



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico
Matemáticas

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

La dinámica holomorfa del método de
Newton-Raphson y el algoritmo de
Shub-Smale.

T E S I S

Que para obtener el título de:
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

P r e s e n t a
P E D R O A C E V E S S Á N C H E Z

Asesor:

Dr. Jesús Muciño Raymundo

Morelia Michoacán, Diciembre de 2007

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por la oportunidad de estudiar una carrera así como el gran apoyo que me han brindado.

Agradezco a mi asesor por haberme dirigido en este proyecto.

Le doy gracias a mis amigos de la carrera.

Introducción

El objetivo de este trabajo es hacer un estudio detallado del método de Newton-Raphson (o simplemente método de Newton), visto como un sistema dinámico holomorfo, y del algoritmo de Shub-Smale. Ambos métodos se utilizan para encontrar una raíz de un polinomio con coeficientes complejos. Por otro lado, haremos una breve exposición de los algoritmos puramente iterativos generalmente convergentes.

En el primer capítulo introduciremos los conceptos básicos de los sistemas dinámicos holomorfos de la esfera de Riemann en sí misma. En las primeras secciones de este capítulo haremos un estudio detallado de los siguientes conceptos:

1. Los conjuntos de Julia y de Fatou.
2. Dinámica local de los ciclos atractores, superatractores.
3. Dinámica local de los ciclos repulsores.
4. Dinámica local de los ciclos neutros racionales.
5. Dinámica local de los ciclos neutros irracionales.

Cerraremos este capítulo con una breve exposición de resultados modernos, como el teorema de las componentes periódicas de Sullivan y el teorema de Shishikura sobre la acotación del número de ciclos para una función racional.

En el capítulo II, estudiaremos de forma detallada la dinámica holomorfa del método de Newton e introduciremos el concepto de algoritmo puramente iterativo, el cual es una generalización (dada por S. Smale y extendida por C. McMullen) del método de Newton.

El método de Newton es uno de los métodos para encontrar raíces más poderosos usados hoy en día. La importancia de éste método estriba en que si se aplica a un polinomio, entonces la convergencia es lineal cerca de un cero de multiplicidad mayor o igual a 2 y es cuadrática cerca de un cero simple. La principal dificultad con este método está en cómo escoger un punto inicial, de tal forma que las iteraciones del endomorfismo de Newton converja. Se estudiará cuál es la principal razón por la cual este método no es *efectivo*, después trataremos de superar esta dificultad introduciendo los algoritmos puramente iterativos y veremos que, aún con esta generalización, sólo existen esta clase de algoritmos para la familia de polinomios de grado 2 y 3.

Por último, en el capítulo III, haremos una breve introducción a la Teoría de la Complejidad e introduciremos y analizaremos la complejidad del algoritmo de Shub-Smale, el cuál nos provee de un método *eficiente* para encontrar una raíz de un polinomio. Este método se basa en el método de Newton con la diferencia crucial de que el algoritmo de Shub-Smale considera un conjunto de varios puntos iniciales.

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	1
Capítulo 1. Dinámica de las funciones racionales.	5
1. Nociones básicas sobre la dinámica de las funciones racionales.	5
2. Los conjuntos de Julia y de Fatou.	8
3. Definición de conjugación y dinámica local.	11
4. Dinámica local de los ciclos atractores y superatractores.	12
5. Dinámica local de los ciclos repulsores.	15
6. Dinámica local de los ciclos neutros racionales.	16
7. Dinámica local de los ciclos neutros irracionales.	20
8. Breve discusión de algunos teoremas modernos.	23
Capítulo 2. El método de Newton y los algoritmos puramente iterativos	27
1. El método de Newton.	27
2. Algoritmos puramente iterativos.	32
Capítulo 3. El algoritmo de Shub-Smale.	37
1. Breve introducción a la teoría de la complejidad.	37
2. Motivación del algoritmo de Shub-Smale.	38
3. El método de Newton continuo.	47
4. ¿En donde comenzar la homotopía?.	51
5. El algoritmo de Shub-Smale y el análisis de su complejidad.	55
Bibliografía	59

Dinámica de las funciones racionales.

1. Nociones básicas sobre la dinámica de las funciones racionales.

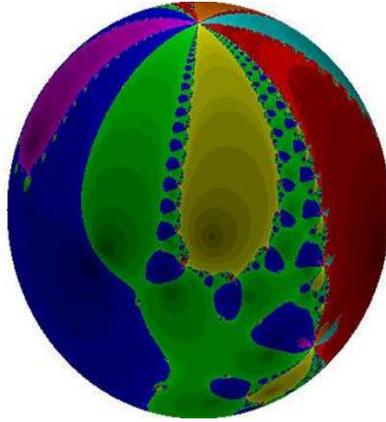


FIGURA 1. El método de Newton aplicado a un polinomio de grado 7. Tomado de Rückert (2007).

Denotemos por $\hat{\mathbb{C}}$ a la esfera de Riemann y por σ a la métrica esférica en $\hat{\mathbb{C}}$. Sea $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función racional cuyo grado d es ≥ 2 . Entonces $R = P/Q$ en donde P y Q son polinomios con coeficientes complejos, sin factores comunes entre sí y $d = \max(\text{grado } P, \text{grado } Q) \geq 2$. Denotaremos por Rat_k al espacio de todas las funciones racionales de grado k , que considerado como un conjunto de coeficientes, se puede identificar con un subespacio abierto de $\mathbb{P}^{2k+1}(\mathbb{C})$ (el espacio proyectivo complejo de dimensión $2k + 1$). Además notemos que R es una cubierta ramificada $d-1$ de la esfera de Riemann \mathbb{C} , más aun toda cubierta ramificada de \mathbb{C} proviene de una función racional (esto se deduce del teorema medible de Riemann, ver pág. x).

Recordemos que una cubierta ramificada $p : S \rightarrow \Sigma$ de grado $d \geq 2$, en donde S y Σ son superficies compactas de Riemann, es una cubierta topológica salvo en un número finito de puntos $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \Sigma$, a estos puntos se les llaman los valores críticos y a los puntos $p^{-1}(\{v_1, \dots, v_n\})$ se les llaman puntos de ramificación. Además el comportamiento local de p en una vecindad de un punto de ramificación es como la función $z \mapsto z^k$, para $k \geq 2$, a $k - 1$ se le llama el orden ramificación de dicho punto.

Por definición, existe una biyección entre el conjunto de las funciones meromorfas de $\hat{\mathbb{C}}$ en sí mismo y el conjunto de las funciones holomorfas de $\hat{\mathbb{C}}$ en sí mismo, sin incluir a la función constante ∞ . Aunque esto no es cierto para funciones holomorfas definidas entre superficies de Riemann distintas de $\hat{\mathbb{C}}$.

La teoría de los sistemas dinámicos holomorfos en una variable estudia la dinámica discreta generada por la iteración de funciones racionales de la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ en sí misma.

Comencemos tomando una función racional $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ y un punto $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$. Consideremos la sucesión formada por la iteración de z_0 bajo R ,

$$z_0, \quad R(z_0), \quad R^{\circ 2}(z_0), \dots$$

en donde $R^{\circ n} = R \circ \dots \circ R$, n veces.

En las siguientes secciones de este capítulo trataremos de contestar las siguientes preguntas:

1. ¿Es esta sucesión convergente?
2. En caso de converger, ¿que tan rápido converge?
3. ¿Cuáles son los puntos de acumulación de la sucesión?
4. ¿Cómo se comporta R localmente en los puntos de acumulación?

Con el propósito de contestar estas preguntas introduzcamos las siguientes convenciones. Definimos la órbita de z_0 bajo R como $O_R(z_0) = \{z_{n+1} := R^{\circ n}(z_0) : n \in \mathbb{N}\}$. Si $O_R(z_0)$ es finito, diremos que z_0 es un punto posperiódico, además si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R^{\circ n}(z_0) = z_0$ diremos que z_0 es un punto periódico. Al menor n tal que $R^{\circ n}(z_0) = z_0$, le llamaremos el período de la órbita. Si $R(z_0) = z_0$ diremos que z_0 es un punto fijo.

Si z_0 es un punto periódico con período n al conjunto $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ le llamaremos el ciclo de z_0 y a $(R^{\circ n})'(z_0) = \mu$ le llamaremos el autovalor del ciclo. El autovalor de un ciclo desempeñará un papel muy importante ya que da información acerca del comportamiento de R cerca del ciclo.

OBSERVACIÓN 1.1. *Notemos que si $z_n \rightarrow w$, cuando $n \rightarrow \infty$, entonces como R es continua,*

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} z_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} R(z_n) = R(w)$$

por lo tanto w es un punto fijo de R , por esta razón haremos un estudio detallado de la dinámica local de los puntos fijos.

DEFINICIÓN 1.2. *Diremos que un punto fijo $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ de R , en donde μ es el autovalor de R en z_0 , es:*

1. *superatractor*: si $\mu = 0$,
2. *atractor*: si $0 < |\mu| < 1$,
3. *neutro racional*: si μ es raíz de la unidad,
4. *neutro irracional*: si $|\mu| = 1$ y no es raíz de la unidad,
5. *repulsor*: si $|\mu| > 1$.

De forma análoga diremos que un ciclo $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ es superatractor, atractor, neutro racional, neutro irracional o repulsor si su autovalor μ cumple que $\mu = 0$, $|\mu| < 1$, μ es raíz de la unidad, $|\mu| = 1$ y no es raíz de la unidad, o $|\mu| > 1$, respectivamente.

Recordemos que una sucesión de funciones meromorfas $\{f_n\}_{n \geq 1}$, en donde $f_n : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, para $n \geq 1$, converge uniformemente a $f : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, si para todo punto $z \in U$, existe una vecindad abierta V , tal que $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente a f en V . Una de las principales herramientas será el teorema de Montel. Con el propósito de establecer este teorema comencemos con la siguiente,

DEFINICIÓN 1.3. *Sea $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ abierto y $\Phi = \{f_i : i \in I\}$ una familia de funciones meromorfas con dominio U . Diremos que Φ es normal o que es una familia normal, si toda sucesión de Φ tiene una subsucesión que converge localmente uniformemente en U .*

Notemos que Φ es una familia normal si y sólo si toda sucesión $\{f_n\}_{n \geq 1}$, con $f_n \in \Phi$, tiene una subsucesión que converge uniformemente en compactos.

Aunque esta definición a primera vista no tenga nada que ver con la teoría de los sistemas dinámicos holomorfos, veremos más adelante que existe una fuerte conexión gracias al siguiente,

TEOREMA 1.4. *(Arzela-Azcoli) Sea $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ abierto y $\Phi = \{f_i : i \in I\}$ una familia de funciones meromorfas con dominio U . Entonces Φ es normal si y sólo si Φ es una familia equicontinua.*

DEMOSTRACIÓN. Ver Rudin (1966), pág. 144. □

Por último recordemos el

TEOREMA 1.5. *(Montel) Sea Φ una familia de funciones meromorfas en un dominio $D \subset \mathbb{C}$. Si toda $f \in \Phi$ omite tres valores fijos en $\hat{\mathbb{C}}$ entonces Φ es una familia normal.*

DEMOSTRACIÓN. Ver Krantz (1990), pág. 92. □

2. Los conjuntos de Julia y de Fatou.

Comencemos con la siguiente definición,

DEFINICIÓN 2.1. (*Conjunto de Julia y Conjunto de Fatou*) Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función holomorfa. Al conjunto de puntos $z \in \hat{\mathbb{C}}$ para los cuales existe una vecindad W de z tal que $\{f^{on}\}_{n \geq 1}$ es una familia normal en W se le llama el conjunto de Fatou y lo denotaremos por $\mathfrak{F}(f)$. Al complemento lo llamaremos el conjunto de Julia y lo denotaremos por $\mathfrak{J}(f)$.

Notemos que por definición el conjunto de Fatou es abierto y el conjunto de Julia es cerrado. Parece que esta definición es un tanto artificial, por ello nos detendremos un poco aquí para dar una breve discusión acerca de ella. Primero recordemos el criterio de estabilidad de Liapunov.

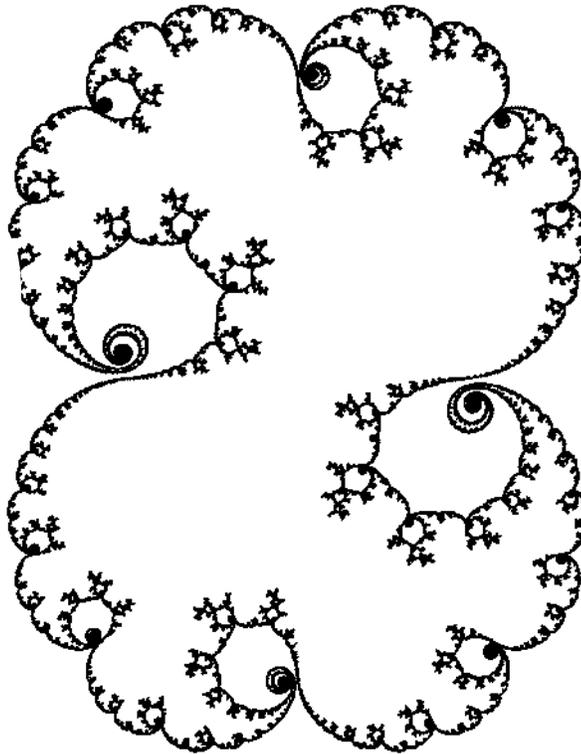


FIGURA 2. Conjunto de Julia del polinomio $z \mapsto z^2 + (0,99 + 0,14\sqrt{-1})z$.

DEFINICIÓN 2.2. Un punto $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ es estable en el sentido de Liapunov para una función racional R , si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $z \in \hat{\mathbb{C}}$ es tal que $\sigma(z_0, z) < \delta$ entonces $\sigma(R^{on}(z_0), R^{on}(z)) < \varepsilon$, para todo n .

Entonces por el teorema de Arzela-Azcoli obtenemos que un punto pertenece al conjunto de Fatou si y sólo si es estable en el sentido de Liapunov. Por lo tanto un punto z_0

pertenece al conjunto de Julia si y sólo si existe una vecindad de z_0 en donde la dinámica tiene una dependencia muy sensible al cambio de las condiciones iniciales, es decir, no satisface 2.2.

Sea g una función de un conjunto arbitrario X en sí mismo y $A \subset X$, diremos que A es invariante hacia adelante, invariante hacia atrás o completamente invariante si $g(A) = A$, $g^{-1}(A) = A$ o $g(A) = A = g^{-1}(A)$, respectivamente. Además, notemos que si A es completamente invariante, entonces $X - A$ también es completamente invariante.

Ahora enunciaremos y demostraremos las principales propiedades de los conjuntos de Fatou y de Julia. El siguiente teorema es uno de los resultados más importantes.

TEOREMA 2.3. *Sea R una función racional. Los conjuntos $\mathfrak{F}(R)$ y $\mathfrak{J}(R)$ son completamente invariantes bajo R .*

DEMOSTRACIÓN. Primero notemos que es suficiente demostrar que $R(\mathfrak{F}(R)) \in \mathfrak{F}$ y $R^{-1}(\mathfrak{F}(R)) \in \mathfrak{F}(R)$. Es decir, $z_0 \in \mathfrak{F}(R)$ si y sólo si $R(z_0) \in \mathfrak{F}(R)$.

Supongamos que $z_0 \in \mathfrak{F}(R)$, entonces si $\{R^{o(n_j+1)}\}$ converge uniformemente en una vecindad abierta U de z_0 , se sigue que $\{R^{o n_j}\}$ converge uniformemente en la vecindad $R(U)$, que es abierta, de $R(z_0)$. De esta observación se desprende que $R(z_0) \in \mathfrak{F}(R)$.

Ahora supongamos que $R(z_0) \in \mathfrak{F}(R)$. Observemos que si $\{R^{o(n_j-1)}\}$ converge uniformemente en una vecindad abierta V de $R(z_0)$, entonces $\{R^{o n_j}\}$ converge uniformemente en la vecindad $R^{-1}(V)$ abierta de z_0 . De esta observación concluimos que $R(z_0) \in \mathfrak{F}(R)$.

Como $\mathfrak{F}(R)$ es completamente invariante bajo R , entonces $\mathfrak{J}(R)$ también es completamente invariante bajo R . \square

COROLARIO 2.4. *Sea R una función racional no constante, entonces tenemos que para todo natural n , $\mathfrak{F}(R^{o n}) = \mathfrak{F}(R)$ y $\mathfrak{J}(R^{o n}) = \mathfrak{J}(R)$.*

TEOREMA 2.5. *Sea R una función racional no constante, entonces el conjunto de Julia $\mathfrak{J}(R)$ es no vacío.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathfrak{J}(R) = \emptyset$, entonces existe una sucesión $\{R^{o n_j}\}_{j \geq 0}$ que converge uniformemente en $\hat{\mathbb{C}}$, a una función holomorfa $g : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Como g es holomorfa en todo $\hat{\mathbb{C}}$, entonces g es una función racional. Si g fuese constante entonces para $j \geq 1$ suficientemente grande, la imagen de $R^{o n_j}$ estaría contenida en una vecindad pequeña de ese valor constante, lo cual es imposible ya que R^n es una cubierta topológica de $\hat{\mathbb{C}}$, para todo n . Ahora como g no es constante entonces existe $K \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $R^{o n_k}$ tiene el mismo número de ceros para $k \geq K$ (esto se deduce del principio del argumento), lo cual es imposible ya que $R^{o n}$ tiene grado d^n . \square

Sea $z \in \mathfrak{J}(R)$, entonces tenemos como consecuencia del teorema de Montel que para cualquier vecindad U suficientemente pequeña, $R^{on} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ omite un conjunto $E_z(R)$ con a lo más dos puntos. Para ver la definición de conjugación ver la sección 1.3.

PROPOSICIÓN 2.6. *El conjunto E_z no depende de z , por lo que lo denotaremos como E . Además si E consiste de un solo elemento entonces, mediante una conjugación, $R(z)$ es un polinomio. Por otro lado si E_z consta de dos elementos, mediante una conjugación, $R(z)$ es Az^d ó Az^{-d} . De esto se desprende que $E \subset \mathfrak{F}(R)$.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que E_z es independientes del punto. Por definición $R^{-1}(E_z) = E_z$ y como R es sobre se sigue que si $E \neq \emptyset$ entonces consta de un punto fijo, dos puntos fijos ó un punto periódico de período 2. Si E_z consta de un sólo punto w , entonces $R(w) = w$ y aplicando una conjugación de Moebius adecuada, podemos suponer que $w = 1$ y como $R^{-1}(1) = 1$ entonces R es un polinomio. Por otro lado si E_z consta de dos puntos, conjugando R podemos suponer que son los puntos 0 y 1, entonces tendríamos los casos $R(0) = 0$ y $R(1) = 1$, ó $R(0) = 1$ y $R(1) = 0$. En el primer caso tendríamos que $R(z) = Az^d$ y en el segundo caso $R(z) = Az^{-d}$. De lo anterior se desprende inmediatamente que $E \subset F$. \square

Definamos la órbita inversa de un punto z_0 como $O^-(z_0) = \bigcup_{n \geq 1} R^{-n}(z_0)$.

TEOREMA 2.7. *$O^-(z_0)$ es densa en $\mathfrak{J}(R)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $z \in \mathfrak{J}(R)$, supongamos que existe una vecindad abierta U de z tal que $O^-(z_0) \cap U = \emptyset$ y $U \cap E = \emptyset$, entonces por la definición de E , $\bigcup_{n \geq 1} R^{on}(U) = \hat{\mathbb{C}} - E$. Por lo anterior y como $z \in E$ tenemos que existen $m \geq 0$ y $w \in U$ tal que $R^{om}(w) = z_0$, contradicción, ya que $O^-(z_0) \cap U = \emptyset$. \square

TEOREMA 2.8. *Si un subconjunto de $\mathfrak{J}(R)$ es completamente invariante entonces es denso en $\mathfrak{J}(R)$. Si un subconjunto $\mathfrak{J}_0 \subset \mathfrak{J}(R)$ es completamente invariante, entonces $\mathfrak{J}(R)$ es igual a la frontera \mathfrak{J}_0 .*

DEMOSTRACIÓN. El primer enunciado es claro gracias al teorema 2.8. Para el segundo enunciado notemos que como \mathfrak{J}_0 es completamente invariante entonces $\partial\mathfrak{J}_0$ también lo es, entonces por el primer enunciado y como \mathfrak{J}_0 es cerrado concluimos que $\mathfrak{J}(R) = \partial\mathfrak{J}_0$. \square

TEOREMA 2.9. *Si el conjunto de Julia de una función racional R tiene un punto interior entonces $\mathfrak{J}(R) = \hat{\mathbb{C}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathfrak{J}(R)$ tiene un punto interior z , entonces existe una vecindad U de z tal que $U \subset \mathfrak{J}(R)$. Como $\mathfrak{J}(R) \cap E = \emptyset$, entonces $\bigcup_{n \geq 1} R^{on}(U) = \hat{\mathbb{C}} - E$

y como $R^{on}(U) \subset \mathfrak{J}(R)$ para todo $n \geq 1$ tenemos que $\mathfrak{J}(R) = \hat{\mathbb{C}} - E$, pero además como $\mathfrak{J}(R)$ es cerrado obtenemos que $E = \emptyset$. \square

TEOREMA 2.10. *El conjunto de Julia es un conjunto perfecto.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\zeta \in \mathfrak{J}(R)$, U una vecindad abierta arbitraria de ζ y z_0 un punto tal que $R^{op}(z_0) = \zeta$. Como $z_0 \in \mathfrak{J}(R)$ y no pertenece al conjunto excepcional E de R , tiene un predecesor $z_1 \in U$, es decir, $R^{om}(z_1) = z_0$, para algún m . Ahora si fuésemos capaces de demostrar que $z_1 \neq \zeta$, el resultado se seguiría de inmediato. Supongamos primero que $R^{on}(\zeta) \neq \zeta$ para todo n y tomemos un z_0 tal que $R(z_0) = \zeta$. Entonces $R^{on}(\zeta) \neq z_0$, para todo n . Por lo tanto $z_1 \neq \zeta$. Ahora supongamos que $R^{op}(\zeta) = z_0$, para algún p , entonces existe $z_0 \neq \zeta$ tal que $R^{op}(z_0) = \zeta$. Otra vez, tenemos que $R^{on}(\zeta) \neq z_0$, para todo n , ya que de otra forma tendríamos, $z_0 = R^{on}(R^{op}(\zeta)) = R^{op}(R^{on}(\zeta)) = R^{op}(z_0) = \zeta$. \square

TEOREMA 2.11. *El conjunto de Julia $\mathfrak{J}(R)$ es igual a la cerradura de los ciclos repulsores.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe $\zeta \in \mathfrak{J}(R)$ tal que no es el límite de puntos periódicos. Como $\mathfrak{J}(R)$ es un conjunto perfecto, podemos asumir que ζ no es un punto fijo y que existe una vecindad abierta U de ζ que no contiene puntos críticos ni polos de R . Sean f_1 y f_2 dos inversas distintas de R^{-1} en U y $f_3 = Id_U$, entonces si U es lo suficientemente pequeño tenemos que $f_i(U) \neq f_j(U) = \emptyset$, para $i \neq j$, además como $R^{om}(z) \neq z$ para todo $z \in U$ y $m \in \mathbb{N}$,

$$g_n(z) = \frac{R^{on} - f_1}{R^{on} - f_2} \cdot \frac{Id|_U - f_2}{Id|_U - f_1}$$

omite los valores 0, 1 y al ∞ en U . Entonces por el teorema de Montel, g_n es una familia normal. Por lo tanto si despejamos R^{on} obtenemos que R^{on} es una familia normal. Entonces obtenemos que los puntos periódicos son densos en $\mathfrak{J}(R)$. Más adelante (ver teorema 2.0.11) demostraremos que existen sólo un número finito de ciclos superatractores, atractores, neutros racionales y neutros irracionales, por lo que el conjunto de ciclos repulsores es denso en $\mathfrak{J}(R)$. \square

3. Definición de conjugación y dinámica local.

Sean $f : U \rightarrow U$ y $g : V \rightarrow V$ dos funciones holomorfas, en donde U y V son subconjuntos de $\hat{\mathbb{C}}$. Diremos que f y g son conformemente conjugadas, si existe un difeomorfismo conforme $\varphi : U \rightarrow V$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{f} & U \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 V & \xrightarrow{g} & V
 \end{array}$$

A la relación $g(\varphi) = \varphi(f)$ la llamaremos la ecuación funcional de Schöder. Supongamos que f es holomorfa en una vecindad de z_0 , desarrollando f en su serie de Taylor obtenemos,

$$f(z) = z_0 + \eta(z - z_0) + a(z - z_0)^n + \dots,$$

en donde a es distinto de 0 y $n \geq 2$. Cerca de z_0 , f se parece a la función $g(w) = \eta w$, si $\eta \neq 0$, y a $g(w) = aw^n$, si $\eta = 0$, en donde $w = z - z_0$. Ahora cabe hacernos la pregunta: ¿Cuándo existe una función conforme φ tal que f y g son conjugadas? La respuesta depende del autovalor η . Demostraremos en las siguientes secciones, que no siempre es posible encontrar una conjugación de este tipo, salvo para el caso en el que el punto fijo es un punto fijo superatractor, atractor o repulsor.

Notemos que en el caso en el que η es una raíz n -ésima de la unidad, cualquier difeomorfismo conforme $\varphi(z) = zh(z^n) = b_1z + b_{n+1}z^{n+1} + \dots$, conjuga a ηz en sí mismo. En particular, la función $z \mapsto z$, se conjuga en sí mismo por cualquier difeomorfismo conforme φ . Así que tendremos que considerar otras formas normales, las cuales darán lugar a hermosas figuras.

En las siguientes secciones haremos un estudio detallado sobre la dinámica local de los ciclos.

4. Dinámica local de los ciclos atractores y superatractores.

Supongamos que z_0 es un punto fijo (super)atractor de la función analítica $f : U \rightarrow V$. Sea $\rho > 0$ tal que $|f'(z_0)| < \rho < 1$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(z) - z_0| \leq |z - z_0|$$

para todo $z \in D_\varepsilon(z_0)$. De esta desigualdad deducimos que

$$|f^{\circ n}(z) - z_0| \leq \rho^n |z - z_0|,$$

para todo $z \in D_\varepsilon(z_0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto obtenemos que para todo $z \in D_\varepsilon(z_0)$, $f^{\circ m}(z) \rightarrow z_0$ cuando $m \rightarrow \infty$. Además f converge uniformemente a z_0 en $D_\varepsilon(z_0)$.

Ahora tomemos los conjuntos $f^{-1}1(D_\varepsilon(z_0)), f^{-2}(D_\varepsilon(z_0)), \dots$. A la unión de estos conjuntos la denotaremos por $C(z_0)$ y la llamaremos la cuenca de z_0 . A la componente conexa de $C(z_0)$ que contiene a z_0 la llamaremos la cuenca inmediata de z_0 y la denotaremos por $C^*(z_0)$. Cabe notar que la cuenca inmediata de z_0 coincide con la componente de $\mathfrak{F}(f)$ que contiene a z_0 . Ahora haremos una generalización de estas definiciones. Sea $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ un ciclo (super)atractor, definiremos la cuenca del ciclo como la unión de cada una de las cuencas de los puntos del ciclo y la denotaremos por $C(\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\})$. De forma similar definiremos la cuenca inmediata del ciclo y la denotaremos por $C^*(\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\})$.

Por otro lado, como $f^{\circ n}$ converge uniformemente a z_0 en $D_\varepsilon(z_0)$, por el teorema de Vitali (ver Beardon (1991), pág. 56), $f^{\circ n} \rightarrow z_0$ localmente uniforme en la cuenca inmediata de z_0 .

Ahora describiremos el comportamiento local de la función f cerca de los puntos superatractores. El siguiente teorema se debe a L. E. Böttcher (1904).

TEOREMA 4.1. *Supongamos que z_0 es un punto fijo superatractor de f , por lo que tenemos que localmente:*

$$f(z) = z_0 + a_p(z - z_0)^p + \dots, \quad a_p \neq 0, \quad p \geq 2.$$

Entonces existe una función conforme $\zeta = \varphi(z)$ de una vecindad de z_0 a una vecindad de 0 que conjuga $f(z)$ a ζ^n . Además, tenemos que la conjugación es única salvo multiplicación por una raíz $(n-1)$ -ésima de la unidad.

DEMOSTRACIÓN. Para la existencia, supongamos que $z_0 = 0$. Existe $\delta > 0$ y $A > 1$ tal que si $|z_0| < A$ entonces $|f(z)| \leq A|z|^p$. Ahora por inducción tenemos que:

$$|f^{\circ n}(z)| \leq (A|z|)^{p^n}, \quad |z| \leq \delta$$

para $n \geq 2$, así que $f^{\circ n}(z) \rightarrow 0$ exponencialmente para z suficientemente pequeño. Conjugando f por la función $z \mapsto cz = w$ en donde $c^{n-1} = 1/a_n$, obtenemos un cambio de variable y ahora f toma la forma $f(w) = w^n + \dots$. Por lo tanto podemos asumir que $a_n = 1$. Nuestra atención se centra en la búsqueda de una función $\varphi(z) = z + \dots$, tal que $\varphi(f(z)) = \varphi^n$, o de otra forma $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \zeta^n$. Sea

$$\varphi_n(z) = f^{\circ n}(z)^{p^{-n}} = (z^{p^{-n}} + \dots)^{p^{-n}} = z(1 + \dots)^{p^{-n}},$$

la cual está bien definida en una vecindad del origen. Notemos que φ_n satisface,

$$\varphi_{n-1} \circ f = (f^{\circ(n-1)} \circ f)^{p^{-n+1}} = \varphi_n^p$$

así que si $\varphi_n \rightarrow \varphi$, entonces por la igualdad anterior $\varphi \circ f = \varphi_n$, por lo tanto φ es una solución. Para demostrar que $\{\varphi_n\}$ converge, notemos que,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} &= \left(\frac{\varphi_1 \circ f^{\circ n}}{f^{\circ n}} \right)^{p^{-n}} = (1 + O(|f^{\circ n}|))^{p^{-n}} \\ &= 1 + O(p^{-n})O(|z|^{p^n} A^{p^n}) = 1 + O(p^{-n}) \end{aligned}$$

si $|z| \leq 1/A$. Así que el producto:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$$

converge uniformemente para $|z| \leq a < 1/A$ y esto implica que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente. Por lo tanto la conjugación φ existe.

Para demostrar la unicidad bastará considerar el caso especial cuando $f(z) = z^n$. Si una función de la forma $\varphi(z) = c_1 z + c_k z^k + O(z^k)$ conjugaba a $z \mapsto z^n$ en sí misma, entonces la serie:

$$\varphi(z^p) = c_1 z^p + c_k z^{pk} + \dots$$

debe ser igual a:

$$\varphi^p = c_1^p + p c_1^{n-1} c_k z^{p+k-1} + \dots$$

con $pk > p + k - 1$. Comparando los coeficientes, obtenemos que $c_1^{n-1} = 1$ y todos los demás coeficientes de los términos de orden mayor son 0. \square

El siguiente teorema de linearización se debe a G. Koenigs (1884).

TEOREMA 4.2. *Consideremos z_0 un punto fijo atractor de f con autovalor μ . Entonces existe una función conforme $\zeta = \varphi(z)$ de una vecindad de z_0 a una vecindad de 0, que conjugaba a $f(z)$ a la función $g(\zeta) = \mu\zeta$. Además la conjugación es única salvo multiplicación por un número complejo distinto de 0.*

DEMOSTRACIÓN. La unicidad se sigue de la discusión anterior. Supongamos que $z_0 = 0$. Definamos $\varphi_n(z) = \mu^{-n} f^{\circ n}(z) = z + \dots$. Entonces φ_n satisface:

$$\varphi_n \circ f = \mu^{-n} f^{\circ n}(z) = \mu \varphi_{n+1}.$$

La idea de la demostración consiste en exhibir que φ_n converge uniformemente a φ en una vecindad suficientemente pequeña de z_0 . Después tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ a ambos lados de la desigualdad anterior obtenemos que $\varphi \circ f = \mu\varphi$, así que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(\zeta) = \mu\zeta$ y por lo tanto φ es una conjugación.

Notemos que para $\delta > 0$ suficientemente pequeño tenemos que:

$$|f(z) - \mu\zeta| \leq C|z|^2, \quad |z| \leq \delta.$$

Así que $|f(z)| \leq |\mu||z| + C|z|^2 \leq (|\mu| + C\delta)|z|$ y por inducción con $||\mu| + C\delta| < 1$,

$$|f(z)^n| \leq (|\mu| + C\delta)^n |z|, \quad |z| \leq \delta.$$

Por último tomamos $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que $\rho = (|\mu| + C\delta)^2/|\mu| < 1$ y obtenemos:

$$|\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)| = \left| \frac{f^{on}(f(z)) - \mu f^{on}(z)}{\mu^{n+1}} \right| \leq \frac{C|f^{on}(z)|^2}{|\mu|^{n+1}}$$

para todo $|z| \leq \delta$. Así que $\varphi_n(z)$ converge uniformemente para $|z| \leq \delta$. \square

Reuniendo los resultados anteriores y notando que $\mathfrak{F}(f^{on}) = \mathfrak{F}(f)$ obtenemos el siguiente,

COROLARIO 4.3. *Consideremos un ciclo atractor (ó superatractor) $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ de una función racional R de grado $d \geq 2$. Entonces cada z_i pertenece a una componente distinta de \mathfrak{F}_i , del conjunto $\mathfrak{F}(R)$ y $R^{on_j} \rightarrow z_j$ localmente uniformemente, cuando $j \rightarrow \infty$. Además la dinámica local está descrita por los teoremas anteriores.*

5. Dinámica local de los ciclos repulsores.

Del teorema de linearización de Koenig se desprende que una función analítica con un punto fijo repulsor se puede linearizar.

Supongamos que $f(z) = z_0 + \mu(z - z_0) + \dots$, en donde $|\mu| > 1$. Entonces $f^{-1}(z) = z_0 + (z - z_0)/\mu + \dots$ tiene un punto fijo atractor en z_0 , por lo tanto cualquier función que conjugue a $f^{-1}(z)$ en $\zeta \mapsto \zeta/\mu$, también conjugue a $f(z)$ en $\zeta \mapsto \mu\zeta$.

TEOREMA 5.1. *Sea R una función racional, entonces todo ciclo repulsor de R pertenece a $\mathfrak{F}(R)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que z_0 es un punto fijo repulsor de R . Sin pérdida de generalidad supongamos que $z_0 = 0$ y que el valor propio de R en 0 es $\mu > 1$. Por lo tanto tenemos que cuando $\mu \rightarrow \infty$, $(R^{on})'(0) = \mu^n \rightarrow \infty$. Ahora supongamos que el cero esta en $\mathfrak{F}(R)$, entonces tendríamos que $\{R^{on}\}$ es normal en una vecindad del cero. De lo anterior deducimos que existe una sucesión que converge uniformemente a una función analítica g en una vecindad del cero. Pero $g(0) = 0$ y así que $g'(0)$ es finito. Por otro lado tenemos que $g'(0) = \limsup (R^{on})'(0) = \infty$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $z_0 \in \mathfrak{F}(R)$.

De lo anterior deducimos que si $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ es un ciclo repulsor entonces $z_j \in \mathfrak{F}(R^{oj})$ y como $\mathfrak{F}(R^{oj}) = \mathfrak{F}(R)$, el ciclo pertenece a $\mathfrak{F}(R)$. \square

6. Dinámica local de los ciclos neutros racionales.

TEOREMA 6.1. *Sea R una función racional de grado al menos 2, entonces todo ciclo neutro racional de R pertenece a $\mathfrak{J}(R)$.*

DEMOSTRACIÓN. Comenzaremos la demostración con el caso en el que la longitud del ciclo es 1, *i. e.* tenemos un punto fijo neutro racional. Sea ζ punto fijo neutro racional de R , por conjugación, podemos suponer que $\zeta = 0$, entonces,

$$R(z) = \mu z + az^r + \dots,$$

en donde $a \neq 0$, $r \geq 2$, y $\mu^k = 1$ para algún entero positivo k . Sea $S = R^{\circ k}$, así que,

$$S(z) = z + cz^p + \dots,$$

en donde $c \neq 0$ y p es un entero positivo (se puede comprobar fácilmente que $c \neq 0$ ya que el grado de R es al menos 2). Por inducción tenemos que,

$$S^{\circ n}(z) = z + ncz^p + \dots,$$

así que $(S^{\circ n})^{(p)}(0) \rightarrow \infty$, cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto $\{S^{\circ n}\}$ no puede ser normal en ninguna vecindad del origen, ya que de otra forma habría una subsucesión de $\{S^{\circ n}\}$ que convergería a una función holomorfa f tal que $f(0) = 0$ y $f^{(p)}(0) = \infty$. Como consecuencia tenemos que $\{R^{\circ n}\}$ no es normal en ninguna vecindad del 0, así que $\zeta = 0 \in \mathfrak{J}(R)$.

Finalmente, sea ζ un elemento de un ciclo neutro racional de longitud m , entonces por el argumento anterior tenemos que $\zeta \in \mathfrak{J}(R^{\circ m})$ y por el corolario 2.4, $\zeta \in \mathfrak{J}(R)$. \square

Notemos que si $\text{grado}(R) = 1$, entonces todo ciclo neutro pertenece a $\mathfrak{F}(R)$. Ahora nos enfocaremos a dar una descripción detallada de la dinámica local de los puntos neutros racionales. Notemos que la dinámica local de un punto neutro racional no puede ser descrita por la parte lineal de su desarrollo en serie de Taylor ya que la dinámica de este punto sería descrita por una rotación de orden finito y R puede tener orden finito si y sólo si $\text{grado}(R) = 1$. Con este propósito comencemos con el siguiente lema.

LEMA 6.2. *Sea f una función holomorfa tal que:*

$$f(z) = z - z^{p+1} + O(z^{p+2})$$

en alguna vecindad U del origen. Sean $\omega_1, \dots, \omega_p$ las p -ésimas raíces de la unidad y sean τ_1, \dots, τ_p las p -ésimas raíces de -1 . Entonces para r_0 y θ_0 reales suficientemente pequeños tendremos,

1. $|f(z)| < |z|$ en cada sector

$$S_j = \{z : |z| < r_0, |\arg(z/\omega_j)| < \theta_0\}.$$

2. $|f(z)| > |z|$ en cada sector

$$\Sigma_j = \{z : |z| < r_0, |\arg(z/\tau_j)| < \theta_0\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Comencemos con la siguiente ecuación

$$f(z)/z = 1 - z^p[1 + h(z)],$$

en donde $h(z)$ es holomorfa y $h(0) = 0$, sea

$$S = \{\zeta : |\zeta| < 1/2, |\arg \zeta| < \pi/4\},$$

entonces para r_0 y θ_0 suficientemente pequeños tendremos que si $z \in S_j$ esto implica que $z^p[1 + h(z)] \in S$, y si $z \in \Sigma_j$ entonces $-z^p[1 + h(z)] \in S$. Las desigualdades se siguen de geometría elemental. \square

Los números ω_j y τ_j en el lema anterior son las $2p$ raíces de la unidad. Estos números son alternados e igualmente espaciados alrededor del círculo unitario. Si

$$f(z) = z - \eta z^{p+1} + O(z^{p+2}), \text{ con } \eta \neq 0$$

entonces tendremos un resultado similar con respecto a ω_j y τ_j remplazados por las soluciones de $\eta z^p = -1$ y $\eta z^p = 1$, respectivamente. Como $\eta \neq 0$ entonces existe f^{-1} cerca del origen y tendremos que

$$f^{-1}(z) = z - \eta z^{p+1} + O(z^{p+2})$$

así que $|f^{-1}(z)| > |z|$ en cada S_j y $|f^{-1}(z)| > |z|$ en cada Σ_j .

Para analizar los ciclos neutros racionales necesitaremos el concepto de pétalo. Para cada número positivo t , cada entero positivo p , y cada k en $\{0, 1, \dots, p-1\}$ definimos los conjuntos

$$\Pi_k(t) = \{re^{\sqrt{-1}\theta} : r^p < t(1 + \cos(p\theta)), |2k\pi/p - \theta| < \pi/p\}$$

A estos conjuntos los llamaremos pétalos. Notemos que si fijamos p y t entonces tenemos que todos los pétalos son disjuntos dos a dos y cada pétalo subtiende un ángulo de $2\pi/p$ en el origen (así que el ángulo total subtendido por todos los pétalos es 2π). Al rayo $\theta = 2k\pi/p$ contenido en $\Pi_k(t)$ lo llamaremos la línea de simetría de $\Pi_k(t)$.

Supongamos que ζ es un punto fijo de R tal que $R'(\zeta) = 1$. Por conjugación podemos suponer que $\zeta = 0$, desarrollando R en serie de Taylor obtenemos que

$$R(z) = z(1 + az^p + bz^{2p} + cz^{2p+1} + \dots)$$

conjugando R por medio de una función del tipo $z \mapsto \alpha z$, podemos suponer que R es de la forma

$$R(z) = z(1 - z^p + bz^{2p} + cz^{2p+1} + \dots)$$

lo importante aquí es que no existen términos entre z^p y z^{2p+1} en la serie de Taylor de R alrededor del 0. Esto nos permitirá dar una descripción detallada sobre la dinámica local de los ciclos neutro racionales. Ahora daremos una primera versión del Teorema de los pétalos. Pero antes necesitaremos definir algunos términos. Sea f una función holomorfa con expansión en serie de Taylor

$$f(z) = z - z^{p+1} + O(z^{2p+1})$$

alrededor del 0.

Para cada real positivo r_0 , sea

$$S = \{re^{\sqrt{-1}\theta} : 0 < r < r_0, |\theta| < \pi/p\}$$

y

$$W = \{re^{\sqrt{-1}\theta} : r > 1/r_0^p, |\theta| < \pi\}$$

más adelante fijaremos r_0 de tal manera que cumpla ciertas condiciones.

La función holomorfa $\varphi : z \mapsto 1/z^p$ es una cubierta ramificada $p-1$ de $\hat{\mathbb{C}}$ en sí misma. Además φ restringida a S es una función conforme de S a W . Por lo tanto tiene una función inversa $\varphi^{-1} : W \rightarrow S$.

Así que podemos definir la función $g : W \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de la siguiente forma

$$g(z) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = [f(z^{-1/p})]^{-p}.$$

Lo que haremos es estudiar el comportamiento de f en S por medio de la función g .

Ahora expresaremos la función g en serie de Laurent alrededor del 0. Utilizando la expansión de f obtenemos que

$$1/[f(z)]^p = z^{-1} + p + Az^p + h(z),$$

en donde A es una constante y h es una función holomorfa tal que

$$|h(z)| \leq B|z|^{p+1}, \quad B > 0,$$

en una vecindad U del origen. Sea r_0 lo suficientemente pequeño tal que $S \subset U$. Supongamos que ω está en W , entonces $\varphi^{-1}(\omega)$ pertenece a S y tenemos que

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(\omega) \\ &= [f \circ \varphi^{-1}(\omega)]^{-p} = \omega + p + A/\omega + \psi(\omega), \end{aligned}$$

en donde

$$(1) \quad |\psi(\omega)| = |h \circ \varphi^{-1}(\omega)| \leq B|\varphi^{-1}(\omega)|^{p+1} \leq B/|\omega|^{1+(1/p)}.$$

Estas estimaciones son de capital importancia ya que si r es un real positivo lo suficientemente grande entonces, g se comporta como una traslación $\omega \mapsto \omega + p$ y manda el semiplano $\{\omega : \Re(\omega) \geq r\}$ en sí mismo. Sin embargo podemos mejorar este resultado. Demostraremos que existe una región de \mathbb{C} acotada por una parábola que es invariante hacia adelante. Sea K tal que

$$(2) \quad K > \max\{1/r_0^p, 3(|S| + B)\} > 1$$

(aquí consideraremos que $r_0 < 1$) y sea

$$\Pi = \{\omega + \sqrt{-1}y : y^2 > 4K(K - x)\}$$

notemos que Π está acotada por una parábola y que $\Pi \subset W$. Ahora ya estamos listos para enunciar Teorema de los Pétalos. La demostración de este teorema es una consecuencia inmediata del siguiente,

LEMA 6.3. Sean $g : W \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ y Π definidos anteriormente.

- (a) Π es invariante hacia adelante bajo g ,
- (b) $\Re[g^{on}(\omega)] \rightarrow \infty$ uniformemente en Π ,
- (c) $g : \Pi \rightarrow \Pi$ es conjugada a una traslación.

DEMOSTRACIÓN. Ver Beardon (1991), pág. 118. □

TEOREMA 6.4. (Teorema de los Pétalos) Supongamos que la función holomorfa f tiene una expansión en serie de Taylor alrededor del 0 de la siguiente forma

$$(3) \quad f(z) = z - z^{p+1} + O(z^{2p+1}),$$

entonces para t lo suficientemente pequeño:

- (a) f manda cada pétalo $\Pi_k(t)$ en si mismo,
- (b) $f^{on} \rightarrow 0$ uniformemente cuando $n \rightarrow \infty$,
- (c) $\arg f^{on} \rightarrow 2k\pi/p$ localmente uniformemente en Π_k cuando $n \rightarrow \infty$,
- (d) $|f(z)| < |z|$ en una vecindad del eje de simetría de cada pétalo,
- (e) $f : \Pi_k(t) \rightarrow \Pi_k(t)$ es conjugada a una traslación.

7. Dinámica local de los ciclos neutros irracionales.

Este caso todavía tiene varios problemas abiertos que discutiremos más adelante después de repasar todo lo que se sabe. Comencemos con el siguiente teorema.

TEOREMA 7.1. *Sea z_0 un punto fijo neutro irracional de una función racional R . Entonces R es linealizable si y sólo si $z_0 \in \mathfrak{F}(R)$.*

DEMOSTRACIÓN. Ahora supongamos que $z_0 \in \mathfrak{F}(R)$, demostraremos que R es linealizable en una vecindad de z_0 . Sin pérdida de generalidad supongamos que $z_0 = 0$, así que existe una vecindad del origen en donde $\{R^{on}\}$ es equicontinua, de esto deducimos que existe una vecindad U del origen en donde se tiene que para toda n ,

$$(4) \quad |R^{on}(z)| = |R^{on}(z) - R^{on}(0)| < 1$$

Sea $\mu = R'(0)$, así que $|\mu| = 1$. Definamos la función T_n para toda $n > 0$ de la siguiente forma,

$$T_n = [z + R(z)/\mu + \dots + R^{o(n-1)}(z)/\mu^{n-1}]/\mu$$

Notemos que como $|\mu| = 1$ y $(R^{ok})'(0) = \mu^k$ tenemos que $T_n'(0) = 1$ y

$$(5) \quad |T_n(z)| \leq 1,$$

para todo $z \in U$. Las funciones T_n satisfacen,

$$\begin{aligned} (n/\mu)T_n(R(z)) + z &= (n+1)T_{n+1}(z) \\ &= nT_n(z) + R^{on}(z)/\mu^n. \end{aligned}$$

Así que de la relación anterior deducimos que,

$$(6) \quad T_n(R(z)) - \mu T_n(z) \rightarrow 0$$

uniformemente cuando $n \rightarrow \infty$. Por último la relación (5) implica que $\{T_n\}$ es normal en U , de aquí se sigue que existe $\{T_{n_k}\}$ sucesión que converge localmente uniformemente en U a alguna función analítica f , entonces por la relación (6), tenemos que,

$$f(R(z)) = \mu f(z) \text{ para todo } z \in U.$$

□

TEOREMA 7.2. *Sea z_0 un punto fijo neutro irracional de una función racional R de grado al menos 2. Además supongamos que z_0 se encuentra en $\mathfrak{F}_i(R)$, una componente de $\mathfrak{F}(R)$, entonces $\mathfrak{F}_i(R)$ es simplemente conexo, y $R : \mathfrak{F}_i(R) \rightarrow \mathfrak{F}_i(R)$ es conjugada a una rotación con argumento irracional del disco unitario Δ .*

DEMOSTRACIÓN. Conjugando podemos asumir que $z_0 = 0$, así que en una vecindad del origen tenemos que,

$$R(z) = \mu z + az^2 + \dots,$$

en donde $|\mu| = 1$. Además, como los puntos neutros racionales pertenecen a $\mathfrak{J}(R)$, tenemos que $\mu^n \neq 1$ para todo entero positivo n .

Como $\mathfrak{J}(R)$ es infinito, entonces la cubierta universal de \mathfrak{F}_i es el disco unitario Δ (ver Gamelin (2001), pág. 443), por lo tanto existe una función holomorfa $\pi : \Delta \rightarrow \mathfrak{F}_i$ (la aplicación cubriente), que es localmente inyectiva en Δ y satisface $\pi(0) = 0$. Sea V una vecindad del 0 en donde π es inyectiva y denotemos por π_0 la restricción de π a V . Por continuidad, existe una vecindad U del origen a la cual la función $R \circ \pi$ la manda $1 - 1$ en $\pi(V)$, así que podemos definir la función

$$S = (\pi_0)^{-1} \circ R \circ \pi : U \rightarrow \Delta,$$

por lo tanto tenemos que $\pi \circ S = R \circ \pi$ en U .

Las propiedades de la aplicación cubriente π aseguran que la podemos extender a la función S a lo largo de cualquier curva en Δ , y como Δ es simplemente conexo, por el Teorema de la Monodromía podemos extender la función S a una función \tilde{S} , que es univaluada de Δ en sí mismo. Ahora, como

$$(7) \quad \pi \circ S = R \circ \pi,$$

en una vecindad del origen, por continuidad analítica, esta identidad se cumple en todo Δ .

Ahora, como consecuencia de la ecuación 7 obtenemos que $\tilde{S}'(0) = a$, y como $|a| = 1$, por el lema de Schwarz obtenemos que $\tilde{S}(z) = az$. Por otro lado, por la ecuación 7, obtenemos que $\pi \circ \tilde{S}^{\circ n} = R^{\circ n} \circ \pi$. Combinando estos dos resultados obtenemos que

$$\pi(a^n z) = R^{\circ n}(\pi(z)).$$

□

En 1942, C. Siegel (ver Siegel (1942)) encontró un subconjunto Φ del círculo unitario de medida completa tal que si un punto fijo de una función racional de grado al menos 2 tiene un autovalor en Φ entonces R es linealizable en una vecindad del punto fijo. Con este resultado uno podría esperar que si z_0 es un punto fijo neutral irracional entonces R es linealizable en una vecindad de z_0 . Veremos que esto no es cierto.

TEOREMA 7.3. *Sea $P(z) = \mu z + \dots + z^d$, en donde $d \geq 2$ y $|\mu| = 1$ pero μ no es raíz de la unidad. Si*

$$(8) \quad |\mu^n| \leq (1/n)^{d^{n-1}}$$

para una infinidad de enteros $n \geq 1$, entonces el origen es un punto fijo neutro irracional de P que se encuentra en $\mathfrak{J}(P)$.

DEMOSTRACIÓN. La idea de la demostración es demostrar que el origen es un punto de acumulación de los puntos periódicos de P . Tomemos un n que cumpla la relación 8, sea $N = d^{n-1}$, y sean $0, z_0, \dots, z_N$ los $N + 1$ puntos fijos de $P^{\circ n}$ en \mathbb{C} , tales que:

$$0 < |z_0| \leq |z_1| \leq \dots \leq |z_N|$$

Entonces tenemos que,

$$\begin{aligned} P^{\circ n}(z) - z &= (\alpha^n - 1)z + \dots + z^{N+1} \\ &= z(z - z_0) \dots (z - z_N) \end{aligned}$$

uniendo estos resultados con la relación 8, obtenemos:

$$|z_0| \leq |z_0 z_1 \dots z_N|^{1/N} = |\alpha^n - 1|^{1/N} \leq 1/n.$$

Por último demostraremos que existe puntos periódicos de P , distintos del origen pero arbitrariamente cercano al 0. Supongamos que el origen se encuentra en $\mathfrak{J}(R)$, así que por el teorema 7.2 existe una vecindad U del origen en donde R es conjugada a la rotación $\zeta \mapsto \eta\zeta$ de un disco centrado en el origen D . Ahora seleccionemos un punto periódico ζ ,

distinto del origen, de periodo m . Entonces el punto γ en D que le corresponde al punto ζ tiene periodo m para la función $\zeta \mapsto \eta\zeta$, así que $\eta^m = 1$, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto el origen se encuentra en $\mathfrak{J}(P)$. \square

Ahora daremos un esbozo sobre como demostrar que el conjunto de todos los μ que satisfacen 8 es denso en la frontera del disco unitario Δ . Primero notemos que la desigualdad 8 esta relacionada con la aproximación de fracciones a los números reales. Sea $\mu = \exp(2\pi\sqrt{-1}\theta)$, para cualesquiera enteros positivos m y n , tenemos que:

$$\begin{aligned} |\mu^n - 1| &= |e^{n\pi\sqrt{-1}\theta} - e^{-n\pi\sqrt{-1}\theta}| = 2|\operatorname{sen}(n\pi\theta)| \\ &= 2|\operatorname{sen}\pi(n\theta - m)| \leq 2\pi|n\theta - m| \end{aligned}$$

si para una infinidad de enteros n existe un m (dependiendo de n) tal que,

$$(9) \quad |n\theta - m| \leq 1/n^{N+2}$$

entonces si $n > 2\pi$,

$$|\mu^n - 1| \leq 2\pi n|\theta - m/n| \leq 1/n^N$$

ahora el problema se redujo a demostrar que el conjunto de θ que satisfacen (9) es denso en \mathbb{R} . Esto se sigue gracias a que todo número real se puede expresar como el límite de su desarrollo en fracciones continuas.

Cabe señalar que la descripción de la dinámica local para puntos neutros irracionales que están en el conjunto de Julia es un problema abierto del cual se está haciendo mucha investigación actualmente.

8. Breve discusión de algunos teoremas modernos.

En esta sección daremos una breve discusión de algunos resultados que nos ayudarán a tener una mejor comprensión de la dinámica de las funciones racionales. Los principales adelantos en los últimos años que se han hecho para entender la dinámica de las funciones racionales, son los teoremas de clasificación de Sullivan. Los teoremas de Sullivan nos dan una descripción completa acerca de la dinámica de una función racional restringida al conjunto de Fatou. En lo que sigue R será una función racional de grado $d \geq 2$.

Sea \mathfrak{F}_i una componente del conjunto de Fatou. Si existe $n \geq 1$ tal que $R^{on}(\mathfrak{F}_i) = \mathfrak{F}_i$ diremos que \mathfrak{F}_i es periódica. Si $n = 1$ diremos que \mathfrak{F}_i es fija. Por otro lado si existe $n \geq 1$

tal que $R^{\circ n}(\mathfrak{F}_i)$ es periódica, entonces diremos que \mathfrak{F}_i es eventualmente periódica. Por último si una componente del conjunto de Fatou es eventualmente periódica pero no es periódica entonces diremos que es posperiódica. Notemos que la imagen bajo R de una componente del conjunto de Fatou es una componente de $\mathfrak{F}(R)$ y la imagen inversa de una componente de $\mathfrak{F}(R)$ es a lo más la unión disjunta de d componentes de $\mathfrak{F}(R)$. Lo primero se debe a que $R(\mathfrak{F}_i) \subset \mathfrak{F}(R)$ y por lo tanto está contenido en una componente de \mathfrak{F} . Ahora como $R(\partial\mathfrak{F}_i) \subset \mathfrak{J}(R)$, la frontera se envía a la frontera, de lo cual el resultado se desprende. Lo último se debe a que R es una cubierta ramificada $d - 1$.

TEOREMA 8.1. *Toda componente del conjunto de Fatou es eventualmente periódica.*

DEMOSTRACIÓN. Ver Beardon (1991), pág. 176. □

A continuación enfocaremos nuestra atención a clasificar las componentes fijas de $\mathfrak{F}(R)$.

DEFINICIÓN 8.2. *Una componente fija U de $\mathfrak{F}(R)$ es:*

1. *Componente atractora: si contiene un punto fijo atractor de R .*
2. *Componente superatractora: si contiene un punto fijo superatractor de R .*
3. *Componente parabólica: si contiene un punto neutral racional en la frontera y $R^{\circ n}$ converge a este punto.*
4. *Disco de Siegel: si $R : U \rightarrow U$ es conjugada a una rotación del disco unitario.*
5. *Anillo de Herman: si $R : U \rightarrow U$ es conjugada a una rotación de un anillo en si mismo.*

Obsevemos que las rotaciones referidas en la definición anterior son irracionales, es decir, $z \mapsto e^{2\pi\theta\sqrt{-1}}z$ con $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Ahora ya estamos listos para enunciar el segundo teorema de Sullivan.

TEOREMA 8.3. *Una componente fija de $\mathfrak{F}(R)$ es una de las enunciadas en la definición anterior.*

DEMOSTRACIÓN. Ver Beardon (1991), pág. 176. □

Los siguientes resultados nos ayudaran a esclarecer aún más la dinámica de las funciones racionales.

TEOREMA 8.4. (*M. Shishikura, 1987*) *Sea R una función racional de grado d . Denotemos por n_{CSA} , n_{CA} , n_{CP} , n_{AS} y n_{AH} , el número de ciclos superatractores, ciclos*

atractores, ciclos parabólicos, ciclos de anillos de Siegel y ciclos de anillos de Herman, respectivamente. Entonces

$$n_{CSA} + n_{CA} + n_{CP} + n_{AS} + n_{AH} \leq 2d - 2 \quad \text{y} \quad n_{AH} \leq d - 2.$$

Además, existen $(n_{AS} + 2n_{AH})$ puntos críticos en $\mathfrak{J}(R)$.

DEMOSTRACIÓN. ver Shishikura (1987). □

¿Puede existir una función racional R de grado al menos 2 sin puntos periódicos?.

TEOREMA 8.5. (*I. N. Baker, 1962*) *Sea $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función racional de grado $d \geq 2$, y supongamos que R no tiene puntos periódicos de periodo n . Entonces (d, n) es uno de los pares:*

$$(2, 2), (2, 3), (3, 2) \quad \text{o} \quad (4, 2).$$

DEMOSTRACIÓN. Ver Baker (1962). □

De este teorema se deduce que toda función racional de grado al menos 5, tiene puntos periódicos de todos los órdenes. El siguiente resultado fue encontrado independientemente por G. Julia y por P. Fatou. Muestra una relación muy estrecha que existe entre los puntos críticos y los ciclos superatractores y atractores.

TEOREMA 8.6. *Si R es una función racional de grado $d \geq 2$, entonces la cuenca inmediata atractora (ó superatractora) de todo ciclo atractor (ó superatractor) contiene al menos un punto crítico.*

DEMOSTRACIÓN. Ver Blanchard (1984), pág. 110. □

CAPÍTULO 2

El método de Newton y los algoritmos puramente iterativos

1. El método de Newton.

Dado un polinomio f con coeficientes reales, recordemos el método de Newton-Raphson (o simplemente método de Newton) para encontrar raíces de polinomios. Tomemos un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x_0) \neq 0$. Consideremos la recta tangente a f que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$,

$$y(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

y sea x_1 el punto de intersección de esta recta con el eje x , despejando de la ecuación anterior obtenemos que,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ahora aplicando el mismo proceso al punto x_1 y así sucesivamente podemos construir una sucesión

$$(10) \quad x_0, x_1, x_2, \dots$$

Notemos que esta sucesión es la misma si comenzamos a iterar la función,

$$(11) \quad N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

en el punto x_0 ,

$$x_0, \quad x_1 = N_f(x_0), \quad x_2 = N_f^{\circ 2}(x_0), \dots$$

La dificultad con este método estriba en el hecho de como escoger un punto x_0 de tal forma que la sucesión 10 converja.

Observemos que podemos extender de manera natural este algoritmo de la siguiente forma. Consideremos un polinomio con coeficientes complejos f de grado $d \geq 2$ y construyamos la función racional $N_f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$,

$$(12) \quad N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}.$$

Ahora, tomemos un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ y construyamos la siguiente sucesión

$$(13) \quad z_0, \quad z_1 = N_f(z_0), \quad z_2 = N_f^{\circ 2}(z_0) \dots$$

Recordemos que una sucesión $\{z_n\}_{n \geq 1}$, con $z_n \in \mathbb{C}$, converge linealmente a z^* si existe $k > 0$ y un entero N tales que,

$$|z_{n+1} - z^*| \leq k|z_n - z^*|, \text{ para todo } i \geq N.$$

Se dice que una sucesión $\{z_n\}_{n \geq 1}$, con $x_n \in \mathbb{C}$, converge cuadráticamente a z^* si existe $k > 0$ y un entero N tales que,

$$|z_{n+1} - z^*| \leq k|z_n - z^*|^2, \text{ para todo } i \geq N.$$

Nuestro enfoque consistirá en examinar el método de Newton para polinomios con coeficientes complejos desde un punto de vista de los sistemas dinámicos holomorfos. A N_f le llamaremos el endomorfismo de Newton de f .

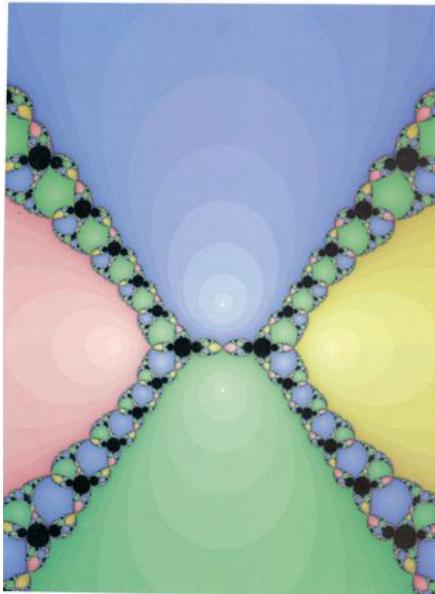


FIGURA 1. El método de Newton aplicado al polinomio $f(z) = (z^2 - 1)(z^2 + 0.16)$. Tomado del libro Blum *et al* (1998).

En la siguiente proposición enunciaremos las principales propiedades del endomorfismo de Newton de un polinomio f .

PROPOSICIÓN 1.1. *Consideremos un punto $\zeta \in \mathbb{C}$. Entonces N_f tiene las siguientes propiedades:*

1. $N_f(\zeta) = \zeta$ si y sólo si $f(\zeta) = 0$.
2. $N_f(\zeta) = \zeta$ implica $|N'_f(\zeta)| < 1$.

3. Si la sucesión 13 converge a un punto $\zeta \in \mathbb{C}$, entonces $f(\zeta) = 0$.
4. El grado de N_f es el número de raíces de f contadas sin multiplicidad.

DEMOSTRACIÓN. La demostración de (1) es trivial. Para demostrar (2) comencemos notando que

$$(14) \quad N'_f(z) = \frac{f(z)f''(z)}{[f'(z)]^2}.$$

Por el inciso (1), ζ es un cero de f . Denotemos su multiplicidad por m . Haciendo el desarrollo en serie de Taylor de f alrededor de ζ ,

$$f(z) = a_m(z - \zeta)^m + \dots, \quad \text{con } a_m \neq 0,$$

en donde m es la multiplicidad del cero, sustituyendo y evaluando en 14, obtenemos que

$$|N'_f(\zeta)| = \frac{m-1}{m}.$$

Para demostrar (3), notemos que por la observación 1.1, ζ es un punto fijo de N_f , entonces por la parte (1), ζ es un cero de f .

Por último, para demostrar el inciso (4), supongamos que $f(z) = \alpha \prod_{i=1}^n (z - \zeta_i)^{\beta_i}$ y notemos que,

$$(15) \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\beta_1}{z - \zeta_1} + \frac{\beta_2}{z - \zeta_2} + \dots + \frac{\beta_n}{z - \zeta_n}.$$

De la igualdad 15 se deduce que el grado de N_f es el número de raíces de f contadas sin multiplicidad. \square

Por la parte (1) de la proposición (1.1) el problema de encontrar los ceros de f es equivalente a encontrar los puntos fijos de $N_f(z)$ y aquí es en donde entra en juego la teoría desarrollada en el capítulo anterior.

Del inciso (1) y la demostración del inciso (2) de la proposición (1.1), deducimos que si ζ es un cero simple, entonces es un punto superatractor de N_f , ya que N_f sería conjugado localmente a $z \mapsto z^k$, para $k \geq 2$ y por lo tanto obtenemos que cerca de este cero la convergencia es al menos cuadrática. Por otro lado, si ζ es un cero con multiplicidad al menos 2, entonces ζ es un punto atractor de N_f y la convergencia es lenta, ya que por el teorema de G. Koenigs(4.2) la convergencia es lineal.

Haciendo un análisis similar para ∞ , obtenemos el siguiente resultado,

PROPOSICIÓN 1.2. ∞ es un punto fijo de N_f y $N'_f(\infty) = d/(d-1)$, por lo tanto es un punto repulsor de N_f y tenemos que $\infty \in \mathfrak{J}(N_f)$.

DEMOSTRACIÓN. Esto se demuestra siguiendo una idea similar a la demostración de la parte (2) de la proposición 1.1, con la diferencia de que ahora se estudia la función $N'_f(1/w)$ y se toma el límite cuando $w \rightarrow 0$. \square

Como vimos en el capítulo anterior, la dinámica de una función racional está casi totalmente determinada por la dinámica de sus puntos críticos, que en el caso de la función racional N_f , sus puntos críticos son los ceros simples de f o los ceros de f'' . Ahora, gracias al siguiente teorema notemos que existe una relación entre la distribución de los ceros de f', f'', \dots y los ceros de f .

TEOREMA 1.3. (*Gauss-Lucas*) *Supongamos que todos los ceros de un polinomio f con coeficientes complejos están contenidos en un semiplano cerrado, entonces en este semiplano cerrado también están contenidos los ceros de todas las derivadas de f , en particular los puntos críticos.*

DEMOSTRACIÓN. Por inducción bastará probar la afirmación para los ceros y los puntos críticos de f . Consideremos un semiplano cerrado en donde están contenidos todos los ceros del polinomio. Aplicando una transformación afín podemos suponer que todos los ceros tienen parte real negativa. Supongamos que el polinomio es $f(z) = a \prod_i (z - \zeta_i)$, entonces la derivada se puede escribir como $f'(z) = a \sum_i \prod_{j \neq i} (z - \zeta_j)$. Si z es un punto tal que $\Re(z) \geq 0$, entonces las partes reales de $z - \zeta_i$ y de $1/(z - \zeta_i)$ son estrictamente positivas. Por lo tanto la derivada f' no se puede anular en z . \square

Como consecuencia del teorema anterior obtenemos que todos los ceros de f' están contenidos en la intersección de todos los semiplanos cerrados que contienen los ceros de f . A esta intersección se le llama la envolvente convexa de los ceros de f y se puede describir como el menor polígono convexo que contiene a todos los ceros.

Desde su creación el método de Newton ha sido uno de los algoritmos más utilizados para encontrar aproximaciones a raíces de funciones y aunque data de los tiempos de Newton aún hoy en día existen propiedades globales que son difíciles de entender. Aunque este método es muy poderoso presenta serias dificultades en el momento de escoger el punto inicial ya que como vimos antes necesitamos comenzar a iterar en un punto cercano a un cero del polinomio. Notemos que si tomamos un punto en el conjunto de Julia del endomorfismo de Newton de un polinomio, entonces la órbita divergerá.

Gracias al siguiente teorema obtenemos que es fácil escoger un punto inicial para el endomorfismo de Newton de un polinomio de grado 2.

TEOREMA 1.4. (Cayley) *Consideremos un un polinomio cuadrático f , entonces se cumple lo siguiente:*

- 1) *si f tiene dos raíces distintas, N_f es globalmente conjugado a la función $z \rightarrow z^2$ y*
- 2) *si f tiene una raíz doble, la raíz de f es el único punto atractor, \mathbb{C} es la cuenca inmediata de la raíz y el único punto repulsor es el punto al infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar la parte (1), supongamos que α y β son dos raíces distintas de f . Consideremos la transformación de Moebius $h(z) = (z - \alpha) / (z - \beta)$. Notemos que $h(\alpha) = 0$, $h(\beta) = \infty$ y $h(\infty) = \infty$. Entonces la función $h \circ N_f \circ h^{-1}$ es una función racional de grado 2 con puntos fijos superatractores en 0 y en 1, además como fija al 1 tenemos que $h \circ N_f \circ h^{-1}$ es la función $z \rightarrow z^2$.

Para demostrar la parte (2), supongamos que $f(z) = \alpha(z - \beta)^2$, entonces el resultado se deduce inmediatamente de la siguiente igualdad,

$$N_f(z) = z - \frac{z - \beta}{2} = \frac{z}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

□

Del teorema 1.4 obtenemos que el conjunto de Julia de N_f es la recta perpendicular al segmento $(\alpha + \beta) = 2$ y que pasa por su punto medio. El caso de los polinomios con un cero de orden 2 es trivial.

Sin embargo, cuando consideramos polinomios de grado mayor que 2 el problema se complica. Por ejemplo, tomemos el polinomio $f(z) = z^3 - 2z + 2$, entonces $N_f(z) = z - (z^3 - 2z + 2)/(3z^2 - 2)$. Observemos que si comenzamos a iterar en el 0 obtenemos una órbita periódica $0 \mapsto 1 \mapsto 0 \mapsto 1, \dots$ de período 2. Más aún, este es un ciclo superatractor de período 2. Por lo tanto, si comenzamos a iterar en un punto de la cuenca inmediata de este ciclo obtendremos una órbita que no converge. Así que, existen conjuntos abiertos para los cuales el método de Newton es divergente. Cabe hacernos la siguiente pregunta,

PREGUNTA 1. *¿Cuál es la principal razón por la que el método de Newton no converge?*

Es importante señalar que aunque existen polinomios para los cuales el conjunto de Julia de su endomorfismo de Newton es de medida positiva, existe una razón todavía más importante por la cual el método de Newton falla, la cual se expondrá en la siguiente sección.

2. Algoritmos puramente iterativos.

En los años 80, S. Smale introdujo el concepto de algoritmo puramente iterativo (ver Smale (1985)), el cual fue generalizado por C. McMullen (ver McMullen (1987)). Estos algoritmos son una generalización del algoritmo de Newton. Con el propósito de definir este concepto primero introduzcamos las siguientes convenciones y definiciones.

Denotaremos por $Poly_d(\mathbb{C})$ al conjunto de todos los polinomios mónicos con coeficientes complejos de grado d , notemos que se puede identificar a $Poly_d(\mathbb{C})$ con \mathbb{C}^d y de esta forma podemos dotar a $Poly_d(\mathbb{C})$ con una topología.

Consideremos al conjunto de todas las funciones racionales de grado a lo más k y denotémoslo por Rat_k , de manera natural podemos identificar a Rat_k con $\mathbb{P}^{2k+1}(\mathbb{C})$.

Recordemos que un polinomio f con coeficientes complejos de n variables de grado m , es una expresión de la forma,

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} z^{i_1} z^{i_2} \dots z^{i_n},$$

definimos el grado de f por,

$$\text{grado } f = \sup\{i_1 + i_2 + \dots + i_n : a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \neq 0\}$$

Tomemos dos polinomios con coeficientes complejos de varias variables p y q . Denotemos por $\text{dom}(p/q) = \{x \in Poly_d(\mathbb{C}) : q(x) \neq 0\}$ el dominio de la función racional p/q . Una función racional T de $Poly_d(\mathbb{C})$ a Rat_k es una función tal que,

$$x \mapsto (f_0(x) : f_1(x) : \dots : f_{2k+1}(x)),$$

en donde $f_i = p_i/q_i$, para $i = 0, 1, \dots, 2k+1$ y p_i, q_i son polinomios de varias variables con coeficientes complejos. Notemos que la función racional T está bien definida salvo en $\bigcap_{0 \leq i \leq 2k+1} \text{dom}(p_i/q_i)$. En el lenguaje de la geometría algebraica $\bigcap_{0 \leq i \leq 2k+1} \text{dom}(p_i/q_i)$ es una subvariedad algebraica de $Poly_d(\mathbb{C})$.

DEFINICIÓN 2.1. *Un algoritmo puramente iterativo es una función racional,*

$$T : Poly_d(\mathbb{C}) \dashrightarrow Rat_k$$

Esta definición tal vez parezca un tanto artificial, sin embargo no lo es, ya que las funciones racionales son naturales en este contexto porque representan a las operaciones primitivas de las computadoras, la adición, la multiplicación, la resta y a la división (sin embargo, en este contexto se trata de una computadora idealizada la cual coincide con una

computadora convencional salvo que en este caso consideramos que opera bajo aritmética exacta, para más detalles ver Blum *et al* (1989)).

Notemos que esta definición es una generalización del método de Newton, lo cual implica que el método de Newton es un algoritmo puramente iterativo. Para ver esto definamos la siguiente función racional N de $Poly_d(\mathbb{C})$ a Rat_d ,

$$f \mapsto z - \frac{f(z)}{f'(z)}.$$

En lo siguiente diremos que un conjunto es de medida completa si su complemento es de medida cero. Ahora introduciremos la definición de un algoritmo puramente iterativo que es generalmente convergente. Pero antes necesitamos la siguiente,

DEFINICIÓN 2.2. *Sea $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función racional y $f \in Poly_d(\mathbb{C})$ mónico. Diremos que R es convergente para f si la sucesión $\{R^{on}(z)\}_{n \geq 1}$ converge a una raíz de f , para todo z en un abierto de medida completa de \mathbb{C} .*

DEFINICIÓN 2.3. *Diremos que un algoritmo puramente iterativo T es generalmente convergente, si existe un subconjunto abierto de medida completa de polinomios f en $Poly_d(\mathbb{C})$ tales que T_f es convergente, para todo f en este subconjunto.*

Bajo estas definiciones podemos notar que por el teorema (1.4), el algoritmo de Newton es generalmente convergente para el conjunto $Poly_2(\mathbb{C})$. Sin embargo, para $d = 3$ se tiene el siguiente resultado,

PROPOSICIÓN 2.4. *Si $d \geq 3$, entonces el algoritmo de Newton no es generalmente convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f(z) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i z^i + z^d$ y tomemos $a_0 = 1, a_1 = -1$ y $a_2 = 0$, esto implica que $N_f(0) = 1, N'_f(0) = 0$ y si $N'_f(1) \neq \infty$, entonces $(N_f^{o2})'(0) = 0$, por la regla de la cadena. Así que si $N_f(1) = 0$ y $N'_f(1) \neq \infty$, entonces 0 es un punto superatractor de período al menos 2. La restricción $N_f(1) = 0$ implica,

$$-1 + 2a_3 + 3a_4 + \dots + (d-1) = 0$$

y la condición $N'_f(1) \neq \infty$ se satisface si $f'(1) \neq 0$ ó,

$$-1 + 3a_3 + 4a_4 + \dots + d \neq 0.$$

Estas condiciones son satisfechas por un subconjunto abierto de medida completa de un hiperplano del espacio $\{a_3, \dots, a_{d-1}\} = \mathbb{C}^{d-3}$. Entonces, como la propiedad de tener un ciclo atractor es estable (ver Brinn y Stuck (2002), pág. 117), concluimos que, N_{f_0} también tiene un ciclo atractor para todo f_0 , en una vecindad de f . \square

Conviene analizar un ejemplo en concreto para fijar ideas. Tomemos el caso $d = 3$ y $f(z) = z^3 - 2z + 2$. Entonces los coeficientes del polinomio cumplen las condiciones de las a_i 's mencionadas en la demostración anterior. Por lo tanto, vamos a tener que para todo punto cercano al origen, la iteración bajo N_f , va a converger asintóticamente alrededor del 0 y el 1. Más aún, para todo polinomio cercano a f , por la robustez del ciclo superatractor, también tiene un ciclo superatractor.

Otro impedimento para que el algoritmo de Newton converja sería debido a la existencia de anillos de Herman. Entonces cabe hacerse la siguiente pregunta, ¿que papel juegan los anillos de Herman en la dinámica del endomorfismo de Newton de un polinomio? Esta pregunta fue respondida por M. Shishikura.

TEOREMA 2.5. (*Shishikura, 1990*) *Sea f un polinomio con coeficientes complejos y N_f el endomorfismo de Newton inducido por f , entonces $\mathfrak{J}(N_f)$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Ver Shishikura (1990). □

Con las hipótesis del teorema anterior obtenemos.

COROLARIO 2.6. *$\mathfrak{J}(N_f)$ no tiene anillos de Herman.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $H \subset \mathfrak{J}(N_f)$ un anillo de Herman, entonces $\partial H \subset \mathfrak{J}(N_f)$, lo cual implica que $\mathfrak{J}(N_f)$ es desconexo, contradiciendo al teorema (2.5). □

Por lo tanto, según este enfoque, *la principal razón por la cual el método de Newton no converge es debido a los ciclos atractores de período mayor que uno.*

Ahora cabe hacernos la siguiente pregunta, ya que el método de Newton no es generalmente convergente, ¿existe un algoritmo puramente iterativo generalmente convergente? La respuesta fue dada por C. McMullen en su tesis de doctorado en 1985 (ver McMullen (1987)). Los resultados obtenidos por C. McMullen los enunciaremos en el siguiente (en lo siguiente $C(R)$ denotará al conjunto de todas las transformaciones de Moebius que conmutan con R y lo llamaremos el centralizador de R),

TEOREMA 2.7. (*Clasificación de los algoritmos puramente iterativos generalmente convergentes*)

A.- *Para $d = 2$, todo algoritmo puramente iterativo generalmente convergente se obtiene especificando una función racional R y una función racional $M : \text{Poly}_2 \rightarrow \text{PSL}_2\mathbb{C}/C(R)$ tales que,*

- i.- *R es convergente para el polinomio $x^2 - 1$,*
- ii.- *el centralizador de R , $C(R)$, contiene al elemento $z \mapsto -z$, y*

iii.- si el polinomio f es genérico, $M_p = M(p)$, manda las raíces cuadradas de la unidad a las raíces de f .

El algoritmo está dado por $R_f = M_f \circ R \circ M_f^{-1}$. Además, cualquier R y M_f que satisfagan las condiciones (i)-(iii), determinan un algoritmo puramente iterativo generalmente convergente para los polinomios cuadráticos.

B.- Para $d = 3$, todo algoritmo puramente iterativo generalmente convergente es obtenido especificando una función racional R tal que,

i.- R es convergente para el polinomio $x^3 - 1$, y

ii.- el centralizador de R , $C(T)$, contiene al grupo de las transformaciones de Moebius que permutan a las raíces cúbicas de la unidad. (Este grupo es generado por $z \mapsto 1/z$ y $z \mapsto \zeta z$ en donde ζ es una raíz primitiva de la unidad.)

El algoritmo está dado (para f con raíces distintas), por $R_f = M_f \circ R \circ M_f^{-1}$, en donde M_f es una transformación de Moebius que manda a las raíces cúbicas de la unidad en las raíces de f . Más aún, cualquier R que satisfaga las propiedades (i) y (ii), determina de esta manera un algoritmo puramente iterativo generalmente convergente para los polinomios cúbicos.

C.- No existe un algoritmo puramente iterativo generalmente convergente para encontrar las raíces de los polinomios de grado $d \geq 4$.

Por lo tanto según el teorema 2.7, para cualquier algoritmo puramente iterativo la probabilidad de encontrar al azar un polinomio f y un punto inicial z_0 tal que $T_f(z_0)$ no converja tiene probabilidad positiva. Sin embargo, es posible superar esta dificultad partiendo desde otros enfoques. Por ejemplo, si incluimos la operación conjugación, entonces Shub y Smale (de tal forma que la función T_f es una función algebraica real pero no una función algebraica compleja) demostraron que existen algoritmos puramente iterativos generalmente convergentes (ver Shub y Smale (1986)). Otro enfoque consiste en permitir que el algoritmo comience a iterar en más de un punto, en esta dirección Hubbard, Schleicher y Sutherland, desarrollaron un algoritmo muy importante (ver Hubbard *et al* (2001)). Por otro lado, Shub y Smale desarrollaron un algoritmo muy ingenioso el cual describiremos a detalle en el siguiente capítulo.

COMENTARIOS 2.8. Se había conjeturado que la medida del conjunto de Julia (en el sentido de Lebesgue) era cero para todo endomorfismos de Newton de polinomios, pero en el 2005 se encontró un ejemplo de una función de la forma $e^{2\pi\theta\sqrt{-1}}z + z^2$, en donde θ es un número irracional, con conjunto de Julia de medida positiva (ver Buff y Chéritat (2005)). Entonces gracias al resultado anterior y al teorema principal de Tan Lei (ver Lei (1997)), se puede demostrar que existen polinomios cúbicos para los cuales la medida (en el sentido de Lebesgue) del conjunto de Julia de su endomorfismo de Newton es de medida positiva (ver Rückert (2007), pág. 5).

CAPÍTULO 3

El algoritmo de Shub-Smale.

En el presente capítulo desarrollaremos un algoritmo basado en el método de Newton para resolver el siguiente problema:

PREGUNTA 2. *Dado un polinomio con coeficientes complejos f y $\varepsilon > 0$, ¿cómo podemos encontrar un punto $\zeta \in \mathbb{C}$ tal que $|f(\zeta)| < \varepsilon$?*

Recordemos que en capítulo 2 dedujimos el método de Newton para encontrar raíces de polinomios, sin embargo, este método presenta una seria dificultad en el momento de escoger el punto inicial para la iteración, ya que para asegurar la convergencia es necesario que el punto inicial esté cerca de un cero del polinomio.

Para superar esta dificultad construiremos un algoritmo (el algoritmo de Shub-Smale) que en lugar de considerar un sólo punto inicial, comienza la iteración en varios puntos iniciales .

En lo que resta del capítulo f denotará un polinomio con coeficientes complejos, $f(z) = a_d z^d + \dots + a_0$.

1. Breve introducción a la teoría de la complejidad.

La teoría de la complejidad es una rama del análisis numérico que se encarga de estudiar el número de operaciones aritméticas requeridas por un algoritmo definido por una máquina de Turing, desde que se le da una entrada hasta que obtenemos la salida. Recordemos que un algoritmo definido por una máquina de Turing, es tratable si el tiempo de computación $T(x)$ (número de operaciones de una máquina de Turing) asociado con la entrada x , satisface la desigualdad

$$T(x) \leq c(\text{longitud}(x))^q, \quad \text{para todas las entradas } x,$$

en donde c y q sólo dependen de la máquina de Turing y $\text{longitud}(x)$ es la longitud en bits de x . Un problema es tratable si existe un algoritmo tratable que lo resuelve.

Estas definiciones son clásicas, sin embargo, en métodos numéricos es muy importante tomar en cuenta la exactitud requerida para obtener una solución. Así que tenemos que

modificar el concepto de problema tratable. Una forma de hacer esto es considerar $\varepsilon < 1$ como una entrada adicional al problema y pedir que el tiempo de computación satisfaga,

$$T(\varepsilon, x) \leq (|\log \varepsilon| + \text{longitud}(x))^q, \text{ con } \varepsilon < 1.$$

Ahora, otro problema a considerar es el conjunto de entradas a un algoritmo en donde el algoritmo falla, a este conjunto se le conoce como el *conjunto de puntos mal condicionados* y en general cuando le damos como entradas a un algoritmo puntos cercanos a este conjunto, nuestro algoritmo se vuelve más lento. Por ello conviene introducir una función μ que depende de la entrada. Esta función debe crecer cuando la entrada que se le da está cerca del conjunto de puntos mal condicionados. Tomando lo anterior en consideración que el tiempo de computación debe satisfacer,

$$T(\varepsilon, x) \leq (|\log \varepsilon| + \log \mu(x) + \text{longitud}(x))^q,$$

en donde μ es el número condicional de x .

2. Motivación del algoritmo de Shub-Smale.

A continuación se dará una demostración del teorema fundamental del álgebra, la cual es la idea medular que servirá para la creación del algoritmo de Shub-Smale.

TEOREMA 2.1. (*Teorema fundamental del álgebra.*) *Consideremos un polinomio f con coeficientes complejos de grado $d \geq 1$, entonces existe ζ tal que $f(\zeta) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el cero no es un valor crítico de f , ya que en caso contrario se tendría el resultado. Diremos que z_0 es un punto bueno de f si el segmento

$$L(z_0) = \{tf(z_0) : 0 \leq t \leq 1\},$$

no contiene valores críticos de f . Es claro que tales puntos existen ya que el número de puntos críticos es finito. Sea z_0 un punto bueno, como f es una función propia en \mathbb{C} , $f^{-1}(L(z_0))$ es compacto. Tomemos la componente de $f^{-1}(L(z_0))$ que contiene a z_0 y denotémosla por $C(f^{-1}(z_0))$.

Sea $z \in f^{-1}(L(z_0))$, por el teorema de la función inversa, existe $\delta_z \geq 0$ tal que la inversa local $f^{-1} : D_{\delta_z}(f(z)) \rightarrow \mathbb{C}$ está bien definida y es holomorfa. Como $C(f^{-1}(z_0))$ es compacto existe $\delta > 0$ tal que $\delta \geq \delta_z$, para todo $z \in C(f^{-1}(z_0))$. Sea n un entero positivo tal que $n > |f(z_0)|/\delta$.

Definamos $w_i = \frac{(n-i)}{n}f(z_0)$, para $i = 0, 1, \dots, n$ y observemos que

$$|w_i - w_{i-1}| < \delta \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

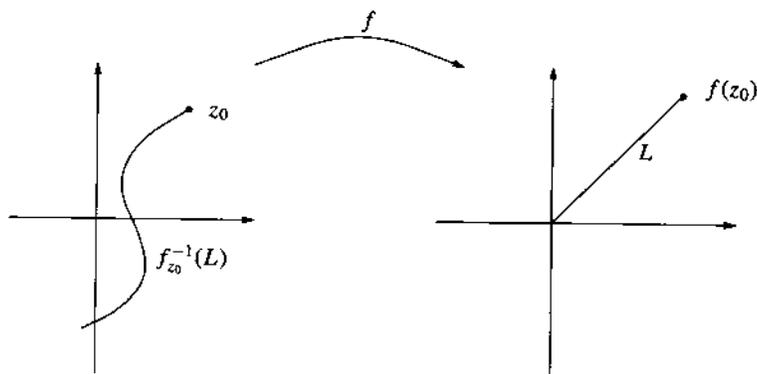


FIGURA 1. La componente de la imagen inversa de L bajo f , que contiene al punto z_0 .

Así que $w_i \in D_\delta(w_{i-1})$. Ahora definamos inductivamente (ver figura 2),

$$z_i = f_{z_{i-1}}^{-1}(w_i), \quad i = 1, \dots, n$$

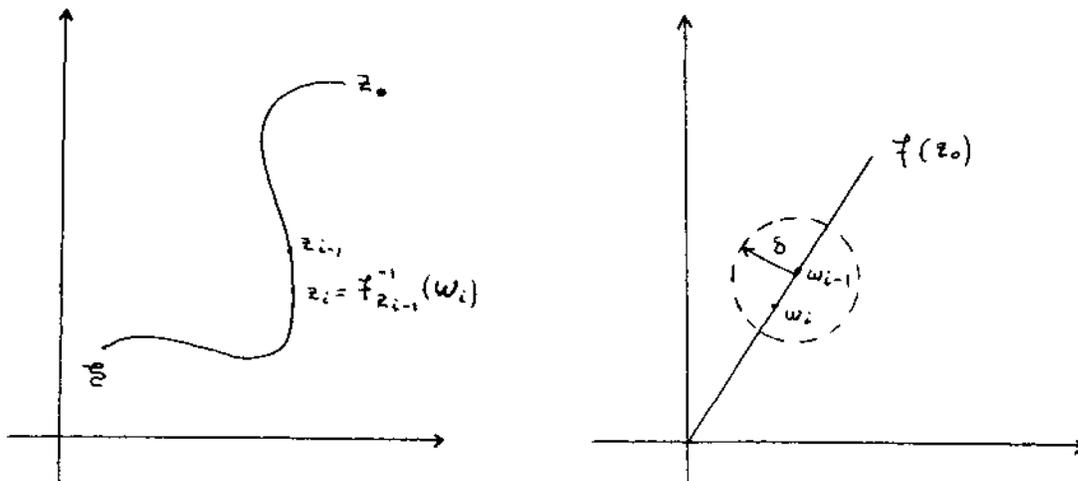


FIGURA 2

Como $f(z_i) = w_i$ esto implica que $f(z_n) = w_n = 0$. □

Otra forma de demostrar el teorema (2.1), con una idea similar es notando que $D_{\delta_z}(f(z_i)) \cap D_{\delta_z}(f(z_{i+1})) \neq \emptyset$, para todo $i = 0, 1, \dots, n - 1$ y aplicando el teorema de la continuación analítica.

Es posible acotar la norma de las raíces en términos de los coeficientes como sigue:

TEOREMA 2.2. Consideremos un polinomio $f = \sum_{i=0}^d a_i z^i$ en donde $a_i \in \mathbb{C}$ y $a_d \neq 0$. Si ζ es una raíz de f , entonces

$$|\zeta| < 2 \max_{1 \leq k \leq d} \left(\left| \frac{a_{d-k}}{a_d} \right|^{1/k}, 1 \right).$$

DEMOSTRACIÓN. Definamos los siguientes términos,

$$b = \max_{1 \leq k \leq d} \left(\left| \frac{a_{d-k}}{a_d} \right|^{1/k}, 1 \right) \text{ y } g(z) = \frac{1}{a_d b^d} f(bz).$$

Entonces,

$$g(z) = \frac{1}{a_d b^d} f(bz), \text{ en donde } c_d = 1 \text{ y } |c_i| \leq 1, \text{ para } i = 1, 2, \dots, d.$$

Así que,

$$\left| \sum_{i=0}^{d-1} c_i z^i \right| < \sum_{k=0}^{d-1} |z|^k = \frac{|z|^d - 1}{|z| - 1} < |z|^d, \text{ para } |z| \geq 2.$$

Por lo tanto $g(z) \neq 0$, para $|z| \geq 2$ y $f(z) \neq 0$ para $|z|/b \geq 2$. \square

Ahora basados en la demostración del teorema (2.1) daremos la idea crucial para la creación del algoritmo de Shub-Smale:

Tomemos $\varepsilon > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ y f un polinomio con coeficientes complejos no constante. Definamos $f_t(z) = f(z) - tf(z_0)$, $t \in [0, 1]$ y sea ζ_t una curva en \mathbb{C} tal que $f_t(\zeta_t) = 0$, $\zeta_1 = z_0$ y $f'_t(\zeta_t) \neq 0$, para todo $t \in [0, 1]$ (i.e. $f(\zeta_t) = tf(z_0)$). La idea básica es encontrar una sucesión t_i , con $t_i \leq 1$ y $t_0 > t_1 > t_2 > \dots > t_k$, de tal forma que z_{t_i} se vaya acercando a ζ_{t_i} , con z_{t_i} definidos de la siguiente forma,

$$(16) \quad z_0 (= \zeta_1), \quad z_i = N_{f_{t_i}}(z_{i-1}), \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, k,$$

en donde $N_{f_{t_i}}(z) = z - f_{t_i}(z)/f'_{t_i}(z)$.

Haciendo una buena elección de la sucesión $t_0 > t_1 > t_2 > \dots > t_k$, se podrá obtener lo siguiente, ver la figura 3:

- a) que los z_i estén bien definidos para $i = 0, 1, \dots, k$,
- b) que z_i sea una buena aproximación al cero ζ_{t_i} de f_{t_i} y
- c) que $|f(z_k)| < \varepsilon$.

Para esto tendríamos que suponer que $|t_i - t_{i-1}| \leq \lambda$, en donde λ es suficientemente pequeño, implicando que k es grande. El propósito de usar este método es encontrar una

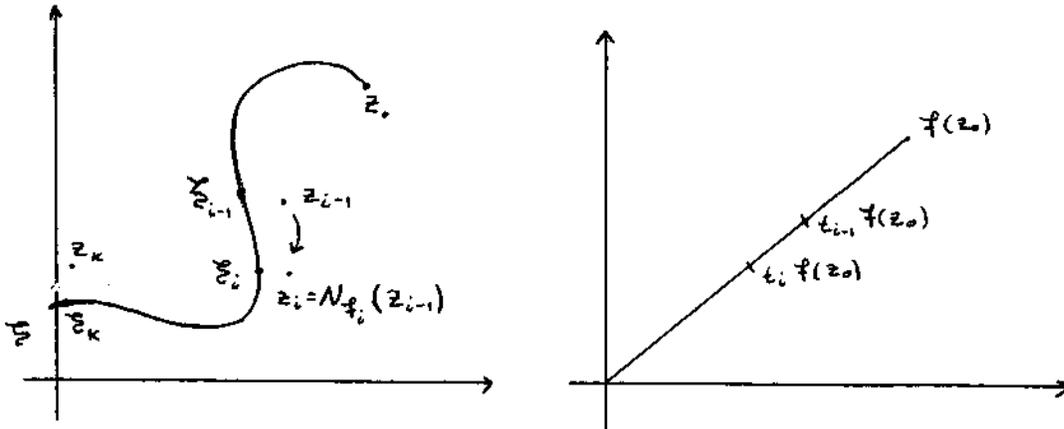


FIGURA 3. Notemos que $f(\zeta_{i-1}) = t_{i-1}f(z_0)$ y $f(\zeta_i) = t_i f(z_0)$. Haciendo una buena elección de la sucesión $t_0 > t_1 > t_2 > \dots > t_k$, podremos obtener que z_{i-1} se encuentre cerca de ζ_i y así garantizar que $z_i = N_{f_i}(z_{i-1})$ se acerque cada vez más a ζ_i , conforme aumentamos i . Entonces, cabría esperar que z_k esté muy cercano a ζ_k y por lo tanto al cero ζ .

buena cota para k en función de ε , f y z_0 , que en última instancia nos servirá para encontrar la complejidad del algoritmo de Shub-Smale.

Ahora introduciremos la cantidad θ_{f,z_0} , que mide que tanto se acerca el camino ζ_t a un punto crítico de f .

DEFINICIÓN 2.3. Consideremos un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ y f un polinomio con coeficientes complejos. Denotaremos por $W_{f,z_0,\theta}$ al conjunto

$$\{w \in \mathbb{C} : 0 < |w| < 2|f(z_0)| \text{ y } |\arg w / f(z_0)| < \theta\}.$$

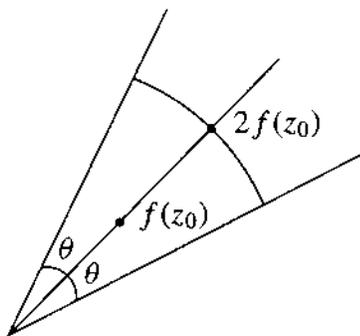


FIGURA 4. Cuña de ángulo θ alrededor del punto $f(z_0)$.

Si no hay peligro de confusión denotaremos por W a $W_{f,z_0,\theta}$. Sea $\theta_{f,z_0} = \sup\{\theta : f_{z_0}^{-1}$ se extiende $W_{f,z_0,\theta}\}$ y $U_{f,z_0} = f_{z_0}^{-1}(W_{f,z_0,\theta})$.

Supongamos que le damos como entradas a una máquina \mathfrak{M} , un polinomio con coeficientes complejos f , un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$ (la máquina \mathfrak{M} es una máquina convencional con aritmética exacta),

$$M = M_{f,z_0} = \frac{25}{25 + \operatorname{sen} \theta_{f,z_0}} \text{ y } t_i = M^i, \text{ para } i = 0, 1, \dots$$

TEOREMA 2.4. *Para cada $i = 1, 2, \dots$, $x_i = N_{f_{t_i}}(x_{i-1})$ está bien definido, $x_i \in U_{f,z_0}$ y además,*

$$|f_i(x_i)| \leq (t_i - t_{i-1})|f(z_0)|.$$

Antes de la demostración veamos el siguiente

COROLARIO 2.5. *Para todo $i \in \mathbb{N}$, x_i satisface,*

$$(17) \quad |f(x_i)| < 2M^i |f(x_0)|.$$

Además si

$$(18) \quad k > \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta_{f,z_0}}\right) \left(\ln |f(z_0)| + \ln \frac{1}{\varepsilon} + 1\right),$$

se tiene que,

$$|f(x_k)| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema anterior x_i está bien definido para todo $i \in \mathbb{N}$ y por lo tanto se cumplen las siguientes desigualdades,

$$\begin{aligned} |f(x_i)| &= |f_i(x_i) + t_i f(z_0)| \leq |f_i(x_i)| + t_i |f(z_0)| \leq \\ &\leq (t_i - t_{i+1})|f(z_0)| + t_i |f(z_0)| = 2t_i |f(z_0)| - t_{i+1} |f(z_0)| < \\ &< 2t_i |f(z_0)| = 2M^i |f(z_0)|, \text{ para } i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ahora demostraremos la segunda parte del corolario. Supongamos que se cumple la relación (17), entonces tenemos que verificar que,

$$\frac{1}{M^k} \geq \frac{2|f(z_0)|}{\varepsilon}$$

Tomando el logaritmo a ambos lados obtenemos

$$k \ln \frac{1}{M} > \ln |f(z_0)| + \ln \frac{1}{\varepsilon} + 1$$

Por otro lado, es fácil demostrar que para $x > 0$ se tiene que

$$1 + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{\ln(x+1)}.$$

Entonces tomando $x = \sin \theta_{f,z_0}$, obtenemos que

$$1 + \frac{1}{\sin \theta_{f,z_0}} \geq \frac{1}{\ln(1/M)}.$$

Por lo tanto, eligiendo un $k \geq 1$ que satisfaga la relación (18), se tiene que

$$|f(x_k)| < \varepsilon.$$

□

La demostración del teorema (2.4) se basará en el siguiente hecho (que es más fuerte):

$$\boxed{x_i \text{ está bien definido } x_i \in U_{f,z_0} \text{ y } |f_{t_i}| \leq (t_i - t_{i+1})|f(z_0)|,}$$

en donde x_i está definido como en (16). Si esto se cumple para cierto $i \in \mathbb{N}$, diremos que el enunciado (E_i) es cierto. Notemos que si (E_i) se cumple para cierto $i \in \mathbb{N}$, entonces se cumple (17), ya que $|f_{t_i}(x_i)| = |f(x_i) - t_i f(z_0)| \leq (t_i - t_{i+1})|f(z_0)|$ y de esto obtenemos que $|f(x_i)| \leq 2t_i|f(z_0)|$.

PROPOSICIÓN 2.6. (E_i) es cierto para todo $i \in \mathbb{N}$.

La demostración de esta proposición se hará por inducción y se basará en varios lemas que desarrollaremos enseguida. Primero introduzcamos ciertas definiciones.

Para garantizar que $x_{i+1} \in U_{f,z_0}$, introduciremos las curvas w_s , v_s y u_s , para $s \in [0, 1]$, de la siguiente manera, ver la figura 5:

Sea w_s la curva en W_{f,z_0} que consiste de los dos segmentos de línea siguientes,

$$w_s = \begin{cases} (1-2s)f(x_i) + 2sf(\zeta_i) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2, \\ (2-2s)f(\zeta_i) + (2s-1)f(\zeta_{i+1}) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Ahora sea $v_s = f_{z_0}^{-1}(w_s)$, esta curva está bien definida y es única gracias a las propiedades de W_{f,z_0} .

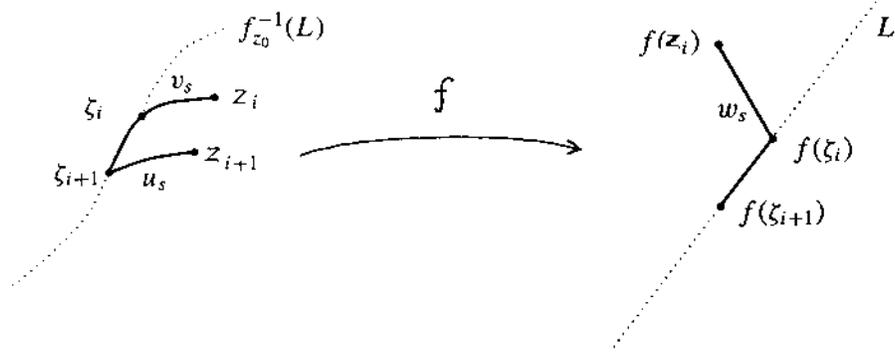


FIGURA 5

Consideremos un polinomio f con coeficientes complejos y un punto z en \mathbb{C} . Definamos tres cantidades auxiliares, la longitud de la iteración del endomorfismo de Newton de f en el punto z ,

$$\lambda(f, z) = |z - N_f(z)| = |(f')^{-1}(z)f(z)|$$

$$\gamma(f, z) = \sup_{k \geq 2} \left| \frac{(f'(z))^{-1} f^{(k)}(z)}{k!} \right|^{1/k-1},$$

y

$$\alpha(f, z) = \gamma(f, z)\lambda(f, z).$$

PROPOSICIÓN 2.7. Si $\alpha = \alpha(f, z) < 1$, entonces $\hat{z} = N_f(z)$ está bien definido y se cumple que,

$$(19) \quad |f(\hat{z})| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} |f(z)|$$

DEMOSTRACIÓN. Desarrollando f en serie de Taylor alrededor del punto \hat{z} y notando que $z - \hat{z} = f(z)/f'(z)$, obtenemos,

$$f(z) = f(\hat{z}) - f'(\hat{z}) \frac{f(z)}{f'(z)} + \sum_{k \geq 2} (-1)^k \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \left(\frac{f(z)}{f'(z)} \right)^k$$

así que,

$$\begin{aligned} |f(\hat{z})| &\leq |f(z)| \sum_{k \geq 2} \left| \frac{f^{(k)}(z)}{k! f'(z)} \right| \left| \frac{f(z)}{f'(z)} \right|^{k-1} \\ &\leq |f(z)| \sum_{k \geq 2} \gamma^{k-1}(f, z) \lambda^{k-1}(f, z) \end{aligned}$$

$$\leq |f(z)| \frac{\alpha(f, z)}{1 - \alpha(f, z)}, \text{ ya que } \alpha(f, z) < 1.$$

□

La siguiente proposición proviene de la teoría de las funciones schlicht, *i.e.* la teoría de las funciones holomorfas inyectivas del disco unitario en sí mismo. Para ver la demostración consultar Smale (1981).

PROPOSICIÓN 2.8. *Para cualquier polinomio con coeficientes complejos f y para todo punto $z \in \mathbb{C}$, tal que $f'(z) \neq 0$, se tiene que,*

$$\alpha(f, z) \leq \frac{4|f'(z)|}{r^{-1}(f'_z)}.$$

Como $f'(z) \neq 0$, entonces por el teorema de la función inversa, tenemos que existe un disco alrededor de $f(z)$ de radio $r > 0$, en donde f^{-1} está bien definida. En la proposición anterior $r^{-1}(f'_z)$ denota al mayor de tales r .

LEMA PRINCIPAL 2.9. *Si (E_i) es válido, para algún $i \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\alpha(f_{i+1}, v_s) \leq \frac{8(1 - M)}{\text{sen } \theta - (1 - M)}.$$

La demostración del lema (2.9) se basará en los lemas (2.10), (2.11), (2.12), y (2.13),

LEMA 2.10. *Si (E_i) es cierto, para algún $i \in \mathbb{N}$, entonces se tiene que*

$$(20) \quad |f(v_s) - f(\zeta_i)| \leq (t_i - t_{i+1})|f(z_0)|.$$

DEMOSTRACIÓN. La ecuación 20 es igual la ecuación $|w_s - f(\zeta_i)| \leq (t_i - t_{i+1})|f(z_0)|$, así que es suficiente verificar que la ecuación 20 se cumple para los extremos del segmento de línea w_s . Recordemos que $f_{t_i}(v_s) = f(v_s) - f(\zeta_i) = f(v_s) - t_i f(z_0)$ y como (E_i) se cumple, entonces para $s = 0$, tenemos que,

$$|f(x_i) - f(\zeta_i)| = |f(x_i) - t_i f(z_0)| = |f_{t_i}(x_i)| \leq (t_i - t_{i+1})|f(z_0)|.$$

La demostración para $s = 1$ es similar. □

LEMA 2.11. *Si (E_i) es cierto, para algún $i \in \mathbb{N}$, entonces*

$$|f_{t_{i+1}}(v_s)| \leq 2(t_i - t_{i+1})|f(z_0)|.$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición,

$$f_{t_{i+1}}(v_s) = f(v_s) - t_{i+1}f(z_0)$$

$$= f(v_s) - t_i f(z_0) + (t_i - t_{i+1}) f(z_0).$$

□

Por último, gracias al lema 2.10, se tiene la desigualdad deseada.

LEMA 2.12. Si (E_i) es cierto, para algún $i \in \mathbb{N}$, entonces se tiene que

$$r(f_{\zeta_i}^{-1}) \geq |f(\zeta_i)| \operatorname{sen} \theta_{f, z_0}.$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue inmediatamente de la definición de $r(f_{\zeta_i}^{-1})$ y de la figura 6.

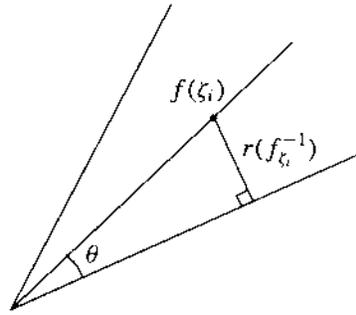


FIGURA 6

□

LEMA 2.13. Si (E_i) es cierto, para algún $i \in \mathbb{N}$, entonces

$$r(f_{t_{i+1}, v_s}^{-1}) \geq |f(z_0)| M_i (\operatorname{sen} \theta_{f, z_0} - (1 - M)).$$

DEMOSTRACIÓN. De las definiciones tenemos que

$$r(f_{t_{i+1}, v_s}^{-1}) \geq r(f_{\zeta_i}^{-1}) - |f(v_s) - f(\zeta_i)|.$$

ahora, recordando que $f(\zeta_i) = t_i f(z_0)$, que $t_i = M^i$ y usando los lemas 2.10 y 2.12, obtenemos la desigualdad deseada. □

Ahora procederemos a demostrar el lema 2.9.

DEMOSTRACIÓN. De la proposición 2.8 tenemos que,

$$\alpha(f_{t_{i+1}, v_s}) \leq \frac{4f_{t_{i+1}}(v_s)}{r(f_{t_{i+1}, v_s}^{-1})}.$$

Ahora, aplicando los lemas 2.11 y 2.13, obtenemos

$$\frac{4|f_{t_{i+1}}(v_s)|}{r(f_{t_{i+1}, v_s}^{-1})} \leq \frac{8(t_i - t_{i+1})}{M^i (\operatorname{sen} \theta_{f, z_0} - (1 - M))} = \frac{8(1 - M)}{\operatorname{sen} \theta_{f, z_0} - (1 - M)}.$$

□

LEMA 2.14. *Supongamos que (E_i) es cierto, para algún $i \in \mathbb{N}$. Sea $\alpha = \theta(f_{i+1}, v_s)$ y $0 \leq s \leq 1$, entonces*

$$\frac{2\alpha}{1-\alpha} \leq M.$$

DEMOSTRACIÓN. Esto se deduce inmediatamente del lema 2.9 y de la definición de M . □

Por último demostraremos el teorema 2.4.

DEMOSTRACIÓN. La demostración se hará por inducción. Primero notemos que (A_0) es cierto ya que $f_0(x_0) = 0$. Ahora supongamos que A_i es cumple para cierto $i \in \mathbb{N}$. Entonces por la desigualdad 19 se tiene que,

$$f_{i+1}(u_s) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} |f_{i+1}(v_s)|, \quad \text{en donde } \alpha = \alpha(f_{i+1}, v_s) \text{ y } s \in [0, 1].$$

Por otro lado, por los lemas 2.11 y 2.14, se tiene que

$$|f_{i+1}(u_s)| \leq M(M^i - M^{i+1})|f(z_0)| \leq (t_{i+1} - t_{i+2})|f(z_0)|,$$

lo cual implica que $f(u_s) \in W_{f, z_0}$, para todo $s \in [0, 1]$ y como $u_i = \zeta_{i+1} \in U = U_{f, z_0}$, tenemos que $u_s \in U$ para todo s . En particular $u_0 = x_{i+1} \in U$. Además para $s = 0$, se tiene que,

$$|f_{i+1}(x_{i+1})| \leq (t_{i+1} - t_{i+2})|f(z_0)|,$$

esta última desigualdad se deduce que E_{i+1} se cumple. □

3. El método de Newton continuo.

La figura 7 ilustra una de las principales dificultades que el método de Newton puede tener.

El punto x_1 se comienza a alejar de la raíz del polinomio. Este problema se puede resolver en este caso, forzando a que la diferencia $|x_{n+1} - x_n|$ sea pequeña multiplicando $f(x_n)/f'(x_n)$ por un número positivo pequeño h , esto nos lleva a considerar el siguiente problema:

$$(21) \quad x(t+h) = x(t) - h \frac{f(x(t))}{f'(x(t))},$$

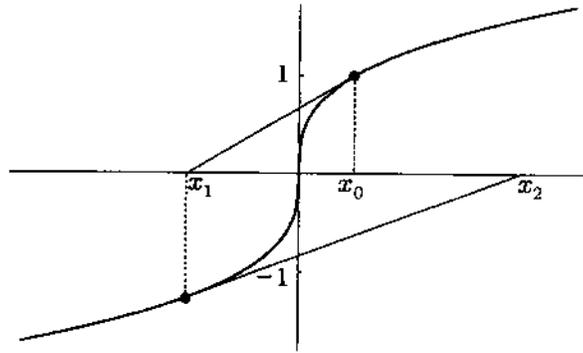


FIGURA 7. Si comenzamos a iterar en el punto x_0 la órbita divergerá hacia el infinito.

para t un número real positivo. Notemos que si en la ecuación 21 sustituimos a t por un número entero positivo y a h por 1 obtenemos la ecuación 11. Ahora considerando la ecuación

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{f(x(t))}{f'(x(t))}$$

y tomando el límite cuando $h \rightarrow 0$ obtenemos la ecuación diferencial,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{f(x)}{f'(x)},$$

con valor inicial $x(0) = x_0$.

Motivados por esta construcción consideremos la siguiente ecuación diferencial compleja,

$$(22) \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{f(z)}{f'(z)},$$

con valor inicial $z(0) = z_0$. Notemos que si aplicamos el método de Euler con paso $h = 1$ a la ecuación 22, obtenemos la ecuación 12. Denotaremos al campo vectorial

$$-\frac{f(z)}{f'(z)} \frac{\partial}{\partial z}$$

por $\mathfrak{N}_f(z)$ y lo llamaremos el campo vectorial de Newton de f . En donde $\frac{\partial}{\partial z}$ es un símbolo formal que nos dice que $f(z)/f'(z)$ debe interpretarse como un campo vectorial complejo en $\hat{\mathbb{C}}$. Con el propósito de remover las singularidades de la ecuación 22, consideremos el siguiente reescalamiento de la ecuación diferencial 22,

$$(23) \quad \dot{z} = -f(z)\overline{f'(z)},$$

la cual se obtiene gracias a que,

$$\mathfrak{N}_f(z) = -\frac{f(z)}{f'(z)} \cdot \frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)} \frac{\partial}{\partial z} = -\left(\frac{1}{|f'(z)|^2}\right) f(z) \overline{f'(z)} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Denotemos por $\mathfrak{V}_f(z)$ al campo vectorial $-f(z) \overline{f'(z)} \frac{\partial}{\partial z}$ y notemos que este escalamiento convierte los polos de \mathfrak{N}_f en ceros de \mathfrak{V}_f .

Recordemos que el flujo definido por \mathfrak{N}_f , a través de un punto $c \in \mathbb{C}$ es una función $\Phi_c : I \rightarrow \mathbb{C}$, en donde I es un intervalo de \mathbb{R} que contiene al cero y Φ_c es una función diferenciable que cumple que

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t)}{dt} &= \mathfrak{N}_f(\Phi_c(t)) \text{ y} \\ \Phi_c(0) &= c. \end{aligned}$$

A Φ_t se le llama el grupo 1-paramétrico de soluciones de la ecuación diferencial 22.

LEMA 3.1. *Sea f un polinomio con coeficientes complejos y Φ_ω el flujo a través de ω del campo vectorial \mathfrak{N}_f . Entonces f manda las curvas $\{\Phi_\omega(t) : t \in I\}$ a los rayos que emanan del origen y que apuntan hacia el origen, es decir,*

$$f(\Phi_\omega(t)) = f(\omega)e^{-t}.$$

DEMOSTRACIÓN. Derivando $f(\Phi_\omega(t))$ con respecto a t y aplicando la regla de la cadena obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{df(\Phi_\omega(t))}{dt} &= f'(\Phi_\omega(t)) \frac{d(\Phi_\omega(t))}{dt} \\ &= f'(\Phi_\omega(t)) \mathfrak{N}_f(\Phi_\omega(t)) = -f(\Phi_\omega(t)), \end{aligned}$$

ahora notemos que esta igualdad es una ecuación diferencial en t para la función $f \circ \Phi_\omega$. Entonces como tenemos la condición inicial $\Phi_\omega(0) = \omega$, tiene la solución única $f(\Phi_\omega(t)) = f(\omega)e^{-t}$. \square

El siguiente lema nos dará una descripción geométrica global de las líneas de flujo Φ_ω . En lo siguiente denotaremos por V_p el conjunto de ceros de el polinomio p .

LEMA 3.2. *Para todo $\omega \in \mathbb{C} - (V_f \cup V_{f'})$, Φ_ω está definido en un intervalo maximal (a, b) que contiene al 0 y es uno de los siguientes cuatro tipos:*

1. $(-\infty, \infty)$ y el flujo proviene del infinito y llega a una raíz de f ,
2. $(-\infty, b)$ y el flujo proviene del infinito y llega a una raíz de f' ,
3. (a, b) y el flujo proviene de una raíz de f' y llega a otra raíz de f' ó
4. (a, ∞) y el flujo proviene de una raíz de f' y llega a una raíz de f .

DEMOSTRACIÓN. \mathfrak{N}_f es una función holomorfa de $W = \mathbb{C} - (V_f \cup V_{f'})$ a \mathbb{C} y el flujo deja cualquier conjunto compacto de W en W (ver Hirsch y Smale (1974)). Por el lema 3.1, el intervalo maximal Φ_ω no está acotado por arriba si y sólo si el flujo llega a una raíz de f . El mismo argumento nos permite demostrar que el intervalo no es acotado por abajo si y sólo si el flujo proviene del infinito. Como el flujo deja cualquier conjunto compacto de W en W , los únicos puntos límite que restan están en $V_{f'}$. \square

Cabe hacernos la siguiente pregunta, ¿Cómo están distribuidas las líneas de flujo alrededor de un punto crítico y alrededor de un cero de f ?

Para estudiar el comportamiento de las líneas de flujo alrededor de un cero de f , consideremos el siguiente lema,

LEMA 3.3. *Se tiene que,*

$$-\text{grad}\left(\frac{1}{2}|f(z)|^2\right) = -f(z)\overline{f'(z)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Esto se deduce fácilmente gracias a las ecuaciones de Cauchy-Riemann. \square

Del lema 3.3 obtenemos que el vector de Newton $-f'(z)^{-1}f(z)$ y $-\text{grad}\left(\frac{1}{2}|f(z)|^2\right)$ difieren por una constante real positiva ya que $|f'(z)|^2 = f'(z)\overline{f'(z)}$. Así que la curva definida por la línea de flujo Φ_ω es tangente a $-\text{grad}\left(\frac{1}{2}|f(\omega)|^2\right)$ y ortogonal a las líneas de nivel de $|f(z)|^2$. Por lo tanto, cerca de un cero θ de f estas líneas de flujo convergen a θ y apuntan en dirección a θ . Ver figura 8.

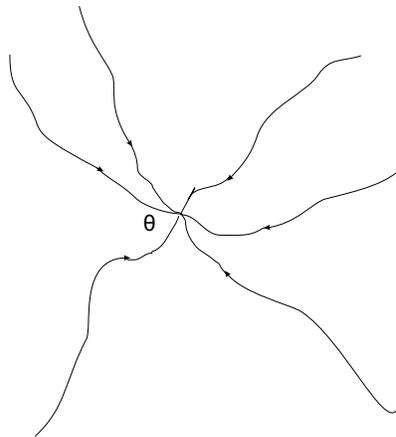


FIGURA 8. Cero de orden 3.

Ahora supongamos que ζ es un punto crítico de f tal que $f(\zeta) \neq 0$, entonces tomando el desarrollo en serie de Taylor de f alrededor de ζ , obtenemos,

$$f(z) = f(\zeta) + \frac{f^k(\zeta)}{k!}(z - \zeta)^k + \dots,$$

para $k \geq 2$. Entonces existe una vecindad U alrededor de ζ , una función $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$, una vecindad V alrededor de $f(\zeta)$ y una función $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$, tal que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \varphi(U) & \xrightarrow{z \mapsto z^k} & \psi(V) \end{array}$$

Tomemos un círculo de radio r con centro en ζ y denotémoslo por $S^1(r)$. Considerando a r lo suficientemente pequeño de tal forma que $S^1(r) \subset U$ y notemos que la imagen de $S^1(r)$ bajo f interseca a $L_{f(\zeta)}^+ = \{\lambda f(\zeta) : \lambda > 1\}$ y a $L_{f(\zeta)}^- = \{\lambda f(\zeta) : 0 < \lambda < 1\}$, k veces de forma alternante (esto se deduce del diagrama anterior). Así que hay k curvas Φ_ω que bajo f son mandadas a $L_{f(\zeta)}^+$ y otras k curvas que son mandadas a $L_{f(\zeta)}^-$. Si le damos a las curvas la orientación obtenida por el vector $-f'(z)^{-1}f(z)\frac{\partial}{\partial z}$, entonces aquellas que son mandadas a $L_{f(\zeta)}^+$, apuntan en la dirección hacia ζ y aquellas que son mandadas a $L_{f(\zeta)}^-$ tienen la dirección que apunta hacia afuera de ζ (ver figura 9).

4. ¿En donde comenzar la homotopía?

El objetivo es obtener ciertas estimaciones que utilizaremos en la siguiente sección para eliminar el factor $\theta_{f,z}$ de la desigualdad 18 del corolario 2.5. El principal teorema de esta sección es el siguiente,

TEOREMA 4.1. *El conjunto de puntos $z \in S_R^1$, tales que $\theta_{f,z} < a$, está contenido en la unión de a lo más $2(d-1)$ arcos de ángulo,*

$$\frac{2}{d} \left(a + 2 \arcsen \frac{1}{R-1} \right), \text{ para } R > 2.$$

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$, considerando a z_1 y a z_2 como números complejos, notemos que,

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \Re(\overline{z_1} z_2).$$

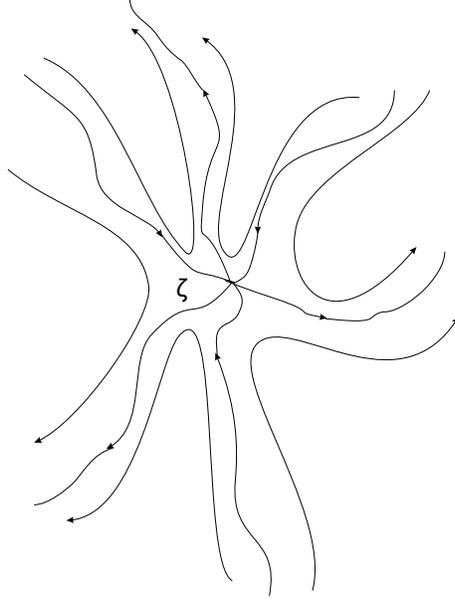


FIGURA 9. Polo de orden 3.

En la demostración del siguiente lema utilizaremos las siguientes desigualdades, las cuales son muy sencillas de deducir,

$$\Re(\overline{z_1}z_2) > 0 \text{ si y sólo si } \Re(z_1\overline{z_2}) > 0 \text{ si y sólo si } |z_2|^2\Re\left(z_1\frac{1}{z_2}\right) > 0.$$

El siguiente lema nos dice que para toda $R \geq 2$, toda línea de flujo Φ_ω cruza a S_R^1 hacia adentro. Uniendo este resultado con los lemas 4.3 y 4.4, obtendremos la demostración del teorema 4.1.

LEMA 4.2. *Sea $f(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \dots + a_0$ un polinomio con coeficientes complejos tales que $|a_i| \leq 1$, para $i = 0, 1, \dots, d-1$. Sea $R \geq 2$. Entonces para $z \in S_R^1$,*

$$\Re\left(\overline{z}\frac{f(z)}{f'(z)}\right) > 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_d$ las raíces de f , entonces por el teorema 2.2, $|\zeta_i| < 2$, para $i = 1, 2, \dots, d$. Consideremos una recta tangente al círculo S_R^1 que pasa por un punto $z \in S_R^1$, notemos que las raíces se encuentran en la parte izquierda de la recta tangente, por lo tanto tenemos que $\Re(\overline{z}\zeta_i) < \Re(\overline{z}z)$. Así que $\Re(\overline{z}z) - \Re(\overline{z}\zeta_i) = \Re(\overline{z}(z - \zeta_i)) > 0$, para $i = 1, 2, \dots, d$, y por lo tanto, $\Re(z/(z - \zeta_i)) > 0$, para $i = 1, 2, \dots, d$. Ahora sumando obtenemos que,

$$\Re\left(z\sum_{i=1}^d\frac{1}{z-\zeta_i}\right) > 0,$$

de lo cual deducimos que,

$$\Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) > 0 \text{ y } \Re\left(\bar{z}\frac{f(z)}{f'(z)}\right) > 0.$$

□

Del lema 4.2 se deduce que si $z \in S_R^1$, entonces el producto interno satisface que,

$$\left\langle z, -\frac{f(z)}{f'(z)} \right\rangle = \Re\left(-\frac{\bar{z}f(z)}{f'(z)}\right) < 0.$$

LEMA 4.3. Consideremos un polinomio $f(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \dots + a_0$ con coeficientes complejos tales que $|a_i| \leq 1$, para $i = 0, 1, \dots, d-1$. Sean $z_1, z_2 \in S_R^1$ tales que,

$$\beta \leq \left| \arg \frac{z_1}{z_2} \right|.$$

Entonces se tiene que,

$$\left| \arg \frac{f(z_1)}{f(z_2)} \right| \geq d\beta - 2 \arcsen \frac{1}{R-1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Primero observemos que para $z \in S_R^1$, $f(z)/z^d$ está dentro del círculo de radio $1/(R-1)$ centrado en 1, es decir,

$$\left| \frac{f(z)}{z^d} - 1 \right| = \left| \frac{\sum_{j=0}^{d-1} a_j z^j}{z^d} \right| \leq \left| \frac{\sum_{j=0}^{d-1} R^j}{R^d} \right| = \frac{R^d - 1}{(R-1)R^d} < \frac{1}{R-1}.$$

De la figura 10, se deduce fácilmente la siguiente desigualdad,

$$\left| \arg \frac{f(z)}{z^d} \right| \leq \arcsen \frac{1}{R-1}.$$

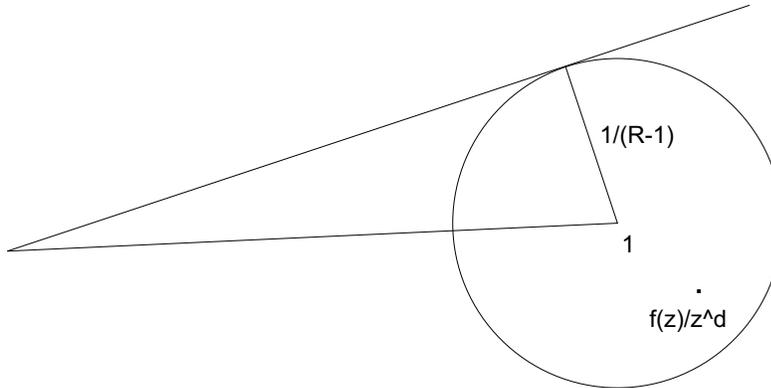


FIGURA 10

Ahora observemos que,

$$\frac{f(z_1)}{f(z_2)} = \frac{z_1^d(f(z_1)/z_1^d)}{z_2^d(f(z_2)/z_2^d)} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^d \frac{f(z_1)/z_1^d}{f(z_2)/z_2^d},$$

de lo cual obtenemos que,

$$\begin{aligned} \left| \arg \frac{f(z_1)}{f(z_2)} \right| &= \left| d \arg \frac{z_1}{z_2} + \arg \frac{f(z_1)/z_1^d}{f(z_2)/z_2^d} \right| \\ &\geq \left| d \arg \frac{z_1}{z_2} \right| - \left| \arg \frac{f(z_1)/z_1^d}{f(z_2)/z_2^d} \right| \geq \left| d \arg \frac{z_1}{z_2} \right| - 2 \arcsen \frac{1}{R-1}. \end{aligned}$$

□

Sea θ un punto crítico de f y sea L el rayo que emana del origen y pasa por $f(\theta)$, *i.e.* $L = \{\lambda f(\theta) | \lambda > 0\}$ y sea Λ_θ la componente de $f^{-1}(L)$ que contiene al punto θ . Definamos Λ como,

$$\Lambda = \bigcup_{\theta: f'(\theta)=0} \Lambda_\theta.$$

LEMA 4.4. *Sea $R \geq 2$ y f un polinomio mónico de grado d con coeficientes tales su módulo está acotado en valor absoluto por 1, entonces $\Lambda \cap S_R^1$ es conjunto con a lo más $2(d-1)$ puntos.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos cualquier curva Φ_z y recordemos que

$$\langle \Phi_z(0), -f(z)/f'(z) \rangle = 0.$$

Entonces por el lema 4.2, cualquier curva Φ_z es transversal a S_R^1 , para $R \geq 2$ y apunta hacia adentro (ver figura 11). De esto se sigue que para todo punto crítico θ_i , $\Lambda_{\theta_i} \cap S_R^1$ consiste de a lo más $k_i + 1$ puntos, en donde k_i es la multiplicidad del punto crítico θ_i . Así que,

$$\sum_{\{\theta_i: f'(\theta_i)=0\}} k_i = d-1 \quad \text{y} \quad \sum_{\{\theta_i: f'(\theta_i)=0\}} (k_i + 1) \leq 2(d-1).$$

Notemos que la igualdad se satisface si y sólo si θ_i es un cero simple de f' , *i.e.* si se tiene que $k_i = 1$, para para todo i . □

Ahora ya estamos listos para dar la demostración del teorema 3.1

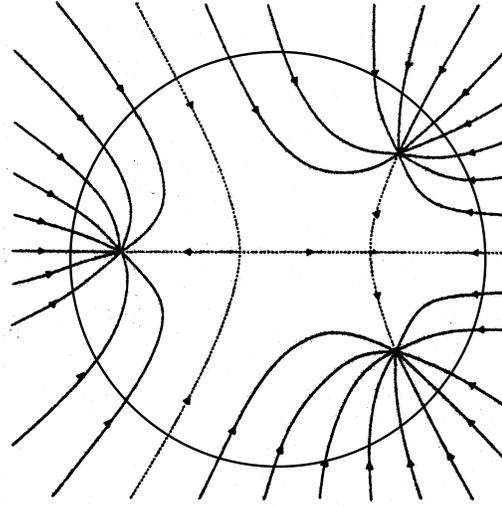


FIGURA 11. Método de Newton continuo aplicado a un polinomio con ceros en un círculo con centro en el origen y radio 2

DEMOSTRACIÓN. Consideremos los puntos de $\Lambda \cap S_R^1$, $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_l$, con $0 \leq l \leq 2(d-1)$, que existen de acuerdo al lema (4.4). Si para todo i , con $1 \leq i \leq l$,

$$\left| \arg \frac{z}{\zeta_i} \right| \geq \frac{1}{d} \left(a + 2 \arcsen \frac{1}{R-1} \right),$$

entonces por el lema 4.3

$$\left| \arg \frac{f(z)}{f(\zeta_i)} \right| \geq a$$

y $\theta_{f,z} \geq a$. Así que si $\theta_{f,z} < a$, entonces existe algún ζ_i , con $i \in \{1, \dots, l\}$, tal que

$$\left| \arg \frac{z}{\zeta_i} \right| < \frac{1}{d} \left(a + 2 \arcsen \frac{1}{R-1} \right)$$

por lo tanto, obtenemos el teorema 3.1 □

5. El algoritmo de Shub-Smale y el análisis de su complejidad.

Recordemos que el éxito del método del corolario 2.5 para encontrar las raíces de un polinomio estriba en que podamos escoger un punto z_0 con ciertas características, en esta sección haremos una elección eficiente del punto z_0 haciendo uso del teorema 4.1.

Comencemos, motivados por el teorema 4.1, escogiendo dos números reales a y $R > 0$ tales

$$(24) \quad a + 2 \arcsen \frac{1}{R-1} < \frac{\pi}{4}.$$

Entonces, gracias al teorema 4.1, podemos deducir que el conjunto de puntos $z \in S_R^1$, tales que $\theta_{f,z} < a$, está contenido en la unión de $2(d-1)$ arcos, cada uno de estos arcos tiene ángulo menor que $\pi/2d$. Por lo tanto, ningún par de puntos del conjunto $\{R \exp(2\pi j \sqrt{-1}/4d) : j = 0, 1, \dots, 4d-1\}$, están contenidos en ninguno de estos $2(d-1)$ arcos. Así que, al menos la mitad de estos puntos tienen el número $\theta_{f,z} \geq a$.

Consideremos las siguientes cantidades, $M = \frac{25}{25 + \sin \theta_{f,z}}$ y k el menor entero, tal que,

$$(25) \quad k \geq \left(1 + \frac{25}{\sin a}\right) \left(d \ln R + \ln \frac{1}{\varepsilon} + 1\right).$$

Ahora consideremos el siguiente,

ALGORITMO DE SHUB-SMALE 5.1. *Entrada* (ε, f) , en donde $f(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \dots + a_0$ y $|a_i| \leq 1$.

1. Sea k un entero que satisfaga la desigualdad 25.
2. Sea $j \in \{0, 1, \dots, 4d-1\}$ tal que no se haya escogido antes.
3. Sea $z_0 = Re^{(2\pi j \sqrt{-1})/4d}$ y consideremos los siguientes números $z_i = N_{f_i}(x_{i-1})$, para $i = 1, 2, \dots, k$, (en donde N_{f_i} está definido como en la ecuación 16).
4. Si $|f(z_k)| < \varepsilon$, entonces dar como salida z_k , si este no es el caso volver al paso 2.

Observemos que por el corolario 2.5 y por el teorema 4.1, el algoritmo 5.1 efectúa a lo más $4d$ iteraciones del ciclo principal, *i.e.* del paso 2 al 4, por otro lado el paso 3, efectúa exactamente k iteraciones del endomorfismo de Newton. Reuniendo estos resultados obtenemos el siguiente,

TEOREMA 5.2. *El algoritmo de Shub-Smale, da como resultado una raíz aproximada de f efectuando a lo más $4kd$ evaluaciones del endomorfismo de Newton, en donde k satisface la desigualdad 25.*

Tomando en la ecuación 24, $a = 0,628 < \pi/5$ y $R = 12,745$ (con lo cual tenemos que $2 \arcsen 1/(R-1) < \pi/20$), obtenemos que basta escoger el menor entero k mayor o igual a $43,56(2,55d - \ln \varepsilon + 1)$. A partir de estas estimaciones podemos obtener una cota superior para el número total de iteraciones llevadas a cabo por el algoritmo de Shub-Smale. Notemos que en cada evaluación del endomorfismo de Newton, el número de operaciones aritméticas es menor que $3d$ y por lo tanto podemos obtener un análisis de la complejidad del algoritmo de Shub-Smale. Obtenemos que el número de operaciones aritméticas llevadas a cabo por este algoritmo, escogiendo a y R como al principio del párrafo, está acotada por,

$$514d^2(2,55d - \ln \varepsilon + 1)$$

y por lo tanto es $O(d^2(d - \ln \varepsilon + 1))$.

Bibliografía

1. I. N. Baker (1962), Fix points of polynomials and rational functions, J. London Math. Soc., **39**, págs. 615-622.
2. A. Beardon (1991), Iteration of Rational Functions, Grad. Texts Math. **132**, Springer-Verlag.
3. P. Blanchard (1984), Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, Bull. AMS **11**, págs. 85-141.
4. L. Blum, M. Shub, y S. Smale (1989), On a theory of computation and complexity over the real numbers: *NP*-completeness, recursive functions and universal machines, Bulletin of the AMS, Vol. **21**, No.1, págs. 1-46.
5. M. Brinn y G. Stuck (2002), Introduction to Dynamical Systems, Cambridge University Press.
6. X. Buff y A. Chéritat (2005), Ensembles de Julia quadratiques de mesure de Lebesgue strictement positive, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341, no. **11**, págs. 669-674.
7. L. Carleson y T. Gamelin (1993), Complex Dynamics, Universitext. Springer-Verlag.
8. M. W. Hirsch y S. Smale (1970), Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press.
9. J. Hubbard, D. Schleicher y S. Sutherland (2001), How to find all roots of complex polynomials by Newton's method, Inv. Math. **146**, págs. 1-33.
10. S. G. Krantz (1990), Complex Analysis: The Geometric Viewpoint, The Carus Mathematical Monographs **23**, AMS.
11. T. Lei (1997), Branched coverings and cubic Newton maps, Fund. Math. **154**, págs. 207-260.
12. A. Manning (1992), How to be sure of finding a root of a complex polynomial usin Newton's method. Bol. Soc. Brasil. Matematica **22**(2), págs. 157-177.
13. C. McMullen (1987), Families of rational maps and iterative root- finding algorithms, Ann. Math., **125**, págs. 467-493.
14. C. McMullen y D. Sullivan (1998), Quasiconformal homeomorphisms and Dynamics III: The Teichmüller space of a holomorphic dynamical sytem, preprint.
15. W. de Melo y S. van Strien (1993), One Dymensional Dynamics, Springer-Verlag.

16. J. Milnor (1993), Geometry and dynamics of quadratic rational maps, *Experimental Math.* **2**, págs. 37-83.
17. J. Milnor (2006), *Dynamics in One Complex Variable*, 3rd ed, *Annals of Mathematics Studies* **160**, Princeton University Press.
18. S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi y T. Ueda (2000), *Holomorphic Dynamics*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, **66**, Cambridge University Press.
19. W. Rudin (1966), *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill.
20. M. Shishikura (1990), Connectivity of the Julia set and fixed point. IHES, Preprint.
21. M. Shub y S. Smale (1986), On the existence of generally convergent algorithms. *J. of Complexity*, **2**, págs. 2-11.
22. C. Siegel (1942), Iteration of analytic functions, *Ann. of Math. (2)* **43**, 607-612.
23. S. Smale (1981), The fundamental theorem of algebra and complexity theory, *Bulletin of the Amer. Math. Soc.* **4**, págs. 1-36.
24. S. Smale (1985), On the efficiency of algorithms of analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* **13**, págs. 87-121.
25. N. Steinmetz (1993), *Rational Iteration: Complex Analytic Dynamical Systems*, de Gruyter.
26. D. Sullivan (1985), Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains, *Ann. Math.* **122**, págs. 401-418.