UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
"Mat. Luis M. Rivera Gutiérrez"

"EL TEOREMA DE PITÁGORAS. DEMOSTRACIONES Y CONSIDERACIONES DIDÁCTICAS PARA SU ENSEÑANZA"

TESIS

que para obtener el título de:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:
Araceli Villa Mireles

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Armando Sepúlveda López

Morelia, Michoacán de Ocampo, Noviembre de 2007.

AGRADECIMIENTOS

Debo agradecer a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por la formación que me ha brindado desde el nivel medio superior.

Quiero agradecer a las personas que hicieron posible este trabajo de tesis:

Al Dr. Armando Sepúlveda López por su apoyo y dedicación que hicieron posible el desarrollo de este trabajo.

A mis padres Jorge y Silvia que con su apoyo y motivación han hecho posibles los eventos mas importantes de mi vida, siendo éste la culminación de mi tesis.

A mi esposo Paulo quien con su comprensión e ingenio estuvo siempre presente.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

CARÁCTER DE LA INVESTIGACIÓN

En esta tesis se aborda uno de los teoremas más representativos de las matemáticas escolares, el cual es un contenido fundamental de la geometría; el Teorema de Pitágoras. Efectivamente, la mayoría de las personas que aistieron a la escuela para recibir la educación básica, escucharon al menos una vez o saben algo acerca de dicho teorema.
Algunos afirman que de él depende la existencia misma de la trigonometría y es un conocimiento de amplio uso fuera de la escuela; algunos albanñiles suelen usar su recíproco, mediante la "regla del 3-4-5" (dicen ellos), para trazar ángulos rectos cuando no disponen de las herramientas necesarias. Además, especial atención recibió por parte de Euclides al ubicarlo como la última poposición del libro I de Los Elementos (proposición 47-48, Libro I) y usarlo frecuentemente en el desarrollo de varias de las siguientes proposiciones.

Obviamente, la investigación es de carácter histórico; cuya metodología se sujeta a la revisión de las fuentes que documentan la existencia de las demostraciones (o pruebas) del Teorema de Pitágoras. Es decir, si usamos el lenguaje sobre metodología, este estudio es de tipo histórico y la investigación es de carácter documental.
Por esta razón, esta tesis está compuesta de cuatro capítulos. En el capítulo I, damos una introduccón al tema que motiva el estudio, esperando dejar en claro el problema de investigación y los propósitos que nos proponemos alcanzar. El Capítulo II se refiere, básicamente, a la historia del Teorema de Pitágoras en donde se tocan algunos aspectos con tíntes anecdóticos de la vida y obra de este lustre personaje, llamado Pitágoras.

En el Capítulo III abordamos algunas de las demostraciones que suelen estar presentes en el contexto escolar. Además, incorporamos el uso del software dinámico, Cabri Geometre, para mostrar cómo este recurso tecnológico puede contribuir al entendimiento del Teorema; con la aclaración de que las herramientas tecnológicas usan precisamente eso, recursos que apoyan el aprendizaje. Finalmente, en el Capítulo IV presentamos las conclusiones que, por el tipo de estudio, son breves; concluyendo con algunas recomendaciones didácticas.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Vivimos en un mundo globalizado, multidisciplinario y diverso, donde se nos ha saturado de información de diferente índole sin que necesariamente lleguemos a comprenderla, sobre todo la de carácter científico. Sin embargo, a pesar de ello, existe información que regularmente está presente en la memoria del hombre común que tiene el nivel de escolaridad básica; por ejemplo, se recuerda que el símbolo químico del agua es H_2O; que Einstein descubrió la famosa fórmula $E = mc^2$; que la Independencia de México fué en 1810; se sabe de qué trata la Teoría de la evolución de Darwin y, sin lugar a dudas, se sabe algo del Teorema de Pitágoras.
De hecho, en matemáticas ningún teorema es tan conocido, en todos los ámbitos, como el Teorema de Pitágoras, cuya afirmación ha causado admiración de diferentes tipos de personas, pues para nada es obvio que los lados de un triángulo rectángulo estén relacionados de manera que el área del cuadrado del lado mayor sea igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados; y no solo eso, sino que dicho teorema sea válido para otras
figuras, regulares e irregulares, formadas en cada uno de los lados del triángulo rectángulo y, finalmente, que su generalización sea la base de varios teoremas en geometría, trigonometría, análisis. De hecho el Teorema de Piágoras traducido a la norma y m
etrica euclidiana es la base de los espacios que describen la realidad física.étricos, trigonométricos y de la geometría analítica.
Al respecto, el profesor Elisha S. Loomis declara "La trigonometría existe porque existe el Teorema de Pitágoras" (Loomis, 1940, p. 12), aseveración que resalta la potencia de este resultado que sin duda, ha influido en el desarrollo de diferentes ramas de las matemáticas.

En la antigüedad, era tal la importancia del Teorema de Pitágoras, que en varios centros de estudios exigían un profundo conocimiento del mismo para

Figura I.1
La matemática guiando a Pitágoras. Fragmento de una tabla de Da Ponte, “las artes liberales”. Museo del Prado, Madrid.

obtener el grado de maestro y, en ocasiones, se obligaba a exhibir una nueva demostración; por esta razón el Teorema de Pitágoras alcanzó la designación de *Magister matheseo* (González, 2001, p. 174). Este hecho y el significado mismo del teorema, explican ampliamente la cantidad de demostraciones que matemáticos y no matemáticos, de diferentes épocas, han encontrado del más famoso teorema de la geometría. Bien decía Loomis, (1940, p. 3): “Este teorema, con la multitud de demostraciones del mismo, ilustra de forma sorprendente el hecho de que hay muchas formas de alcanzar la misma verdad”.

En este sentido, el Teorema de Pitágoras es, quizás, una de las proposiciones matemáticas sobre las que existe el mayor número de "demostraciones" que, aunque algunas de éstas no merezcan recibir esta denominación, desde mi punto ded vista axiomático contemporáneo, son intentos, efectivos para hacer ver que la afirmación es verdadera.

Las hay de distintos tipos; desde las que recurren al uso de materiales manipulativos tangibles como los rompecabezas, pasando por las "pruebas visuales" algunas de ellas con sorprendente carga de ingenio y elegancia, hasta las demostraciones formales que pueden ubicarse en diferentes ramas de las matemáticas; en la geometría o en la teoría de números. Usualmente las que se conocen con el contexto escolar como "demostraciones" trigonométricas o analíticas, dependen de la existencia misma del teorema.
Cabe mencionar también, que el desarrollo de las herramientas tecnológicas y el uso de software dinámico han reforzado las "pruebas visulaes", que pueden contribuir para que los estudiantes logren una mayor comprensión del teorema que puede manifestarse a través de un cambio en la percepción que el estudiante tiene sobre dicho teorema.

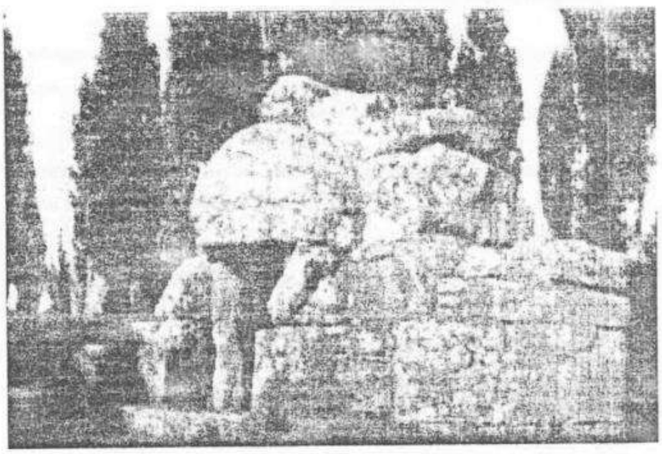


Figura I.2

Tumba de Pitágoras en Metaponto.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Existen diferentes argumentos que destacan la importancia del Teorema de Pitágoras: como componente esencial del curriculum escolar; como parte del conocimiento científico y de la cultura universal; y como uno de los conocimientos matemáticos que es conocida mayormente por la sociedad con estudios de nivel al menos educación básica. En esta tesis se hace una revisión histórica del teorema, mostrando algunas de las demostraciones correspondientes a diferentes épocas y niveles de formalidad, e incorporamos el uso e recursos manipulativas y herramientas tecnológicas. La idea es generar opciones didácticas que puedan ser usadas en la enseñanza del Teorema de Pitágoras, en los diferentes niveles escolares.

Por estas razones, algunas de las "demostraciones" que aquí se presentan, en realidad corresponden a pruebas que intentan mostrar que la proposición es verdadera recurriendo a la intuición o a argumentos basados en la figura; las cuales pudieran ser transformados para la aplicación de argumentos propios del método axiomático deductivo establecido por Euclides.

En esta perspectiva, tomando en cuenta el carácter histórico de esta tesis, nuestro **problema de investigación es** :

> ¿Cuáles son las demostraciones del Teorema de Pitágoras que gozan de mayor representatividad para ser utilizadas en la enseñanza, de acuerdo al nivel de escolaridad de los estudiantes?

CAPÍTULO II

HISTORIA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Los registros más antiguos que muestran la actividad del hombre en el campo de la geometría son unas tablas de arcilla cocida descubiertas en Mesopotamia, las cuales corresponden a tiempos de los sumerios; aproximadamente 3000 aC. (antes de cristo). Existen otras tablas posteriores con escritura cuneiforme de la cultura babilónica, que se ubican en la primera dinastía del rey Hammurabi, del nuevo imperio babilónico de Nabucodonosor. Estas tablas muestran que la geometría babilónica antigua está íntimamente relacionada con la medición práctica; descubrieron procedimientos para encontrar áreas de figuras planas y resolver múltiples problemas de carácter algebraico.

Durante un largo período de casi 4000 años, los Egipcios y los Babilonios acumularon gran cantidad de conocimientos gométricos y aritméticos caracterizados por su utilidad para resolver problemas prácticos. Este manejo de los conocimientos matemáticos corresponde ya a un nivel conciente, el cual estuvo antecedido por un nivel subconciente que, se cree, utilizaron los hombres de épocas anteriores a estas culturas; la aplicación de conocimientos a la satisfacción de necesidades relacionadas con la sobrevivencia. No se sabe cómo, ni cuando, se dio esa transición en el nivel de uso de los conocimientos. Sin embargo, a pesar de esa acumulación de saberes, existe poca evidencia escrita; los más importantes son los papiros llamados *Rhind* (Figura II.1) y *Moscow Pappyrus* que se conservan con extremos cuidados en el Museo de Berlín.

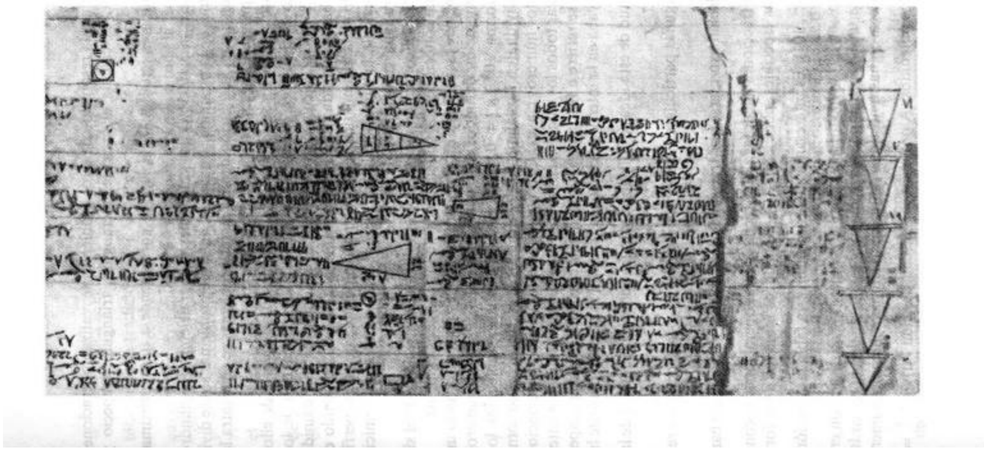


Figura II.1
Papiro de Rhind (Museo Británico).

En Egipto la geometría se desarrolló a partir de problemas prácticos relacionados con el cálculo de magnitudes geométricas pero, por lo general, la forma geométrica del problema era solamente una manera de presentar una cuestión algebraica. Los registros escritos más antiguos muestran que la geometría babilónica del período Semítico contaba con fórmulas para las áreas de figuras rectilíneas y para los volúmenes de sólidos simples; aunque el volumen de una pirámide truncada aún no había sido encontrada. También era conocido el llamado Teorema de Pitágoras, no solamente para casos especiales, sino en su completa generalidad.

Numerosos ejemplos concretos muestran que los Babilonios de 2000 a 1600 aC. estaban familiarizados con las reglas generales para computar el área de un rectángulo, las áreas de triángulos rectángulos e isósceles, y tenían conocimiento de la relación entre los lados de un triángulo rectángulo (Teorema de Pitágoras). Durante la revolución urbana en Mesopotamia y Egipto en los siglos XV (aC.) y precedentes, el trazo de los ángulos de los cimientos bajo las construcciones, por razones de equilibrio, debían ser rectos. En efecto, debieron haber conocido el artificio de la cuerda anudada, pues para trazar un ángulo recto basta tomar una cuerda, hacer trece nudos igualmente espaciados a lo largo de la misma y tenderla de modo que se forme un triángulo con tres tramos en un lado, cuatro en el otro y cinco en el más largo (Sestier, 1983), como se muestra en la Figura II.2.

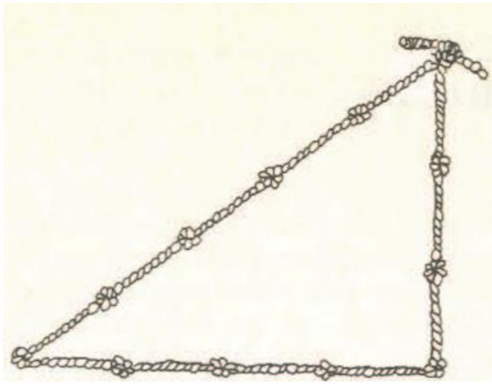


Figura II.2
La cuerda con 13 nudos igualmente espaciados es útil, para trazar un ángulo recto.

Uno de los artefactos más antiguos y fascinantes que se conocen es una tablilla babilónica, ahora conocida con el nombre de Plimpton 322 (Figura II.3), que se conserva en la Universidad de Columbia. En ella aparecen 4 columnas y 15 filas de números. La tablilla está inacabada y podría ser parte de una pieza mayor que se perdió; sin embargo, se puede ver que contiene derivaciones de triplos fraccionarios pitagóricos. Un procedimiento tan sofisticado indica que entre el 1800 a 1650 aC, los babilonios ya dominaban el Teorema de Pitágoras; más de mil años antes del propio Pitágoras.

INDIA

Se cree que el período védico de la civilización India, empezó alrededor del primer milenio aC. Las matemáticas de dicho período están recogidas en el Sulbasutras parte de los apéndices de los Vedas. La mayor parte de ellos se dedican a las matemáticas; su finalidad era asegurar la conformidad con las reglas del ritual. El concepto Sulba designaba la cuerda que se usaba para medir las dimensiones de los altares. Tres son las versiones que se tienen de esos textos, el más antiguo probablemente data del 800-600 aC. Baudhayana (Sestier, 1983) cita explcitamente el teorema de Pitágoras de la siguiente manera: "la cuerda que se estira a través de la diagonal de un cuadrado produce un área que dobla la medida del cuadrado original". Posteriormente, Katyayana da una explicación más genérica: "la cuerda de la diagonal de un rectángulo representa un área como la que los lados vertical y horizontal representan juntos". No muestra ninguna representación, pero describe aplicaciones prácticas.

Figura II.3
Tablilla Babilonia plimpton322.

Además, se sabe que los antiguos hindúes usaron sistemas decimales de numeración sin una notación posicional, formado por los llamados numerales Brâhmi, los cuales se remontan a la época del Rey Asoka (alrededor de 300 aC.). Además encontramos, fórmulas para la construcción de cuadrados, rectángulos y expresiones para la relación de la diagonal a los lados del cuadrado y para la equivalencia de círculos y cuadrados. Tenían cierto conocimiento del Teorema de Pitágoras para casos específicos y había aproximaciones en términos de fracciones unitarias.

CHINA

Se cree que también los Chinos poseían conocimientos matemáticos desde épocas tan antiguas como las de los Egipcios; sin embargo, no existe evidencia escrita de ello, debido, quizás, a los materiales utilizados para la escritura. Los registros escritos más antiguos, datan de siglos cercanos al comienzo de nuestra era, aunque el historiador Skatschkow atribuye a Tschou-Gun, quien vivió 1100 aC., el conocimiento de las características del triángulo rectángulo; además, perfeccionó el mapa de las estrellas y determinó las longitudes del meridiano y ecuador.

La primera parte de los cómputos gnomónicos, contienen es un diálogo entre el duque Zhou Kung y un noble llamado Shang Kao; en el que discuten las propiedades de los triángulos rectángulos. El teorerma de Pitágoras, conocido como el gougou, se establece seguido de una demostración geométrica en la que se usa un proceso denominado "acumulación de rectángulos", acompañado de un diagrama que muestra el método para el triángulo con lados 3, 4 y 5. Otro escritor, Liu Hi, ofrece una segunda demostración geométrica usando el principio de complementariedad extena-interna en que los dos cuadrados mas pequeños se cortan para construir un cuadrado mayor. Por entonces la regla $gou^2 + gu^2 = xian^2$ (nuestro $a^2 + b^2 = c^2$) se usaba en numerosos problemas. Para las matemáticas chinas este teorema era de mucha importancia ya que sirvió de base de otros métodos, como la extracción de raíces cuadradas y las soluciones para ecuaciones de segundo grado (Mankiewicz, 2000).

Sin embargo, en ninguna parte de la antigua matemática oriental encontramos un intento de lo que llamamos una demostración. Se exponía únicamente la descripción de ciertas reglas: "hacer así", "hacer aquello"; no se sabe la manera en que se obtuvieron los resultados. Por ejemplo, ¿cómo llegaron los babilonios al conocimiento del Teorema de Pitágoras? Aunque existen varios intentos por explicar esto, todos ellos son de naturaleza hipotética.

Cabe mencionar que nuestro conocimiento de la matemática griega se debe a Proklos, historiador del siglo V dC.; quien, al parecer, es el responsable de la preservación y publicación de varios textos griegos. En lo que respecta al Teorema de Pitágoras como tal, los pitagóricos atribuyeron su descubrimiento a su maestro, quien se supone que "tuvo que sacrificar 100 bueyes a los dioses como una muestra de gratitud por haberle permitido establecerlo"(Lara, 1991), lo cual, sin duda alguna, debe ser ficción puesto que derramar sangre va en contra de la enseñanza pitagórica; además de ser, vegetarianos, amaban a la vida, plantas y animales.

La primera demostración del Teorema de Pitágoras puede muy bien atribuirse a la Escuela Pitagórica, alrededor de 540 aC. Sin embargo, de acuerdo al historiador Proklos, en realidad se desconoce si la demostración contenida en *Los Elementos* (Proposición 47, Libro I), se debe a Pitágoras, o si éste lo aprendió de los sacerdotes Egipcios o Babilonios. Hoy se acepta que una de las principales acciones de Pitágoras fue haber fundado su escuela que, aunque tenía tintes místicos y religiosos, promovió el estudio de las matemáticas. De esta manera, varios de los resultados contenidos en *Los Elementos* tienen su origen en alguno de los integrantes de dicha escuela que, por más de 200 años, se dedicó al cultivo de la ciencia. Al respecto, Lara (1991) afirma:

> La gran virtud, entre otras, de Pitágoras es que logró demostrar de manera formal, conocimientos dispersos de los cuales no se sabía (y quizá ni siquiera interesaba) su validez en general y cuyo manejo era puramente intuitivo.

Algunos historiadores creen que la demostración dada por Pitágoras, se basa en el principio de congruencia, que describimos a continuación; Consideremos, a saber, dos cuadrados congruentes cuyos lados miden $a + b$ (Figura II.4). Al hacer un reacomodo de los triángulos del primer cuadrado, emerge la solución. Sólo debe justificarse que el cuadrilátero interior del primer cuadrado, es un cuadrado.

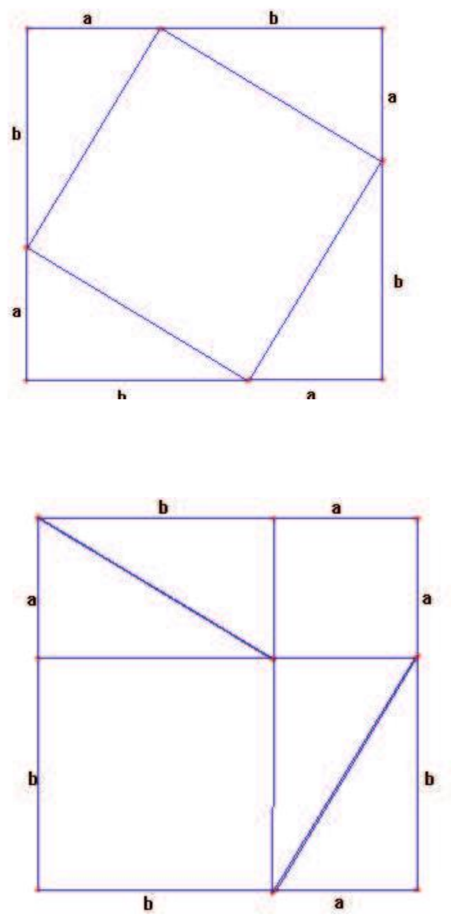


Figura II.4

Demostración del Teorema de Pitágoras.

LA VIDA DE PITÁGORAS

A lo largo de la historia de las matemáticas, Pitágoras es considerado como uno de los primeros matemáticos puros; sin duda, una de las figuras más importantes en el desarrollo de las matemáticas. Quizá el nombre más famoso de los matemáticos para el hombre común (Lara,1991). Sólo se conocen los principales hechos de su vida, existiendo un poco de controversia respecto a las fechas de nacimiento y muerte, que difieren en casi 20 años; sin embargo, se reconoce ampliamente su existencia y se le da crédito histórico.

Figura II.5

Lugares en los que estuvo Pitágoras

Pitágoras nació en el año 569 aC., en la Isla de Samos. Se sabe que sus padres viajaban constantemente a la ciudad de Tiro; bien pudo ser ahí su lugar de nacimiento. Se dice que su padre llamado Menesarco, de ocupación mercader, llevó por vez primera maíz a la ciudad de Samos en una época de hambruna y fue recompensado con la ciudadanía. En esa ciudad, Pitágoras pasó los primeros años de vida (Figura II.5).

A los dieciocho años, Pitágoras tenía que escabullirse por las noches para atravesar la ciudad, pues Samos estaba bajo el poder del tirano Polícrates, para reunirse en la isla de Delos con el filósofo Feréclides, quien le proporcionó enseñanza durante dos años. Después fué a Mileto para recibir tutoría de Tales y su pupilo Anaximandro; para esta época, Tales ya era un anciano y lo asesoró un poco en matemáticas y física. Fue Anaximandro del que tuvo mayor influencia y gusto por la geometría y la cosmología.

Después de este período, hasta su regreso a Samos, no se tiene mucha información pero según (Loomis, 1940), Pitágoras llegó en el año 547 aC. a Egipto y estudió un año en el colegio de sacerdotes en Fenicia; después Polícrates le dio una carta de recomendación para que el faraón de Egipto Amasis lo recibiera en el Templo de sacerdotes de Heliópolis, el cuál tenía buena fama, pero los sacerdotes se negaron a recibirlo por extranjero y sucio (entre otras cosas). Entonces fue enviado al colegio más antiguo de Menfis, donde se encontraba la gran casta de sacerdotes, pero tampoco lo querían recibir; Pitágoras los convenció de que poseía conocimientos importantes. Así, fue aceptado bajo la guía del sacerdote Sonchis.
A partir de sus 21 años, Pitágoras se desarrolló exitosamente en sus estudios, analizando la cultura Egipcia; de hecho, fue uno de los pocos sacerdotes a los que se les dio el más alto rango y mención honorífica.

Amasis murió en el año 527 aC. y el rey Persa Cambises desató toda su furia en contra de la casta de sacerdotes. Todos fueron capturados y hechos prisioneros en Babilonia; Indios, Chinos, Judíos de otras razas. Pitágoras permaneció ahí 12 años, donde tuvo la oportunidad de adquirir conocimientos

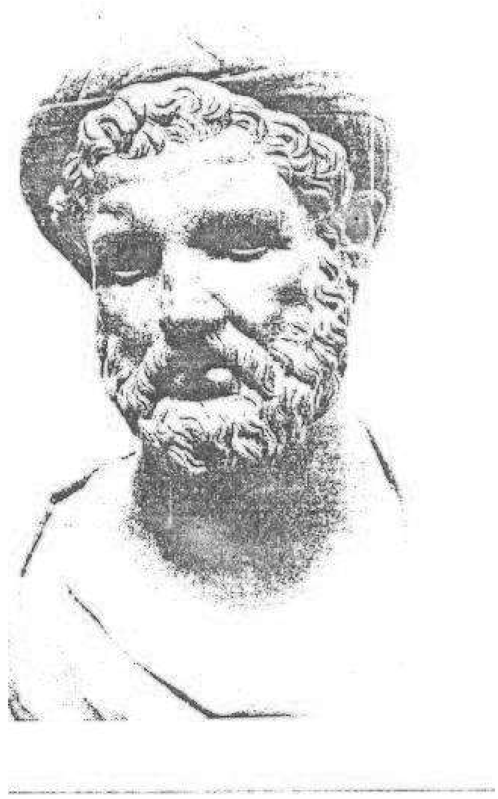


Figura II.6

Busto de Pitágoras, Copia Romana de un original Museo Nacional de Nápoles.

de los Caldeos, fue instruído en sus ritos sagrados, aprendió un místico culto de los dioses, música, perfeccionó su aritmética y otras áreas de matemáticas.

Tenía 56 años cuando Pitágoras abandonó Babilonia y regresó a Samos; no hay explicaciones de cómo es que obtuvo su libertad. Se sabe que Polícrates fue asesinado alrededor de 522 aC. y Cambises murió ese mismo año; Pitágoras fué liberado después de esto, se desconoce si éstos hechos tuvieron alguna influencia.

Después de un corto descanso en Samos, Pitágoras (Figura II.6) fue a la isla de Delos en busca de su maestro Feréclides, al cual encontró todavía vivo; intercambiaron sus conocimientos y viajó a Grecia con el propósito de familiarizarse con las condiciones culturales, sociales y religiosas. En Samos fundó una Escuela llamada el "Semicírculo" de Pitágoras, (hoy en día, todavía se conoce con el nombre de Semicírculo de Pitágoras), donde se reunían para discutir cuestiones sobre el bien, la justicia y la oportunidad del hombre para enfrentarse al mundo; pero no tuvo éxito. Esto causó tristeza a Pitágoras, pues consideró que no se le dió la importancia esperada y recibió un trato irrespetuoso e incorrecto; a pesar de que para cualquier estudiante habría sido una gran fortuna estar al lado de semejante personalidad.

En el 510 aC. Pitágoras llegó a Crotona (Figura II.7) , al sur de Italia, ya con cierto prestigio. Los crotonienses le pidieron que explicara sus ideas, lo hizo a través de cuatro discursos que realizó por separado; a las mujeres, al senado, a los jóvenes y a los niños. El contenido de los discursos estaba constituido por recomendaciones morales para llevar la conducta humana a la armonía y ecuanimidad; esto lo ilustraba con elementos de la mitología crotoniense. Entre las asistentes a sus discursos se encontraba la bella Theano, hija de Milo (posadero que alojaba a Pitágoras) con la cual se casó a sus 60 años; tuvieron dos hijas y un hijo llamado Telauges, de quien se especula fue maestro de Empédocles (González, 2001).

Al poco tiempo, nace la Escuela Pitagórica que atiende a los jóvenes de Crotona, sedientos de conocimiento, quienes encuentran en Pitágoras a su maestro. Fue así que surgió, con el apoyo de otros distinguidos maestros universitarios, el pitagorismo. Algunos de los temas que se enseñaban eran: ética, inmortalidad del espiritu, matemáticas y algunos otros.

Los ideales que mantenía Pitágoras, según el libro "Lives of eminent philosophers"(Laertius, 1958), eran:

1. *En su nivel más profundo, la realidad por naturaleza es matemática.*
2. *La filosofía puede ser usada para la purificación espiritual.*
3. *El alma puede alcanzar la unión con la divinidad.*

figura II.7
Antigua Plaza de Pitágoras en Crotona.

4. *Ciertos símbolos tienen un significado místico.*

5. *Todos los hermanos de la orden deben observar una estricta lealtad y secreto.*

En el 495 aC. Pitágoras fue a Delos para cuidar a su viejo maestro Feréclides, quien estaba muy enfermo. Ahí permaneció unos meses hasta que murió; regresa a Crotona y sigue cultivando a sus estudiantes, contribuyendo al desarrollo de las matemáticas.

Es en 490 aC. cuando la Escuela Pitagórica alcanza la cúspide de esplendor; claro está, que los pitagóricos se reservaban el derecho de admisión de los estudiantes interesados en ingresar, pues debían tener ciertas características intelectuales, sociales y morales. Varios estudiantes no fueron admitidos, tal fue el caso de Cilón, un hombre rico, difícil, violento y dispuesto a la tiranía, quien fue rechazado por defectos de carácter y moral, lo cual engendró rencor y odio. En 490 aC., cuando éste se encontraba a la cabeza del partido democrático de Crotona, actuó en contra de los pitagóricos, confiscó la propiedad de Pitágoras y mandó perseguirlos hasta exterminarlos. Varios huyeron, entre ellos Pitágoras, quien permaneció los siguientes 16 años de su vida en Tarento.

En el 474 aC. el partido democrático triunfó en Tarento y Pitágoras, siendo ya un viejo de 95 años, tuvo que huir a Metaponto, donde vivió miserablemente sus últimos años de vida. La Escuela Pitagórica fue quemada, incluso con algunos discipulos; se dice que Pitágoras escapó de las llamas pero murió al poco tiempo, a la edad de 99 años.

LOS PITAGÓRICOS

Pitágoras y la Escuela Pitagórica influyeron, definitivamente, en la conformación de una sociedad o hermandad. La hermandad pitagórica no nada más fue una de las primeras sociedades científicas cooperativas, no sacerdotales del mundo, sino la primera que tenía carácter secreto, donde todo se compartía, incluso los conocimientos; sus miembros atribuían el trabajo común de todos, por consentimiento mutuo, a su maestro.

Los pitagóricos se regían por un código de conducta muy estricto, que incluía la comunidad de bienes (comunismo integral) y un severo régimen físico y gastronómico. Profesaban la doctrina de la metempsicosis o transmigración de las almas; de manera que, además del amor a la naturaleza y respeto a la vida, tenían otra razón para no sacrificar ningún animal, pues podría ser la nueva morada del alma de un amigo muerto. El principal objeto de la doctrina pitagórica era la purificación del alma o catarsis, de ahí la permanente prosecución de los estudios filosóficos y matemáticos, como base moral en la dirección de la vida. Al parecer las palabras *filosofía* (amor a la filosofía) y *matemáticas* (lo que se conoce, lo que se aprende) fueron acuñadas por el propio Pitágoras para describir sus actividades intelectuales, cumo elementos de elevación moral que culminaban en la amistad, como profundo sentimiento de camaradería que convertía a todos los pitagóricos en hermanos. La comunidad pitagórica vinculaba, íntimamente, lo místico, la religión y la ciencia; la geometría, la música y la cosmología; así como la ritmología donde se busca relacionar los números con los fenómenos naturales.

Hombres y mujeres podían ser miembros de la hermandad, quienes reconocían tener las mismas creencias filosóficas y dedicarse a las mismas investigaciones; se comprometían con un jurameto a no revelar los secretos y enseñanzas de la escuela. Se sabe que hubo miembros desaparecidos o asesinados misteriosamente tras haber revelado alguno de los secretos; un ejemplo de ello fué Hipaso de Metaponto (Lara, 1991), quien fue expulsado por traicionero. Obviamente los encargados de estos sucesos eran los mismos miembros la escuela, quienes temían la divulgación de las "atrocidades" a que habían llegado con su estudio; entre otras cosas, por el descubrimiento de algunos números irracionales que, en esa época, era aberrante, pues creían que la naturaleza era exacta, perfecta y no era "hermoso" encontrar este tipo de números. Paradógicamente, a pesar de ello, en el símbolo distintivo de la Escuela Pitagórica llamado Pentáculo místico (estrella de cinco picos construida sobre los vértices de un pentágono regular), aparece el número de oro, o sección aurea, dado por un irracional:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

El concepto de la hermandad pitagórica, era liberal y humano. Toda su filosofía, de la que las matemáticas eran solamente una parte subordinada, aunque importante, se dirigía al único fin de una vida sana y civilizada. La aritmética, la geometría, la astronomía y la música, eran las cuatro divisiones de sus estudios. Esta tétrada sobrevivió durante siglos y trascendió a través de la Edad Media.

Se cree que llegaron al descubrimiento de *el racional* por medio de segmentos de línea inconmensurables. Este descubrimiento pudo haber sido el resultado de su interés en la media geométrica $a : b = b : c$, que sirvió como un símbolo de aristocracia. ¿Cuál era la media geométrica de 1 y 2, dos números sagrados? Esto condujo a que dicha cantidad no podía ser expresada por un "número", esto es, por lo que ahora llamamos números racionales, que eran los únicos números reconocidos como tales.

Porfirio, en su biografía sobre Pitágoras (Bell, 1949 tomada del testimonio de Diarcos alumno de Aristóteles), resume las enseñanzas del maestro en cuatro puntos:

1. *El alma es inmortal.*
2. *Las almas cambian su lugar, pasando de una forma de vida a otra.*
3. *Todo es cíclico, nada es realmente nuevo.*
4. *Todos los seres animados están emparentados entre sí.*

Para Pitágoras, todas las almas derivaban de una misma alma universal una *pampsiquis*, incluso la de los animales y plantas, de ahí que promoviera la vida vegetariana y el amor hacia el mundo vivo. Por lo mismo, pensaba que al agredir o matar a un animal se destruiría la morada de alguna alma transmigrada. Así podemos decir que las ideas filosóficas de Pitágoras influyeron sobre Platón, pues el mundo de las "ideas" que Platón explica en su libro de *Los Diálogos*, así como la manera de entender el "alma", son parecidos a la doctrina que difundía Pitágoras aproximadamente 100 años antes de que naciera Platón. Dice Bertrand Russell (González, 2001, p. 53) en su libro "Historia de la Filosofía Occidental":

> No conozco ningún otro hombre que haya tenido mayor influencia en el campo del pensamiento, porque lo que aparece como platonismo resulta, después de analizarlo, esencialmente pitagorismo".

Pitágoras se interesó en el concepto de número y en la idea de lo que es una prueba abstracta. Hoy en día, incluso, resulta difícil abstraer al número 1; es decir, podemos determinar fácilmente qué es $1\ manzana + 1\ manzana = 2\ manzanas$ y comprenderlo, para luego pasar a la noción abstracta del resultado es $1 + 1 = 2$, que en sí misma se aplica a cualquier cosa, así como en un sentido tan real como una casa, un clavo. Como escribe Brumbaugh (1981, p. 267):

> Es difícil para nosotros hoy día, familiarizados como estamos con la abstracción matemática pura y con el acto mental de la generalización, apreciar la originalidad de ésta contribución pitagórica.

Así, debido a la importancia que los pitagóricos dieron al número, (Laertius, 1958) Filolao expresó: “Todas las cosas que se conocen, poseen número, pues, ninguna cosa podría ser percibida ni conocida sin éste”

El mismísimo Pitágoras aseveró: “Dios es, en efecto, número”

Pitágoras daba a los números, diferentes diseños y significados caracacterísticos: (González, 2001, p. 90 - 98)

> El **cero** significaba lo absoluto e infinito, el estado latente, previo a la manifestación.
>
> El **uno** se identificó con la razón y se consideraba como el origen de todos los números, principio de todo; el germen del que emanan todas las cosas.
>
> El **dos** es el primer número par y el primer número femenino; es el número de la opinión.
>
> El **tres** es el primer número macho o el número de la armonía, representa la estabilidad, el cimiento donde reposan todas las cosas.
>
> El **cuatro** es la justicia, inmutable y equitativo, la cifra del mundo objetivo y de los elementos.
>
> El **cinco** sugería el matrimonio, la unión del primer número par 2 con el primer número impar auténtico 3.
>
> El **seis** es el número de la creación.
>
> El **siete** es el único de la década que no tiene ni factores ni producto, y se le asoció con la salud, pero también con el septenario divino, símbolo del hombre perfecto y, a la vez, del Universo.

El **ocho** o doble cuadrado, símbolo de la pureza, de la igualdad entre los hombres y del amor.

El **nueve** es la triple trinidad, símbolo de la justicia.

El **diez** *Tetractys sagrado*, fué un símbolo muy venerado por la hermandad. La virtud de este número es que es la suma de los cuatro primeros: $1+2+3+4$ encierra la naturaleza de las diversas especies de números; son la suma de todas las posibles dimensiones geométricas (Lara, 1991). Además, tiene la misma cantidad de números primos que no primos.

Pitágoras fue capaz de hacer abstracciones con algunas propiedades de los números que lo llevaron a la siguiente proposición:

Un número se llama perfecto si es igual a la suma de sus divisores propios; por ejemplo $6 = 1+2+3$ y $28 = 1+2+4+7+14$ son dos números perfectos. Los números que no son perfectos son excesivos o defectuosos, ya sea porque la suma de sus divisores propios es menor que el número; o bien, porque la suma de sus divisores propios es mayor que el mismo número. Así, el 8 es un número excesivo porque la suma de sus divisores propios es igual a 7 mientras que 12 es defectuoso porque la suma de sus divisores propios es igual a 16.

Por otra parte, se dice que cuando se le preguntó a Pitágoras ¿qué es un amigo?, contestó "un segundo yo" y como ejemplo dio dos números, el 220 y el 284. A estos números los llamó amigables; dos números son amigables cuando la suma de los divisores propios de uno de ellos nos da el otro y viceversa. Los divisores propios de 284 son 1,2,4,71 y 142, los que al sumarse dan 220; mientras que los divisores propios de 220 son 1,2,4,5,10,11,20,22,44,55 y 110, siendo su suma igual a 284 (Lara, 1991). Antes que Pitágoras, estos números fueron conocidos por los hindúes y por los hebreos, quienes también les concedieron ciertas influencias favorables.

Pitágoras también se inteteresó por la teoría matemática de la música; de hecho, tocaba la lira y era considerado como buen músico. Se le adjudica el descubrimiento de las progresiones armónicas que hay en las notas de la escala musical, mediante la relación existente entre la longitud de la cuerda y el tono que producía al vibrar. La aportación de los pitagóricos a la música fue tan importante que, por ejemplo, se reconoce que "...hace dos mil quinientos años la música se identificaba con las matemáticas de entonces; la Escuela Pitagórica creó a ambas con los mismos principios" (Lara, 1983).

Otro tipo de problemas que interesó a Pitágoras fue el denominado *método de aplicación de áreas*, que proporcionaba el equivalente geométrico de la resolución de una ecuación cuadrática en álgebra. Como se explica en Vera (1961):

> El problema principal consistía en trazar, sobre una línea recta dada, una figura que tuviera el tamaño de una figura dada y la forma de otra también dada. En el curso de la resolución debía ocurrir una de las tres cosas que siguen:
>
> La base de la figura construída se ajustaría
>
> La base sería demasiado corta
>
> La base excedería a la longitud de la línea recta

Pitágoras consideró apropiado llamar la atención sobre estas tres posibilidades. Fue el primero en introducir los términos: *parábola,*
elipse e hipérbola. Muchos años más tarde su nomenclatura fue adoptada por Apolonio, el gran estudioso de las secciones cónicas, porque las tres características citadas triples se presentaban en la construcción de estas curvas.

El símbolo distintivo de la hermandad pitagórica era la hermosa estrella pentagonal (Pentáculo Místico) que llamaban pentagrama, el cual resulta del trazo de las diagonales de un pentágono regular. En sus cinco vértices, solían colocar las letras de la palabra *ugeia* que significa salud. Para los pitagóricos, como para muchas otras sociedades posteriores, el pentagrama era el símbolo del micócosmos y de la euritmia viva. Se consideraba un símbolo universal de salud, belleza y amor. Esta figura contiene 25 triángulos áureos y 20 secciones áureas, que es la razón de la diagonal al lado de un pentágono, utilizada en la estética clásica. Se obtiene al dividir un segmento en dos partes, de manera que la parte mayor sea a la menor como el segmento total es a la parte mayor.

Los pitagóricos creían también que el movimiento de los planetas se podía reducir a relaciones numéricas y que los cuerpos que se movían en el espacio producían sonidos que variaban proporcionalmente a su distancia de la Tierra. Todos esos sonidos se concertaban para crear una música sublime,(Figura II.8) la música de las esferas, "inaudible para nosotros porque somos como el herrero y sus ayudantes, que han dejado de oír los ruidos que permanentemente los rodean ya que no los pueden contrastar con el silencio" (González, 1991). La armonía de las esferas es mucho más profunda que la simple conjetura fantasiosa, cargada de lírica, de la consonancia musical que los astros producen en su movimiento, ya que implicaría la necesaria armonía del hombre consigo mismo y con su entorno de acuerdo con el orden natural de las cosas. La armonía cósmica resultaría, en la teoría pitagórica, de la observación científica de la congruencia entre los números, las figuras y las notas musicales y su extrapolación al universo entero, amalgamadas con las ideas orientales sobre el alma, los astros y la divinidad. El número era entramado inteligible de las formas geométricas, así como el revelador de las proporciones que rigen las consonancias musicales (Figura II.8); resultaba lógico ver en el número el principio mediante el cual el cosmos divino, regido por el espíritu, manifestaba al hombre su armonía interna. La razón de los pitagóricos para estudiar el cosmos era ponernos a nosotros mismos en estrecha armonía con sus leyes. La palabra *armonía*, término clave de los pitagóricos, significaba, en principio, acoplamiento o adecuación entre sí de las cosas; es decir, sentir en su interior un equilibrio como el del cosmos. Tal vez Pitágoras se inspiró en la mitología, puesto que en el himno de Ares, Homero se dirige a los planetas como si fueran un coro de voces divinas. Además, conocemos la afición de los pitagóricos en los ritos de Orfeo, vinculados al poder del número y de la música. De modo que Pitágoras racionalizaría el sistema y le daría su valor místico científico a través del número de oro. Según cuentan Porfirio y Jámblico de un pasaje que toman de Nicómaco: (González, 2001, p.137)

> *"Pitágoras dirigía su oído y su espíritu hacia las sublimes consonancias del cosmos, gracias a una inefable capacidad divina difícil de imaginar. Con ello oía y entendía él solo, según explicaba, toda la armonía y el concierto de las esferas y los astros que en él se mueven".*

Figura II.8
Leccion de música en la época pitagórica, en una hidria de cerámica griega del siglo VI a.C..

Esta proporción o razón áurea era fundamental para Pitágoras, pues era sinónimo de armonía y simetría. Tanto en la naturaleza como en la arquitectura y escultura, desarrollada por los griegos; en ella se encuentra una proporcionalidad asombrosamente perfecta: el cuerpo humano fué considerado como un ejemplo perfecto de simetría, ya que varias partes del cuerpo son proporcionales como el brazo y el antebrazo, la estatura del humano en comparación a la distancia del ombligo a los pies; el nautilius; el trazo de Partenón, etc.

Se dice que en sus investigaciones, Pitágoras primero se fijaba en las relaciones que pudieran existir de esta proporcionalidad, tal fue el caso del famoso teorema que lleva su nombre (Porphyry, 1965)

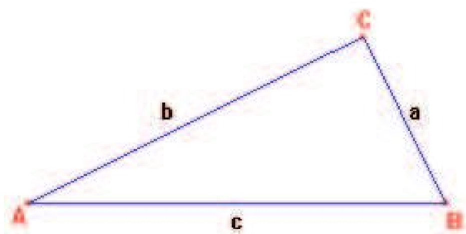
CAPÍTULO III

DEMOSTRACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

A continuación presentamos las proposiciones habituales que enuncian el Teorema de Pitágoras o que se refieren a él, con su demostración correspondiente. La numeración de los Teoremas no van de acuerdo al grado de importancia, primero se enunciarán las demostraciones algebraicas, en cada una se hacen comentarios sobre el nivel escolar en que es apropiado presentarlo y algunas sugerencias didácticas para su uso.
En cada caso, se identificará el tipo de argumentación utilizada.

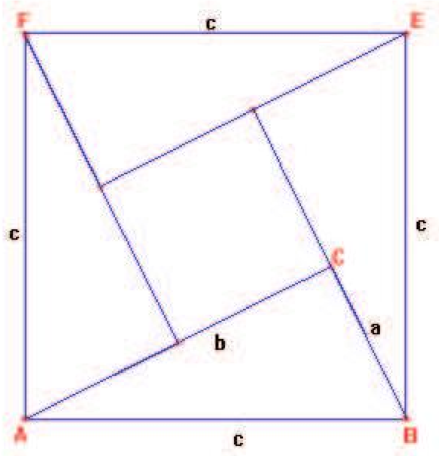
El primero, involucra argumentos geométricos basados en una construcción, en las nociones de congruencia de triángulo y del área de un cuadrado; puede ser utilizado en 1er año de bachillerato, preferentemente, aunque los pre requisitos están presentes desde 3^o de secundaria a un nivel menos formal.

1.$-$**Teorema** : Si c es la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, a y b las medidas de los catetos, entonces se cumple la igualdad $c^2 = a^2 + c^2$.



Demostración.
Sea ABC un triángulo rectángulo en C. Sobre la hipotenusa AB construímos el cuadrado $ABEF$. Desde F trazamos un segmento perpendicular a AC, desde E otro segmento perpendicular a la anterior y desde B otra perpendicular más, a ésta última. Ahora bien los cuatro triángulos que se forman son

congruentes entre sí, por el criterio de congruencia LAL.



Luego, la figura de enmedio es un cuadrado de lado $b - a$. Consecuentemente por suma de áreas

$$c^2 = 4(\frac{1}{2}ab) + (b - a)^2$$

Desarrollando tenemos que

$$c^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2 = b^2 + a^2$$

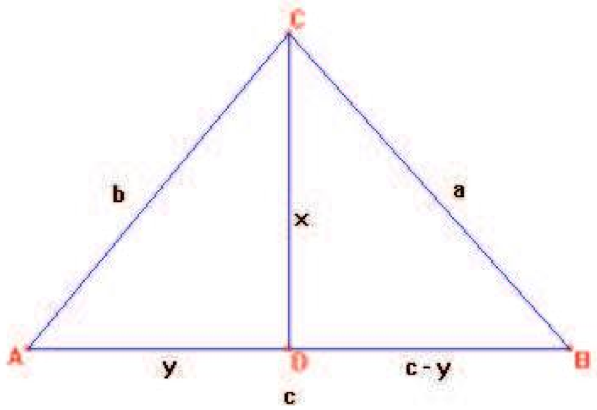
Es decir

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

⅄ ⅄

El siguiente enunciado del teorema atribuído a Lagrange, usa la noción de semejanza y depende de la manipulación algebraica de las proporciones obtenidas. Puede ser utilizado en el nivel medio superior.

2.−Teorema : Sea un triángulo ABC, rectángulo en C, con lados $AB = c$, $BC = a$ y $CA = b$, si trazamos la perpendicular CD a AB, obtenemos así tres triángulos semejantes; entonces $c^2 = a^2 + b^2$.



Demostración.

La altura CD determina dos triángulos que son semejantes con el ΔABC. Efectivamente, aplicando el criterio de semejanza AAA, $\Delta ABC \sim \Delta ACD$; y $\Delta ABC \sim \Delta CBD$, es decir, tenemos una triple semejanza $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$. Si establecemos la proporcionalidad correspondiente entre los dos primeros triángulos, tenemos:

$$\frac{y}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow cy = b^2 \tag{1}$$

Relacionando el primero y el tercero tenemos:

$$\frac{c-y}{a} = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad c(c-y) = a^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 - cy = a^2 \tag{2}$$

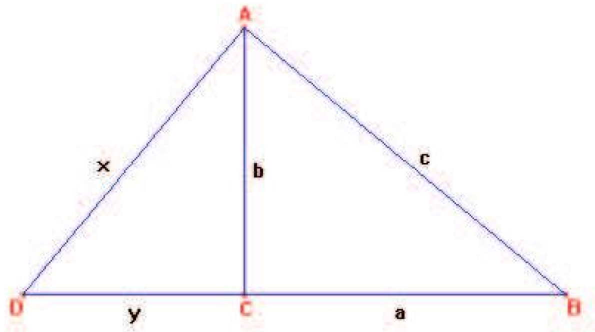
Si sumamos las ecuaciones (1) y (2) obtenemos la ecuación de pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

⅄ ⅄

El siguiente teorema utiliza la noción de semejanza entre tres triángulos rectángulos, relacionando los lados entre éstos y utilizando algebra elemental. Puede ser utilizado en nivel medio superior o incluso, a partir de 3^o de secundaria.

3.−Teorema : Sea un triángulo ABC, rectángulo en C con lados $AB = c$, $BC = a$ y $CA = b$, trazamos una perpendicular a AB desde A que corta a la prolongación de BC en D, obtenemos así tres triágulos semejantes; entonces $c^2 = a^2 + b^2$.



Demostración:

Tenemos tres triángulos semejantes por el criterio de semejanza AAA; $\Delta ABC \sim \Delta DAC \sim \Delta DBA$, entonces, al relacionar sus lados tenemos:

$$\frac{c}{y+a} = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow c^2 = ay + a^2 \tag{1}$$

$$\frac{b}{y} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow b^2 = ay \tag{2}$$

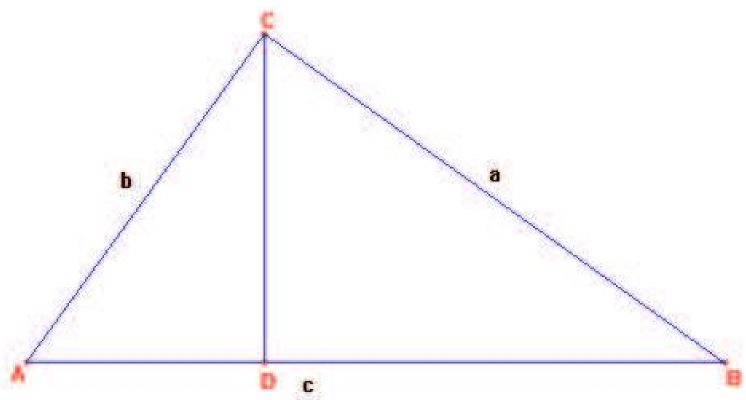
Si restamos las ecuaciones (1) y (2) obtenemos la ecuación pitagórica:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

⅄ ⅄

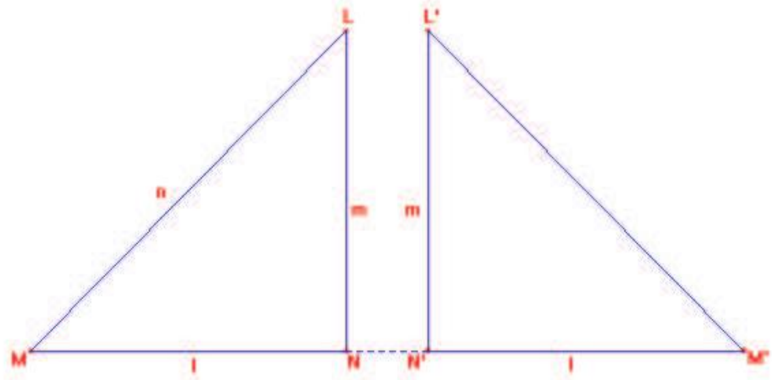
El enunciado siguiente parte de suponer cierta la relación pitagórica entre los lados de un triángulo, para luego establecer la semajanza entre los tres triángulos; al hacer sustituciones y proceder algebraicamente se llegará a una igualdad verdadera. De aquí se deduce que la hipótesis es verdadera, pues si partimos de suponer cierto el teorema de Pitágoras y se manipula algebraicamente las proporciones y se llega a una igualdad verdadera en la construcción de la figura, entonces quiere decir que si llegamos a algo cierto es porque lo que supusimos al principio es verdadero. Esta presentación puede ser utilizada en nivel medio superior.

$4-$ **Teorema** : Si se supone que en el ΔABC se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$, entonces $AB \ = \ AD + DB$.



Demostración:
Primero debemos mostrar el recíproco del Teorema de Pitágoras; es decir, que si en el ΔLMN se cumple la relación $l^2 + m^2 = n^2 \Rightarrow \sphericalangle LNM$ es recto.

Dado el ΔLMN, en un punto N' sobre la prolongación de MN trazamos $N'M' = NM$ y sobre la perpendicular en N' trazamos $N'L' = NL$. Dibujamos el segmento $L'M'$ para formar el $\Delta L'M'N'$. Aplicando la hipótesis $l^2 + m^2 = (L'M')^2$ pero también $l^2 + m^2 = n^2 \Rightarrow (L'M')^2 = n^2$, de ahí que $L'M' = n$. Aplicando el postulado de congruencia LLL, $\Delta LMN \sim \Delta L'M'N'$ y por lo tanto $\sphericalangle LNM = \sphericalangle L'N'M' \therefore \sphericalangle LNM$ es recto.



Ahora que ya sabemos que el ΔABC es rectángulo en C, trazamos $CD \perp AB\ en\ D$, y por el criterio de semejanza AAA los tres triángulos son semejantes $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$. Aplicando el Teorema de Pitágoras a los tres triángulos:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2, \qquad AC^2 = AD^2 + CD^2, \qquad BC^2 = BD^2 + CD^2$$

sustituyendo en la primer igualdad,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = AD^2 + CD^2 + BD^2 + CD^2 = AD^2 + BD^2 + 2CD^2 \quad (1)$$

Por semejanza en los triángulos ΔACD y ΔCBD tenemos que:

$$\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD} \quad \Rightarrow \quad CD^2 = (AD)(BD)$$

sustituyendo en (1):

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2CD^2 = AD^2 + BD^2 + 2(AD)(BD) =$$

$$= AD^2 + 2(AD)(BD) + BD^2 = (AD + BD)^2$$

De aquí entonces tenemos que:

$$AB = AD + DB$$

⅄ ⅄

El siguiente enunciado del teorema parte de la igualdad obtenida en el teorema anterior y utiliza un teorema de semejanza de triángulos; mediante desarrollos algebráicos se llega a la relación de Pitágoras. El enunciado es el recíproco del anterior; puede ser utilizado a partir del nivel medio superior.

5. – Teorema : Si $AB = AD + DB$ en el triángulo ABC rectángulo en C, si $CD \perp AB$ en D, entonces $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Demostración:

Nos basaremos en la figura y en el teorema anterior. Por el teorema de semejanza AAA, tenemos: $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$. Como $AB = AD + DB$ entonces:

$$AB^2 = (AD + DB)^2 = AD^2 + BD^2 + 2(AD)(BD) \tag{1}$$

De la semejanza $\Delta ACD \sim \Delta CBD$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD} \quad \Rightarrow \quad CD^2 = (AD)(BD)$$

sustituyendo en (1):

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2CD^2 \tag{2}$$

De la semejanza $\Delta ACD \sim \Delta ABC$. tenemos la siguiente relación:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AC}{BC} \quad \Rightarrow \quad AD^2 = \frac{AC^2}{BC^2} CD^2$$

De la sejemanza ΔCDB y ΔACB obtenemos:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BC}{AC} \quad \Rightarrow \quad BD^2 = \frac{BC^2}{AC^2} CD^2$$

sustituyendo en (2)

$$AB^2 = \frac{AC^2}{BC^2}CD^2 + \frac{BC^2}{AC^2}CD^2 + 2CD^2 \tag{3}$$

También:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CD} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BC^2}{CD^2} \quad \therefore \quad AB^2CD^2 = BC^2AC^2$$

despejando:

$$CD^2 = \frac{1}{AB^2}(BC^2 \cdot AC^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{AB^2} = \frac{CD^2}{BC^2 \cdot AC^2}$$

Así la relación (3) puede escribirse:

$$AB^2 = \frac{CD^2}{AC^2BC^2}(AC^4 + 2AC^2BC^2 + BC^4) == \frac{(AC^2 + BC^2)^2}{AB^2}$$

entonces así obtenemos que:

$$AB^2 = \frac{(AC^2 + BC^2)^2}{AB^2}$$

finalmente:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

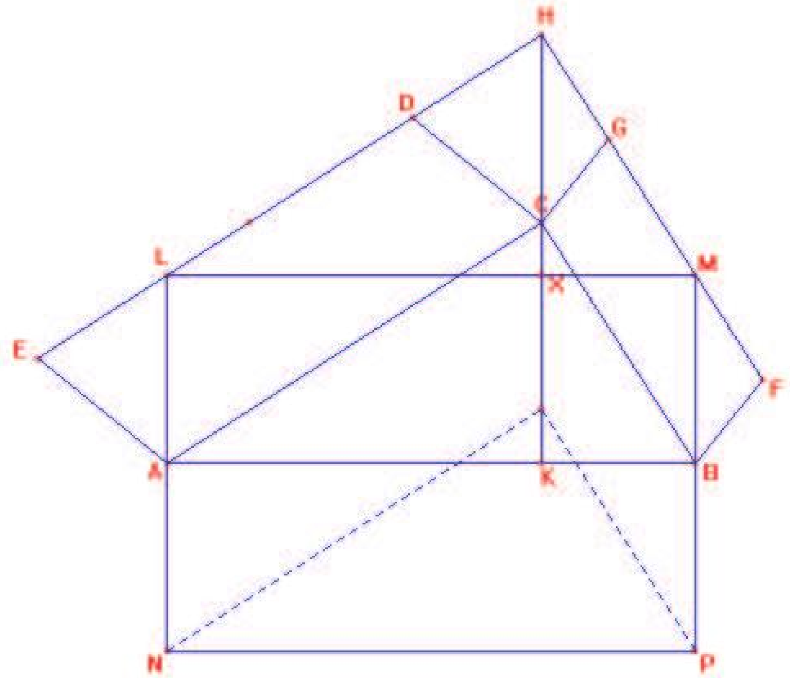
⅄ ⅄

En el siguiente enunciado del teorema se utilizan nociones de geometría analítica y una propiedad de igualdad de áreas de paralelogramos, llegando así a una generalización del Teorema de Pitágoras. Puede ser utilizado a partir del 2^o año del nivel medio superior.

6. – **Teorema** : Dado un triángulo, si se construyen paralelogramos cualesquiera sobre sus dos lados menores, entonces se puede construir sobre el tercer lado un paralelogramo cuya área será igual a la suma de las áreas de los otros dos.

Demostración:

En el triángulo ABC se construyen los paralelogramos ACDE y BCGF, sobre los lados AC y BC respectivamente. Si prolongamos ED y FG se cortan en el punto H, se traza HC se prolonga hasta intersecar a AB en el punto K; ahora se trazan AL y BM paralelas a KH. Como ACDE Y ACHL son paralelogramos que tienen la misma base, sus áreas son iguales[1]. También BCGF y BCHM son paralelogramos con base BC, entonces tienen ŕeas *iguales*[1]. Si prolongamos LA hasta N y MB hasta P de modo que LA=AN y MB=BP, al trazar NP formamos el paralelogramo ABPN congruente con ABML



Ahora aplicamos la misma propiedad a los paralelogramos ACHL y AKXL; y

[1]propiedad de los paralelogramos derivada del teorema: Si dos o más paralelogramos tienen la misma base e igual altura, entonces tienenla misma área

a BCHM y BKXM: área(ACHL)=área(AKXL)=área(AKYN)
área(BCHM)=área(BKXM)=área(BKYP)

sumando obtenemos:

área(ACDE)+área(BCGF)=área(AKYN)+área(BKYP)=área(ABPN)

⅄ ⅄

En el siguiente enunciado se utilizan nociones y propiedades de áreas de paralelogramos y de tríangulos congruentes. Esta es la versión del Toermea de Pitágoras que aparece en los Elementos de Euclides; Proposición 47 del libro I. Creemos que puede ser utilizado en nivel medio superior.

7. – **Teorema** : Si un triángulo es rectángulo, entonces la suma de los cuadrados de los lados que forman el ángulo recto (catetos) es igual al cuadrado del tercer lado (hipotenusa).

Demostración:

La demostración que aparece en Los Elementos consiste en hacer ver que el área del cuadrado ACDE, es igual a el área del rectángulo AFGK. Por el Postulado de congruencia LAL, $\Delta AEB \cong \Delta ACF$, entonces estos triángulos tienen la misma área. Además,

$$EA \parallel DB \quad \Rightarrow \ \acute{A}rea(\Delta AEB) = \acute{A}rea(\Delta AEC),$$

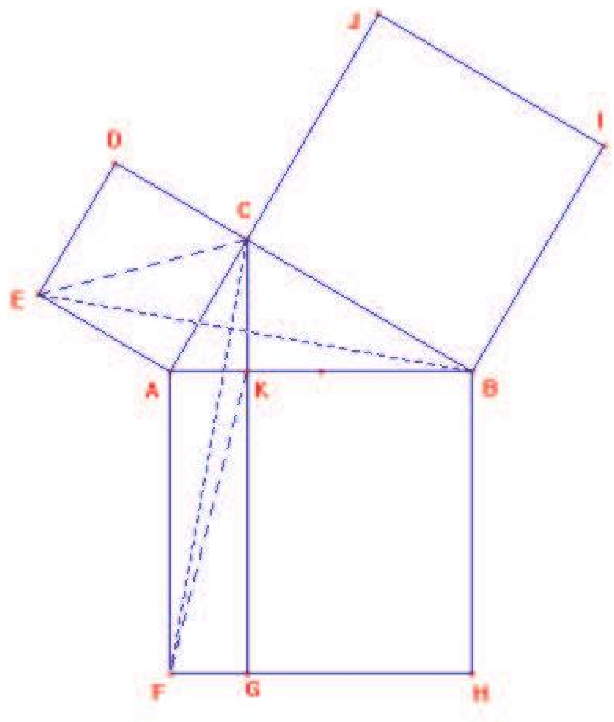
por tener la misma base e igual altura. También como:

$$AF \parallel CG \quad \Rightarrow \ \acute{A}rea(\Delta ACF) = \acute{A}rea(\Delta AKF).$$

De ahí que

$$\acute{A}rea(\Delta AEC) = \acute{A}rea(\Delta AKF);$$

y por lo tanto, el área del cuadrado ACDE es igual al área del rectángulo AFGK. De manera similar, con los trazos que aparecen en la siguente figura, se demuestra que área del cuadrado BCJI es igual al área del rectángulo BKGH.

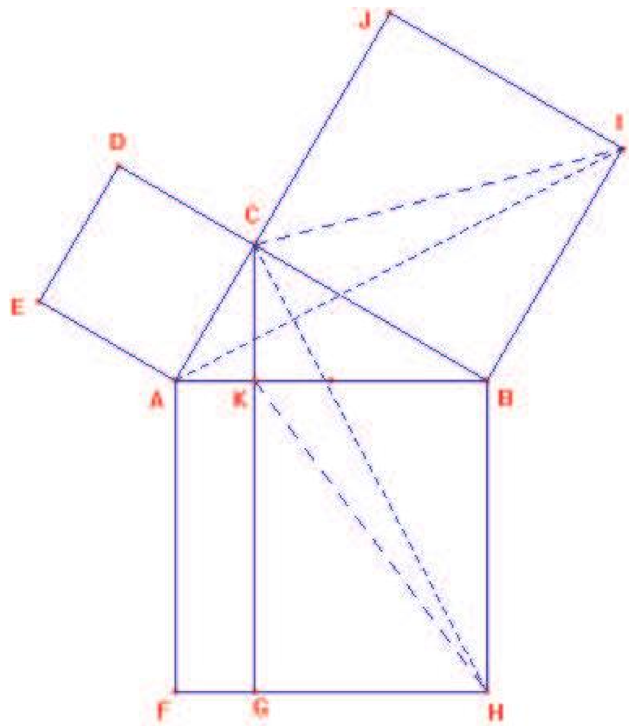


Por la suma llegamos a : $\acute{A}rea(AFGK) + \acute{A}rea(BKGH) = \acute{A}rea(ABHF)$; si llamamos a,b y c a las longitudes de los lados,

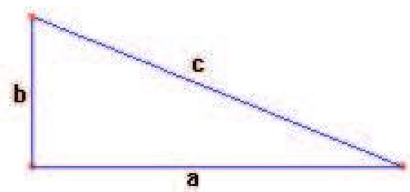
$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$$

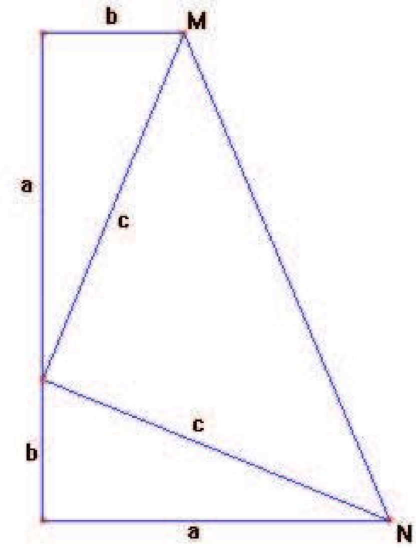
⅄ ⅄

En el siguiente enunciado del teorema atribuído a J.A.Garfield (vigésimo presidente de los EEUU),éste es un ejemplo de cuando los líderes gustaban de una educación cláisca, en esta demostración se utilizan fórmulas de áreas de figuras simples y sumas de áreas, para obtener así la relacion pitagórica. Puede utilizarse desde la secundaria.



8. – **Teorema** : Sea el triángulo rectángulo de lados $a,\ b\ y\ c.$ Si lo giramos 90° alrededor del vértice del ángulo recto y lo trasladamos verticalmente, una distancia $a + b$, de manera que los vértices de ángulos agudos coincidan, luego si se unen los puntos M y N para obtener un trapecio, entonces $a^2 + b^2 = c^2$.





Demostración:

Utilizando la fórmula de área del trapecio:

$$\acute{A}rea(trapecio) = \frac{(a+b)}{2} \cdot (a+b) = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + ab \tag{1}$$

Por otro lado, dicha área es la suma de las áreas de los tres triángulos rectángulos:

$$suma\ de\ \acute{a}reas = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2} \tag{2}$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2) tenemos:

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + ab = ab + \frac{c^2}{2}$$

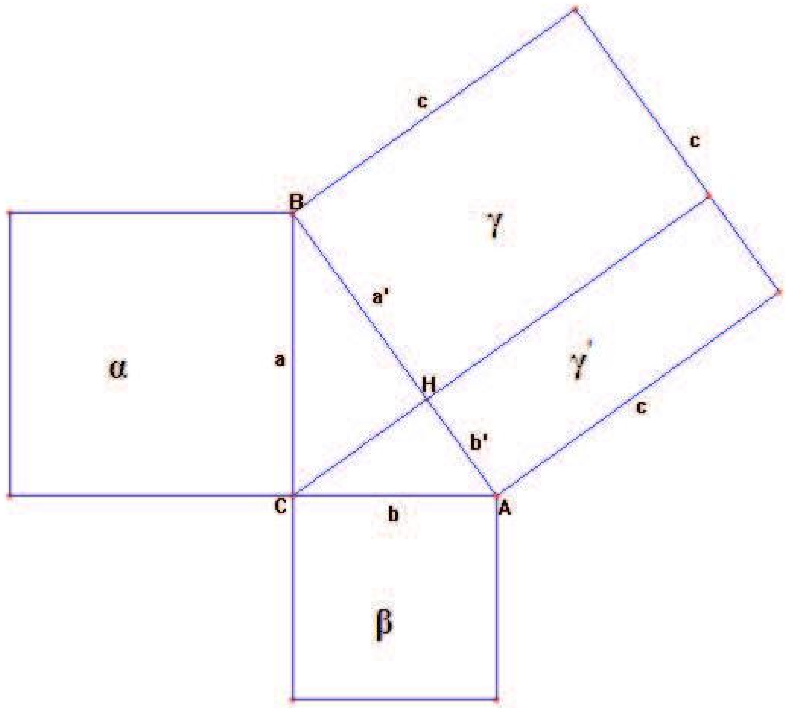
Entonces:

$$\therefore \quad a^2 + b^2 = c^2$$

⅄ ⅄

El enunciado siguiente utiliza la noción de semejanza de triángulos, y sus áreas, para llegar así a la relación de Pitágoras. Puede ser utilizado en nivel medio superior.

9.−Teorema : Sea el triángulo rectángulo ABC, se construyen tres cuadrados sobre cada uno de los lados. Desde C se traza una perpendicular a AB que divide al cuadrado de lado c en dos rectángulos cuyas áreas son γ y γ'. Si α representa el área del cuadrado de lado a y β el área del cuadrado de lado b, entonces la suma de α y β será igual al área del cuadrado c.



Demostración:

Los triángulos rectángulos ABC y CBH son semejantes por AAA, entonces

$$\frac{BH}{BC} = \frac{BC}{BA}$$

Es decir si $BH = a'$

$$\frac{a'}{a} = \frac{a}{c} \quad \therefore \quad a^2 = a'c \tag{1}$$

De esta relación tenemos que α es igual a γ.

De la misma manera, a partir de los triángulos ABC y ACH, semejantes por AAA, tenemos la relación:

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

es decir, si $b' = AH$

$$\frac{b'}{b} = \frac{b}{c} \quad \therefore \quad b^2 = b'c \tag{2}$$

De esta relación deducimos que β es igual a γ'. Sumando α y β a patir de (1) y (2)

$$a^2 + b^2 = a'c + b'c = (a' + b')c = c^2 \quad \therefore \quad a^2 + b^2 = c^2$$

⅄ ⅄

En el siguiente enunciado se utiliza semejanza de triángulos y mediante la relación de sus lados se llega a la relación de Pitágoras. Puede ser utilizado en nivel medio superior, aunque los prerequisitos están presentes desde 3° de secundaria.

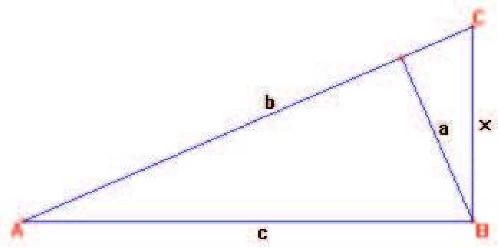
10. – Teorema : Sea el triángulo ABH rectángulo en H, prolongamos AH hasta C de tal manera que CB sea perpendicular a AB en B. Denotaremos a BH, HA, AB, BC y CH como a, b, h, x e y, respectivamente, entonces de diferentes maneras se cumple la relación de Pitágoras.

Demostración:

Los triángulos ABH, ACB y BCH son semejantes por el criterio de semejanza AAA; tomando parejas de estos triángulos, tenemos:

$$\frac{b}{h} = \frac{a}{x} \quad \Rightarrow bx = ah \tag{1}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{y} \quad \Rightarrow by = a^2 \tag{2}$$



$$\frac{h}{a} = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \ hy = ax \tag{3}$$

$$\frac{b}{h} = \frac{h}{b+y} \quad \Rightarrow \ b^2 + by = h^2 \tag{4}$$

$$\frac{h}{a} = \frac{b+y}{x} \quad \Rightarrow \ hx = ab + ay \tag{5}$$

$$\frac{x}{b+y} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \ x^2 = by + y^2 \tag{6}$$

Si restamos (4) de (2), obtenemos la relación de pitágoras:

$$a^2 - h^2 = by - b^2 - by \ \therefore \ \ a^2 - h^2 = b^2 \quad \Rightarrow \ a^2 + b^2 = h^2$$

También, si restamos la relación (6) de la (2):

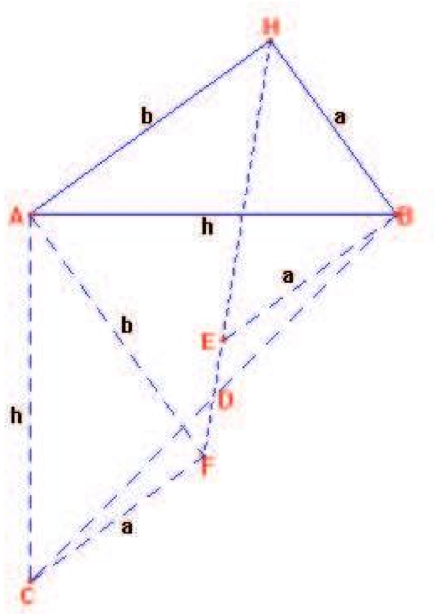
$$a^2 - x^2 = by - by - y^2 \quad \therefore a^2 - x^2 = -y^2 \Rightarrow \ a^2 + y^2 = x^2$$

Este enunciado es ampliamente trabajado por Loomis (1940, p.25) y prueba que en un conjunto de tres triángulo rectángulos semejantes, donde cualquiera dos de ellos tienen un lado común, existen 90 formas de probar que $h^2 = a^2 + b^2$.

⅄ ⅄

En el siguiente enunciado utilizamos semejanza de triángulos y paralelogramos, relacionamos la suma de sus áreas y llegamos al Teorema de Pitágoras. Puede ser utilizado en nivel medio superior y superior.

11. − **Teorema** : Sea el ΔBAH un triángulo rectángulo en H, si se construye un cuadrilátero BHAC con uno de sus lados perpendicular e igual a AB, y se construyen dos triángulos ΔACF y ΔEBH con uno de sus lados igual a HB y paralelo a AH, entonces $h^2 = a^2 + b^2$.



Demostración:

Trazamos desde A un segmento perpendicular e igual a AB, desde C trazamos un segmento igual a HB y paralelo a AH, se unen $CB, AFyHF$, por último se traza una paralela a AH desde el punto B que intersecte a HD e igual a BH, así obtenemos que:

$$el\ \Delta EBD \cong \Delta CFD$$

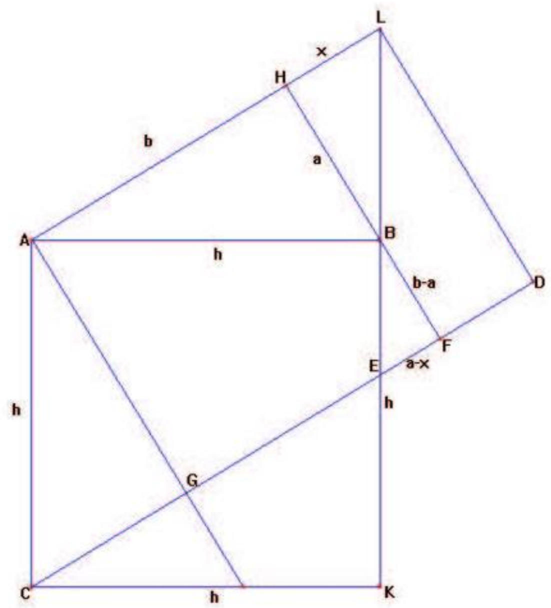
Si igualamos las áreas de los triángulos que comprende AHBC, tenemos:

$$\Delta ABH + \Delta CBA = \Delta HEB + \Delta HFA + \Delta ACF \quad \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}h^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab \quad \therefore \quad h^2 = a^2 + b^2$$

⅄ ⅄

En el enunciado siguiente utilizamos trazos de paralelas, perpendiculares y con las figuras formadas relacionamos sus áreas con una de las propiedades de los paralelogramos. Debido a las estrategias algebraicas que se deben realizar sugerimos utilizarlo en el nivel superior.

12. – **Teorema** : Sea el triángulo ABH rectángulo en H, se construye un cuadrado de lado h sobre AB, luego se prolonga AH y KB hasta su intersección; por C se traza una paralela a AL, desde A se traza una perpendicular a CD, y desde L una paralela a HB, prolongamos HB hasta la intersectar CD. Entonces se forman dos paralelogramos FDLH y AGFH cuya suma de sus áreas será igual a ACKB.



Demostración:

Si llamamos x al segmento HL que es igual a FD, el área del paralelogramo FDLH será:

$$\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ab - \Big(\frac{1}{2}(a-x)(b-a)\Big) = xb$$

$$\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ab - \Big(\frac{1}{2}ab - \frac{a^2}{2} - \frac{xb}{2} + \frac{ax}{2}\Big) = xb$$

$$\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ab + \frac{a^2}{2} + \frac{xb}{2} - \frac{ax}{2} = xb$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{a^2}{2} + \frac{xb}{2} = xb \quad \Rightarrow \qquad \frac{a^2}{2} = \frac{xb}{2}$$

$$por\ lo\ tanto: \quad a^2 = xb \tag{1}$$

El área del paralelogramo ACEL es igual al área del paralelogramo AGDL:

$$\acute{A}rea(Paralelogramo)\ ACEL\ = \acute{A}rea(Paralelogramo\ AGDL)$$

$$y \quad \acute{A}rea(Paralelogramo\ ACEL)\ =\ \acute{A}rea(CuadradoACKB)$$

$$\therefore\ \acute{A}rea(CuadradoACKB)\ = \acute{A}rea(ParalelogramoACEL)\ =$$

$$= \acute{A}rea(Paralelogramo\ AGDL)$$

$$\Rightarrow\ \acute{A}rea(CuadradoACKB) = \acute{A}rea(ParalelogramoAGDL),$$

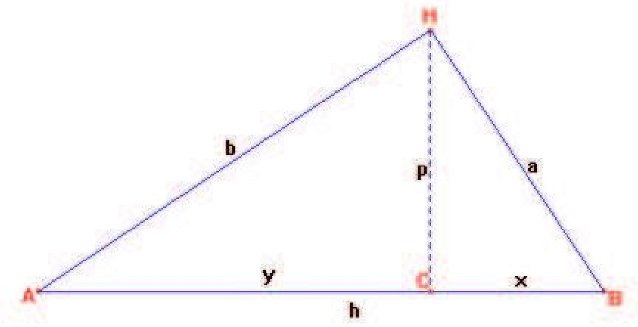
$$y\ \ como\ \ \acute{A}reaParalelogramoAGDL\ =\ b^2 + xb,$$

Por (1):

$$\Rightarrow \quad \acute{A}rea(Cuadrado\ ACKB)\ =\ b^2 + a^2 \quad \therefore \quad h^2 = b^2 + a^2$$

⅄ ⅄

En el enunciado siguiente se utiliza semejanza de triángulos y mediante la relación entre los lados se llega a la relación de Pitágoras. Puede ser utilizado desde el nivel medio superior.



13. – **Teorema** : Sea el triángulo ABH rectángulo en H, se traza una perpendicular a AB desde el punto H; si llamamos $CB = x,\ CA = y\ \ HC = p$, entonces $h^2 = a^2 + b^2$.

Demostración:

Por el Teorema de semejanza LAL, $\Delta BCH \sim \Delta HCA \Rightarrow \frac{x}{p} = \frac{p}{y} \quad \therefore\ p^2 = xy$

$$También\ \Delta HBC \sim \Delta ABH \Rightarrow \ \frac{a}{x} = \frac{x+y}{a} \quad \Rightarrow \quad a^2 = x(x+y)$$

De ahí que :

$$\Rightarrow \ x^2 + p^2 = x^2 + xy = x(x+y) = a^2 \tag{1}$$

$Además,\ \ \Delta HAC \sim \Delta BAH\ \ \Rightarrow$

$$\frac{b}{y} = \frac{x+y}{b} \quad \Rightarrow \quad b^2 = y(x+y)$$

$$Porlotanto,\ \ y^2 + p^2 = y^2 + xy = y(x+y) = b^2 \tag{2}$$

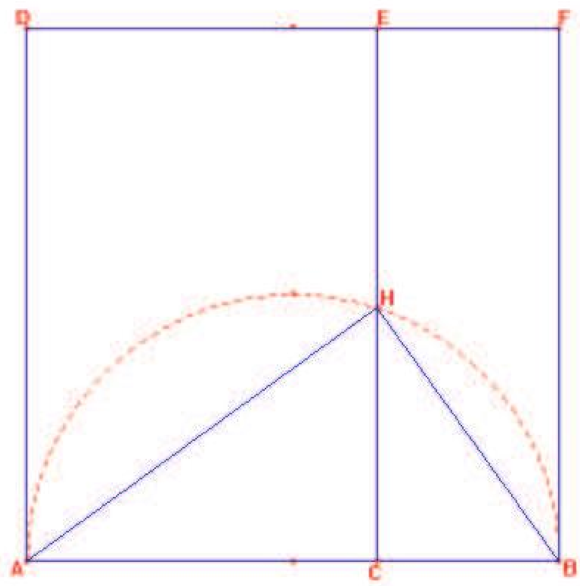
sumando (1) y (2)

$$x^2 + 2p^2 + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 = a^2 + b^2$$

$$y\ como\ h = x + y \quad \therefore \quad h^2 = a^2 + b^2$$

En el siguiente enunciado, por medio de suma de áreas de rectángulos y semejanza de triángulos, se llega fácilmente al Teorema de Pitágoras. Puede ser utilizado desde el nivel medio superior.

14.−Teorema : Sea H cualquier punto en el semicírculo BHA, se construye el cuadrado $ABFD$ de lado AB y se traza una perpendicular a AB que pase por H, entonces $h^2 = a^2 + b^2$.



Demostración:

Por el Teorema del ángulo central el ΔABH es rectángulo en H.

$$Como\ \Delta ABH \sim \Delta AHC \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AH}{AC} \ \therefore \ AH^2 = AB \cdot AC$$

$$También\ \Delta ABH \sim \Delta HBC \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{BC}{BH} \ \therefore \ BH^2 = AB \cdot BC$$

$$Área(cuadrado\, ABFD) = Área\ (Rectángulo\, ACED) + Área(Rectángulo\, CBFE) =$$

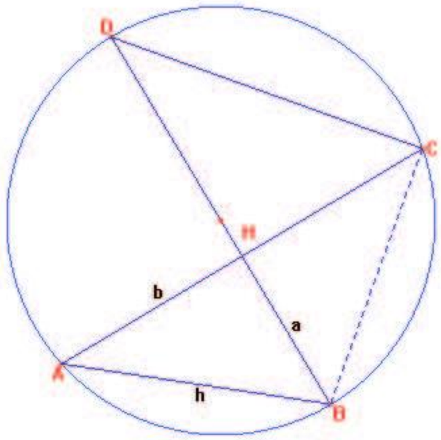
$$= AB \cdot AC + AB \cdot BC = AH^2 + BH^2$$

$$\Rightarrow \quad h^2 = b^2 + a^2$$

⅄ ⅄

En el siguiente enunciado se usa una construcción que determina varias relaciones de semejanza entre los tres triángulos rectángulos. Puede ser utilizado a partir del nivel medio superior.

15. – Teorema : Si en un círculo se dibuja cualquier cuerda AC que sea perpendicular a un diámetro BD, y se trazan las cuerdas AB y CD, entonces se cumple que $h^2 = b^2 + a^2$.



Demostración:

Por el Teorema del ángulo central, se forman tres triángulos rectángulos similares: $\Delta ABH \sim \Delta DCH \sim \Delta DBC$

$$De\ \Delta ABH \sim \Delta DBC : \quad \frac{AB}{BH} = \frac{DB}{BC} \ \therefore \ AB \cdot BC = DB \cdot BH$$

$$Además,\ como\ \Delta DHC \sim \Delta CHB : \quad \frac{DH}{HC} = \frac{HC}{BH}$$

$$\therefore \quad HC^2 = BH \cdot DH$$

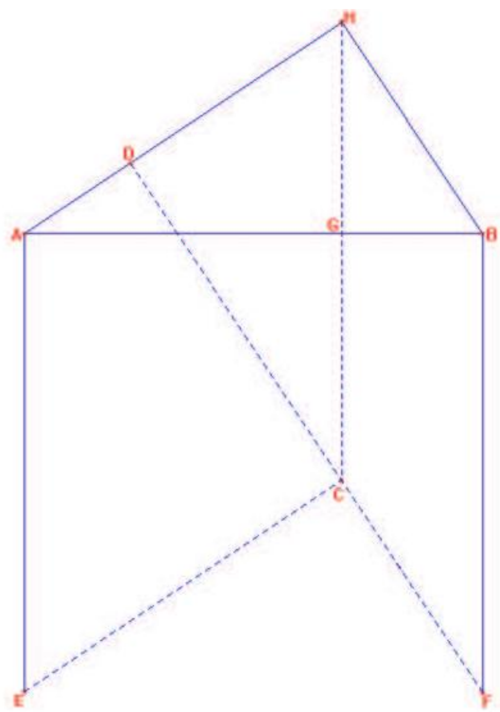
$$\Rightarrow AB \cdot BC = DB \cdot BH = (DH + HB)BH = DH \cdot BH + HB^2$$

$$= HC^2 + HB^2 \quad \therefore \; c^2 = b^2 + a^2$$

⅄ ⅄

En este enunciado se relacionan las áreas de los paralelogramos con los lados de los triángulos semejantes, por sustitución simple se llega a la relacióń de Pitágoras. Puede ser utilizado a partir del nivel medio superior.

16.−Teorema : Sea el triángulo ABH rectángulo en H, dibujamos $HC,\ AE\ y\ BF$ perpendiculares e iguales a AB, trazamos los segmentos $EC\ y\ FCD$ formando los paralelogramos AECH y HCFB, entonces
$AB^2 = HB^2 + HA^2$.



Demostración:

El triángulo ABH es congruente con el triángulo CDH y $\Delta AHG \sim \Delta HBG$, entonces:

$$\acute{A}rea\ (Fig.FBHAEC)\ = \acute{A}rea(AHCE) + \acute{A}rea(FBHC) =$$

$$CH \cdot GB + CH \cdot GA = AB \cdot GB + AB \cdot AG \tag{1}$$

Como $\Delta ABH \sim \Delta HBG$ y $\Delta ABH \sim \Delta AHG$

$$\frac{AB}{HB} = \frac{HB}{GB} \ \Rightarrow\ HB^2 = AB \cdot GB$$

$$\frac{AB}{HA} = \frac{HA}{AG} \ \Rightarrow\ HA^2 = AB \cdot AG$$

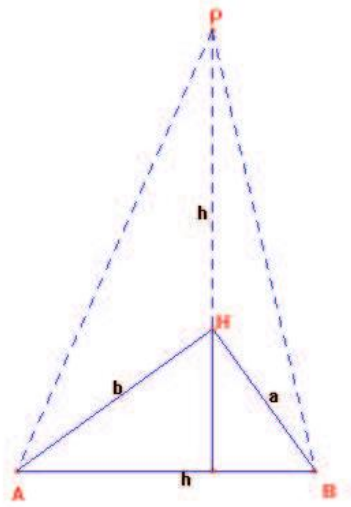
sustituyendo en la ecuación (1):

$$AB \cdot GB + AB \cdot AG = HB^2 + HA^2 = AB(GB + AG) = AB \cdot AB$$

$$\Rightarrow\ AB^2 = HB^2 + HA^2$$

En el siguiente enunciado se utilizan solamente áreas de triángulos y se relacionan con las áreas de paralelogramos; mediante una nueva construcción se llega al Teorema de Pitágoras. Puede ser utilizado a partir de 2^o año del nivel medio superior.

17. – **Teorema** : Sea el triángulo ABH rectángulo en H. Si se traza una perpendicular a AB que pase por H de tal forma que $PH = AB$, y se trazan los segmentos PA y PB, se forman los triángulos PHA y PHB, entonces $h^2 = a^2 + b^2$.

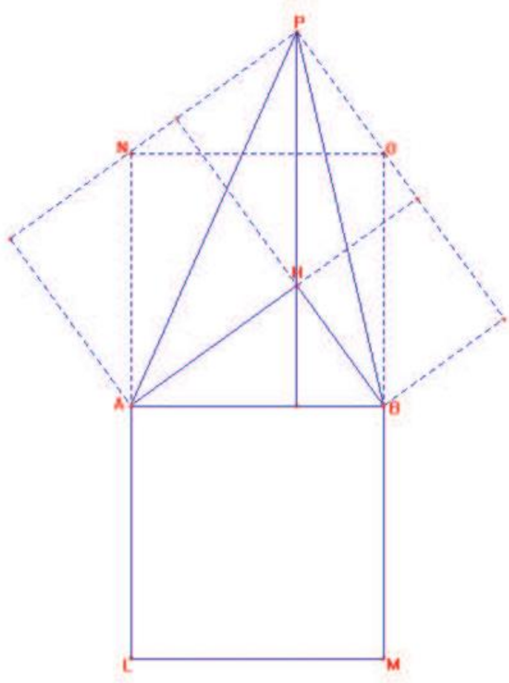


Demostración:

$$\acute{A}rea\ AHBP = \acute{A}rea PHA + \acute{A}rea\ PHB = \frac{1}{2}h \cdot AK + \frac{1}{2}h \cdot BK =$$

$$\frac{1}{2}h(AK + BK) = \frac{1}{2}h \cdot h = \frac{1}{2}h^2 \qquad (1)$$

Ahora bien, si trazamos el cuadrado ALMB y prolongamos LA por A y MB por B hasta N y O, respectivamente de modo que AN=BO=h, y finalmente, trazamos $NP\ y\ OP$, obtenemos que $AHPN\ y\ BHPO$ son paralelogramos en donde $\Delta\ AHP\ y\ \Delta\ BHP$ son respectivamente la mitad de cada uno de ellos.



entonces,

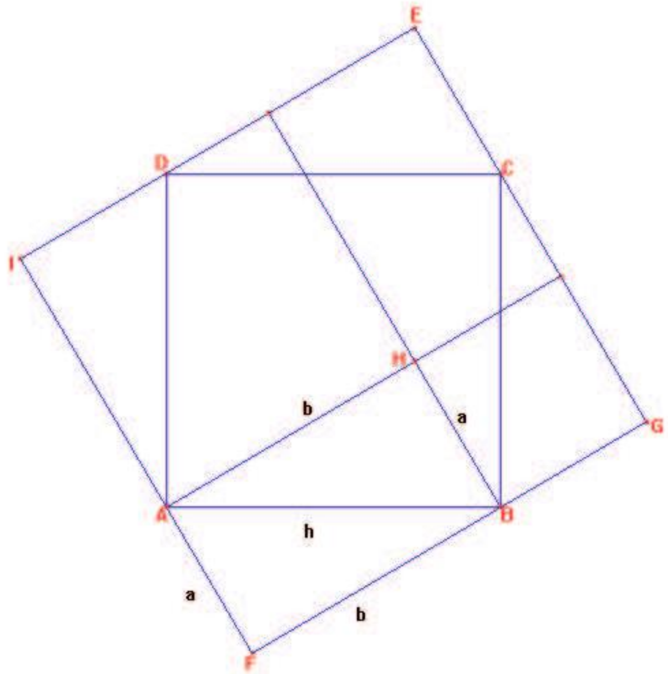
$$\acute{A}rea(PHA) + \acute{A}rea\ (PHB) = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}a^2 \qquad (2)$$

de la ecuación (1) y (2)

$$\frac{1}{2}h^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}a^2 \quad \therefore \quad h^2 = a^2 + b^2$$

En el próximo enunciado se requiere suma y resta de áreas de cuadrados y de triángulos, sustituyendo y simplificando se llega a la relación Pitagórica. Puede ser utilizado desde 3^o año de secundaria.

18. – Teorema : Sea el ΔABH rectángulo en H, se construye un cuadrado ABCD de lado h, quedará inscrito dentro del cuadrado $FGEI$ de lado $a + b$. Si se prolonga el lado b y el lado a hasta el cuadrado $FGEI$, entonces $\acute{A}rea\ (cuadradoABCD) = a^2 + b^2$.



Demostración:

Tenemos que:

$$\acute{A}rea\ (cuadrado\ FGEI) \ = \ (a+b)^2 \tag{1}$$

Como:

$$\acute{A}rea\ (FGEI) = \acute{A}rea\ (ABCD) + 4\acute{A}rea\ (ABH) =$$

$$h^2 + 4\frac{ab}{2} = h^2 + 2ab \tag{2}$$

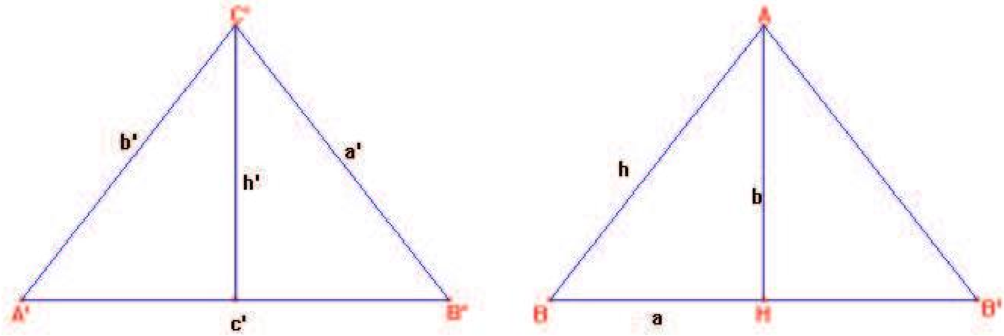
igualando (2) y (1)

$$h^2 + 2ab = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \therefore \ h^2 = a^2 + b^2$$

⅄ ⅄

En el siguiente enunciado usamos la fórmula para calcular la altura de un triángulo A'B'C', construímos otro triángulo para sobreponerlo en el primero y así obtendremos el Teorema de Pitágoras. Puede ser utilizado en el nivel medio superior.

19. – **Teorema** : Sea cualquier triángulo $A'B'C'$ con lados a', b', c', siendo c' la base y h' la altura, trazamos el triángulo ABH rectángulo en H, de modo que $a = BH = A'C'$ y $b = AH = h'$;prolongamos el lado a para sobreponer el triángulo $A'B'C'$, si utilizamos la fórmula para calcular la altura de un triángulo entonces obtendremos $h^2 = a^2 + b^2$.



Demostración:

La fórmula para determinar la altura de un triángulo es:

$$h'^2 = \frac{(a'+b'+c')(b'+c'-a')(a'+c'-b')(a'+b'-c')}{4c'^2}$$

sobreponiendo las figuras tenemos las siguientes equivalencias:

$$c' = 2a, \qquad h' = b \quad y \quad a' = b' = h$$

sustituyendo estos datos:

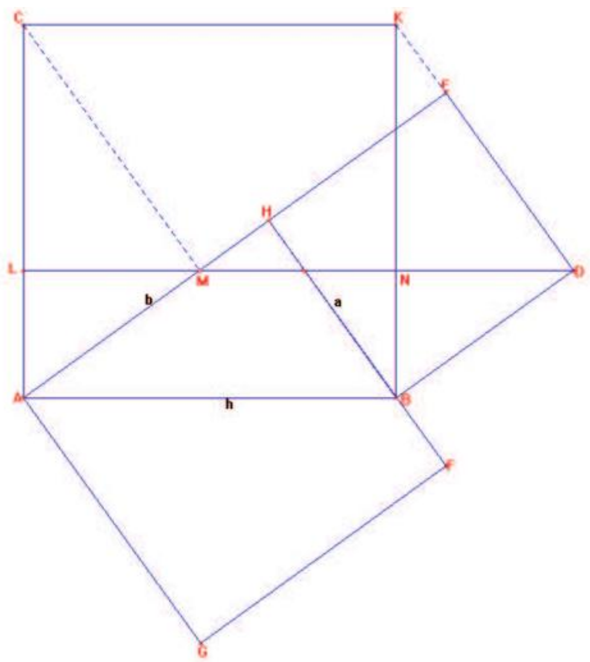
$$b^2 = \frac{(2h+2a)(2a)(2a)(2h-2a)}{16a^2} = \frac{4a^2(4h^2-4a^2)}{16a^2} = \Rightarrow$$

$$b^2 = \frac{4h^2 - 4a^2}{4} \quad \Rightarrow b^2 = h^2 - a^2 \quad \therefore \quad h^2 = a^2 + b^2$$

⅄ ⅄

En el siguiente enunciado, parecido al anterior, también nos basamos básicamente en la construccón de la figura y relacionamos sumas de áreas de los paralelogramos, trapecios y cuadrados, para obtener la relación Pitagórica. Puede ser utilizada a partir de 2^o año de nivel medio superior.

20. – **Teorema** : Sea el ΔABH rectángulo en H, se trazan cuadrados de lado a, $HBDE$; de lado b, $HAGF$, y de lado h, $ABKC$. Prolongamos DE hasta K y se trazan $DL\ y\ CM$ paralelas a $AB\ y\ BH$, respectivamente, entonces el cuadrado $ABKC$ será igual al $cuadrado\ HBDE + cuadrado\ HAGF$; es decir: $h^2 = a^2 + b^2$.



Demostración:

Observando el

$$Rect\acute{a}ngulo\ ABNL = paralelogramo\ ABDM = cuadrado\ HBDE$$

por tener misma base y altura, por otro lado,

$$Rect\acute{a}ngulo\ LNKC = paralelogramo\ MDKC = trapecio\ MEKC + \Delta ABH$$

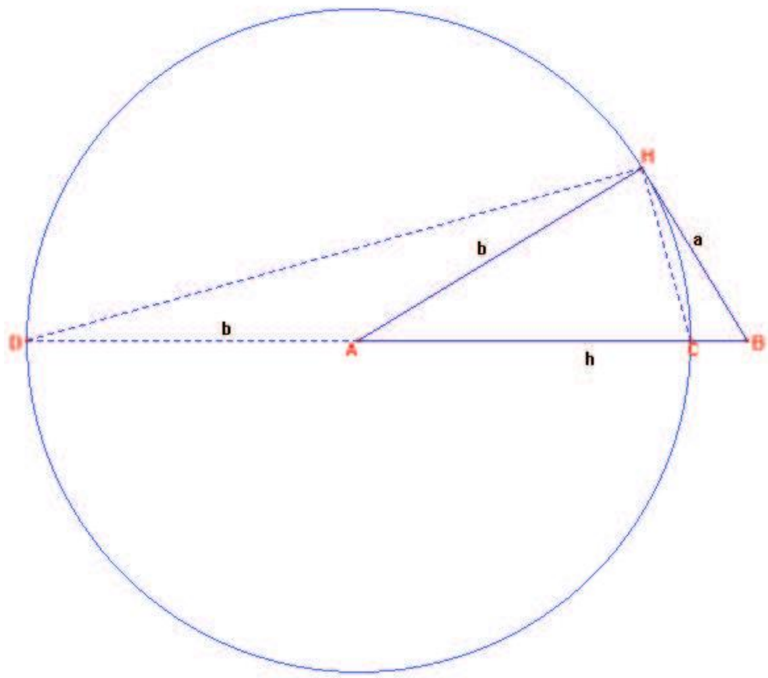
Pero *trapecio* $MEKC \cong$ *trapecio* $GFBA$. Entonces

$$cuadrado\ ABKC = rect\acute{a}ngulo\ ABNL\ +\ rect\acute{a}ngulo\ LNKC =$$

$$cuadrado\ HBDE + cuadrado\ HAGF\ \therefore \quad h^2 = a^2 + b^2$$

En el siguiente enunciado se utiliza el principio del ángulo central y semejanza de triángulos. Puede ser utilizado a partir del nivel medio superior.

21. – **Teorema** : Sea el triángulo ABH rectángulo en H. Con centro en A y radio AH se traza el círculo de diámetro CD, e inscribimos el triángulo DHC, entonces $h^2 = a^2 + b^2$.



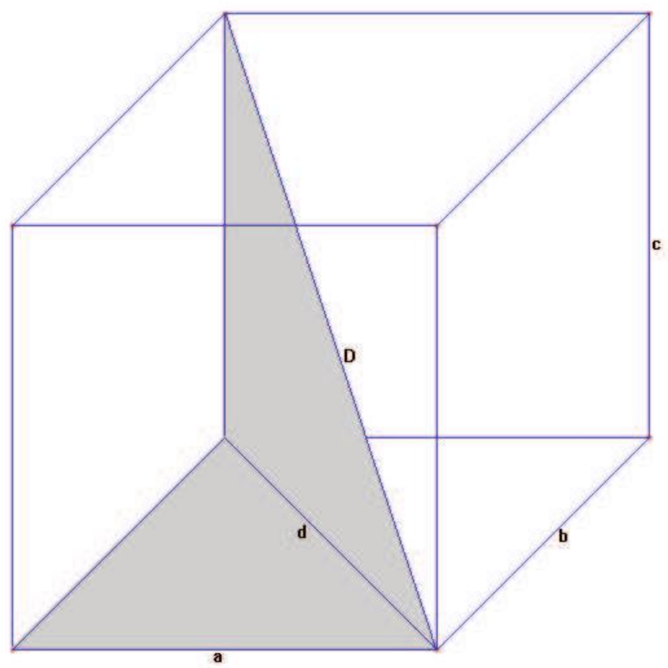
Demostración:

Como $\sphericalangle AHB$ es recto y AH un radio, los ángulos CDH y CHB son inscrito y semi inscrito que subtienden el mismo arco; entonces $\sphericalangle CDH = \sphericalangle CHB$, por el Teorema del ángulo central. Además $\sphericalangle HBD$ es un ángulo común de los triángulos BHC y BDH, entonces $\Delta BHC \sim \Delta BDH$ por el Teorema de semejanza AAA. Además, los triángulos AHD y AHC son isósceles, de ahí que:

$$\frac{BH}{BD} = \frac{BC}{BH} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{h+b} = \frac{h-b}{a}$$
$$\therefore \quad a^2 = h^2 - b^2 \;\; \textit{por lo tanto}, \;\; h^2 = a^2 + b^2$$

En el enunciado siguiente afirmamos que el Teorema de Pitágoas es válido en el plano, se utiliza una figura en tres planos para demostrar que es válida en el espacio. Puede ser utilizada a partir de 2^o año de nivel medio superior.

22. – **Teorema** : Sea el paralelepípedo de lados a,b y c; se construyen dos triángulos rectángulos en su interior, como se muestra la figura; si es cierto el Teorema de Pitgoras en el plano, entonces el Teorema es válido para el espacio.



Demostración:

El Teorema es válido para los dos triángulos, entonces:

$$D^2 = c^2 + d^2 \tag{1}$$

$$d^2 = a^2 + b^2 \tag{2}$$

sustituyendo (2) y (1)

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

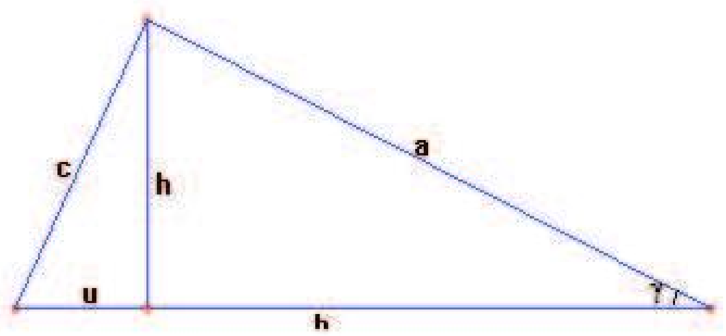
En el siguiente enunciado partimos de suponer cierto el Teorema de Pitágoras para demostrar la ley de los cosenos. Puede ser utilizada en nivel superior.

23. – **Teorema** : "La Ley de Cosenos" es una generalización del Teorema de Pitágoras para los triángulos no rectángulos; pues cuando un triángulo es rectángulo la relación se reduc al Teorema de Pitágoras.

Hay dos casos a considerar: cuando desde un vértice de un triángulo no rectángulo, se traza la altura y esta "cae" sobre el lado opuesto; y cuando cae sobre su prolongación.

Primer caso: la altura h "cae" en el lado opuesto.

Demostración:



Por el Teorema de Pitágoras

$$c^2 = h^2 + u^2 \tag{1}$$

$$h^2 = a^2 - (b-u)^2 \tag{2}$$

sustituyendo (2) y (1):

$$c^2 = u^2 + a^2 - b^2 + 2bu - u^2 = a^2 - b^2 + 2bu \tag{3}$$

utilizando la definición de coseno:

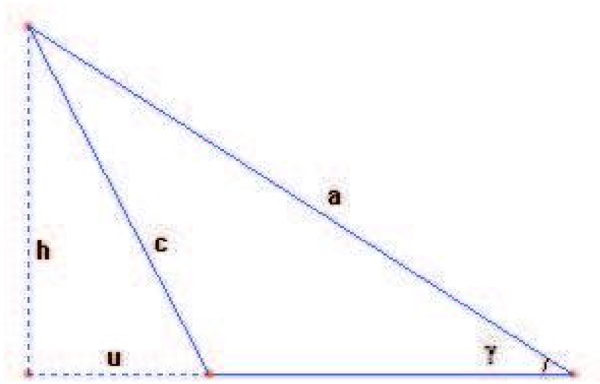
$$cos\gamma = \frac{b-u}{a} \quad \Rightarrow \quad u = b - a\ cos\gamma$$

sustituyendo en (3)

$$c^2 = a^2 - b^2 + 2b(b - acos\gamma) = a^2 - b^2 + 2b^2 - 2abcos\gamma$$

$$\Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma$$

Segundo caso: la altura h "cae" n la prolongación del ladoopuesto.



$$c^2 = h^2 + u^2 \tag{1}$$

$$h^2 = a^2 - (b+u)^2 \tag{2}$$

Combinando (1) y (2)

$$c^2 = u^2 + a^2 - b^2 - 2bu - u^2 = a^2 - b^2 - 2bu \tag{3}$$

por definición de coseno:

$$cos\gamma = \frac{b+u}{a} \quad \therefore\ u = acos\gamma - b$$

sustituyendo en (3):

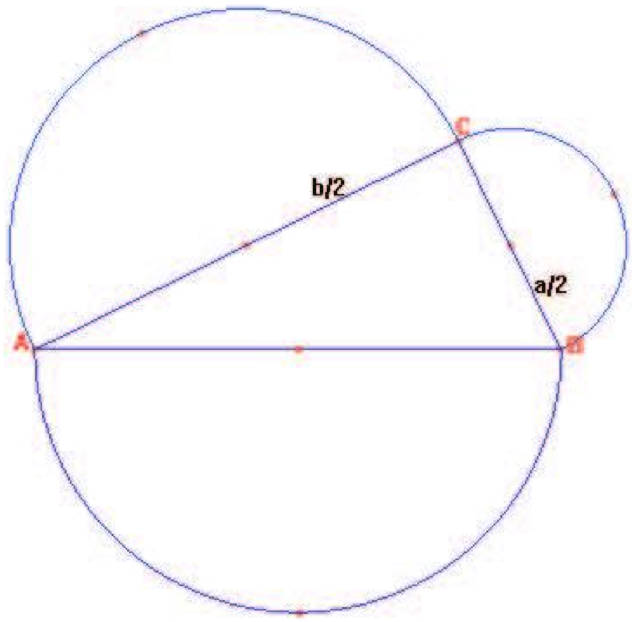
$$c^2 = a^2 - b^2 - 2b(acos\gamma - b) = a^2 - b^2 - 2abcos\gamma + 2b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma$$

⅄ ⅄

En el siguiente enunciado se parte del Teorema de Pitágoras y se utiliza el área del círculo para igualar las áreas de los semicírculos. Puede ser utilizado desde nivel medio superior.

24. – **Teorema** : Sea el triángulo ABC rectángulo en C, se construyen tres semicírculos en cada uno de los catetos con diámetro igual al cateto, entonces el área del semicírculo AB será igual a la suma de las áreas de los semicírculos AC y AB.



Demostración:

$$Como\ el\ \Delta ABC\ es\ rectángulo,\ entonces : c^2 = a^2 + b^2$$

multiplicamos por π

$$\pi c^2 = \pi a^2 + \pi b^2$$

dividiendo entre 8:

$$\frac{\pi}{2}\frac{c^2}{4} = \frac{\pi}{2}\frac{a^2}{4} + \frac{\pi}{2}\frac{b^2}{4}$$

o bien,

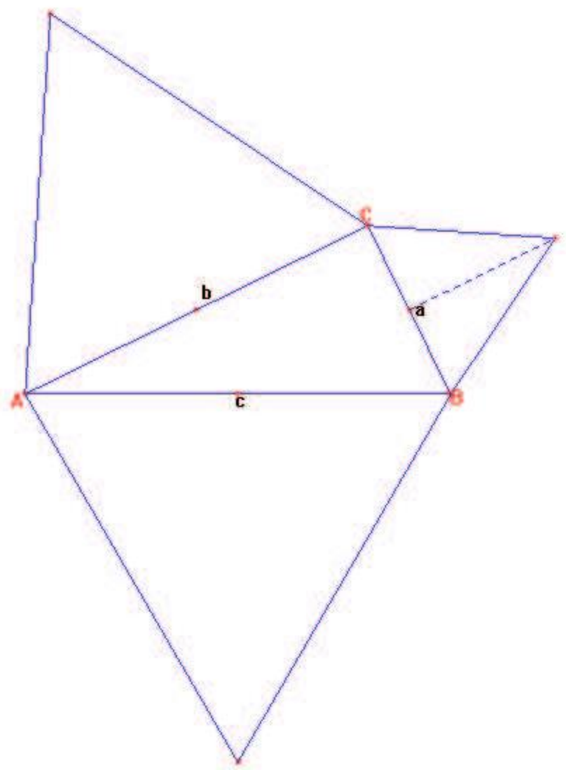
$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

es decir, el área del semicírculo AB es igual a la suma de las áreas de los semicírculos AC y AB

⅄ ⅄

En el siguiente enunciado al igual que el anterior se parte del Teorema de Pitágoras, y a partir de áreas de triángulos se llega a la igualdad entre el área del triángulo construído sobre la hipotenusa y las suma de las áreas de los otros dos triángulos construídos en los otros dos catetos. Puede ser utilizado desde nivel medio superior.

25. – **Teorema** : Sea el triángulo ABC rectángulo en C, se construyen tres triángulos equiláteros en cada uno de los lados, entonces el área del triángulo equilátero formado en c será igual a la suma de las áreas de los otros dos triángulos equláteros.



Demostración:

Área del triángulo de lado a:

$$A_1 = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Área del triángulo de lado b:

$$A_2 = \frac{1}{2}b\frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$$

Área del triángulo de lado c:

$$A_3 = \frac{1}{2}c\frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

Como el ΔABC es rectángulo se cumple $c^2 = a^2 + b^2$; multiplicando por $\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$$
$$\Rightarrow \quad A_3 = A_1 + A_2$$

⅄ ⅄

El siguiente enunciado es una expresión vectorial del Teorema de Pitágoras, se designan dos magnitudes vectoriales y las operaciones respecto a un sistema de referencia ortonormal. Se utiliza a nivel superior.

26. – **Teorema** : Dados dos vectores **x e y** si dichos vectores son ortogonales entonces, $\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$

Demostración:

Si $\| x \| = \sqrt{x \cdot x}$ es la norma del vector x

$$\| x + y \|^2 = (x + y)(x + y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y = \| x \|^2 + 2x \cdot y + \| y \|^2$$

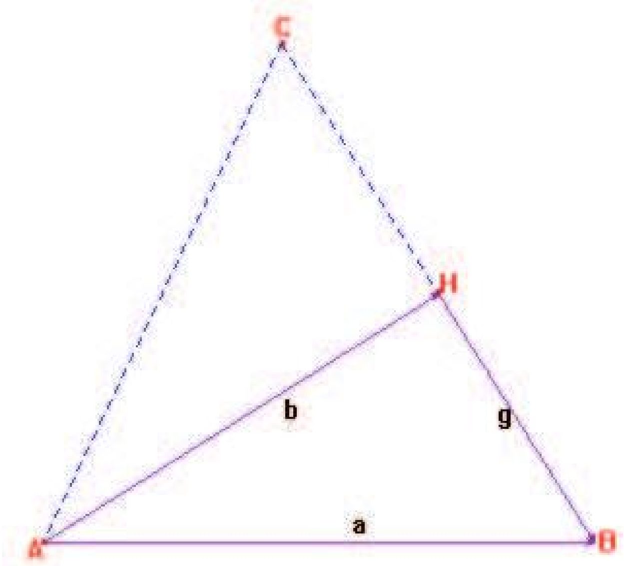
luego, como $x \perp y \quad \leftrightarrow \quad x \cdot y = 0$

$$\Rightarrow \quad \| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$$

⅄ ⅄

En el siguiente enunciado se utiliza la demostración anterior, aplicando suma de vectores para demostrar que el teorema de Pitágoras es una particularidad del análisis vectorial. Puede ser utilizado desde nivel medio superior.

27. – **Teorema** : Sea el triángulo ABH, rectángulo en H, donde **a**, **b y g** son vectores, se prolonga BH hasta C de tal forma que $HC = HB$, se dibuja AC. Entonces $AB^2 = AH^2 + HB^2$.



Demostración:

Por suma de vectores:

$$AB = AH + HB \quad \acute{o} \;\; \boldsymbol{a = b + g} \tag{1}$$

$$AC = AH + HC \quad \acute{o} \;\; \boldsymbol{a' = b - g} \tag{2}$$

como $HB = HC \quad \Rightarrow AB = AC$ Elevando al cuadrado (1) y (2) y sumándolas tenemos:

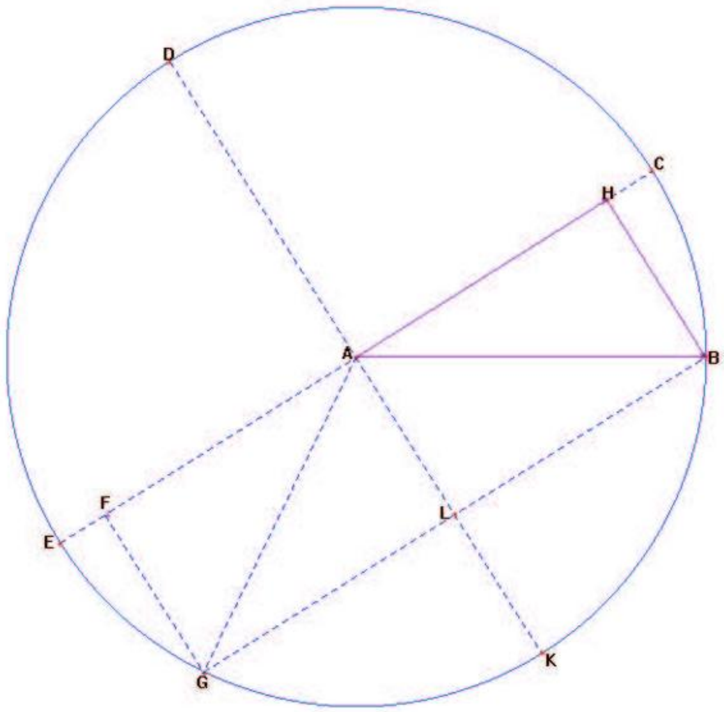
$$AB^2 + AC^2 = 2AH^2 + 2HB^2 \;\; pero \;\; AB = AC$$

$$\therefore \;\; 2AB^2 = 2AH^2 + 2HB^2$$

⅄ ⅄

En el siguiente enunciado se utiliza la suma de vectores para demostrar que el Teorema de Pitágoras es una particularidad del análisis vectorial. Puede ser utilizado desde el nivel medio superior.

28.−**Teorema** : Sea el triángulo ABH rectángulo en H, donde su hipotenusa es el radio del círculo donde se encuentra; el triángulo ABH está formado por los vectores $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HB}$ y $\overrightarrow{AB}$ donde la magnitud de AB es igual al radio unitario del círculo. Entonces $AB^2 = AH^2 + HB^2$



Demostración:

Se traza GB paralela a EH, del punto G se traza FG perpendicular a GB, y trazamos AG. el $\Delta ABH = \Delta AGF$ y $\sphericalangle GAK = \sphericalangle BAK$, entonces tenemos para los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AG}$

$$AB = AH + HB \tag{1}$$

$$AG = AF + FG \tag{2}$$

elevando al cuadrado (1) y (2) y sumando:

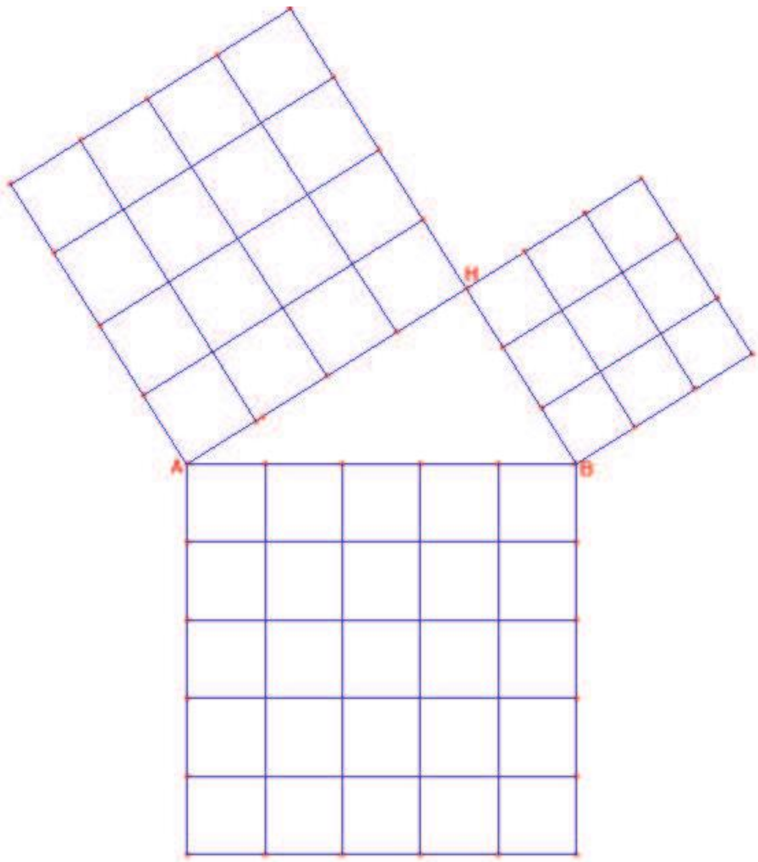
$$AB^2 + AG^2 = 2AH^2 + 2HB^2 \quad como \quad AB = AG$$

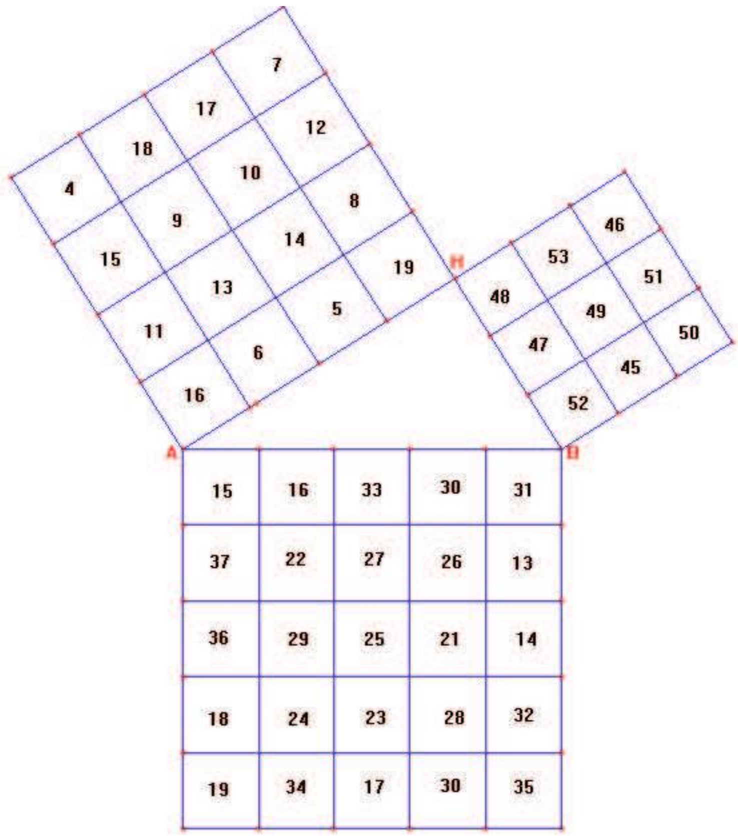
$$\Rightarrow\ 2AB^2 = 2AH^2 + 2HB^2 \quad \therefore\ \ AB^2 = AH^2 + HB^2$$

⅄ ⅄

Como último enunciado, tenemos una prueba numérica utilizando los cuadrados mágicos que se usan desde los primeros niveles de la educación secundaria, incluso, en los últimos niveles de primaria.

29. – **Teorema** : Sea el triángulo ABH rectángulo en H, cuyos lados permiten cuadricular cada uno de los cuadrados construidos sobre sus lados. Si se dan los siguientes números: 4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,13,14,14,15,15,16,16,17,17,18,18,19,19, 20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,45,46,47,48,49,50,51,52,53, entonces se puede colocar un número en cada cuadrito originando tres cuadrados mágicos; es decir, los números colocados cumplen con las propiedades de un cuadrado mágico y la suma de las cantidades del cuadrado mágico de la hipotenusa será la suma de los otros dos cuadrados, osea: $625 = 441 + 184$.


H
A
B


7
17
12
18
10
4
9
8
15
14
13
19
11
5
6
16
H
46
53
51
48
49
50
47
45
52
A
B
15 16 33 30 31
37 22 27 26 13
36 29 25 21 14
18 24 23 28 32
19 34 17 30 35

TERNAS PITAGÓRICAS

El estudio de las propiedades numéricas de la relación pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$ es parte de la teoría de números. Aunque existen varios procedimientos para generar ternas pitagóricas, es posible encontrar una expresión general de la cual se deivan todos procedimientos. Para obtenerla partimos de la identidad:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x - y)^2 + 4xy \tag{1}$$

Queremos transformar 4xy en una expresión cuadrada y así tener expresiones para dos números cuadrados cuya suma sea otro número cuadrado. Supongamos que $x = mp^2$; $y = mq^2$, donde m, p y q son números naturales,

$$\Rightarrow xy = m^2p^2q^2$$

de ahí que:

$$4xy = 4m^2p^2q^2$$

el cual es un número al cuadrado, para todos los valores de m, p y q. sustituyendo en la ecuación (1), tenemos:

$$(mp^2 + mq^2)^2 = (mp^2 - mq^2)^2 + (2mpq)^2 \tag{2}$$

Este mismo resultado se obtiene por otros dos métodos. Según Matthew Collins en su investigación "Tratado de los casos duplicados posibles e imposibles de las igualdades cuadráticas en el Análisis Diofántico"(Loomis, 1940, p. 18), no hay ninguna expresión de dos números al cuadrado cuya suma sea otro número al cuadrado que no se pueda deducir de la ecuación (2).

Veamos algunos ejemplos. Ejemplo 1. Si $p = 2$, $q = 1$
$\Rightarrow$ $p^2 + q^2 = 5$, $p^2 - q^2 = 3$
$2pq = 4$ $\therefore$ $3^2 + 4^2 = 5^2$. La terna es (3, 4, 5).

Ejemplo 2. Sea $p = 3$, $q = 2$ $\Rightarrow$ $p^2 + q^2 = 13$, $p^2 - q^2 = 5$
$2pq = 12$ $\therefore$ $5^2 + 12^2 = 13^2$. La terna es (5, 12, 13).

En el artículo de Mr. Dickson (Loomis, 1940, p. 21) encontramos la siguiente proposición: Sean tres enteros primos entre sí, simbolizados por a b y h, los cuales representan los tres lados de un triángulo rectángulo, entonces se cumple lo siguiente:

1. No pueden ser todos pares; de ser así serían divisibles entre dos.
2. No pueden ser todos impares. Para $a^2+b^2=h^2$ si a y b son impares, sus cuadrados son también impares y la suma de sus cuadrados sería par y h^2 entonces sería par, pero h^2 era impar, por lo tanto h sería impar.
3. h debe ser siempre impar; y respecto a los otros dos:uno debe ser par y el otro impar.Entonces dos de los tres enteros a, b y h deben ser siempre impares.
4. Cuando los lados de un triángulo rectángulo son enteros, el perímetro del triángulo siempre es par, y el área también es par.

Existen varias formas de encontrar ternas Pitagóricas, algunos matemáticos propusieron reglas para obtenerlas. A continuación se citan algunas.

1. REGLA DE PITÁGORAS.[1] Sea n impar, mayor o igual que 3, entonces:

$$n, \qquad \frac{n^2-1}{2} \quad y \quad \frac{n^2+1}{2}$$

Son tres números que conforman una tenrna pitagórica.
Comprobación:

$$n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=n^2+\frac{n^2-2n+1}{4}=\frac{4n^2+n^2-2n++1}{4}=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

[1] Algunos historiadores de la matemática antigua asocian este resultado a la cultura hindú, de alrededor de 1000 aC.

2. REGLA DE PLATON. Sea m un número par divisible entre 4, entonces:

$$m, \qquad \frac{m^2}{4} - 1 \quad y \quad \frac{m^2}{4} + 1$$

Son tres números que conforman una tenrna pitagórica.

Comprobación:

$$m^2 + \Big(\frac{m^2}{4} - 1\Big)^2 = m^2 + \frac{m^4}{16} - \frac{m^2}{2} + 1 = \frac{m^4}{16} + \frac{m^2}{2} + 1 = \Big(\frac{m^2}{4} + 1\Big)^2$$

3. REGLA DE EUCLIDES. Suponemos que x e y son dos números pares o impares, tales que de ser ambas fracciones su común denominador no sea mayor de 2 y el producto de xy sea un cuadrado.

$$\sqrt{xy}, \qquad \frac{x-y}{2} \quad y \quad \frac{x+y}{2}$$

Son tres números que conforman una tenrna pitagórica.

Comprobación:

$$\Big(\sqrt{xy}\Big)^2 + \Big(\frac{x-y}{2}\Big)^2 = xy + \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4} = \frac{4xy - 2xy + x^2 + y^2}{4} =$$

$$= \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} = \Big(\frac{x+y}{2}\Big)^2$$

4. REGLA DE MASERES. Sean myn dos números pares o impares, donde $m > n$ y $\frac{m^2+n^2}{2n}$ es entero

$$m^2, \qquad \frac{m^2 - n^2}{2n}, \qquad \frac{m^2 + n^2}{2n}$$

Son tres números que conforman una tenrna pitagórica.

Comprobación:

$$(m^2)^2 + \Big(\frac{m^2 - n^2}{2n}\Big)^2 = m^4 + \frac{m^4 - 2m^2n^2 + n^4}{4n^2} =$$

$$\frac{4m^4 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4}{4n^2} = \frac{m^4 + 2m^2n^2 + n^4}{4n^2} = \Big(\frac{m^2 + n^2}{2n}\Big)^2$$

5. REGLA DE DICKSON. Sean m y n dos números enteros primos entre si, uno de ellos par y el otro impar donde $m > n$ y $2mn$ un cuadrado.

$$m+\sqrt{2mn}, \qquad n+\sqrt{2mn}, \qquad m+n+\sqrt{2mn}$$

Son tres números que conforman una tenrna pitagórica.

Comprobación:

$$\left(m+\sqrt{2mn}\right)^2+\left(n+\sqrt{2mn}\right)^2 = m^2+2m\sqrt{2mn}+2mn+n^2+2n\sqrt{2mn}+2mn =$$

$$m^2+n^2+4mn+\sqrt{2mn}(2m+2n) = m^2+n^2+4mn+2\sqrt{2mn}(m+n) =$$

$$m^2+2mn+n^2+2\sqrt{2mn}(m+n)+2mn = \left((m+n)+\sqrt{2mn}\right)^2$$

Analizando estas cinco reglas, se observa claramente que cada una de ellas llega a una particularidad de la ecuación (2).

Veamos cómo llegamos a ésto:

1. PITÁGORAS. Multipliquemos por 4 cada término cuadrado de la terna:

$$4\left[n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad (2n)^2+(n^2-1)^2 = (n^2+1)^2$$

es decir:

$$(n^2+1)^2 = (n^2-1)^2+(2n)^2 \quad donde \;\; p=n \quad y \;\; q=1$$

2. PLATÓN. Multiplicamos por 16 cada término cuadrado de la terna:

$$16\left[\left(\frac{m^2}{4}+1\right)^2 = \left(\frac{m^2}{4}-1\right)^2+m^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left(4\left(\frac{m^2}{4}+1\right)\right)^2 = \left(4\left(\frac{m^2}{4}-1\right)\right)^2+(4m)^2$$

$$\Rightarrow \quad (m^2+4)^2 = (m^2-4)^2+(4m)^2 \quad \therefore \; (m^2+2^2)^2 = (m^2-2^2)^2+(4m)^2$$

donde $p = m$ *y* $q = 2$

$$(p^2+q^2) = (p^2-q^2)^2+(2pq)^2$$

3. EUCLIDES. Multiplicamos por 4 cada término cuadrado de la terna:

$$4\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{xy}\right)^2\right]$$

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + \left(2\sqrt{xy}\right)^2 \qquad donde \;\; p = \sqrt{x} \;\; y \;\; q = \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \quad (p^2+q^2)^2 = \left(2\sqrt{p^2q^2}\right)^2 \quad \therefore \; (p^2+q^2)^2 = (p^2-q^2)^2 + (2pq)^2$$

4. MASERES. Multiplicamos por $4n^2$ cada término cuadrado de la terna:

$$4n^2\left[\left(\frac{m^2+n^2}{2n}\right)^2 = \left(\frac{m^2-n^2}{2n}\right)^2 + (m^2)^2\right]$$

$$(m^2+n^2)^2 = (m^2-n^2)^2 + (2mn)^2 \qquad donde \quad p = 1 \;\; y \;\; q = n$$

$$\Rightarrow \quad (1+n^2)^2 = (1-n^2)^2 + (2n)^2 \quad \therefore \;\; (p^2+q^2)^2 = (p^2-q^2)^2 + (2pq)^2$$

5. DICKSON. Si sustituimos:

$$p = \sqrt{\frac{m+n+2\sqrt{mn}+\sqrt{m-n}}{2}} \quad y \quad q = \sqrt{\frac{m+n+2\sqrt{mn}-\sqrt{m-n}}{2}}$$

obtendremos la relación:

$$\left((m+n)+\sqrt{2mn}\right)^2 = \left(m+\sqrt{2mn}\right)^2 + \left(n+\sqrt{2mn}\right)^2$$

CAPÍTULO IV

CONSIDERACIONES CURRICULARES

Como ya se ha mostrado, el Teorema de Pitágoras es un tema fundamental del currículum escolar. Las demostraciones exibidas en el capítulo anterior reflejan la variedad de caminos que existen para su enseñanza, dependiendo del nivel educativo y la formalidad que se pretenda usar.

Este tema se empieza a enseñar, propiamente a partir de 2^o año de secundaria, dentro del tema de Equivalencia de figuras y cálculo de áreas, el cual se encuentra inmediatamente después del cálculo de áreas de paralelogramos, triángulos, trapecios y polígonos regulares. La manera de abordarlo que se propone en el Libro para el Maestro (Alarcón,*et al.*,1993), es por medio de equivalencia de áreas; en algunos casos se dan las demostraciones ya sea visualmente o algebraicamente, no se ven aplicaciones. Más adelante, en 3^o año de secundaria se estudia el Teorema de Pitágoras aplicado a problemas, cuando ya se han practicado los criterios de congruencia y semajanza de triángulos. Al respecto, (Alarcón,*et al.*,1993) nos dice:

> Uno de los problemas que presenta la enseñanza de la geometría en los niveles básicos y medio, tanto en México como en el resto del mundo, es que con frecuencia sus contenidos y propósitos están poco definidos y no se ve con claridad cuáles son los medios para lograr un aprendizaje significativo de esta disciplina. En tales circustancias, no es raro que la enseñanza de la geometría se limite en ocasiones a presentar algunas definiciones, teoremas y demostraciones para que los alumnos las memoricen, o a intentar iniciarlos prematuramente en la goemetría axiomática.(p. 224).

Es por esto que uno de los temas que se enfatizan en los nuevos programas, es a aplicación de fórmulas para el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, así como de los Teoremas de Pitágoras y de semejanza, en la solución de diversos ejercicios y problemas de cálculo geométrico.

Se analizaron siete libros de nivel secundaria con el objetivo de conocer la forma en que se aborda el Teorema de Pitágoras. En general, se recurre al uso de demostraciones visuales mediante el uso de áreas, pero son pocos los problemas que se realizan. Algunas de las aplicaciones que se manejan en los libros destacan las siguientes: en su mayor parte, determinar un lado desconocido cuando se conocen dos lados de un triángulo rectángulo; problemas de determinación de áreas de figuras mediante equivalencia de áreas, aplicaciones del teorema de pitágoras para obtener longitudes y distancias desconocidas o inaccesibles. Para introducir al estudiante en el tema, algunos de estos libros recurren a un cuento o un problema; a veces irreales como por ejemplo:

> Se cuenta que cuando Pitágoras tenía entre 13 y 14 años vivía en una cas muy grande la cual tenía un patio muy amplio que se veía desde su ventana. El patio estaba cubierto de mosaicos cuadrados de dos diferentes tamaños, como Pitágoras no tenía buenos amigos, ni televisión ni revistas, ni bicicleta, ni siquiera un buen libro para leer, se pasaba horas aburrido, viendo el patio desde su ventana. Uno de esos días de ocio que estaba viendo los mosaicos y pensando en cómo habrían sido colocados, se dio cuenta de algo muy interesante y corrió a pintar con un gis unos trazos, al terminar se sorprendió al descubrir que en cada lado de un triángulo formado por un pedazo de mosaico se formaban otras piezas que formaban cuadrados que al unirlas esas piezas eran las mismas que las piezas formadas en el cuadrado del lado más grande. (Alvarez,2000)

Obviamente esta historia no puede ser cierta por muchas razones. pero así se introduce al alumno, enseguida muestran la demostración adjudicada a Pitágoras y, por último, dos o tres problemas.

A continuación se muestran algunos tangramas o rompecabezas que pueden ser utilizados para enseñar el Teorema de Pitágoras en educación básica.

PRUEBAS DEL TEOREMA DE PITÁGORAS A TRAVÉS DE ROMPECABEZAS

Con el propósito de contribuir en la enseñanza de primaria, tambien se fabricaron materiales manipulativos que permiten visualizar dicho Teorema para ello se relizó el trazo con el software de Cabri lo cual permitió cortar en madera las piezas del rompecabezas; enseguida se le entrega a los niños las piezas desordenadas en una mesa, para que finalmente se les pida que acomoden las piezas en los dos cuadrados mas chicos, o todas las piezas en el cuadrado de la hipotenusa. Este tipo de instrumento didáctico se aplicó a alumnos de secundaria, y se observó un cambio en la concepción que tenian del Teorema de Pitágoras ya que no lo visualizaban como suma de áreas, sino como mencionamos anteriormente lo aprenden como una fórmula mas en su repertorio.

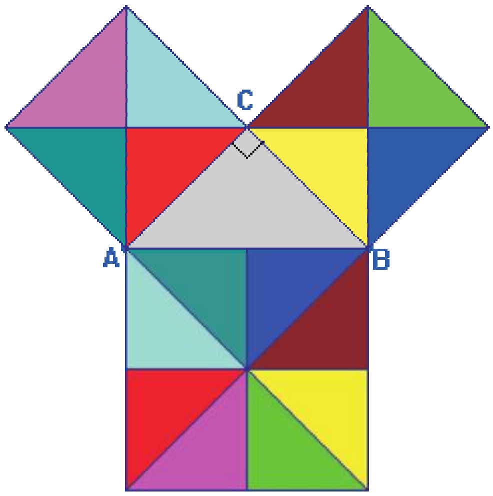


Fig. III.1.a

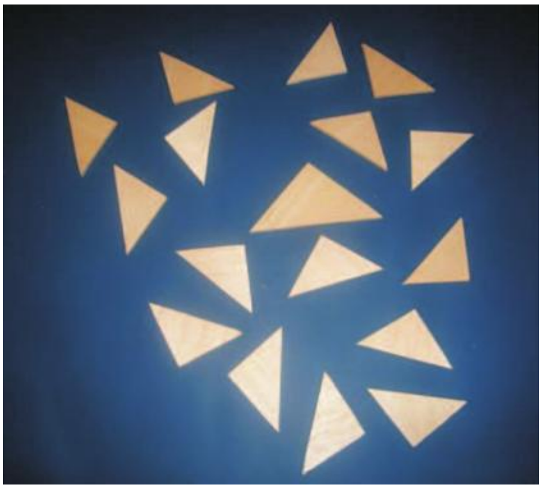


Fig. III.1.b

Fig. III.1.c

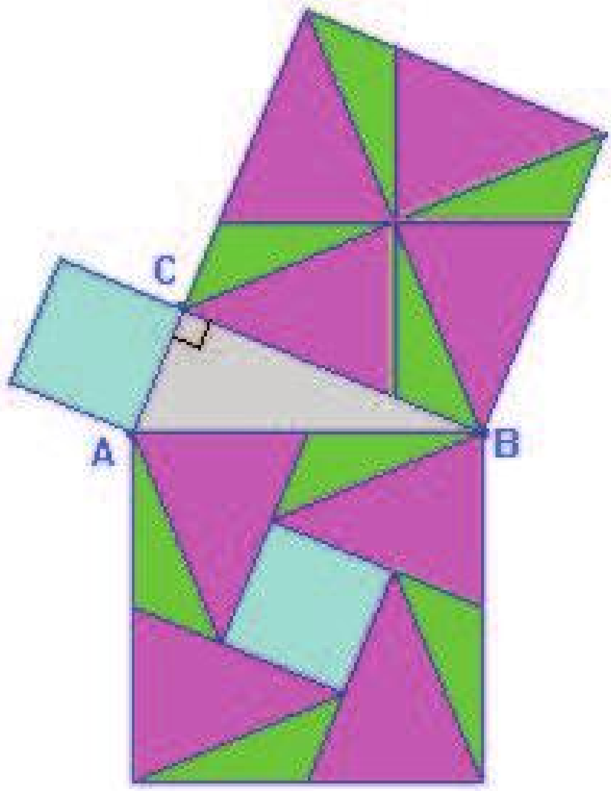


Fig. III.2.a

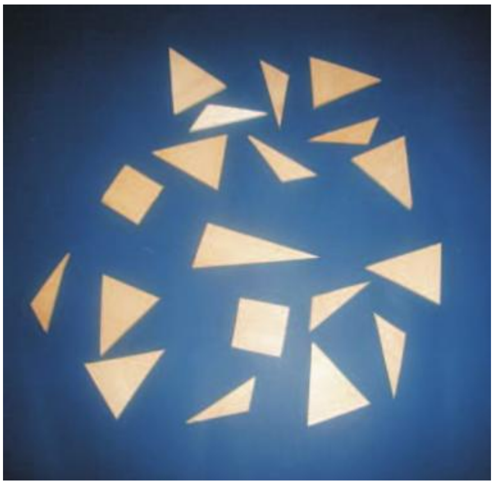


Fig. III.2.b

Fig. III.2.c

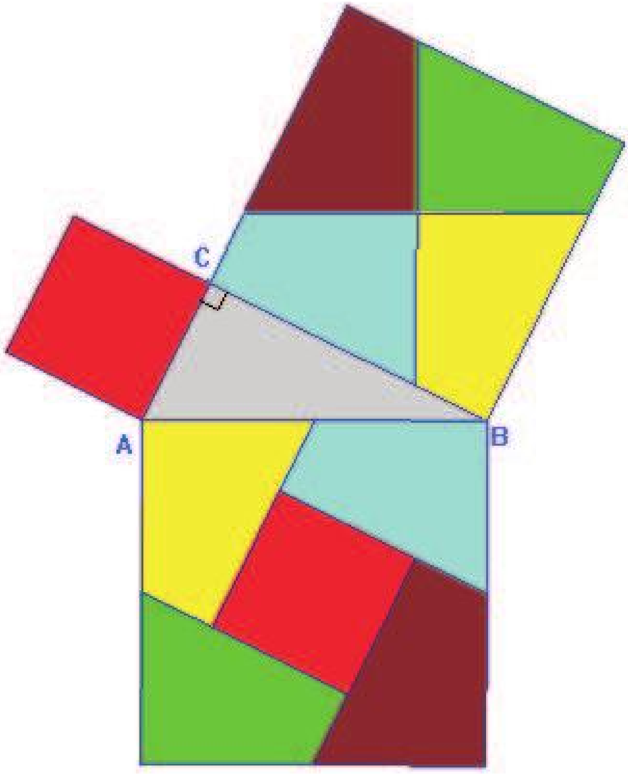


Fig. III.3.a

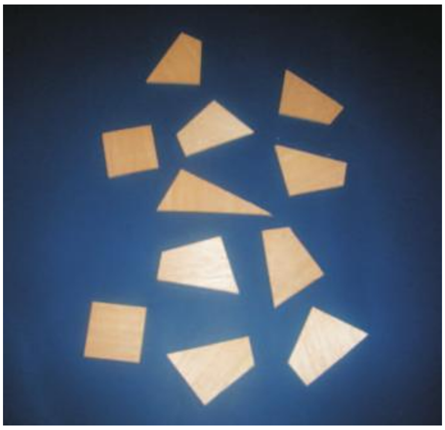


Fig. III.3.b

Fig. III.3.c

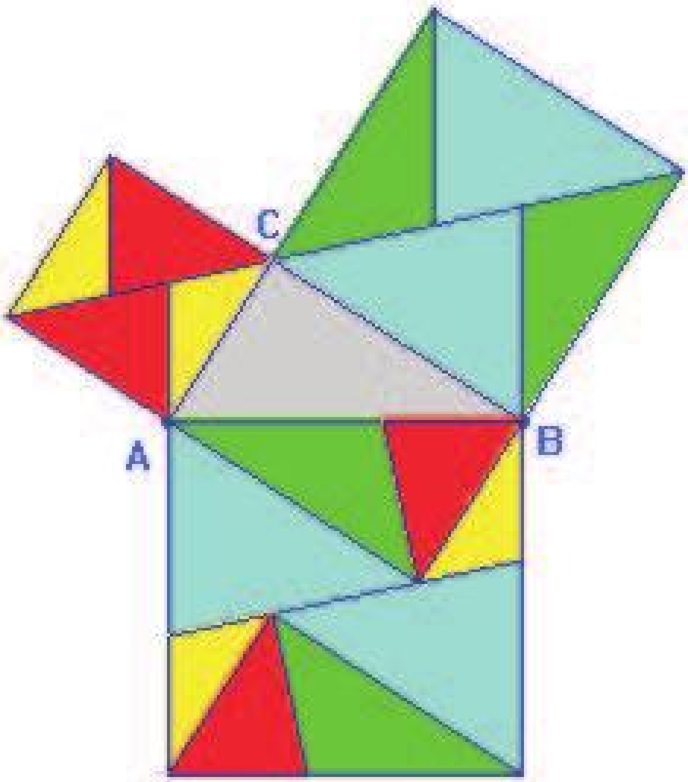


Fig. III.4.a

Fig. III.4.b

Fig. III.4.c

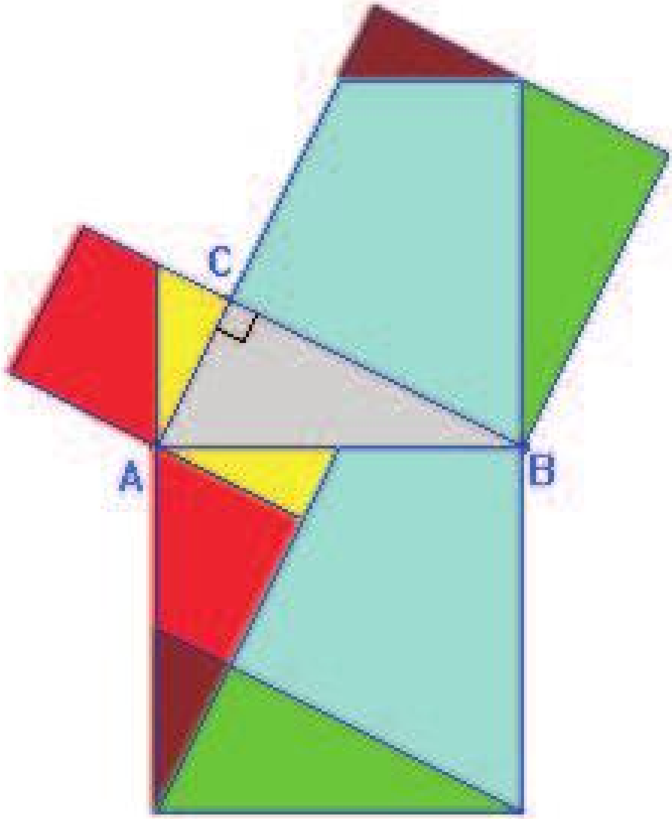


Fig. III.5.a

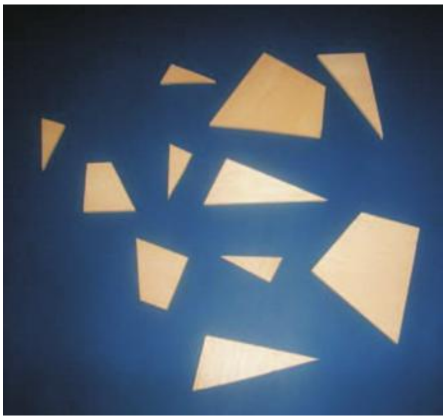


Fig. III.5.b

Fig. III.5.c

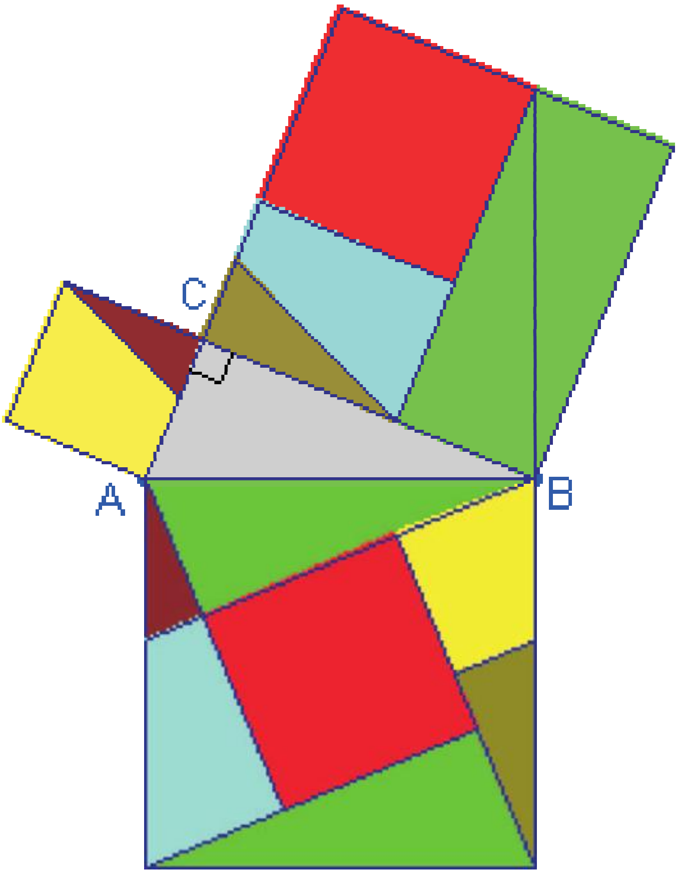


Fig. III.6.a

Fig. III.6.b

Fig. III.6.c

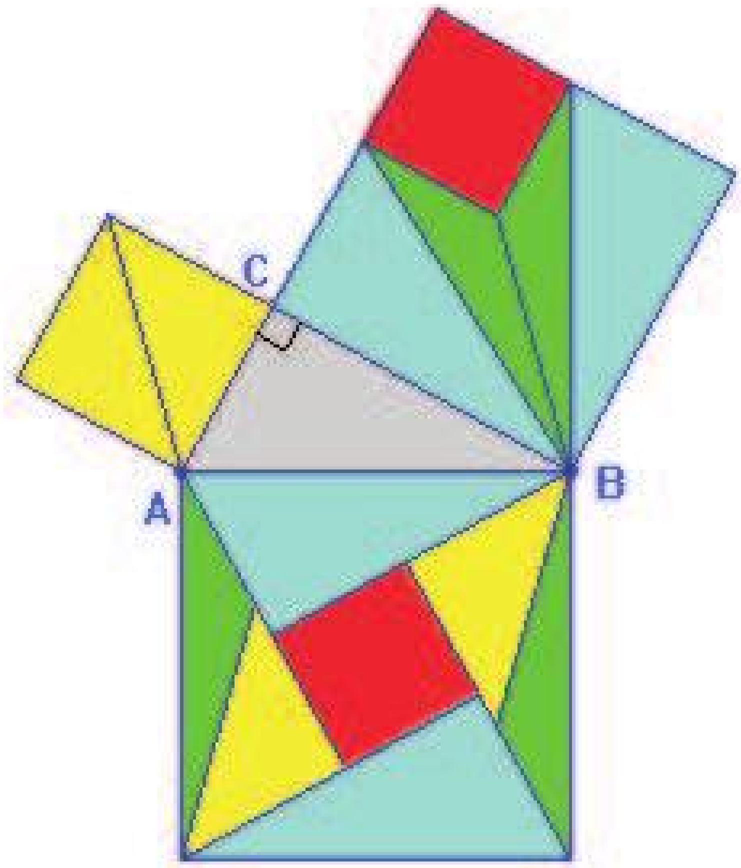


Fig. III.7.a

Fig. III.7.b

Fig. III.7.c

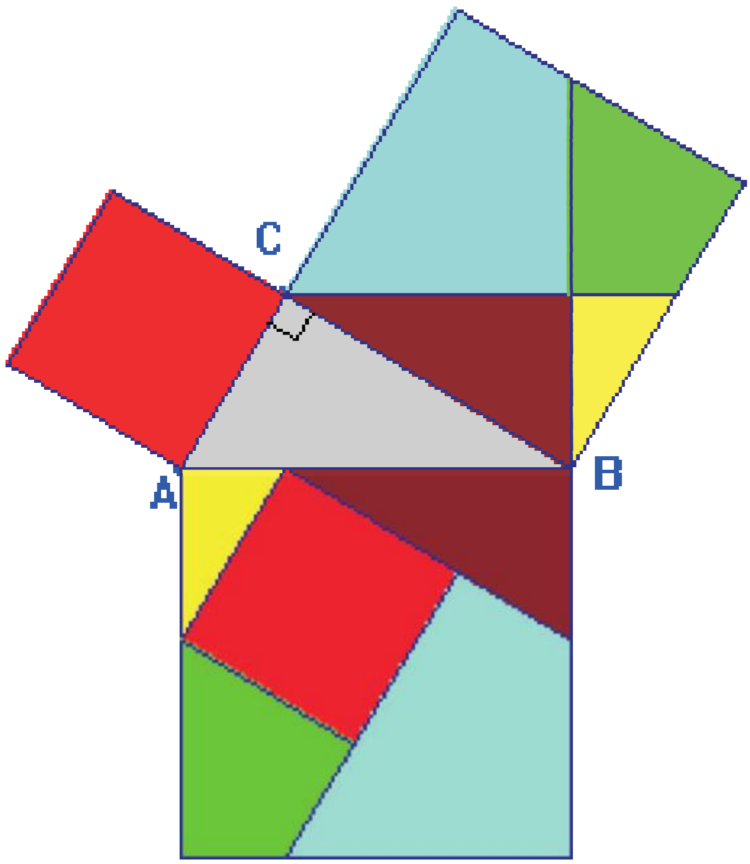


Fig. III.8.a

Fig. III.8.b

Fig. III.8.c

CONCLUSIONES

De manera breve, podemos decir que la importancia de la investigación realizada en esta tesis radica en que el Terorema de Pitágoras:

1. Es la base para la formulación de otros contenidos matemáticos, que se estudian desde la educación básica hasta nivel superior.
2. Traducido a la norma y a la métrica euclidiana, es la base de los espacios que empleamos para describir los fenómenos del mundo real.
3. Es uno de los conocimientos matemáticos que más aplicación tiene en la vida cotidiana.
4. Contribuye al desarrollo del pensamiento matemático.
5. El uso de materiales manipulativos y software, lo hacen atractivo y facilitan su enseñanza.
6. No solo representa un significado matemático, sino que se le ha dado valor filosófico.
7. Es una proposición bella que encierra todo un arte.
8. Ninguna proposición hecha por el ser humano, ha sido probada más veces y de formas diversas que el Teorema de Pitágoras.
9. Es parte de la cultura universal.
10. Es un tema imprescindible en el currículum escolar.

Así, en este trabajo hemos hecho un recorrido por la historia del Teorema de Pitágoras, en algunos casos con tintes anecdóticos de la vida de Pitágoras, que muestran las virtudes y dificultades que éste tuvo para dar a conocer sus conocimientos. Se mostraron algunas de las tantas demostraciones que existen sobre el teorema, varias de ellas con gran carga de ingenio. Se hicieron algunas recomendaciones sobre la posibilidad de su uso en los diferentes grados escolares. Se analizaron cuestiones curriculares, respecto a la forma en que se introduce el Teorema en la educación secundaria; y se exhibieron pruebas del mismo a través de rompecabezas.

Es decir, se abordó un tema fascinante que es piedra angular en la matemática como en la educación matemática, como se planteó en la introducción.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnold V.I. 1991 *Mathematical methods of Clasical Mechanics*,Springer V.

Bautista, R. R, Martínez, E.R., Miramontes,P. 2004 *Las Matemáticas y su Entorno*, Siglo veintiuno editores, UNAM.

Bell, E.T.1949 *Historia de las Matemáticas*, Fondo de Cultura Económica.

Boyer, C. B.1989 *A history of Mathematics*, John wiley ℘ sons edit., second edition, Canadá.

Brumbaugh,R.S.1976 *The philosophers of Greece*, Albany, NY.

González, U.P.M.2001 *9 La matemática en sus personajes, Pitágoras el filósofo del número*, Nivola

Kreyszig, E.1989 *Introductory Functional Analsis with applications*, Wiley.

Laertius, Diógenes.1958 *Lives of eminent philosophers*, The loeb classical library, Volume I, 1958.

Lara, A. M.1991 *Los matemáticos griegos*, Universidad Autónoma de Querétaro.

Mankiewicz,R.2000 *Historia de las Matemáticas (del Cálculo al Caos)*, Paidós Editoril, Italia.

man, J.1976 *Enciclopedia Sigma. El mundo de las matemáticas*, GRIJALBO, Barcelona.

NewLoomis,E. S.1940 *The Pythagorean Proposition*, Sacred Science Library, Michigan.

Porphyry, 1965 *Life of Phythagoras* in M.Hadas, Heroes and Gods, London.

Sestier, Andrés.1983 *Historia de las matemáticas*, Noriega Editores, editorial Limusa, México.

StrLara, A. M.1980 *Antología de Matemáticas*, Lecturas Universitarias, Nm 8, Vol.II, México.

Vera, F.1961 *Veinte matemáticos célebres*, Cía Gral. Editora S.A., Argentina.

uik, D. J.1980 *Historia concisa de las Matemáticas*, IPN, Mxico.

Páginas de internet consultadas:

http://roble.pntic.mec.es/ jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm

http://www.domainofman.com/book/eschap-41.htm

http://www.cut-the-knot.com/pythagoras/

http://www.mathworld.wolfram.com/PythagoreanTheorem.html

http://mathworld.world.wolfram.com/LawofCosines.html

http://jans.tripod.cl/Pitagoras.htm

http://www.oya-es.net/reportajes/pitagoras.htm

http://www.utp.ac.pa/articulos/pitagoras.html

http://www.ctv.es/USERS/pacoga/bella

http://www.educarchile.cl/ntg/estudiante/1626/printer-96947.html

http://www.math.ubc.ca/people/faculty/cass/Euclid/java/html/babylon.html

http://www.arrakis.es/ mcj/teorema.htm

http://www.fceia.unr.edu.ar/lcc/cdrom/Instalaciones/LaTex/latex.html