



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
"MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ"

Dinámica de una Capa Delgada de
Fluido Cargado en Presencia de
Obstáculos Magnéticos

T E S I S

para obtener el Título de:

LICENCIADO EN CIENCIAS
FÍSICO-MATEMÁTICAS

P R E S E N T A :

Susana Hernández Camacho



Tutor:

Ricardo Becerril Bárcenas

Octubre 2007

Índice general

1. Introducción.	5
2. Conceptos Generales de la Dinámica de Fluidos.	8
2.1. Número de Reynolds.	8
2.2. Ecuación de Navier Stokes.	9
2.3. Función de corriente.	11
2.4. Función de Green.	12
3. Descripción del sistema experimental.	14
4. Analisis Teórico del Sistema.	16
5. Perspectivas de trabajo futuro.	23
6. Conclusiones.	25
7. Apendices.	26
7.1. Ecuación de Navier-Stokes y Ecuación de Difusión	26
7.2. Utilizando las variables sin dimensiones	29
7.3. Función de Green	30
7.4. Integración numérica de la solución de la función de Green . . .	30

7.4.1.	Integración numérica del término que incluye al campo del dipolo en cualquier parte menos en el origen	30
7.4.2.	Integración numérica que incluye el término de la Función Delta de Dirac	31
7.5.	Cálculo de la ecuación diferencial	31
7.6.	Solución de la ecuación diferencial no homogénea de segundo orden	32
7.7.	Componentes de la velocidad en coordenadas polares.	34
7.8.	Cálculo de las constantes que aparecen en la solución general.	35

Agradecimientos

Agradezco por su gran paciencia, ayuda y por su apoyo a mi asesor Ricardo Becerril Bárcenas, a mis hermanos por sus palabras de aliento, a mi hermana Martha que aunque ya no esta conmigo físicamente la tengo muy presente y a mis padres por su gran apoyo y por darme el maravilloso regalo de la vida. A todos ellos mil gracias.

Capítulo 1

Introducción.

Cuando uno habla de dinámica de fluidos, la mayoría de los estudiantes de física piensan en sistemas de distribución de agua a poblaciones, en sistema de drenaje de las ciudades, o en sistemas de riego para cultivos. Sin embargo, aunque esas son algunos de las aplicaciones más conocidas de esta rama de la física, existen una gran variedad de fenómenos, menos conocidos, que son de suma importancia en nuestro planeta. Basta mencionar, por ejemplo, la centralidad del estudio de convección de fluidos en la circulación atmosférica, que a su vez determina el comportamiento del clima, o bien en el movimiento de las placas tectónicas, que a su vez determina el movimiento continental, o en la circulación de los océanos, que es uno de los factores en el vital fenómeno climatológico del “niño”. El estudio de los flujos en medios porosos, puede tener aplicaciones tan importantes, como en la industria de la extracción de petróleo, o si vamos más allá de nuestro planeta, en el contexto astrofísico, la convección, juega un papel central en la transferencia de calor y materia en las estrellas. Cuando uno observa fluidos en sistemas controlados en un laboratorio, uno puede ver como surgen una variedad de patrones muy complejos aún en sistemas muy simples. Y es fascinante saber, que la dinámica básica de estos fenómenos observados a gran escala, pueden estudiarse en laboratorio en un sistema de menor escala. No estoy diciendo que

en el laboratorio se puede estudiar la dinámica del interior de una estrella, o las corrientes en los océanos, lo que estoy diciendo, es que es sorprendente poder estudiar la dinámica básica en un laboratorio, y que es un gran desafío estudiar teóricamente los fenómenos observados en tales experimentos.

Uno de los fenómenos que es de sumo interés, es el movimiento de un fluido cuando se encuentra con un obstáculo, o en otras palabras, el movimiento relativo entre un objeto y un fluido. El movimiento de aeroplanos y submarinos caen en esta clase, o bien el viento soplando contra una estructura, como un edificio o un puente, estos ejemplos son complicados de estudiar. Uno de los arreglos típicos y simples, para estudiar en un laboratorio, es el de un flujo 2-dimensional que a su paso tiene como obstáculo un cilindro circular de diámetro d , que se coloca con su eje normal a un flujo de velocidad constante v_0 , esto es, v_0 sería la velocidad que tendría el fluido en todo lugar si no existiese el obstáculo, y sería la velocidad que existe lejos del cilindro. Si el cilindro es muy largo, comparado con d , los extremos del mismo, tendrían efectos pequeños, y el sistema se considera 2-dimensional. Hay una tremenda cantidad de literatura científica al respecto, con diferentes configuraciones del cilindro, donde se describen diferentes patrones de flujo. Otro tipo de obstáculo es el de un escalón, uno de los trabajos mas recientes es el de Barbosa Saldaña, *et al*, donde se encuentra un estudio numérico de las estructuras o patrones de flujo para diferentes estados de su sistema.

Si el fluido bajo consideración, está electricamente cargado, puede ponerse frente a obstáculos de naturaleza magnética. También existe abundante literatura en esta area, conocida como magnetohidrodinámica. El estudio de este tema es difícil, combina las ecuaciones no lineales de movimientos de fluidos, que de por si ya son difíciles de tratar, con las ecuaciones del magnetismo. La magnetohidrodinámica es relevante, por ejemplo, en los reactores de fusión, y en una amplia gama de sistemas astrofísicos.

El problema que en esta tesis estudiaremos, es el de un flujo de una película delgada de fluido cargado que lleva una velocidad uniforme, y que enfrenta obstáculos de dipolos magnéticos. Este experimento fue realizado reciente-

mente por H. Salas, S. Cuevas y E. Ramos (2001), en ese trabajo desarrollaron un modelo teórico para entender lo observado. Esta tesis es una revisión de ese sistema. En el siguiente capítulo, daremos una exposición muy breve de las ecuaciones de hidrodinámica, y algunos conceptos fundamentales. En el capítulo 3, describimos el sistema experimental que estos autores montaron. La simplicidad del sistema, nos permite reproducir el experimento con fines didácticos, y es susceptible de mostrarlo como un ejemplo de un sistema magnetohidrodinámico en seminarios de divulgación. Mostraremos algunas fotografías del sistema que montamos con la paciente ayuda del Dr. Mauricio Ortiz Gutiérrez profesor de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la UMSNH. En el capítulo 4, describimos el modelo teórico que explica cualitativamente lo que se observa en el laboratorio, dejando para los apéndices algunos detalles matemáticos. Finalizamos en el último capítulo, con algunas ideas para trabajo futuro en este sistema.

Capítulo 2

Conceptos Generales de la Dinámica de Fluidos.

2.1. Número de Reynolds.

En cualquiera de los sistemas descritos en la introducción, las variables relevantes son: las dimensiones (d) del obstáculo, la velocidad (v) del fluido, su densidad (ρ) y su viscosidad (μ). La pregunta natural que surge es, ¿qué tipo de flujo ocurre para diferentes valores de estas cantidades? Estas variables tienen unidades, y *el tipo de flujo* no tiene ninguna unidad asociada, así que es necesario buscar parámetros adimensionales que determinen el tipo de flujo que aparecerá. Hay una combinación adimensional de las cuatro cantidades antes mencionadas, y se conoce como el Número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{v d}{\nu} \quad (2.1)$$

Donde $\nu = \mu/\rho$ es la así llamada, viscosidad cinemática. Uno espera, y lo fascinante es que realmente se encuentra que es así, que el patrón de flujo será el mismo para un mismo número de Reynolds. Así que uno observa los cambios del flujo cuando hacemos variar a Re . En la práctica, es común

trabajar con μ , y ρ fijas, y variar v y d para tener diferentes valores del parámetro Re .

Otros sistemas pueden requerir la definición de otros parámetros. Por ejemplo, cuando un fluido viscoso esté entre dos cilindros concéntricos en rotación las variables relevantes son los radios de los cilindros, las velocidades angulares de los mismos, y la viscosidad cinemática. La combinación de estas variables que da lugar a un parámetro adimensional con el que se discuten los diferentes patrones de flujo es el Número de Taylor. En sistemas donde en el fluido hay difusión de calor o de otra sustancia, que cambia su densidad, se utilizan otros parámetros adimensionales, los llamados Números de Rayleigh. En nuestro estudio, el parámetro que utilizaremos es el número de Reynolds. Hay una interpretación física de éste; Re proporciona una estimación de la importancia relativa del término de inercia $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ y el término viscoso $\nabla^2\mathbf{u}$ de la Ecuación de Navier Stokes, i.e.

$$Re = \frac{|\text{trmino inercial}|}{|\text{trmino viscoso}|} = \left(\frac{U^2/L}{\nu U/L^2}\right)$$

entonces, si $Re \gg 1$ las fuerzas viscosas son despreciables frente a las fuerzas inerciales y si $Re \ll 1$ las fuerzas viscosas son importantes en todo el campo.

2.2. Ecuación de Navier Stokes.

En 1755 Euler planteó una ecuación para describir el movimiento de un fluido que no es otra cosa que la 2ª ley de Newton para un elemento de volumen del fluido con densidad constante ρ . La 2ª ley de Newton para la partícula del fluido i.e. la *Ecuación de Euler* es:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(r, t)}{\partial t} + \mathbf{u}(r, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(r, t) = \frac{-\nabla p(r, t)}{\rho}$$

Esta ecuación no contempla la idea de disipación de energía debido a la viscosidad, la cual se origina por la fricción de una partícula de fluido con las partículas vecinas, ni intercambio de calor entre diferentes partes del fluido.

Navier y Stokes agregaron a la ecuación de Euler, el término apropiado que toma en cuenta la disipación por viscosidad, dando lugar a lo que se conoce como *Ecuación de Navier Stokes*

$$\frac{\partial \mathbf{u}(r, t)}{\partial t} + \mathbf{u}(r, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(r, t) = \frac{-\nabla p(r, t)}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}(r, t) + \mathbf{F}_{ext} \quad (2.2)$$

donde $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática y μ es el coeficiente de viscosidad del fluido.

Las tres ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos son: La ecuación de continuidad, la ecuación de la cantidad de movimiento (o ecuación de Navier Stokes), y la ecuación de la conservación de la energía. Estas ecuaciones pueden darse en su forma integral o en su forma diferencial. Este conjunto de ecuaciones dadas en su forma diferencial son:

Ecuación de continuidad: Representa la conservación de la masa.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.3)$$

Ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \rho f + \nabla \cdot \tau \quad (2.4)$$

Ecuación de la conservación de la energía:

$$\rho \frac{D(e + \frac{1}{2}v^2)}{Dt} = -\nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\tau' \cdot \mathbf{v}) + \rho f \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (k\nabla T) \quad (2.5)$$

No existe una solución general a dicho conjunto de ecuaciones debido a su complejidad, por lo que para cada problema concreto de la mecánica de fluidos se estudian estas ecuaciones buscando simplificaciones que faciliten la solución del problema. En muchos casos no es posible obtener una solución analítica, por lo que es necesario recurrir a soluciones numéricas. Esta es la arena donde se desarrolla la llamada Dinámica de fluidos computacionales.

2.3. Función de corriente.

Cuando se tiene un flujo incompresible, la densidad de masa es constante, entonces se tiene que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, y se dice que es no divergente. Y si además, el sistema es 2-dimensional, es decir todas las cantidades dependen de solo dos variables espaciales, digamos x y y , entonces, las componentes de la velocidad son tales que:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

entonces

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

matemáticamente esta relación requiere que la diferencial $-vdx + udy$ sea exacta, i.e. existe una función $\psi = \psi(x, y)$ tal que

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -vdx + udy$$

Entonces, las componentes de la velocidad se pueden expresar en términos de la función ψ por

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{2.6}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.7}$$

La función “ ψ ” se llama *función de corriente*, sus dimensiones son m^2/seg . La velocidad se puede escribir ahora como:

$$\mathbf{v} = u\hat{i} + v\hat{j} = \frac{\partial \psi}{\partial y}\hat{i} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\hat{j}$$

Con la introducción de la función de corriente, las ecuaciones de movimiento, se simplifican mucho. La ecuación del momento deja de ser vectorial, donde

una de sus incógnitas es precisamente ψ , una vez encontrada, las velocidades se obtienen por simples derivadas parciales. La de continuidad se satisface inmediatamente.

Una de las herramientas que se utilizan en esta tesis, es la función de Green, por lo que en la siguiente sección se introduce brevemente.

2.4. Función de Green.

Las funciones de Green se utilizan para obtener la solución de una ecuación diferencial que puede ser ordinaria o parcial, no homogénea con condiciones de contorno dadas.

Cualquier ecuación diferencial puede indicarse de la forma $L\psi(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r})$, donde:

- L es un operador diferencial lineal $\Rightarrow$
 - 1.- $L(f + g) = L(f) + L(g)$ para todas f, g funciones.
 - 2.- $L(\lambda f) = \lambda L(f)$ para todo λ escalar.
- $F(\mathbf{r})$ es una función conocida, $\psi(\mathbf{r})$ es una función desconocida que puede ser escalar o vectorial.

La idea del método basado en la función de Green es encontrar una función de dos variables $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ que cumpla $L[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, esta es la forma general de la función de Green donde $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ es la distribución Delta de Dirac la cual para el caso unidimensional se define por medio de las siguientes propiedades:

- 1.- $\delta(x) = 0$ para toda $x \neq 0$
- 2.- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$
- 3.- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$

Desde el punto de vista formal, esta definición no es satisfactoria, y los matemáticos la han reformulado con la teoría de distribuciones, que la hace

mas satisfactoria para ellos. La mayoría de los físicos acepta y trabaja con la definición dada arriba. La solución particular de la ecuación diferencial $L\psi(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r})$ esta dada por:

$$\psi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') F(\mathbf{r}') d^n r' \quad (2.8)$$

donde n es la dimensión, L es ordinario si la dimensión es uno y parcial si la dimensión es $n > 1$, para esta ecuación tenemos que:

$$L\psi(\mathbf{r}) = \int L[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] F(\mathbf{r}') d^n r' = \int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') F(\mathbf{r}') d^n r' = F(\mathbf{r})$$

En el siguiente capítulo, vamos a describir el sistema experimental que se analiza en este trabajo. Nosotros lo reprodujimos con fines didácticos, y mostraremos algunas fotografías que se tomaron en el laboratorio de óptica de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la UMSNH, que está a cargo del Dr. Mauricio Ortiz Gutiérrez.

Capítulo 3

Descripción del sistema experimental.

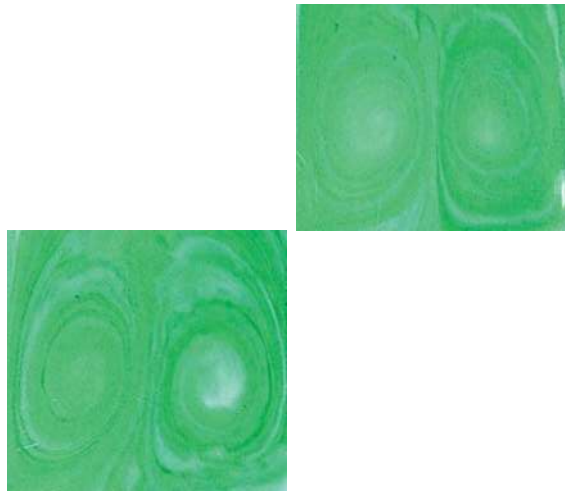
El modelo experimental utilizado por H: Salas, *et. al.* consiste en un recipiente rectangular de 45x35x3 cm, hecho de vidrio de 0.5 cm de espesor, dos electrodos hechos de barras de cobre de sección transversal rectangular los cuales son colocados a lo largo de la parte interior de los lados más cortos de la caja rectangular de manera tal que la distancia entre los electrodos es de 39 cm aproximadamente. Una fuente de poder de voltaje ajustable de corriente directa es conectada a los electrodos los cuales son protegidos con una capa de cromo de 50 μm de grosor para prevenir reacciones electroquímicas. Un dipolo magnético de forma cilíndrica de 2 cm de diámetro y 1 cm de alto es colocado a 1 cm de distancia del exterior del fondo de la caja y en su centro geométrico, al colocar el imán en esta posición el momento dipolar del imán es normal a el fondo del piso y tiene una forma afilada, en el experimento realizado por Salas, Cuevas y Ramos el momento dipolar magnético es $m = 1,18m^2A$.

La caja es llenada con una capa poco profunda de un solución eletrolítica de $NaHCO_3$ (sodium hydrogen carbonate) resultando en una densidad de masa $\rho = 1035Kg/m^3$. La viscosidad cinemática es $\nu = 10^{-6}m^2/s$ y la conductividad eléctrica $\sigma = 4mho/m$. La superficie del fluido esta libre a

condiciones atmosféricas. Se agrega a la solución electrolítica un indicador de partículas para visualizar el movimiento del fluido.

El fluido inicialmente esta inmóvil con una distribución del indicador de partículas aproximadamente homogénea, posteriormente se suministra al fluido una corriente eléctrica que va de 40 a 150 mA, la cual se genera al aplicar una diferencia de potencial entre los electrodos de cobre. El campo magnético no homogéneo interactúa con la densidad de corriente a través de la fuerza de Lorentz, con lo que el fluido se agita.

Los patrones de flujo desarrollan un régimen transitorio, después el flujo alcanza un estado estable caracterizado por un par de vórtices bien definidos que rotan en sentido contrario y que llenan un espacio de aproximadamente del orden del área de la sección transversal del imán.



Llamaremos eje de simetría de los vortices a la línea que separa dichos vortices y la cual es perpendicular a la dirección de la densidad de corriente. En la región central justo encima del imán se concentran las velocidades grandes. Una vez que se apaga la fuente de voltaje el decaimiento de los vórtices dura de 2 a 3 minutos.

Capítulo 4

Analisis Teórico del Sistema.

Nuestro objetivo es formular un modelo teórico con el cual podamos reproducir los resultados del experimento con una buena aproximación.

Comenzamos dando condiciones iniciales, una capa poco profunda de una solución electrolítica se extiende sobre el plano xy limitada por un aislante en el fondo, consideramos una densidad de corriente constante y uniforme j_0 que fluye únicamente en la dirección x y asumimos que el campo magnético inducido por la corriente eléctrica es insignificante, esto es justificable porque el número magnético de Reynolds Rm del experimento hecho por Salas, Cuevas y Ramos, el cual representa el cociente de las fuerzas magnéticas y las fuerzas viscosas, es del orden de 10^{-9} .

Para nuestro modelo teórico tomamos el campo magnético $\mathbf{B}$ producido por un dipolo puntual localizado en el origen con un momento dipolar $\mathbf{m}$ normal a la capa. Debido a que la capa del fluido es simulada para ser muy delgada solo consideramos la componente z del campo dipolar tridimensional i.e.

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{2}{3} \mu_0 m \delta(x) \delta(y) \delta(z) \right) \hat{k} \quad (4.1)$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética. El primer término del lado derecho

de la ecuación da el campo magnético del dipolo en cualquier dirección excepto en el origen, mientras que el segundo término considera los efectos de singularidad en el campo del dipolo. Al interactuar la densidad de corriente con el campo magnético se produce la fuerza de Lorentz y bajo la condición de que el campo magnético tiene solo una componente que es en la dirección $\hat{k}$ entonces se produce una fuerza de Lorentz con una componente distinta de cero en la dirección del eje y negativo y debido a la distribución espacial no homogénea del campo magnético descrito por la ecuación (4.1) esta fuerza resulta ser rotacional. Tomando en cuenta que tanto el largo como el ancho de la capa del fluido son mucho más grandes que el espesor o grosor de la capa, los movimientos verticales en el fluido son descuidados en el modelo. En una pequeña vecindad del dipolo la variación de la intensidad del campo en la dirección transversal es muy pequeña, por lo tanto esta variación puede ser despreciada.

Entonces, estamos considerando una capa de fluido de espesor insignificante con un dipolo dos dimensional localizado en el origen.

Comenzamos con el análisis de nuestro modelo teórico:

La velocidad $\mathbf{u} = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ satisface la ecuación de Navier-Stokes i.e.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla \rho + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} j \times \mathbf{B} \quad (4.2)$$

donde $\rho, j, \mathbf{B}$ son la presión, densidad de corriente eléctrica y el campo magnético. Tomando el rotacional de esta ecuación obtenemos una sola componente de la vorticidad, la componente w ,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) w = \nu \nabla^2 w - \frac{j_0}{\rho} \frac{\partial B}{\partial x} \quad (4.3)$$

Para poner el fluido en movimiento la fuerza de Lorentz debe superar la fuerza de viscosidad. La fuerza de viscosidad es originada por el rozamiento interno de las capas del fluido y se expresa como $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ (fuerza por unidad

de volumen) donde ν es la viscosidad de dicho fluido y $\mathbf{u}$ es la velocidad.

La densidad de corriente en un medio continuo se puede expresar como $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ donde ρ es la densidad de carga en un punto y $\mathbf{v}$ la velocidad de las cargas en ese punto, podemos expresar la densidad de corriente de este modo porque tenemos una región del espacio con una densidad de carga no necesariamente uniforme, en la que el movimiento de cargas se puede representar por medio de un campo vectorial de velocidades.

Por lo tanto el balance total entre estas fuerzas en una vecindad del dipolo es $|\nu \nabla^2 \mathbf{u}| \approx |\mathbf{j} \times \mathbf{B}/\rho|$. Se toma $|\nu \nabla^2 \mathbf{u}|$ pues como la acción de viscosidad se opone al flujo entonces $\nabla^2 \mathbf{u}$ debe ser negativa.

La relación entre la Fuerza de Lorentz y la Fuerza viscosa produce una velocidad característica $U = j_0 B_0 L^2 / \rho \nu$, donde L es una longitud característica.

Usamos las siguientes variables adimensionales en la ecuación que obtuvimos para una sola componente de la vorticidad

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{Lw}{U} \\ \mathbf{u}^* &= \frac{\mathbf{u}}{U} \\ \mathbf{x}^* &= \frac{\mathbf{x}}{L} \\ t^* &= \frac{t}{L^2/\nu} \\ j^* &= \frac{j}{j_0} \\ B^* &= \frac{B}{B_0} \end{aligned}$$

y omitiendo los * tenemos que la ecuación (4.3) se convierte en:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + Re(\vec{u} \cdot \nabla)w = \nabla^2 w - \frac{\partial B}{\partial x}$$

donde Re es el número de Reynolds. Como los efectos inerciales pueden ser considerados importantes solamente en una región muy pequeña cerca del

dipolo, nosotros podemos asumir que para el flujo $Re \ll 1$, entonces podemos olvidarnos del término convectivo de la ecuación anterior obteniendo así la *Ecuación de difusión* no homogénea para w , i.e.

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla^2 w = -\frac{\partial B}{\partial x} \quad (4.4)$$

El término de la derecha de esta ecuación representa la fuente de vórtices producidos por la interacción de la corriente uniforme con el campo magnético no homogéneo. Resolvemos esta ecuación por el método de la Función de Green en el dominio infinito $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ para $t > 0$ y tomando la condición inicial $w = 0$ para $t = 0$. La función de Green asociada a este problema es

$$G(x, y, t \mid x', y', \tau) = \frac{1}{4\pi(t - \tau)} e^{-[(x-x')^2 + (y-y')^2]/4(t-\tau)}, \quad (4.5)$$

Por lo tanto, la solución de esta ecuación con la condición inicial anterior puede ser expresada como

$$w(x, y, t) = - \int_{\tau=0}^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t \mid x', y', \tau) \frac{\partial B}{\partial x'} dx' dy' \quad (4.6)$$

Esta solución contiene dos contribuciones debido a la expresión correspondiente para el campo magnético del dipolo dado por la ecuación (4.1), la integración numérica del término que incluye el campo magnético del dipolo para cualquier posición excepto el origen da un cero a la contribución de la integral (4.6) y podemos realizar la integración por medio del Método de Simpson con un programa en lenguaje C. La integración numérica del término que incluye la función delta de Dirac y la cual expresa los efectos de singularidad en el campo magnético del dipolo puede ser integrada analíticamente, produciendo la vorticidad dependiente del tiempo

$$w(x, y, t) = \frac{m_0}{3\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4t}} \quad (4.7)$$

donde $m_0 = \mu_0 m / L^2 B_0$. Podemos notar que por la forma del campo del dipolo la vorticidad también es singular en el origen.

Con el fin de determinar el flujo del campo se introduce la función $\psi(x, y, t)$ definida como función de corriente tal que $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ y $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, esta función satisface la ecuación $\nabla^2 \psi = -w$ pues $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u} = w \hat{k}$. En el límite cuando $t \rightarrow \infty$ en la ecuación (4.7), la solución estable puede ser obtenida de la ecuación

$$\nabla^2 \psi(x, y) = -\frac{m_0}{3\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (4.8)$$

Al tomar el Laplaciano en coordenadas polares para la ecuación (4.8) tenemos que:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -\frac{m_0}{3\pi} \frac{\cos \theta}{r}$$

Asumiendo una solución de variables separables de la forma $\psi(r, \theta) = f(r) \cos \theta$, podemos obtener una ecuación diferencial ordinaria de la función $f(r)$, i.e.

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{f}{r^2} = -\frac{m_0}{3\pi} \frac{1}{r}$$

cuya solución es

$$f(r) = \frac{m_0}{12\pi} r - \frac{m_0}{12\pi} r \ln r^2 + C_1 \frac{1}{r} + C_2 r \quad (4.9)$$

Para determinar las constantes C_1 y C_2 exigimos que las componentes de la velocidad disminuyan para una R suficientemente grande, i.e.

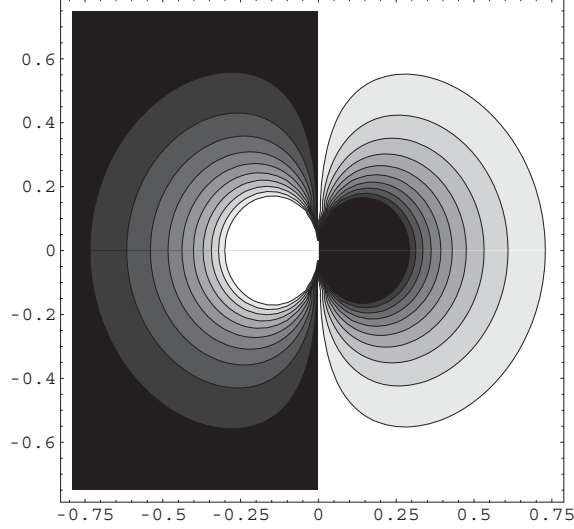
$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \\ u_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \end{aligned}$$

donde u_r y u_θ son las componentes de la velocidad expresadas en coordenadas polares.

para $r=R$, y recordando que $\psi(r, \theta) = f(r)\cos\theta$ entonces

$$\psi(r, \theta) = \frac{m_0}{12\pi} \left[r \left(1 + \ln \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{R^2}{r} \right] \cos\theta \quad (4.10)$$

Esta es la gráfica del flujo descrito por la ecuación (4.11)



podemos notar que $\psi(r, \theta) = 0$ para $r=R$, en la ecuación que obtuvimos para ψ y que esta es singular en el origen y es realmente lo que esperamos ya que es una característica heredada del campo magnético del dipolo.

En otro trabajo hecho por Salas, Cuevas, Ramos y K. Messadek, en el que utilizan dos imanes permanentes en lugar de uno, es decir, utilizan un cuadrupolo, obtuvieron experimentalmente dos pares de vórtices, cada par es iguales a los que se obtuvieron en el primer experimento. Estos vórtices interactúan entre si, el análisis teórico de este nuevo experimento es en gran parte similar al que analizamos en esta tesis con la única diferencia de que agregamos una coordenada más a las ecuaciones que se obtuvieron, la solución analítica que obtuvieron es

$$\psi(x, y) = \frac{m_0}{12\pi}(x - x_0)[1 + \ln \frac{R^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}] - R^2 \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (4.11)$$

Capítulo 5

Perspectivas de trabajo futuro.

Los patrones que se observan en el laboratorio, y que es el modelo teórico de Salas *et. al.* pueden describirse cualitativamente, se construyeron en una geometría simple donde la velocidad inducida por la diferencia de potencial era constante y en una dirección. Queda abierta la posibilidad de explorar flujos en otras geometrías, por ejemplo con placas circulares concéntricas y con distribuciones de campos magnéticos más complejos. Algunos patrones muy preliminares de esta geometría se mostraron en el capítulo 1, donde los obstáculos siguieron siendo campos dipolares. Y podría usarse un esquema similar al expuesto en la tesis.

Los patrones de flujo tratados aquí, no variaban con el tiempo, pues ni la diferencia de potencial, ni el campo magnético tienen variación temporal. Sería interesante buscar condiciones que desestabilizaran el sistema y lo condujeran a diferentes regímenes, e incluso a la turbulencia. Una posibilidad sería utilizar una diferencia de potencial alterna que produjera una corriente periódica en el tiempo. Una segunda posibilidad, sería variar la intensidad del campo magnético de manera periódica en el tiempo. O bien una combinación de ambas opciones, en la geometría expuesta en la tesis, o en otras geometrías. Lo que se tendría en este caso de diferencias de potencial y/o campos magnéticos dependientes del tiempo, sería una función de corriente

dependiente del tiempo $\psi(x, y, t)$. Ya sabemos que la velocidad del fluido se relaciona con la función de corriente como $\dot{x} = -\partial_y \psi$ y $\dot{y} = \partial_x \psi$. Para flujos que no dependen del tiempo (como en la tesis en que la dependencia temporal se extingue rapidamente), las relaciones anteriores tienen la estructura de un sistema Hamiltoniano autónomo, y como en la tesis, las trayectorias de las partículas siguen las contornos constantes de ψ . Sin embargo, cuando ψ depende del tiempo (por ejemplo de manera periódica), se tiene un sistema Hamiltoniano dependiente del tiempo y es posible que el sistema exhiba trayectorias caóticas de las partículas. Este tipo de estudios se ha realizado en sistemas convectivos [4], y sería interesante realizarlo para sistemas parecidos al presentado en este trabajo.

Capítulo 6

Conclusiones.

Es posible estudiar Teórica y experimentalmente el flujo generado por la interacción de una corriente eléctrica constante y un campo magnético dipolar en una capa delgada de una solución electrolítica. Debido a la no homogeneidad o la variación espacial del campo magnético producido por el dipolo resulta una fuerza rotacional de Lorentz la cual genera un par de vórtices bien definidos.

Al comparar el resultado teórico con el experimental podemos notar que los vórtices descritos por la ecuación que obtuvimos para ψ son muy semejantes a los descritos por el experimento.

Capítulo 7

Apendices.

7.1. Ecuación de Navier-Stokes y Ecuación de Difusión

Lavelocidad

$$\mathbf{u} = (u(x, y, t), v(x, y, t))$$

satisface la ecuación de Navier-Stokes i.e.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla \rho + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} j \times \mathbf{B}$$

Tomando el rotacional de esta ecuación obtenemos una sola componente de la vorticidad, la componente w,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) w &= \nu \nabla^2 w - \frac{j_0}{\rho} \frac{\partial B}{\partial x} \\ \Rightarrow \mathbf{w} &= \nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \left(\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \hat{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = w \hat{k} \end{aligned}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla \rho \right) + \nabla \times (\nu \nabla^2 \mathbf{u}) + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} j \times \mathbf{B} \right)$$

donde

$$\nabla \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla \rho \right) = 0$$

porque ρ es constante.

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \times (\nu \nabla^2 \mathbf{u}) + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} j \times \mathbf{B} \right)$$

Desarrollamos por separado cada parte de esta ecuación:

1)

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial t} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \left(\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right)$$

$$= \hat{k} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \hat{k} \frac{\partial}{\partial t} w$$

2)

$$\nabla \times ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \nabla \times \left[\left((u, v, 0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) (u, v, 0) \right]$$

$$= \nabla \times \left[\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) (u, v, 0) \right]$$

$$= \nabla \times \left(\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) u, \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) v, 0 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y})u & (u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y})v & 0 \end{vmatrix} \\
&= \hat{i}[\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y})v] - \hat{j}[\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y})u] + \hat{k}[\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y})v - \frac{\partial}{\partial y}(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y})u] \\
&= \hat{k}[\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial}{\partial x}v) + \frac{\partial}{\partial x}(v\frac{\partial}{\partial y}v) - \frac{\partial}{\partial y}(u\frac{\partial}{\partial x}u) - \frac{\partial}{\partial y}(v\frac{\partial}{\partial y}u)] \\
&= \hat{k}[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}] \\
&= \hat{k}[\frac{\partial v}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) - \frac{\partial u}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) + u(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}) + v(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})] \\
&= \hat{k}[w(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) + u\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) + v\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})] \\
&= \hat{k}[w(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)w] = (\mathbf{u} \cdot \nabla)w\hat{k}
\end{aligned}$$

donde $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ pues usando la Ecuación de Continuidad $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$

y como $\rho = cte.$ entonces $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ lo cual implica que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

3)

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nu \nabla^2 \mathbf{u}) &= \nu \nabla \times (\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}) \\
&= \nu \nabla \times (\frac{\partial^2(u, v, 0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u, v, 0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(u, v, 0)}{\partial z^2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nu \nabla \times \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u, \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v, 0 \right) \\
&= \nu \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v & 0 \end{vmatrix} \\
&= \nu \left[\hat{i} \left(\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v \right) - \right. \\
&\quad \left. \hat{j} \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u \right) \right] \\
&= \nu \hat{k} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} v - \frac{\partial}{\partial y} u \right) \right] = \nu \nabla^2 w \hat{k} \tag{7.1}
\end{aligned}$$

4)

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right) = \frac{1}{\rho} \nabla \times \left(\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ j_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} \right) \tag{7.2}$$

$$= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -j_0 B & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(-j_0 B)}{\partial x} \hat{k} = -\frac{1}{\rho} j_0 \frac{\partial B}{\partial x} \hat{k} \tag{7.3}$$

7.2. Utilizando las variables sin dimensiones

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) w = \nu \nabla^2 w - \frac{j_0}{\rho} \frac{\partial B}{\partial x}$$

$$\frac{U}{L} \frac{\nu}{L^2} \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + (U \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{L} \nabla^*) \frac{U}{L} w^* = \nu \frac{1}{L^2} \frac{U}{L} \nabla^{2*} w^* - \frac{j_0}{\rho} \frac{B_0}{L} \frac{\partial B^*}{\partial x^*}$$

$$\frac{U\nu}{L^3} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^* + \frac{U^2}{L^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla)^* w^* = \frac{\nu U}{L^3} (\nabla^2 w)^* - \frac{j_0 B_0}{\rho L} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)^*$$

sustituyendo $U = j_0 B_0 L^2 / \rho \nu$

$$\frac{j_0 B_0 L^2 \nu}{\rho \nu L^3} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^* + \frac{(j_0)^2 (B_0)^2 L^4}{L^2 \rho^2 \nu^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla)^* w^* = \frac{\nu j_0 B_0 L^2}{L^3 \rho \nu} (\nabla^2 w)^* - \frac{j_0 B_0}{\rho L} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)^*$$

cancelando algunos términos y multiplicando toda la ecuación por $\rho L / j_0 B_0$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^* + \frac{j_0 B_0 L^3}{\rho \nu^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla)^* w^* = (\nabla^2 w)^* - \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)^*$$

como $Re = \frac{UL}{\nu} = j_0 B_0 L^3 / \rho \nu^2$ y omitiendo los *

$$\frac{\partial w}{\partial t} + Re(\mathbf{u} \cdot \nabla)w = \nabla^2 w - \frac{\partial B}{\partial x}$$

7.3. Función de Green

7.4. Integración numérica de la solución de la función de Green

7.4.1. Integración numérica del término que incluye al campo del dipolo en cualquier parte menos en el origen

Utilizamos el Método de Simpson para hacer esta integral.

FALTA PONER EL PROGRAMA QUE RESUELVE LA INTEGRAL.

7.4.2. Integración numérica que incluye el término de la Función Delta de Dirac

Integramos utilizando integración por partes.

$$-\frac{\mu_0 m}{6\pi L^2 B_0} \int_{\tau=0}^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-\tau)}$$

FALTA.....

7.5. Cálculo de la ecuación diferencial

Sea

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t))$$

el vector velocidad de el sistema con dos componentes. Entonces

$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = w \hat{k} \quad (7.4)$$

como

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = w \quad (7.5)$$

por lo tanto

$$\nabla^2 \psi = -w$$

Ahora, como

$$w = \frac{m_0}{3\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{4t}}$$

y tomando el límite cuando el tiempo tiende a infinito tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_0}{3\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} e^{\frac{-(x^2 + y^2)}{4t}} = \frac{m_0}{3\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

En coordenadas cilíndricas el Laplaciano tiene la siguiente forma:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (7.6)$$

donde $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$ pues ψ no depende de la componente z .

Cambiando nuestras componentes radial y tangencial a coordenadas cilíndricas tenemos que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -w = -\frac{m_0}{3\pi} \frac{\cos \theta}{r}$$

sustituyendo

$$\psi(r, \theta) = f(r) \cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f(r) \cos \theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f(r) \cos \theta}{\partial \theta^2} = -\frac{m_0}{3\pi} \frac{\cos \theta}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{f}{r^2} = -\frac{m_0}{3\pi} \frac{1}{r}$$

es la ecuación que nos interesa resolver.

7.6. Solución de la ecuación diferencial no homogénea de segundo orden

La ecuación diferencial ordinaria que obtuvimos tiene la forma de una ecuación de Cauchy-Euler, por lo tanto se propone una solución de la forma: $f = r^m$, cuyas primeras derivadas son:

$$f' = mr^{m-1}$$

$$f'' = m(m-1)r^{m-2}$$

Primero resolvemos la ecuación diferencial homogénea asociada, sustituyendo $f = r^m$ y sus derivadas en la ecuación homogénea:

$$r^2m(m-1)r^{m-2} + rmr^{m-1} - r^m = 0$$

$$\Rightarrow m(m-1)r^m + mr^m - r^m = 0 \Rightarrow r^m[m^2 - m + m - 1] = 0$$

como $r^m \neq 0$ por ser la solución propuesta

$$\Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1 \Rightarrow m_1 = -1, m_2 = 1$$

Por lo tanto la solución del sistema homogéneo es:

$$f_h = C_1f_1 + C_2f_2 = C_1r^{m_1} + C_2r^{m_2} = C_1\frac{1}{r} + C_2r$$

Ahora procedemos a encontrar la solución particular del sistema no homogéneo.

La solución particular esta dada por:

$$f_p = -f_1 \int \frac{f_2 R(r)}{W} dr + f_2 \int \frac{f_1 R(r)}{W} dr$$

donde

$$R(r) = -\frac{m_0}{3\pi} \frac{1}{r}$$

y W es el Wronskiano (distinto de cero porque las soluciones son linealmente independientes) que esta dado por:

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} & r \\ -\frac{1}{r^2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{2}{r} \quad (7.7)$$

$$\Rightarrow -f_1 \int \frac{f_2 R(r)}{W} dr = -\frac{1}{r} \int r \frac{-\frac{m_0}{3\pi} \frac{1}{r}}{\frac{2}{r}} dr = \frac{1}{r} \int \frac{m_0}{6\pi} r dr = \frac{1}{r} \frac{m_0}{6\pi} \frac{1}{2} r^2 = \frac{m_0}{12\pi} r$$

$$\Rightarrow f_2 \int \frac{f_1 R(r)}{W} dr = r \int \frac{1}{r} \frac{-\frac{m_0}{3\pi} \frac{1}{r}}{\frac{2}{r}} dr = -r \int \frac{1}{r} \frac{m_0}{6\pi} dr = -r \frac{m_0}{6\pi} \ln r = -\frac{m_0}{12\pi} r \ln r^2$$

en la última igualdad utilizamos una propiedad de los logaritmos llamada Regla de la potencia

$$\begin{aligned} \ln x^n &= n \ln x \\ \Rightarrow f_p &= \frac{m_0}{12\pi} r - \frac{m_0}{12\pi} r \ln r^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial ordinaria no homogénea es:

$$f_g = f_p + f_h = \frac{m_0}{12\pi} r - \frac{m_0}{12\pi} r \ln r^2 + C_1 \frac{1}{r} + C_2 r$$

7.7. Componentes de la velocidad en coordenadas polares.

La velocidad es:

$$\mathbf{v} = u\hat{i} + v\hat{j} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{i} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{j}$$

en coordenadas polares tenemos que:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\hat{e}_r = \hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta, \hat{e}_\theta = -\hat{i} \sin \theta + \hat{j} \cos \theta.$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{x}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ &= \frac{r \cos \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left(\frac{-y}{x^2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{y}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$= \frac{r \operatorname{sen} \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \operatorname{sen} \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

como $\hat{e}_r = \hat{i} \cos \theta + \hat{j} \operatorname{sen} \theta$, $\hat{e}_\theta = -\hat{i} \operatorname{sen} \theta + \hat{j} \cos \theta$ entonces:

$$\hat{i} = \cos \theta \hat{e}_r - \operatorname{sen} \theta \hat{e}_\theta$$

$$\hat{j} = \operatorname{sen} \theta \hat{e}_r + \cos \theta \hat{e}_\theta$$

y la velocidad nos queda como:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= u \hat{i} + v \hat{j} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{i} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{j} \\ &= \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) (\cos \theta \hat{e}_r - \operatorname{sen} \theta \hat{e}_\theta) - \left(\cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) (\operatorname{sen} \theta \hat{e}_r + \cos \theta \hat{e}_\theta) \\ &= \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{e}_r - \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{e}_\theta + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{e}_r - \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta \\ &\quad - \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{e}_r - \cos^2 \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{e}_\theta + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{e}_r + \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{e}_r - \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{e}_\theta = u_r \hat{e}_r + u_\theta \hat{e}_\theta \end{aligned}$$

7.8. Cálculo de las constantes que aparecen en la solución general.

Evaluamos las constantes C_1, C_2 exigiendo que las componentes de la velocidad desaparezcan para una R suficientemente grande e.i.

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \\ u_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \end{aligned}$$

para $r=R$

Tenemos que

$$\psi(r, \theta) = f(r) \cos \theta = \left(\frac{m_0}{12\pi} r - \frac{m_0}{12\pi} r \ln r^2 + C_1 \frac{1}{r} + C_2 r \right) \cos \theta$$

Calculamos las derivadas parciales de $\psi(r, \theta)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\left(\frac{m_0}{12\pi}r - \frac{m_0}{12\pi}r \ln r^2 + C_1 \frac{1}{r} + C_2 r\right) \sin \theta$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(\frac{m_0}{12\pi} - \frac{m_0}{12\pi} \ln r^2 - \frac{m_0}{12\pi}(2) - C_1 \frac{1}{r^2} + C_2\right) \cos \theta$$

$$\Rightarrow u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \left(-\frac{m_0}{12\pi} \frac{R}{r} + \frac{m_0}{12\pi} \frac{R}{r} \ln R^2 - C_1 \frac{1}{rR} - C_2 \frac{R}{r}\right) \sin \theta = 0$$

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(-\frac{m_0}{12\pi} + \frac{m_0}{12\pi} \ln R^2 + \frac{m_0}{12\pi}(2) + C_1 \frac{1}{R^2} - C_2\right) \cos \theta = 0$$

entonces obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas y resolviendolo tenemos que:

$$C_1 = -\frac{m_0}{12\pi} R^2$$

$$C_2 = \frac{m_0}{12\pi} \ln R^2$$

$$\psi(r, \theta) = f(r) \cos \theta = \left(\frac{m_0}{12\pi}r - \frac{m_0}{12\pi}r \ln r^2 - \frac{m_0}{12\pi} \frac{R^2}{r} + \frac{m_0}{12\pi} \ln R^2 r\right) \cos \theta$$

$$\psi(r, \theta) = \frac{m_0}{12\pi} \left[r(1 - \ln r^2 + \ln R^2) - \frac{R^2}{r}\right] \cos \theta$$

$$\psi(r, \theta) = \frac{m_0}{12\pi} \left[r\left(1 + \ln \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{R^2}{r}\right] \cos \theta$$

Bibliografía

- [1] "Amplitud equations in double diffusive convection", Ricardo Becerril and J. Swift. Phys. Rev, **E 55** (1997) 6270.
- [2] "Nonlinear dynamics and chaos" S. Strogatz, Addison-Wesley (1994).
- [3] "Chaos and nonlinear dynamics" R. Hilborn, Oxford University Press (1994).
- [4] "Chaotic advection in large-scale convection" B. Joseph Int. J. Bifurcation and Chaos **8**, 57-71 (1998). "Mass transport and mixing by modulated traveling waves" J. Weiss and E. Knobloch. Phys Rev A **40** 2579 (1989).
- [5] "Electrically Driven Vortices in a Dipolar Magnetic Field" H. Salas, S. Cuevas, E. Ramos, Magnetohydrodynamics Vol. 37 (2001), No. 1-2, pp. 38-44.
- [6] "Electrically Driven Vortices in a Superposition of Dipolar Permanent Magnets" S. Cuevas, H. Salas, E. Ramos, K. Messadek, Fundamental and Applied MHD (2002).
- [7] "Revista Mexicana de Física", volumen 53, número 2 (2007), pag. 87-95.
- [8] "Ecuaciones Diferenciales" Isabel Carmona Jover, Pearson, Cuarta reimprisión (1998)

- [9] "Métodos Matemáticos para Físicos" George Arfken, Editorial Diana (1981)