



Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico
Matemáticas

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

Ejemplos de estructuras geométricas en
superficies

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

P r e s e n t a :

J U A N A H T Z I R I G O N Z A L E Z L E M U S

Asesor:

Dr. Jorge Luis López López

Morelia Michoacán, Octubre de 2007

Agradecimientos.

- A mis padres Ma. Elena Lemus Tapia y Juan González Cisneros por que hicieron esto posible, en realidad este título es de ellos.

- A mis hermanos Lenin y Dante por aguantar a ese chiquillo inquieto y enfadoso durante toda su infancia. Además por ser siempre un ejemplo para mi, cada uno en distintos aspectos de la vida.

- A Jorge quién a pesar de su agenda tan apretada tuvo paciencia en mis momentos de flojera (que fueron muchos). Pablo me comento, “el día que tu te titules deberían darle el premio Nobel de la paz a Jorge por aguantarse y no matarte”. Creo que tiene toda la razón.

- A los Chikwi Boy's {Marika, Nalgón, Muñeco, Queso, Grinch, Trompas, Huerta, Erika, Oliver, Miguel, Ricardo} que me apoyaron durante toda la carrera con su amistad. De ellos aprendí mucho más que sólo cultura.

- A todos los amigos que he tenido durante toda la vida, en especial al chaqueta pues de todos, él es con quien más agradable es convivir (conbeber).

- A todos los maestros que contribuyeron en mi formación academica. En especial a los siguientes:

- * Mario Juárez González y Dalia García Robles quienes respectivamente imparten muy buenas clases de Física y Matemáticas en la secundaria ESFU 1. Con sus clases reafirmaron la idea de estudiar en Fis-Mat.

- * Macrina Irene, Norma Cisneros, Jorge Suárez, Jose Bravo, Antonio Vaca y Juan González (mi papa) quienes son muy buenos catedráticos, y con sus materias impidieron que la prepa fuera un festival para mi.

- * Francisco Dominguez Mota quién desde el principio (con cálculo 1) me enseñó que la facultad no era ningún juego, que iba a tener que trabajar para poderla salir.

* Maria Luisa Pérez (Malú) quién con sus materias provoco que me adentrara en el maravilloso mundo de las matemáticas. Además por que después de la primera materia que tome con ella siempre senti un gran apoyo de su parte.

* Jorge Luis López de quien adquirí mucho conocimiento matemático en clase y en la tesis. Pero sobre todo por que me enseñó que en las matemáticas (como en cualquier aspecto de la vida) sólo se puede sobresalir con mucho trabajo y dedicación, además por todo el apoyo que me brindo.

* Jesús Muciño, Fernando Hernández, Pierre Bayard, Angela Ortega por su exelente revisión de tesis y sus muy provechosos comentarios.

• A Tita “la vecinita” quien creo que le esta empezando a dar un rumbo padre a mi vida.

Introducción.

Por los años 300 a.C. el matemático griego Euclides de Megara, tuvo la gran idea de basar la geometría en postulados sobre los cuales descansan todos los teoremas que en ella son válidos. De manera que según Euclides, estudiar alguna geometría se limita a encontrar relaciones entre los postulados que la determinan. Esta idea se mantuvo como la única forma de hacer geometría hasta mediados del siglo XIX. Periodo en el cual el matemático alemán Felix Klein presentó una forma diferente de clasificar la geometría. Klein observó que si una geometría puede ser modelada en un espacio X , entonces el conjunto de los homeomorfismos de X que dejan invariantes los postulados que determinan a dicha geometría, forma un grupo con la composición de funciones. De manera que él estableció la idea de caracterizar a toda geometría A con una pareja (G_A, X) , donde X es un espacio modelo para A y G_A es el grupo que actúa en X por medio de homeomorfismos que caracterizan a dicha geometría (i.e. los postulados establecidos para A son invariantes bajo la acción de G_A). Esta innovadora forma de clasificar la geometría, fue iniciada por Felix Klein en el año de 1872 y es conocida como el *programa Erlangen*.

Entonces según el programa Erlangen, la geometría euclidea se puede caracterizar por la pareja $(I(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$. Donde $I(\mathbb{R}^2)$ es el grupo de isometrías del plano, i.e. el grupo $I(\mathbb{R}^2)$ actúa en $\mathbb{R}^2$ por medio de homeomorfismos que preservan distancia¹. Esto implica que los teoremas de la geometría euclidea también serán invariantes bajo la acción del grupo $I(\mathbb{R}^2)$. El programa Erlangen tiene ventajas sobre la forma de ver la geometría propuesta por Euclides, algunas de ellas son:

- Si analizamos la acción de un grupo G en el espacio X , notaremos que existen objetos matemáticos que se mantienen invariantes. Entonces el programa Erlangen muestra de forma explícita que cada lenguaje geométrico tiene sus propios conceptos bien definidos, ya que estos se pueden ver como los invariantes en X bajo la acción de G y podemos

¹De manera que también se preservan los ángulos, las rectas, círculos, etc.

considerar a toda pareja (G, X) como una geometría modelada en el espacio X . Además el programa Erlangen ayuda a “crear” nuevas geometrías, pues por ejemplo la topología del plano (caracterizada por el par $(H(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$, con $H(\mathbb{R}^2)$ el grupo de homeomorfismos) es considerada como una geometría.

- El programa Erlangen permite dar un orden parcial a las geometrías modeladas sobre algún espacio X , este será el determinado por los grupos que actúan por homeomorfismos en X (i.e. dos geometrías (G_A, X) y (G_B, X) son comparables si y sólo si $G_A \leq G_B$ ó $G_B \leq G_A$). Por lo tanto si tenemos dos grupos G y G' que actúan por homeomorfismos en X y tales que $G < G'$, decimos que la geometría (G', X) es más general que la (G, X) por el hecho de que toda transformación de G pertenece a G' , esto claramente implica que (G', X) tiene menos invariantes que (G, X) . Por ejemplo en $\mathbb{R}^2$, la geometría afín que está determinada por el grupo $A(\mathbb{R}^2)$ constituido por traslaciones compuestas con transformaciones lineales invertibles es más general que la euclídeana, pues claramente $I(\mathbb{R}^2) < A(\mathbb{R}^2)$, de este hecho claramente se sigue que todo invariante de la geometría afín es un invariante de la geometría euclídeana. En este caso el recíproco no es cierto, para ilustrar esto sólo debemos notar que la transformación

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

es afín (i.e. $\mathcal{A} \in (\mathbb{R}^2)$) y actúa en $\mathbb{R}^2$ sin preservar distancias.

De forma que por medio de los grupos que actúan en X por homeomorfismos, podemos otorgar un orden parcial al conjunto de geometrías modeladas sobre el espacio X . A continuación se muestra una lámina con el orden parcial en los grupos que actúan sobre $\mathbb{R}^2$ y que serán de nuestro interés en el desarrollo de la tesis.

Por lo tanto según el programa Erlangen, $(H(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$ (la topología de $\mathbb{R}^2$) es la geometría modelada en $\mathbb{R}^2$ más general que hay. Esto sucede en todo espacio topológico X , pues pedimos que los grupos actúen por homeomorfismos.

- Una ventaja más del programa Erlangen, es que este propone a la teoría de grupos como una idea algebraica de organizar el conocimiento geométrico. Es decir, todo teorema geométrico es invariante bajo la acción de algún grupo, para convencernos de esto sólo basta identificar los objetos matemáticos utilizados en la demostración de este teorema y

considerar el grupo que los deja invariantes. Esta afirmación muestra que la acción de un grupo lleva de manera intrínseca teoremas geométricos.

En la actualidad el programa Erlangen juega un papel importante en el estudio de variedades, ya que en el siglo XX surgió la idea de otorgarles estructuras geométricas. Si a una variedad M podemos otorgarle un atlas con cartas modeladas en el espacio X , tales que los cambios de coordenadas pertenezcan a un grupo G que actúe por medio de homeomorfismos en X , decimos que M tiene una estructura geométrica determinada por el par (G, X) . Una variedad de este tipo será llamada (G, X) -variedad². Si M es una (G, X) -variedad, entonces los objetos matemáticos en X que son invariantes bajo la acción de G , determinan conceptos que localmente están bien definidos en M ya que los cambios de coordenadas los preservan. Esto no sucede con los objetos que no son invariantes bajo la acción de G , por ejemplo; Sea M una variedad con un atlas donde los cambios de coordenadas pertenecen a un grupo que actúa en $\mathbb{R}^2$ sin preservar ángulos, entonces la medida de un ángulo realizada en alguna de las cartas del atlas, generalmente cambia cuando medimos desde otra carta, pues el cambio de coordenadas no preserva ángulos. Por lo tanto el ángulo depende de la carta sobre la que se esta midiendo.

Dada una variedad M . No siempre es posible otorgarle una cierta estructura geométrica, uno de los objetivos de esta tesis es ilustrar el tipo de información que otorga la estructura geométrica. Para esto, en el capítulo 1 se define (G, X) -variedad y se muestran algunos ejemplos que ayudan a la comprensión de las definiciones otorgadas. En el capítulo 2 se trata el siguiente problema: puesto que toda variedad es de la forma $M = \tilde{M}/\pi_1(M)$, entender bajo que condiciones el grupo fundamental se puede representar en G para realizar M en la forma X/Γ con $\Gamma < G$. En el capítulo 3 se muestran algunos resultados sobre uniformización de superficies con estructura proyectiva compleja. Y en el apéndice se dan las condiciones necesarias para garantizar que el cociente de una variedad por la acción de un grupo sea una variedad.

Quiero disculparme con el lector, ya que en el desarrollo de la tesis usaré sin demostrar el teorema de clasificación topológica de superficies, el teorema de uniformización de superficies de Riemann y la teoría de espacios cubrientes. Estos resultados son más clásicos que los temas tratados en la tesis y están muy bien explicados en las referencias ([2], [8]), [17] y [21] respectivamente.

²En la sección 1.1 de la tesis se muestra la definición formal.

Espero que al ver el título y el desarrollo de la tesis el lector se pregunte:

¿Es útil otorgarle una estructura geométrica a una variedad?

La respuesta es que **Sí**. Pues una estructura geométrica en una variedad M , ayuda a entender a M . Por otro lado el hecho de que a M podamos otorgarle una estructura geométrica puede ayudar a resolver varios tipos de problemas matemáticos, no solo geométricos. Dos ejemplos de la aplicación de la teoría de estructuras geométricas para resolver problemas se enuncian a continuación. Aquí no demostraremos estos resultados ya que no es el objetivo y además son muy complicados (de hecho no entiendo las demostraciones de ellos).

1.- El último teorema de Fermat:

TEOREMA 0.1. *No existen soluciones enteras para la ecuación:*

$$a^n + b^n = c^n$$

con $n \in \mathbb{N}$ y tal que $n \geq 3$.

En 1984 Gerhard Frey entendió que dar respuesta afirmativa al problema de Fermat, es equivalente a que la superficie definida por los pares $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ que son solución de la ecuación $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$, no pueda admitir una estructura geométrica muy particular [3]. La conjetura de Shimura-Taniyama-Weil afirma que toda curva algebraica definida por $y^2 = x(x - q_2)(x + q_1)$ con $q_i \in \mathbb{Q}$, tiene que admitir este tipo de estructura geométrica. De forma que Gerhard Frey demostró que el último teorema de Fermat es un caso particular de la conjetura de Shimura-Taniyama-Weil.

A finales del siglo pasado Andrew Wiles en colaboración con Richard Taylor demostró la conjetura de Shimura-Taniyama-Weil para algunos casos especiales, con los cuales fue suficiente para dar respuesta afirmativa al último teorema de Fermat que tenía más de tres siglos como problema abierto.

En este ejemplo, con ayuda de una estructura geométrica se solucionó un problema muy interesante de teoría de números. Otro ejemplo es la solución de:

2.- La conjetura de Poincaré:

TEOREMA 0.2. *Si una 3-variedad compacta tiene grupo fundamental trivial, entonces esta tiene que ser homeomorfa a la esfera tridimensional.*

Este famoso problema de topología en dimensión 3 propuesto por Henri Poincaré en 1904, fue demostrado por Grigori Perelman a principios de siglo. La estrategia seguida por Perelman fue demostrar la conjetura de geometrización de 3-variedades de Thurston la cual implica la conjetura de Poincaré [12].

La conjetura de geometrización de Thurston que se dio a conocer a finales de los 70s, dice:

TEOREMA 0.3. *El interior de toda 3-variedad compacta tiene una descomposición canónica en piezas que tienen una de 8 estructuras geométricas.*

En este ejemplo demostrando que “todas las piezas canónicas” (lo que sea que esto quiere decir) admiten alguna de estas 8 estructuras geométricas descritas por Thurston [12], [20], se solucionó un muy famoso problema de topología.

Índice general

Agradecimientos.	1
Introducción.	1
Capítulo 1. Estructuras geométricas en superficies.	9
1. Definición de (G, X) -variedad.	9
2. Ejemplos de (G, X) -superficies.	15
Capítulo 2. Uniformización de estructuras geométricas.	29
1. Aplicación desarrolladora y holonomía.	29
2. Completez y uniformización.	35
Capítulo 3. Estructuras proyectivas complejas.	39
Apéndice A. ¿Cuándo un cociente es variedad?	47
Bibliografía.	51

CAPÍTULO 1

Estructuras geométricas en superficies.

En este capítulo se otorgará la definición de estructura geométrica en una variedad, este es el tema central de la tesis. También se encuentra una tabla donde se muestra la relación que existe entre algunas de las estructuras geométricas más comunes en superficies, al final del capítulo se muestran algunos ejemplos de (G, X) -superficies a los cuales nos referimos constantemente sólo mencionando el número de ejemplo. La primera sección de este capítulo es tratada en el texto de William Thurston [19], de manera que este se recomienda al lector como referencia.

1. Definición de (G, X) -variedad.

Recordemos que una variedad M de dimensión n , es un espacio topológico Hausdorff que localmente se parece a $\mathbb{R}^n$. Más precisamente, existe $\{U_i\}_{i \in I}$ cubierta abierta de M tal que para cada U_i hay un homeomorfismo $\phi_i: U_i \rightarrow (V_i \subset \mathbb{R}^n)$. Al conjunto de pares $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ le llamamos atlas sobre la variedad M . Para otorgarle una estructura geométrica a la variedad M , se pide que los cambios de coordenadas ϕ_{ij} (ver dibujo 2) pertenezcan a unseudogrupo G de homeomorfismos entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ (definición 1). Una G -estructura sobre M es un atlas donde los cambios de coordenadas pertenecen alseudogrupo G , decimos dos G -estructuras son equivalentes si su unión también es una G -estructura (esto define una relación de equivalencia entre G -estructuras, ver página 11). Llamamos G -variedad a una variedad M junto con una G -estructura (con su clase de equivalencia). Notar que esta definición sólo nos permite modelar G -variedades sobre $\mathbb{R}^n$, para poder modelar variedades sobre cualquier variedad¹, otorgaremos la definición de (G, X) -variedad. Pero antes necesitamos definir unseudogrupo sobre la variedad X .

DEFINICIÓN 1. *Un **seudogrupo** sobre la variedad X , es un subconjunto G de homeomorfismos entre abiertos de X que cumplen las siguientes propiedades:*

¹En la página 12 mencionamos por qué esto es útil.

- 1) Si $\phi \in G$ y $U \subset X$ es un abierto contenido en el dominio de ϕ , entonces la restricción también es un elemento de G ($\phi|_U \in G$).
- 2) Si $\phi, \psi \in G$ y existe composición (es decir, $\text{Im}(\psi) \cap \text{Dom}(\phi) \neq \emptyset$), entonces $\phi \circ \psi \in G$.
- 3) Si $\phi \in G$ entonces $\phi^{-1} \in G$.
- 4) Si $U = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ es un abierto de X , y ϕ es un homeomorfismo del abierto U sobre el abierto V tal que la restricción de ϕ a cada uno de los U_{α} pertenece a G , entonces ϕ pertenece a G .

Tal vez le parezca al lector que la condición 4 es muy artificial, pero esta es necesaria para poder considerar la acción de manera local, pues el abierto U no tiene por qué ser conexo. Ver página 11 y ejemplo 3 de la siguiente sección.

Algunos ejemplos de pseudogrupos son:

- $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ el pseudogrupo de todos los homeomorfismos entre abiertos de $\mathbb{R}^n$.
- $\text{Dif}(\mathbb{R}^n)$ el pseudogrupo de difeomorfismos entre abiertos de $\mathbb{R}^n$. Obviamente $\text{Dif}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ (todo difeomorfismo es homeomorfismo).
- $\text{Hol}(\mathbb{C})$ el pseudogrupo de biholomorfismos entre abiertos de $\mathbb{C}$.
- $\text{Iso}(\mathbb{R}^n)$ el pseudogrupo de isometrías locales en el espacio euclideo $\mathbb{R}^n$. Resulta que toda isometría local (en un conexo) es restricción de una isometría global, pero no todos los elementos de $\text{Iso}(\mathbb{R}^n)$ son restricciones de una isometría, ver ejemplo en la página 11.

Espero que estos ejemplos provoquen en el lector la siguiente pregunta.

OBSERVACIÓN 1.1. *¿Será que si tenemos un grupo G' que actúa sobre la variedad X por medio de homeomorfismos globales, entonces existe un pseudogrupo G mínimo que lo contiene?*

La respuesta es que sí, llamaremos a G el pseudogrupo generado por G' .

DEMOSTRACIÓN. Sea G' un grupo que actúa por homeomorfismos globales en la variedad X . Sea $\mathfrak{A}$ la familia de pseudogrupos A que contienen a G' . Obviamente $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ pues $G' \subset \mathcal{H}(X)$. Definimos $G = \bigcap_{\mathfrak{A}} A$ y demostraremos que G es el pseudogrupo mínimo mencionado. Es claro que si $g \in G$ entonces para todo $U \subset \text{Dom}(g)$ tenemos que $g|_U \in G$, ya

que $g \in A$ para todo pseudogrupo $A \in \mathfrak{A}$, por lo tanto también para todo $A \in \mathfrak{A}$ tenemos que $g|_U \in A$. De forma análoga (utilizando que todos los elementos de $\mathfrak{A}$ son pseudogrupos) se demuestran las propiedades restantes. $\square$

De acuerdo con esta observación mencionamos algunos ejemplos más de pseudogrupos:

- $Aut(\Delta)$ el pseudogrupo generado por el grupo de los biholomorfismos del disco unitario $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ (ver definición en el ejemplo 4).
- $Af(\mathbb{R}^2)$ el pseudogrupo generado por el grupo de transformaciones afines (definido en la introducción).

Sea M una variedad. A una cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in I}$ de M donde para cada $U_i \subset M$ existe un homeomorfismo $\phi_i: U_i \rightarrow V_i \subset X$, le llamamos atlas modelado en X ó X -atlas de M , ya que los V_i son abiertos de X y no de $\mathbb{R}^n$. Si G es un pseudogrupo de homeomorfismos entre abiertos de X , entonces decimos que un X -atlas donde los cambios de coordenadas:

$$\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}: \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

pertenecen al pseudogrupo G , forma una (G, X) -estructura sobre M . A una (G, X) -estructura también la llamaremos estructura geométrica determinada por el pseudogrupo G .

Decimos que dos (G, X) -estructuras son equivalentes si su unión es una (G, X) -estructura. Esta relación es de equivalencia entre el conjunto de (G, X) -estructuras sobre la variedad M .

En efecto, sean A, B y C (G, X) -estructuras diferentes sobre la variedad M . Entonces es muy claro que $A \cup A$ también lo es y que si $A \cup B$ es (G, X) -estructura también lo es $B \cup A$. Sólo falta demostrar la transitividad: es decir, si $A \cup B$ y $B \cup C$ son (G, X) -estructuras también lo es $A \cup C$. Consideremos $A \cup B \cup C$. Entonces para todo $(U, a) \in A$ y $(W, c) \in C$ tales que $U \cap W \neq \emptyset$ existe un (o tal vez varios, pero no importa) $(V, b) \in B$, tal que $a \circ b^{-1} \circ b \circ c^{-1} \in G$ por lo tanto $a \circ c^{-1} \in G$.

Ahora sí estamos listos para la definición de (G, X) -variedad.

DEFINICIÓN 2. *Le llamaremos (G, X) -**variedad** a una variedad M junto con una clase de equivalencia de (G, X) -estructuras.*

★ **Ejemplo:** Este ejemplo no es interesante pero puede ser ilustrativo: *El círculo* S^1 admite $(Iso(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ -estructura, esta será otorgada de la siguiente forma:

Sea $S = [0, 2\pi]/\sim$ donde $0 \sim 2\pi$, y sea $p: [0, 2\pi] \rightarrow S$ la proyección de paso al cociente, notar que a excepción del 0 y 2π toda clase de equivalencia en S tiene un solo representante. Sea $U_0 = p(0, 2\pi)$ y $U_1 = p[0, \pi) \cup p(\pi, 2\pi]$ cubierta de S formada con abiertos conexos, ver dibujo 3. Sobre esta cubierta de S definimos las funciones $\phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}$ que otorgarán a S una $Iso(\mathbb{R})$ -estructura, las ϕ_i son tales que:

$$\phi_0(p(x)) = x \quad \text{y} \quad \phi_1(p(x)) = \begin{cases} x + 4\pi & x \in [0, \pi) \\ x + 2\pi & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Para verificar que (U_0, ϕ_0) y (U_1, ϕ_1) en realidad determinan una $Iso(\mathbb{R})$ -estructura en S , debemos observar que los ϕ_i son homeomorfismos y después necesitamos verificar que los cambios de coordenadas pertenecen alseudogruppo $Iso(\mathbb{R})$. Esto es muy claro pues el cambio de coordenadas (sólo consideramos ϕ_{10} , ya que ϕ_{01} es su inverso):

$$\phi_{10}(x) = \begin{cases} x + 4\pi & x \in (0, \pi) \\ x + 2\pi & x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

es una isometría de $\mathbb{R}$ en cada componente conexa de $U_0 \cap U_1$. Notar que ϕ_{10} no es la restricción de una isometría global de $\mathbb{R}$, aunque en cada componente conexa sí lo es. Esto muestra la necesidad de la condición 4 en la definición deseudogruppo, ya que cambios de coordenadas como ϕ_{10} sí serán permitidos en las (G, X) -estructuras.

Si analizamos la definición de (G, X) -variedad, nos damos cuenta que si una variedad M está modelada en X automáticamente está modelada en $\mathbb{R}^n$, pues tomando la composición de una carta de M con una de X , obtenemos una carta de M modelada sobre $\mathbb{R}^n$. La ventaja de tener una (G, X) -estructura en M , es que con ella podemos ver ciertas cosas que en el espacio euclideo no. Por ejemplo si tenemos una variedad modelada sobre la esfera de Riemann ($\Sigma = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) entonces podremos tratar al infinito como cualquier otro punto, no hay que hacer aparte los casos especiales donde el denominador de una transformación de Möbius se anula². También se puede hablar de círculos en general y no tratar aparte los casos de círculos y de líneas rectas en $\mathbb{C}$ (recuerdese que una recta en $\mathbb{C}$ es un círculo máximo en Σ).

²Como haremos más adelante.

Una pregunta que nace de forma natural es ¿por qué es útil otorgarle una (G, X) -estructura a una variedad M ? Como se mencionó en la introducción, una (G, X) -estructura da información de la variedad. Ya que si M admite una estructura geométrica, esta impone restricciones topológicas sobre M . En el resto del capítulo trataremos de aclarar esta observación. Aprovecho para mencionar al lector que aunque la teoría general de la tesis es válida en (G, X) -variedades de cualquier dimensión, aquí nos centraremos principalmente en (G, X) -variedades de dimensión 2 (es decir, la variedad modelo X es bidimensional), ya que en dimensión 2 es más fácil visualizar las cosas.

Existen algunos grupos importantes G , para los cuales las (G, X) -variedades reciben nombres especiales. Estos grupos especiales actúan en la variedad X de tal manera que se tienen algunos conceptos geométricos bien definidos en la (G, X) -variedad M . A continuación se da una lista de algunas estructuras geométricas importantes. En ella se da la descripción del seudogruppo G , el nombre que reciben estas superficies, algunos conceptos geométricos bien definidos en ellas y la manera en que la estructura geométrica impone restricciones topológicas sobre la superficie.

$(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$.- Se les llama superficies topológicas o simplemente superficies. Entre los conceptos bien definidos en estas superficies se encuentran las funciones que no rompen la superficie (continuas), conjunto conexo, puntos muy cercanos (cerradura), deformaciones (homotopía).

$(Dif(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$.- Se les conoce como superficies diferenciables. Esta estructura no impone más restricciones topológicas a una superficie, en ellas podemos hablar de aproximaciones lineales de funciones, de planos tangentes, de velocidad de una curva, etc.

$(Orien(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$.- Donde $Orien(\mathbb{R}^2)$ es el seudogruppo de difeomorfismos que preservan la orientación. A estas superficies se les nombra superficies orientables. En ellas los cambios de coordenadas satisfacen $|D\phi_{ij}(z_0)| > 0$ (determinante de la matriz diferencial de ϕ_{ij} evaluado en el punto z_0) para todo $z_0 \in \phi_j(U_i \cap U_j)$, esto nos permite definir bien los lados izquierdo y derecho cuando uno camina sobre M . La banda de Möbius no puede tener esta estructura, ver ejemplo 2.

** De aquí en adelante hasta el final de la tesis, todas las superficies que consideremos serán orientables. Algunas veces la orientabilidad viene de manera intrínseca con la acción del seudogruppo. Otras veces tomaremos el seudogruppo de manera que preserve la orientación.*

$(Hol(\Sigma), \Sigma)$.- Se les conoce como superficies de Riemann ó superficies conformes. Entre los conceptos bien definidos en ellas están los ángulos, las funciones que preservan ángulos (funciones holomorfas). Sólo superficies segundo numerables pueden tener esta estructura (ver ejemplo 5), de forma que toda superficie compacta es de Riemann, ver ejemplo 6.

$(Af(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$.- Se les conoce como superficies afines reales. Entre los conceptos bien definidos en ellas se encuentran la línea recta, líneas paralelas y la razón en que un punto p divide a un segmento. Un teorema de John Milnor [13], afirma que el toro es la única superficie compacta con esta estructura. De ahora en adelante denotaremos al toro por $\mathbb{T}^2$.

$(\mathcal{M}(\Sigma), \Sigma)$.- Estas superficies reciben el nombre de proyectivas complejas, $\mathcal{M}(\Sigma)$ es el seudogruppo generado por el grupo de transformaciones de Möbius $PSL(2, \mathbb{C})$. En ellas estan bien definidos los conceptos de ángulo, círculo, la razón cruzada de 4 puntos, etc. Como se mostrará en el ejemplo 6 de la siguiente sección todas las superficies compactas admiten esta estructura.

$(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$.- Estas superficies reciben el nombre de afines complejas. $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ es el seudogruppo generado por el grupo de transformaciones afines complejas $\{f(z) = az + b \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$. En ellas estan bien definidos los conceptos de ángulo, círculo, línea recta, etc. En el ejemplo 3 de la siguiente sección se mostrará que $\mathbb{T}^2$ es la única superficie compacta con esta estructura.

$(Fol(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$.- Se les acostumbra llamar superficies con foliación. $Fol(\mathbb{R}^2)$ es el seudogruppo de los difeomorfismos entre abiertos de $\mathbb{R}^2$ que preservan factores horizontales (es decir, difeomorfismos de la forma $(x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(y))$). En estas superficies con foliación tiene sentido hablar de “la dirección horizontal”. La esfera S^2 no puede tener esta estructura [11].

$(Aut(\Delta), \Delta)$.- A este tipo de superficies se les conoce como hiperbólicas. En ellas están definidos los ángulos, los círculos, la “distancia hiperbólica” pues la acción de $Aut(\Delta)$ define una métrica en Δ , ver ejemplo 4. Todas las superficies compactas de género mayor o igual a dos admiten este tipo de estructura, ver ejemplo 4.

$(Iso(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$.- Se les conoce como superficies euclidianas o superficies planas. En ellas podemos hablar de longitudes de segmentos y curvas, ángulos, círculos y además existe una métrica euclidea que se hereda de $\mathbb{R}^2$. $\mathbb{T}^2$ es la única superficie compacta (orientable) que admite estructura plana, ver ejemplo 3.

Algunas superficies admiten muchas de las estructuras antes mencionadas; esto es gracias a que si tenemos dos pseudogrupos G y G' tales que $G' < G$ (decimos que G' es sub-pseudogrupo de G), entonces toda (G', X) -variedad es en particular una (G, X) -variedad. Por ejemplo; el pseudogrupo $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ contiene propiamente a cualquier otro pseudogrupo de homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$, de manera que toda $(G, \mathbb{R}^2)$ -superficie es en particular una superficie topológica. A continuación se muestra una lámina donde se ven las relaciones que existen entre las superficies con las estructuras antes mencionadas. Las flechas nos indican cuales estructuras contienen propiamente a otras.

Entre los objetos matemáticos existen funciones compatibles con la estructura que nos dicen cuando dos objetos son iguales de acuerdo a la estructura utilizada, por ejemplo;

- Las funciones continuas preservan la estructura topológica, decimos que dos espacios topológicos son “iguales” (homeomorfos) si existe una función biyectiva y bicontinua (continuas ella y su inversa) entre ellos. A estas funciones se llaman homeomorfismos.

- Los homomorfismos preservan la estructura de grupo y decimos que dos grupos son “iguales” (isomorfos), si existe un homomorfismo biyectivo (isomorfismo) entre ellos.

Entre (G, X) -variedades también existen funciones compatibles con la (G, X) -estructura que nos ayudan a compararlas. Estas funciones se nombran (G, X) -morfismos.

DEFINICIÓN 3. Si M y N son dos (G, X) -variedades y $f: M \rightarrow N$ una función, decimos que f es un (G, X) -morfismo si para cada par de cartas $\phi_i: U_i \rightarrow X$ y $\psi_j: V_j \rightarrow X$

de M y N respectivamente, tales que $U_i \cap f^{-1}(V_j) \neq \emptyset$, existe $g_{i,j} \in G$, tal que:

$$f|_{U_i \cap f^{-1}(V_j)} = \psi_j^{-1} \circ g_{i,j} \circ \phi_i.$$

A un (G, X) -morfismo biyectivo f le llamamos (G, X) -isomorfismo, es claro que si f es un (G, X) -isomorfismo entonces también lo es f^{-1} . Decimos que dos (G, X) -variedades son (G, X) -isomorfas si existe un (G, X) -isomorfismo entre ellas.

2. Ejemplos de (G, X) -superficies.

En esta sección se muestran algunos ejemplos de (G, X) -superficies que ilustran las definiciones antes mencionadas. Estos ejemplos serán importantes durante el transcurso de la tesis pues nos ayudaremos de ellos para ilustrar definiciones posteriores, es por ello que más adelante nos referimos a estos sólo mencionando el número de ejemplo (sin mencionar capítulo ni sección). Estos ejemplos también muestran como es que una (G, X) -estructura impone restricciones topológicas a una superficie.

(1) Todo cubriente de una (G, X) -variedad es una (G, X) -variedad.

Sea M una variedad con una (G, X) -estructura. Sea $\bar{M}$ un espacio cubriente de M con proyección cubriente π . Definimos una (G, X) -estructura en $\bar{M}$ de la siguiente manera:

Sea $x \in \bar{M}$. Sea W' vecindad de x tal que $\pi|_{W'}$ es homeomorfismo (existe W' pues π es proyección cubriente). Sea (U, ϕ) carta local de M tal que $\pi(x) \in U$. Consideremos $W = W' \cap \pi^{-1}(U)$, entonces la función $\phi \circ \pi: W \rightarrow X$ claramente es un homeomorfismo. Por lo tanto definimos a $(W, \phi \circ \pi)$ como una carta que contiene al punto x , construimos análogamente cartas para todo punto $x \in \bar{M}$. Para demostrar que estas cartas determinan una (G, X) -estructura sobre $\bar{M}$, tenemos que verificar que los cambios de coordenadas están dados por elementos del pseudogrupo G . Sean $(W_1, \phi_1 \circ \pi)$ y $(W_2, \phi_2 \circ \pi)$ dos cartas sobre $\bar{M}$ tales que $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, el cambio de coordenadas se ve de la forma:

$$\phi_1 \circ \pi \circ (\phi_2 \circ \pi)^{-1} = \phi_1 \circ \pi \circ \pi^{-1} \circ \phi_2^{-1} = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$$

por lo tanto esta forma de dar las cartas sí hace de $\bar{M}$ una (G, X) -variedad.

Como se definió la (G, X) -estructura en $\bar{M}$ es claro que (G, X) -estructuras equivalentes en M definen (G, X) -estructuras equivalentes en $\bar{M}$. Además si consideramos a $\bar{M}$ con

la (G, X) -estructura levantada de M con la ayuda de π , también es claro que π es un (G, X) -homeomorfismo entre $\bar{M}$ y M .

* *El resto de la tesis, denotaremos con $\bar{M}$ al cubriente universal de una variedad M , la proyección cubriente será π .*

(2) La banda de Möbius no es orientable.

Recordemos que la banda de Möbius $\mathcal{B}$ se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{B} = \frac{I \times I^\circ}{\sim} \text{ con } (0, y) \sim (1, 1 - y)$$

donde $I = [0, 1]$ y $I^\circ = (0, 1)$ ³, ver dibujo 4. Sea $\gamma(t): [0, 1] \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $t \mapsto (t, 1/2)$ la curva que describe el círculo central de $\mathcal{B}$, ver el siguiente dibujo:

Supongamos que $\mathcal{B}$ es orientable. Entonces $\gamma(t)$ está cubierta con cartas de la $(\text{Orien}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$ -estructura en $\mathcal{B}$ donde los cambios de coordenadas preservan la orientación (i.e. todo ϕ_{ij} satisface que $|D\phi_{ij}| > 0$). Como esta estructura nos permite hablar del plano tangente, acordamos que el lado izquierdo de $\gamma(t)$ lo determina el vector v , que es ortogonal a $(t, \gamma'(t))$ (vector tangente a γ) y tal que $|\gamma'(t), v| > 0$. Como suponemos que $\mathcal{B}$ es orientable, la curva $\gamma(t)$ debería tener bien definido su lado izquierdo, es decir el vector v siempre debe apuntar al mismo lado. Pero al dar una vuelta sobre $\mathcal{B}$ a lo largo de γ es claro que v cambia de lado, ver dibujo 4. Por lo tanto $\mathcal{B}$ no puede ser orientable.

(3) La única superficie con estructura afín compleja.

En este ejemplo demostraremos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 2.1. *Sea M una superficie compacta. Entonces M tiene una $(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -estructura si y sólo si M es un toro.*

³Se utilizará esta notación el resto de la tesis, además utilizaremos $\alpha I = [0, \alpha]$ y $\alpha I^\circ = (0, \alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observar que esta proposición tiene como corolario que $\mathbb{T}^2$ es la única superficie compacta con estructura euclídeana. Pues como muestra la lámina, toda estructura euclídeana (orientable) es en particular afín compleja $((\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -estructura).

Antes de comenzar la demostración recordemos que en una $(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -estructura, los cambios de coordenadas se ven así;

$$\phi(z) = \gamma z + b = |\gamma|e^{i \arg(\gamma)} z + b \text{ con } \gamma, b \in \mathbb{C} \text{ y } \gamma \neq 0.$$

DEMOSTRACIÓN. ($\Rightarrow$) La demostración que aquí se va realizar se puede ver en [4].

Observar que una transformación afín compleja es composición de reescalamiento, con rotación y traslación. Cada una de estas transformaciones por separado manda círculos en círculos, rectas en rectas y preserva ángulos, por lo tanto la composición también preserva estos conceptos. Además, toda $(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -superficie es orientable, pues si tenemos $f(z) = \gamma z + b \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ entonces $|Df(z_0)| = |\gamma|^2 > 0$ para todo $z_0 \in \mathbb{C}$.

Sea M una $(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -superficie compacta. Para cada $x \in M$ tomamos una bola abierta (recuerdese que en M podemos hablar de círculos) $B(x)$, claramente estas bolas definen una cubierta abierta de M , de la cual por la compacidad de M podemos extraer subcubierta finita $\{B(p_j)\}$ donde p_j es el centro de cada bola.

Unimos con segmentos de recta (recuerdese que en M están bien definidos estos segmentos) los puntos p_j sin importar que estos segmentos se intersecten entre si. Si consideramos los p_j y las intersecciones de los segmentos antes mencionados, como vértices de la triangulación T que tiene a los segmentos como aristas, tal vez tenemos que agregar algunas aristas que unan los puntos de intersección de los segmentos, esto no es problema pues existe un número finito de p'_j s y por lo tanto un número finito de intersecciones. En esta triangulación T calculamos la característica de Euler $\mathcal{X}_M = v - a + t$, donde v es el número de vértices, a el número de aristas y t el número de triángulos⁴. Para calcular $\mathcal{X}_M$ en nuestra $(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -superficie realizamos lo siguiente:

Tenemos que cada triángulo tiene tres aristas, pero cada arista pertenece a dos triángulos, de manera que $a = 3t/2$. Recordemos que la estructura afín en la superficie nos permite medir los ángulos en cada triángulo de la triangulación, por lo tanto la suma de los ángulos

⁴Sabemos que para cualquier superficie Y , el número $\mathcal{X}_Y$ es un invariante topológico que no depende de la triangulación definida sobre Y [2].

para cada triángulo es igual a π , luego la suma de todos los ángulos es πt . Por otro lado, la suma de todos los ángulos adyacentes a un vértice fijo v es 2π . Por lo tanto $\pi t = 2\pi v$, se sigue que $v = t/2$. De manera que la característica de Euler para toda $(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -superficie M es igual a: $\mathcal{X}_M = v - a + t = t/2 - 3t/2 + t = 0$.

La igualdad $\mathcal{X}_M = 2 - 2g_M$ que relaciona la característica de Euler con el género de una superficie compacta M (orientable) [2], obtenemos que $g = 1$ para toda $(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -superficie. El teorema de clasificación topológica de las superficies compactas y orientadas, afirma que toda superficie está completamente determinada por su género [8], de modo que M es el toro $\mathbb{T}^2$, como queríamos demostrar.

($\Leftarrow$) En este caso sólo basta dotar a $\mathbb{T}^2$ con una $(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -estructura.

Consideremos al toro como el siguiente cociente:

$$\mathbb{T}^2 = \frac{2I \times 2\pi I}{\sim} \text{ donde } (0, t) \sim (2, t) \text{ y } (s, 0) \sim (s, 2\pi)$$

con aI y aI° denotamos $[0, a]$ y $(0, a)$ respectivamente. Sea $p: (2I \times 2\pi I) \rightarrow \mathbb{T}^2$ la proyección de paso al cociente. Los abiertos $U_1 = p(2I^\circ \times 2\pi I)$ y $U_2 = p([0, 1) \times 2\pi I) \cup p((1, 2] \times 2\pi I)$ junto con los homeomorfismos:

$$f_1(p(s, t)) = e^s e^{it} \text{ y } f_2(p(s, t)) = \begin{cases} e^s e^{it} & \text{sí } s \in [0, 1) \\ e^{s-2} e^{it} & \text{sí } s \in (1, 2] \end{cases}$$

definen las cartas de la $(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -estructura en $\mathbb{T}^2$. Notar que las $f_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}$ son realidad homeomorfismos y tienen respectivamente como imagen los anillos complejos $A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < e^2\}$ y $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1/e < |z| < e\}$. El cambio de coordenadas:

$$f_{21}(re^{i\theta}) = \begin{cases} re^{i\theta} & \text{si } re^{i\theta} I^\circ \times 2\pi I \\ e^{-2} re^{i\theta} & \text{si } re^{i\theta} \in (1, 2) \times 2\pi I \end{cases}$$

es claramente un elemento de $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. □

Este ejemplo muestra que la $(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -estructura es muy fuerte, es decir, exige muchas restricciones topológicas sobre una superficie. Es por esto que sólo existe una superficie compacta con estructura afín, en este caso la orientabilidad viene de manera intrínseca con la acción del grupo (como se mostró antes).

(4) La superficie de género dos tiene una estructura hiperbólica.

Para otorgarle una $(Aut(\Delta), \Delta)$ -estructura a la superficie de género 2, nuestra variedad modelo será en disco unitario $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \Sigma$ que claramente tiene como frontera al círculo unitario $S^1 = \partial\Delta$.

Consideremos las circunferencias $\mathcal{C}_k$ con centros en los puntos $p_k = de^{2k\pi i/8}$ y tales que:

$$d = \frac{\cot(\pi/8)}{\sqrt{\cot^2(\pi/8) - 1}}, \text{ y toda } \mathcal{C}_k \text{ tiene radio } r = \frac{1}{\sqrt{\cot^2(\pi/8) - 1}}.$$

Observar que k varia de 1 a 8 pues $p_9 = p_1$, además para toda k tenemos que $|p_k| = d$. De aquí en adelante cuando $k = 8$ con $k + 1$ me refiero a 1. Realizando algunas cuentas obtenemos que $2r > |p_k - p_{k+1}|$ y $|d - r| < 1$, de manera que los círculos $\mathcal{C}_k$ y $\mathcal{C}_{k+1}$ se intersectan y cada uno de ellos intersecta a S^1 , ver dibujo 5.

Llamemos q_k al punto $\mathcal{C}_k \cap \mathcal{C}_{k+1} \cap \Delta$, s_k, s'_k a los puntos derecho e izquierdo de $\mathcal{C}_k \cap S^1$ respectivamente y O será el origen. Ver dibujo 5.

Observar que los triángulos $Op_k s_k$ satisfacen el teorema de Pitágoras, luego para toda k el círculo $\mathcal{C}_k$ es ortogonal a S^1 pues sus radios son ortogonales en el punto s_k . Los arcos $\mu_k \subset \mathcal{C}_k$ que unen a los puntos q_k determinan una especie de “octágono” $\mathcal{O}$, por construcción los lados de $\mathcal{O}$ son iguales ($\mu_k = \mu_{k+1}$). Utilizando la simetría del dibujo y la ley de senos en los triángulos $Oq_k p_k$ obtenemos que los ángulos internos del octágono miden $2\pi/8$, de forma que la suma total de los ángulos interiores a $\mathcal{O}$ es 2π . Entonces en cierto sentido podemos decir que $\mathcal{O}$ es un “octágono regular”, pues tiene lados y ángulos iguales.

* *Antes de continuar con la construcción, debemos recordar que toda transformación de Möbius T preserva ángulos, orientación, manda círculos en círculos y además preserva la razón cruzada de 4 puntos. También sabemos que toda transformación de Möbius está totalmente determinada por la imagen de tres puntos [7].*

Entonces consideremos la única transformación de Möbius que envía los puntos s_1, q_1 y q_8 en s'_3, q_2 y q_3 respectivamente, llamemos a esta transformación T_1 . Por las propiedades antes mencionadas de las transformaciones de Möbius, claramente tenemos que $T_1(\mathcal{C}_1) =$

$\mathcal{C}_3$, de hecho tenemos que $T_1(\mu_1) = \mu_3$; aún más, tenemos que $T_1(s'_1) = s_3$ pues T debe preservar la razón cruzada $R(s_1, q_1, q_8, s'_1)$ y s_3 es el único punto en $\mathcal{C}_3$ que la preserva (con signo). Como S^1 es ortogonal a $\mathcal{C}_1$, tenemos que el círculo $T_1(S^1)$ debe ser ortogonal a $\mathcal{C}_3$ y pasar por los puntos s_3 y s'_3 , por lo que $S^1 = T_1(S^1)$. Construimos análogamente las transformaciones T_2, T_5 y T_6 que satisfacen $T_2(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_4$, $T_5(\mathcal{C}_5) = \mathcal{C}_7$ y $T_6(\mathcal{C}_6) = \mathcal{C}_8$.

Entonces las transformaciones T_i con $i \in \{1, 2, 5, 6\}$ son de Möbius y dejan invariante a S^1 , además cada una identifica dos de los arcos μ_k cambiando la orientación en ellos, por ejemplo T_1 envía el arco q_1q_8 en el arco q_2q_3 . Observar que toda la frontera de $\mathcal{O}$ se identifica con las transformaciones T_i , por lo tanto si consideramos $\mathcal{O}$ y realizamos los pegados determinados por las T_i , el objeto resultante no tendrá frontera. Además este objeto es homeomorfo a la superficie de género 2, como muestra el siguiente dibujo.

El lector debe observar ahora no empezamos con la variedad y la entendimos proporcionando cartas, aquí procedimos un poco al revés. Primero construimos la región que necesitábamos para formar la superficie de género 2 para después ver que esta se pega bien. En este ejemplo no daremos explícitamente las cartas, sólo mencionaremos porque no existe ninguna obstrucción para otorgarlas. Puntos en el interior de $\mathcal{O}$ es claro que tienen una vecindad que es homeomorfa a Δ , por lo tanto sólo basta ver que puntos en la frontera de $\mathcal{O}$ también poseen una vecindad de este tipo, para hacer esto existen dos casos.

Caso 1: $p \in \mu_k$ pero no es vértice de $\mathcal{O}$. En este caso debemos recordar que el arco μ_k se identifica mediante alguna T_{i_0} con otro (ver dibujo 6), de manera que p tiene un punto equivalente p' en otra arista. Por lo tanto una bola $B_\epsilon(p)$ que no alcance un vértice, tiene dos comonentes (una en p y otra en p') que se identifican con T_{i_0} de manera que esta vecindad es homeomorfa a Δ .

Caso 2: El punto p es uno de los vértices. Como se muestra en el dibujo 6, todos los vértices q_k se identifican en p . De forma que toda bola $B_\epsilon(p)$ tiene “ocho componentes”, una para cada vértice q_k de $\mathcal{O}$. Como se demuestra antes cada componente tiene un ángulo de $2\pi/8$, de forma que $B_\epsilon(p)$ sí es una vecindad homeomorfa a Δ , ver dibujo 6. Esto muestra la importancia de que los ángulos internos de $\mathcal{O}$ sumen 2π .

En este ejemplo encontramos una región contenida en el disco unitario Δ , de la cual identificamos su frontera con transformaciones de Möbius que fijan el círculo unitario. Si

otorgamos las vecindades mencionadas antes, la superficie obtenida al realizar las identificaciones adquirirá una estructura con cambios de coordenadas dados por las transformaciones utilizadas en el pegado, ya que el interior podemos modelarlo con la identidad pero vecindades en las aristas (o en el vértice) necesitan de las transformaciones T_i para identificarse. En variable compleja se demuestra que el grupo de biholomorfismos que fijan a Δ es de la forma

$$\mathcal{M}(\Delta) = \{f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \mid a, z \in \Delta\}.$$

Las transformaciones T_i que utilizamos en la construcción realizada son de Möbius y fijan a Δ (pues fijan su frontera y mandan puntos interiores en puntos interiores), de forma que en particular estas deben de pertenecer a $\mathcal{M}(\Delta) \simeq PSL(2, \mathbb{R})$, ver [7]. Esto muestra que la superficie de género dos admite una estructura hiperbólica.

La construcción realizada aquí, puede generalizarse para otorgar una $(Aut(D), D)$ -estructura a cualquier superficie con género mayor que 2. Para hacer esto en el caso $g = n$, sólo tenemos que encontrar en Δ un $4n$ -ágono regular, formado por arcos de círculo que pertenecen a círculos ortogonales a S^1 . Como se mostró en el caso de género 2, es importante el hecho de que los ángulos internos tengan un valor de $2\pi/4n$ para que la suma total sea 2π , entonces el punto donde se identifiquen los vértices tendrá vecindades homeomorfas a Δ . Demostraremos que siempre podremos encontrar este $4n$ -ágono, para ello debemos notar que $4n$ -ágonos muy cercanos al origen tienen ángulos internos muy cercanos a los del $4n$ -ágono regular euclidean, pues los círculos ortogonales a S^1 que pasan cerca del origen son casi diámetros. El $4n$ -ágono con los vértices en S^1 tiene ángulos internos de valor 0, ya que los círculos son ortogonales a S^1 . Entonces variando el $4n$ -ágono centrado en el origen hacia el $4n$ -ágono con vértices en S^1 , por continuidad debe existir uno con los ángulos que buscamos.

Esto muestra que cualquier superficie con género mayor o igual a 2, admite una $(Aut(\Delta), \Delta)$ -estructura. Estas superficies se les nombra hiperbólicas debido a que en el disco unitario $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ el grupo $\mathcal{M}(\Delta)$ actúa de forma que deja invariante la razón cruzada de cuatro puntos $R(z_1, z_2, z_3, z_4)$. Además, dados dos puntos $z_1, z_2 \in \Delta$ es claro que existe un único círculo C ortogonal a S^1 que pasa por ellos (suponemos $z_1 \neq z_2$), de manera que en Δ podemos definir la siguiente distancia:

$$d(z_1, z_2) = \log R(z_1, z_2, z_3, z_4) \text{ donde } z_1, z_2 \in \Delta \text{ y } z_3, z_4 = C \cap S^1$$

Como los cuatro puntos z_i pertenecen a L tenemos que $R(z_1, z_2, z_3, z_4)$ es real, tomando los z_i en orden cíclico hacemos que la razón cruzada sea positiva [1]. El disco Δ con la distancia d es un modelo de la geometría hiperbólica de dimensión dos, llamado disco de Poincaré. Por la forma de definir d , claramente el grupo $\mathcal{M}(\Delta)$ actúa por isometrías que preservan la orientación (por ser transformaciones de Möbius) en Δ con la métrica mencionada.

Este ejemplo muestra como la mayoría de las superficies compactas y orientables admiten geometría hiperbólica (lo mismo sucede en las no orientables), también en dimensión 3 la geometría hiperbólica es la que predomina [20]. Este procedimiento no se puede hacer para el toro, pues no existe un cuadrilátero hiperbólico con suma ángulos internos igual a 2π y como vimos antes, en la construcción es crucial el hecho de que los ángulos internos sumen 2π . La pregunta es: ¿Admitirán S^2 y $\mathbb{T}^2$ una estructura hiperbólica? La respuesta es que no, como se mostrará en el capítulo 3. Este ejemplo otra vez muestra como una estructura geométrica impone restricciones topológicas a una superficie, en este caso la única restricción es el género.

(5) Una superficie diferenciable que no es segundo numerable.

Muchos autores piden 2^{do} -numerable en la definición de variedad. Aquí no agregamos esta hipótesis, ya que la tomaremos como una restricción topológica que impone la $(Hol(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -estructura (superficie de Riemann). Esto lo afirma el siguiente teorema:

Teorema de Radó: *Toda superficie de Riemann conexa es segundo numerable.*

Aquí no demostraremos este resultado, lectores interesados en la demostración consultar [10]. Aquí sólo mostramos que existen $(Dif(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$ -estructuras en superficies conexas que no son segundo numerables. El siguiente ejemplo se conoce como la superficie de Prüfer [10].

Consideremos en $\mathbb{C}$ una nueva topología τ , tal que en los semiplanos superior $H^+ = \{z \mid Im(z) > 0\}$ e inferior $H^- = \{z \mid Im(z) < 0\}$ los abiertos son de la manera usual (con bolas), pero un punto $p \in \mathbb{R}$ tiene abiertos de la forma:

$$U_p = B_p(r) \cup B'_p(r) \text{ donde } \begin{cases} B_p(r) = \{z \in H^- \mid |z - p| < r\} \cup (p - r, p + r) \\ B'_p(r) = \{z \in H^+ \mid |z| < r, p - r < \cot \arg(z) < p + r\} \end{cases}$$

Notar que $B_p(r)$ es la mitad de un disco (incluyendo el diámetro $(p-r, p+r)$) de radio r centrado en p . En la parte $B'_p(r)$ se toma la función $\cot \arg(z)$ para identificar el intervalo $(0, \pi)$ (ya que $\arg(z) \in (0, \pi)$ para $z \in H^+$) con $\mathbb{R}$, de forma que la condición $p-r < \cot \arg(z) < p+r$ determina una parte “cónica” en H^+ , de la cual $|z| < r$ determina el radio de este “cono”. Por ejemplo una vecindad del punto $1 \in \mathbb{C}$ de radio $r = 1/2$ es de la forma (ver dibujo 7)

$$U_p = B_1(1/2) \cup B'_1(1/2) \text{ donde } \begin{cases} B_1(1/2) = \{z \in H^- \mid |z-1| < 1/2\} \cup (1/2, 3/2) \\ B'_1(1/2) = \{z \in H^+ \mid |z| < 1/2, 1/2 < \cot \arg(z) < 3/2\} \end{cases}$$

Observar que los conos determinados por las vecindades abiertas de puntos en $\mathbb{R}$ con esta nueva topología, están basados en el origen. Esto no es indispensable, de hecho podría haberlos basado en cualquier punto $p \in \mathbb{R}$ sólo tomando $|z-p| < r$ y $\cot \arg(z-p)$ en lugar de $|z| < r$ y $\cot \arg(z)$. Llamaremos $\mathbb{C}'_p$ al espacio topológico $(\mathbb{C}, \tau)$ con los conos basados en el punto $p \in \mathbb{R}$.

El espacio $\mathbb{C}'_p$ es conexo por trayectorias⁵, pues dados dos puntos $x \in H^+_p$ y $y \in H^-_p$, los puedo unir con la trayectoria que une a x y p en la mitad del tiempo y a p con y en la otra mitad (puntos en algún otro lugar claramente se pueden unir con trayectorias). $\mathbb{C}'_p$ también es un espacio Hausdorff, pues dados $x, y \in \mathbb{R}$ los puedo separar con los abiertos:

$$U_x = B_x(|x-y|/2) \cup B'_x(|x-y|/2) \text{ y } V_y = B_y(|x-y|/2) \cup B'_y(|x-y|/2)$$

que de acuerdo con los límites son disjuntos (puntos que no están en $\mathbb{R}$ es claro que se pueden separar con abiertos).

Además si consideramos como cartas, las inclusiones $H^+_p \hookrightarrow \mathbb{C}$ y $H^-_p \hookrightarrow \mathbb{C}$ y las funciones $f_x: B_x(1) \cup B'_x(1) \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$f_x(z) = \begin{cases} (Re z, Im z), & z \in B_x(1) \\ (\cot \arg(z-p), |z-p|), & z \in B'_x(1) \end{cases}$$

introducen el abierto $U_x = B_x(1) \cup B'_x(1)$ en $\mathbb{C}$ diferenciablemente (de manera real), pero ya que el cono $B'_x(1)$ tiene como imagen un rectángulo $f_x(B'_x(1))$ (ver dibujo 8), la función f_x no puede ser holomorfa pues localmente no preserva ángulos. Los cambios de coordenadas son diferenciables debido a que estos son composiciones de algunas de

⁵Recuérdese que en variedades son equivalentes conexo y conexo por trayectorias.

las funciones: inclusión, $\cot \arg(z - p)$ ó $|z - p|$, que son difeomorfismos en el dominio mencionado. Por lo tanto, el espacio $\mathbb{C}'_p$ es una $(\text{Dif}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$ -superficie⁶.

Sea $\mathbf{X}' = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{C}'_x$ la unión de $\mathbb{R}$ copias de $\mathbb{C}'$, donde cada copia tiene los conos basados en un real. Claramente $\mathbf{X}'$ es disconexo, pues cada espacio $\mathbb{C}'_x$ es una copia de $\mathbb{C}'$ por separado. Si consideramos el cociente

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}' / \sim \text{ donde } H_x^+ \sim H_y^+ \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Donde $\sim$ identifica todos los semiplanos superiores en uno solo al que llamaremos H^+ . El espacio $\mathbf{X}$ sí es conexo, pues para unir dos puntos $z_1 \in H_x^-$ y $z_2 \in H_y^-$ basta unir a z_1 con x en un tercio del tiempo, después a x con y a través de H^+ en el segundo tercio y en el último tercio del tiempo, unimos a y con z_2 (con este caso ya es claro cualesquiera otros dos puntos se pueden unir). El espacio $\mathbf{X}$ sigue siendo Hausdorff pues dos puntos x, y los puedo separar como antes, además si consideramos las cartas antes definidas sobre $\mathbf{X}$ este sigue siendo una superficie diferenciable.

La ganancia de pegar los semiplanos superiores es que ahora el espacio $\mathbf{X}$ no es segundo numerable. Pues la familia:

$$\mathcal{F} = \{B_r(p)_x\} \text{ tal que } B_r(p)_x \subset H_x^-, \text{ con } x \in \mathbb{R}$$

está formada por una cantidad no numerable de abiertos disjuntos (ver dibujo 9), de manera que $\mathbf{X}$ no puede tener base numerable. La $(\text{Dif}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$ -superficie $\mathbf{X}$ es conocida como la superficie de Prüfer, la cual se trata de ilustrar en el dibujo 9.

(6) Una estructura proyectiva compleja en la superficie de género dos.

Ahora nuestra variedad modelo será la esfera de Riemann $\Sigma = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y G será el grupo de las transformaciones de Möbius $PSL(2, \mathbb{C})$ (grupo de automorfismos de Σ).

En Σ consideremos las bolas $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_{-1}, \mathcal{B}_{-2}\}$, donde $\mathcal{B}_1$ es la bola con centro en 3 y de radio 1, $\mathcal{B}_2$ la bola de radio 1/2 con centro en 1 y las bolas $\mathcal{B}_{-1}$ y $\mathcal{B}_{-2}$ son sus análogas pero centradas en -3 y -1 respectivamente. De manera que el conjunto $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_{-1}, \mathcal{B}_{-2}\}$ está formado por bolas abiertas y ajenas que están centradas en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \Sigma$. Llamaremos L a la región $\Sigma \setminus \bigcup_i \mathcal{B}_i$ con i en el conjunto de índices $I = \{\pm 1, \pm 2\}$ (ver dibujo 10).

⁶En este caso se definieron las cartas sobre $\mathbb{C}$, pero con $x + iy \mapsto (x, y)$ pasamos fácilmente de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$.

Las siguientes transformaciones de Möbius (por lo tanto preservan ángulos, orientación y mandan círculos en círculos)

$$M_1(z) = \frac{3z-8}{3-z}, \quad M_2(z) = \frac{4z-3}{4-4z} \text{ y definimos } M_{-1} = M_1^{-1}, \quad M_{-2} = M_2^{-1}$$

dejan invariante a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ por tener coeficientes reales, por lo que además mandan círculos centrados en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ en círculos centrados en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Para entender la acción de las M_i en $\hat{\mathbb{C}}$ nos ayudaremos del hecho que las transformaciones de Möbius están totalmente determinadas por su imagen en tres puntos, así que algunas imagenes son:

$$\begin{array}{ll} M_1(2) = -2 \in \partial\mathcal{B}_{-1} & M_2(1/2) = -1/2 \in \partial\mathcal{B}_{-2} \\ M_1(4) = -4 \in \partial\mathcal{B}_{-1} & M_2(3/2) = -3/2 \in \partial\mathcal{B}_{-2} \\ M_1(0) = -8/3 \in \mathcal{B}_{-1} & M_2(0) = -3/4 \in \mathcal{B}_{-2} \\ M_1(3) = \infty \in \hat{\mathbb{R}} & M_2(1) = \infty \in \hat{\mathbb{R}} \end{array}$$

de esta forma nos damos cuenta que las transformaciones M_i con $i \in I$ mandan el exterior de $\mathcal{B}_i$ en el interior de $\mathcal{B}_{-i}$ e identifican sus fronteras (claramente las M_{-i} actúan al contrario de las M_i).

Sea Γ el grupo (de Schottky) de transformaciones de la forma $M = M_{i_1} \circ M_{i_2} \circ \dots \circ M_{i_k}$, con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y con $i_l \in I$ tales que $-i_l \neq i_{l+1}$ (para que sean palabras reducidas). Sea $L_\infty = \bigcup_{M \in \Gamma} M(L)$. Sea

$$B_{i_0 i_1 \dots i_k} = M_{i_k} \circ M_{i_{k-1}} \circ \dots \circ M_{i_1}(B_{i_0}) \text{ con } i_l \in I, \quad -i_l \neq i_{l+1}$$

notar que con el primer índice B_{i_0} nos referimos a las bolas iniciales $\mathcal{B}_i$. Ayudándonos con esta notación, mencionamos algunas propiedades:

1. Es muy claro que $B_{i_0 \dots i_k} \subset \mathcal{B}_{-i_k}$ pues la transformación M_{i_k} introduce el exterior de $\mathcal{B}_{i_k}$ en el interior de $\mathcal{B}_{-i_k}$ y $B_{i_0 \dots i_{k-1}} \not\subset \mathcal{B}_{i_k}$ pues la transformación $M_{i_{k-1}} \neq M_{-i_k}$.
2. $B_{i_0 \dots i_{k-1} i} \cap B_{i_0 \dots i_{k-1} j} = \emptyset$ cuando $i \neq j$. Ya que $B_{i_0 \dots i_{k-1} i} \subset \mathcal{B}_{-i}$ y $B_{i_0 \dots i_{k-1} j} \subset \mathcal{B}_{-j}$ y como se muestra al principio las $\mathcal{B}_i$ son disjuntas.
3. $B_{i_0 \dots i_k} \subset B_{-i_1 \dots i_k}$ ya que $M_{i_1}(B_{i_0}) \subset \mathcal{B}_{-i_1}$, por lo tanto la bola $M_{i_k} \circ \dots \circ M_{i_2}(\mathcal{B}_{-i_1})$ contiene a $M_{i_k} \circ \dots \circ M_{i_2}(M_{i_1}(B_{i_0}))$.

4. Además las bolas $B_{i_0 \dots i_k}$ son ajenas para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo. Como mencionamos antes, esto vale para $n = 0$ (base de indicción). Supongamos que vale para $n \leq k$. Por demostrar para $n = k + 1$. Por 2 es cierto para bolas con el último subíndice (i_{k+1}) diferente, para bolas con último subíndice igual $B_{i_0 \dots i_{k-1} i_k i_{k+1}} \subset \mathcal{B}_{-i_{k+1}}$ también es cierto pues M_{k+1} es una biyección de Σ y por hipótesis de inducción las $B_{i_0 \dots i_k}$ son disjuntas.

Intuitivamente los radios de los círculos $B_{i_1 \dots i_k}$ tienden a cero, de forma que tienen un punto como límite, ver [5]. Por las propiedades anteriores, tenemos que $\Sigma \setminus L_\infty$ está formado por una infinidad de puntos (componentes conexas). Pues cada sucesión de la forma $\{i_k\}_{k=0}^\infty$ determina un único punto $p \in \Sigma \setminus L_\infty$, tal que $p \in \mathcal{B}_i$ para alguna $i \in I$. Notar que existe una cantidad no numerable de sucesiones $\{i_k\}_{k=0}^\infty$, pues para cada índice i_k existen tres posibilidades (excepto para i_0 que existen cuatro) de manera que hay $4 \times 3^\omega$ sucesiones. Además por las cuatro propiedades antes mencionadas, tenemos que cada índice en una sucesión (que determina un punto) determina 3 círculos posibles por los que podemos seguir. Además como el radio de los B_{i_j} tiende a cero, si tomamos un punto por 2 tenemos que estas componentes e manera que por la cantidad no numerable de componentes conexas y por la forma de construir estas componentes, tenemos que el conjunto $\mathfrak{C} = \hat{\mathbb{C}} \setminus L_\infty$ es un Cantor, ver dibujo 11.

La región L es un dominio fundamental para la acción de Γ en $\hat{\mathbb{C}} \setminus L_\infty$. Para convencerse de esto basta ver que las regiones $M_i(L)$ intersectan a L sólo en su frontera (∂L), esto es claro pues $\partial L = \cup_i \partial \mathcal{B}_i$ y como se menciona antes cualquier M_i introduce a $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{B}_i \supset L$ en la bola $\mathcal{B}_{-i}$ e identifica las fronteras. De forma que en el primer paso L se introduce en alguna de las $\mathcal{B}_i$, en adelante las transformaciones de L satisfacen las 4 propiedades anteriores, por lo tanto L en cada “nivel” (número de transformación) se va introduciendo en alguna de las $B_{i_1 i_2 \dots i_k}$ que antes demostramos que son disjuntas. Por ejemplo la transformación $M_{12}(L) = M_1 \circ M_2(L)$ introduce a L en $B_{-21} = M_1(\mathcal{B}_{-2}) \subset \mathcal{B}_{-1}$ (ver dibujo 11).

Si identificamos las bolas $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_{-1}, \mathcal{B}_{-2}\} = \partial L$ como nos indican las transformaciones M_1, M_2 , al realizar los pegados obtenemos una superficie ser homeomorfa a la superficie de género 2, en el dibujo 12 se muestra como realizar los pegados. Por lo tanto se ve que la superficie de género 2 tiene una $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructura. A grupos de transformaciones de Möbius como el considerado en este caso, se les nombra grupos de Schottky, que son los grupos generados por inversiones en círculos que no se intersectan.

También la construcción realizada en este ejemplo puede generalizarse para otorgarle una $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructura a cualquier superficie de género mayor que cero. Para hacer la generalización al caso $g = n$, podemos tomar las bolas $\mathcal{B}_i$, $1 \leq i \leq n$ con radio $1/2$ y centros en los puntos $\{2, 4, \dots, 2n\} \subset \hat{\mathbb{R}}$ y sus reflejados respecto del círculo máximo correspondiente al eje imaginario⁷. Después debemos encontrar las transformaciones de Möbius que introduzcan el exterior de $\mathcal{B}_i$ en el interior de $\mathcal{B}_{-i}$ (el reflejado de $\mathcal{B}_i$). Y procedemos de manera análoga al caso de género 2.

De está forma obtenemos como región fundamental

$$\hat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{i=1}^n (\mathcal{B}_i \cup \mathcal{B}_{-i})$$

donde se identifican cada par de círculos $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_{-i}$. El objeto resultante que es la esfera menos $2n$ círculos identificados por pares, será homeomorfo a la superficie de género n . Notar que al hacer la generalización el conjunto $\mathfrak{C}$ sera un conjunto con $2n \times (2n - 1)^\omega$ componentes conexas, de modo que en el caso $n \neq 1$ el conjunto $\mathfrak{C}$ será de nuevo un Cantor y para el caso $n = 1$ $\mathfrak{C}$ sólo consta de dos puntos.

(7) Si M una (G, X) -variedad, entonces M también es una $(G, \bar{X})$ -variedad.

Para verificar esto tenemos que otorgarle cartas a M modeladas sobre $\bar{X}$ con cambios de coordenadas que pertenezcan a G . Sean $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ la proyección cubriente y (U, ϕ) carta de M que pertenece a la (G, X) -estructura y tal que $m_0 \in U$. Sea $V \subset X$ vecindad de $\phi(m_0)$ que está cubierta parejamente por π (es decir, $\pi^{-1}(V) = \cup_i B_i$ donde $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y para toda i se satisface que $\pi|_{B_i}$ es homeomorfismo), claramente $V \cap \phi(U)$ también está cubierta parejamente por π . De modo que para toda i , las funciones $\pi_i^{-1} \circ \phi: W \rightarrow B_i$ son homeomorfismos, donde $W = \phi^{-1}(V \cap \phi(U))$. Definimos a $(W, \pi_i^{-1} \circ \phi)$ como una carta alrededor de $m_0 \in M$ y hacemos esto para todo $m \in M$. Con esto tenemos un $\bar{X}$ -atlas definido sobre M , falta ver que los cambios de coordenadas pertenecen a G .

Consideremos dos cartas $(W_0, \pi_i^{-1} \circ \phi_0)$ y $(W_1, \pi_j^{-1} \circ \phi_1)$ que pertenezcan al $\bar{X}$ -atlas tales que $W_0 \cap W_1 \neq \emptyset$, entonces el cambio de coordenadas se ve de la forma:

$$\pi_i^{-1} \circ \phi_0 \circ (\pi_j^{-1} \circ \phi_1)^{-1} = \pi_i^{-1} \circ \phi_0 \circ \phi_1^{-1} \circ \pi_j.$$

⁷Por supuesto que existen varias formas de generalizar, aquí se muestra esta.

Observar que estas funciones primero bajan a X , ahí hacen el cambio de coordenadas (donde sí actúa elseudogrupoo G) y después suben a $\bar{X}$ aunque tal vez a distinto nivel. De manera que los cambios de coordenadas vienen dados en términos delseudogrupoo G .

CAPÍTULO 2

Uniformización de estructuras geométricas.

La topología afirma que toda (G, X) -variedad M es homeomorfa al cociente $\bar{M}/\mathcal{T}$, donde $\mathcal{T}: \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ es el grupo de transformaciones de cubierta, el cual es isomorfo al grupo fundamental de M , $\pi_1(M)$. Este cociente es puramente topológico de manera que no otorga información de la estructura geométrica. Nos gustaría encontrar una representación análoga para (G, X) -variedades pero con un cociente que sí proporcione información de la (G, X) -estructura. En este capítulo intentamos encontrar esta representación por medio de la aplicación desarrolladora y holonomía (conceptos que aquí definimos), los cuales respectivamente ayudan a identificar a $\bar{M}$ con X y a $\pi_1(M)$ con algún subgrupo $\Gamma < G$ que actúa en X . Este objetivo se logra para (G, X) -variedades completas, i.e. este tipo de variedades siempre puede verse (es (G, X) -isomorfa) como un cociente de X . Como referencia para este capítulo se recomienda [1].

1. Aplicación desarrolladora y holonomía.

** Los ejemplos 1 y 7 respectivamente muestran que el cubriente universal $\bar{M}$ de una (G, X) -variedad es una (G, X) -variedad y que podemos suponer que la variedad modelo X es simplemente conexa.*

En los ejemplos del capítulo 1 también se muestra como una (G, X) -estructura otorga información de la topología en M . Para poder extraer toda esta información quisiéramos tener una “visión global” de la (G, X) -estructura. Si pudieramos establecer un (G, X) -isomorfismo entre M y un cociente X/Γ , entonces encontraríamos la visión global buscada ya que por muy complicadas que sean las cartas iniciales, la variedad M se podría ver como la región fundamental de la acción del grupo Γ en X . Es decir, iniciaríamos con un X -atlas tal vez muy complicado pero lo podríamos cambiar por uno trivial, en el sentido que casi es como un abierto de X .

Consideremos a $\bar{M}$ con la (G, X) -estructura levantada con π , ver ejemplo 1. Las cartas son funciones de abiertos de $\bar{M}$ en abiertos de X ; la pregunta es, ¿podremos pegarlas para formar una función global? La respuesta es que sí. Por ejemplo, si tenemos dos cartas de $\bar{M}$, (U_0, ϕ_0) y (U_1, ϕ_1) tales que $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$, entonces por la definición de (G, X) -estructura existe g en el pseudogrupo tal que la función:

$$x \mapsto \begin{cases} \phi_0(x) & x \in U_0 \\ g \circ \phi_1(x) & x \in U_1 \end{cases}$$

está bien definida en $U_0 \cup U_1$. Se probará que este proceso se puede continuar para obtener una función global $D: \bar{M} \rightarrow X$ como buscamos. Pero antes, tenemos que definir un procedimiento análogo a la continuación analítica de una función de variable compleja.

DEFINICIÓN 4. Sea M una (G, X) -variedad. Sean (U_0, ϕ_0) carta conexa que pertenece a la (G, X) -estructura de M y $x_0 \in U_0$. Sea $\alpha: I \rightarrow M$ una trayectoria, tal que $\alpha(0) = x_0$. Entonces decimos que la familia de cartas conexas $\mathcal{F} = \{(U_t, \phi_t) \mid t \in I\}$ es continuación analítica de (U_0, ϕ_0) si:

- 1) $\alpha(t) \in U_t$, para todo $t \in I$
- 2) Para cada $t \in I$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $|t - s| < \epsilon$ entonces $\phi_t = \phi_s$ en $U_t \cap U_s$.
- 3) Las cartas (U_t, ϕ_t) pertenecen a la (G, X) -estructura de M .

De aquí en adelante y hasta el final del capítulo, M será una (G, X) -variedad, $x_0 \in U_0 \subset M$ tal que (U_0, ϕ_0) es una carta que pertenece a la (G, X) -estructura. Realizaremos algunas construcciones pero más adelante se menciona como se modifican estas al cambiar de carta ó de punto.

* Además G siempre será un pseudogrupo que satisface el principio de continuación analítica¹, i.e. cuando dos cartas (U_1, ϕ_1) y (U_2, ϕ_2) son tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ y $\phi_1|_W = \phi_2|_W$ para algún abierto W contenido en $U_1 \cap U_2$, entonces $\phi_1 = \phi_2$ en $U_1 \cap U_2$.

Algunos ejemplos de G que satisfacen el principio de continuación analítica son:

$$\begin{array}{ll} \bullet Hol(\Sigma) & \bullet Af(\mathbb{R}^2) \\ \bullet \mathcal{M}(\Sigma) & \bullet \mathcal{A}(\mathbb{C}) \end{array}$$

¹Los elementos de G son funciones analíticas, i.e. admiten expansión en series de Taylor.

PROPOSICIÓN 1.1. *Sea $\alpha: I \rightarrow M$ trayectoria arbitraria tal que $\alpha(0) = x_0$. Entonces (U_0, ϕ_0) tiene continuación analítica $\mathcal{F} = \{(U_t, \phi_t)\}_{t \in I}$ a lo largo de α . Además si β es otra trayectoria tal que $\beta(0) = x_0$, $\alpha(1) = \beta(1)$ y estas trayectorias son homotópicas, entonces la continuación analítica $\mathcal{G} = \{(V_t, \psi_t)\}_{t \in I}$ a lo largo de β satisface que $\phi_1 = \psi_1$ en una vecindad de $\alpha(1) = \beta(1)$.*

Esta proposición nos ayuda a “propagar” una carta respetando la (G, X) -estructura de M y aprovechando que G satisface el principio de continuación analítica. Esta proposición también muestra ¿por qué buscar una función global de $\bar{M}$ a X y no de M a X ? Pues la topología de M es una obstrucción, ya que dados $p, q \in M$ en general existen muchas trayectorias no homotópicas que los unen, por lo que la continuación analítica de una carta a lo largo de estas trayectorias puede no coincidir en el punto final. La demostración de esta proposición es análoga a la del teorema de monodromía en variable compleja. Aquí solo se muestra como realizar la continuación analítica de la carta (U_0, ϕ_0) a lo largo de la curva $\alpha \subset M$, pues en este caso sí se utiliza la acción del pseudogrupo G . El lector interesado puede revisar [7] para una demostración de que las continuaciones analíticas a lo largo de trayectorias homotópicas coinciden.

DEMOSTRACIÓN. Como U_0 es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $\alpha(t) \in U_0$ para $t \in [0, \delta]$, si $\delta = 1$ entonces la familia $(U_t, \phi_t) = (U_0, \phi_0)$ para todo $t \in [0, 1]$, es continuación analítica de la carta (U_0, ϕ_0) . Si $\delta < 1$ entonces definimos $t'_1 = \inf\{t \in [0, 1] \mid \alpha(t) \notin U_0\}$ y $t_1 = \alpha(t'_1)$. Si tomamos una carta (U_{t_1}, ψ_{t_1}) de la (G, X) -estructura tal que $t_1 \in U_{t_1}$, entonces $U_0 \cap U_{t_1} \neq \emptyset$ por la continuidad de α , es decir, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tenemos que $\alpha(t_1 - \epsilon, t_1) \subset U_{t_1}$ por lo que debe haber un $t \in (t_1 - \epsilon, t_1)$ tal que $\alpha(t) \in U_0$. Como $U_0 \cap U_{t_1} \neq \emptyset$ por la definición de pseudogrupo tenemos que la función $g = \phi_0 \circ \psi_{t_1}^{-1}: \psi_{t_1}(U_0 \cap U_{t_1}) \rightarrow \phi_0(U_0 \cap U_{t_1}) \subset X$ es un elemento de G . Al tomar como carta local de t_1 a (U_{t_1}, ϕ_{t_1}) donde $\phi_{t_1} = g \circ \psi_{t_1}: U_{t_1} \rightarrow X$, es claro que esta carta pertenece a la (G, X) -estructura además de que $\phi_{t_1} = \phi_0$ en $U_{t_1} \cap U_0$. Entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que la familia:

$$\{(U_t, \phi_t) \mid (U_t, \phi_t) = (U_0, \phi_0) \text{ si } t \in [0, t_1] \text{ y } (U_t, \phi_t) = (U_{t_1}, \phi_{t_1}) \text{ si } t \in [t_1, t_1 + \delta_1]\}$$

es continuación analítica de (U_0, ϕ_0) a lo largo de la curva $\alpha([0, t_1 + \delta_1]) \subset \alpha$.

Para demostrar que este proceso se puede continuar a lo largo de todo α , definamos $R = \{t \in [0, 1] \mid (U_0, \phi_0) \text{ tiene continuación analítica en } [0, t]\}$, demostraremos que $R =$

$[0, 1]$. Supongamos que $R^c \neq \emptyset$. Sean $t' = \inf\{t \in [0, 1] \mid t \in R^c\}$ y $(U_{t'}, \phi_{t'})$ carta de la (G, X) -estructura en el punto $\alpha(t')$. Sea $t < t'$ suficiente cerca de t' para asegurar que $U_t \cap U_{t'} \neq \emptyset$ (donde (U_t, ϕ_t) es carta del punto $t \notin R$). Entonces la carta $(U_{t'}, \phi_{t'} \circ g')$ donde $g' = \phi_t \circ \phi_{t'}^{-1}$, es continuación analítica de (U_0, ϕ_0) hasta el punto t' . Esto es una contradicción ya que en t' no podía haber continuación analítica. Por lo tanto, no existe ínfimo en R^c , esto implica que $R^c = \emptyset$. $\square$

1.1. La aplicación desarrolladora: Supongamos que la vecindad U_0 es conexa y está cubierta parejamente por la proyección cubriente π (de no ser así, definimos $U'_0 = U \cap U_0$ con U vecindad cubierta parejamente). Sea $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ un punto tal que $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$ y $\tilde{U}_0 \subseteq \tilde{M}$ la componente conexa de $\pi^{-1}(U_0)$ que contiene a $\tilde{x}_0$. Definimos $\tilde{\phi}_0: \tilde{U}_0 \rightarrow X$ el levantamiento de ϕ_0 , i.e. $\tilde{\phi}_0$ es la única función tal que $\tilde{\phi}_0 = \phi_0 \circ \pi$, ver dibujo 13. Sea $D: \tilde{M} \rightarrow X$ la función determinada por $y \mapsto \psi_1(y)$, donde ψ_1 es la última función de la familia $\{(U_t, \psi_t)\}$ que es continuación analítica de $(\tilde{U}_0, \tilde{\phi}_0)$ a lo largo de un camino $\alpha \subset \tilde{M}$ entre $\tilde{x}_0$ y y . La función D está bien definida, pues $\tilde{M}$ es simplemente conexo (todos los caminos entre $\tilde{x}_0$ y y son homotópicos).

DEFINICIÓN 5. A la función $D: \tilde{M} \rightarrow X$ la llamaremos la **aplicación desarrolladora** de M .

Notar que de acuerdo a la definición de la aplicación desarrolladora, esta resulta ser un difeomorfismo local que sale de un espacio simplemente conexo y además respeta la (G, X) -estructura en $\tilde{M}$, de forma que su imagen tiene que ser un abierto conexo contenido en X .

1.2. La holonomía:

* Ahora consideraremos a G como un pseudogrupo donde las funciones entre conexos se ven como la restricción de un único difeomorfismo global en X , por ejemplo:

- $(Af(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$
- $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$
- $(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$

- $(Aut(\Delta), \Delta)$
- $(Iso(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$

Sea $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ lazo basado en x_0 . Sea $\mathcal{F} = \{(U_t, \phi_t)\}$ una continuación analítica de la carta (U_0, ϕ_0) a lo largo de α . Ya que (U_0, ϕ_0) y (U_1, ϕ_1) son cartas alrededor de x_0 que pertenecen a la (G, X) -estructura en M , por definición de (G, X) -estructura el cambio de coordenadas $\phi_0 \circ \phi_1^{-1}$ debe ser un elemento del pseudogrupo G , que en una vecindad conexa de x_0 se ve como restricción de un homeomorfismo global de X , $g_\alpha \in G$.

De acuerdo con esta observación definimos la función $H: \pi_1(M, x_0) \rightarrow G$ tal que $\alpha \mapsto g_\alpha$. Claramente H está bien definida, pues si β es otro lazo basado en x_0 tal que $[\beta] = [\alpha] \in \pi_1(M, x_0)$ y $\mathcal{G} = \{(U_t, \psi_t)\}$ es la continuación analítica de (U_0, ϕ_0) a lo largo de β , entonces $\psi_1 = \phi_1$ en una vecindad de x_0 por la proposición anterior. Para cualesquiera $[\beta], [\alpha] \in \pi_1(M, x_0)$ tenemos que H satisface $H(\beta * \alpha) = g_\beta \circ g_\alpha$.

En efecto, sean $\mathcal{F} = \{(U_t, \phi_t)\}$ y $\mathcal{G} = \{(V_t, \psi_t)\}$ continuaciones analíticas de (U_0, ϕ_0) a lo largo de α y β respectivamente. Sean $g_\alpha = \phi_0 \circ \phi_1^{-1}$, $g_\beta = \phi_0 \circ \psi_1^{-1}$ los cambios de coordenadas (que pertenecen a la (G, X) -estructura). Entonces la familia $\{(W_t, \rho_t)\}_{t=0}^2$ tal que

$$(W_t, \rho_t) = \begin{cases} (U_t, \phi_t) & \text{si } t \in [0, 1] \\ (g_\alpha^{-1}V_{t-1}, g_\alpha^{-1}\psi_{t-1}) & \text{si } t \in [1, 2] \end{cases}$$

es continuación analítica de $(U_0, \phi_0) = (V_0, \psi_0)$ a lo largo de $\beta * \alpha$ (ya que $g_\alpha^{-1}V_0 = \phi_1 \circ \phi_0^{-1}U_0 = U_1$ y $g_\alpha^{-1} \circ \phi_0 = \phi_1 \circ \phi_0^{-1} \circ \psi_0 = \phi_1$) y $\phi_0 \circ (g_\alpha^{-1} \circ \psi_1)^{-1} = \phi_0 \circ \psi_1^{-1} \circ g_\alpha = g_\beta \circ g_\alpha$. De forma que la función H abre el producto de lazos, por lo tanto H es un homomorfismo de grupos.

DEFINICIÓN 6. El homomorfismo $H: \pi_1(M) \rightarrow G$ se llama la **holonomía** de M .

Con el homomorfismo de holonomía tratamos de encontrar un subgrupo $H(\pi_1(M))$ de G que actúe en X , puede ser que H no sea inyectivo. Más adelante veremos el papel que juegan la holonomía y la aplicación desarrolladora en el problema de uniformización de (G, X) -variedades. Por ahora sólo sabemos que a una (G, X) -estructura podemos asociarle el par desarrollador (D, H) pero:

¿Es único el par desarrollador (D, H) para la variedad M ?

En la definición del par desarrollador utilizamos tres datos iniciales $x_0, \tilde{x}_0$ y (U_0, ϕ_0) , notar que al fijar x_0 y cambiar alguno de los otros dos, tenemos que hacer continuación analítica $\mathcal{G} = \{(V_t, \psi_t)\}$ de una nueva carta $(V_0, \psi_0) = (gU_0, g\phi_0)$ para construir el nuevo par desarrollador (D', H') . Puesto que $(V_0, \psi_0) = (gU_0, g \circ \phi_0)$, entonces $\{(V_t, \psi_t)\} = \{(gU_t, g \circ \phi_t)\}$ y por lo tanto $D' = gD$ donde D es la aplicación desarrolladora inicial. Si la curva α es cerrada y la función desarrolladora inicial determina $\phi_0 \circ \phi_1^{-1} = g_\alpha$, entonces la nueva función desarrolladora determina

$$\psi_0 \circ \psi_1^{-1} = (g \circ \phi_0) \circ (g \circ \phi_1)^{-1} = g \circ \phi_0 \circ \phi_1^{-1} \circ g^{-1} = g \circ g_\alpha \circ g^{-1}$$

luego $H' = g \circ H \circ g^{-1}$

De esta forma se ve que el par desarrollador (D, H) de una (G, X) -variedad M , puede ser sustituido por el par desarrollador (gD, gHg^{-1}) con $g \in G$, es decir, el par desarrollador (D, H) está bien definido salvo por composiciones con elementos de G .

★ **Ejemplo:** *El par desarrollador de un toro con estructura afín.*

*₁ Observar que la acción del grupo $\langle 2, 2\pi \rangle = \{m2 + n2\pi i \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ (retícula) es libre y discontinua en $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, entonces el cociente $\mathbb{C}/\langle 2, 2\pi \rangle$ admite estructura de variedad y $(\mathbb{C}, p)$ es el cubriente universal, donde $\rho: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\langle 2, 2\pi \rangle$ es el paso al cociente, ver apéndice. El cociente $\mathbb{C}/\langle 2, 2\pi \rangle$ claramente es homeomorfo a $\mathbb{T}^2$ como se definió en el ejemplo 3.

En el ejemplo 3 se le proporcionó una estructura afín compleja a $\mathbb{T}^2$ por medio de las cartas $(U_1, f_1), (U_2, f_2)$. Utilizaremos esta $(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -estructura en $\mathbb{T}^2$ para dar un ejemplo de aplicación desarrolladora y holonomía. Recordemos que las cartas tienen como imagen en $\mathbb{C}$ a los anillos

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < e^2\} \text{ y } A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1/e < |z| < e\}$$

Sea $x_0 = (1, 0) \in \mathbb{T}^2$ y $U_0 = B_1((1, 0)) \subset \mathbb{T}^2$ (notar que el abierto $U_1 \subset \mathbb{T}^2$ no está cubierto parejamente), consideraremos $1 = \tilde{x}_0 \in \rho^{-1}(1, 0)$ y $\tilde{U}_0 = B_1(1) \subset \rho^{-1}(U_0)$. Entonces para calcular la imagen de algún $z \in \mathbb{C}$ con la aplicación desarrolladora D , debemos calcular la continuación analítica de $(\tilde{U}_0, \tilde{f}_1)$ con $\tilde{f}_1 = f_1 \circ \rho: \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ a lo largo de

un camino α en $\mathbb{C}$ que una a 1 con z . Debemos observar que la función $f_1(z) = e^z: U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ es entera (holomorfa en todo $\mathbb{C}$), de manera que la continuación analítica es trivial (en todo $\mathbb{C}$, tiene la misma regla de correspondencia). Entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $D(z)$ coincide con e^z , la cual de variable compleja sabemos que es cubierta de $\mathbb{C}^*$.

Para hacer el calculo de la holonomía en este caso, debemos recordar de topología que el grupo fundamental de $\mathbb{T}^2$ es libre abeliano a dos generadores (i.e. $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$). Consideraremos a $\alpha = 2I \subset \mathbb{T}^2$ (visto como lazo basado en 1 que inicia hacia la derecha en U_1) y $\beta = l(1 + 2\pi i) + (1 - l)$ como los dos generadores, ver dibujo 14. Observar que en A_1 coinciden los puntos 1 y $1 + 2\pi i$, de forma que el lazo β tiene como imagen un círculo centrado en el origen y de radio e . Además nunca, cambiamos de carta al realizar continuación analítica de (U_1, f_1) a través de β , por lo que sorprendentemente β tiene imagen trivial bajo la holonomía, es decir, $H(\beta) = \mathcal{I}_{\mathbb{C}^*}$ (la identidad en $\mathbb{C}^*$). Para calcular la imagen bajo la holonomía del lazo α , debemos observar que la carta $(U_2, e^2 f_2)$ es continuación analítica de (U_1, f_1) a lo largo de α en el punto $2 = 0 \in \mathbb{T}^2$ que no pertenece a U_1 , pues $f_1(z) = f_2(z)/e^2$ en la región $(1, 2) \times 2\pi I \subset U_1 \cap U_2$ como se muestra en el ejemplo 3. Notar que aún no llego al punto final de α (1), pero por la forma de dar las cartas es claro que $(U_1, e^2 f_1)$ va a ser continuación analítica de $(U_2, e^2 f_2)$ en el punto final, ver dibujo 14. Como el grupo $\langle \alpha \rangle$ es libre, basta dar la imagen de α bajo el homomorfismo H para saber la imagen de cualquier elemento. Por lo tanto, $H(\langle \alpha \rangle) = \langle e^2 \rangle$ donde $\langle e^2 \rangle$ representa el subgrupo multiplicativo de $\mathbb{C}^*$ generado por e^2 .

De esta forma tenemos que en este caso el par desarrollador $(D(z), H(\pi_1(M)))$ es $(e^z, \langle e^2 \rangle)$. Notar que las cartas U_i se modelaron con la función exponencial, por lo que uno esperaria que la estructura no fuese afín, pero resulta ser que los cambios de coordenadas sí lo son, por esta y otras razones este ejemplo resulta ser muy interesante. Más adelante nos referiremos a él solamente como el *ejemplo del toro*.

2. Completez y uniformización.

Recordemos que nuestro objetivo es poder ver a una (G, X) -variedad como un cociente X/Γ . Existe un caso en el cual esto siempre se puede hacer, estas son las (G, X) -variedades completas.

DEFINICIÓN 7. Una (G, X) -variedad es **completa** si su aplicación desarrolladora es una proyección cubriente.

Algunos ejemplos de (G, X) -estructuras completas son:

- S^1 con la $(Iso(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ -estructura otorgada en la sección 1,1
- $\mathbb{T}^2$ con la $(Iso(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$ -estructura que se muestra en la sección anterior $(*)_1$, el apéndice nos dice que este cociente es una variedad, podemos proceder como en los ejemplos 4 y 6 para otorgarle cartas.
- En el siguiente capítulo se mostrara que la $(Aut(\Delta), \Delta)$ -estructura otorgada a la superficie de género dos en el ejemplo 4, es completa.

Como mencionamos antes, las (G, X) -variedades completas se pueden ver como el cociente de X entre la imagen de la holonomía $H(\pi_1(M))$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, sea M una (G, X) -variedad completa, entonces $(\bar{M}, D)$ es espacio cubriente de X . Como X es simplemente conexa, D es un homeomorfismo entre X y $\bar{M}$ (pues de topología sabemos que existe biyección entre $\pi_1(X)$ y $D^{-1}(x)$, con $x \in X$), aun más D es un (G, X) -isomorfismo con la (G, X) -estructura en X dada por $\{(X, \mathcal{I}_X)\}$. La función $\pi \circ D^{-1}: X \rightarrow M$ también es proyección cubriente, pues para todo abierto U que está cubierto parejamente por π , los abiertos $D(U_i)$ con $U_i \subset \pi^{-1}(U)$ también son disjuntos y homeomorfos a U . De manera que U también está cubierto parejamente por $\pi \circ D^{-1}$.

Sea $\alpha \in \pi_1(M)$ con $\alpha \neq 1$ ($1 \in \pi_1(M)$ es el lazo constante), como D es homeomorfismo tenemos que $D(\tilde{x}_0) \neq D(\tilde{x}_1)$ para cualesquiera $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \pi^{-1}(x_0)$, por la forma de definir D se sigue que H es inyectiva. Por lo tanto α se levanta a X como $H(\phi_0 \circ \phi_1^{-1}) = g_\alpha \in G$, esto implica que D respeta órbitas. El grupo $H(\pi_1(M))$ actúa libremente en X , pues si $g_\alpha(x) = x$ implica que $\tilde{\alpha}(D^{-1}(x)) = D^{-1}(x)$ lo que no puede suceder pues $\tilde{\alpha}$ actúa

libremente en $\tilde{M}$. La acción también es discontinua ya que para todo compacto $K \subset \tilde{M}$ el conjunto $\{\alpha \in \pi_1(M) \mid \tilde{\alpha}(K) \cap K \neq \emptyset\}$ es finito, por lo tanto también lo será $\{g_\alpha \in H(\pi_1(M)) \mid g_\alpha(D(K)) \cap D(K) \neq \emptyset\}$ (todo compacto $K \subset X$ es de la forma $D(K)$, pues $D^{-1}(K)$ es compacto). Entonces el cociente $X/H(\pi_1(M))$ admite estructura de variedad (ver apéndice). La variedad $M = \tilde{M}/\pi_1(M)$ es (G, X) -isomorfa vía la aplicación desarrolladora a $X/H(\pi_1(M))$. $\square$

Basándonos en esto, obtenemos un muy interesante ejemplo.

- *Toda $(Hol(\Sigma), \Sigma)$ -superficie es completa.*

DEMOSTRACIÓN. Sea M una $(Hol(\Sigma), \Sigma)$ -superficie entonces por el teorema de uniformización de superficies de Riemann [17]:

Teorema de uniformización: *Toda superficie de Riemann simplemente conexa es biholomorfamente equivalente² a $\mathbb{C}$, $\hat{\mathbb{C}}$ ó Δ .*

Tenemos que $\tilde{M}$ (que también es una $(Hol(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -superficie) es $(Hol(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -isomorfa (biholomorfa) a alguna de las variedades $\mathbb{C}$, $\hat{\mathbb{C}}$ ó Δ , por lo tanto podemos decir que toda $(Hol(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -superficie está cubierta universalmente por $\mathbb{C}$, $\hat{\mathbb{C}}$ ó Δ . Entonces M tiene que ser biholomorfa a alguno de los cocientes $\mathbb{C}/\Gamma$, $\hat{\mathbb{C}}/\Gamma$ ó Δ/Γ donde Γ es la imagen de H , que actúa como grupo de transformaciones de cubierta en $\mathbb{C}$, $\hat{\mathbb{C}}$ ó Δ . Entonces toda $(Hol(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -superficie (en particular las $(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -superficies y $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -superficies) es biholomorfa a una superficie de Riemann completa. $\square$

Llamaremos $Q \subset X$ a la imagen de D y $\Gamma \subset G$ a la imagen de H . En este caso tenemos que la variedad M se puede ver (es (G, X) -isomorfa) como Q/Γ . Existen variedades que sí pueden verse como el cociente Q/Γ , pero la aplicación desarrolladora no es homeomorfismo.

DEFINICIÓN 8. *Decimos que una variedad M es **uniformizable** si podemos encontrar $\Omega \subseteq X$ y $\Upsilon < G$ tal que M es (G, X) -isomorfa a Ω/Υ [16].*

²Estas tres superficies no son equivalentes, ya que $\hat{\mathbb{C}}$ es compacta y $\mathbb{C}$, Δ no lo son, además por el teorema de Liouville no puede existir biholomorfismo entre $\mathbb{C}$ y Δ .

Algunos ejemplos de (G, X) -variedades uniformizables son:

- Toda (G, X) -variedad completa es uniformizable (con $\Omega = X$ y $\Upsilon \cong \pi_1(M)$).
- $\mathbb{T}^2$ con la $(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -estructura otorgada en la sección anterior.

Como se muestra en el ejemplo del toro, $\mathbb{T}^2$ con esta $(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -estructura es biholomorfo bajo e^z a $(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -estructura completa otorgada a T^2 en $*_1$. Esto nos da un ejemplo del teorema de uniformización.

- En el siguiente capítulo se mostrará que la superficie de género dos con la $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructura otorgada en el ejemplo 6, es uniformizable.

- Toda (G, X) -variedad M donde la aplicación desarrolladora no es suprayectiva pero sí cubriente sobre su imagen es uniformizable.

En efecto, como tenemos que Q está cubierto por $(\tilde{M}, D)$, para probar que $M \cong Q/\Gamma$ basta probar que $(Q, \pi \circ D^{-1})$ es un espacio cubriente de M . Por lo tanto sea $U \subset M$ un abierto que está cubierto parejamente por π . Sean V_i abiertos donde D es homeomorfismo y tales que $U_i \cap V_i \neq \emptyset$, con U_i componente conexa de $\pi^{-1}(U)$. Entonces los abiertos $D(U_i \cap V_i)$ son homeomorfos a $\pi(U_i \cap V_i)$, además $Im D(U_i \cap V_i)$ se ve como unión disjunta de abiertos homeomorfos a $\pi(U_i \cap V_i)$ (tal vez $D(U_i \cap V_i) = D(U_j \cap V_j)$ para $i \neq j$). De manera que $\pi(U_i \cap V_i) \subset U$ está cubierto parejamente por $\pi \circ D^{-1}$.

Este ejemplo muestra que los dos ejemplos anteriores de (G, X) -superficies uniformizables, no son completas por que la aplicaciones desarrolladoras no son suprayectivas, aunque sí son cubiertas de su imagen. Pueden existir aplicaciones desarrolladoras que son suprayectivas (y por definición de D son homeomorfismos locales), pero que no son proyecciones cubrientes. Un ejemplo de esto es el siguiente:

* **Ejemplo:** Consideremos la función $f(z) = e^z$ restringida solamente al semiplano superior, es decir $f(z): \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^*$. Es claro que f es homeomorfismo local y suprayectiva (por ser restricción de la proyección cubriente). Pero no es proyección cubriente, para ver esto haremos notar que el punto $1 \in \mathbb{C}^*$ no puede tener una vecindad que este cubierta parejamente con f . Claramente en toda bola abierta $B_\epsilon(1)$ que sea vecindad del 1, el conjunto $f^{-1}(B_\epsilon(1))$ tiene una componente conexa C que está muy cercana al 0 (pues 0 debería estar en $f^{-1}(1)$), de manera que para ningún ϵ el conjunto $f^{-1}(B_\epsilon(1))$ se ve como la unión disjunta de abiertos homeomorfos a $B_\epsilon(1)$ (con f como homeomorfismo), pues en

C no existe un punto que sea imagen inversa del 1. Por lo tanto una variedades que tenga a una función de este tipo como aplicación desarrolladora no puede ser uniformizable en particular no es completa.

CAPÍTULO 3

Estructuras proyectivas complejas.

Uno de los resultados más importantes del análisis complejo clásico, es el teorema de uniformización de superficies de Riemann [17]. Este resultado de Felix Klein y Henri Poincaré como antes se mencionó afirma que toda $(Hol(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -superficie es $(Hol(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -isomorfa (biholomorfa) a una (G, X) -superficie completa, donde el par (G, X) es una de las tres estructuras $(SO(3), S^2)$, $(Iso(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$ y $(Aut(\Delta), \Delta)$ ($S^2 = \hat{\mathbb{C}}$ y $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$).

Estas tres estructuras son casos particulares de una más general, la $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructura (estructura proyectiva compleja). Por lo tanto es natural estudiar $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructuras uniformizables, pues una teoría de este tipo contiene a la uniformización de Klein y Poincaré. Por este motivo en este capítulo se menciona cuándo una superficie con estructura proyectiva compleja es uniformizable. Para este capítulo se recomiendan como referencia [14] y [15].

Sabemos de los ejemplos 3 y 4 que toda superficie compacta admite una $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructura (es claro $\hat{\mathbb{C}}$ la admite por ser variedad modelo). Analizaremos como son las $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructuras uniformizables en cada una de las superficies compactas. Para esto consideraremos las siguientes 3 posibilidades.

1.- La esfera de Riemann ($g = 0$).

Este caso es trivial, pues $\hat{\mathbb{C}}$ es su propia cubierta universal por ser simplemente conexa ($\pi_1(\hat{\mathbb{C}}) = 1$). Claramente toda $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructura en $\hat{\mathbb{C}}$ tiene holonomía trivial, por lo tanto el cociente Q/Γ siempre es $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -isomorfo a Q . Entonces la $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructura es uniformizable si y sólo si D es un $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -isomorfismo, pues la imagen de D esta forzada a ser $\hat{\mathbb{C}}$. De manera que salvo $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -isomorfismos sólo existe una $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructura uniformizable en $\hat{\mathbb{C}}$. Esto demuestra que la esfera S^2 no admite estructura afín (mucho menos euclídeana) y niquira hiperbólica.

2.- El toro ($g = 1$).

Este caso es mucho más interesante ya que $\pi_1(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z}^2$. Una $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructura uniformizable en $\mathbb{T}^2$ satisface que $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{C})$ es abeliano. Nos interesa saber cuales son las posibilidades para Γ , entonces la pregunta es:

PREGUNTA 1. ¿Qué tipo de subgrupos abelianos con máximo 2 generadores tiene $PSL(2, \mathbb{C})$?

Para dar respuesta a esta pregunta debemos recordar que toda transformación de Möbius $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ puede ser representada de manera única salvo signo como una matriz en $SL(2, \mathbb{C})$, además todo $T \in SL(2, \mathbb{C})$ se puede llevar bajo un automorfismo interno (conjugación) a alguna de las tres formas canónicas:

$$(1) \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2) \quad T = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3) \quad T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$$

donde $b \neq 0$ y $a \neq 0, \pm 1$. Ninguna de estas tres matrices son equivalentes bajo automorfismos internos de $SL(2, \mathbb{C})$ [7].

Consideremos un par de matrices $T'_1, T'_2 \in PSL(2, \mathbb{C})$ tales que $T'_1 T'_2 = T'_2 T'_1$, de manera que el grupo $\langle T'_1, T'_2 \rangle$ es libre abeliano a dos generadores. Si representamos a las matrices T'_1 y T'_2 con $T_1, T_2 \in SL(2, \mathbb{C})$, entonces T_1, T_2 satisfacen $T_1 T_2 = \pm T_2 T_1$. Conjugamos la matriz T_1 para llevarla a alguna de las 3 formas canónicas antes mencionadas. De forma que tenemos los siguientes 3 casos a considerar.

i: T_1 es la identidad. Entonces la matriz T_2 es arbitraria y puede ser reducida con una conjugación a alguna de las formas canónicas mencionadas. Entonces T_2 tiene dos posibilidades ya que no consideraremos el caso $T_2 = T_1 = \mathcal{I}_{\hat{\mathbb{C}}}$ (por ser trivial).

ii: T_1 es de la forma (2). Como mencionamos antes la matriz $T_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ debe satisfacer:

$$T_1 T_2 = \pm T_2 T_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a + b_1 c & a + b_1 d \\ c & d \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a & ab_1 + b \\ c & cb_1 + d \end{pmatrix}$$

Cuando consideramos el signo $-$ tenemos que $c = 0$ y esto implica que $a = 0$, por lo tanto $|T_2| = 0$ (el determinante) que no puede ser pues suponemos que $T_2 \in SL(2, \mathbb{C})$. Si consideramos el signo $+$ tenemos que $d = cb_1 + d \Rightarrow c = 0$ y $b + b_1d = ab_1 + b \Rightarrow a = d = \pm 1$ ya que $|T_2| = 1$. Concluimos que T_2 debe ser de la forma (2) para que conmute con T_1 .

iii: T_1 es de la forma (3). En este caso las ecuaciones son de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a/a_1 & ba_1 \\ c/a_1 & d/a_1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} aa_1 & b/a_1 \\ ca_1 & d/a_1 \end{pmatrix}.$$

Al considerar el signo $+$ tenemos que $b = c = 0$ ($a_1 \neq \pm 1$) por lo que $d = 1/a$ pues $|\mathbb{T}^2| = 1$, entonces T_2 es de la forma (3). Si consideremos el signo $-$ tenemos que $a = d = 0$, $a_1 = \pm i$ y $c = -1/b$ ya que $T_2 \in SL(2, \mathbb{C})$. Bajo una conjugación podemos hacer $b = 1$.

Entonces las condiciones impuestas a las transformaciones T_i para que conmuten son¹:

$$(1) = \begin{cases} (I) & T_1(z) = z & T_2(z) = z + b \\ (II) & T_1(z) = z & T_2(z) = a^2z \end{cases}$$

$$(2) = \{(I) \quad T_1(z) = z + b_1 \quad T_2(z) = z + b\}$$

$$(3) = \begin{cases} (I) & T_1(z) = a_1^2z & T_2(z) = a^2z \\ (II) & T_1(z) = -z & T_2(z) = -1/z \end{cases}$$

Notar que en el caso (3 – II) las transformaciones T_i obtenidas son de grado 2, es decir $T_1^2(z) = T_2^2(z) = z$. Este caso claramente no puede suceder (aunque el grupo generado sí es abeliano) ya que el grupo $\langle T_1, T_2 \rangle$ es de orden finito, lo cual contradice el hecho de que la $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructura es uniformizable (pues $\mathbb{T}^2$ no puede ser cociente bajo un grupo de torsión). Las condiciones **1**, **2** y **3** determinan las posibles imagenes de la holonomía en $PSL(2, \mathbb{C})$, además estas condiciones afirman que toda estructura proyectiva compleja en $\mathbb{T}^2$ se puede reducir a una estructura afín compleja. Hasta ahorita tenemos que $H(\mathbb{Z}^2)$

¹Recordemos que la matriz $T_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ determina la transformación $\frac{az+b}{cz+d}$

es de la forma **1**, **2** ó **3**, falta demostrar que grupos de estos definen una $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructura uniformizable en $\mathbb{T}^2$ (es decir, que grupos satisfacen que $Q/\Gamma \cong M$). De la compacidad de M tenemos que el cociente debe ser compacto, de manera que la región de discontinuidad Q (el conjunto donde actúan de forma discontinua) de las transformaciones T_i debe satisfacer que $Q_{\langle T_1, T_2 \rangle}$ sea compacto (región fundamental compacta en Q).

En el caso (1 – I) es claro que el único punto fijo de $\hat{\mathbb{C}}$ es el ∞ , de manera que basta entender la región fundamental determinada por T_2 en $Q = \mathbb{C}$ (pues T_1 es la identidad). Claramente el cociente $Q/\langle T_2 \rangle$ donde $\langle T_2 \rangle = \{T_n(z) \mid T_n(z) = z + nb, n \in \mathbb{Z}\}$, es un cilindro infinito que se forma al pegar las dos rectas que son perpendiculares a la recta determinada por b y pasan por 0 y b , ver dibujo 15. Por lo tanto el cociente no puede ser homeomorfo a $\mathbb{T}^2$. El caso (1 – II) tenemos que el número $a^2 = \lambda$ puede tomar cualquier valor en $\mathbb{C}^*$, claramente los puntos fijos bajo una acción de este tipo son $\{0, \infty\}$ de manera que la región de discontinuidad también es $\mathbb{C}^*$. Supongamos que $|\lambda| \neq 1$, entonces el cociente $Q/\langle T_2 \rangle$ donde $\langle T_2 \rangle = \{T_n(z) \mid T_n(z) = \lambda^n z, n \in \mathbb{Z}\}$, es un toro formado al pegar los círculos $S^1 \cup |\lambda|S^1$ identificados por la acción de $\langle T_2 \rangle$ en $\mathbb{C}^*$, ver dibujo 15. El ejemplo del toro en el capítulo anterior es un caso particular de este tipo de estructuras afines, en este ejemplo del toro tenemos que $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que para pegar los círculos sólo tenemos que dilatar S^1 . Esto no siempre sucede, para pegar las fonteras del anillo $(S^1, |\lambda|S^1)$ que es región fundamental de $\langle \lambda \rangle$ en el caso general ($\lambda \in \mathbb{C}^* \setminus S^1$), tenemos que hacer primero una rotación de $\arg(\lambda)$ en S^1 para después pegarlo con $|\lambda|S^1$.

El caso $|\lambda| = 1$ lo mejor que puede suceder es que el cociente determine una superficie no compacta. Este caso se trata con detalle en (3 – I).

El caso (2 – I) tenemos por hipótesis que $b_1 \neq 0$, podemos suponer que $b \neq 0$ ya que si $b = 0$ regresamos al caso (1 – I). Cuando b_1 y b son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$ (es decir $b_1/b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$), el grupo $\langle T_1, T_2 \rangle = \{T(z) \mid T(z) = z + nb_1 + mb, n, m \in \mathbb{Z}\}$ (reticula en $\mathbb{C}$) determina como región fundamental un paralelogramo con lados b_1, b , los cuales se identifican para formar un toro, ver dibujo 16. Esta es la forma usual de representar un toro complejo [7], ya que esta estructura afín es completa pues $D: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es homeomorfismo. Ver el ejemplo del toro $(*_1)$.

Ahora supongamos que $b_1/b = r \in \mathbb{R}$, para facilitar las cuentas tomaremos que $b_1, b \in \mathbb{R}$. Podemos suponer que r no está en $\mathbb{Z}$, ya que si lo estuviera pasaría $b_1 = rb \Leftrightarrow nb_1 = nr b \Leftrightarrow \langle b \rangle \subset \langle b_1 \rangle$ de manera que volvemos al caso (1 – I), entonces b y b_1 son

linealmente independientes sobre $\mathbb{Z}$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $b_1 = 1$ por lo tanto $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. No pueden existir cuatro enteros $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ distintos entre sí tales que $m+nb = p+qb$, ya que de lo contrario tenemos que $b = (m-p)/(q-n)$ lo cual no puede ser. Por lo tanto el conjunto $\mathcal{T} = \{T'(z) \in \langle T_1, T_2 \rangle \mid T'(z) = nb - [nb] + 2, n, m \in \mathbb{Z}\}^2$ (combinaciones lineales que caen en el intervalo $[2, 3]$) tiene una infinidad de elementos, por la forma de construir $\mathcal{T}$ es muy claro que $\mathcal{T} \subset \{T \in \langle T_1, T_2 \rangle \mid T(K) \cap K \neq \emptyset\}$ donde $K = [1, 4]$ es compacto. De esta manera vemos que la acción del grupo $\langle T_1, T_2 \rangle$ en $\mathbb{C}^*$ no es discontinua, por lo que una estructura afín de este tipo no podría ser uniformizable (pues el cociente ni siquiera es variedad, ver apéndice).

En el caso $(3 - I)$ podemos suponer que $a_1 \neq \pm 1$ ó $a \neq \pm 1$ pues en caso contrario volvemos al caso $(1 - II)$. Supongamos que $|a| \neq 1$ y $|a_1| = 1$, se sigue del caso $(1 - II)$ que el grupo $\langle a \rangle$ tiene el anillo $(S^1, |b|S^1)$ como región fundamental. Los números reales $\alpha = \arg(a_1)$ y 2π deben ser linealmente dependientes sobre $\mathbb{Q}$, de lo contrario el subgrupo $\langle a_1, 1 \rangle$ de $\langle a_1, a \rangle$ es de orden infinito y por lo tanto no actúa discontinuamente en $\mathbb{C}^*$, basta considerar $K = [S^1, S^2]$ el anillo delimitado por estos círculos (pues aunque rote demasiado nunca voy a obtener algún múltiplo de $2n\pi$). Si $\alpha q/p = 2\pi$ con $q, p \in \mathbb{Z}$ tenemos que $q\alpha = 2p\pi$ por lo que el subgrupo $\langle a_1, 1 \rangle$ es de torsión, i.e. determina una cuñita $R \subset \mathbb{C}^*$ como región fundamental, ver dibujo 17. Para este caso la acción del grupo $\langle a_1, a \rangle$ tiene como región fundametal la intersección de R con el anillo antes mencionado, ver dibujo 17. El lector debe convencerse de que esta región se identifica de manera adecuada para obtener un toro.

Sólo nos falta conciderar los siguientes dos casos.

- Si $|a_1| = |a| = 1$. Por lo mencionado en el párrafo anterior tenemos que los argumentos $\arg(a_1) = \alpha$ y $\arg(a) = \beta$ tienen que ser linealmente dependientes con 2π sobre $\mathbb{Q}$, para que la acción sea discontinua. Si $\alpha p/q = 2\pi$ y $\beta p'/q' = 2\pi$ con $0 \neq p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$, tenemos que $(q'p)\alpha = (p'q)\beta$ de manera que la región fundamental de $\langle a_1, a \rangle$ en este caso debe ser una rebanada R no compacta como la mencionada en el parrafo anterior, la cual al pegarse se convierte en una trompeta infinita, por lo tanto no compacta.

- Si $|a_1| \neq 1 \neq |a|$ entonces cada uno de estos números complejos determina como región fundamental un anillo A_a y A_{a_1} . Por lo tanto la región fundamental en $\mathbb{C}^*$ determndada por la acción del grupo $\langle a_1, a \rangle$ es la intersección de los anillos mencionados $\mathcal{A} = A_a \cap A_{a_1}$.

² $[a]$ denota la parte entera de a .

El anillo $\mathcal{A}$ tiene como frontera los círculos S^1 y dS^1 con $d = \min\{|1 - |a_1||, |1 - |a||\}$, los cuales se identifican como en el dibujo 15 para formar un toro.

Toda esta discusión anterior afirma que cualquier $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructura uniformizable en $\mathbb{T}^2$, puede ser considerada como una estructura afín donde los generadores α, β tienen imagen bajo la holonomía dada por alguna de las formas:

$$g = H(\alpha), h = H(\beta) \text{ entonces } g, h \text{ satisfacen } \begin{cases} \text{si } g(z) = z + c_1, & \text{entonces } h(z) = z + c_2 & (a) \\ \text{si } g'(w) = d_1 w, & \text{entonces } h'(w) = d_2 w & (b) \end{cases}$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, $d_1 d_2 \neq 0$ y $|d_1| \neq 1$ ó $|d_2| \neq 1$. Llamamos estructuras complejas completas a las del tipo (a) y estructuras de similitudes complejas puras a las del tipo (b).

Entre estas representaciones de $\mathbb{T}^2$ con estructura afín podemos encontrar la siguiente relación. Consideremos en $\mathbb{C}$ la proyección cubriente $f(z) = e^z$, para todo $0 \neq t \in \mathbb{C}$ es claro que:

$$e^{tg(z)} = e^{t(z+c_1)} = e^{tc_1} e^{tz} = d'_1 w = g'(w)$$

y análogamente para h . Si variamos $t \in \mathbb{C}$, tenemos que para un $\mathbb{T}^2$ con estructura compleja completa existen tantas estructuras de similitudes complejas puras como números complejos (asignando $t = 0$ a la representación g, h).

Esto demuestra que $\mathbb{T}^2$ no puede admitir estructura hiperbólica, pues toda $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructura es una estructura afín.

3.- Superficies de género mayor que 1.

En esta sección se mencionan sin demostrar algunos resultados que afirman que una estructura proyectiva compleja en una superficie de género mayor que uno, es uniformizable si y sólo si $D(\tilde{M}) \neq \hat{\mathbb{C}}$. Estos resultados ayudaran a dar una comparación entre las dos $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructuras otorgadas a la superficie de género dos en los ejemplos 4 y 6.

Teorema de Gunning [14]: Sea M una superficie compacta de género mayor que 1 con estructura proyectiva compleja. Sea $D: \tilde{M} \rightarrow Q \subset \hat{\mathbb{C}}$ la aplicación desarrolladora de M .

Entonces D es proyección cubriente si Q es conformemente equivalente al disco unitario ó $\hat{\mathbb{C}} \setminus Q$ tiene una infinidad de componentes conexas.

Notar que este resultado afirma que la aplicación desarrolladora es cubierta sobre su imagen si y sólo si no es suprayectiva, la implicación $\Leftarrow$ es topológica ya que no puede ser que $\hat{\mathbb{C}}$ sea cubierta universal de una superficie de género mayor que 1. Irwin Kra [9] probó que el hecho de que la aplicación desarrolladora no sea suprayectiva es equivalente a que la imagen de la holonomía actúe de forma discontinua en Q . Estos dos resultados afirman que toda $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -superficie de género mayor que 1 donde la aplicación desarrolladora no es suprayectiva, es uniformizable pues D es cubierta sobre $\mathbb{Q}$ y además $\Gamma < G$ actúa de forma libre y discontinua en Q .

Notar que toda $(Aut(\Delta), \Delta)$ -estructura puede ser considerada como una $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructura pues los cambios de coordenadas son transformaciones de Möbius que fijan a Δ . Por lo tanto la aplicación desarrolladora D_1 de la $(Aut(\Delta), \Delta)$ -estructura en la superficie de género 2, otorgada en el ejemplo 4 claramente no cubre a todo $\hat{\mathbb{C}}$, de hecho la imagen está contenida en Δ . La aplicación desarrolladora D_2 de la $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructura otorgada en el ejemplo 6 tampoco cubre a todo $\hat{\mathbb{C}}$, como se menciona en el ejemplo 6; el conjunto $\mathfrak{C}$ que no se cubre es un conjunto de Cantor, por lo tanto $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{Q}$ tiene una infinidad de componenetes conexas. Observar que los resultados antes mencionados afirman que estas dos estructuras en la superficie de género 2 son uniformizables, más no pueden ser $(\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -isomorfas pues si consideramos grupos Γ_4 y Γ_6 como subgrupos de $PSL(2, \mathbb{R})$ actuando en $\hat{\mathbb{C}}$ observamos que el conjunto de puntos límite es diferente, ya que en el caso Γ_4 es S^1 y en Γ_6 el conjunto $\mathfrak{C}$ es un conjunto de Cantor.

APÉNDICE A

¿Cuándo un cociente es variedad?

En este apéndice estudiaremos las propiedades que debe de satisfacer la acción de un grupo G en X , para que el espacio cociente X/G sea “bonito”, bonito en el sentido que admite una estructura de variedad. Para este apéndice se recomienda [15] como referencia.

Sea G un grupo que actúa por homeomorfismos en un espacio topológico X , recordemos que el espacio cociente se define como el conjunto de todas las órbitas de los elementos de X bajo la acción del grupo G , es decir:

$$X/G = \{Gx \mid x \in X\}$$

este cociente siempre es un espacio topológico (sólo pedimos acción efectiva¹) con la topología definida de manera que un conjunto $U \subset X/G$ es abierto si y sólo si el conjunto $p^{-1}(U) \subset X$ es abierto, i.e. hacemos continua a proyección de paso al cociente p (de hecho está es la mayor topología que la hace continua).

Queremos encontrar la analogía en variedades, es decir, nos gustaría saber como tiene que ser la acción del grupo G sobre la variedad X para que el cociente admita estructura de variedad. Para que esto suceda tendremos que agregar ciertas hipótesis sobre la acción de G . A continuación se mencionan algunos tipos de acciones de grupos en conjuntos:

(1) La acción es libre si ningún elemento de X queda fijo bajo la acción de cualquier elemento de G , distinto de la identidad.

(2) La acción es herrante si todo $x \in X$ tiene una vecindad U tal que el conjunto $\{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\}$ es finito.

(3) La acción es discontinua (también llamada acción propiamente discontinua) si para todo compacto $K \subset X$ el conjunto $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ es finito.

¹El único elemento que actúa de forma trivial sea el neutro de G

* **Ejemplo:** *Un ejemplo de una acción libre y herrante en una superficie.*

Sea $\Gamma < GL(2, \mathbb{R})$ el grupo de difeomorfismos que actúa en $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ generado por $(x, y) \mapsto (2x, y/2)$ (claramente Γ es isomorfo a $\mathbb{Z}$). No es difícil notar que la franja dada por $1 \leq y < 2 \subset \mathbb{R}^2$ sólo tiene un representante de la acción de Γ en H^+ (el semiplano superior), análogamente para H^- . Por lo tanto observemos que la acción de Γ tiene como región fundamental:

$$W_1 \cup W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |y| \leq 2\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| \leq 2\}$$

pues claramente W_2 es una región fundamental de la acción en el eje real, ver dibujo 18. Notar que en el cociente $W = \mathbb{C}^*/\Gamma$ se identifican las rectas que delimitan las franjas en W_1 y los extremos de los intervalos en W_2 .

El espacio cociente W es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Esto es muy claro para discos abiertos contenidos en W_1 , inclusive para discos centrados en las rectas frontera de W_1 , pues en el cociente los abiertos se ven como dos mitades de disco pegandose, ver dibujo 18. Para convencernos de que es cierto en discos abiertos centrados en algún punto $p \in W_2$, debemos notar que los puntos vecinos de p con coordenada $y \neq 0$ tienen un representante en alguna de las franjas de la región W_1 , ver el siguiente dibujo.

En este ejemplo el espacio cociente W no es Hausdorff, pues no se pueden separar los puntos de W_2 con los de $W_{1_y} = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |y| \leq 2\}$, ya que toda bola $B_\epsilon(p)$ vecindad de algún punto $p \in W_{1_y}$ tiene representantes tan cercanos como se quiera a puntos de W_2 , ver dibujo 18. Por lo tanto el espacio W no puede ser variedad aunque lo pareciera.

En este caso la acción de Γ en X claramente es libre y herrante (el lector debe convencerse de ello), más no discontinua pues el conjunto $\{g \in G \mid g\bar{\Delta} \cap \bar{\Delta} \neq \emptyset\}$ (con $\bar{\Delta} \subset \mathbb{C}^*$ el disco unitario cerrado, que es compacto) no es finito. En general si tenemos un grupo que actúa de forma libre y herrante en una variedad X , entonces el cociente es localmente homeomorfo a X pero talvez no sea Hausdorff, la prueba de esto se puede ver más adelante. De fomra que la acción libre y herrante no es suficiente para nuestros propósitos. Las características que debe satisfacer la acción de G en alguna variedad, para que el cociente admita estructura de variedad se muestran en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 0.1. *Sea G un grupo que actúa por homeomorfismos en una variedad X . Entonces el espacio cociente es una variedad con $p: X \rightarrow X/G$ proyección cubriente si y sólo si G actúa de forma libre y discontinua.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Leftarrow$) Supongamos que G actúa de forma libre y discontinua. Sean $x \in X$ y $K \subset X$ una vecindad compacta de x . Sea $U' \subset K$ un abierto que contiene a x , entonces el abierto U' intersecta sólo a un número finito de sus trasladados, es decir, el conjunto $\{g \in G \mid U' \cap gU' \neq \emptyset\}$ consta de $n \in \mathbb{N}$ elementos, $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. En cada uno de los puntos $g_i(x)$, con $0 \leq i \leq n$ tal que g_0 es el neutro de G (ya que la acción es libre g_0 es el único elemento que satisface $g_0(x) = x$), consideremos el abierto $V_i = \bigcap_{j \neq i} W_j$ donde cada W_j es una vecindad abierta de $g_i(x)$ que se utiliza (junto con algún abierto W'_j) para separar a $g_i(x)$ con $g_j(x)$ con abertos disjuntos ($W_j \cap W'_j = \emptyset$), esto se puede hacer gracias a que la variedad X es un espacio Hausdorff. Entonces sea

$$U = \bigcap_{i=0}^n g_i^{-1} V_i \cap U'.$$

Claramente U es una vecindad abierta de x (pues es intersección finita de abertos) que además satisface:

- Para ningún $0 < i \leq n$, el punto $g_i(x) \in U$ (pues el abierto V_0 satisface esto).
- $g_i U \cap g_j U = \emptyset$ si $i \neq j$, esto se debe a la construcción de los abertos V_i .

De forma que el abierto U no intersecta a ninguno de sus trasladados con elementos de G . Por lo tanto la función $p|_U$ es un homeomorfismo. Si realizamos esto para cada $x \in X$ vemos que la función p es homeomorfismo local suprayectivo además de función de paso al cociente, por lo tanto es proyección cubriente. *Notar que los pasos realizados hasta aquí se pueden hacer si la acción sólo es herrante, esto demuestra la afirmación antes mencionada.*

Para demostrar que el cociente X/G es Hausdorff. Sean $x, y \in X$ puntos en distintas órbitas (i.e. no existe $g \in G$ tal que $y = g(x)$). Sean $K'_x \subset U_x$ y $K'_y \subset U_y$ vecindades compactas disjuntas de x y y , donde U_x, U_y son vecindades abiertas como la construida en el parrafo anterior, entonces la vecindad K'_x no contienen a ningún trasladado de x y análogamente para K'_y . La unión $K'_x \cup K'_y$ claramente es compacta además de ser vecindad de x y de y , por la discontinuidad de la acción, K'_x sólo puede contener un número finito de

$g(y)$, los cuales puedo separar de x con un procedimiento análogo al realizado en el párrafo anterior². Sea K_x la vecindad compacta de x que no contiene a ningún trasladado de y , análogamente construimos K_y . Por lo tanto $K = K_x \cup K_y$ es la unión de dos vecindades compactas disjuntas de x y y que no contienen a ningún punto $g(x)$ ó $g(y)$. De manera que el conjunto $K \setminus \bigcup_{g \neq 1} gK$ es todavía la unión de vecindades disjuntas, por lo tanto bajo p van a dar a vecindades de $Gx, Gy \in X/G$ que serán disjuntas.

($\Rightarrow$) Supongamos que el cociente es variedad con proyección cubriente p . Sean $x, y \in X$ y $p(x), p(y) \in X/G$ sus proyecciones. Existen dos casos:

Caso 1: Si $y = g(x)$ para algún $g \in G$. Entonces existe abierto conexo $V \subset X/G$ vecindad del punto $p(x) = p(y)$ que está cubierto parejamente por p . Por lo tanto en este caso existen dos componentes conexas $U, g_0U \subset p^{-1}(V) \subset X$ que contienen a x y y respectivamente.

Caso 2: Los puntos y, x pertenecen a distintas órbitas. En este caso $p(x) \neq p(y)$, por lo tanto existen abiertos conexos $V_x, V_y \subset X/G$ cubiertos parejamente por p que además separan a $p(x)$ y $p(y)$ (ya que el cociente es Hausdorff). Entonces las imágenes inversas son disjuntas ($p^{-1}V_x \cap p^{-1}V_y = \emptyset$), de forma que si tomo dos componentes $U_x \subset p^{-1}V_x$ y $U_y \subset p^{-1}V_y$ que contienen a x y y respectivamente, claramente tienen que ser disjuntas.

Estos dos casos muestran cómo para cada par de puntos $x, y \in X$ podemos encontrar vecindades abiertas U_x, U_y , que satisfacen $gU_x \cap U_y \neq \emptyset$ para a lo más un $g \in G$.

Sea $K \subset X$ un compacto. Para cada par de puntos en K tomamos vecindades como las antes mencionadas. De esta manera obtenemos una cubierta abierta de K de la cual extraemos subcubierta finita $\{U_j\}_{j \in J}$. Como cada U_i satisface que $gU_i \cap U_j \neq \emptyset$ para a lo más un $g \in G$, entonces el compacto K satisface que el conjunto $\{g \in G \mid g(K) \cap K\}$ es finito. Por lo tanto G actúa de forma libre y discontinua en X . $\square$

²Con acciones herrantes este paso no se puede hacer.

Bibliografía.

- [1] A. Verjovsky, Introducción a la geometría y variedades hiperbólicas, Sexta escuela latinoamericana de variedades hiperbólicas, IPN 1982.
- [2] A. Illanes, La caprichosa forma de globión, La ciencia para todos.
- [3] B. Mazur, Number theory as Gadfly, Harvard University.
- [4] D. B. A. Epstein, Geometric structures on manifolds, Mathematics Institute University of Warwick Coventry, CV4 7AL United Kingdom.
- [5] D. Mumford & C. Series & D. Wright, Indra's Pearl The vision of Felix Klein, Cambridge University Press 2002.
- [6] D. Sullivan & W. Thurston, Manifolds with canonical coordinate charts: some examples, *L'Enseignement Mathématique*, *t*,29(1983), *p*,15 – 25.
- [7] G. A. Jones & D. Singerman, Complex functions an algebraic and geometric viewpoint, Cambridge University, Press 1987.
- [8] G. K. Francis & J.R. Weeks, Conway's zip proof, [http:// new.math.uiuc.edu/zipproof](http://new.math.uiuc.edu/zipproof), 2000.
- [9] I. Kra, On affine and projective structures on Riemann surfaces, *J. Annals Mathematics*, 22 (1969), 285 – 298.
- [10] J. H. Hubbard, Teichmüller theory and application to geometry, topology and dynamics, Matrix Edition.
- [11] J. Milnor, Analytic proofs of the “hairy ball theorem and the Brouwer fixed point theorem”, *The American mathematical Monthly*, Volume 85(1978), pp. 521 – 524.
- [12] J. Milnor, Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds, *Notes of the AMS*, Volume 50, Number 10.
- [13] J. Milnor & J. D. Stasheff, Characteristic classes, *Annals of Mathematics Studies*, Princeton University, Press #76, Appendix C, págs. 289 – 314.
- [14] R. C. Gunning, Lectures on Riemann surfaces, Princeton mathematical notes, 1996.

- [15] R. C. Gunning, Special coordinate coverings of Riemann surfaces, *Mathematical Annalen*, 170, 67 – 86(1967).
- [16] T. Yau, Uniformization of geometric structures. *Proceedings of symposia in pure Mathematics*, Volume 48(1988).
- [17] W. Abikoff, The uniformization theorem, *The American Mathematical Monthly*, Volume 88, 1981.
- [18] W. M. Goldman, What is a projective structure, *Notices of the AMS*, Volume 54, Number 1.
- [19] W. P. Thurston, *Three dimensional geometry and topology*, Princeton University, Press 1997.
- [20] W. P. Thurston, Three dimensional manifolds, Klenian groups and hiperbolic geometry, *Bulletin of the American mathematical society*, Volume 6, Number 3, May 1982.
- [21] W. S. Massey, *Algebraic topology: An introduction*, Springer-Verlang, New York, 1977.