Universidad Nacional Autónoma de México

y

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

# Medidas tipo Lebesgue

TESIS

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Jesús Antonio Astorga Moreno

*Director:* Dr. Salvador García Ferreira

Morelia, Michoacán, Abril del 2013

# Índice general

## Agradecimientos

La realización de éste trabajo no hubiera sido posible sin la ayuda y paciencia de mi asesor, el Dr. Salvador García Ferreira, no sabe cuánto le aprendí, no sólo en el aspecto matemático, sino también en el personal, por eso mi respeto para usted. Agradezco infinítamente al CCM-UNAM, a la Lic. Adriana Briseño y a la Sra. Maura Chavero Angeles por todo el apoyo dado durante mi maestría y en el proceso de elaboración de mi tésis. No puedo dejar de mencionar al M. en C.M. Sergio Guzmán Sánchez y al M. en C.M. Enrique Rodríguez Castillo ya que sin la ayuda desinteresada de ustedes no hubiera sido posible acabar éste proyecto.

No quiero olvidar a mis sinodales, el Dr. Fernando Hernández Hernández, Dr. David Meza Alcántara y al Dr. Ernesto Vallejo Ruíz, por tomarse el tiempo en revisar mi trabajo y hacerlo de la mejor manera. De manera particular, quiero agradecer al Dr. Yasser Ortíz Castillo por la disposición a ayudarme aún cuando no tenías que hacerlo.

Por último, está mi familia que son el gran motor que me impulsó a lograr ésto. A mi papá y mamá, que aunque no estén conmigo físicamente siempre estuvieron en mis pensamientos cuando quería aventar la toalla. Mis hermanas, Rosa Isabel Astorga Moreno y Mónica Astorga Moreno, gracias por siempre acordarse de mí, gracias moniquera por toda esa ayuda económica y moral que me diste, se que siempre contaré contigo. Al Profr. Luis Mejía Venegas, la Mtra. Florentina Zavala Pineda y la Dra. Manuelita Zavala Pineda, por todo lo que me aguantaron e hicieron por mí, pero sobre todo por creer y confiar en lo que estaba haciendo. A mis dos mujeres, ustedes saben que son todo para mi y hago todo por ustedes, sin su apoyo no hubiera existido esa fuerza que me permitió terminar con éste proyecto, gracias amoras por toda esa paciencia, pero sobre todo gracias por estar conmigo. Las amo, Nidia y Gala.

# Introducción

Una función $f$ con dominio en la colección de conjuntos de dos puntos de un conjunto dado $X$ y rango igual a $X$, se llama *selección débil* si la función evaluada en $\{x,y\}$, toma el valor ya sea de $x$ o de $y$ para todo subconjunto $\{x,y\}$ de $X$. La parte más importante de esta tésis es la introducción de nuevas medidas exteriores, tipo Lebesgue, en los números reales que se definen mediante una selección débil en $\mathbb{R}$. Con ellas se abre un tema nuevo en el área de Teoría General de la Medida que por sus características ofrece una amplia gama de nuevos ejemplos, contraejemplos y resultados sorprendentes, ya que algunos de los que presentamos en éste trabajo van en contra de nuestra intuición basada en lo que aprendimos en nuestro curso básico de Análisis Real. Podemos decir que se ha abierto una infinidad de nuevas líneas de investigación dentro de los temas de Densidades y Topologías de Densidad y al final de éste trabajo concluimos con un listado de problemas que son muy interesantes y ofrecen posibles temas para futuras tésis de posgrado. Las topologías inducidas por selecciones débiles han sido ampliamente estudiadas, por ejemplo en [**12**], [**13**] y por S. García-Ferreira y M. Hrusák donde se han probado propiedades de dichos espacios y descrito contraejemplos para ver que tipo de propiedades topológicas no se cumplen. Es la primera vez que las selecciones débiles se utilizan en Análisis Matemático y como se mencionó antes, éste trabajo propone una gran variedad de preguntas a resolver en ésta área.

Una medida es un número o cantidad que estima la dimensión que ostenta un objeto, en matemáticas es una forma de asignar un número real positivo a los conjuntos. Intuitivamente se interpreta como el "tamaño"de estos, en ese sentido una medida es una generalización de los conceptos de longitud, área y volumen. Para que una función de conjuntos que asigna un número real positivo sea una medida debe satisfacer algunas condiciones, una importante es la aditividad numerable la cual nos dice que el "tamaño"de la unión de una sucesión de subconjuntos disjuntos es igual a la suma de los "tamaños"de dichos subconjuntos. Aunque en general es imposible medir cada subconjunto de un conjunto dado y satisfacer los otros axiomas de medida, éste problema fué resuelto definiéndola sólo en una subcolección del conjunto potencia; así los subconjuntos en los cuáles la medida está definida se llaman medibles y forman una $\sigma$-álgebra, esto es, uniones, intersecciones y complementos de sucesiones de conjuntos medibles son medibles. Vale la pena mencionar que

La Teoría de la Medida se desarrolló a finales del siglo XIX y principios del XX, por Emile Borel, Johann Radon y Maurice Fréchet, entre otros.

En el caso de los reales, la función longitud $l$ de un intervalo acotado $I$ con extremos $a$ y $b$ se define como $l(I) := b - a$. ¿Es posible extender éste concepto de longitud a subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$? Cuando nos queremos contestar ésto recurrimos a lo que conocemos como **Medida de Lebesgue** originada en 1901. Continuando al año siguiente con el desarrollo de la integral de Lebesgue. Ambas fueron incluidas en 1902 como parte del trabajo doctoral del matemático francés Henri Lebesgue (1875-1941) bajo el título *Intégrable, Longueur, Aire*, siendo uno de los primeros en hacerlo con detalle y aplicarlo con éxito a una gran cantidad de problemas de Análisis Real y Complejo, principalmente a la Teoría de las Series e Integrales de Fourier. Primero, anunció su trabajo de Teoría de la Medida e Integración en cinco artículos publicados desde junio de 1899 hasta abril de 1901 en la revista *Comptes Rendu* de la Academia Francesa de Ciencias. En ellos desarrolló las ideas de Borel sobre medidas con gran claridad y generalidad, he introdujo la Medida de Lebesgue axiomáticamente como una función definida en los conjuntos acotados de la línea real tal que

1. Dos conjuntos iguales tienen la misma medida.
2. La medida de un conjunto el cual es la unión finita o numerable de conjuntos disjuntos a pares, es la suma de las medidas de ellos.
3. La medida del intervalo $(0, 1)$ es 1.

Después de ésto, introdujo la integral de Lebesgue la cual fué una aportación totalmente nueva. Uno de los resultados más sobresaliente en la tésis de Lebesgue fué que para una sucesión de funciones medibles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas sobre un conjunto medible $E$, tales que $|f_n(x)| \leq B$ para todo $x$ en $E$ y todo número natural $n$, si $\text{lím}_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe, entonces

$$\int_E \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x).$$

En 1908, Lebesgue generalizó éste resultado y obtuvo el famoso *Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue*. Este resultado fué el producto de una larga busqueda para encontrar la solución al problema donde es permitido integrar series término a término.

Para extender la noción de longitud, primero intentamos aproximar el tamaño de un subconjunto $A$ de $\mathbb{R}$ usando aquellos subconjuntos cuyo tamaño ya conocemos: los intervalos. La manera de hacer ésto es, dado un subconjunto $A$ lo cubrimos de manera numerable con intervalos y sumamos las longitudes de todos los que componen la cubierta. Esto nos dará una aproximación del tamaño del conjunto, siendo el ínfimo sobre todas las sumas de las longitudes de los intervalos en las posibles cubiertas numerables del conjunto la medida *exterior* de Lebesgue para $A$. El primero en introducir una teoría general de medidas exteriores fué Constantin Carathéodory (1873-1950), ésto para dar una base a la teoría de conjuntos medibles y funciones contablemente aditivas. El trabajo de Carathéodory encontró muchas aplicaciones tales como la teoría conjuntista de medidas y sobre todo, el propósito de construir una medida exterior sobre todos los subconjuntos de $X$ es escoger una clase de subconjuntos que satisfagan la propiedad de aditividad numerable. Este método es conocido como la construcción de Carathéodory y es una manera de obtener el concepto de Medida de Lebesgue que es tan importante en muchas áreas de la matemática. Una de las grandes aportaciones de ésta materia es ser la base para la axiomatización de la Teoría de Probabilidades, hecha por Kolmogoroff en 1933.

La clase de todos los conjuntos Lebesgue medibles tiene la misma cantidad de elementos de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Una pregunta natural sería: ¿Ésta familia es igual al conjunto potencia de $\mathbb{R}$? Un resultado debido a S. M. Ulam (1930), el cual asumiendo la hipótesis del continuo, implica que no es posible extender la noción de subconjunto medible a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$, así que bajo esa suposición la respuesta es no. ¿Qué podemos decir si ahora no consideramos ésta hipótesis? para contestar ésta pregunta, uno puede intentar construir un subconjunto $B \subset \mathbb{R}$ tal que no es Lebesgue medible, o asumir que tal conjunto existe e intentar ver donde se puede encontrar una contradicción. G. Vitali (1905), F. Bernstein (1908), H. Rademacher (1916) y otros construyeron tal conjunto asumiendo el Axioma de Elección, El ejemplo de Vitali usó la propiedad de la invarianza en la translación de la medida de Lebesgue, mientras que el de Bernstein propiedades de regularidad. Rademacher provó que cada conjunto de medida positiva incluye un conjunto no medible, clararamente todas estas construcciones son bajo la suposición del Axioma de Elección y Lebesgue mismo no las aceptó. En 1970 R. Solovay provó que si se incluye el enunciado ”todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ son Lebesgue medibles“ como un axioma de la Teoría de Conjuntos, éste es consistente con los demás, si no suponemos el Axioma de Elección.

La noción de punto de Densidad fué definida a principios del siglo XX. Mientras que hasta 1952 apareció la Topología de Densidades que rápidamente se volvió un concepto importante. Este concepto aparece por primera vez en los artículos de Haupt and Pauc (1952, 1954), aunque éstos artículos casi no tuvieron impacto en su época. Un estudio más serio de la Topología de Densidades data de 1961, en los artículos de Goffman y Waterman junto con otras importantes contribuciones que se pueden encontrar en artículos de Neugebauer, Nishiura y Tall. Esta pequeña reseña histórica, nos motiva a un estudio más profundo de nuestras nuevas medidas, densidades y topologías para enfocarlas hacia temas actuales y de amplio campo de investigación.

La organización de éste trabajo de tésis está dada de la siguiente manera:

En el capítulo 1, se presentan los preliminares necesarios en Teoría de la Medida y Análisis básico para el desarrollo de lo que viene después, así como un estudio un poco detallado de la Densidad de Lebesgue y su topología asociada, para presentar al lector la mayor cantidad de propiedades que cumple el Espacio Topológico resultante y dar una caracterización lo más completa posible. Esto marca la pauta para cuando se defina una nueva densidad y se analize su topología asociada. En el segundo capítulo, además de introducir las nuevas medidas exteriores en $\mathbb{R}$, se analizan algunas propiedades ya sea de manera general o dando algún contraejemplo, que en la mayoría de los casos desafían nuestra intuición. Por último, introducimos la $\mathcal{I}$-densidad así como otras propuestas que podrían ser útiles cuando ciertos espacios de $f$-medida estén involucrados, terminando con una lista de preguntas derivadas de lo estudiado en éste trabajo, ya que conforme avanzabamos en la realización del mismo nos dimos cuenta de la cantidad de observaciones interesantes que se pueden obtener con lo manejado en ésta tésis.

Capítulo 1

# Preliminares

El propósito de este capítulo preliminar es dar las principales definiciones básicas y los resultados técnicos que serán mencionados con frecuencia dentro de ésta tésis. Somos concientes que muchas de éstas nociones son familiares para el lector, por esa razón sólo serán enunciadas por referencia y completez.

## 1. Conceptos generales

La *diferencia* de dos conjuntos $A$ y $B$ será denotada por $A \setminus B := \left\{x \in A \ : \ x \notin B\right\}$ y su *diferencia simétrica* $A \triangle B$ es el conjunto de puntos que pertenecen a uno de ellos pero no a ambos, es decir es igual a $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Dado $A$ subconjunto de $X$, la *función característica* $\chi_A : X \to \left\{0, 1\right\}$ está dada por la regla

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Una sucesión será denotada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. El continuo $\mathfrak{c}$ es la cardinalidad de los números reales y la *cardinalidad* de un conjunto $X$ se representará por $|X|$.

**Proposición 1.1.** *Si $A$ es un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$, entonces $|\mathbb{R} \setminus A| = \mathfrak{c}$.*

Para ver la demostración de éste resultado consultar [**4**, p. 172].

Dado un conjunto distinto del vacío $X$, el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de dos puntos de $X$ será denotado por

$$[X]^2 := \left\{\{x, y\} \ : \ x, y \in X \quad \text{y} \quad x \neq y\right\}.$$

Esta familia de conjuntos de dos puntos de un conjunto infinito es crucial para las nuevas medidas exteriores que se introducirán y estudiarán en el segundo capítulo.

Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $B \subseteq X$. A la *cerradura* y el *interior* de $B$ en $(X, \tau)$ los representaremos como $Cl_\tau(B)$ e $Int_\tau(B)$, respectivamente. En lo posterior, $\leq$ denotará el orden usual (Euclideano) de $\mathbb{R}$ y $\tau_E$ denota la topología inducida por dicho orden.

**Definición.** Un subconjunto no vacío $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, es un *filtro* en $X$ si

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. $A, B \in \mathcal{F}$ implica $A \cap B \in \mathcal{F}$.
3. $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$ implica $B \in \mathcal{F}$.

• Como ejemplos de filtros podemos mencionar el filtro de Fréchet el cuál consiste en la familia de subconjuntos cofinitos de un conjunto infinito. De manera dual tenemos el siguiente concepto.

**Definición.** Un subconjunto no vacío $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$, es un *ideal* en $X$ si

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$.
2. $A, B \in \mathcal{I}$ implica $A \cup B \in \mathcal{I}$.
3. $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$ implica $B \in \mathcal{I}$.

• Si $\mathcal{I}$ es un ideal sobre $X$, entonces $\mathcal{F}_{\mathcal{I}} = \{A \subseteq X : X \setminus A \in I\}$ denota el *filtro dual* del ideal $\mathcal{I}$. De manera análoga, podemos definir el *ideal dual* $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ de un filtro $\mathcal{F}$ en $X$.

Algunos ejemplos de ideales son:

• El conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$.

• La familia de todos los conjuntos finitos de un conjunto infinito $X$.

• Si $(X, \tau)$ es un espacio topológico, la familia de conjuntos magros y la familia de los conjuntos densos en ninguna parte forman ideales en $X$

Recordemos a continuación las nociones básicas para definir los espacios de medida.

**Definición.** Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos $X$ se llama una *álgebra* si cumple las siguientes propiedades:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
2. $A \cap B \in \mathcal{A}, \quad$ si $\quad A, B \in \mathcal{A}$
3. $A^c \in \mathcal{A} \quad$ si $\quad A \in \mathcal{A}$

**Definición.** Un álgebra $\mathcal{S}$ de subconjuntos $X$ que es cerrada bajo uniones numerables, se llama *$\sigma$-álgebra*.

**Definición.** Si $C$ es una colección de subconjuntos de $X$, el *álgebra generada* por $C$ es la única álgebra más pequeña que contiene a $C$ y la denotaremos por $\mathcal{A}(C)$. De manera análoga se define la $\sigma$-álgebra generada por $C$ y se denotará como $\mathcal{S}(C)$.

Los siguientes resultados de los cursos básicos de Análisis Matemático serán muy útiles para estudiar las propiedades de Densidad.

**Lema 1.2.** *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tales que*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

*Si la sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple para cada $n \in \mathbb{N}$ que $a_n \leq c_n \leq b_n$, entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

*Demostración.* Supongamos que $a_n, b_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} h < +\infty$. Sabemos que para $\epsilon > 0$ se cumple lo siguiente:

1. Existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - h| < \epsilon$ para todo $n > N_1$.
2. Existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - h| < \epsilon$ para todo $n > N_2$.

Sea $N_0 = \text{máx}\left\{N_1, N_2\right\}$. Para todo $n > N_0$ por (1) y (2) se obtiene que

$$h - \epsilon < a_n \quad \text{y} \quad b_n < h + \epsilon, \tag{1.1}$$

pero sabemos que para todo $n$, y en particular para todo $n > N_0$, se tiene $a_n \leq c_n \leq b_n$. De ésta desigualdad junto con 1.1 deducimos que

$$h - \epsilon < c_n < h + \epsilon \quad \text{para todo} \quad n > N_0.$$

Como lo anterior se puede hacer para $\epsilon > 0$ arbitrario, entonces resulta que $c_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} h$. ■

**Proposición 1.3.** *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen.*

1. $\liminf_{n\longrightarrow+\infty} a_n \leq \limsup_{n\longrightarrow+\infty} a_n$.
2. $-\liminf_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \limsup_{n\longrightarrow+\infty} -a_n$.
3. *Si las sucesiones son acotadas se tiene*

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} a_n + \liminf_{n\longrightarrow+\infty} b_n \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\longrightarrow+\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\longrightarrow+\infty} a_n + \limsup_{n\longrightarrow+\infty} b_n.$$

*Además, si una de las sucesiones es convergente, en (3) se dá la igualdad.*

*Demostración.* (**1**) Este resultado es claro por propiedades de ínfimo y supremo.

(**2**) Sean $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ subsucesiones de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} z_n = \limsup_{n\to+\infty} -a_n.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
-\operatorname{lím\,inf}_{n\to+\infty} a_n = -\operatorname{lím}_{n\to+\infty} y_n &= \operatorname{lím}_{n\to+\infty} -y_n \\
&\leq \operatorname{lím\,sup}_{n\to+\infty} -a_n = -\operatorname{lím}_{n\to+\infty} z_n \\
&\leq -\operatorname{lím\,inf}_{n\to+\infty} a_n.
\end{aligned}$$

(**3**) Como las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son acotadas poseen subsucesiones $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(b_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergentes. Sean $a$ y $b$ sus límites, respectivamente. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\operatorname{lím\,sup}_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = a + b &= \operatorname{lím}_{k\to+\infty} a_{n_k} + \operatorname{lím}_{j\to+\infty} b_{n_j} \\
&\leq \operatorname{lím\,sup}_{n\to+\infty} a_n + \operatorname{lím\,sup}_{n\to+\infty} b_n.
\end{aligned}$$

Finalmente, si $\operatorname{lím}_{n\to+\infty} a_n = a$, entonces escogemos una subsucesión $(b_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\operatorname{lím}_{n\to+\infty} b_{k_n} = \operatorname{lím\,sup}_{n\to+\infty} b_n$. Obteniendo de aquí lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\operatorname{lím\,sup}_{n\to+\infty} a_n + \operatorname{lím\,sup}_{n\to+\infty} b_n &= a + \operatorname{lím}_{n\to+\infty} b_{k_n} \\
&= \operatorname{lím}_{n\to+\infty}(a_n + b_{k_n}) \\
&\leq \operatorname{lím\,sup}_{n\to+\infty}(a_n + b_n).
\end{aligned}$$

Utilizando (**1**) y (**2**), obtenemos la otras desigualdades. ■

**Teorema 1.4.** *Sean $X, Y$ espacios métricos y $f : A \to Y$ en donde $A \subseteq X$. Si $p$ es punto de acumulación de $A$, se tiene entonces que*

$$\operatorname{lím}_{x\to p} f(x) = q \quad \textit{si y sólo si} \quad lim_{n\to+\infty} f(p_n) = q$$

*para cada sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $A$, tal que para cada entero $n$, $p_n \neq p$ y $lim_{n\to+\infty} p_n = p$.*

Para ver la demostración de éste resultado consultar [**8**, p. 84]. ■

El teorema que a continuación se presenta se le conoce como *Teorema de Reordenación para Series Dobles*.

**Teorema 1.5.** *Sea $(a_{k,j})_{k,j\in\mathbb{N}}$ una sucesión doble de terminos positivos y $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ una biyección. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$ converge si y solo si las series*

$$\sum_{j=1}^{+\infty} a_{k,j}\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \qquad y \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} a_{k,j}$$

*son convergentes. Si es el caso, se tiene $\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} a_{k,j} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$.*

Para ver la demostración de éste resultado consultar [**1**, p. 245]. ■

## 2. Espacios de medida

**Definición.** Sean $X \neq \emptyset$ y $C \subseteq X$. Una función de conjuntos $\mu : C \longrightarrow [0, +\infty]$ es una *medida* sobre $C$ si

1. $\emptyset \in C$ cumpliéndose que $\mu(\emptyset) = 0$
2. Para una sucesión $\{A_n\}$ de subconjuntos disjuntos en $C$, tenemos

$$\mu\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

**Definición.** Sea $X \neq \emptyset$. Una función de conjuntos $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ es una *medida exterior* si cumple las siguientes propiedades:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$ y $\mu^*(A) \geq 0$ para cada $A \subseteq X$.
2. $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ siempre que $A \subseteq B$. (**Monotonía)**
3. $\mu^*(A) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu^*(A_i)$ si $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. **(Subaditividad)**

• Para nosotros, $\lambda^*$ representa la medida exterior de Lebesgue la cual se define de la siguiente manera:

Para cada subconjunto $A$ de $\mathbb{R}$ sea $C_A$ el conjunto de todas las sucesiones infinitas $((a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos semiabiertos tales que $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n]$. Entonces $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$ se define como

$$\lambda^*(A) := \text{ínf}\Big\{ \sum_{n\in\mathbb{N}}(b_n - a_n) \ : \ ((a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}} \in C_A\Big\},$$

para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}$. La inclusión de esta definición nos justifica el nombre de ”Medidas tipo Lebesgue” que se le darán a las medidas exteriores definidas por selecciones débiles sobre los números reales.

**Definición.** Sea $\mu^*$ una medida exterior sobre $X$. Un subconjunto $A$ de $X$ se dice que es $\mu^*$-*medible* (o sólo medible) si para cada $B \subseteq X$ se cumple

$$\mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B). \qquad \textbf{(Condición de Carathéodory)}$$

• Denotamos por $\mathcal{M}_{\mu^*}$ a la clase de todos los subconjuntos $\mu^*$-medibles de $X$. En particular, $\mathcal{M}$ será la clase de todos los conjuntos Lebesgue medibles. Los subconjuntos de $X$ tales que su medida exterior sea cero, los representamos por $\mathcal{N}_{\mu^*}$ y se le llamará $\mu^*$-nulos. Para la medida exterior de Lebesgue, sus conjuntos $\lambda^*$-nulos se denotan por $\mathcal{N}$.

**Definición.** La tripleta $(X, \mathcal{S}, \mu)$ es un *espacio de medida* si $\mathcal{S}$ es una $\sigma$-álgebra en $X$ y $\mu$ es una medida sobre $\mathcal{S}$.[1]

[1] Al par $(X, \mathcal{S})$ se le llama *espacio medible*.

**Definición.** Un espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$ es *finito* si $\mu(X) < +\infty$ y *$\sigma$-finito* si bajo $\mu$, $X$ es la unión de una sucesión de conjuntos en $\mathcal{S}$ los cuáles tienen medida finita.

**Definición.** Sean $E \subseteq X$ y $\mu^*$ una medida exterior en X. Un *Kernel medible* es un conjunto $K \subseteq E$ tal que $\mu^*(A) = 0$ para todo $A \subseteq K \setminus E$.

**Definición.** Un espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$ cumple con la *condición de cadena contable* (es **c.c.c**) si toda colección disjunta de elementos en $\mathcal{S}$ con medida positiva, es numerable.

**Definición.** Si $(X, \mathcal{S})$ es un espacio medible y $A$ un subconjunto de $X$ que pertenece a $S$, entonces una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es *$\mathcal{S}$-medible* si satisface una de las siguientes condiciones[2]:

1. Para cada número real $t$ el conjunto $\left\{x \in A \;:\; f(x) \leq t\right\}$ pertenece a $\mathcal{S}$.
2. Para cada número real $t$ el conjunto $\left\{x \in A \;:\; f(x) < t\right\}$ pertenece a $\mathcal{S}$.
3. Para cada número real $t$ el conjunto $\left\{x \in A \;:\; f(x) \geq t\right\}$ pertenece a $\mathcal{S}$.
4. Para cada número real $t$ el conjunto $\left\{x \in A \;:\; f(x) > t\right\}$ pertenece a $\mathcal{S}$.

**Definición.** Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{S}$-medibles. Decimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f$ *casi en todas partes*, si el conjunto

$$N = \left\{x \in X \;:\; (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{no converge a} \quad f(x)\right\}$$

es elemento de $\mathcal{S}$ y cumple que $\mu(N) = 0$.

**Definición.** Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{S}$-medibles. Decimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en medida* a $f$, si para cada $\epsilon > 0$ tenemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\left(\left\{x \in X \;:\; |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\right\}\right) = 0.$$

**Lema 1.6.** *Si $E \in \mathcal{M}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lambda^*(n \cdot E) = n \cdot \lambda^*(E)$.*

*Demostración.* Primero, notemos que $n \cdot E \subseteq \underbrace{E + \cdots + E}_{n-veces}$ y $\lambda^*(n \cdot E) \leq n \cdot \lambda^*(E)$. Consideremos una cubierta numerable $\left\{(a_i, b_i] \;:\; i \in \mathbb{N}\right\}$ de $n \cdot E$. Veremos que $\left\{(\frac{a_i}{n}, \frac{b_i}{n}] \;:\; i \in \mathbb{N}\right\}$ es una cubierta para $E$. En efecto, sea $x \in E$. Sabemos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot x \in (a_j, b_j]$. Por lo cual, $x \in (\frac{a_i}{n}, \frac{b_i}{n}]$ y concluimos que $\left\{(\frac{a_i}{n}, \frac{b_i}{n}] \;:\; i \in \mathbb{N}\right\}$ es una cubierta para $E$. Por lo anterior, para cada cubierta numerable $\left\{(\frac{a_i}{n}, \frac{b_i}{n}] \;:\; i \in \mathbb{N}\right\}$ de $n \cdot E$, se tiene

$$\lambda^*(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |\frac{b_i}{n} - \frac{a_i}{n}| \qquad \text{o equivalentemente} \qquad n \cdot \lambda^*(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |b_i - a_i|.$$

[2]Observemos que si la función $f$ satisface una de las condiciones lo hará con todas, al ser equivalentes.

Por lo tanto, aplicando la definición de $\lambda^*(n \cdot E)$, se debe cumplir la desigualdad

$$n \cdot \lambda^*(E) \leq \lambda^*(n \cdot E). \qquad \blacksquare$$

**Lema 1.7.** *Sean $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ y $E \subseteq \mathbb{R}$. Si $E_1 \subseteq E \subseteq E_2$ y $\lambda^*(E_1 \triangle E_2) = 0$, entonces $E \in \mathcal{M}$.*

*Demostración.* Notemos que $E_1 \triangle E_2 = E_2 \setminus E_1$ y como $E \setminus E_1 \subseteq E_2 \setminus E_1$, se tiene $\lambda^*(E \setminus E_1) = 0$. Para $B \subseteq \mathbb{R}$ se cumple $\lambda^*(E^c \cap B) \leq \lambda^*(E_1^c \cap B)$, y además $E \cap B = [(E \setminus E_1) \cap B] \cup (E_1 \cap B)$. Obteniendo $\lambda^*(E \cap B) \leq \lambda^*(E_1 \cap B)$. Por lo cual,

$$\lambda^*(E^c \cap B) + \lambda^*(E \cap B) \leq \lambda^*(E_1^c \cap B) + \lambda^*(E_1 \cap B) \leq \lambda^*(B).$$

La otra desigualdad se dá por la subaditividad de $\lambda^*$. Por lo tanto, $E \in \mathcal{M}$. $\blacksquare$

**Teorema 1.8.** *Sean $E \subseteq A$ y $A \in \mathcal{M}$ con $\lambda^*(A) < +\infty$. Si $\lambda^*(A) = \lambda^*(E) + \lambda^*(A \setminus E)$, entonces $E \in \mathcal{M}$.*

**Teorema 1.9.** *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ y $\lambda^*(A) > 0$ entonces existe $E \subseteq A$ tal que $E \notin \mathcal{M}$.*

Para ver la demostración de éste resultado consultar [**5**, p. 135-136]. $\blacksquare$

**Lema 1.10.** *Si $M$ es un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$, entonces para cada $A \subseteq \mathbb{R}$ se tiene*

$$\lambda^*(A) = \text{ínf}\Big\{ \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - a_n) \,:\, \forall\, n \in \mathbb{N}\ (a_n, b_n \in \mathbb{R} \setminus M) \quad y \quad A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n] \Big\}.$$

*Demostración.* Para $A \subseteq \mathbb{R}$ y $M$ subconjunto numerable, sean

$$C = \Big\{ \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - a_n) \,:\, A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n] \Big\} \quad \text{y}$$

$$C_M = \Big\{ \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - a_n) \,:\, \forall\, n \in \mathbb{N}\ (a_n, b_n \in \mathbb{R} \setminus M) \quad \text{y} \quad A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n] \Big\}.$$

Como $C_M \subseteq C$, $\lambda^*(A) \leq c = \text{ínf}\, C_M$. Ahora, sea $\Big\{(a_n, b_n] \,:\, n \in \mathbb{N}\Big\}$ una cubierta numerable para el conjunto $A$. Probaremos que a partir de ésta cubierta podemos obtener un elemento de $C_M$ el cual conserva su suma de longitudes. Para ésto, sea $S = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $x_{2n} = a_n$ y $x_{2n+1} = b_n$.

Si $S \cap M \neq \emptyset$, entonces en aquellos puntos que se intersectan tomamos, para $\epsilon > 0$, los intervalos

$$(a_i - \frac{\epsilon}{2^i}, a_i + \frac{\epsilon}{2^i}] \quad \text{y} \quad (a_i + \frac{\epsilon}{2^i}, b_i] \qquad \text{ó} \qquad (a_i, b_i - \frac{\epsilon}{2^i}] \quad \text{y} \quad (b_i - \frac{\epsilon}{2^i}, b_i + \frac{\epsilon}{2^i}].$$

Obteniendo de aquí una cubierta de $A$ donde los extremos de los intervalos son elementos de $\mathbb{R} \setminus M$ y además la suma de las longitudes de los intervalos queda de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{+\infty}(b_i - a_i) + \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\epsilon}{2^i} = \sum_{i=1}^{+\infty}(b_i - a_i) + \epsilon.$$

Como la construcción anterior es para $\epsilon$ arbitrario, obtenemos lo deseado. Por lo tanto, por definición de ínfimo, concluimos que $c \leq \lambda^*(A)$. ■

**Teorema 1.11.** *(Propiedad de Invarianza bajo la Traslación) Si $E \in \mathcal{M}$, entonces para cada $x \in \mathbb{R}$ el conjunto $E + x$ es elemento de $\mathcal{M}$ y $\lambda^*(E + x) = \lambda^*(E)$.*

Para ver la demostración de éste resultado consultar [**7**, p. 103]. ■

**Proposición 1.12.** *Sean $\mu^*$ una medida exterior y $\mathcal{A}$ un álgebra en X. Para cada $E \subseteq X$ existe un conjunto $F \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ tal que*

$$E \subseteq F, \qquad \mu^*(E) = \mu^*(F) \qquad y \qquad \mu^*(F \setminus E) = 0.$$

Una demostración de éste hecho se puede consultar en [**7**, p. 90]. ■

**Proposición 1.13.** *Si $\mu^*$ es una medida exterior en X, entonces $\mu^*$ restringida a $\mathcal{M}_{\mu^*}$ es numerablemente aditiva.*

El lector puede consultar la demostración en [**7**, p. 77-78]. ■

**Teorema 1.14.** *(Riesz) Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida finito o $\sigma$-finito. y $f, f_1, f_2, f_3, \ldots$ una sucesión de funciones $\mathcal{S}$-medibles. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en medida a $f$ si y sólo si cada subsucesión $(f_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesion $(f_{m_{p_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $f$ casi en todas partes.*

Una demostración se puede encontrar en [**3**, p. 90]. ■

## 3. Densidad de Lebesgue

**Definición 1.15.** *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $I$ un intervalo y $x \in \mathbb{R}$. La densidad superior e inferior de Lebesgue son las funciones de $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ en $[0, 1]$, definidas respectivamente como*

$$\overline{d}(A, x) := \limsup_{n\to+\infty}\left\{\frac{\lambda^*(A \cap I)}{\lambda^*(I)} \ : \ x \in I \quad y \quad \lambda^*(I) < \frac{1}{n}\right\} \qquad y$$

$$\underline{d}(A, x) := \liminf_{n\to+\infty}\left\{\frac{\lambda^*(A \cap I)}{\lambda^*(I)} \ : \ x \in I \quad y \quad \lambda^*(I) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Aplicando la Proposición 1.3, se obtiene:

- Para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ se tiene $0 \leq \underline{d}(A, x) \leq \overline{d}(A, x) \leq 1$.
- Si $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\underline{d}(A, x) \leq \underline{d}(B, x)$ y $\overline{d}(A, x) \leq \overline{d}(B, x)$.

Con el siguiente ejemplo, ilustraremos que la densidad superior e inferior pueden ser distintas.

**Ejemplo 1.16.** Sea $E = [\frac{1}{2}, 1]$ y consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ los intervalos

$$I_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \quad \text{y} \quad J_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}\right).$$

Podemos observar lo siguiente:

$$\frac{\lambda^*(E \cap I_n)}{\lambda^*(I_n)} = \frac{n}{n+1} \quad \text{y} \quad \frac{\lambda^*(E \cap J_n)}{\lambda^*(J_n)} = \frac{1}{n+1},$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Concluyendo de éstas identidades lo siguiente

$$\overline{d}\left(E, \frac{1}{2}\right) = \limsup_{n \to +\infty} \left\{\frac{n}{n+1} \ : \ \frac{1}{2} \in I_n\right\} = \limsup_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

y

$$\underline{d}\left(E, \frac{1}{2}\right) = \liminf_{n \to +\infty} \left\{\frac{1}{n+1} \ : \ \frac{1}{2} \in J_n\right\} = \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Cuando calculamos las densidades inferior y superior en el punto 1, éstas se invierten y para un punto en el interior de $E$ son iguales a 1. □

Cuando se dá la igualdad $\overline{d}\,(A, x) = \underline{d}\,(A, x)$ diremos simplemente *densidad* de $A$ con respecto a $x$ y la denotamos por $d(A, x)$. En caso de que $d(A, x) = 1$, a $x$ se le llamará *punto de densidad* y si la densidad es cero será un *punto de dispersión*.

**Lema 1.17.** *Si $E \in \mathcal{M}$ y $d(E, x)$ existe, entonces $d(E^c, x)$ también existe y se cumple*

$$d(E, x) + d(E^c, x) = 1.$$

*Demostración.* Sea $I$ un intervalo. Notemos que para $E \in \mathcal{M}$ se cumple

$$\frac{\lambda^*(E \cap I)}{\lambda^*(I)} + \frac{\lambda^*(E^c \cap I)}{\lambda^*(I)} = 1.$$

Para $x \in \mathbb{R}$ consideremos los conjuntos

$$U = \left\{\frac{\lambda^*(E^c \cap I)}{\lambda^*(I)} \ : \ x \in I\right\}, \quad V = \left\{\frac{\lambda^*(E \cap I)}{\lambda^*(I)} \ : \ x \in I\right\} \quad \text{y} \quad W = \left\{\frac{\lambda^*(E \cap I)}{\lambda^*(I)} + \frac{\lambda^*(E^c \cap I)}{\lambda^*(I)} \ : \ x \in I\right\}.$$

Como $\liminf V = \limsup V = 1 = d(E, x)$ al tomar el límite superior e inferior al conjunto $W$, por la Proposición 1.3, se cumple que

$$\limsup W = \limsup U + \limsup V \quad \text{y} \quad \liminf W = \liminf U + \liminf V.$$

Obteniendo

$$\overline{d}(E, x) = 1 - \overline{d}(E^c, x) \quad \text{y} \tag{3.1}$$

$$\underline{d}(E, x) = 1 - \underline{d}(E^c, x). \tag{3.2}$$

Ahora, igualando la ecuación 3.1 con 3.2 obtenemos que $d(E^c, x)$ existe. La segunda parte es similar. ■

**Afirmación 1.18.** Si $x$ es un punto de densidad de $E \in \mathcal{M}$, entonces será un punto de dispersión de su complemento.

Para $A \subseteq \mathbb{R}$, el *conjunto de puntos de densidad de* $A$ se denota por $\mathcal{D}(A)$. Esto es

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{ x \in \mathbb{R} \ : \ d(A, x) = 1 \Big\}.$$

Para conjuntos Lebesgue medibles tenemos las siguientes propiedades.

Como notación, dados $A, B$ subconjuntos de $\mathbb{R}$, $A \sim B$ significa que $A \triangle B$ es un conjunto nulo.

**Proposición 1.19.** *Sean $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$. Entonces:*

1. $\mathcal{D}(\emptyset) = \emptyset$ *y* $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,
2. *si* $E_1 \sim E_2$, *entonces* $\mathcal{D}(E_1) = \mathcal{D}(E_2)$,
3. $\mathcal{D}(E_1 \cap E_2) = \mathcal{D}(E_1) \cap \mathcal{D}(E_2)$, *y*
4. *para* $E_1 \subseteq E_2$ *se tiene* $\mathcal{D}(E_1) \subseteq \mathcal{D}(E_2)$.

*Demostración.* La primera afirmación es una consecuencia inmediata de la definición de $\mathcal{D}(A)$. Para probar la segunda, sea $I$ un intervalo. Entonces

$$[(E_1 \setminus E_2) \cap I] \subseteq E_1 \setminus E_2 \subseteq E_1 \triangle E_2 \quad \text{y por lo cual,} \quad \lambda^* \left[(E_1 \setminus E_2) \cap I\right] = 0.$$

De manera análoga, podemos establecer la identidad $\lambda^* \left[(E_2 \setminus E_1) \cap I\right] = 0$. Además,

$$E_1 \cap I = [(E_1 \setminus E_2) \cap I] \cup (E_1 \cap E_2 \cap I) \quad \text{y} \quad E_2 \cap I = [(E_2 \setminus E_1) \cap I] \cup (E_1 \cap E_2 \cap I).$$

Recordando que $\lambda^*$ es contablemente aditiva sobre los elementos de $\mathcal{M}$, obtenemos

$$\lambda^*(E_1 \cap I) = \lambda^*(E_1 \cap E_2 \cap I) = \lambda^*(E_2 \cap I).$$

Si $x$ es un punto de densidad de $E_1$ o de $E_2$, entonces se obtiene la relación.

Para el caso de la tercera identidad, primero probaremos el siguiente.

**Lema 1.20.** *Si $E_1, E_2, E_3 \in \mathcal{M}$, entonces*

$$\lambda^*(E_1 \cap E_3) + \lambda^*(E_2 \cap E_3) \leq \lambda^*(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + \lambda^*(E_3).$$

*Demostración.* Como

$$E_1 \cap E_3 \subseteq [(E_1 \cap E_3) \setminus E_2] \cup (E_1 \cap E_2 \cap E_3) \quad \text{y}$$

$$[(E_1 \cap E_3) \setminus E_2] \cup (E_2 \cap E_3) = (E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3) \subseteq E_3$$

se tiene

$$\lambda^*(E_1 \cap E_3) = \lambda^*[(E_1 \cap E_3) \setminus E_2] + \lambda^*(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \quad \text{y} \tag{3.3}$$

$$\lambda^*[(E_1 \cap E_3) \setminus E_2] = \lambda^*[(E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3)] - \lambda^*(E_2 \cap E_3). \tag{3.4}$$

Sustituyendo 3.4 en 3.3, obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda^*(E_1 \cap E_3) + \lambda^*(E_2 \cap E_3) &= \lambda^*[(E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3)] + \lambda^*(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \\ &\leq \lambda^*(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + \lambda^*(E_3). \qquad \square \end{aligned}$$

En el lema anterior, para $I$ un intervalo que contiene a $x$, se cumple

$$\frac{\lambda^*(E_1 \cap I)}{\lambda^*(I)} + \frac{\lambda^*(E_2 \cap I)}{\lambda^*(I)} - 1 \leq \frac{\lambda^*(E_1 \cap E_2 \cap I)}{\lambda^*(I)}.$$

Si además $x \in \mathcal{D}(E_1) \cap \mathcal{D}(E_2)$, utilizando la Proposición 1.3, llegamos a lo siguiente:

$$1 \leq \underline{d}(E_1 \cap E_2, x) \quad \text{y} \quad 1 \leq \overline{d}(E_1 \cap E_2, x).$$

Por definición de densidad, se tiene $\mathcal{D}(E_1) \cap \mathcal{D}(E_2) \subseteq \mathcal{D}(E_1 \cap E_2)$. Para la otra inclusión, observemos que cuando $x \in \mathcal{D}(E_1 \cap E_2)$, necesariamente tenemos $d(E_1, x) = d(E_2, x) = 1$ y $x$ es elemento de $\mathcal{D}(E_1) \cap \mathcal{D}(E_2)$.

La cuarta propiedad es una consecuencia de la tercera. Como $E_1 = E_1 \cap E_2$ se cumple la relación $\mathcal{D}(E_1) = \mathcal{D}(E_1) \cap \mathcal{D}(E_2)$. Así que cada elemento de $\mathcal{D}(E_1)$ está incluido en $\mathcal{D}(E_2)$. ■

**Lema 1.21.** *Si $E_1$ y $E_2$ son conjuntos Lebesgue medibles disjuntos y $\lambda^*(E_2) = 0$, entonces*

$$\mathcal{D}(E_1 \cup E_2) = \mathcal{D}(E_1).$$

*Demostración.* Sea $I$ un intervalo. Notemos que

$$\lambda^*[(E_1 \cup E_2) \cap I] = \lambda^*[(E_1 \cap I) \cup (E_2 \cap I)] = \lambda^*(E_1 \cap I).$$

Por ello, $x$ es un punto de densidad de $E_1 \cup E_2$ si y sólo si es punto de densidad de $E_1$. ■

**Afirmación 1.22.** Si $E \subset \mathbb{R}$ es medible y tomando en cuenta la afirmación 1.18, entonces el conjunto de puntos de densidades de $E$ cumple la siguiente propiedad:

$$\mathcal{D}(E) \cap \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus E) = \emptyset.$$

Con ésto, si $x \in \mathcal{D}(E) \setminus E$, entonces $x$ también es un elemento de su complemento, pero no puede serlo de $\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus E)$. Por consiguiente, $\mathcal{D}(E) \setminus E \subseteq [(\mathbb{R} \setminus E) \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus E)]$.

La afirmación 1.22 nos será muy útil en la prueba de lo que viene a continuación.

La propiedad más importante del conjunto de puntos de densidades para subconjuntos de $\mathbb{R}$ se dá cuando éstos son medibles y se enuncia en el siguiente teorema, conocido como el *Teorema de Densidad de Lebesgue*.

**Teorema 1.23.** *Para cualquier $E \subset \mathbb{R}$ conjunto medible, $\lambda^* [E \triangle \mathcal{D}(E)] = 0$.*

*Demostración.* Supongamos que $E$ es acotado y definamos para toda $i \geq 1$ los conjuntos

$$A_i := \{x \in E \ : \ \underline{d}(E, x) < \frac{1}{i}\}.$$

Si $y \in E \setminus \mathcal{D}(E)$ la densidad inferior será extríctamente menor que uno por lo que existirá un $i$ tal que $y \in A_i$. Esto prueba que

$$E \setminus \mathcal{D}(E) = \bigcup_{i \geq 1} A_i.$$

Supongamos, sin perder generalidad, que $\lambda^*(A_i) > 0$ para algún $i$ mayor que uno. Como la unión de cualquier cubierta de $A_i$ por intervalos abiertos es abierta y contiene a éste conjunto su medida exterior está dada por

$$\inf\{\lambda(U) \ : \ A_i \subset U, \ U \in \tau_E\}.$$

Además, si $i_1 > i_2$ se tiene que $A_{i_1} \subset A_{i_2}$ ya que $\frac{1}{i_1} < \frac{1}{i_2}$ y cada $x \in A_{i_1}$ satisface la desigualdad con $i_2$. Así garantizamos que existe un conjunto abierto $G$ acotado conteniendo a $A_i$ tal que

$$(\frac{1}{i})\lambda^*(G) < \lambda^*(A_i).$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de todos los intervalos cerrados $I \subset G$ que cumplen $\lambda(E \cap I) \leq (\frac{1}{i})\lambda(I)$. Ésta familia es no vacía, al tener intervalos cerrados arbitrariamente pequeños alrededor de cada punto de $A_i$ y con la propiedad que para cualquier sucesión disjunta $\{I_n\}$ de elementos de $\mathcal{E}$ se tiene

$$\lambda^*\left(A_i \cap \bigcup_{n \geq 1} I_n\right) \leq \lambda^*\left(E \cap \bigcup_{n \geq 1} I_n\right) = \sum_{n \geq 1} \lambda(E \cap I_n) \leq (\frac{1}{i}) \sum_{n \geq 1} \lambda(I_n) \leq (\frac{1}{i})\lambda(G) < \lambda^*(A_i).$$

Con lo anterior, vemos que

$$\begin{aligned} 0 < \lambda^*(A_i) - \lambda^*\left(A_i \cap \bigcup_{n \geq 1} I_n\right) &= \lambda^*\left[A_i \setminus \left(A_i \cap \bigcup_{n \geq 1} I_n\right)\right] \\ &= \lambda^*\Big\{A_i \cap \Big[A_i^c \cup \left(\bigcup_{n \geq 1} I_n\right)^c\Big]\Big\} \\ &= \lambda^*\left[A_i \cap \left(\bigcup_{n \geq 1} I_n\right)^c\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda^*(A_i \setminus \bigcup_{n \geq 1} I_n) > 0$.

Construiremos una sucesión disjunta $\{I_n\}_{n\in\omega}$ con elementos de $\mathcal{E}$ de la siguiente manera:

Tomemos $d_0 = \sup\{\lambda(I) : I \in \mathcal{E}\}$ y escogemos un elemento $I_1$ en la sucesión tal que

$$\lambda(I_1) > \frac{d_0}{2}.$$

Ahora, consideremos la colección $\mathcal{E}_1 = \{I \in \mathcal{E} : I \cap I_1 = \emptyset\}$. Como $\lambda^*(A_i \setminus I_1) > 0$ la familia $\mathcal{E}_1$ es no vacía ya que existe un intervalo en alguna cubierta del conjunto que no intersecta a $I_1$. Con ésta nueva colección definimos $d_1 = \sup\{\lambda(I) : I \in \mathcal{E}_1\}$ y de nuevo escogemos un intervalo $I_2$ que cumpla

$$\lambda(I_2) > \frac{d_1}{2}.$$

Trivialmente podemos ver que los intervalos $I_1$ y $I_2$ no se intersectan. Continuando inductivamente de ésta manera, vemos que al obtener los intervalos disjuntos $I_1, \ldots, I_n$, podemos definir

$$\mathcal{E}_n = \{I \in \mathcal{E} : I \cap I_k = \emptyset, \quad k = 1, \ldots, n\} \qquad \text{y} \qquad d_n = \sup\{\lambda(I) : I \in \mathcal{E}_n\}.$$

Como hemos visto $\mathcal{E}_n$ será no vacía,[3] existiendo $I_{n+1} \in \mathcal{E}_n$ con

$$\lambda(I_{n+1}) > \frac{d_n}{2}.$$

De ésta manera obtenemos la sucesión esperada. Si $B = A_i \setminus \bigcup_{n\in\omega} I_n$, entonces se sigue que $\lambda^*(B) > 0$ y existe un entero positivo $N$ para el que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \frac{\lambda^*(B)}{3}.$$

Para cada $n > N$, $J_n$ denota el intervalo concéntrico con $I_n$ cumpliendo $\lambda(J_n) = 3\lambda(I_n)$. Por lo cual, aplicando lo anterior se tiene

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(J_n) = 3\left[\sum_{n=N+1}^{+\infty} \lambda(I_n)\right] < \lambda^*(B).$$

Esta desigualdad implica que la sucesión $\{J_n\}_{n>N}$ no cubre a $B$. Por lo que existe un punto $x$ en $B \setminus \bigcup_{n>N} J_n$ que también será elemento de $A_i \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n$, ya que al no estar $x$ en la unión de los $I_n$ ni en la de los $J_n$ para $n > N$, no puede ser elemento de la unión de los $I_i$ para $1 \leq i \leq N$.

Exite un intervalo $I \in \mathcal{E}_N$ centrado en $x$ y un entero $n > N$ tal que $I \cap I_n \neq \emptyset$. En caso contrario, para todo $n$ éste intervalo pertenece a $\mathcal{E}_n$ y tenemos $\lambda(I) \leq d_n < 2\lambda(I_{n+1})$ lo cual es imposible ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leq \lambda(G) < +\infty.$$

[3]Cada vez que encontramos el siguiente intervalo, la medida de complemento de la unión de dichos intervalos relativa a $A_i$ es positiva y el mismo argumento dado para $\mathcal{E}_1$ se aplica.

Tomando el menor entero $k$ tal que $I \cap I_k \neq \emptyset$ con $k > N$ y que satisface $\lambda(I) \leq d_{k-1} < 2\lambda(I_k)$, se tiene que $x$ como el centro de $I$ pertenece a $J_k$, contrario a $x \notin \bigcup_{n>N} J_n$. Por lo tanto, $\lambda^*(A_i) = 0$ y para $i \geq 1$

$$\lambda^* [E \setminus \mathcal{D}(E)] = \lambda^* \left( \bigcup_{i \geq 1} A_i \right) \leq \sum_{i \geq 1} \lambda^*(A_i) = 0,$$

obteniendo $\lambda^* [E \setminus \mathcal{D}(E)] = 0$. Recordando la Afirmación 1.22 y que el complemento de $E$ es también medible $\lambda^* [\mathcal{D}(E) \setminus E] \leq \lambda^* [(\mathbb{R} \setminus E) \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus E)] = 0$, lo cual implica $\lambda^* [\mathcal{D}(E) \setminus E] = 0$. Finalmente, con las dos observaciones anteriores, se tiene

$$\lambda^* [E \vartriangle \mathcal{D}(E)] \leq \lambda^* [E \setminus \mathcal{D}(E)] + \lambda^* [\mathcal{D}(E) \setminus E] = 0. \quad \blacksquare$$

Utilizando el teorema anterior, obtenemos fácilmente el siguiente resultado que es muy importante en la Teoría de Densidad.

**Lema 1.24.** *Para cada $E \in \mathcal{M}$, el conjunto $\mathcal{D}(E)$ es medible.*

*Demostración.* Por el Teorema 1.23, $E \vartriangle \mathcal{D}(E)$ es elemento de $\mathcal{M}$. Como $\mathcal{D}(E) \setminus E$ es subconjunto de la diferencia simétrica tiene medida exterior cero y eso prueba su mesurabilidad. Usando el hecho de que $\mathcal{M}$ es una $\sigma$-álgebra sobre $\mathbb{R}$, concluimos que

$$E \cup \mathcal{D}(E) = [\mathcal{D}(E) \setminus E] \cup E \quad \text{y} \quad E \cap \mathcal{D}(E) = [E \cup \mathcal{D}(E)] \setminus [E \vartriangle \mathcal{D}(E)]$$

son Lebesgue medibles. Por lo tanto,

$$\mathcal{D}(E) = [\mathcal{D}(E) \setminus E] \cup [E \cap \mathcal{D}(E)] \in \mathcal{M}. \qquad \blacksquare$$

La definición más común de Densidad inferior y superior es la siguiente:

$$\overline{d}(A, x) := \limsup_{h \to 0} \left\{ \frac{\lambda^* [A \cap (x-h, x+h)]}{2h} \; : \; h > 0 \right\} \qquad \text{y}$$

$$\underline{d}(A, x) := \liminf_{h \to 0} \left\{ \frac{\lambda^* [A \cap (x-h, x+h)]}{2h} \; : \; h > 0 \right\}.$$

En [**9**, p. 679] , se establece el hecho de que $x$ es un punto de densidad de $A$ si y sólo si para una sucesión de intervalos $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $\lambda^*(I_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ y $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ se cumple

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda^*(A \cap I_n)}{\lambda^*(I_n)} = 1.$$

Por lo que la Definición 1.15 y la anterior coinciden en los puntos de densidad. Al principio del capítulo 3 daremos la demostración de el hecho de que para puntos de densidad la definición dada anteriormente depende de ciertas sucesiones de números reales positivos.

## 4. Topología de Densidades

Veremos que la familia

$$\tau_d = \{ E \in \mathcal{M} \ : \ E \subseteq \mathcal{D}(E) \}$$

es una topología en $\mathbb{R}$ que contiene a la topología Euclideana. Por la Proposición 1.19-1, el conjunto vacío y $\mathbb{R}$ son elementos de $\tau_d$ y utilizando 1.19-3 se sigue que es cerrada bajo intersecciones finitas. El único problema es probar que es cerrada bajo uniones arbitrarias, ya que $\tau_d$ está contenida en los conjuntos Lebesgue medibles y sólo son cerrados bajo uniones numerables. Para ésto, primero probaremos el siguiente resultado.

**Proposición 1.25.** $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda^*)$ *es c.c.c.*

*Demostración.* Sean $\alpha$ un ordinal con $\alpha > \omega$ y $\mathcal{G} = \left\{E_\xi \ : \ \xi < \alpha\right\}$ una colección de elementos disjuntos en $\mathcal{M}$ tal que para todo elemento su medida satisface $0 < \lambda^*(E) < +\infty$. Consideremos el homeomorfismo $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ dado por

$$\eta(x) = \frac{2x}{1 + \sqrt{1 + 4x^2}}.$$

Al ser una función continua es medible, así que $D_\xi = \eta(E_\xi)$ también lo es, ya que

$$D_\xi = \left\{x \in E_\xi \ : \ -1 < \eta(x)\right\} \cap \left\{x \in E_\xi \ : \ \eta(x) < 1\right\}.$$

Para todo $\xi < \alpha$ se tiene $D_\xi \subseteq (-1, 1)$ y para $\xi \neq \zeta$, al ser $\eta$ una función inyectiva, se cumple $D_\xi \cap D_\zeta = \eta(E_\xi) \cap \eta(E_\zeta) = \eta(E_\xi \cap E_\zeta) = \emptyset$. Como también conserva el orden, vemos que si $C_{E_\xi}$ y $C_{D_\xi}$ representan el conjunto de cubiertas numerables por intervalos semiabiertos para $E_\xi$ y $D_\xi$ que están en correspondencia biyectiva bajo $\eta$, ya que si $\left\{(a_i, b_i] \ : \ i \in \mathbb{N}\right\} \in C_{E_\xi}$ se tiene entonces que

$$D_\xi = \eta(E_\xi) \subseteq \eta\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(a_i, b_i]\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\eta\left((a_i, b_i]\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(\eta(a_i), \eta(b_i)]$$

y para $\left\{(c_i, d_i] \ : \ i \in \mathbb{N}\right\} \in C_{D_\xi}$, se tiene que

$$E_\xi = \eta^{-1}(D_\xi) \subseteq \eta^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(c_i, d_i]\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\eta^{-1}\left((c_i, d_i]\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(\eta^{-1}(c_i), \eta^{-1}(d_i)].$$

Para cada cubierta numerable $\left\{(a_i, b_i] \ : \ i \in \mathbb{N}\right\}$ de $E_\xi$ y cada cubierta numerable $\left\{(c_i, d_i] \ : \ i \in \mathbb{N}\right\}$ de $D_\xi$, se tiene

$$\eta\left(\lambda^*(E_\xi)\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\eta(b_i) - \eta(a_i)\right] \qquad \text{y} \qquad \eta^{-1}\left(\lambda^*\left(\eta(E_\xi)\right)\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\eta^{-1}(d_i) - \eta^{-1}(c_i)\right].$$

Aplicando la definición de medida exterior, concluimos lo siguiente:

$$\eta\left(\lambda^*(E_\xi)\right) \leq \lambda^*\left(\eta(E_\xi)\right) \quad \text{al igual que} \quad \eta^{-1}\left(\lambda^*\left(\eta(E_\xi)\right)\right) \leq \lambda^*(E_\xi).$$

De ésta manera, $\eta\left(\lambda^*(E_\xi)\right) = \lambda^*\left(\eta(E_\xi)\right)$ y $0 < \eta\left(\lambda^*(E_\xi)\right) = \lambda^*\left(\eta(E_\xi)\right) = \lambda^*(D_\xi) \leq 2$.

Sea $\mathcal{L}_n = \left\{D_\xi \;:\; \frac{2}{n} < \lambda^*(D_\xi), \quad \xi < \alpha\right\}$, entonces $\mathcal{G} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_n$ y existe $\mathcal{L}_N$ con $N \in \mathbb{N}$ cuya cardinalidad es mayor a $\omega$, al tener que la unión numerable de conjuntos numerables también lo es.

Si $\left\{D_{\xi_i} \;:\; D_{\xi_k} \neq D_{\xi_l} \quad \text{para} \quad k \neq l\right\}$ es una sucesión contenida en $\mathcal{L}_N$, tenemos entonces que

$$+\infty = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} < \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^*(D_{\xi_n}) \leq 2,$$

lo cual es una contradicción. ■

Ahora, consideremos la colección $\{E_t\}_{t\in T}$ con elementos en $\tau_d$. Para cada $t \in T$ se cumple que $E_t \subseteq \mathcal{D}(E_t)$ y por la Proposición 1.12 y la Proposición 1.25, podemos escoger una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $t \in T$ se tiene

$$\lambda^*\left(E_t \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_{t_n}\right) = 0.$$

Además, para cada $t \in T$, aplicando la Proposición 1.19-4, $\mathcal{D}(E_t) \subseteq \mathcal{D}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_{t_n}\right)$. Por lo cual

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_{t_n} \subseteq \bigcup_{t\in T} E_t \subseteq \bigcup_{t\in T} \mathcal{D}(E_t) \subseteq \mathcal{D}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_{t_n}\right).$$

Como el primer y último conjunto en las inclusiones anteriores son medibles y la medida exterior de su diferencia simétrica es cero, por el Lema 1.7 $\bigcup_{t\in T} E_t$ es Lebesgue medible. Como $E_t \subseteq \bigcup_{t\in T} E_t$ para todo $t \in T$, por la Proposición (1.19-4) $\bigcup_{t\in T} \mathcal{D}(E_t) \subseteq \mathcal{D}\left(\bigcup_{t\in T} E_t\right)$. Por consiguiente, la unión de los elementos de $E_t$ está contenida en $\mathcal{D}\left(\bigcup_{t\in T} E_t\right)$. Así, finalmente obtenemos que $\bigcup_{t\in T} E_t \in \tau_d$. Por lo tanto, $\tau_d$ es una topología en $\mathbb{R}$ a la cual llamaremos *Topología de Densidades*, inducida por la medida exterior de Lebesgue. Para comenzar a describir al espacio $(\mathbb{R}, \tau_d)$ veremos cuáles son algunos conjuntos cuyos complementos son elementos de $\tau_d$.

**Lema 1.26.** *Si $N \in \mathcal{N}$, entonces $\mathbb{R} \setminus N \in \tau_d$.*

*Demostración.* Observemos que si $E \in \tau_d$ y $N$ es un conjunto nulo, se tiene $\mathcal{D}(E \setminus N) = \mathcal{D}(E)$. Para probar lo anterior, sabemos que $E \cap N$ es un conjunto nulo y $E = (E \setminus N) \cup (E \cap N)$, por el Lema 1.21, se obtiene la relación. Como $\mathbb{R} \setminus N \in \mathcal{M}$ por la Proposición 1.19-1, junto con la observación inicial se tiene $\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus N) = \mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Concluyendo que $\mathbb{R} \setminus N \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus N)$. ■

En [**6**] encontramos una forma alternativa de representar la Topología de Densidades:

$$\left\{\mathcal{D}(E) \setminus N \;:\; E \in \mathcal{M} \quad \text{y} \quad N \in \mathcal{N}\right\}. \tag{4.1}$$

Verificaremos que todo conjunto en la topología se puede representar como un elemento del conjunto anterior y viceversa. Si $E \in \tau_d$, entonces $E \subseteq \mathcal{D}(E)$ y $E = \mathcal{D}(E) \setminus [\mathcal{D}(E) \setminus E]$, utilizando el Teorema 1.23 se tiene que $\mathcal{D}(E) \setminus E$ es un conjunto nulo. Ahora, tomando un elemento en 4.1 notemos, en primer lugar, que es un conjunto Lebesgue medible. Como $\mathcal{D}[\mathcal{D}(E) \setminus N] = \mathcal{D}[\mathcal{D}(E)] = \mathcal{D}(E)$ se cumple también que $\mathcal{D}(E) \setminus N \subseteq \mathcal{D}[\mathcal{D}(E) \setminus N]$.

Si $(a, b)$ es un intervalo abierto Euclideano, entonces $(a, b) = \mathcal{D}[(a, b)]$, obteniendo que $\tau_E \subsetneq \tau_d$. Para ver que la otra contención no se cumple basta considerar un conjunto de la forma $\mathbb{R} \setminus N$, donde $N \in \mathcal{N}$. Con lo anterior, se acaba de probar el siguiente resultado:

**Teorema 1.27.** *La Topología $\tau_d$ es estríctamente más fina que la topología $\tau_E$.*

Para puntos $x, y \in \mathbb{R}$ distintos, podemos escoger intervalos Euclideanos abiertos $I_x, I_y$ conteniendo a $x$ y $y$ respectivamente, tales que $I_x \cap I_y = \emptyset$. Por el Teorema 1.27, $I_x, I_y$ son elementos de $\tau_d$ y obtenemos vecindades disjuntas para los puntos. Por lo cual, $(\mathbb{R}, \tau_d)$ es Hausdorff. Otras propiedades importantes de la Topología de Densidades se enlistan en los resultados que a continuación se presentan.

**Teorema 1.28. [Ostaszewski, (1982)]** *Si $A$ es un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}$, entonces*

$$Int_{\tau_d}(A) = A \cap \mathcal{D}(K),$$

*en donde $K$ es un kernel medible de $A$.*

*Demostración.* ($\subseteq$) Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in Int_{\tau_d}(A)$. Existe un conjunto $U \in \tau_d$ tal que $x \in U$ y $U \subseteq A$. Como $U \setminus K \subseteq A \setminus K$ tenemos que $U \setminus K$ es elemento de $\mathcal{M}$. Aplicando el Lema 1.21 se cumple $\mathcal{D}(U) = \mathcal{D}(U \cap K) \subseteq \mathcal{D}(K)$, obteniendo que $x \in A \cap \mathcal{D}(K)$.

($\supseteq$) Supongamos que $x \in A \cap \mathcal{D}(K)$. Como $K \cup \{x\} \subseteq A$ y $K \cup \{x\} \in \mathcal{N}$, con el Lema 1.21 se tiene $\mathcal{D}(K \cup \{x\}) = \mathcal{D}(K)$ y $x$ es elemento de $(K \cup \{x\}) \cap \mathcal{D}(K \cup \{x\})$. Además,

$$\mathcal{D}[(K \cup \{x\}) \cap \mathcal{D}(K \cup \{x\})] = \mathcal{D}(K \cup \{x\}) \cap \mathcal{D}[\mathcal{D}(K \cup \{x\})] = \mathcal{D}(K \cup \{x\}).$$

Por lo tanto, $(K \cup \{x\}) \cap \mathcal{D}(K \cup \{x\})$ es un conjunto abierto en $\tau_d$ que contiene a $x$ y está contenido en $A$. ∎

**Corolario 1.29.** *Sea $N$ un conjunto Lebesgue medible. Si $Int_{\tau_d}(N) = \emptyset$, entonces $N$ es $\lambda^*$-nulo.*

*Demostración.* Aplicando el teorema anterior, vemos que $Int_{\tau_d}(N) = N \cap \mathcal{D}(N) = \emptyset$. Por lo cual, $N \triangle \mathcal{D}(N) = N \cup \mathcal{D}(N)$ y con el Teorema 1.23, concluimos lo siguiente:

$$\lambda^*(N) \leq \lambda^*[N \cup \mathcal{D}(N)] = \lambda^*[N \triangle \mathcal{D}(N)] = 0. \qquad \blacksquare$$

**Teorema 1.30. [Scheinberg, (1971)]** *Un conjunto $E \in \tau_d$ es abierto regular en $(\mathbb{R}, \tau_d)$ si y sólo si $E = \mathcal{D}(E)$.*

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Como $E = Int_{\tau_d}\left[Cl_{\tau_d}(E)\right]$, por el Teorema 1.28, se cumple

$$E = Cl_{\tau_d}(E) \cap \mathcal{D}\left[Cl_{\tau_d}(E)\right].$$

Además, $E \sim Cl_{\tau_d}(E)$, notando que

$$\lambda^*\left[(\mathbb{R} \setminus E) \bigtriangleup Int_{\tau_d}(\mathbb{R} \setminus E)\right] = \lambda^*\left[(\mathbb{R} \setminus E) \setminus Int_{\tau_d}(\mathbb{R} \setminus E)\right] = 0 \quad \text{y} \quad E \triangle Cl_{\tau_d}(E) = (\mathbb{R} \setminus E) \setminus Int_{\tau_d}(\mathbb{R} \setminus E).$$

Por la Proposición 1.19-2 y tomando en cuenta que $\mathcal{D}(E) \subseteq Cl_{\tau_d}(E)$, obtenemos las siguientes igualdades:

$$Cl_{\tau_d}(E) \cap \mathcal{D}\left[Cl_{\tau_d}(E)\right] = Cl_{\tau_d}(E) \cap \mathcal{D}(E) = \mathcal{D}(E).$$

($\Leftarrow$) Con los argumentos utilizados en la implicación anterior y nuestra hipótesis, se debe de cumplir

$$Int_{\tau_d}\left[Cl_{\tau_d}(E)\right] = Cl_{\tau_d}(E) \cap \mathcal{D}\left[Cl_{\tau_d}(E)\right] = Cl_{\tau_d}(E) \cap \mathcal{D}(E) = \mathcal{D}(E) = E. \qquad \blacksquare$$

**Teorema 1.31.** *$E$ es vecindad de cada uno de sus puntos en $(\mathbb{R}, \tau_d)$ si y sólo si $E \in \tau_d$.*

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Por definición, para cada $x \in E$ exite un conjunto $E_x \subseteq E$ elemento de la topología tal que $x$ pertenece a éste conjunto. Por lo tanto, $E = \bigcup_{x \in E} E_x \in \tau_d$.

($\Leftarrow$) Esta implicación es clara. $\blacksquare$

**Teorema 1.32.** *$A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto compacto en $(\mathbb{R}, \tau_d)$ si y sólo si $A$ es finito.*

*Demostración.* ($\Leftarrow$) Esta implicación es inmediata.

($\Rightarrow$) Supongamos que $A$ es infinito. Sea $M \subseteq A$ un conjunto numerable. Para $a \in M$ el conjunto $(\mathbb{R} \setminus M) \cup \{a\}$ es Lebesgue medible y por el Lema 1.21 y la Proposición 1.19-1, se tiene

$$\mathcal{D}\left[(\mathbb{R} \setminus M) \cup \{a\}\right] = \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus M) = \mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Por ello, para cada $a \in M$ se tiene que $(\mathbb{R} \setminus M) \cup \{a\} \in \tau_d$. La colección $\left\{(\mathbb{R} \setminus M) \cup \{a\} \ : \ a \in M\right\}$ es una cubierta para $A$ con elementos de $\tau_d$, la cual no contiene una subcubierta finita. $\blacksquare$

**Proposición 1.33.** *El espacio $(\mathbb{R}, \tau_d)$ no es conexo.*

*Demostración.* Para $a, b \in \mathbb{R}$, sea el conjunto $\mathbb{R} \setminus (a, b)$. Notemos que es elemento de $\tau_d$, al ser Lebesgue medible y cumplirse

$$\mathcal{D}\left[\mathbb{R} \setminus (a, b)\right] = \mathcal{D}\left[(-\infty, a] \cup [b, +\infty)\right] = (-\infty, a] \cup [b, +\infty).$$

Para el complemento, tenemos que $[\mathbb{R} \setminus (a,b)]^c = (a,b)$ y el Teorema 1.27 implica que también es elemento de la Topología de Densidades. Por lo tanto, $\mathbb{R} \setminus (a,b)$ es abierto-cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_d)$ y separa a $\mathbb{R}$. ■

**Teorema 1.34.** *El espacio $(\mathbb{R}, \tau_d)$ no es ni primero ni segundo numerable, ni Lindelöf ni separable.*

*Demostración.* Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\left\{E_n \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$ una sucesión de vecindades abiertas de $x$ en $\tau_d$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escogamos un punto $x_n \in E_n \setminus \{x\}$ y definimos $E = E_1 \setminus \left\{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$. Como $\left\{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\right\} \in \mathcal{N}$, por el Lema 1.26, es cerrado y $E = E_1 \cap \left[\left\{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}\right]^c \in \tau_d$ es una vecindad abierta de $x$ que no contiene a ningún $E_n$. Por lo cual, $x$ no puede tener una base local numerable y el espacio no será primero numerable. Lo anterior implica que tampoco es segundo numerable. Sea $C$ el conjunto de Cantor, el cual es cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_d)$ por ser un conjunto nulo. Para $(\mathbb{R} \setminus C) \cup \{x\}$ con $x \in C$ es un conjunto Lebesgue medible y por el Lema 1.21 y la Proposición 1.19-1, obtenemos lo siguiente:

$$\mathcal{D}\left[(\mathbb{R} \setminus C) \cup \{x\}\right] = \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus C) = \mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

De ésta manera, $(\mathbb{R} \setminus C) \cup \{x\} \in \tau_d$ para todo $x \in C$. Consideremos la cubierta abierta de $\mathbb{R}$ dada por $\left\{(\mathbb{R} \setminus C) \cup \{x\} \,:\, x \in C\right\}$. Dado que $|C| = \mathfrak{c}$, no posee una subcubierta numerable y el espacio no es Lindelöf. Para ver si el espacio $(\mathbb{R}, \tau_d)$ es separable, debemos encontrar un conjunto denso numerable. Esto es imposible, ya que cada conjunto numerable $N$ es nulo y, por el Lema 1.26, es cerrado cumpliéndose $Cl_{\tau_d}(N) = N$. ■

**Teorema 1.35.** *El espacio $(\mathbb{R}, \tau_d)$ no es normal pero si completamente regular.*

*Demostración.* Para ver ésta demostración el lector puede consultar [**11**].

**Teorema 1.36.** *Para el conjunto $\mathcal{N}$, se cumple lo siguiente:*

$$\begin{array}{lcll} (\mathbf{1}) & \mathcal{N} & = & \left\{A \subseteq \mathbb{R} \,:\, A \textit{ es un conjunto denso en ninguna parte en } (\mathbb{R}, \tau_d)\right\} \\ (\mathbf{2}) & & = & \left\{A \subseteq \mathbb{R} \,:\, A \textit{ es de primera categoría en } (\mathbb{R}, \tau_d)\right\} \end{array}$$

*Demostración.* (**1**) Si $N \in \mathcal{N}$, entonces $\mathbb{R} \setminus N$ es elemento de $\tau_d$. Por el Teorema 1.28 y el Lema 1.21, se cumple

$$Int_{\tau_d}\left[Cl_{\tau_d}(N)\right] = Int_{\tau_d}(N) = N \cap \mathcal{D}(N) = N \cap \emptyset = \emptyset.$$

Por consiguiente, $N$ es denso en ninguna parte en $(\mathbb{R}, \tau_d)$. Cuando $A$ es un conjunto nunca denso en $(\mathbb{R}, \tau_d)$, tenemos que su cerradura en el espacio también lo es. Además,

$$Int_{\tau_d}\left[Cl_{\tau_d}(A)\right] = Cl_{\tau_d}(A) \cap \mathcal{D}\left[Cl_{\tau_d}(A)\right] = \emptyset.$$

Por lo tanto, con el Corolario 1.29 se obtiene lo deseado.

(**2**) Por la igualdad anterior, en $(\mathbb{R}, \tau_d)$ la familia de conjuntos nunca densos es un $\sigma$-ideal, el cual coincide con la familia de conjuntos de primera categoría. ■

**Teorema 1.37. [Scheinberg, (1971)]** *La $\sigma$-álgebra de los conjunto de Borel en $(\mathbb{R}, \tau_d)$ coincide con $\mathcal{M}$.*

*Demostración.* Si $E \in \mathcal{M}$, entonces $E = (E \cap \mathcal{D}(E)) \cup (E \setminus \mathcal{D}(E))$ donde el primer conjunto es elemento de $\tau_d$ mientras que el segundo, por el Teorema 1.23, es un conjunto nulo y el Lema 1.26 implica que es cerrado. Por ello, cada conjunto Lebesgue medible es un conjunto de Borel en $(\mathbb{R}, \tau_d)$. Como los elementos en la topología son conjuntos Lebesgue medibles, los conjuntos de Borel también lo son. ■

**Teorema 1.38.** $(\mathbb{R}, \tau_d)$ *es un espacio de Baire.*

*Demostración.* Con el Teorema 1.36 y el Lema 1.26 el resultado es obvio. ■

Capítulo 2

# Medidas exteriores en $\mathbb{R}$ inducidas por selecciones débiles

## 1. Definición de medida exterior con selecciones débiles

A continuación enunciaremos la principal definición que nos será de gran utilidad para introducir nuevas medidas exteriores en $\mathbb{R}$.

**Definición 2.1.** *Sea $X$ un conjunto infinito. Decimos que una función $f : [X]^2 \longrightarrow X$ es una selección débil en $X$ si para cada $\{x, y\} \in [X]^2$ se tiene $f(\{x, y\}) \in \{x, y\}$.*

Si $f$ es una selección débil, entonces $f^\star$ se define como

$$f^\star(\{x, y\}) = x \qquad \text{si y solo si} \qquad f(\{x, y\}) = y.$$

A $f^\star$ se le llama *selección débil opuesta* a $f$.

Como un ejemplo, podemos mencionar la selección débil Euclideana $f_E : [\mathbb{R}]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que está dada por

$$f_E(\{x, y\}) := x \quad \text{si y solo si} \quad x < y.$$

Mencionamos ésta selección débil ya que más adelante, a partir de lo que se desarrollará, notaremos que las nuevas nociones se relacionan con la medida exterior de Lebesgue.

**Definición 2.2.** *Dados dos números $x, y \in X$ distintos, decimos que*

- *$x <_f y$ si y sólo si $f(\{x, y\}) = x$,* y
- *$x \leq_f y$ si $x = y$ ó $x <_f y$.*

En general, $\leq_f$ no es transitiva, pero si es reflexiva, antisimétrica y lineal. Para ver que no es transitiva basta con definir la selección débil $f$ como

$$f(\{x, y\}) := \begin{cases} y & \text{si} \quad x \in (0, 1] \quad \text{y} \quad y = 2 \\ \\ y & \text{si} \quad x = 0 \quad \text{y} \quad y = 1 \\ \\ x & \text{si} \quad x < y \quad \text{y no se cumple lo anterior} \end{cases}$$

para cada $\{x, y\} \in [\mathbb{R}]^2$. Observemos que $f(\{2,1\}) = 2$ y $f(\{0,2\}) = 0$ por lo que $0 <_f 2$ y $2 <_f 1$, pero $f(\{0,1\}) = 1$ y por ello $1 <_f 0$.

Sea $f$ una selección débil. Para $a, b \in X$, los rayos e intervalos abiertos y cerrados inducidos por $f$ se definen como:

- $(\leftarrow, b)_f := \left\{x \in X \,:\, x <_f b\right\}$
- $(a, \rightarrow)_f := \left\{x \in X \,:\, a <_f x\right\}$
- $(a, b)_f := (a, \rightarrow)_f \cap (\leftarrow, b)_f$
- $(\leftarrow, b]_f := \left\{x \in X \,:\, x \leq_f b\right\}$
- $[a, \rightarrow)_f := \left\{x \in X \,:\, a \leq_f x\right\}$
- $[a, b]_f := [a, \rightarrow)_f \cap (\leftarrow, b]_f$

Los intervalos semiabiertos por la derecha e izquierda inducidos por $f$ quedan definidos como:

- $(a, b]_f := (a, \rightarrow)_f \cap (\leftarrow, b]_f$
- $[a, b)_f := [a, \rightarrow)_f \cap (\leftarrow, b)_f$

A los intervalos inducidos por $f$ se les llamará *$f$-intervalos*.

Por lo general, $f$ denotará una selección débil de $\mathbb{R}$ y en el caso del orden Euclideano conservaremos la notación estandar para los intervalos. Esto es, si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$(a, +\infty) = \left\{y \in \mathbb{R} \,:\, a < y\right\}$ y $(-\infty, b) = \left\{y \in \mathbb{R} \,:\, y < b\right\}$

$(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty) = \left\{y \in \mathbb{R} \,:\, a < y < b\right\}$

$[a, b] = \left\{y \in \mathbb{R} \,:\, a \leq y \leq b\right\}$

$(a, b] = \left\{y \in \mathbb{R} \,:\, a < y \leq b\right\}$ y $[a, b) = \left\{y \in \mathbb{R} \,:\, a \leq y < b\right\}$.

La medida exterior de Lebesgue utiliza la longitud de los intervalos para determinar el tamaño de un subconjunto de $\mathbb{R}$. De manera similar, necesitamos saber como calcular la longitud de un $f$-intervalo para acercarnos cada vez más a poder estimar el tamaño para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}$ cuando trabajamos con una selección débil. Las dos definiciones que se dan a continuación nos permiten, en analogía con la medida exterior de Lebesgue, establecer una escala de medida para un subconjunto de $\mathbb{R}$ respecto a una selección débil $f$.

**Definición 2.3.** *Sea $f$ una selección débil. Definimos la función longitud $\ell$ para un $f$-intervalo $(a, b]_f$ como*[1]

[1]La definición es análoga para $f$-intervalos cerrados, abiertos, etc.

$$\ell\left[(a,b]_f\right] := \begin{cases} |b-a| & \text{si} \quad (a,b]_f \neq \emptyset \\ 0 & \text{si} \quad (a,b]_f = \emptyset \end{cases}$$

Notemos que para $a, b \in \mathbb{R}$, el $f$-intervalo $(a,b]_f$ puede ser vacío o cumplir $b < a$. Simplemente tomamos la selección débil opuesta de la Euclideana. En base a ésta definición, procedemos a definir la medida exterior inducida por una selección débil.

**Definición 2.4.** *Sea $f$ una selección débil. Para todo $A$ subconjunto de $\mathbb{R}$ la medida exterior inducida por $f$ es la función de conjuntos $\lambda_f^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$ dada por*

$$\lambda_f^*(A) := \text{ínf}\left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left((a_n, b_n]_f\right) \ : \ A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n]_f \right\}$$

*si existe una cantidad numerable de $f$-intervalos semiabiertos que cubren a $A$, y $\lambda_f^*(A) = +\infty$ si no existe tal cubierta.*

El siguiente resultado nos garantiza que la función de conjuntos dada en la definición 2.4 satisface las tres condiciones que se requieren para que sea una medida exterior sobre $\mathbb{R}$. Así podemos estimar el tamaño de un subconjunto de $\mathbb{R}$ cuando trabajamos con selecciones débiles.

**Teorema 2.5.** *Para cualquier selección débil $f$, $\lambda_f^*$ es una medida exterior en $\mathbb{R}$.*

*Demostración.* Para el conjunto vacío tenemos claramente que su medida exterior es cero y para cualquier conjunto $A \neq \emptyset$ se cumple $\lambda_f^*(A) \geq 0$. Para la monotonía tenemos que si $A \subseteq B$ entonces toda cubierta numerable por $f$-intervalos semiabiertos de $B$ tambien cubre a $A$. Si no existe tal cubierta la desigualdad se dá claramente. En el caso de la subaditividad, sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en $\mathbb{R}$. Si alguno de éstos conjuntos no puede ser cubierto por una sucesión de $f$-intervalos tampoco podrá serlo la unión de ellos. Por lo cual, la desigualdad buscada se obtiene de manera inmediata. En el caso en que exista la cubierta se toman en cuenta dos casos:

Primero, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_f^*(A_n) = +\infty$ la desigualdad deseada es clara. Como segundo caso, supongamos que ésta suma es finita. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario y para cada $n \in \mathbb{N}$ escogemos una cubierta $\left\{(a_{n,j}, b_{n,j}]_f \ : \ j \in \mathbb{N}\right\}$ de $f$-intervalos semiabiertos tales que cubran a $A_n$ y

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \ell\left[(a_{n,j}, b_{n,j}]_f\right] < \lambda_f^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}. \tag{1.1}$$

Lo anterior es posible por que $\lambda_f^*$ es el ínfimo sobre todas las sumas de las longitudes de los $f$-intervalos de las cubiertas numerables de $A_n$.

Haciendo $B_n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}(a_{n,j}, b_{n,j}]_f$, tenemos

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{j\in\mathbb{N}}(a_{n,j}, b_{n,j}]_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

Sea $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ una biyección. Reordenando por medio de $\sigma$ tenemos lo siguiente:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{j\in\mathbb{N}}(a_{n,j}, b_{n,j}]_f = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)}]_f.$$

Aplicando el Teorema 1.5 y la desigualdad 1.1 se obtiene

$$\begin{aligned}
\lambda_f^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \lambda_f^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) &= \lambda_f^*\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{j\in\mathbb{N}}(a_{n,j}, b_{n,j}]_f\right] \\
&= \lambda_f^*\left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)}]_f\right] \\
&\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \ell\left[(a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)}]_f\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} \ell\left[(a_{n,j}, b_{n,j}]_f\right] \\
&< \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_f^*(A_n) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Al ser $\epsilon$ arbitrario, se tiene la propiedad deseada. ∎

A la medida exterior inducida por la selección débil $f$ la llamaremos *$f$-medida exterior* y denotamos como $\mathcal{M}_f$ a la clase $\mathcal{M}_{\lambda_f^*}$ de todos los conjuntos $\lambda_f^*$-medibles de $\mathbb{R}$.

Notemos que si reemplazamos $f$-intervalos semiabiertos por abiertos obtenemos cosas distintas. Por ejemplo, definimos la selección débil $f$ como $x <_f 1$ para cada $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ y en los demás puntos tomamos el orden Euclideano. Entonces, a el intervalo $(0,1]_f$ no lo cubre ninguna familia de $f$-intervalos abiertos y tendríamos que definir su medida exterior, si usamos éste tipo de cubiertas, como $+\infty$.

**Definición 2.6.** *Sea $f$ una selección débil y $r$ un punto en $\mathbb{R}$. Se dice que $r$ es $f$-minimal si para cada $x$ en $\mathbb{R}\setminus\{r\}$ se tiene que $r <_f x$. Si $x <_f r$ para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{r\}$, entonces a $r$ se le llama $f$-maximal.*

Los puntos $f$-minimales y $f$-maximales jugarán un papel importante en ciertas propiedades que posteriormente daremos en la siguiente sección.

Enfatizemos la relación de la selección débil Euclideana con la medida de Lebesgue. A partir de lo desarrollado, en el siguiente ejemplo se muestra en que forma se dá ésta relación.

**Ejemplo 2.7.** $\lambda_{f_E}^* = \lambda^*$ en donde $f_E$ es la selección débil Euclideana. Para todo intervalo Euclideano $(a,b)$ se cumple

- Si $r \in (a,b)$, tenemos $f_E(\{a,r\}) = a$ y $f_E(\{r,b\}) = r$, entonces

$$a <_{f_E} r \quad \text{y} \quad r <_{f_E} b \qquad \text{ó} \qquad r \in (\leftarrow, b)_{f_E} \cap (a, \rightarrow)_{f_E} = (a,b)_{f_E}$$

• Cuando $r \in (a,b)_{f_E}$, se tiene $a <_{f_E} r$ y $r <_{f_E} b$. Por definición de la selección débil Euclideana, $r \in (a,b)$.

Con éste argumento fácil, hemos probado la coincidencia de los $f_E$-intevalos y los intervalos Euclideanos. Como $f_E$ preserva el orden Euclideano, la $f_E$-medida de cada $f_E$-intervalo es su longitud. Por lo tanto,

$$\lambda_{f_E}^* [(a,b)] = \lambda_{f_E}^* \left[(a,b)_f\right] = |b-a| = \lambda^* [(a,b)] .$$

Al probar la igualdad en los intervalos, para cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ la medida exterior de Lebesgue coincide con la $f_E$-medida exterior. □

## 2. Propiedades básicas de $\lambda_f^*$

En ésta sección, analizaremos como se comporta $\lambda_f^*$ en los subconjuntos de $\mathbb{R}$ y ver si puede variar o no a lo ya conocido. Para comenzar, consideremos los subconjuntos más simples, que son los que se componen de un sólo elemento y como sabemos su medida de Lebesgue es cero, pero ¿qué pasa cuando consideramos una selección débil? Una respuesta parcial a lo anterior, se dá en los tres siguientes resultados que a su vez sirven de punto de partida para dar la respuesta definitiva.

**Lema 2.8.** *Sea $f$ una selección débil.*

1. *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión convergente a $r$ tal que $a_n <_f r$ para todo $n \in N$, entonces $\lambda_f^*(\{r\}) = 0$.*
2. *Si $a <_f r$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión que converge al punto $a$ y para todo $n \in N$ se tiene que $r <_f a_n$, se cumple que $\lambda_f^*(\{r\}) = 0$.*
3. *Si $r <_f b$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión convergente al punto $b$ tal que $b_n <_f r$ para todo $n \in N$, entonces $\lambda_f^*(\{r\}) = 0$.*

*Demostración.* (1) Como $r \in (a_n, r]_f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que para cada $\epsilon > 0$, existe un entero $N$ tal que si $n > N$, entonces $\lambda_f^*(\{r\}) \leq |r - a_n| < \epsilon$.

(2) Ya que $r \in (a, a_n]_f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para cada $\epsilon > 0$ existe un entero $N$ tal que si $n > N$, entonces $\lambda_f^*(\{r\}) \leq |a_n - a| < \epsilon$.

(3) Vemos que para todo entero $n$ el número $r$ es elemento de $(b_n, b]_f$. Por lo que para cada $\epsilon > 0$ existe un entero $N$ tal que si $n > N$, entonces $\lambda_f^*(\{r\}) \leq |b - b_n| < \epsilon$. ■

Con lo anterior y recordando la Definición 2.6, notemos que si un punto es $f$-minimal su $f$-medida exterior puede ser distinta de cero. La observación anterior nos lleva a ser cuidadosos al momento de enunciar un resultado definitivo.

**Proposición 2.9.** *Para todo $r \in \mathbb{R}$ y toda selección débil $f$*

$$\lambda_f^*(\{r\}) = \begin{cases} 0 \\ +\infty \end{cases}$$

*Demostración.* Si $r$ es $f$-minimal no existe ningún intervalo $(a,b]_f$ con $a,b$ elementos de $\mathbb{R}$ en el cual el conjunto $\{r\}$ esté contenido. Por lo tanto $\lambda_f^*(\{r\}) = +\infty$. Supongamos que $r$ es $f$-maximal. Tomemos una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en $\mathbb{R} \setminus \{r\}$ convergente a $r$. Como $a_n <_f r$ para todo $n$ en $\mathbb{N}$, aplicando el Lema 2.8-1 tenemos que la $f$-medida exterior del conjunto es cero[2]. Ahora, supongamos que $r$ no es $f$-minimal y tampoco $f$-maximal, entonces existen puntos $a,b \in \mathbb{R}$ tales que $r \in (a,b)_f$. Al negar el Lema 2.8-2, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que para todo $c \in [a-\delta, a+\delta]$ se tiene $c <_f r$. Debemos considerar los dos siguientes casos:

Caso 1. Sea $a < r$. Por lo anterior $a < a+\delta <_f r$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $a+\delta < r$. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{J} = \Big\{ s \in \mathbb{R} \,:\, a < s < r \quad \text{y} \quad s <_f r \Big\},$$

el cual es no vacío, ya que $[a, a+\delta] \subseteq \mathcal{J}$. Sea $d = \sup \mathcal{J}$. Si $d = r$, entonces, por el lema 2.8-1, el conjunto $\{r\}$ tiene $f$-medida cero. Supongamos que $d < r$. Podemos escoger las siguientes sucesiones:

$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (\leftarrow, d)$ tal que $c_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ cumpla $c_n <_f r$, y

$(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (d, r)$ tal que $d_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d$.

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $r <_f d_n$, por lo cual $r \in (c_n, d_n]_f$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, para $\epsilon > 0$ existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $n > N_1, N_2$ se tiene que $|d_n - d|$ y $|d - c_n|$ son menores que $\frac{\epsilon}{2}$. Cuando $n > \max\{N_1, N_2\}$, obtenemos

$$\lambda_f^*(\{r\}) \le |d_n - c_n| \le |d_n - d| + |d - c_n| < \epsilon.$$

Al ser $\epsilon$ arbitrario, podemos concluir que $\lambda_f^*(\{r\}) = 0$.

Caso 2. Si $r < a$, podemos suponer que $r < a - \delta$ y consideremos ahora el conjunto

$$\mathcal{H} = \Big\{ s \in \mathbb{R} \,:\, r < s < a \quad \text{y} \quad s <_f r \Big\},$$

el cual es no vacío, ya que $[a-\delta, a] \subseteq \mathcal{H}$. Sea $c = \inf \mathcal{H}$. Si $c = r$, entonces de nuevo por el lema 2.8-1, se tiene $\lambda_f^*(\{r\}) = 0$. Supongamos que $r < c$ y consideremos las sucesiones

$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (c, a)$ tal que $c_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ cumpla $c_n <_f r$, y

[2]Lo anterior es equivalente a que para todo $\epsilon > 0$ se cumple $r \in (r-\epsilon, r]_f$. Sólo basta considerar la sucesión $a_n = r - \frac{1}{n}$.

$(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (r, c)$ tal que $d_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ cumpla $r <_f d_n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $r \in (c_n, d_n]_f$ y procediendo de manera análoga al caso 1, la $f$-medida del conjunto $\{r\}$ es cero. Por lo tanto, para $r \in \mathbb{R}$ no $f$-minimal se tiene $\lambda_f^*(\{r\}) = 0$. ■

**Corolario 2.10.** *Sea $f$ una selección débil y $r \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $r$ es $f$-maximal, entonces $\lambda_f^*(\{r\}) = 0$.*
2. *$r$ es $f$-minimal si y sólo si $\lambda_f^*(\{r\}) = +\infty$.*

*Demostración.* (1) Por el caso II en la Proposición 2.9, se obtiene el resultado.

(2) $(\Rightarrow)$ La prueba para ésta implicación se dá en el caso I de la Proposición 2.9.

$(\Leftarrow)$ Si la $f$-medida exterior del conjunto $\{r\}$ es infinita, no existe un $f$-intervalo $(a, b]_f$ con $a, b$ en $\mathbb{R}$, tal que éste conjunto esté contenido en él, entonces para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{r\}$ se tiene $r <_f x$. ■

**Corolario 2.11.** *Si $X \in [\mathbb{R}]^{\leq\omega}$ y $f$ es una selección débil cualquiera, entonces*

$$\lambda_f^*(X) = \begin{cases} 0 \\ +\infty \end{cases}$$

*Demostración.* Sea $X = \left\{x_i \;:\; i \in \mathbb{N}\right\}$. Si ningún elemento de $X$ es un punto $f$-minimal entonces

$$\lambda_f^*(X) = \lambda_f^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{x_i\}\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_f^*(\{x_i\}) = 0.$$

Obteniendo $\lambda_f^*(X) = 0$. Ahora, si para algún $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $x_k$ es $f$-minimal, por el Colorario **??** la $f$-medida exterior del conjunto $\{x_k\}$ es infinita y como $\{x_k\} \subset X$, por monotonía tenemos $\lambda_f^*(X) = +\infty$. ■

**Corolario 2.12.** *Para toda selección débil $f$ y para $r$ en $\mathbb{R}$ el conjunto $\{r\}$ es $\lambda_f^*$-medible.*

*Demostración.* Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Supongamos que $r$ es un punto $f$-minimal. Si $r \in A$ se cumple que $\lambda_f^*(A) = +\infty$ ya que por el Corolario **??** la $f$-medida del conjunto $\{r\}$ también lo es, además

$$A \cap \{r\} = \{r\} \quad \text{y} \quad A \cap (\mathbb{R} \setminus \{r\}) = A \setminus \{r\}.$$

Por lo cual,

$$\lambda_f^*(A \cap \{r\}) + \lambda_f^*[A \cap (\mathbb{R} \setminus \{r\})] = +\infty = \lambda_f^*(A).$$

Si $r \notin A$, se tiene $A \cap \{r\} = \emptyset$ y $A \cap (\mathbb{R} \setminus \{r\}) = A$, entonces

$$\lambda_f^*(A \cap \{r\}) + \lambda_f^*[A \cap (\mathbb{R} \setminus \{r\})] = \lambda_f^*(A).$$

Ahora, si $r$ no es $f$-minimal, por la Proposición 2.9 y el Corolario 2.10 el conjunto $\{r\}$ tiene $f$-medida cero, entonces cuando $r \notin A$

$$A \cap \{r\} = \emptyset \quad \text{y} \quad A \cap (\mathbb{R} \setminus \{r\}) = A.$$

Obteniendo de aquí

$$\lambda_f^* (A \cap \{r\}) + \lambda_f^* [A \cap (\mathbb{R} \setminus \{r\})] = \lambda_f^*(A).$$

Para el caso cuando $r \in A$, se tiene

$$A \cap \{r\} = \{r\} \quad \text{así como} \quad A \cap (\mathbb{R} \setminus \{r\}) = A \setminus \{r\}.$$

Entonces

$$\lambda_f^* (A \cap \{r\}) + \lambda_f^* [A \cap (\mathbb{R} \setminus \{r\})] = \lambda_f^*(A \setminus \{r\}) \leq \lambda_f^*(A).$$

La otra desigualdad es consecuencia inmediata de la subaditividad de $\lambda_f^*$. Por lo tanto, para cada $r \in \mathbb{R}$ y cada selección débil $f$ se cumple que $\{r\} \in \mathcal{M}_f$ ■

De acuerdo con el Corolario **??**, para cualquier selección débil $f$ hay a lo más un punto de $\mathbb{R}$ que tiene $f$-medida exterior infinita.

- Sea $f$ una selección débil. Denotamos por $\mathcal{N}_f$ al conjunto $\mathcal{N}_{\lambda_f^*}$ que son todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ con $f$-medida exterior cero, y los llamaremos $\lambda_f^*$-nulos.

**Lema 2.13.** *Si $f$ es una selección débil y $E \subseteq \mathbb{R}$ tal que es elemento de $\mathcal{N}_f$, entonces $E$ es $\lambda_f^*$-medible.*

*Demostración.* Sea $A$ un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}$. Como $E \cap A$ es subconjunto de $E$, aplicando la monotonía de la $f$-medida exterior se tiene $\lambda_f^*(E \cap A) = 0$. Al intersectar el complemento de $E$ con $A$ se cumple que $A \cap E^c \subseteq A$, obteniendo

$$\lambda_f^*(A) \geq \lambda_f^*(A \cap E^c) = \lambda_f^*(A \cap E) + \lambda_f^*(A \cap E^c).$$

De nuevo, la subaditividad de la medida nos dá la otra desigualdad. ■

**Teorema 2.14.** *Si $f$ es una selección débil tal que para $M \subset \mathbb{R}$ numerable se tiene*

$$f(\{x, y\}) = x \quad \textit{si y sólo si} \quad x < y \quad \textit{y} \quad |\{x, y\} \cap M| \leq 1,$$

*para $\{x, y\} \in [\mathbb{R}]^2$, entonces $\lambda_f^*(A) = \lambda^*(A)$ para todo $A \subseteq \mathbb{R}$.*

*Demostración.* Para facilitar la demostración notemos que

1. Si $a, b \notin M$, entonces $(a, b]_f = (a, b]$,
2. si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a + \epsilon, b + \epsilon \notin M$ con $\epsilon > 0$, entonces $(a, b]_f \setminus M \subseteq (a + \epsilon, b + \epsilon]$ y
3. para $B \subseteq R$, por el Lema 1.10, $\lambda_f^*(B) \leq \lambda^*(B)$.

Primero probaremos que $M$ es $\lambda_f^*$-nulo. Fijemos $z \in M$. Como la medida de Lebesgue del conjunto $\{z\}$ es cero tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escoger dos puntos $a_n, b_n \in \mathbb{R} \setminus M$ de tal manera que

$$z \in (a_n, b_n] \qquad \text{y} \qquad b_n - a_n < \frac{1}{2^n}.$$

Al tener que $\{z\} \subset (a_n, b_n]$, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_f^*(\{z\}) \leq \lambda_f^*[(a_n, b_n]] = \lambda_f^*\left[(a_n, b_n]_f\right] < \frac{1}{2^n}, \qquad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Obteniendo de aquí la igualdad $\lambda_f^*(\{z\}) = 0$. Así, para $M = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ se cumple la relación

$$\lambda_f^*(M) = \lambda_f^*\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{z_n\}\right] \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_f^*(\{z_n\}) = 0.$$

Por consiguiente, $\lambda_f^*(M) = 0$ y aplicando el Corolario 2.13, el conjunto $M$ resulta ser $\lambda_f^*$-medible. Por la monotonía de la $f$-medida exterior hallamos que $\lambda_f^*(A \cap M) = 0$. Al aplicar la condición de Carathéodory a $M$ obtenemos

$$\lambda_f^*(A) = \lambda_f^*(A \cap M) + \lambda_f^*(A \setminus M) = \lambda_f^*(A \setminus M).$$

Nos resta probar que la $f$-medida exterior del conjunto $A \setminus M$ coincide con su medida de Lebesgue. Por el inciso 3, sabemos que $\lambda_f^*(A \setminus M) \leq \lambda^*(A \setminus M)$. Supongamos ahora que

$$\lambda_f^*(A \setminus M) < \lambda^*(A \setminus M).$$

Entonces, para $A \setminus M$ existen $\epsilon > 0$ y una cubierta numerable de $f$-intervalos $\{(a_n, b_n]_f : n \in \mathbb{N}\}$ tales que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - a_n| + \epsilon < \lambda^*(A \setminus M).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seleccionamos $\epsilon_n$ tal que $\epsilon_n < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$ y $a_n - \epsilon_n,\ b_n + \epsilon_n \notin M$. Recordando el inciso 2, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple $(a_n, b_n]_f \setminus M \subseteq (a_n + \epsilon, b_n + \epsilon]$. Por lo cual,

$$A \setminus M \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n - \epsilon_n, b_n + \epsilon_n].$$

Obteniendo

$$\lambda^*(A \setminus M) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - a_n| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - a_n| + \epsilon < \lambda^*(A \setminus M),$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\lambda_f^*(A) = \lambda^*(A \setminus M)$.

Para probar lo restantente, notemos que

$$\lambda^*(A) = \lambda^*((A \setminus M) \cup (A \cap M)) \leq \lambda^*(A \setminus M) + \lambda^*(A \cap M) = \lambda^*(A \setminus M).$$

Aplicando la propiedad de monotonía, obtenemos la otra desigualdad. $\blacksquare$

**Teorema 2.15.** *Sea $f$ una selección débil y $A \subseteq \mathbb{R}$ distinto del vacío. Supongamos que para cada $r \in A$ y para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{r\}$ se tiene $f(\{x, y\}) = f_E(\{x, y\})$. Entonces, $\lambda_f^*(A) = \lambda^*(A)$.*

*Demostración.* Sea $\left\{(a_n, b_n]_f \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ una cubierta numerable de $f$-intervalos semiabiertos de $A$. Para cada $r \in A$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r \in (a_n, b_n]_f$ y por definición de la selección débil $f$, sabemos que $r \in (a_n, b_n]$. Por lo cual, $\left\{(a_n, b_n] \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ es una cubierta numerable de intervalos Euclidianos semiabiertos de $A$. De aquí obtenemos que

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell[(a_n, b_n)_f].$$

Ya que $\lambda_f^*(A)$ es el ínfimo al considerar todas las cubiertas con $f$-intervalos semiabiertos, se cumple la relación $\lambda^*(A) \leq \lambda_f^*(A)$. Ahora, sea $\left\{(x_n, y_n] \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ una cubierta numerable de $A$ con intervalos Eulideanos. Para cada $r \in A$ existe $n \in \mathbb{N}$ para el cual $r \in (x_n, y_n]$ y por ello $r$ es elemento de $(x_n, y_n]_f$. De esta manera, obtenemos que $\left\{(x_n, y_n] \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ es una cubierta numerable de $A$ con $f$-intervalos semiabiertos. Entonces

$$\lambda_f^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |y_n - x_n|.$$

Lo anterior es válido para cualquier cubierta de $A$ por intervalos Euclideanos. Como $\lambda^*$ es el ínfimo al considerar todas éstas cubiertas, concluimos que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\lambda_f^*(A) \leq \lambda^*(A).$$

Por lo tanto, $\lambda_f^*(A) = \lambda^*(A)$. ■

**Corolario 2.16.** *Si $f$ es una selección débil como en el Teorema 2.14, entonces $E \in \mathcal{M}$ si y sólo si $E \in \mathcal{M}_f$.*

*Demostración.* Sea $E$ $\lambda_f^*$-medible. Para cada $A \subseteq \mathbb{R}$, se tiene

$$\lambda^*(A) = \lambda_f^*(A) = \lambda_f^*(A \cap E) + \lambda_f^*(A \cap E^c) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c).$$

Por lo cual, $E$ es Lebesgue medible. Si ahora suponemos que $E \in \mathcal{M}$, la prueba es similar. ■

**Lema 2.17.** *Para toda selección débil $f$, $|\mathcal{M}_f| \geq \mathfrak{c}$.*

*Demostración.* Supongamos que $r \in \mathbb{R}$ es un punto $f$-minimal. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{U} = \left\{\{x\} \ : \ x \in \mathbb{R} \setminus \ \{r\}\right\}.$$

El Corolario 2.12 garantiza que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}_f$. Además, por la Proposición 1.1 la cardinalidad de éste conjunto[3] es $\mathfrak{c}$. Por los Corolarios 2.11 y 2.13 se tiene que cada

$$A \in [\mathbb{R} \setminus \{r\}]^{\leq \omega} \setminus \mathcal{U}$$

es elemento de $\mathcal{M}_f$, lo cual implica que $|\mathcal{M}_f| \geq \mathfrak{c}$. ■

Por resultados básicos de Teoría de la Medida se sabe que $\mathcal{M}_f$ es una $\sigma$-álgebra en $\mathbb{R}$, pero para mayor credibilidad incluiremos la demostración de éste hecho.

**Teorema 2.18.** *Para toda selección débil $f$, $\mathcal{M}_f$ es una $\sigma$-álgebra en $\mathbb{R}$.*

*Demostración.* Se observa fácilmente que el vacío y el total son elementos de $\mathcal{M}_f$ y para cada subconjunto $\lambda_f^*$-medible $E$ se tiene que $E^c$ es también elemento, tomando en cuenta la simetría en la condición de Carathéodory. Sean $E_1, E_2$ subconjuntos $\lambda_f^*$-medibles. Si $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces tenemos que $E_1$ cumple

$$\lambda_f^*\left[A \cap (E_1 \cup E_2)\right] = \lambda_f^*\left[A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1\right] + \lambda_f^*\left[A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1^c\right] = \lambda_f^*(A \cap E_1) + \lambda_f^*(A \cap E_1^c \cap E_2).$$

Por ello,

$$\lambda_f^*\left[A \cap (E_1 \cup E_2)\right] + \lambda_f^*\left[A \cap (E_1 \cup E_2)^c\right] = \lambda_f^*(A \cap E_1) + \lambda_f^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda_f^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c). \tag{2.1}$$

Tomando la intersección de $A$ con el complemento de $E_1$ y $E_2$ hallamos que

$$\lambda_f^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda_f^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) = \lambda_f^*(A \cap E_1^c). \tag{2.2}$$

Finalmente, con 2.1 y 2.2, se obtiene

$$\lambda_f^*\left[A \cap (E_1 \cup E_2)\right] + \lambda_f^*\left[A \cap (E_1 \cup E_2)^c\right] = \lambda_f^*(A \cap E_1) + \lambda_f^*(A \cap E_1^c) = \lambda_f^*(A).$$

Por lo cual, $E_1 \cup E_2$ es elemento de $\mathcal{M}_f$.

Si $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos en $\mathcal{M}_f$ tal que $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$ probaremos, por inducción para cada $A \subseteq \mathbb{R}$, que

$$\lambda_f^*(A) = \sum_{i=1}^{n} \left[\lambda_f^*(A \cap E_i)\right] + \lambda_f^*\left[A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right)\right]. \tag{2.3}$$

[3]Consideremos la biyección dada por $\{x\} \mapsto x$, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{r\}$.

Dicha afirmación nos será de gran ayuda en lo posterior para probar una propiedad importante de $\mathcal{M}_f$.

Cuando $n = 1$, sólo se trata de la mesurabilidad de $E_1$. Supongamos que la fórmula es válida para $n = k$. Para $n = k + 1$ tenemos que $E_{k+1} \in \mathcal{M}_f$ y al aplicar la condición de Carathéodory a $A$ intersectado con el conjunto $\bigcap_{i=1}^{k} E_i^c$, se tiene

$$\lambda_f^*\left[A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i^c\right)\right] = \lambda_f^*\left[A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} Ei^c\right) \cap E_{k+1}\right] + \lambda_f^*\left[A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k+1} E_i^c\right)\right].$$

Además, $\left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i^c\right) \cap E_{k+1} = E_{k+1}$ al ser la sucesión disjunta. Por lo cual,

$$\lambda_f^*\left[A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i^c\right)\right] = \lambda_f^*(A \cap E_{k+1}) + \lambda_f^*\left[A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k+1} E_i^c\right)\right].$$

Sumando en ambos lados la cantidad $\sum_{i=1}^{k} \lambda_f^*(A \cap E_i)$ y aplicando en el lado izquierdo de la igualdad la hipótesis de inducción, concluimos que la afirmación es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\lambda_f^*\left[A \cap \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i^c\right)\right] \leq \lambda_f^*\left[A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right)\right]$ y con la ayuda de 2.3, vemos que

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_f^*(A \cap E_i)\right] + \lambda_f^*\left[A \cap \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i^c\right)\right] \leq \sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_f^*(A \cap E_i)\right] + \lambda_f^*\left[A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right)\right] = \lambda_f^*(A).$$

Aplicando la subaditividad de $\lambda_f^*$ encontramos que

$$\lambda_f^*(A) \leq \lambda_f^*\left[\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) \cap A\right] + \lambda_f^*\left[\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right)^c \cap A\right] \leq \lambda_f^*(A).$$

Deducimos de aquí que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$ es $\lambda_f^*$-medible y obteniendo la aditividad numerable. Con lo anterior, concluimos que el conjunto $\mathcal{M}_f$ es una $\sigma$-álgebra sobre $\mathbb{R}$. ■

Con el teorema anterior y la Proposición 1.13, para toda selección débil $f$ tenemos que

$$\left(\mathbb{R}, \mathcal{M}_f, \lambda_f^*\right)$$

es un espacio de medida. A continuación, mostraremos dando una selección débil que un intervalo Euclideano arbitrario logra alcanzar $f$-medida exterior infinita. Vale la pena notar que ésto es muy interesante, ya que la medida exterior $\lambda_f^*$, para alguna selección débil $f$, puede no ser $\sigma$-finita y de ésta forma algunas propiedades de la medida de Lebesgue se pueden perder.

**Ejemplo 2.19.** Sea $(a, b)$ un intervalo Euclideano. Nuestra selección débil $f$ será definida por inducción transfinita, para ello enumeremos el conjunto $\mathbb{R}^\omega$ como $\left\{S_\xi : \xi < \mathfrak{c}\right\}$ y cada $S_\xi$ como $\left\{x_n^\xi : n \in \mathbb{N}\right\}$. Tomemos $r_0 \in (a, b) \setminus S_0$ y definimos $r_0 <_f x_n^0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que para un ordinal $\xi < \theta < \mathfrak{c}$ el número $r_\xi$ ha sido definido y consideremos $S_\theta$. Como la cardinalidad del conjunto

$$(a,b) \setminus \left[ \bigcup_{\xi \leq \theta} S_\xi \cup \left\{ r_\xi : \xi < \theta \right\} \right]$$

es $\mathfrak{c}$ podemos tomar un $r_\theta$ en éste conjunto y así definir $r_\theta <_f x_n^\xi$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $\xi \leq \theta$. La selección débil mantendrá el orden Euclideano en los pares de puntos en donde no ha sido definida y es claro para nuestro propósito que basta considerar las posibles cubiertas infinitas de $f$-intervalos semiabiertos. Efectivamente, supongamos $(a,b) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}(a_n, b_n]_f$ y tomemos $\theta < \mathfrak{c}$ de tal manera que $x_{2n}^\theta = a_n$ y $x_{2n+1}^\theta = b_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Por definición, sabemos que $r_\theta <_f x_n^\theta$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo cual,

$$r_\theta \in (a,b) \setminus \left[ \bigcup_{n=0}^{+\infty} (a_n, b_n]_f \right].$$

Esto prueba que no existe cubierta numerable de $f$-intervalos semiabiertos para el intervalo $(a,b)$ Por lo tanto, $\lambda_f^* [(a,b)] = +\infty$. $\square$

**Ejemplo 2.20.** Por el Teorema 1.11, sabemos que la medida exterior de Lebesgue se comporta bien bajo la función

$$y \mapsto y + x, \quad \text{donde} \quad x, y \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad x \quad \text{fijo.}$$

Es natural preguntarse, ¿Para toda selección débil $f$ y $E \in \mathcal{M}_f$, se tiene $\lambda_f^*(E) = \lambda_f^*(E + x)$, para $x \in \mathbb{R}$? Como respuesta a lo anterior definimos una selección débil $f$ de tal forma que $\lambda_f^*$ no cumple la invarianza bajo la traslación. Sea $r \neq 0$ un elemento fijo de $\mathbb{R}$ y $f$ la selección débil que para cada $\{x, y\} \in [\mathbb{R}]^2$ se define como

$$f(\{x,y\}) := \begin{cases} r & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ r \right\} \quad \text{y} \quad y = r \\ \\ x & \text{si} \quad x < y \quad \text{y} \quad x \neq r \neq y \end{cases}$$

Aplicando la definición de $f$, si $x \in \mathbb{R} \setminus \{r\}$ se tiene $r <_f x$, entonces $r$ es $f$-minimal y por el Corolario 2.10-2 la $f$-medida exterior de $\{r\}$ es infinita. La Proposición 2.9 implica que

$$\lambda_f^* (\{r\} + 1) = \lambda_f^* (\{r + 1\}) = 0 < +\infty = \lambda_f^* (\{r\}). \qquad \square$$

## 3. Ejemplos de medidas inducidas por selecciones débiles

En ésta sección daremos diversos ejemplos de medidas inducidas por selecciones débiles que satisfacen propiedades patológicas si las comparamos con la medida exterior de Lebesgue.

**Ejemplo 2.21.** Nuestro primer ejemplo de ésta sección mostrará que el intervalo $(0,1)_f$ puede ser vacío y por ello tener $f$-medida exterior cero. Sea $f$ la selección débil dada por

$$f(\{x,y\}) := \begin{cases} x & \text{si} \quad y = 0 \\ \\ x \quad \text{si} \quad x < y & \text{y} \quad x \neq 0 \neq y \end{cases}$$

Para todo $\{x,y\} \in [\mathbb{R}]^2$. Si $r \in (0,1)_f$, entonces $0 <_f r$. Pero ésto es una contradicción, ya que $f(\{r,0\}) = r$, lo cual nos indica que $r <_f 0$ para todo $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por lo tanto, $(0,1)_f = \emptyset$. $\square$

**Ejemplo 2.22.** Consideremos el intervalo Euclideano $(a,b)$. Definimos

$$f(\{x,y\}) := \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in (a,b) \quad \text{y} \quad y = a \\ \\ x \quad \text{si} \quad x < y & \text{y no se cumple lo anterior} \end{cases}$$

Para cada $\{x,y\} \in [\mathbb{R}]^2$. Notemos que el $f$-intervalo $(a,b)_f$ es vacío, ya que para todo $x \in (a,b)$ se tiene que $x <_f a$. Podemos ver que no siempre un intervalo en el orden Euclideano está contenido en el $f$-intervalo correspondiente. $\square$

**Ejemplo 2.23.** Veremos a continuación que la $f$-medida exterior de un intervalo en el orden Euclideano puede ser cero. Fijemos un intervalo Euclideano no vacío $(a,b)$. Para cada $\{x,y\} \in [\mathbb{R}]^2$ y toda $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, definimos la siguiente selección débil

$$f(\{x,y\}) := \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in (a,b) \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{n} \\ \\ y & \text{si} \quad x \in (a,b) \quad \text{y} \quad y = -\frac{1}{n} \\ \\ x \quad \text{si} \quad x < y & \text{y no se cumple lo anterior} \end{cases}$$

Como $-\frac{1}{n} <_f r$ y $r <_f \frac{1}{n}$ para cada $r \in (a,b)$, se cumple que $(a,b) \subseteq \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]_f$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Por lo tanto, $\lambda_f^*[(a,b)] \leq \frac{2}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y su $f$-medida exterior exterior es cero. Este ejemplo nos muestra como dependiendo la selección débil escogida podemos hacer que la $f$-medida exterior de un intervalo Euclideano sea tan pequeña como queramos sin multiplicar por una constante, contrario al valor calculado con la medida exterior de Lebesgue. $\square$

En los dos ejemplos siguientes se muestran de manera explícita dos intervalos Euclideanos en el que la $f$-medida exterior del primero disminuye y para el otro es cero, haciendo un $f$-intervalo igual a un sólo punto.

**Ejemplo 2.24.** Consideremos la selección débil $f$ definida de la siguiente manera:

$$f(\{x,y\}) := \begin{cases} y & \text{si} \quad x = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad y \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ \\ x \quad \text{si} \quad x < y & \text{y no se cumple lo anterior} \end{cases}$$

para todo $\{x, y\} \in [\mathbb{R}]^2$. Supongamos que $r \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]_f \cap \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$. Tenemos lo siguiente:

$$\frac{1}{3} <_f r \quad \text{y} \quad r \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \quad \text{por lo que} \quad f\left(\{\frac{1}{3}, r\}\right) = r \quad \text{y} \quad r <_f \frac{1}{3},$$

lo cual es una contradicción y claramente la intersección de éstos intervalos es vacía. Probaremos que $(0, 1]$ es igual a $(0, \frac{1}{3}]_f \cup (\frac{2}{3}, 1]_f$. Sea $r$ un punto en el intervalo $(0, 1]$.

- Si $r \in (0, \frac{1}{3}]$, entonces se cumple que $f(\{0, r\}) = 0$ y $f(\{\frac{1}{3}, r\}) = r$. De aquí se sigue la igualdad

$$r \in (\leftarrow, \frac{1}{3}]_f \cap (0, \rightarrow)_f = (0, \frac{1}{3}]_f.$$

- Si $r \in (\frac{2}{3}, 1]$, entonces vemos que $f(\{\frac{2}{3}, r\}) = \frac{2}{3}$ y $f(\{r, 1\}) = r$. Por lo cual

$$r \in (\leftarrow, 1]_f \cap (\frac{2}{3}, \rightarrow)_f = (\frac{2}{3}, 1]_f.$$

- Para $r \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ tenemos que $f(\{0, r\}) = 0$ y $f(\{\frac{1}{3}, r\}) = r$, lo cual implica que éste intervalo está contenido en $(0, \frac{1}{3}]_f$.

- Ahora, para $r \in (0, \frac{1}{3}]_f$ notemos que $0 < r$. Si $1 < r$, entonces $\frac{1}{3} <_f r$, lo cual contradice que el punto sea elemento del $f$-intervalo. Por lo anterior, $r \in (0, 1]$.

- Cuando $r \in (\frac{2}{3}, 1]_f$, el orden Euclideano se preserva, por definición de la selección débil. Entonces,

$$\frac{2}{3} < r \leq 1 \qquad \text{y} \qquad r \in (0, 1].$$

- Si $s \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$, entonces $s \in (\leftarrow, 0]_f \cup (1, \rightarrow)_f$. De la definición notamos que para éstos puntos el orden Euclideano se vuelve a preservar. Por lo tanto, $(0, 1] = (0, \frac{1}{3}]_f \cup (\frac{2}{3}, 1]_f$.

Como $(0, \frac{1}{3}]_f \cup (\frac{2}{3}, 1]_f$ es una cubierta para $(0, 1]$, por definición de la $f$-medida exterior exterior, se cumple la siguiente desigualdad

$$\lambda_f^* [(0, 1]] \leq \ell\left[\left(0, \frac{1}{3}\right]_f\right] + \ell\left[\left(\frac{2}{3}, 1\right]_f\right] = \frac{2}{3}.$$

Por observaciones hechas anteriormente, para ninguna cubierta numerable de $(0, 1]$ la suma de las longitudes los $f$-intervalos que la componen es menor a $\frac{2}{3}$, siendo la anterior una con la cual se obtiene el valor mínimo. De ésta manera, $\lambda_f^*[(0,1]] = \frac{2}{3}$. Este cálculo es contrario a lo que sabemos, ya que $\lambda^*[(0,1]] = 1$. $\square$

**Ejemplo 2.25.** En éste ejemplo estudiaremos la selección débil $f$ que está dada de la siguiente manera:

$$f(\{x,y\}) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad y = 1 \\ x & \text{si} \quad x \in (0, \frac{1}{2}) \quad \text{y} \quad y = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \in (\frac{1}{2}, 1) \quad \text{y} \quad y = 1 \\ x \quad \text{si} \quad x < y \quad \text{y no se cumple lo anterior.} \end{cases}$$

para todo $\{x,y\} \in [\mathbb{R}]^2$. Probaremos que el $f$-intervalo $(0,1)_f$ consta de un sólo punto. Para ésto, se tienen los siguientes casos:

- Si $r = \frac{1}{2}$, $f\left(\{0, \frac{1}{2}\}\right) = 0$ y $f\left(\{\frac{1}{2}, 1\}\right) = \frac{1}{2}$, entonces $\frac{1}{2} \in (\leftarrow, 1)_f \cap (0, \rightarrow)_f = (0,1)_f$.
- Si $r \in (0, \frac{1}{2})$ ó $r \in (\frac{1}{2}, 1)$, entonces $f(\{r, 0\}) = r$ ó $f(\{r,1\}) = 1$ y $r \notin (0,1)_f$.
- Para valores menores que cero o mayores el orden Euclideano se preserva.

Por lo tanto, $(0,1)_f = \{\frac{1}{2}\}$. Para todo $\epsilon > 0$ se tiene $\{\frac{1}{2}\} \subseteq (\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2}]_f$, por lo que

$$\lambda_f^*\left[(0,1)_f\right] = \lambda_f^*\left(\{\frac{1}{2}\}\right) < \epsilon.$$

De aquí concluimos $\lambda_f^*\left[(0,1)_f\right] = 0$. $\square$

La selección débil que se presenta a continuación, nos muestra que cuando tenemos un conjunto que no es Lebesgue medible tampoco puede serlo con la medida inducida por ésta selección.

**Ejemplo 2.26.** Por el Teorema 1.9, sabemos que existe un conjunto $E \subseteq (0,1]$ que no es Lebesgue medible. Ahora, por el Teorema 1.8, se cumple lo siguiente:

$$1 = \lambda^*[(0,1]] < \lambda^*(E) + \lambda^*[(0,1] \setminus E].$$

Sean $M \subseteq E$ y $N \subseteq (0,1] \setminus E$ conjuntos numerables. Fijando $r \in E \setminus \{1\}$, definimos la selección débil $f$ dada por

$$f(\{x,y\}) := \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in M \quad \text{y} \quad y = r \\ \\ r & \text{si} \quad x \in N \quad \text{y} \quad y = r \\ \\ x \quad \text{si} \quad x < y \quad \text{y no se cumple lo anterior} \end{cases}$$

para todo $\{x,y\} \in [\mathbb{R}]^2$. Para $s \in (0,1]$ se desprende de manera inmediata las siguiente propiedad.

• Si $s \in M$, entonces $0 <_f s <_f r$. Mientras que para $s \in N$ se cumple la desigualdad $r <_f s <_f 1$.

Para puntos en $\mathbb{R} \setminus (M \cup N)$ el orden se preserva, por lo que la selección débil solo aplica en una cantidad numerable de puntos. Aplicando el Teorema 2.14 se obtiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} \lambda_f^* [(0,1]] &= \lambda^* [(0,1] \\ &< \lambda^*(E) + \lambda^* [(0,1] \setminus E] \\ &= \lambda_f^*(E) + \lambda_f^* ((0,1] \setminus E) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $E$ no es $\lambda_f^*$-medible. □

La selección débil $f$ en el siguiente ejemplo, muestra que existe un conjunto $E$ que no es Lebesgue medible en el intervalo Euclideano $(a,b)$, pero el conjunto $E+r$ será elemento de $\mathcal{M}_f$, para cualquier $r \in \mathbb{R}$.

**Ejemplo 2.27.** Sean $a, b, r \in \mathbb{R}$. Para todo $\{x,y\} \in [\mathbb{R}]^2$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, la selección débil $f$ se define como

$$f(\{x,y\}) := \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in (a+r, b+r) \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{n+1} \\ \\ y & \text{si} \quad x \in (a+r, b+r) \quad \text{y} \quad y = -\frac{1}{n+1} \\ \\ x \quad \text{si} \quad x < y \quad \text{y} \quad \text{y no se cumple lo anterior} \end{cases}$$

Para el intervalo Euclideano $(a,b)$, por el Teorema 1.9, existe $E \subseteq (a,b)$ que no es Lebesgue medible. Ahora, notemos que para $E$, el conjunto $E + r$ está contenido en el intervalo $(a + r, b + r)$ y la definición de $f$ asegura que para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$E + r \subseteq \left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)_f .$$

Aplicando la monotonía de la $f$-medida exterior obtenemos lo siguiente:

$$\lambda_f^*(E+r) \leq \lambda_f^*\left[\left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)_f\right] \leq \frac{2}{n+1},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. De ésta manera, la $f$-medida exterior del conjunto es cero y por el Lema 2.13 es $\lambda_f^*$-medible. $\square$

Como sabemos, cualquier intervalos Euclideano $(a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ es Lebesgue medible, contrario a ésto, en lo siguiente mostraremos que existe una selección débil $f$ tal que $(0, 1)_f$ no satisface la condición de Carathéodory. Lo cual significa que no es $\lambda_f^*$-medible.

**Ejemplo 2.28.** Definimos la selección débil $f$ de la siguiente manera:

$$f(\{x,y\}) := \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in (3,4) \quad \text{y} \quad y = 1 \\ y & \text{si} \quad x \in (3,4) \quad \text{y} \quad y = 0 \\ x & \text{si} \quad x \in (2,3) \quad \text{y} \quad y = 0 \\ y & \text{si} \quad x \in (2,3) \quad \text{y} \quad y = -1 \\ x & \text{si} \quad x \in (2,4) \quad \text{y} \quad y = 6 \\ y & \text{si} \quad x \in (2,4) \quad \text{y} \quad y = 5 \\ x \quad \text{si} \quad x < y & \text{y no se cumple lo anterior.} \end{cases}$$

para todo $\{x, y\} \in [\mathbb{R}]^2$. Notemos lo siguiente:

• $(2, 4) = (2, 4)_f$.

Si $r \in (2, 4)$, entonces $f(\{2, r\}) = 2$ y $f(\{r, 4\}) = 4$. Lo cual implica que

$$2 <_f r \quad \text{y} \quad r <_f 4 \qquad \text{ó} \qquad r \in (\leftarrow, 4)_f \cap (2, \rightarrow)_f = (2, 4)_f.$$

Para $r \in (2, 4)_f$ se tiene que $f$ evaluada en $\{2, r\}$ y $\{r, 4\}$ es igual a 2 y $r$, respectivamente. De acuerdo a la definición de nuestra selección débil, vemos que $2 < r < 4$.

Procediendo de la misma manera, tenemos que $(3, 4) = (3, 4)_f$ y $(2, 3) = (2, 3)_f$.

• $(0, 1)_f = (0, 1) \cup (3, 4)$ y $(-1, 0)_f = (-1, 0) \cup (2, 3)$.

Para $r \in (0, 1)_f$. Supongamos que $r \in \mathbb{R} \setminus [(0, 1) \cup (3, 4)]$. Tenemos los siguientes casos:

- Si $r \in (-\infty, 0) \cup (2,3)$ entonces $f(\{r, 0\}) = r$ y $r <_f 0$.
- Si $r \in (1,2] \cup (4,+\infty)$ entonces $f(\{1, r\}) = 1$ y $1 <_f r$.

Obteniendo siempre una contradicción, ya que $r$ satisface $0 <_f r$ y $r <_f 1$. Por lo cual, $r \in (0,1) \cup (3,4)$. La otra igualdad se prueba de manera similar.

Cuando $r \in (0,1) \cup (3,4)$, al evaluar $f$ en $\{0, r\}$ y $\{r, 1\}$ o en $\{3, r\}$ y $\{r, 4\}$, en cualquiera de los dos casos $r$ es elemento de $(\leftarrow, 1)_f \cap (0, \rightarrow)_f$ que es por definición, el $f$-intervalo $(0,1)_f$.

• Además, $(2,4) \subset (5,6)_f$, al ser éste $f$-intervalo igual a $(5,6) \cup (2,4)$. Obteniendo, por definición de la $f$-medida exterior

$$\lambda_f^*\left[(2,4)_f\right] \leq 1.$$

Haciendo $E = (0,1)_f$ y $A = (2,4)_f$, podemos ver que

$E \cap A = [(0,1) \cup (3,4)] \cap (2,4) = (3,4) = (3,4)_f$ y

$E^c \cap A = [(-\infty, 0] \cup [1,3] \cup [4,+\infty)] \cap (2,4) = (2,3) = (2,3)_f$.

Además,

$$\lambda_f^*(E \cap A) = \lambda_f^*(E^c \cap A) = 1.$$

Lo anterior se dá observando que $(3,4)$ se puede cubrir por $(3,4)_f$ y por $(0,1)_f$ y no existe un $f$-intervalo de longitud más pequeña que lo contenga. Lo mismo pasa para $(2,3)$, ya que

$$(2,3) \subseteq (2,3)_f \quad \text{y} \quad (2,3) \subseteq (-1,0)_f.$$

De nueva cuenta, no existe $f$-intervalo de longitud más pequeña que lo cubra. Por lo tanto,

$$\lambda_f^*\left[(E \cap A\right] + \lambda_f^*\left[E^c \cap A\right] = 2 > 1 \geq \lambda_f^*\left[A\right]. \qquad \square$$

Para la selección débil $f$ en el siguiente ejemplo, se muestra que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es $\lambda_f^*$-nulo y por consiguiente, $\mathcal{M}_f = \mathcal{N}_f = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ a diferencia de cuando trabajamos con la medida de Lebesgue, ya que los conjuntos nulos están contenidos en $\mathcal{M}^*$.

**Ejemplo 2.29.** Consideremos la sucesión $\left((a_z^i)_{z\in\mathbb{Z}}\right)_{i\in\mathbb{N}}$, donde para cada $i \in \mathbb{N}$ el elemento $(a_z^i)_{z\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de números reales estríctamente creciente, con respecto a los números enteros, y no acotada ni superior ni inferiormente, cumpliendo para cada $i \in \mathbb{N}$ y cada $z \in \mathbb{Z}$ lo siguiente:

- $a_{z+1}^i < a_{2z}^{i+1}$, y
- $a_{z+1}^i - a_z^i < \frac{1}{2^{i-1}}$,

para cada $z \in \mathbb{Z}$.

Veamos como se puede definir una sucesión de este tipo: Primero definimos $a_z^0 = z$ para cada $z \in \mathbb{Z}$. Supongamos que los elementos de la sucesión $(a_z^i)_{z\in\mathbb{Z}}$ han sido ya definidos. Entonces, definimos:

- $a_{2z}^{i+1} = a_{z+1}^i + \frac{1}{2^i}$, y
- $a_{2z+1}^{i+1} = a_{z+2}^i$,

para cada $z \in \mathbb{Z}$.

Nuestra selección débil $f : [\mathbb{R}]^2 \to \mathbb{R}$ será definida de la siguiente manera:

1. Para cada $i \in \mathbb{N}$ y para cada $z \in \mathbb{Z}$, si $r \in (a_z^i, a_{z+1}^i)$ y $r \neq a_v^j$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y $v \in \mathbb{Z}$, entonces diremos que $a_{2z}^{i+1} <_f r <_f a_{2z+1}^{i+1}$.
2. En los pares de puntos restantes $f$ preservará el orden Euclideano.

Notemos que bajo $f$ en $\mathbb{R}$ no existe punto $f$-minimal y cada una de las sucesiones determina una partición de $\mathbb{R}$ en intervalos Euclideanos semiabiertos. Para cada $i \in \mathbb{N}$ y cada $z \in \mathbb{Z}$, sabemos que

$$a_{2z-2}^{i+1} <_f a_z^i <_f a_{2z}^{i+1}.$$

Las afirmaciones que se presentan a continuación, se enlistaron de tal manera que cuando se haya probado una se ocupará en la siguiente.

- Para cada $i \in \mathbb{N}$ y para cada $z \in \mathbb{Z}$, $\lambda_f^*\left[(a_z^i, a_{z+1}^i]\right] = 0$.

Para cada $i, j \in \mathbb{N}$ y cada $z \in \mathbb{Z}$, por el inciso (1), se obtiene la contención $(a_z^i, a_{z+1}^i) \subseteq (a_{2^j z}^{i+j}, a_{2z^j+1}^{i+j})_f$. De aqui deducimos la desigualdad

$$\lambda_f^*\left[(a_z^i, a_{z+1}^i)\right] \leq \ell\left[(a_{2^j z}^{i+j}, a_{2z^j+1}^{i+j})_f\right] < \frac{1}{2^{i+j-1}}.$$

Con lo anterior, fácilmente se obtiene lo deseado.

Afirmamos que $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \mathcal{N}_f$. Para esto basta observar que $\mathbb{R} = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}}(a_z^i, a_{z+1}^i]_f$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Lo cual implica que $\lambda_f^*(\mathbb{R}) = 0$. $\square$

En los ejemplos anteriores los intervalos Euclideanos considerados no sufren expansión mediante las medidas $\lambda_f^*$, contrario a ésto, en la sección anterior mostramos que puede tener $f$-medida exterior infinita y ahora veremos que el intervalo Euclideano $(0, 1)$ puede tener $f$-medida exterior arbitraria finita. Ésto es muy interesante, ya que no usaremos multiplicación por escalares.

**Ejemplo 2.30.** La definición de nuestra selección débil $f$ se hará por inducción transfinita. Sea $\mathcal{R} = \left\{S \in \mathbb{R}^\omega : S = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}\,(x_{2n} \neq x_{2n+1})\right\}$. Enumeremos $\mathcal{R}$ como $\left\{S_\xi : \xi < \mathfrak{c}\right\}$ y a cada conjunto $S_\xi$ como $(x_n^\xi)_{n\in\mathbb{N}}$. Ahora supongamos la selección débil $f$ y el número $r_\xi \in (0, 1)$ para cada $\xi < \theta < \mathfrak{c}$, se han definido de cierta manera conveniente. Consideremos la sucesión $S_\theta$.

Fijamos

$$r_\theta \in (0,1) \setminus \left[\left\{r_\xi \,:\, \xi < \theta\right\} \cup \left\{x_n^\xi \,:\, \xi \leq \theta \quad \text{y} \quad n \in \mathbb{N}\right\}\right],$$

lo cual es posible ya que la cardinalidad del conjunto de la derecha es $\mathfrak{c}$. Definamos nuestra selección en el punto $r_\theta$ y con respecto a $x_n^\xi$ para cada $n \in \mathbb{N}$ como sigue:

- Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_{2n}^\xi = a$ y $x_{2n+1}^\xi = b$, entonces no pasa nada.
- Observando los siguientes casos, definimos

  Si $x_{2n}^\xi \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $r_\theta <_f x_{2n}^\xi$.

  Si $x_{2n+1}^\xi \neq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x_{2n+1}^\xi <_f r_\theta$.

La selección débil $f$ mantendrá el orden Euclideano en los pares de puntos en donde no ha sido definida. Por definición, $(0,1) \subseteq (a,b]_f$ y por ello $\lambda_f^*[(0,1)] \leq b - a$. Supongamos que

$$(0,1) \subseteq \bigcup_{n=0}^{+\infty}(a_n, b_n]_f.$$

Sea $\theta < \mathfrak{c}$ de tal forma que la sucesión $S_\theta = (x_n^\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ cumpla $x_{2n}^\theta = a_n$ y $x_{2n+1}^\theta = b_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por definición, $r_\theta \notin (x_{2n}^\xi, x_{2n+1}^\theta]_f$ si $a \neq x_{2n}^\theta$ y $b \neq x_{2n+1}^\theta$, $r_\theta \notin (x_{2n}^\theta, b]_f$ si $a \neq x_{2n}^\theta$ y $r_\theta \notin (a, x_{2n+1}^\theta]_f$ si $b \neq x_{2n+1}^\theta$, para $n \in \mathbb{N}$. Lo cual implica

$$r_\theta \notin \bigcup_{n=0}^{+\infty}(x_{2n}^\theta, x_{2n+1}^\theta]_f.$$

Por lo tanto, la única cubierta por $f$-intervalos de $(0,1)$ es $(a,b]_f$. Por consiguiente, la $f$-medida exterior de $(0,1)$ es igual a $b - a$. $\square$

Sabemos que el intervalo Euclideano $(c,d]$ para $c, d \in \mathbb{R}$ es Lebesgue medible y que al aplicar una selección débil su respectivo intervalo inducido puede no conservar esa propiedad. A continuación, se definirá una selección débil $f$ con la cual el $f$-intervalo $(c,d]_f$ no será elemento de $\mathcal{M}_f$, pero al aplicar otra selección débil $g$ el intervalo inducido $(c,d]_g$ es $\lambda_g^*$-medible. Cabe notar que los intervalos inducidos por cada selección débil y el intervalo Euclideano pueden ser distintos entre ellos.

**Ejemplo 2.31. [Y. F. Ortíz-Castillo]** Sea el intervalo Euclideano $(a,b)$ tal que $(0,1) \subset (a,b)$. La definición de nuestra selección débil $f$ se hará por inducción transfinita. Sea

$$R = \left\{S \in \mathbb{R}^\omega \,:\, S = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,(x_n < x_{n+1})\right\}$$

Enumeremos $R$ como $\left\{S_\xi \ : \ \xi < \mathfrak{c}\right\}$ y a cada conjunto $S_\xi$ como $(x_n^\xi)_{n\in\mathbb{N}}$. Consideremos los puntos $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < c < 0 < 1 < d < b$. Para $S \in R$, sea

$$\mathcal{R}(S) := \left\{(x_{2n}, x_{2n+1}]_f \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Primero daremos las condiciones que tendrá que cumplir nuestra selección débil $f$. Recursivamente definiremos los conjuntos $H_1^\zeta, H_2^\zeta, P_\zeta$ y elegiremos los puntos distintos $r_1^\zeta, r_2^\zeta$ de tal forma que se satisface:

1. $r_1^\zeta \in H_1^\zeta := (0,1) \setminus \left[\bigcup_{\nu\leq\zeta} S_\nu \cup \{a,b,c,d\}\right]$, $r_2^\zeta \in H_2^\zeta := (0,1) \setminus \left[\bigcup_{\nu\leq\zeta} S_\nu \cup \{a,b,c,d,r_1^\zeta\}\right]$ y
$$P_\zeta := \left\{\{r_i^\zeta, x\} \ : i = 1,2 \quad \text{y} \quad x \in \mathbb{R} \setminus (0,1)\right\} \cup [\mathbb{R} \setminus (0,1)]^2.$$
2. $r_1^\zeta, r_2^\zeta \in (a,b]_f$.
3. Si $r_1^\zeta \in (c,d]_f$ y $(a,b]_f, (a,d]_f, (c,d]_f, (c,b]_f \notin \mathcal{R}\left(S_\zeta\right)$, entonces $r_2^\zeta \in (c,d]_f^c$.
4. Si $r_1^\zeta \in (c,d]_f^c$ y $(a,b]_f, (a,d]_f, (c,d]_f, (c,b]_f \notin \mathcal{R}\left(S_\zeta\right)$, entonces $r_2^\zeta \in (c,d]_f$.
5. Si $(a,b]_f \notin \mathcal{R}\left(S_\zeta\right)$, entonces $r_1^\zeta \notin \bigcup \mathcal{R}\left(S_\zeta\right)$.
6. Si $(a,b]_f, (a,d]_f, (c,d]_f, (c,b]_f \notin \mathcal{R}\left(S_\zeta\right)$, entonces $r_2^\zeta \notin \bigcup \mathcal{R}\left(S_\zeta\right)$.
7. Si $x, y \in [\mathbb{R} \setminus (0,1)]^2$ y $x \neq y$, entonces $x <_f y$ si y sólo si $x < y$.

**Afirmación 2.32.** Si la selección débil $\hat{f}$ satisface los puntos 1 al 7, entonces

**a)** $\lambda_{\hat{f}}^*[(0,1)] = b - a$.

Como $(0,1) \subseteq (a,b]_{\hat{f}}$ se tiene $\lambda_{\hat{f}}^*[(0,1)] \leq b - a$. Supongamos que existe una cubierta numerable $C$ para $(0,1)$ por $\hat{f}$-intervalos semiabiertos tal que la suma de las longitudes de sus miembros es menor extricto a $b - a$. Sea $\theta < \mathfrak{c}$ de tal forma que $C = \mathcal{R}(S_\theta)$. Como $(a,b]_{\hat{f}} \notin \mathcal{R}(S_\theta)$, por el inciso (5) la familia $C$ no puede cubrir a $(0,1)$. Por lo tanto, su única cubierta por $\hat{f}$-intervalos es $(a,b]_{\hat{f}}$.

**b)** $\lambda_{\hat{f}}^*\left[(0,1) \cap (c,d]_{\hat{f}}\right] = d - c$.

Notemos que $(0,1) \cap (c,d]_{\hat{f}} \subseteq (c,d]_{\hat{f}}$ por lo cual, $\lambda_{\hat{f}}^*\left[(0,1) \cap (c,d]_{\hat{f}}\right] \leq d - c$. Si existe una cubierta numerable $C$ de $(0,1) \cap (c,d]_{\hat{f}}$ por $\hat{f}$-intervalos semiabiertos tal que la suma de las longitudes de sus miembros es menor extricto a $d - c$. Por los incisos (3) y (5) o (4) y (6), $C$ no puede cubrir a $(0,1) \cap (c,d]_{\hat{f}}$.

**c)** $\lambda_{\hat{f}}^*\left[(0,1) \cap (c,d]_{\hat{f}}^c\right] = b - a$.

Notemos que $(0,1) \cap (c,d]_{\hat{f}}^c \subseteq (a,b]_{\hat{f}}$. Por lo cual, $\lambda_{\hat{f}}^*\left[(0,1) \cap (c,d]_{\hat{f}}^c\right] \leq b - a$. Sea $C$ una cubierta numerable de $(0,1) \cap (c,d]_{\hat{f}}^c$ por $\hat{f}$-intervalos semiabiertos tal que la suma de las longitudes de sus miembros es menor extricto a $b - a$. Los incisos (4) y (5) o (3) y (6), garantizan que $C$ no puede cubrir a $(0,1) \cap (c,d]_{\hat{f}}^c$.

Ahora, construiremos la selección débil $f$ que cumple con las propiedades anteriores. Supongamos que para un ordinal $\xi < \theta < \mathfrak{c}$ se han definido los conjuntos $H_1^\xi, H_2^\xi, P_\xi$ y $f$ ha sido definida sobre $P_\xi$ de tal forma que satisface los incisos 1 al 7. Se han elegido los puntos $r_1^\xi, r_2^\xi$ como en el inciso (1). Consideremos la sucesión $S_\theta$ y definamos nuestra selección débil $f$ con respecto a $x_n^\theta$ considerando los siguientes casos:

• **I.** Si para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $a \neq x_{2n}^\theta$, entonces $r_1^\theta <_f x_{2n}^\theta$.

Para definir $f$ en $\{r_2^\theta, x_n^\theta\}$, consideremos los siguientes subcasos:

I.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ $c \neq x_{2n}^\theta$, definimos $r_2^\theta <_f c$ y $r_2^\theta <_f x_{2n}^\theta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

I.2. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{2k}^\theta = c$.

I.2.1. $d = x_{2k+1}^\theta$. En éste caso, $r_2^\theta$ bajo $f$ conserva el orden Euclideano.

I.2.2. $d \neq x_{2k+1}^\theta$.

I.2.2.1 $b = x_{2k+1}^\theta$. En éste caso, $r_2^\theta$ bajo $f$ conserva el orden Euclideano.

I.2.2.2 $b \neq x_{2k+1}^\theta$, definimos $x_{2k+1}^\theta <_f r_2^\theta$ y $r_2^\theta <_f x_{2n}^\theta$, para $n \neq k$.

• **II.** Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{2k}^\theta = a$.

II.1. Si $b = x_{2k+1}^\theta$. No pasa nada.

II.2. $b \neq x_{2k+1}^\theta$, definimos $x_{2k+1}^\theta <_f r_1^\theta$ y $r_1^\theta <_f x_{2n}^\theta$ para $n \neq k$.

Para definir $f$ en $\{r_2^\theta, x_n^\theta\}$, consideremos los siguientes subcasos:

◦ II.2.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $c \neq x_{2n}^\theta$.

II.2.1.1. $d \neq x_{2k+1}^\theta$, definimos $r_2^\theta <_f c$, $x_{2k+1}^\theta <_f r_2^\theta$ y $r_2^\theta <_f x_{2n}^\theta$ para $n \neq k$.

II.2.1.2. $d = x_{2k+1}^\theta$. En éste caso, $r_2^\theta$ bajo $f$ conserva el orden Euclideano.

◦ II.2.2. $c = x_{2m}^\theta$. Es claro que $k < m$.

II.2.2.1. $d = x_{2m+1}^\theta$. En éste caso, $r_2^\theta$ bajo $f$ conserva el orden Euclideano.

II.2.2.2. $d \neq x_{2m+1}^\theta$.

II.2.2.2.1 $b = x_{2m+1}^\theta$. En éste caso, $r_2^\theta$ bajo $f$ conserva el orden Euclideano.

II.2.2.2.2. $b \neq x_{2m+1}^\theta$. Por lo cual, $x_{2k+1}^\theta <_f r_2^\theta$ al igual que $x_{2m+1}^\theta <_f r_2^\theta$ y $r_2^\theta <_f x_{2n}^\theta$ para $n \neq k, m$.

• Se mantendrá el orden Euclideano en los pares de puntos en donde no ha sido definida.

Con ésto, terminamos la construcción. Checaremos que la selección débil $f$ satisface las siete condiciones.

1. Simplemente es la definición de los conjuntos $H_1^\theta, H_2^\theta, P_\theta$ y la elección de los puntos $r_1^\theta, r_2^\theta$ es posible por la cardinalidad de dichos conjuntos.
2. Se cumple por definición de la selección débil $f$, dado que $a$ y $b$ conservan el orden Euclideano con respecto a los otros puntos.
3. Observemos que las condiciones iniciales de (3) sólo se satisfacen con los subcasos I.1 y II.2.1.1, los cuáles garantizan que $r_2^\theta <_f c$.
4. En caso contrario, si $r_1^\theta \in (c,d]_f^c$, entonces al aplicar los subcasos I.2.2.2 y II.2.2.2.2 los elementos en los conjuntos $\{c, r_2^\theta\}$ y $\{r_2^\theta, d\}$ se mantienen bajo el orden Euclideano.
5. Si $(a,b]_f \notin \mathcal{R}(S_\theta)$, el caso I y el subcaso II.2 garantizan que $r_1^\theta \notin (x_{2n}^\theta, x_{2n+1}^\theta]_f$ si $a \neq x_{2n}^\theta$ y $b \neq x_{2n+1}^\theta$, para $n \in \mathbb{N}$. Entonces $r_1^\theta \notin \bigcup \mathcal{R}(S_\theta)$.
6. Con los subcasos de los incisos (3) y (4) se obtiene lo deseado.

Por lo tanto, con la Afirmación 2.32 se cumple

$$\lambda_f^*\left[(0,1) \cap (c,d]_f\right] + \lambda_f^*\left[(0,1) \cap (c,d]_f^c\right] > \lambda_f^*\left[(0,1)\right],$$

obteniendo que $(c,d]_f \notin \mathcal{M}_f$.

Ahora nos toca el turno de definir la selección débil $g$:

• $c <_g d$

• Para cada $r \in \mathbb{R} \setminus \{c,d\}$, se tiene $c <_g r <_g d$.

• Si $c$ y $d$ no son elementos de $\{x,y\}$, entonces $g(\{x,y\}) = f(\{x,y\})$.

Sea $B \subseteq \mathbb{R}$. Para el $g$-intervalo $(c,d]_g$ tenemos lo siguiente:

Si $c \in B$, entonces $\lambda_g^*(B) = \lambda_g^*(B \cap (c,d]_g^c) = +\infty$. Por ello, $\lambda_g^*(B) = \lambda_g^*(B \cap (c,d]_g) + \lambda_g^*(B \cap (c,d]_g^c)$.

Cuando $c \notin B$, se cumple

$$\lambda_g^*(B \cap (c,d]_g^c) = \lambda_g^*(B \cap \{c\}) = \lambda_g^*(\emptyset) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lambda_g^*(B \cap (c,d]_g) = \lambda_g^*(B).$$

Podemos ver fácilmente que se satisface la condición de Carathéodory.

Por lo tanto $(c,d]_g \in \mathcal{M}_g$. □

En lo siguiente, con ayuda del ejemplo anterior, probaremos que existen selecciones débiles $f$ y $g$ tal que los conjuntos $\lambda_f^*$-medibles no coincidirán con los $\lambda_g^*$-medibles, al aplicar sucesivamente estas selecciones.

**Ejemplo 2.33.** Sean el intervalo Euclideano $(a,b)$ y la selección débil $f$ como en el Ejemplo 2.31. Consideremos puntos $e, h$ tales que $e <_f h <_f a$ y $e$ no es $f$-minimal. Definimos a dichos puntos en la selección débil $g$ como los puntos $g$-minimal y $g$-maximal, respectivamente. Notemos que para $A \subseteq (h, \rightarrow)_f$ se tiene $\lambda_g^*(A) = 0$, ya que para cada $\epsilon > 0$, $A \subseteq (h - \epsilon, h]_g$. Sabemos que el intervalo $(c, d]_f$ no es $\lambda_f^*$-medible pero $\lambda_g^*\left((c, d]_f\right) = 0$ por la observación anterior, por consiguiente será $\lambda_g^*$-medible. Por lo tanto, $\mathcal{M}_f \neq \mathcal{M}_g$.

*Solución Alternativa.* Consideremos la selección débil Euclideana $f_E$. Sabemos que para cada subconjunto $A$ de $\mathbb{R}$ se cumple $\lambda_{f_E}^*(A) = \lambda^*(A)$ y además $(s, t]_{f_E} = (s, t]$ para $s, t \in \mathbb{R}$. Definamos la selección débil $g$ como $a <_g b$ y para cada $r \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$, se cumple $a <_g r <_g b$. Si $a$ o $b \notin \{x, y\}$, entonces $g(\{x, y\}) = f(\{x, y\})$. Notemos que para $A \subseteq (b, +\infty)$ se tiene $\lambda_g^*(A) = 0$, ya que para cada $\epsilon > 0$, $A \subseteq (b - \epsilon, b]_g$. Existe un subconjunto $E$ de $(b, +\infty)$ que no es Lebesgue medible, o en nuestro caso $f_E$-medible, pero por la observación anterior, será $\lambda_g^*$-medible, al ser elemento de $\mathcal{N}_g$. Por lo tanto $\mathcal{M}_{f_E} \neq \mathcal{M}_g$. □

**Ejemplo 2.34.** Sea $f$ una selección débil y $M \in \mathcal{N}_f$. Si $g$ es una selección débil tal que para cada $\{x, y\} \in [\mathbb{R}]^2$ se tiene $g(\{x, y\}) = f(\{x, y\})$ con $|\{x, y\} \cap M| \leq 1$. Veremos que $\mathcal{M}_f \neq \mathcal{M}_g$.

Sea la selección débil $f$ del Ejemplo 2.31 y la selección débil $g$ y los puntos $e, h$ dados en el Ejemplo 2.33. Considerando el conjunto $M = \{e, h\}$, el cual es elemento de $\mathcal{N}_f$ y viendo que $g$ satisface las condiciones requeridas, obtenemos que $\mathcal{M}_f \neq \mathcal{M}_g$. Observemos que utilizando la selección débil $g$ de la Solución Alternativa del ejemplo anterior, obtenemos el mismo resultado. □

Capítulo 3

# Densidades

## 1. $\mathcal{I}$-Densidad

En esta sección discutiremos principalmente el concepto de $\mathcal{I}$-densidad el cual está basado en las propiedades de los conjuntos $\lambda_f^*$-nulos de $\mathbb{R}$. Esta noción se define sólo con las propiedades de un ideal sobre $\mathbb{R}$ sin apelar a ningún Espacio de Medida. Cuando trabajamos con una selección débil, la importancia de no usar $f$-medidas se enfatiza en el Ejemplo 2.29, ya que en éste caso para la selección débil encontrada, todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ son $\lambda_f^*$-nulos y nos es imposible dar una densidad similar a la Densidad de Lebesgue, ya que el cociente involucrado no estaría definido.

Es fácil pensar que uno puede reemplazar los intervalos involucrados en la Definición 1.15 por cualquier sucesión de intervalos cuyas medidas convergen a cero. Lo cierto que ésto no puede ser, como lo veremos a continuación.

**Lema 3.1.** *Si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente convergente a cero tal que* $\sup \frac{t_n}{t_{n+1}} = c < +\infty$, *entonces $x$ es un punto de densidad de $E \in \mathcal{M}$ si y sólo si*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda^*\left(E \cap [x-t_n, x+t_n]\right)}{2t_n} = 1. \tag{1.1}$$

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Al ser $x$ punto de densidad de $E$ para la sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por el Teorema 1.4, se cumple 1.1.

($\Leftarrow$) Ahora, supongamos que 1.1 se cumple y sea $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria de números positivos que converge a cero. Para cada elemento en la sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se cumple la relación $\lambda^*(2t_n) = \lambda^*\left(E \cap [x-t_n, x+t_n]\right) + \lambda^*\left(E^c \cap [x-t_n, x+t_n]\right)$. Por lo cual

$$1 = \frac{\lambda^*\left(E \cap [x-t_n, x+t_n]\right)}{2t_n} + \frac{\lambda^*\left(E^c \cap [x-t_n, x+t_n]\right)}{2t_n}.$$

Cuando $n$ tiende a infinito tenemos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda^*\left(E^c \cap [x-t_n, x+t_n]\right)}{2t_n} = 0. \tag{1.2}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n$ tal que $t_{m_{n+1}} \leq h_n < t_{m_n}$. Entonces hallamos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lambda^*\left(E^c \cap [x - h_n, x + h_n]\right) \cdot (2h_n)^{-1} \\
&\leq \lambda^*\left(E^c \cap [x - t_{m_n}, x + t_{m_n}]\right) \cdot (2t_{m_{n+1}})^{-1} \\
&= \frac{t_{m_n}}{t_{m_{n+1}}} \cdot \left[\lambda^*\left(E^c \cap [x - t_{m_n}, x + t_{m_n}]\right) \cdot (2t_{m_n})^{-1}\right] \\
&\leq c \cdot \left[\lambda^*\left(E^c \cap [x - t_{m_n}, x + t_{m_n}]\right) \cdot (2t_{m_n})^{-1}\right].
\end{aligned}$$

Al hacer tender $n$ a infinito, con el Lema 1.2 y el límite 1.2, obtenemos

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda^*\left(E^c \cap [x - h_n, x + h_n]\right)}{2h_n} = 0.$$

Aplicando el Teorema 1.4, $x$ es un punto de dispersión de $E^c$ y por la Afirmación 1.18 $x$ resulta ser un punto de densidad de $E$. ■

Del resultado anterior, podemos deducir que si $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión como en el lema 3.1, entonces $x$ es un punto de dispersión de $E \in \mathcal{M}$ si y sólo si

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda^*\left(E \cap [x - t_n, x + t_n]\right)}{2t_n} = 0.$$

La condición $\sup \frac{t_n}{t_{n+1}} < +\infty$ es esencial, como lo muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.2.** Sea $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente convergente a cero tal que $\sup \frac{t_n}{t_{n+1}} = +\infty$. Escogamos una subsucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ para la cual $\lim_{k \to +\infty} \frac{t_{n_k}}{t_{n_{k+1}}} = +\infty$ y sea

$$A = \left[\bigcup_{k \geq 1} [t_{n_{k+1}}, \sqrt{t_{n_{k+1}} \cdot t_{n_k}}]\right] \cup \left[\bigcup_{k \geq 1} [-\sqrt{t_{n_{k+1}} \cdot t_{n_k}}, -t_{n_{k+1}}]\right].$$

Para $x = 0$, se tiene

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda^*\left(A \cap [-t_n, t_n]\right)}{2t_n} = 0,$$

mientras que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda^*\left(A \cap [-\sqrt{t_{n_{k+1}} \cdot t_{n_k}}, \sqrt{t_{n_{k+1}} \cdot t_{n_k}}]\right)}{2\sqrt{t_{n_{k+1}} \cdot t_{n_k}}} = 1.$$

W. Wilczyński en [9], reformuló la noción de punto de densidad para un conjunto Lebesgue medible $E$, la cual puso en términos de convergencia casi en todas partes de ciertas sucesiones de funciones características. El resultado siguiente expone esas ideas.

**Teorema 3.3.** *Para $E \in \mathcal{M}$, los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. $d(E, x) = 1$.
2. $\lim_{n \to +\infty} \left[\lambda^*\left((E - x) \cap [n^{-1}, n^{-1}]\right) \cdot \left(2n^{-1}\right)^{-1}\right] = 1$.

3. $\text{lím}_{n\to+\infty} \lambda^* (n \cdot (E - x) \cap [-1, 1]) = 2.$
4. $\left(\chi_{(n\cdot(E-x)\cap[-1,1])}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en medida a* $\chi_{[-1,1]}$.
5. *Para cada sucesión creciente* $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *de enteros positivos, existe una subsucesión* $(n_{m_p})_{p\in\mathbb{N}}$ *tal que la sucesión* $\left(\chi_{\left(n_{m_p}\cdot(E-x)\cap[-1,1]\right)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge casi en todas partes a* $\chi_{[-1,1]}$.

*Demostración.* (1 ⇔ 2) Con el Lema 3.1 aplicado a la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ se obtiene ésta equivalencia.

(2 ⇔ 3) Utilizando el Lema 1.6, tenemos que

$$\begin{aligned}
\text{lím}_{n\to+\infty}\left[\lambda^*\left((E-x)\cap[n^{-1},n^{-1}]\right)\cdot\left(2n^{-1}\right)^{-1}\right] &= \text{lím}_{n\to+\infty}\left[n\cdot\lambda^*\left((E-x)\cap[n^{-1},n^{-1}]\right)\cdot(2)^{-1}\right]\\
&= (2)^{-1}\cdot\text{lím}_{n\to+\infty}\left[\lambda^*\left(n\cdot(E-x)\cap[-1,-1]\right)\right]\\
&= 1.
\end{aligned}$$

(3 ⇔ 4) Notemos primero que

$$2 - \lambda^* (n \cdot (E - x) \cap [-1, 1]) = \lambda^* ([-1, 1] \setminus n \cdot (E - x) \cap [-1, 1])$$

y además, para $\epsilon > 0$ se cumple la siguiente igualdad de conjuntos

$$\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |\chi_{(n\cdot(E-x)\cap[-1,1])}(x) - \chi_{[-1,1]}(x)| \geq \epsilon\right\} = [-1, 1] \setminus (n \cdot (E - x) \cap [-1, 1])\,.$$

Por lo tanto, para cada $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n > N$, entonces

$$2 - \lambda^* (n \cdot (E - x) \cap [-1, 1]) = \lambda^*\left\{[-1, 1] \setminus (n \cdot (E - x) \cap [-1, 1])\right\} \leq \epsilon$$

si y sólo si

$$\lambda^*\left[\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |\chi_{(n\cdot(E-x)\cap[-1,1])}(x) - \chi_{[-1,1]}(x)| \geq \epsilon\right\}\right] < \epsilon,$$

o lo que es lo mismo, la sucesión $\left(\chi_{(n\cdot(E-x)\cap[-1,1])}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en medida a $\chi_{[-1,1]}$.

(4 ⇔ 5) Esta equivalencia se prueba con ayuda del Teorema 1.14. ■

Para los puntos de dispersión tenemos la siguiente caracterización.

**Teorema 3.4.** *Para* $E \in \mathcal{M}$*, los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. $d(E, x) = 0.$
2. $\text{lím}_{n\to+\infty}\left[\lambda^*\left((E-x)\cap[n^{-1},n^{-1}]\right)\cdot\left(2n^{-1}\right)^{-1}\right] = 0.$
3. $\text{lím}_{n\to+\infty} \lambda^* (n \cdot (E - x) \cap [-1, 1]) = 0.$
4. $\left(\chi_{(n\cdot(E-x)\cap[-1,1])}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en medida a la función constante* 0.
5. *Para cada sucesión creciente* $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *de enteros positivos, existe una subsucesión* $(n_{m_p})_{p\in\mathbb{N}}$ *tal que la sucesión* $\left(\chi_{\left(n_{m_p}\cdot(E-x)\cap[-1,1]\right)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge casi en todas partes a la función constante* 0.

Para poder definir la noción de punto de densidad o dispersión con respecto a un ideal necesitamos la siguiente definición.

**Definición 3.5.** *Sea $\mathcal{I}$ un ideal en $\mathbb{R}$. Decimos que una sucesión de funciones $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{I}$-casi en todas partes si*

$$\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, f_n(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)\right\} \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}.$$

En lo posterior, cuando una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converga a $f$ $\mathcal{I}$-casi en todas partes se denotará $f_n(x) \stackrel{\mathcal{I}}{\longrightarrow} f(x)$.

Para un espacio de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$ es fácil ver que sus conjuntos nulos $\mathcal{N}_\mu$ forman un ideal en $X$ y en la Definición 3.5 obtenemos la convergencia casi en todas partes para funciones $\mathcal{S}$-medibles. En particular, cuando $\mathcal{I} = \mathcal{N}$ tenemos el caso de la medida de Lebesgue.

**Definición 3.6.** **[Wilczyński]** *Sean $\mathcal{I}$ un ideal en $\mathbb{R}$ y $A \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que un punto $x \in \mathbb{R}$ es un punto de $\mathcal{I}$-densidad de $A$ si cada subsucesión*

$$\left(\chi_{(n_m\cdot(A-x)\cap[-1,1])}\right)_{m\in\mathbb{N}} \quad \textit{de} \quad \left(\chi_{(n\cdot(A-x)\cap[-1,1])}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

*contiene una subsucesión $\left(\chi_{\left(n_{m_p}\cdot(A-x)\cap[-1,1]\right)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\chi_{\left(n_{m_p}\cdot(A-x)\cap[-1,1]\right)} \stackrel{\mathcal{I}}{\longrightarrow} \chi_{[-1,1]} \quad \textit{en} \quad [-1,1].$$

*Si $\chi_{\left(n_{m_p}\cdot(A-x)\cap[-1,1]\right)} \stackrel{\mathcal{I}}{\longrightarrow} 0$ en $[-1,1]$, entonces $x$ es un punto de $\mathcal{I}$-dispersión para $A$.*

Para $A \subseteq \mathbb{R}$, el símbolo $d_{\mathcal{I}}(A, x)$ dirá que $x \in \mathbb{R}$ es un punto de $\mathcal{I}$-densidad o de $\mathcal{I}$-dispersión para el conjunto, ésto es, $d_{\mathcal{I}}(A, x) = 1$ o $d_{\mathcal{I}}(A, x) = 0$. El conjunto de todos los puntos de $\mathcal{I}$-densidad para $A$ se denotará por

$$\mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A) = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, d_{\mathcal{I}}(A, x) = 1\right\}.$$

**Lema 3.7.** *Sea $\mathcal{I}$ un ideal en $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ y $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Si $A \subseteq B$ y $d_{\mathcal{I}}(A, x) = 1$, entonces $d_{\mathcal{I}}(B, x) = 1$.*

*Demostración.* Sea $(\chi_{(n_m\cdot[B-x]\cap[-1,1])})_{m\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(\chi_{(n\cdot[B-x]\cap[-1,1])})_{n\in\mathbb{N}}$. Sabemos por hipótesis que existe una subsucesión $(\chi_{\left(n_{m_p}\cdot[A-x]\cap[-1,1]\right)})_{p\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\chi_{\left(n_{m_p}\cdot(A-x)\cap[-1,1]\right)} \stackrel{\mathcal{I}}{\longrightarrow} \chi_{[-1,1]}.$$

Consideremos el conjunto

$$U_{A,x} = \left\{y \in [-1,1] \,:\, \chi_{\left(n_{m_p}\cdot[A-x]\cap[-1,1]\right)}(y) \stackrel{p\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_{[-1,1]}(y)\right\}.$$

La demostración se sigue directamente del hecho de que $U_{A,x} \subseteq U_{B,x}$. ∎

**Lema 3.8.** *Sea $\mathcal{I}$ un ideal en $\mathbb{R}$ y $A, B \subseteq \mathbb{R}$.*

1. *Si $A \subseteq B$, entonces $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A) \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{I}}(B)$.*
2. *$\mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A \cap B) = \mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A) \cap \mathcal{D}_{\mathcal{I}}(B)$.*

*Demostración.* (1). De el Lema 3.7 se obtiene ésta propiedad.

(2). Por el primer inciso, sabemos que $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A \cap B) \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A) \cap \mathcal{D}_{\mathcal{I}}(B)$. Ahora probaremos la contención $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A) \cap \mathcal{D}_{\mathcal{I}}(B) \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A \cap B)$.

Usaremos la notación $U_{A,x}$ introducida en la demostración del lema anterior. Primero probaremos la siguiente afirmación:

**Afirmación.** Para $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$

$$U_{A_1 \cap A_2, x} = U_{A_1,x} \cap U_{A_2,x}.$$

*Demostración de la Afirmación.* Si $y \in U_{A_1,x} \cap U_{A_2,x}$, entonces para cada $\epsilon > 0$ y cada subsucesión de $\left(\chi_{(n \cdot (A_i - x)) \cap [-1,1])}(y)\right)_{m \in \mathbb{N}}$ existen $N^1_{y,\epsilon}, N^2_{y,\epsilon} \in \mathbb{N}$ tales que cuando $p > N^1_{y,\epsilon}, N^2_{y,\epsilon}$, se tiene

$$\textbf{a)} -1 \leq y = n_{m_p}(r_i - x) \leq 1 \quad r_i \in A_i \qquad \text{ó} \qquad \textbf{b)}\, y \notin n_{m_p}\,(A_i - x) \cap [-1, 1] \qquad i = 1, 2.$$

En el inciso (a) tenemos que $r_1 = r_2 = r$. Lo cual implica que $r \in A_1 \cap A_2$. Por consiguiente, para $p > N = \text{máx}\{N^1_{y,\epsilon}, N^2_{y,\epsilon}\}$ cada subsucesión de $\left(\chi_{(n_m \cdot (A_1 \cap A_2 - x)) \cap [-1,1])}(y)\right)_{m \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión que converge a $\chi_{[-1,1]}(y)$. Para el inciso (b) se tienen los siguientes casos:

$$y \in \mathbb{R} \setminus (A_1 \cup A_2), \quad \text{ó} \quad y \in A_i \setminus \left[\bigcup_{i=1}^{2} n_{m_p}(A_i - x) \cap [-1, 1]\right] \quad i = 1, 2.$$

En cualquiera de los dos, para $p > N$, cada subsucesión de $\left(\chi_{(n_m \cdot (A_1 \cap A_2 - x)) \cap [-1,1])}(y)\right)_{m \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión que converge a $\chi_{[-1,1]}(y)$. Por ello, $y \in U_{A_1 \cap A_2, x}$.

Para la otra contención, procediendo de manera análoga encontramos que si $y \in U_{A_1 \cap A_2, x}$ y cumple $-1 \leq y = n_{m_p}(r - x) \leq 1$, entonces $r \in A_1$ y $r \in A_2$. Cuando $y \notin n_{m_p} \cdot (A_1 \cap A_2 - x) \cap [-1, 1]$, se tienen los casos

$$y \in \mathbb{R} \setminus (A_1 \cup A_2), \qquad y \in A_1 \cup A_2 \setminus \left[n_{m_p}(A_1 \cap A_2 - x) \cap [-1, 1]\right] \quad i = 1, 2.$$

De ésta manera, para $i = 1, 2$ cada subsucesión de $\left(\chi_{(n_m \cdot (A_i - x)) \cap [-1,1])}(y)\right)_{m \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión que converge a $\chi_{[-1,1]}(y)$. Por lo tanto, $y \in U_{A_1,x} \cap U_{A_2,x}$ y así se consigue la igualdad. □

Si $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$, entonces $U_{A,x} \cap U_{B,x} \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ al ser igual a la intersección de dos elementos en el filtro, por la afirmacion anterior. De ésta manera, $x \in \mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A \cap B)$ obteniendo la identidad requerida.

■

Para continuar con la analogía, consideremos la familia

$$\tau_{\mathcal{I}} = \left\{A \subseteq \mathbb{R} \,:\, A \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A)\right\}.$$

Verificaremos que realmente define una topología en $\mathbb{R}$.

Para cada número natural $n$ y cada númeo real $x$, se cumple $n \cdot (\mathbb{R} - x) \cap [-1, 1] = [-1, 1]$. Por lo cual,

$$\chi_{(n\cdot(\mathbb{R}-x)\cap[-1,1])} = \chi_{[-1,1]} \quad \text{y} \quad \chi_{(n\cdot(\emptyset-x)\cap[-1,1])} = \chi_{\emptyset} = 0,$$

obteniendo $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}(\emptyset) = \emptyset$ y $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Lo anterior implica que $\mathbb{R}, \emptyset \in \tau_{\mathcal{I}}$. Sean $A_1, A_2$ elementos de $\tau_{\mathcal{I}}$. Aplicando el Lema 3.8-2, se tiene

$$A_1 \cap A_2 \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A_1) \cap \mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A_2) = \mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A_1 \cap A_2).$$

Concluyendo que $A_1 \cap A_2 \in \tau_{\mathcal{I}}$.

Ahora, sea $\left\{A_t \,:\, t \in T\right\}$ una colección de elementos en $\tau_{\mathcal{I}}$ y $x \in \mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A_t)$. Como para cada $t \in T$ se tiene que $U_{A_t,x} \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$. Por el Lema 3.8-1, el conjunto $U_{\left[\bigcup_{t\in T} A_t\right],x}$ es también elemento del filtro dual del ideal y se dan las siguientes contenciones:

$$\bigcup_{t\in T} A_t \subseteq \bigcup_{t\in T} \mathcal{D}_{\mathcal{I}}(A_t) \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{I}}\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right).$$

Por lo tanto, $\bigcup_{t\in T} A_t \in \tau_{\mathcal{I}}$. Esta topología es conocida como la *Topología de $\mathcal{I}$-Densidad* y por el Teorema 3.3, cuando $\mathcal{I} = \mathcal{N}$, se tiene $\tau_d \subset \tau_{\mathcal{N}}$.

**Teorema 3.9.** *Para $\mathcal{I}$ un ideal en $\mathbb{R}$ y $A \subseteq \mathbb{R}$, los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *$x$ es un punto de $\mathcal{I}$-densidad de $A$.*
2. *Para cualquier sucesión decreciente $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ convergente a cero, existe una subsucesión $(t_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\chi_{\left((t_{n_m})^{-1}\cdot(A-x)\cap[-1,1]\right)} \xrightarrow{\mathcal{I}} \chi_{[-1,1]} \quad en \quad [-1, 1].$$

3. *Dada una sucesión decreciente $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ convergente a cero cumpliendo la condición $\sup \frac{t_n}{t_{n+1}} < +\infty$, cada subsucesión $\left(\frac{1}{t_{n_m}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\left(\frac{1}{t_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $\left(\frac{1}{t_{n_{m_p}}}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\chi_{\left((t_{n_{m_p}})^{-1}\cdot(A-x)\cap[-1,1]\right)} \xrightarrow{\mathcal{I}} \chi_{[-1,1]} \quad en \quad [-1, 1].$$

*Demostración.* $(1 \Rightarrow 2)$ Para la sucesión $(n_{m_p})_{p\in\mathbb{N}}$, se tiene que $\left(n_{m_p}^{-1}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente convergente a 0. Así, Para cada $m \in \mathbb{N}$ existe un número natural $p$ tal que

$$n_{m_{p+1}}^{-1} \leq t_{n_m} < n_{m_p}^{-1} \qquad \text{o} \qquad n_{m_p} < t_{n_m}^{-1} \leq n_{m_{p+1}}.$$

Sea $r \in A$. Para $y \in U_{A,x}$ y cada $\epsilon > 0$ existe $N_{y,\epsilon} \in \mathbb{N}$ tal que si $p > N_{y,\epsilon}$, entonces $n_{m_p}(r-x)$ es elemento de $[-1,1]$ o pasa lo contrario. Cuando $m > p$ sucede lo mismo para $t_{n_m}^{-1}(r-x)$. Por consiguiente, En aquellos puntos que converge puntualmente la subsucesión $\left(\chi_{\left(n_{m_p}\cdot(A-x)\cap[-1,1]\right)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ también lo hará $\left(\chi_{\left((t_{n_m})^{-1}\cdot(A-x)\cap[-1,1]\right)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$. Obteniendo que

$$U_{A,x} \subseteq U = \left\{y \in [-1,1] \,:\, \chi_{\left((t_{n_m})^{-1}\cdot(A-x)\cap[-1,1]\right)}(y) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_{[-1,1]}(y)\right\} \qquad \text{y} \qquad U \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}.$$

$(2 \Rightarrow 3)$ Esta implicación es evidente.

$(3 \Rightarrow 1)$ Consideremos la sucesión $(t_n = n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$, la cual es decreciente y converge a 0, además

$$\sup \frac{t_n}{t_{n+1}} = \sup\left(1 + n^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}} < +\infty.$$

Por ello, cada subsucesión $(n_m^{-1})_{m\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $(n_{m_p}^{-1})_{p\in\mathbb{N}}$ tal que

$$U = \left\{y \in [-1,1] \,:\, \chi_{\left((n_{m_p})^{-1}\cdot(A-x)\cap[-1,1]\right)}(y) \overset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_{[-1,1]}(y)\right\} \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}.$$

De nuevo, para $y \in U$ y cada $\epsilon > 0$ existe $N_{y,\epsilon} \in \mathbb{N}$ tal que si $p > N_{y,\epsilon}$, entonces para algún $r \in A$ se cumple que $(n_{m_p})^{-1}(r-x)$ es elemento del intervalo $[-1,1]$ o queda fuera de él. En ambos casos, se tiene

$$1 < (n_{m_p})^{-1}(r-x) < (n_{m_p})(r-x), \quad (n_{m_p})(r-x) < -(n_{m_p})^2 \leq -1 \quad \text{y} \quad -(n_{m_p})^2 \leq (n_{m_p})(r-x) \leq (n_{m_p})^2.$$

Para $p > N_{y,\epsilon}$, las dos primeras desigualdades implican que el punto $(n_{m_p})(r-x)$ queda fuera del intervalo. Mientras que en la última desigualdad podría pasar cualquiera de los dos casos. Por lo tanto, $U \subseteq U_{A,x}$ y $U_{A,x}$ es elemento de $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$. ■

## 2. Topología inducida por una selección débil

Sea $X$ un conjunto distinto del vacío y $f : [X]^2 \to X$ una selección débil para $X$. En el capítulo primero vimos que bajo $f$, podemos obtener una relación que permite definir conjuntos a los cuáles llamamos $f$-intervalos. Cuando $X$ es un conjunto parcialmente ordenado y se define la topología del orden, los intervalos abiertos inducidos por el orden parcial juegan un papel muy importante al formar una base para el espacio. Análogamente, daremos una topología en $X$ en la cual ciertos $f$-intervalos son de gran utilidad: La generada por $\left\{(\leftarrow, x)_f \,:\, x \in X\right\} \cup \left\{(x, \rightarrow)_f \,:\, x \in X\right\}$ y la denotaremos por $\tau_f$. Una pregunta natural sería el porque no considerar los $f$-intervalos abiertos $(a,b)_f$ como subbase de nuestra topología, la respuesta la dá el siguiente ejemplo construido en los reales.

Sea la selección débil $f : [\mathbb{R}]^2 \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera:

(a) $1 <_f 2$.

(b) Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, se tiene $1 <_f x <_f 2$.

(c) En los pares de puntos donde no ha sido definida, mantendrá el orden Euclideano.

Para los puntos 1 y 2, se cumple que $1, 2 \notin \bigcap_{n=1}^{k}(a_n, b_n)_f$ para cualquier sucesión finita de $f$-intervalos abiertos, al ser puntos $f$-minimal y $f$-maximal, repectivamente. Por lo cual, la familia de $f$-intervalos abiertos no puede generar una topología en $\mathbb{R}$ teniendo a dicha familia como subbase.

También sabemos que desafortunadamente $\leq_f$ no es una relación transitiva y ciertos elementos de la topología $\tau_f$ nos proveen una explicación de éste hecho, el cual enunciamos a continuación.

**Proposición 3.10.** *Sea $f$ una selección débil en $X$ y $x, y, z \in X$ tales que $z <_f x <_f y <_f z$. El conjunto $W = (\leftarrow, x]_f \cap [y, \rightarrow)_f$ es abierto-cerrado en $(X, \tau_f)$ y separa a $z$ del conjunto $\{x, y\}$.*

*Demostración.* Primero, se tiene que $W$ es elemento de $\tau_f$, ya que

$$y \notin (\leftarrow, x]_f \quad \text{y} \quad x \notin [y, \rightarrow)_f. \quad \text{Por lo cual,} \quad (\leftarrow, x]_f \cap [y, \rightarrow)_f = (\leftarrow, x)_f \cap (y, \rightarrow)_f.$$

Tomando el complemento del conjunto vemos que $W^c = (x, \rightarrow)_f \cup (\leftarrow, y)_f \in \tau_f$. Por consiguiente, también es cerrado en $(X, \tau_f)$ y $z$ queda separado de $x$ y $y$ por $W$. ■

Con el resultado anterior, obtenemos una importante propiedad para el espacio $(X, \tau_f)$ sin importar la selección débil $f$ que esté involucrada.

**Lema 3.11.** *Para cada selección débil $f$ en $X$, el espacio $(X, \tau_f)$ es Hausdorff.*

*Demostración.* Sean $x, y \in X$ puntos distintos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x <_f y$. Si $(x, y)_f = \emptyset$, entonces $(\leftarrow, y)_f \cap (x, \rightarrow)_f = \emptyset$. En éste caso, tomamos como vecindades disjuntas para $x$ y $y$ a $U = (\leftarrow, y)_f$ y $V = (x \rightarrow)_f$. Si existe un punto $z \in (x, y)_f$, entonces por la Proposición (3.10) se tiene que

$$U = (\leftarrow, z)_f \qquad \text{y} \qquad V = (z, \rightarrow)_f$$

son vecindades disjuntas de $x$ y $y$, respectivamente. ■

**Lema 3.12.** *Sea $f$ una selección débil en $X$ y $x, z$ puntos en el conjunto tales que $z <_f x$. Entonces existe $U \in \tau_f$ tal que $z \in U$ y $Cl_{\tau_f}\left[U \cap (\leftarrow, x)_f\right] \subset (\leftarrow, x)_f$.*

*Demostración.* Primero consideremos el caso cuando $(z, x)_f \neq \emptyset$. Si $y \in (z, x)_f$, entonces tomamos $U = (\leftarrow, y)_f$ el cual cláramente es elemento de $\tau_f$ y contiene a $z$. Por otro lado, los $f$-intervalos $(\leftarrow, y]_f, (\leftarrow, x]_f$ son cerrados en $(X, \tau_f)$ y $x \notin (\leftarrow, y]_f$. Por lo cual,

$$Cl_{\tau_f}\left[U \cap (\leftarrow, x)_f\right] = Cl_{\tau_f}\left[(\leftarrow, y)_f \cap (\leftarrow, x)_f\right] \subseteq (\leftarrow, y]_f \cap (\leftarrow, x]_f \subset (\leftarrow, x)_f.$$

Ahora supongamos que $(z, x)_f = \emptyset$. La relación $y <_f x$ implica que $y \leq_f z$, por ello, $(\leftarrow, x)_f \subset (\leftarrow, z]_f$ obteniendo $(\leftarrow, z]_f = (\leftarrow, x)_f \cup (\leftarrow, z)_f \in \tau_f$. Tomando $U = (\leftarrow, z]_f$, es una vecindad abierto-cerrada de $z$ en $(X, \tau_f)$, la cual no contiene a $x$. ■

**Corolario 3.13.** *Para cada selección débil $f$ en $X$, el espacio $(X, \tau_f)$ es regular.*

*Demostración.* $V = X \setminus Cl_{\tau_f}\left[U \cap (\leftarrow, x)_f\right]$ es una vecindad del punto $x$ y por el Lema (3.12) $Cl_{\tau_f}\left[U \cap (\leftarrow, x)_f\right]$ es un cerrado que no contiene al punto al ser subconjunto de $(\leftarrow, x)_f$. Por lo tanto, $V \cap (\leftarrow, x)_f = \emptyset$. ■

Usando propiedades básicas de los espacios topológicos ordenados, I. Martínez y M. Hrusak en [**14**] probaron que las topologías $\tau_f$ son completamente regulares respondiendo a una pregunta de S. García-Ferreira y A.H. Tomita [**10**]. En éste mismo artículo, los autores dieron un ejemplo en donde la topología $\tau_f$ no es normal.

## 3. Propuestas de Densidades para medidas inducidas por selecciones débiles

Las Densidades que se proponen en esta sección ofrecen temas muy interesantes, desde mi punto de vista, para futuros proyectos de investigación dentro del tema de selecciones débiles y Teoría de la Medida. En la primera sección de éste capítulo, definimos un tipo de densidad sin utilizar la medida en cuestión sólo algunas propiedades inherentes de los conjuntos nulos del espacio de medida involucrado. Basándonos en ésto nuestra primera propuesta de Densidad con respecto a una selección débil se basa en la Definicion 3.6 considerando el ideal $\mathcal{N}_f$:

Para una selección débil $f$

$$d_f(A, x) = d_{\mathcal{N}_f}(A, x) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{D}_f(A) = \mathcal{D}_{\mathcal{N}_f}(A)$$

son la Densidad inducida por $f$ y el conjunto de $f$-puntos de densidad, respectivamente.

De ésta manera, hemos definido una Densidad que es análoga a la Densidad de Lebesgue, ya que si $A \subseteq \mathbb{R}$ es Lebesgue medible y consideramos la selección débil Euclideana, el ideal $\mathcal{N}_f$ es igual al ideal de los conjuntos $\lambda^*$-nulos. Por el Teorema 3.3 los puntos de $\mathcal{N}_{f_E}$-densidad de $A$ son precisamente los puntos de densidad de Lebesgue.

Las $f$-medidas que nos interesan para nuestra siguiente propuesta de definición, serán aquellas que cumplan $\lambda_f^*\left[(a, b)_f\right] < +\infty$ para todo $f$-intervalo abierto $(a, b)_f$, en analogía con la Densidad de Lebesgue. De aquí en adelante supondremos que se cumple ésta condición para cualquier $f$-medida involucrada en la densidad que a continuación describimos.

**Definición 3.14.** *Sea $f$ una selección débil y consideremos la medida exterior inducida por ella. Para $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$, la densidad inferior y superior, son las funciones $\underline{\rho}_f, \overline{\rho}_f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to [0,1]$ dadas por:*

*I. Existe un $f$-intervalo abierto que contenga a $x$.*

- *Si $\lambda_f^*\left[(a,b)_f\right] = 0$ para algún $f$-intervalo $(a,b)_f$ que contenga a $x$, entonces definimos*

$$\underline{\rho}_f(A,x) = \overline{\rho}_f(A,x) = 0.$$

- *Si para cada $f$-intervalo $(a,b)_f$ que contenga a $x$ se cumple que $0 < \lambda_f^*\left[(a,b)_f\right]$, entonces*

$$\overline{\rho}_f(A,x) := \limsup_{\epsilon\to 0}\left\{ \frac{\lambda_f^*\left[A \cap (a,b)_f\right]}{\lambda_f^*\left[(a,b)_f\right]} \ : \ x \in (a,b)_f \quad y \quad \lambda_f^*\left[(a,b)_f\right] < \epsilon \right\} \ y$$

$$\underline{\rho}_f(A,x) := \liminf_{\epsilon\to 0}\left\{ \frac{\lambda_f^*\left[A \cap (a,b)_f\right]}{\lambda_f^*\left[(a,b)_f\right]} \ : \ x \in (a,b)_f \quad y \quad \lambda_f^*\left[(a,b)_f\right] < \epsilon \right\}.$$

*II. $x$ es $f$-minimal.*

- *Si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda_f^*\left[(\leftarrow,c)_f\right] = 0$, entonces*

$$\underline{\rho}_f(A,x) = \overline{\rho}_f(A,x) = 0.$$

- *Para cada $c \in \mathbb{R}$ se tiene que $0 < \lambda_f^*\left[(\leftarrow,c)_f\right] < +\infty$, definimos la Densidad superior e inferior como*

$$\overline{\rho}_f(A,x) := \limsup_{\epsilon\to 0}\left\{ \frac{\lambda_f^*\left[A \cap (\leftarrow,c)\right]}{\lambda_f^*\left[(\leftarrow,c)_f\right]} \ : \ c \in \mathbb{R}\setminus\{x\} \quad y \quad \lambda_f^*\left[(\leftarrow,c)_f\right] < \epsilon \right\}$$

$$\underline{\rho}_f(A,x) := \liminf_{\epsilon\to 0}\left\{ \frac{\lambda_f^*\left[A \cap (\leftarrow,c)\right]}{\lambda_f^*\left[(\leftarrow,c)_f\right]} \ : \ c \in \mathbb{R}\setminus\{x\} \quad y \quad \lambda_f^*\left[(\leftarrow,c)_f\right] < \epsilon \right\}.$$

*III. $x$ es $f$-maximal.*

- *Si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda_f^*\left[(c,\to)_f\right] = 0$, entonces*

$$\underline{\rho}_f(A,x) = \overline{\rho}_f(A,x) = 0.$$

- *Para cada $c \in \mathbb{R}$ se tiene que $0 < \lambda_f^*\left[(c,\to)_f\right] < +\infty$, definimos la densidad superior e inferior como*

$$\overline{\rho}_f(A,x) := \limsup_{\epsilon\to 0}\left\{ \frac{\lambda_f^*\left[A \cap (c,\to)_f\right]}{\lambda_f^*\left[(c,\to)_f\right]} \ : \ c \in \mathbb{R}\setminus\{x\} \quad y \quad \lambda_f^*\left[(c,\to)_f\right] < \epsilon \right\}$$

$$\underline{\rho}_f(A,x) := \liminf_{\epsilon\to 0}\left\{ \frac{\lambda^*_f\left[A\cap(c,\to)_f\right]}{\lambda^*_f\left[(c,\to)_f\right]} \;:\; c\in\mathbb{R}\setminus\{x\} \quad y \quad \lambda^*_f\left[(c,\to)_f\right]<\epsilon\right\}.$$

Una observación inmediata, es que si nuestra selección débil en la definición anterior es la Euclideana podemos obtener la Densidad de Lebesgue estudiada en el Capítulo 1.

## 4. Preguntas Abiertas

Durante la realización de éste trabajo nos dimos cuenta que las nociones que introducimos son una gran fuente de nuevas ideas y nuevos temas lo cual es imposible abarcalos todos en una tésis de maestría en un tiempo razonable. Para finalizar éste trabajo, enunciaremos algunas preguntas que para nosotros son muy interesantes.

**Pregunta 3.15.** ¿Existen dos selecciones débiles $f$ y $g$, que cumplen $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_g$ y

$$\lambda^*_f\left[(a,b)\right] \neq \lambda^*_g\left[(a,b)\right]$$

para todo intervalo Euclideano finito $(a,b)$?

**Pregunta 3.16.** ¿Existen dos selecciones débiles $f$ y $g$, que cumplen $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_g$ y $d_f \neq d_g$ ?

**Pregunta 3.17.** ¿Existe una selección débil $f$, tal que el conjunto

$$\mathcal{M}^+_f := \left\{E\in\mathcal{M}_f \;:\; E\notin\mathcal{N}_f\right\}$$

tenga cardinalidad $\mathfrak{c}$ ?

**Pregunta 3.18.** Dados $A\subseteq\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ y una selección débil $f$, ¿es cierto que

$$d_f(A,x) = \overline{\rho}_f(A,x) = \underline{\rho}_f(A,x)$$

siempre que $\overline{\rho}_f(A,x) = \underline{\rho}_f(A,x)$ ?

**Pregunta 3.19.** ¿Existe una selección débil $f$, tal que $|\mathcal{M}_f| = \mathfrak{c}$?

**Pregunta 3.20.** Encontrar dos selecciones débiles $f$ y $g$, tales que para cada $A\subseteq\mathbb{R}$ con cardinalidad no numerable se tenga $\lambda^*_f(A) < \lambda^*_g(A)$.

**Pregunta 3.21.** Encontrar las condiciones que debe cumplir una selección débil $f$ para que el espacio $(\mathbb{R},\mathbb{M}_f,\lambda^*_f)$ sea c.c.c.

**Pregunta 3.22.** Dadas dos selecciones débiles $f$ y $g$, dar las condiciones para que los espacios $\ell^1(\mathbb{R},\mathcal{M}_f,\lambda^*_f)$ y $\ell^1(\mathbb{R},\mathcal{M}_g,\lambda^*_g)$ no sean linealmente isomorfos.

**Pregunta 3.23.** Dadas dos selecciones débiles $f$ y $g$, dar las condiciones para que los espacios $\ell^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_f, \lambda_f^*)$ y $\ell^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_g, \lambda_g^*)$ no sean topológicamente isomorfos.

**Pregunta 3.24.** Dada una selección débil $f$, ¿es cierto que $\tau_f \subseteq \tau_{d_f}$ ?

**Pregunta 3.25.** ¿Existe una selección débil $f$ tal que $\tau_f = \tau_{d_f}$ ?

**Pregunta 3.26.** ¿Es $\tau_{d_f}$ completamente regular para cualquier selección débil $f$ ?

**Pregunta 3.27.** ¿Puede el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_{d_f})$ ser normal para alguna selección $f$ ?

**Pregunta 3.28.** Dadas dos selecciones débiles $f$ y $g$, dar ejemplos de una función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\int h\, d\lambda_f^* \neq \int h\, d\lambda_g^*.$$

**Pregunta 3.29.** Para cada ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, ¿Es posible encontrar una selección débil $f$ tal que $\mathcal{I} = \mathcal{N}_f$ ?

**Pregunta 3.30.** ¿Es cierto que para el conjunto $\mathcal{N}_f$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_f &= \left\{A \subseteq \mathbb{R} \,:\, A \text{ es un conjunto denso en ninguna parte en } (\mathbb{R}, \tau_{d_f})\right\} \\ &= \left\{A \subseteq \mathbb{R} \,:\, A \text{ es de primera categoría en } (\mathbb{R}, \tau_{d_f})\right\}? \end{aligned}$$

# Bibliografía


[1] Apostol, T. *Análisis matemático*. Reverté, 1996.

[2] Ciesielski, K.; Larson, L.; Ostaszewski, K. *$I$-density continuos functions*. Mathematics subject classifications, 1991.

[3] Cohn, D. *Measure theory*. Birkhauser, 1980.

[4] Hernández Hernández, F. *Teoría de conjuntos, una introducción*. Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[5] Hewitt, E.; Stromberg K. *Real and abstract analysis*. Springer, 1965.

[6] Oxtoby, J. *Measure and category*. Springer, 1980.

[7] Rana, I. *An introduction to measure and integration*. AMS, 2002.

[8] Rudin, W. *Principles of mathematical analysis*. Mcgraw-hill, 1976.

[9] Wilczyński, W. *Density Topologies*, Handbook of Measure Theory, Editores E. Pap, 675 – 702, Elsevier science, 2002.

[10] Garcia-Ferreira, S.; Tomita, A. H. *A non-normal topology generated by a two-point selection*. Topology Appl. vol. 155, no. 10: 1105–1110, 2008.

[11] Goffman, C.; Neugebauer, C.J.; Nishiura,T. *Density topology and approximate continuity*. Duke math J. vol. 28: 497–505, 1961.

[12] Gutev, V.; Nogura, T. *A topology generated by selections*. Topology and its applications vol. 153: 900–911, 2004.

[13] Gutev, V.; Nogura, T. *Selections and order-like selections*. Applied general topology vol. 2: 205–218, 2001.

[14] Hrusák, M.; Martinez-Ruíz, I. *Spaces determined by selections*. Topology Appl. vol. 157 no. 8: 1448 – 1453, 2010.

[15] Poreda, W.; Wagner-Bojakowska, E.; Wilczyński, W. *Remarks on $\mathcal{I}$-density and $\mathcal{I}$-approximately continuos functions*. Commentationes mathematicae universitatis carolinae vol. 26: 553–563, 1985.

[16] Wilczyński, W. *A generalization of density topology*. Real analysis Exchange vol. 8, 1982.

[17] Wojdowski, W. *A category analogue of the generalization of the density topology*. Tatra Mt. Math vol. 42: 11–25, 2009.