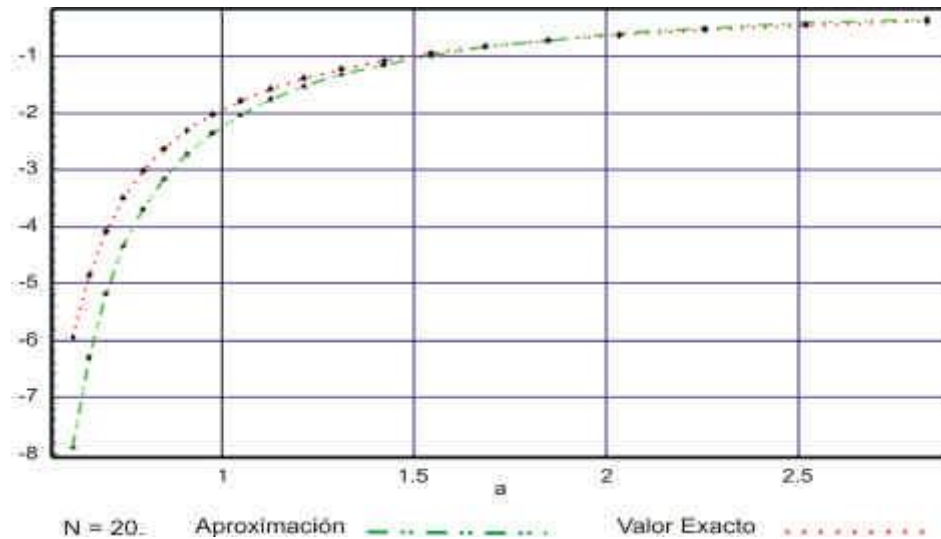


Figura 7: Curva de aproximación contra exacta.

El valor exacto de la integral es -0.390308 y el valor que se obtuvo con la cuadratura fue -0.347826. Con los parámetros $\alpha = -1/2$, $N = 20$, $z = 0.7$

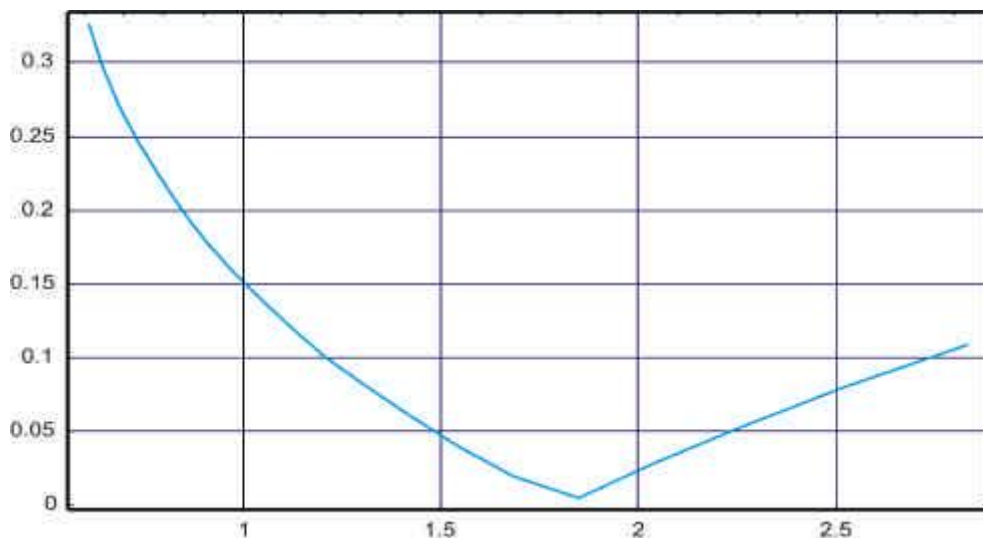


Figura 8: Curva de error. Error = 0.0424812.

2. Probando la cuadratura con la función $J_\alpha(y_j x)$

Ejemplo 1.

$$\int_0^\infty \cos(ax^2)x^{-1/2}J_\alpha(y_j x)\sqrt{y_j x}dx = \frac{(\pi y_j)^{1/2}}{2a^{1/2}} \cos\left(\frac{y_j^2}{8a} - \frac{(\alpha+1)\pi}{4}\right) J_{\alpha/2}\left(\frac{y_j^2}{8a}\right).$$

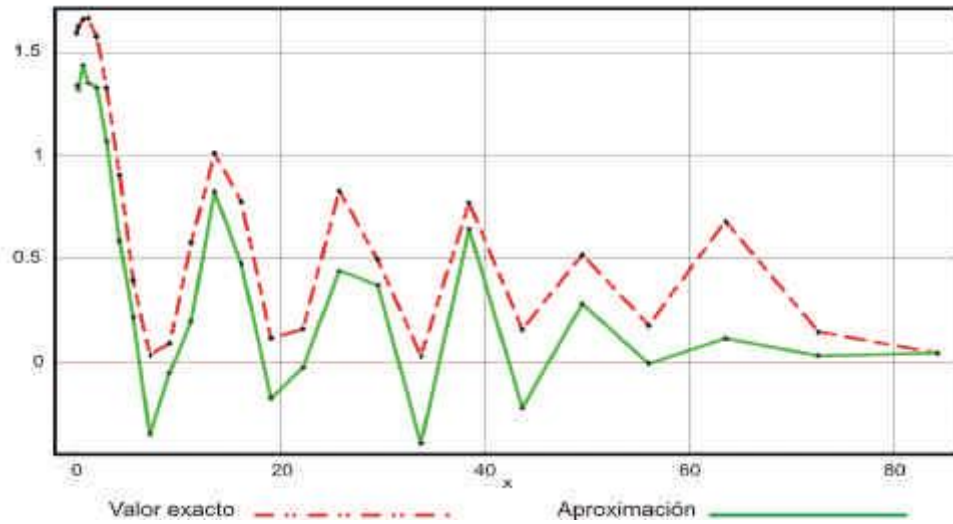


Figura 9: Curva de aproximación contra exacta.

El valor exacto de la integral es 0.0448925 y la aproximación obtenida fue 0.0475545. lo que arroja un error de 0.00266206

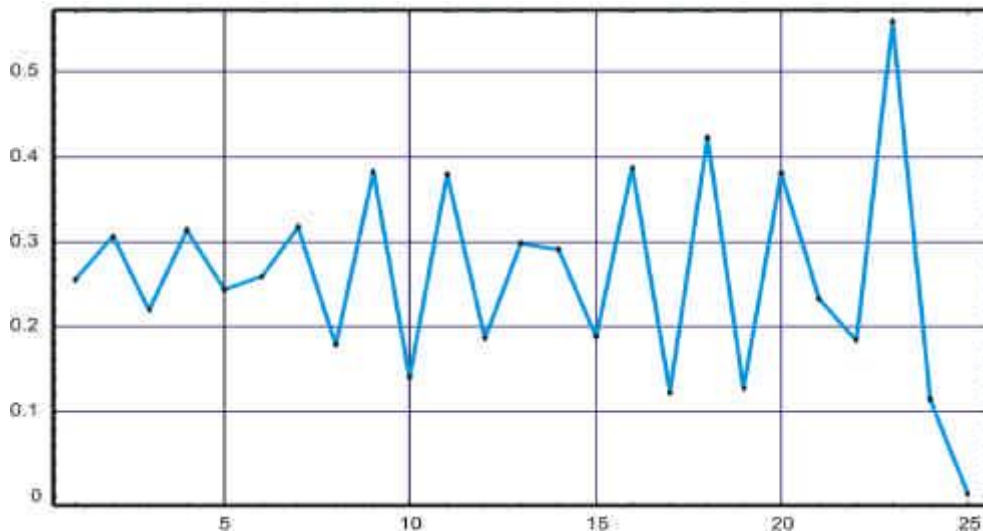


Figura 10: Curva del error.

Como se observa en la gráfica del error este disminuye conforme avanzan al final de la aproximación.

Ejemplo 2.

$$\int_0^5 (x/5)^{\alpha+1/2} J_\alpha(y_j x) \sqrt{y_j x} dx = \sqrt{5/y_j} J_\alpha(5y_j)$$

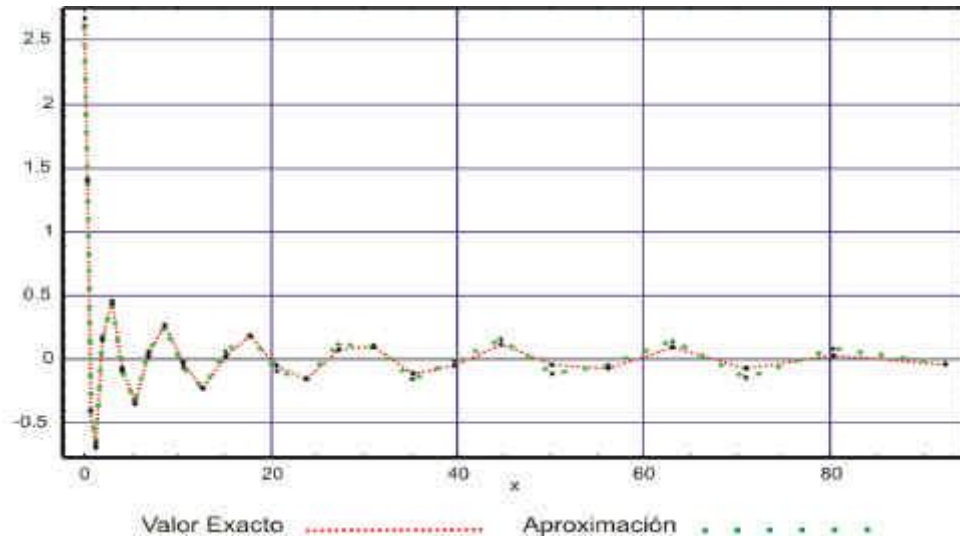


Figura 11: Curva de aproximación contra exacta.

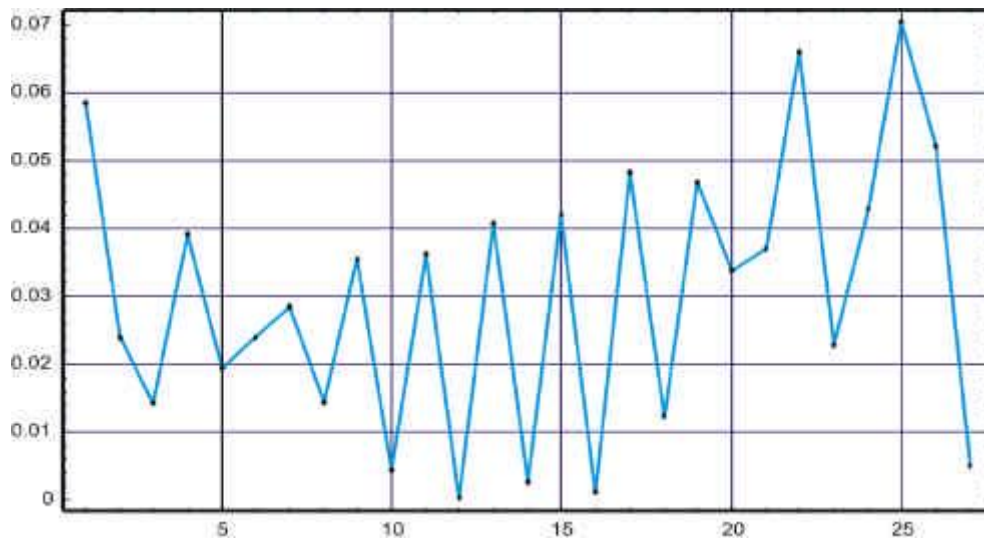


Figura 12: Gráfica del error.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

En esta tesis se comenzó desde elementos de integración numérica pasando por algunas propiedades de los polinomios de Laguerre hasta llegar a una integral de Poisson de la que se obtuvo una fórmula de cuadratura la cual se probó numéricamente.

Aún falta mucho trabajo por hacer dentro del estudio y la aplicación de la cuadratura obtenida. hacen falta muchas pruebas numéricas para ir descubriendo aplicaciones hacia algunos problema en particular. Para fines de la tesis lo que aquí se muestra es suficiente. La mayor parte de este trabajo se debe a los matemáticos G. H. Golub y J. H. Welsh y a su método novedoso para obtener cuadraturas gaussianas, así como también a Mockenhaupt, B. por su formulación de la integral de Poisson para la que se obtuvo una fórmula de cuadratura. Más sin embargo también al trabajo de Rafael González Campos el cual me asesoró en esta tesis y seguirá avanzando en el desarrollo de esta cuadratura para obtener más resultados que sean útiles para cualquiera que necesite una buena aproximación de algún problema físico-matemático, aunque se resalta también el hecho de que la cuadratura obtenida no es perfecta y presenta problemas cuando el valor del parámetro a crece, esto debido al termino exponencial que aparece en la fórmula de cuadratura.

Los resultados que se obtienen para ciertos valores de a son buenos, como se pudo constatar en el cap. 6, esto nos indica que podemos obtener aproximaciones buenas, también hay que resaltar el hecho que no se probó en todo el plano, las pruebas realizadas fueron hechas dentro de $|z| < 1$, cuando z es complejo hay problemas de inestabilidad con la cuadratura. Pero hay que enfatizar el hecho de que este es un resultado nuevo para el cálculo de integrales difíciles. Por lo que para los que se interesen en este trabajo se les invita a que se unan a continuar con el y se puedan descubrir mas aplicaciones ya que resta mucho trabajo aún por investigar.

Bibliografía

- [1] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, Rhode Island (1975).
- [2] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*.
- [3] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, (1991)
- [4] N. N. Lebedev, *Special Functions and Their Applications*, Dover Publications, Inc. (1972)
- [5] A.H. Stround, Numerical quadrature and solution of ordinary differential equations, Springer-Verlag, NY, (1974)
- [6] Jose-Javier Martínez, Polinomios Ortogonales, Cuadratura Gaussiana y problemas de Valores propios, Universidad de la Rioja, Logroño, España, (2001)
- [7] W. Gautschi, On generating orthogonal polynomials, SIAM J. Sci. Stat. Comput. 3 (1982)
- [8] W. Gautschi, Computational aspects of orthogonal polynomial en *Orthogonal polynomials* (Columbus, OH, 1989, P. Nevai, ed.), NATO ASI Ser. C, Math. Phys. Sci. 294, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1990), 181-216.
- [9] G. H. Golub y J. H. Welsh, Calculation of Gauss quadrature rules, Math. Comp. 23 (1969), 221-230.
- [10] D. P. Laurie, Calculation of Gauss-Kronrod quadrature rules, Math. Comp. 66 (1997), 1133-1145.
- [11] H. Wilf, *Mathematics for the physical science*, Wiley, NY. (1962)
- [12] Richard L. Burden, J. Douglas Faires. *Análisis Numérico*, Grupo editorial Iberoamérica.
- [13] MUCKENHOUPT, B. Poisson Integrals for Hermite and Laguerre expansions. Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969), 231-242
- [14] MUCKENHOUPT, B. and E. M. Stein, Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 118 (1965), 17-92.
- [15] I. P. Natanson, *Theory of functions of real variable*, Vol. II, Ungar, New York, 1960.