

Facultad de Ciencias Física-Matemáticas

"Mat. Luis Manuel Rivera Gutierrez"

U.M.S.N.H. Morelia, México.

Tesis de licenciatura de Sebastián Ramos Durán

Tema: Aproximación por polinomios

Asesores de tesis:

Dr. Fernando Garibay y Dr. Rigoberto Vera

Enero de 2008

Agradezco a mi esposa Martha quien siempre me apoyó en este proyecto.

Agradezco a mis maestros de la escuela de Física y Matemáticas, en particular a los Doctores: Rigoberto Vera y Fernando Garibay, quienes fueron mis asesores en esta tesis y en general a la Universidad Michoacana por su legado de universalidad en la enseñanza de la que fui beneficiado.

Sebastián Ramos Durán

Observaciones que no implican agregarse:

En la página 3 actual eliminar la parte que se refiere a contenidos y agregar la siguiente tabla

Contenidos

Capítulo 1	Aproximación en espacios normados.	Páginas 6-18
Capítulo 2	Aproximación Uniforme	Páginas 19-27
Capítulo 3	Caracterización de una mejor aproximación	Páginas 28-40
Capítulo 4	Aproximación en un conjunto finito de puntos	Páginas 41-51

Agregar en página 51:

Error en página 38 actual en el primer párrafo debe hacer referencia a las a las ecuaciones (41) y (45)

Introducción

Aproximación por polinomios

Contenidos:

1. Aproximación en espacios normados
2. Aproximación uniforme
3. Caracterización de una mejor aproximación
4. Aproximación en un conjunto finito de puntos

Dado un $x \in X$ y un subconjunto W de X . Queremos hallar un $y \in W$ tal que y sea lo más cercano posible a x . Planteado así el problema no tiene mucho futuro de abordarse pues de inmediato surgen las preguntas: El conjunto X que características tiene, que características tiene W . ¿Qué significa que x sea cercano o lejano a y ?. Reducimos pues nuestro estudio a X en espacios lineales normados.

Surge después el cuestionamiento sobre si tal y existe, y si existe qué tantos son o si es único.

En el capítulo 2, una vez resuelto el problema de la existencia y la unicidad nos interesa la forma en qué nos acercamos a encontrar la mejor aproximación a $x \in X$ con elementos obtenidos de W , y particularmente nos interesa el acercamiento de carácter uniforme. Si X es un espacio de funciones continuas en un intervalo cerrado, Nos interesa como podemos acercarnos uniformemente por medio de otras funciones continuas muy particulares: los polinomios. Veremos dos casos de aproximación uniforme.

En el capítulo 3 caracterizaremos la solución aunque eso no implica que encontrarla sea trivial. Aún ya caracterizada damos un ejemplo concreto: dada la función x^{n+1} hallar el polinomio de grado menor que mejor se le aproxima y este caso aún más particular: para $n=9$.

Termino finalmente, usando la caracterización del capítulo tres dando un subconjunto finito de puntos en el intervalo cerrado donde está definida la función. El problema ya no parece ser difícil teóricamente hablando, sin embargo el cálculo se vuelve enormemente complicado en la medida que crece el conjunto finito dado. En seguida algunas notas históricas.

El protagonista histórico de la teoría de aproximación es, sin duda, Karl Weierstrass es por eso que incluyo algunas notas históricas sobre este ilustre matemático.

Karl Wilhem Theodor Weierstrass nació el 31 de octubre de 1815 en Ostenfelde en una familia liberal católica. Fue el mayor de cuatro hijos. Fue también un buen estudiante. Fue enviado por su padre a la Universidad de Bonn a estudiar comercio y leyes. Al parecer su padre tenía en mente un puesto de gobierno para su primogénito. Al no gustarle ni leyes ni comercio, entonces Weierstrass regresó, desolado, a su hogar. Cervezas y duelos de esgrima parecen haber sido su prioridad. El Joven Weierstrass ya en su hogar y después de un periodo de "descanso", fue enviado a la academia de Münster donde obtuvo su certificado de profesor. En la academia, y bajo el tutelaje del profesor C. Gudermann, se interesó vivamente por las funciones elípticas y las series de potencias. Este interés fue cubriéndolo, llenando la vida de Weierstrass.

En 1841 recibió su título de maestro y en los siguientes 13 años fungió como tal: 6 años en un *pregymnasium* en el pueblo de Deutsch-Krone al ; y los otros 7 años en un gimnasio en Braunsberg, al oeste y al este de Prusia respectivamente. Durante este periodo él continuo aprendiendo matemáticas, principalmente estudiando el trabajo de Abel. También publicó algunos artículos. No obstante estos aparecieron en los periódicos escolares donde no pudo ser apreciado o comprendido por el medio. El trabajo de Weierstrass, de este periodo, contiene 7 artículos, el primero de los cuales *On the development of modular functions*, de 49 páginas, fue escrito en 1840.

En 1854 Weierstrass publicó el artículo *On the theory of Abelian functions* in *Crelle's Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* causando sensación dentro de la comunidad matemática. Él tenía 39 años era maestro de escuela y sin pertenecer a la comunidad matemática que ni enterada estaba de Weierstrass, y él había escrito una obra maestra y profunda dentro del área correspondiente. Fue reconocido de inmediato. Le fue dado un doctorado por la Universidad de Königsberg, promovido por el ministro de educación de Prusia. Durante diez años tuvo algunos trabajos, ya en educación superior, un tanto eventuales y desde 1864 fue profesor de Matemáticas de la Universidad de Berlin y miembro de la Academia de Berlin.

Las áreas de matemáticas en las cuales Weierstrass trabajó y contribuyó incluyen funciones elípticas, funciones Abelianas, el Cálculo de Variaciones, la teoría de funciones analíticas, la teoría de las funciones periódicas, formas bilineales y cuadráticas, ecuaciones diferenciales y teoría de funciones reales.

Los estudiantes actuales de cálculo conocen a Weierstrass por el teorema de Bolzano-Weierstrass, los dos teoremas de Weierstrass que establecen que cada función continua real en un intervalo cerrado y finito es acotada y tiene su máximo y mínimo, y la M-test para

convergencia de series infinitas de funciones. Lo que los estudiantes generalmente no saben es que Weierstrass también formuló la definición con (ε, δ) de continuidad en un punto. Weierstrass fue definitivamente un líder del rigor matemático; la construcción de una función continua en todas partes y diferenciable en ninguna por parte de Bernard Placidus Johann Bolzano (1781-1848) y posteriormente Weierstrass da un ejemplo en el Volumen 2 de su *Mathematische Werke* publicado en 1895. Weierstrass prueba que la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x \pi)$$

es continua, pero no es diferenciable en ninguna parte, si $b \in (0, 1)$, a es un entero impar, y $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. Este ejemplo contribuye significativamente a que el rigor en el análisis sea definitivamente el rumbo de la Matemática. Matemáticos más modernos han dado otras funciones que son continuas y no son diferenciables en ningún lado por ejemplo Spivak nos ofrece la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \{10^n x\}$$

En el capítulo 2 de esta tesis incluyó dos pruebas del teorema de Weierstrass, una de ellas dada por L. Féjer (1880-1959) quien fue un gran alumno de Weierstrass. Este teorema es parte de un artículo que le valió como su tesis doctoral en 1902 de la Universidad de Budapest.

Capítulo 1. Aproximación en espacios normados.

Hay ciertas generalidades sobre la teoría de aproximación que serán útiles en un estudio posterior y más detallado de las técnicas específicas de aproximación. Resulta natural, para estos resultados generales, restringirse a un espacio lineal normado.

Espacios normados. Un espacio V lineal es normado si existe una norma $\|x\|$ para $x \in V$ tal que

$$\begin{aligned} i) \quad \|x\| &\geq 0 \quad x \in V \\ ii) \quad \|x\| &= 0 \iff x = 0 \\ iii) \quad \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in V \quad y \quad \text{para cada escalar } \lambda \\ iv) \quad \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V \quad (\text{desigualdad triangular}) \end{aligned} \tag{1}$$

La norma dada da una noción de distancia en V . Si $w, v \in V$, entonces la distancia de w a v (o de v a w) es $\|v - w\|$.

Ahora sea W un subconjunto de V , entonces, dado $v \in V$, el problema de aproximación es: Encontrar un $w \in W$ cuya distancia a v sea mínima; esto es, encontrar $w^* \in W$ tal que $\|v - w\|$ sea mínima para $w = w^*$. A tal w^* lo llamaremos una mejor aproximación a v fuera de W . Los problemas surgen inmediatamente. ¿Existe tal w^* ? Si lo hay, ¿habrá solamente uno?. Como veremos, muchos de los estudios y métodos usados de aproximación se deben a este problema general. Debemos evitar duplicación de esfuerzos obteniendo algunos resultados en la situación general.

Ejercicio 1.1. Demostrar que $\|\cdot\|$ es una función continua en cada punto v_0 de V en el sentido que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|v - v_0\| < \delta$ entonces $|\|v\| - \|v_0\|| < \varepsilon$.

Demostración.

Tomemos $\delta = \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \|v - v_0\| &< \delta & \|v_0 - v\| &< \delta \text{ así que} \\ \|v\| - \|v_0\| &< \|v - v_0\| < \delta \quad \text{y} \quad \|v_0\| - \|v\| &< \|v_0 - v\| < \delta \text{ por lo que} \\ |\|v\| - \|v_0\|| &< \|v - v_0\| < \delta \quad \text{y como } \delta = \varepsilon \text{ tenemos que } |\|v\| - \|v_0\|| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

ε .

Si V es un espacio lineal normado y W un subespacio de dimensión finita de V , entonces podemos considerar la aplicación continua $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, en base al ejercicio 1.1 y así mismo podemos considerar la métrica $d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall \quad x, y \in V$ y en $\mathbb{R}$ la métrica usual. Tenemos pues una aplicación continua de un espacio métrico en un otro espacio métrico.

Por otra parte hay un teorema de continuidad que dice:

Supongamos que f es una aplicación continua de un espacio métrico compacto X en un espacio métrico Y . entonces $f(X)$ es compacto¹. Con estas breves observaciones estamos listos para probar el siguiente resultado:

Teorema 1.1. Si V es un espacio lineal normado y W un subespacio de dimensión finita de V , entonces, dado $v \in V$, existe $w^* \in W$ tal que

$$\|v - w^*\| \leq \|v - w\| \quad \forall w \in W.$$

Demostración

Habría quizá $w \in W$ tal que

i) $\|v\| \leq \|v - w\|$ y otros tales que ii) $\|v - w\| \leq \|v\|$

La pregunta es ¿dónde está w^* ?

Si w^* corresponde al caso i) entonces $w^* = 0$ y obsérvese que no necesariamente único, al respecto no podemos afirmar nada y sólo podemos asegurar la existencia de tal w^* .

Si w^* no es cero entonces corresponde, quizá, al caso ii) y al ser v arbitrario pero fijo entonces $\|v - w\| \leq \|v\| = M$ y como consecuencia $\|w\|$ está acotado.

$$\|w\| = \|-w\| = \|(v - w) + (-v)\| \leq \|v - w\| + \|v\| \leq 2M$$

Con esto hemos construido un conjunto compacto $B_{2M}(v)$; la bola con centro en v y radio $2M$.

Ahora precisemos la aplicación continua de la bola en R

$$\|\cdot\| : B_{2M}(v) \rightarrow R$$

Tenemos pues la aplicación continua de un espacio métrico compacto en un métrico por lo que la imagen de tal aplicación será también un compacto, es decir $\|\cdot\|(B_{2M}(v))$ es un compacto y por Teorema de Heine Borel es cerrado y acotado así que tiene un mínimo, digamos x .

Consideramos el conjunto $\|\cdot\|^{-1}(x)$ y escogemos un $w^* \in \|\cdot\|^{-1}(x)$.

Hemos pues encontrado el w^* que buscábamos (y no necesariamente único). El teorema está probado.

Nota. El campo de escalares de V pueden ser también los números complejos. La prueba es la misma.

¹Teorema 4.14 Principios de Análisis Matemático segunda edición de Walter Rudin

Ejemplo 1.1

Consideremos el conjunto de funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$, al cual denotaremos por $C[a, b]$, que es un espacio lineal. si $f \in C[a, b]$, definimos la norma en $C[a, b]$ por

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad (2)$$

La norma es llamada la norma uniforme o norma de Chebyshev.

Si $V = C[a, b]$ y sea W el subespacio de dimensión $n + 1$ formado por las funciones $1, x, x^2, \dots, x^n$. O sea que W consiste de todos los polinomios de grado a lo más n . Llamaremos a este particular subespacio P_n , El cual jugará un rol importante más adelante.

Veamos que la norma uniforme es en efecto una norma en un subespacio lineal.

i) $\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \geq 0$. Y también el 0 sólo es posible si $f(x) = 0$ $\forall x \in [a, b]$.

ii) $\|\lambda f\| = \max_{a \leq x \leq b} |\lambda f(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |\lambda| |f(x)| = |\lambda| \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| = |\lambda| \|f\|$

iii) Sean $p = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ y así mismo, $q = \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|$

$$\|f + g\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) + g(x)|$$

Por desigualdad del triángulo en el valor absoluto tenemos

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad \forall x \in [a, b].$$

y por definición de máximo obtenemos

$$|f(x)| + |g(x)| \leq p + q$$

es decir

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) + g(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|$$

o sea que tenemos la desigualdad triangular para la norma uniforme.

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Nótese que la norma uniforme selecciona los valores de x en los cuales la aproximación es la peor, es decir, donde es más grande el error absoluto, y asigna como medida de aproximación estas peores posibilidades y proporciona así límites absolutamente ciertos en el error a expensas de estos límites que tienen que ser bastante grandes y ser válidos en cada punto.

Resaltemos ahora la importancia de que el subespacio W tenga dimensión finita como parte de la hipótesis del teorema 1.1.

Sea $V = C[0, \frac{1}{2}]$ y sea W el subespacio de V que contiene los polinomios de cualquier grado.

Claramente W no es de dimensión finita. Sea $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Deseamos ahora probar que f no tiene una mejor aproximación en el sentido uniforme en $C[0, \frac{1}{2}]$ obtenido de W . Notemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$|f(x) - (1 + x + x^2 + \cdots + x^N)| < \varepsilon, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Entonces, si existiera una mejor aproximación a $f(x)$ obtenido de W , digamos p^* , tendría que satisfacer:

$$\|f - p^*\| = 0$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{1-x} \cong p^*$$

lo cual es imposible.

Supongamos ahora que W es un subespacio de V y sea W^* el conjunto de mejores aproximaciones a dado $v \in V$ obtenidos de W . (El teorema 1.1 da una condición sobre la cual W^* es no vacío). Deseamos probar que W^* es un conjunto convexo. Recordemos que S es un espacio lineal convexo si $s_1, s_2 \in S$ implica que

$$\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 \in S$$

si λ_1 y λ_2 son no negativos y

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

Si S es vacío o consiste de un punto, entonces es claramente convexo.

Teorema 1.2. Si $v \in V$ y W es un subespacio de V , el conjunto de mejores aproximaciones a v obtenido de W , llamado W^* , es convexo.

Prueba. Si W^* es vacío, el teorema es verdadero. Supongamos que $w_1^*, w_2^* \in W^*$; entonces

$$\|v - w_1^*\| = \|v - w_2^*\| = \rho$$

Supongamos que $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$; entonces

$$\begin{aligned} \|v - (\lambda_1 w_1^* + \lambda_2 w_2^*)\| &= \|\lambda_1(v - w_1^*) + \lambda_2(v - w_2^*)\| \\ &\leq \lambda_1 \|v - w_1^*\| + \lambda_2 \|v - w_2^*\| = (\lambda_1 + \lambda_2)\rho = \rho \end{aligned}$$

Así $\lambda_1 w_1^* + \lambda_2 w_2^* \in W^*$, y por lo tanto W^* es convexo. El teorema está probado.

El teorema anterior tiene como consecuencia que, si hay dos distintas mejor aproximaciones obtenidos de W a v , hay un número infinito; y de hecho un número no contable, de mejor aproximaciones.

Para garantizar la unicidad de una mejor aproximación requerimos el concepto de Norma estrictamente convexa: Diremos que V tiene una norma estrictamente convexa si para la bola unitaria

$$B = \{v \mid \|v\| \leq 1\} \text{ se cumple que si } v_1 \neq v_2 \text{ y } v_1, v_2 \in B,$$

entonces

$$\|\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\| < 1 \quad \text{si } \lambda_1, \lambda_2 > 0 \quad \text{y} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

(esto es, la frontera de B no contiene segmentos de línea abiertos). Ahora podemos establecer el teorema de unicidad

Teorema 1.3 Si V tiene una norma estrictamente convexa, entonces dado $v \in V$ tiene a lo más una mejor aproximación obtenido de un subespacio, W , de V .

Prueba

Supongamos que w_1^* y w_2^* son dos distintas mejores aproximaciones a v obtenidos de W . Por teorema 1.2, $\frac{w_1^* + w_2^*}{2}$ es también una mejor aproximación a V de W . Supongamos

$$\|v - w_1^*\| = \|v - w_2^*\| = \rho$$

Ponemos

$$v_1 = (v - w_1^*)/\rho, \quad v_2 = (v - w_2^*)/\rho.$$

Entonces $v_1 \neq v_2$, $\|v_1\| = 1$, $\|v_2\| = 1$ y, entonces la norma en V es estrictamente convexa,

$$\left\| \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 \right\| = \left\| \frac{1}{2\rho}(v - w_1^*) + \frac{1}{2\rho}(v - w_2^*) \right\| = \frac{1}{\rho} \left\| v - \frac{w_1^* + w_2^*}{2} \right\| < 1$$

o

$$\left\| v - \frac{w_1^* + w_2^*}{2} \right\| < \rho$$

Esto contradice la definición de ρ ; por lo tanto, el teorema está probado.

Ahora veamos la importancia para la unicidad en la norma estrictamente convexa.

Lema 1.2. Si $A > 0$ y $B > 0$ y $0 \leq t \leq 1$, entonces

$$A^t B^{1-t} \leq tA + (1-t)B \quad (3)$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $t = 0$ o 1 , o $A = B$.

Demostración.

La segunda derivada de la función $\log(1/x)$ es $1/x^2$ la cual es positiva para x positiva. Ya que $\log(1/x)$ es una función convexa de x para $x > 0$; Esto es, el segmento que une dos puntos de la curva $y = \log(1/x)$ está por encima de la curva. Esto significa que, para $0 \leq t \leq 1$ y $A, B > 0$,

$$\log \frac{1}{tA + (1-t)B} \leq t \log \frac{1}{A} + (1-t) \log \frac{1}{B}$$

y la igualdad se cumple sólo que $t = 0$ o $A = B$. El lema ahora se sigue por exponenciación.

Teorema 1.4. Considérese $C[a, b]$ y la norma

$$\|f\|_p = \left| \int_a^b |f(x)|^p dx \right|^{1/p} \quad (4)$$

Si $p > 1$, entonces la norma es estrictamente convexa.

Demostración

Supongamos que $f_1, f_2 \in C[a, b]$, $f_1 \neq f_2$,

Supongamos también que $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$. Consideremos dos reales positivos λ_1, λ_2 tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Por la desigualdad triangular tenemos que $\|\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2\| \leq 1$. Si sucede la desigualdad estricta el teorema está probado, entonces debemos descartar la igualdad.

Supongamos que si ocurre la igualdad; es decir:

$$\|\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2\| = 1$$

Comencemos con la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} |\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2|^p &= |\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2| |\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2|^{p-1} \\ &\leq \lambda_1 |f_1| |\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2|^{p-1} + \lambda_2 |f_2| |\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2| \end{aligned} \quad (5)$$

Y la igualdad es posible sólo si $f_1(x)f_2(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, ponemos

$$A = |f_1|^p, \quad B = |\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2|^p,$$

y

$$t = \frac{1}{p}$$

Aplicando (3) a estas dos últimas notaciones:

$$|f_1| |\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2|^{p-1} \leq \frac{|f_1|^p}{p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) |\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2|^p \quad (6)$$

Con la igualdad sólo si $|f_1| = |\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2|$, similarmente

$$|f_2| |\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2|^{p-1} \leq \frac{|f_2|^p}{p} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) |\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2|^p \quad (7)$$

Con la igualdad sólo si $|f_2| = |\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2|$. Usando estas desigualdad en (5) e integrando, obtenemos

$$\begin{aligned} 1 = \int_a^b |\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2|^p dx &\leq \frac{\lambda_1}{p} \int_a^b |f_1|^p dx + \frac{\lambda_2}{p} \int_a^b |f_2|^p dx \\ &+ \left(1 - \frac{1}{p}\right) \int_a^b |\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2|^p dx = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la igualdad debe cumplirse en (5), (6) y (7).

Pero la igualdad en (6) y (7) significa que $|f_1| = |f_2|$ y la igualdad en (5) que $f_1 f_2 \geq 0$; se sigue que $f_1 = f_2$ contrario a nuestra suposición. El teorema está probado.

Ejemplos para el caso $p = 1$ referente a la norma de (4) que no es estrictamente convexa ni hay unicidad del mejor aproximante.

Ejemplo 1.2. Sean $f_1 = \frac{3}{2}x^2$, $f_2 = \frac{3}{4}(1 - x^2)$; entonces

$$\int_{-1}^1 |f_1(x)| dx = \int_{-1}^1 |f_2(x)| dx = 1$$

Sin embargo no se cumple la desigualdad estricta que exige la norma estrictamente convexa:

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2} \right| dx = \frac{3}{8} \int_{-1}^1 (1 + x^2) dx = 1$$

Para el siguiente ejemplo es necesario tener el siguiente

Lema 1.3. Si $a \geq 1$ entonces $a + \frac{1}{a} \geq 2$

Prueba

Si $a = 1$. el lema está probado.

Si $a > 1$ entonces $a = 1 + p$ con $p > 0$. Tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} &= \frac{a^2 + 1}{a} = \frac{(1+p)^2 + 1}{1+p} = \frac{1+2p+p^2+1}{1+p} = \frac{2+2p+p^2}{1+p} \\ &= \frac{2+2p}{1+p} + \frac{p^2}{1+p} = \frac{2(1+p)}{1+p} + \frac{p^2}{1+p} = 2 + \frac{p^2}{1+p} > 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3 Sean:

$$V = C[-1, 1], \quad W = \{\lambda x \mid \lambda \in R\}.$$

En V la norma definida en (4) para $p = 1$. Evidentemente $W \subset V$

Sea $v_1(x) = 1$. Es decir $v_1 \in V$

Sea $w \in W$. Ahora calcularemos $d(v_1, w)$.

Veamos 3 casos:

i) $\lambda \geq 1$

ii) $\lambda \leq -1$

iii) $|\lambda| < 1$

El caso i)

$$\begin{aligned} d(v_1, w) &= \int_{-1}^1 |1 - \lambda x| dx = \int_{-1}^{\frac{1}{\lambda}} (1 - \lambda x) dx + \int_{\frac{1}{\lambda}}^1 (\lambda x - 1) dx = \\ &= x \Big|_{-1}^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{\lambda x^2}{2} \Big|_{\frac{1}{\lambda}}^1 + \frac{\lambda x^2}{2} \Big|_{\frac{1}{\lambda}}^1 - x \Big|_{\frac{1}{\lambda}}^1 = \frac{1}{\lambda} + 1 - \frac{1}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2\lambda} - 1 + \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} + \lambda \end{aligned}$$

y por lema 1.3

$$d(v_1, w) \geq 2$$

El caso ii) $\lambda \leq -1$

$$d(v_1, w) = \int_{-1}^{\frac{1}{\lambda}} (\lambda x - 1) dx + \int_{\frac{1}{\lambda}}^1 (1 - \lambda x) dx = -\frac{1}{\lambda} - \lambda$$

ponemos $\beta = -\lambda$ y así tendremos $\beta \geq 1$ y tendremos las mismas condiciones que el caso i), así que:

$$d(v_1, w) = 2$$

Veamos el caso iii) $|\lambda| < 1$. Tendremos:

$$\begin{aligned} d(v_1, w) &= \int_{-1}^1 |1 - \lambda x| dx = \int_{-1}^{\frac{1}{\lambda}} (1 - \lambda x) dx = \\ &= x \Big|_{-1}^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{\lambda x^2}{2} \Big|_{-1}^{\frac{1}{\lambda}} = 1 - (-1) - \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = 2 \end{aligned}$$

Resumiendo:

$$\begin{aligned} d(v_1, w) &> 2 \text{ si } w = \lambda x \text{ para } |\lambda| > 1 \text{ y} \\ d(v_1, w) &= 2 \text{ si } w = \lambda x \text{ para } |\lambda| \leq 1 \end{aligned}$$

Tenemos pues un número infinito de elementos de W (no todos) que son un mejor aproximante para v_1 .

$w_1(x) = x$, $w_2(x) = \frac{1}{2}x$, $\dots$, $w_j(x) = \frac{1}{j}x$
sólo por mencionar algunos.

Ejemplo 1.4. Sea $V = C[0, 1]$ y tomamos la norma uniforme sobre V .

Sean $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$; entonces $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$

Pero la desigualdad estricta que exige la norma estrictamente convexa no se cumple pues $\left\| \frac{f_1 + f_2}{2} \right\| = 1$

Para el siguiente ejemplo vamos hacer algunos comentarios. Consideremos $V = C[a, b]$. $v(x) = mx + d$; $x \in [a, b]$ implica que $v \in V$.

tenemos las dos siguientes consideraciones:

1) $\|v\| = \max\{v(a), v(b)\}$

2) Si ponemos $h(x) = |mx + d|$ entonces $h(x)$ se formará de $v_1(x) = mx + d$ y $v_2(x) = -mx - d$ y $v_1, v_2 \in V$ y entonces por consideración (1) tendremos $\max_{a \leq x \leq b} |h(x)| = \max\{h(a), h(b)\}$.

Ejemplo 1.5. Sea $V = C[-1, 1]$, y sea $v_1(x) = 1$

Evidentemente $v_1 \in V$

Sea $W = \{\lambda(1 + x) \mid \lambda \in R\}$. Sea $w \in W$

Entonces $w(x) = \lambda(1 + x)$ y:

$$d(v_1, w) = \max_{-1 \leq x \leq 1} |1 - \lambda(1 + x)| \quad (8)$$

$$g(x) = |1 - \lambda(1 + x)| \quad (9)$$

obsérvese que g cumple totalmente con la h de la consideración 2); es decir alcanzará su máximo en cualquiera de los extremos del intervalo.

Tendremos 3 casos para λ :

i) para $\lambda \leq -1$

ii) para $\lambda \geq 1$

iii) para $|\lambda| < 1$

Veamos el caso i). $\lambda \leq -1$

para calcular la distancia (8) basta comparar $g(-1)$ y $g(1)$ y debido a las consideraciones 1) y 2) tomar el más grande y ese será precisamente $d(v_i, w)$.

$g(1) = |1 - 2\lambda| \geq 3$ pues $\lambda \leq -1$. Pero $g(-1) = 1$, así que $d(v_1, w) = |1 - 2\lambda| \geq 3$ y la igualdad sólo se cumple para $\lambda = -1$.

Digamos que si $W_1 = \{\lambda(x+1) \mid \lambda \leq -1\}$ y si $w \in \{\lambda(x+1) \mid \lambda \leq -1\}$ entonces el mejor aproximante para v_1 en este subespacio es $w = -(x+1)$ y $d(v_1, W_1) = 3$. Esto no significa que dicho w sea el mejor aproximante para v_1 en W .

Veamos el caso ii) $\lambda \geq 1$

Como en el caso anterior debemos comparar $g(-1)$ y $g(1)$

$g(1) = |1 - 2\lambda| \geq 1$ pues $\lambda \geq 1$, de manera que $g(-1) \leq g(1)$ y

$d(v_1, w) = |1 - 2\lambda| \geq 1$, y la igualdad se cumple para $\lambda = 1$; es decir, hemos encontrado un mejor aproximante:

$$w_1(x) = x + 1 \quad (10)$$

Este probablemente si sea un mejor aproximante de v_1 para W .

Por último el caso iii) $\lambda < |1|$

Si $-1 < \lambda < 0$

encontremos el mínimo para $g(x) = |1 - \lambda(x+1)|$.

$1 - \lambda(x+1) = 0$ entonces $x+1 = \frac{1}{\lambda}$ por lo que

$$x = \frac{1}{\lambda} - 1 = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \quad (11)$$

Entonces $x > 2$, por lo que la rama de la función que nos interesa para el intervalo $[-1, 1]$ es $g(x) = 1 - \lambda(x+1) > 1$, y en este caso es otra vez lo que indica (10) como mejor aproximante.

Si $0 < \lambda \leq 1$

por la condición (11), $x \leq 0$, y por el modo en que estamos definiendo la función $-1 \leq x \leq 0$

entonces $|1 - \lambda(x+1)| \leq 1$

Resumiendo

$$d(v_1, w) = 1 \quad \forall w = \lambda(x+1); \quad 0 < \lambda \leq 1 \quad (12)$$

(12) pues nos dice de un número infinito de mejor aproximantes para v_1 e incluso no numerables.

Otras condiciones para asegurar la unicidad del mejor aproximante.

Podemos restringir aún más nuestros espacios normados y tendremos como ganancia la unicidad del mejor aproximante. Tales espacios serán los espacios de Hilbert. Haciendo un breve recorrido sobre qué son los espacios de Hilbert precisemos lo siguiente.

Un espacio de Banach es un espacio normado que es completo. (E es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente).

Una forma es Hermitiana, $f : E \times E \rightarrow R(o C)$, si:

- $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$.
- $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$
- $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$
- $f(x, \lambda y) = \overline{\lambda} f(x, y)$
- $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$

Problema 1.² Sea f una forma hermitiana en un espacio vectorial E . Entonces se cumple:

$$4f(x, y) = f(x + y, x + y) - f(x - y, x - y)$$

Demostración

$$\begin{aligned} f(x + y, x + y) - f(x - y, x - y) &= \\ f(x, x + y) + f(y, x + y) - f(x, x - y) + f(y, x - y) &= \\ f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) &= \\ -f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) - f(y, y) &= 4f(x, y). \end{aligned}$$

Puntualización para llegar a los espacios de Hilbert

- Un par de vectores x, y de un espacio vectorial E es ortogonal con respecto a una forma hermitiana f en E si $f(x, y) = 0$.
- Un vector x que es ortogonal a sí mismo; es decir $f(x, x) = 0$, es isótropo con respecto a f .
- Sea E espacio vectorial. Para cada $M \subset E$, el conjunto Y de vectores que son ortogonales a todos los vectores $x \in M$ es un sub-espacio vectorial de E que se dice que es ortogonal a M con respecto a f .
- Puede ocurrir que $\forall x \in E$ exista $a \neq 0$ tal que $f(x, a) = 0$. En tal caso se dice la forma f es degenerada.

El producto escalar es una forma hermitiana no degenerada si satisface las condiciones arriba mencionadas sobre la forma hermitiana y :³

²página 118 "elementos de análisis moderno Diudonne". Editorial reverté

³Serge Lang Algebra linear página 116

Además si satisface la condición:

Si $v \in V$, and $\langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in V$, entonces $v = 0$.

Espacios de Hilbert

Definición: Se dice que una forma f en un espacio vectorial E es positiva⁴ si $f(x, x) \geq 0$ para cada $x \in E$.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Si f es una forma hermitiana positiva entonces

$$|f(x, y)|^2 \leq f(x, x)f(y, y)$$

para cada par de vectores $x, y \in E$.

Hay un teorema que nos da las condiciones necesarias y suficientes para que una forma hermitiana sea no degenerada:⁵ Para que una forma hermitiana f en E sea no degenerada, es condición necesaria y suficiente que el único vector isótropo para f sea el 0; es decir que $f(x, x) > 0 \ \forall x \neq 0 \in E$.

Definición. Un espacio Prehilbertiano es un espacio vectorial E con una forma hermitiana positiva no-degenerada en E .

Estamos preparados para ver el:

Teorema 1.5. Sea V un espacio real de Hilbert y $W \subset V$ tal que $W \neq \emptyset$ ⁶ y es además cerrado y convexo. Entonces para cualquier punto $v \in V$ existe un único $w^* \in W$ tal que

$$\|v - w^*\| \leq \|v - w\| \ \forall w \in W$$

Demostración

Sea $v \in V$ y $v \neq 0$.

Si vemos a V como un espacio métrico entonces podemos considerar la métrica que surge de la norma:

$$d(x, y) = \|x - y\| \ \forall x, y \in V$$

y particularmente consideremos la distancia desde 0 hasta W la cual cumplirá con:

⁴Puede no haber positividad (S. Lang P. 45)

Sea $K=\mathbb{C}$ y $A = 1 + i$. $A \neq 0$ y $A \cdot A = 1 + i^2 = 0$

⁵Diudonné pág. 116

⁶Es bueno precisar que W no es un subespacio vectorial de V

$$d(0, w) \leq d(0, W) \quad \forall w \in W.$$

a partir de esto consideremos la sucesión $\{a_j\}$ con $a_j \in W$ tal que $d(0, a_j) \rightarrow d(0, W)$ es decir; la sucesión que cumple con $\|a_j\| \rightarrow d(0, W)$ la cual siempre cumplirá con

$$d(0, W) \leq \|a_j\| \tag{13}$$

Después de hacer una traslación considero que $v = 0$ y consideramos la siguiente igualdad para espacios de Hilbert:

$$\left\| \frac{1}{2}a_j + \frac{1}{2}a_k \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2}a_j - \frac{1}{2}a_k \right\|^2 = \frac{1}{2} \|a_j\|^2 + \frac{1}{2} \|a_k\|^2$$

despejando $\left\| \frac{1}{2}a_j - \frac{1}{2}a_k \right\|^2 = \frac{1}{4} \|a_j - a_k\|^2$ resulta

$$\frac{1}{4} \|a_j - a_k\|^2 = \frac{1}{2} \|a_j\|^2 + \frac{1}{2} \|a_k\|^2 - \left\| \frac{1}{2}a_j + \frac{1}{2}a_k \right\|^2 \tag{14}$$

y aseguramos que $\frac{1}{2}a_j + \frac{1}{2}a_k \in W$ debido a la convexidad y utilizando (13) y (14) tenemos la desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \|a_j - a_k\|^2 &= \frac{1}{2} \|a_j\|^2 + \frac{1}{2} \|a_k\|^2 - \left\| \frac{1}{2}a_j + \frac{1}{2}a_k \right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|a_j\|^2 + \frac{1}{2} \|a_k\|^2 - d(0, A)^2 \end{aligned} \tag{15}$$

. Vemos que el lado derecho tiende a cero cuando $j, k \rightarrow \infty$. Esto implica que (a_j) es una sucesión de Cauchy, y debe por lo tanto tener un límite en V . El límite no puede depender de la secuencia. Si tomáramos dos sucesiones (a_j) y (b_j) y las entremezclamos, la nueva secuencia $(a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots)$ debería converger por el mismo argumento. Llamaremos al límite $\pi(0)$; por traslación definimos $\pi(v) = w^* \in V$. El teorema está probado.

Capítulo 2. Aproximación uniforme.

En este capítulo estudiaremos la mejor aproximación en la norma uniforme. Discutimos que tan bien las funciones continuas pueden ser aproximadas por polinomios. Veremos dos casos particulares: En el primer caso nos basta que la función sea en un intervalo cerrado y la demostración de hecho construye una solución: por medio de los polinomios de Bernstein; en el otro caso exigiremos la continuidad y que la función sea periódica.

Comenzamos estudiando algunas propiedades básicas de los polinomios de Bernstein.

Polinomios de Bernstein

Sea $h : [0, 1] \rightarrow R$ una función cualquiera pero acotada. Definimos el polinomio de Bernstein de grado $m = 1, 2, \dots$ por

$$B_m(h; t) = \sum_{k=0}^m h\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k} \quad (16)$$

Notemos que $B_m(h; t) \in P_m$ y que es un operador lineal, es decir:

$$B_m(\alpha h; t) = \alpha B_m(h; t) \quad (17)$$

y que

$$B_m(h_1 + h_2; t) = B_m(h_1; t) + B_m(h_2; t) \quad (18)$$

Además, que si $h_1(t) \leq h_2(t) \forall t \in [0, 1]$ entonces

$$B_m(h; t) \leq B_m(h; t) \quad (19)$$

El polinomio está definido para los valores $h(\frac{k}{m})$ $k = 0, 1, \dots, m$

Si $h(t) \geq 0$ Ponemos $h = h_2 - h_1 \geq 0$ y por la linealidad del operador tendremos que $B_m(h; t) \geq 0$.

Supongamos $h(t) = 1$, entonces

$$B_m(1; t) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k} = (t + (1-t))^m = 1 \quad (20)$$

En seguida supongamos que $h(t) = t$; entonces

$$\begin{aligned} B_m(t; t) &= \sum_{k=0}^m \frac{k}{m} \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k} = \\ &\sum_{k=1}^m \frac{k}{m} \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k} \end{aligned} \quad (21)$$

y es fácil ver que

$$\frac{k}{m} \binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} \quad (22)$$

y poniendo $j = k - 1$, obtenemos

$$B_m(t; t) = t \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} t^j (1-t)^{(m-1)-j} = t \quad (23)$$

Finalmente, supongamos que $h(t) = t^2$:

$$\begin{aligned} B_m(t(t - \frac{1}{m}); t) &= \sum_{k=0}^m \frac{k}{m} \frac{k-1}{m} \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k} = \\ &= \sum_{k=2}^m \frac{k}{m} \frac{k-1}{m} \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k} \end{aligned}$$

y utilizando (22) obtenemos

$$\frac{k}{m} \frac{k-1}{m} \binom{m}{k} = (1 - \frac{1}{m}) \binom{m-2}{k-2}$$

y poniendo $j = k - 2$ obtenemos de otra manera

$$B_m(t(t - \frac{1}{m}); t) = (1 - \frac{1}{m}) t^2 \sum_{j=0}^{m-2} \binom{m-2}{j} t^j (1-t)^{m-2-j} = (1 - \frac{1}{m}) t^2$$

y como es un operador lineal se cumple también que:

$$B_m(t(t - \frac{1}{m}); t) = B_m(t^2; t) - \frac{1}{m} B_m(t; t) = B_m(t^2; t) - \frac{t}{m}$$

comparando las dos últimas ecuaciones obtenemos:

$$B_m(t^2; t) = \frac{t}{m} + (1 - \frac{1}{m}) t^2 = t^2 + \frac{1}{m} t(1-t) \quad (24)$$

Aproximación uniforme por medio de polinomios

Si P_n denota el espacio de polinomios de grado a lo más n , entonces el teorema 1.1 asegura que dado $f \in C[a, b]$, existe un $p_n^* \in P_n$ tal que

$$\|f - p_n^*\| \leq \|f - p\| \quad \forall p \in P_n,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma uniforme sobre el intervalo $[a, b]$, esto es,
 $\|g\| = \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|$ para cualquier $g \in [a, b]$.
pongamos

$$E_n(f; [a, b]) = E_n(f) = \|f - p_n^*\|$$

¿Cuál es el comportamiento de $E_n(f)$ cuando $n \rightarrow \infty$?

Mostraremos que $E_n(f) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para cada función $f(x)$ continua en $[a, b]$. Esto es, una función continua en un intervalo de longitud finita puede ser aproximada uniformemente, sin error preasignado, por polinomios. Este resultado es el famoso teorema de aproximación de Weierstrass, que en seguida probamos.

Lema 2.1. Dada $h \in C[0, 1]$ y $\varepsilon > 0$, existe un polinomio, $p(x)$ tal que

$$\|f(x) - p(x)\| < \varepsilon$$

Prueba. Tenemos la siguiente desigualdad

$$|f(x) - B_n(f; x)| \leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (25)$$

Por hipótesis h está acotada, digamos que por M y al ser continua en un compacto es, por lo tanto, uniformemente continua. Sea $\varepsilon > 0$ y la correspondiente $\delta(\varepsilon) > 0$ de la definición de continuidad uniforme de f .

Escogemos n de tal manera que:

$$n \geq \sup \left\{ (\delta(\varepsilon))^{-\frac{1}{4}}, \frac{M^2}{\varepsilon^2} \right\} \quad (26)$$

Ahora vamos a partir la suma de (25) en dos partes:

i) Aquellos sumandos donde $|x - \frac{k}{n}| \leq n^{-\frac{1}{4}} \leq \delta(\varepsilon)$

ii) y aquellos sumandos donde $|x - \frac{k}{n}| \geq n^{-\frac{1}{4}}$

Para el caso i) tendremos que

$$\sum_k \varepsilon \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \varepsilon \sum_k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \varepsilon \quad (27)$$

Para el caso ii) tendremos también que $\frac{1}{(x-k/n)^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Como $x \in I$ entonces se cumple la desigualdad $x(x-1) \leq \frac{1}{4}$. Tomando en cuenta (24) tendremos la siguientes desigualdades

$$\sum_k 2M \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 2M \sum_k \frac{(x-k/n)^2}{(x-k/n)^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2M\sqrt{n} \sum_{k=1}^n (x - k/n)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq 2M\sqrt{n} \left\{ \frac{1}{n} x(1-x) \right\} \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}
\end{aligned} \tag{28}$$

Entonces para alguna n que cumpla (26) y por (27) y (28) tendremos que

$$|f(x) - B_n(f; x)| \leq 2\varepsilon \text{ y podemos asegurar que } \|f(x) - p(x)\| < 2\varepsilon^7$$

Teorema 2.1 Dada $f \in C[a, b]$ continua y $\varepsilon > 0$, existe un polinomio, $p(x)$, tal que

$$\|f(x) - p(x)\| < \varepsilon$$

Definimos $g(x) = f((b-a)t + a)$, $x \in I$ que es continua.

Por lema 2.1 g se puede aproximar uniformemente por polinomios de Bernstein. Esto significa que a partir de cierta n

$$|g(x) - B_n(g; x)| \leq \varepsilon, \quad x \in I \tag{29}$$

Sea $w = (b-a)x + a$, $x \in I$. Es evidente que w recorre el intervalo $[a, b]$; Reescribimos (29) usando w y la función f y nos resulta

$$|f(w) - B_n(f; w)| \leq \varepsilon, \quad w \in [a, b] \tag{30}$$

El teorema está probado.

Otra versión del teorema de Weierstrass

En esta versión consideraremos las funciones $f \in C[a, b]$ donde además $f(a) = f(b)$. Es decir las funciones continuas en el intervalos $[a, b]$ que son $(b-a)$ periódicas. Diremos que $f \in \tilde{C}[a, b]$.

Comencemos por precisar algo sobre los polinomios de Chebyshev

Definición. A los polinomios $\cos k\theta$ donde $x = \cos \theta$ y $0 \leq \theta \leq \pi$, los llamaremos polinomios de Chebyshev de grado k y escribiremos

$$T_k(x) = \cos k\theta, \quad k = 1, 2, \dots,$$

Descripción de los polinomios de Chebyshev

Se puede derivar una relacion de recurrencia notando que

⁷hay un teorema que nos garantiza que una sucesión f_n que converge uniformemente a $f : D \rightarrow R$ que es acotada si y sólo si $\|f_n - f\| \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}T_{n+1}(x) &= \cos(n+1)\theta = \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta \\T_{n-1}(x) &= \cos(n-1)\theta = \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta\end{aligned}$$

Sumando obtenemos:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\cos(n\theta)\cos\theta = 2xT_n(x)$$

es decir:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

con esta fórmula de recurrencia obtenemos fácilmente algunos casos particulares de los polinomios de Chebyshev:

$$T_0(x) = \cos(0\theta) = 1 \text{ y también } T_1(x) = \cos(1 \arccos(x)) = x$$

y así tenemos los primeros diez polinomios de Chebyshev:

$$\begin{aligned}T_0(x) &= 1 \\T_1(x) &= x \\T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1 \\T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x \\T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\T_5(x) &= 2xT_4(x) - T_3(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \\T_6(x) &= 18x^2 - 48x^4 + 32x^6 - 1 \\T_7(x) &= 56x^3 - 7x - 112x^5 + 64x^7 \\T_8(x) &= 160x^4 - 32x^2 - 256x^6 + 128x^8 + 1 \\T_9(x) &= 9x - 120x^3 + 432x^5 - 576x^7 + 256x^9 \\T_{10}(x) &= 50x^2 - 400x^4 + 1120x^6 - 1280x^8 + 512x^{10} - 1\end{aligned}$$

Ahora:

$$\text{Sea } \sigma_0(x) = \frac{1}{2}$$

Y ponemos:

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos mx; \quad m = 1, 2, \dots$$

definimos también

$$G_n(x) = \frac{\sigma_0(x) + \sigma_1(x) + \cdots + \sigma_{n-1}(x)}{n}$$

y haciendo algunos cálculos con los polinomios de Chebyshev

$$G_n(x) = \frac{1}{2n} \frac{1 - \cos nx}{1 - \cos x} = \frac{1}{2n} \left[\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \right]^2$$

para ejemplificar esta último resultado calculemos $G_2(x)$

$G_2(x) = \frac{\sigma_0(x) + \sigma_1(x)}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cos x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} = \frac{1+x}{2}$ pues $\cos x$ corresponde al polinomio $T_1(x) = x$.
y usando la fórmula:

$$G_2(x) = \frac{1}{4} \frac{1 - \cos nx}{1 - \cos x} = \frac{1}{4} \frac{1 - (2x^2 - 1)}{1 - x} = \frac{1}{4} \frac{2(1 - x)(1 + x)}{1 - x} = \frac{1 + x}{2}$$

que es lo que habíamos obtenido.
Además es fácil ver que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G_n(x) dx = 1$$

sea $f \in \tilde{C}[0, 2\pi]$. y sea

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

su serie de Fourier donde los coeficientes están definidos por:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx$$

Sea $s_0(x) = a_0/2$ y

$$s_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

las sumas parciales de la serie de Fourier de f .

Las funciones s_m no necesariamente convergen uniformemente o puntualmente a f cuando $m \rightarrow \infty$. No obstante definamos

$$S_n(x) = \frac{s_0(x) + \cdots + s_{n-1}(x)}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) G_n(y - x) dy$$

particularizando

$$S_3(x) = \frac{s_0 + s_1 + s_2}{3} =$$

$$\frac{\frac{a_0}{2} + \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin x}{3}$$

con algo de paciencia:

$$S_3(x) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{2}{3}(a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \frac{1}{3}(a_2 \cos 2x + b_2 \sin x)$$

Explícitamente las S_n están dadas por

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$\begin{aligned} S_3(x) &= \frac{a_0}{2} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \left(1 - \frac{2}{3}\right) (a_2 \cos 2x + b_2 \sin x) \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{2}{3}(a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \frac{1}{3}(a_2 \cos 2x + b_2 \sin x) \end{aligned}$$

Por último calculemos la integral $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) G_n(y-x) dy$ para el caso $n=3$

$$\begin{aligned} G_3(t) &= \frac{\sigma_1(t) + \sigma_2(t) + \sigma_3(t)}{3} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cos t + \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t}{3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cos t + \frac{1}{3} \cos 2t \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) G_n(y-x) dy &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cos(y-x) + \frac{1}{3} \cos 2(y-x) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) dy + \frac{2}{3} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \cos(y-x) dy + \\ &\quad \frac{1}{3} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \cos 2(y-x) dy \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \cos y \cos x dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \sin y \sin x dy \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \cos 2y \cos 2x + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \sin 2y \sin 2x dy \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{2}{3}(a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \frac{1}{3}(a_2 \cos 2x + b_2 \sin x) \end{aligned}$$

que es lo mismo de las otras formas de hacer el cálculo.

Resta ahora por ver que sorpresivamente los S_n convergen uniformemente a f .

Teorema 2.2. Para cada $f \in \tilde{C}[0, 2\pi]$, los polinomios trigonométricos S_n convergen uniformemente a f .

Demostración
empecemos escribiendo S_n

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) G_n(y-x) dy = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \frac{1 - \cos n(y-x)}{1 - \cos(y-x)} dy$$

ya que $f \in \tilde{C}[0, 2\pi]$, f puede ser considerada uniformemente continua en todo R . Así dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$
supongamos $\delta < \frac{\pi}{2}$
tenemos

$$[S_n(x) - f(x)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(y) - f(x)] G_n(y-x) dy =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{|y-x| < \delta} [f(y) - f(x)] G_n(y-x) dy + \\ \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |y-x| \leq \pi} [f(y) - f(x)] G_n(y-x) dy$$

Estimaremos cada una de estas dos integrales
En $|x-y| < \delta$, tenemos $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Así que

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{|y-x| < \delta} [f(y) - f(x)] G_n(y-x) dy \right| <$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\pi} \int_{|y-x| < \delta} G_n(y-x) dy < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G_n(y-x) dy = \frac{\varepsilon}{2}$$

Hemos usado el hecho de que G_n es no negativa y su integral es 1 sobre el intervalo $[0, 2\pi]$

Para la otra integral:
de la forma explícita de G_n y la desigualdad $|f(y) - f(x)| \leq 2\|f\|$
tenemos

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |y-x| \leq \pi} [f(y) - f(x)] G_n(y-x) dy \right| \leq \frac{2 \|f\|}{2n\pi} \int_{\delta \leq |y-x| \leq \pi} \frac{1 - \cos n(y-x)}{1 - \cos(y-x)} dy$$

Ahora $|1 - \cos n(y-x)| \leq 2$, mientras en $\delta \leq |y-x| \leq \pi$ tenemos $1 - \cos(y-x) \geq 1 - \cos \delta$
así

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |y-x| \leq \pi} [f(y) - f(x)] G_n(y-x) dy \right| \leq \frac{2 \|f\|}{2n\pi} \frac{2}{1 - \cos \delta} 2\pi = \frac{4 \|f\|}{n(1 - \cos \delta)}$$

y para n suficientemente grande

$$\frac{4 \|f\|}{n(1 - \cos \delta)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

así para tal n

$$|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

y con esto terminamos nuestra demostración.

Capítulo 3. Caracterización de una mejor aproximación.

Ahora restringimos nuestro estudio a las propiedades de polinomios, p_n^* , de mejor aproximaciones a una función continua dada $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$. Sea

$$e(x) = f(x) - p_n^*$$

entonces $\|e(x)\| = E_n(f; [a, b])$.

Teorema 3.1. Existen al menos dos puntos $x_1 \neq x_2$ que pertenecen a $[a, b]$ tal que

$$|e(x_1)| = |e(x_2)| = E_n(f; [a, b]) \quad (31)$$

y

$$e(x_1) = -e(x_2) \quad (32)$$

Demostración:

La curva continua $y = e(x)$ está entre las líneas $y = \pm E_n(f)$ para $a \leq x \leq b$ y toca al menos alguna de estas líneas. Deseamos probar que toca a ambas.

Supongamos que no toca la línea $y = -E_n(f)$

Entonces debemos aceptar que

$$\min_{a \leq x \leq b} e(x) = m > -E_n(f)$$

tomemos $c = \frac{E_n(f) + m}{2} > 0$

Sea $q_n = p_n^* + c$. Tendremos que

$$f - q_n = f - (p_n^* + c) = f - p_n^* - c = e(x) - c$$

y despejando m obtendremos $m = 2c - E_n(f)$

entonces $m - c = 2c - E_n(f) - c = c - E_n(f)$ es decir

$-(E_n(f) - c) = m - c \leq e(x) - c \leq E_n(f) - c$ y como $q_n \in P_n$ concluimos que

$$\|f - q_n\| = E_n(f) - c$$

Contradiciendo la definición de $E_n(f)$. Así, debe existir $x_1 \in [a, b]$ tal que $e(x_1) = -E_n(f)$.

Con argumentos similares vemos la existencia de $x_2 \in [a, b]$ tal que

$$e(x_2) = E_n(f)$$

Hemos probado el teorema.

Corolario 3.1. El mejor aproximante constante a $f(x)$ es

$$\begin{aligned} p_0^* &= \frac{1}{2} \left[\max_{a \leq x \leq b} f(x) + \min_{a \leq x \leq b} f(x) \right] \\ \text{y } E_0(f) &= \frac{1}{2} \left[\max_{a \leq x \leq b} f(x) - \min_{a \leq x \leq b} f(x) \right] \end{aligned} \quad (33)$$

Prueba. Sea $e(x) = f(x) - p_0^*(x)$. Como $p_0^*(x)$ es una constante entonces si $f(x_0)$ es un máximo o un mínimo en $[a, b]$ también lo es $e(x)$. Sean pues $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $f(x_1) = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$ y también $f(x_2) = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$.

Por teorema anterior y (31) y (32) tendremos:

$$f(x_1) - p_0^* = -f(x_2) + p_0^*$$

de donde $p_0^* = \frac{1}{2} (f(x_1) + f(x_2))$. Con esto probamos (33).

Finalmente

$$\begin{aligned} E_0(f, [a, b]) &= |e(x_1)| = |f(x_1) - 0.5f(x_1) - 0.5f(x_2)| \\ &= |0.5f(x_1) - 0.5f(x_2)| = \frac{1}{2} |f(x_1) - f(x_2)|. \end{aligned}$$

Que es exactamente lo que nos pide la segunda ecuación de (33)

Veámoslo aún más particularmente

sea $f(x) = x^2; x \in [-1, 1]$. De acuerdo al corolario 3.1

$$p_0^* = \frac{1}{2} [1 + 0] = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0$$

$$E_0(x^2; [-1, 1]) = \frac{1}{2} [1 - 0] = \frac{1}{2}$$

Tendremos los conjuntos: $\{x_1, x_3\}$ y $\{x_3, x_2\}$

$$e(x_1) = (-1)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad e(x_3) = 0^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

es decir; $e(x_1) = -e(x_3)$

y también

$$e(x_2) = (1)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad e(x_3) = 0^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

o sea; $e(x_2) = -e(x_3)$

en seguida la gráfica de $e(x) = x^2 - \frac{1}{2}$

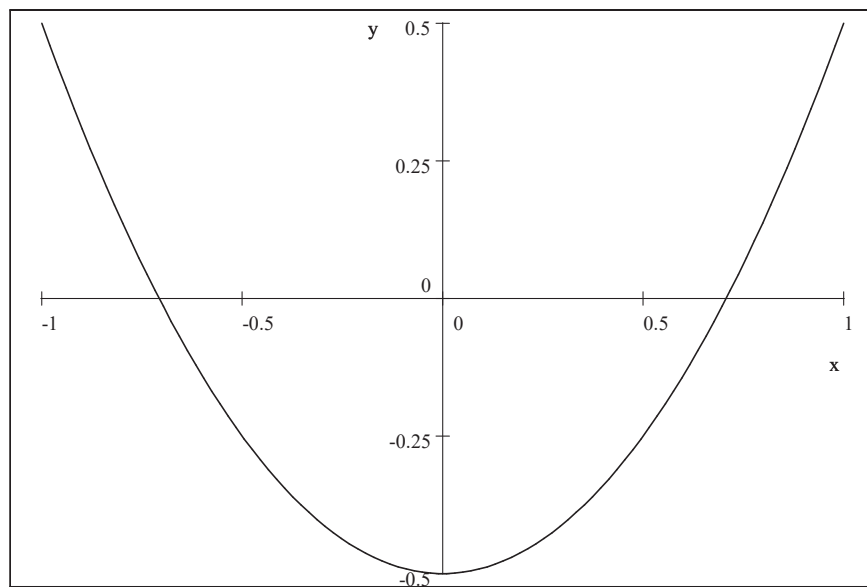


Gráfico 1

El teorema 3.1 es un presagio de un asunto más general como mostraremos en seguida. La curva $y = e(x)$ debe tocar las líneas $y = \pm E_n(f)$ alternativamente en al menos $n+2$ veces y esta propiedad caracteriza la mejor aproximación uniforme de una función continua por un polinomio de grado a lo más n .

Definición 3.1. A un conjunto de $k+1$ puntos distintos $x_0, \dots, x_k$ satisfaciendo $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_k \leq b$ le llamamos un conjunto alternante para la función error $f - p_n$ si:

$$|f(x_j) - p_n(x_j)| = \|f - p_n\|, \quad j = 0, \dots, k \quad (34)$$

y además

$$[f(x_j) - p_n(x_j)] = -[f(x_{j+1}) - p_n(x_{j+1})], \quad j = 0, 1, \dots, k-1 \quad (35)$$

En el gráfico 1 vemos que nuestro conjunto alternante viene dado

$$\text{por:} \\ \{-1, 0\}; \{0, 1\}$$

Teorema 3.2 Supongamos $f \in C[a, b]$; p_n^* es una mejor aproximación uniforme en $[a, b]$ a f perteneciente a P_n si

y sólo si existe un conjunto alternante para $f - p_n^*$ consistiendo de $n + 2$ puntos.

Demostración

(i) Supongamos que $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ forman un conjunto alternante para

$f - p_n^*$. Debemos mostrar que p_n^* es una mejor aproximación. Supongamos que no es así, entonces existe $q_n \in P_n$ tal que

$$\|f - q_n\| < \|f - p_n^*\| \quad (36)$$

y como $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ forman un conjunto alternante para $f - p_n^*$, tenemos que

$$|f(x_j) - q_n(x_j)| < \|f - p_n^*\| = |f(x_j) - p_n^*(x_j)|, \quad j = 0, \dots, n+1 \quad (37)$$

(37) y (35) implican que la diferencia

$$[f(x_j) - p_n^*(x_j)] - [f(x_j) - q_n(x_j)] = q_n(x_j) - p_n^*(x_j)$$

Alterna su signo para j que corre desde 0 hasta $n + 1$.

De este modo el polinomio $q_n(x) - p_n^* \in P_n$ tiene un cero en cada intervalo abierto (x_j, x_{j+1}) , $j = 0, \dots, n$, para un total de $n + 1$ ceros, lo cual implica que

$$q_n = p_n^*$$

Esta última igualdad contradice (36), por lo que hemos probado que p_n^* es una mejor aproximación y la mitad de nuestra prueba.

Supongamos que p_n^* es una mejor aproximación a f .

Supongamos que $x_0, x_1, \dots, x_k$ forman un conjunto alternante para $f - p_n^*$ satisfaciendo $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k \leq b$.

Debido al teorema 3.1 $k \geq 1$.

Deseamos probar que $k \geq n + 1$. Supongamos entonces que $k \leq n$, y ponemos:

si $f \in P_n$, entonces $f = q_n$ para algún $q_n \in P_n$. También sucede que $q_n - p_n^* \in P_n$. Y como $q_n - p_n^*$ alterna su signo en los intervalos $[x_j, x_{j+1}]$ para $j = 0, 1, \dots, n$ es decir tiene $n + 1$ ceros entonces $q_n = p_n^*$ pues el 0 es el único polinomio que tiene $n + 1$ ceros.

Supongamos pues que $f \notin P_n$ y tenemos:

$$\|f - p_n^*\| = \rho (> 0)$$

Sean $t_0, \dots, t_s$ puntos de $[a, b]$ escogidos como

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_s = b$ y que $e(x) = f(x) - p_n^*(x)$ satisface

$$|e(\xi) - e(\eta)| < \frac{1}{2} \rho \quad (38)$$

para cada $\xi, \eta \in [t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, s-1$.

Si un subintervalo $[t_j, t_{j+1}]$ contiene un punto, t , para el cual $e(t) = \rho$, lo llamamos un $(+)$ subintervalo, mientras que si $e(t) = -\rho$ lo llamamos un $(-)$ subintervalo.

Supongamos que $[t_j, t_{j+1}]$ es un $(+)$ subintervalo entonces existe $t \in [t_j, t_{j+1}]$ tal que $e(t) = \rho$. Ahora si $x \in [t_j, t_{j+1}]$ entonces por (38) $|e(t) - e(x)| < \frac{1}{2}\rho$, si $e(x) \leq 0$ esta última desigualdad no podría cumplirse así que $e(x) > 0$. Mismos argumentos pueden darse para un $(-)$ subintervalo. Es decir:

si $x \in (+)$ subintervalo entonces $e(x) > 0$ y si $x \in (-)$ subintervalo entonces $e(x) < 0$

Vamos escribir los subintervalos $[t_j, t_{j+1}]$, que son $(\pm)$ subintervalos, en orden de izquierda a derecha como $I_1, I_2, \dots, I_N$, y supongamos que I_1 es $(+)$ subintervalo. En seguida dividimos $I_1, I_2, \dots, I_N$ en subconjuntos como sigue:

$$\begin{aligned} \{I_1, I_2, \dots, I_{k_1}\} : & \quad (+) \text{ subintervalos} \\ \{I_{k_1+1}, I_{k_1+2}, \dots, I_{k_2}\} : & \quad (-) \text{ subintervalos} \\ \{I_{k_2+1}, I_{k_2+2}, \dots, I_{k_3}\} : & \quad (+) \text{ subintervalos} \\ \vdots & \\ \{I_{k_m+1}, I_{k_m+2}, \dots, I_{k_{m+1}}\} : & \quad (-)^m \text{ subintervalos} \end{aligned}$$

Cada subconjunto contiene al menos un elemento, y $2 \leq m+1 \leq n+1$.

Es claro que $I_{k_j} \cap I_{k_j+1} = \phi$, $j = 1, \dots, m$. Por lo tanto podemos seleccionar puntos $z_1, \dots, z_m$ con la propiedad que $z_j > x \forall x \in I_{k_j}$ y $z_j < x \forall x \in I_{k_j+1}$. Si ponemos

$$q(x) = (z_1 - x)(z_2 - x) \cdots (z_m - x)$$

entonces $q \in P_n$ y $q(x)$ tiene el mismo signo que $e(x)$ en cada I_j , $j = 1, \dots, N$

Sea R la unión de todos los subintervalos los cuales no son $(\pm)$ subintervalos; entonces

$$\max_{x \in R} |e(x)| = \rho' < \rho$$

Supongamos, además, que

$$\|q\| = M$$

y elegimos $\lambda > 0$ tan pequeño que

$$\lambda M < \min(\rho - \rho', \rho/2)$$

Ahora afirmamos que

$$p(x) = \lambda q(x) + p_n^*(x) \in P_n$$

es una mejor aproximación a $f(x)$ menor que p_n^* . En seguida justificamos tal afirmación.

si, de uno de los modos, $x \in R$, entonces

$$|f(x) - p(x)| = |e(x) - \lambda q(x)| \leq |e(x)| + \lambda |q(x)| \leq \rho' + \lambda M < \rho \quad (39)$$

y del otro modo, si $x \notin R$, entonces $x \in I_j$ $j = 1, \dots, N$ y entonces $e(x)$ y $\lambda q(x)$ tienen el mismo signo (ninguno es cero), $|e(x)| > \rho/2 > |\lambda q(x)|$, y tenemos

$$|f(x) - p(x)| = |e(x) - \lambda q(x)| = |e(x)| - |\lambda q(x)| < \rho$$

que junto con (39) implican que

$$\|f - p\| < \rho = \|f - p_n^*\|$$

Esta contradicción prueba el teorema

Algunas observaciones

1) Notemos primero que el teorema anterior no dice que el conjunto alternante de $n + 2$ puntos para $f - p_n^*$ sea único.

2) Tampoco implica que $f - p_n^*$ no pueda alternar en más de $n + 2$ puntos.

En seguida damos un ejemplo sencillo.

Ejemplo 3.1. 0 es la mejor constante aproximante a

$$f(x) = \sin 4x, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

El problema es resolver la ecuación $4x = \pm \frac{n\pi}{2}$ que es donde $e(x)$ alcanza su máximo y su mínimo para n impar. entonces

$$\begin{array}{ccccc} n & 1 & 3 & 5 & 7 \\ x & \pm \frac{\pi}{8} & \pm \frac{3\pi}{8} & \pm \frac{5\pi}{8} & \pm \frac{7\pi}{8} \end{array}$$

y así $f - p_n^*$ tiene 16 diferentes conjuntos alternantes de 2 puntos: $\{(\frac{\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}), (\frac{\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}), (\frac{\pi}{8}, -\frac{5\pi}{8}), (\frac{\pi}{8}, -\frac{7\pi}{8}), (\frac{3\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}), \dots\}$

y ya que $\max |\sin 4x| = 1$ y $\sin 4x$ "alterna" 8 veces en $[-\pi, \pi]$. El conjunto alternante para $f - p_n^*$ es el conjunto

$$x_0 = \frac{\pi}{8}; x_1 = -\frac{\pi}{8}; \dots; x_6 = \frac{7\pi}{8}; x_7 = -\frac{7\pi}{8}$$

entonces de acuerdo al teorema nos enseña que $n + 1 = 7 \therefore n = 6$

y además que $p_0^* = p_1^* = \dots = p_5^* = p_6^* = 0$ son mejores aproximaciones del grado indicado a $\sin 4x$; Sin embargo $\rho_\tau = 0$ no es una mejor aproximación.

Veamos la gráfica

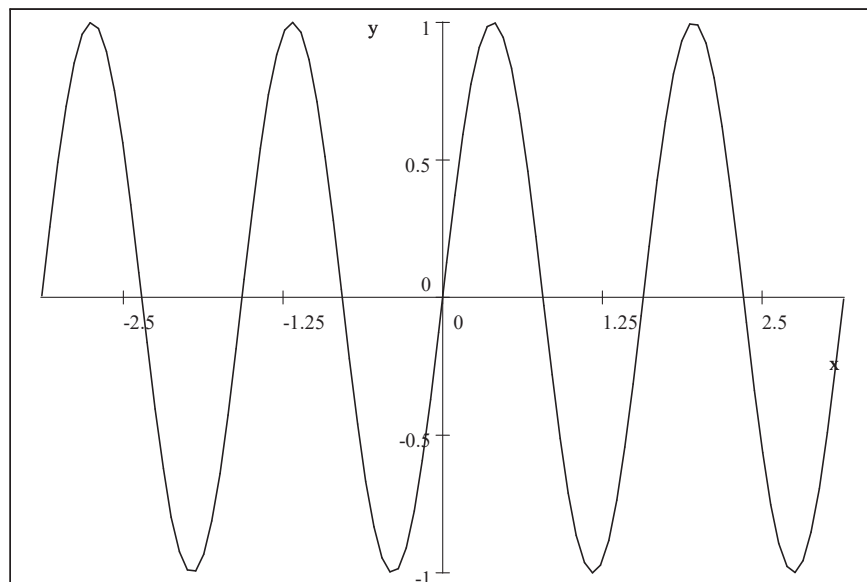


gráfico 2

3) El teorema anterior también nos enseña la cuestión de unicidad para aproximación uniforme vista ya en el teorema (1.3) aunque con la restricción para la norma de estrictamente convexa. Sin embargo sin esta restricción no podemos asegurar la unicidad hasta ahora; de eso se trata precisamente el siguiente teorema.

Tenemos pues el teorema de unicidad sin la restricción de la norma estrictamente convexa.

Teorema 3.3. Si p_n^* es una mejor aproximación a $f \in C[a, b]$ perteneciente a P_n , entonces es único; esto es, si $p \in P_n$ y $p \neq p_n^*$,

$$\|f - p\| > \|f - p_n^*\|$$

Demostración. Supongamos $\|f - p\| = \|f - p_n^*\| = E_n(f)$

Entonces de acuerdo al teorema de convexidad para el conjunto de las mejores aproximaciones

$$q = \frac{p + p_n^*}{2}$$

es también una mejor aproximación a f .

Sea $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ un conjunto alternante para $f - q$ y que para algún entero l ,

$$\frac{f(x_j) - p(x_j)}{2} + \frac{f(x_j) - p_n^*(x_j)}{2} = (-1)^{l+j} E_n(f), \quad j = 0, \dots, n+1 \quad (40)$$

Ya que

$$\frac{|f(x_j) - p(x_j)|}{2} \leq \frac{E_n(f)}{2} \quad \text{y} \quad \frac{|f(x_j) - p_n^*(x_j)|}{2} \leq \frac{E_n(f)}{2}$$

y (40) se cumple⁸ si y sólo si

$$f(x_j) - p(x_j) = f(x_j) - p_n^*(x_j) = (-1)^{l+j} E_n, \quad j = 0, \dots, n+1$$

y así, obtenemos que

$$p(x_j) = p_n^*(x_j), \quad j = 0, \dots, n+1,$$

Es decir; tenemos dos polinomios $p, p_n^* \in P_n$ que se cruzan $n+2$ veces esto implica que $p = p_n^*$. Con esto queda probado el teorema.

Veamos, en seguida, un ejemplo muy particular a manera, de como dice uno de mis asesores: un premio de consolación. Sin embargo generalizar este método a conjuntos finitos abre una gran esperanza aunque esto lo veo hasta el capítulo 4 de esta tesis.

Un Ejemplo importante

Ejemplo 3.2. Sea $f(x) = x^{n+1}$ hallar su mejor aproximante p_n^*

A partir los desarrollos de los polinomios de Chebyshev, anteriormente vistos, obsérvese que el coeficiente principal para $T_{n+1}(x)$ es 2^n . Esto lo usaremos un poco más adelante.

Hay muy pocas funciones, $f(x)$, para las cuales podamos hallar explícitamente, un mejor aproximante p_n^* , por esta razón escogimos un problema donde es posible hallar el mejor aproximante, o sea $f(x) = x^{n+1}$.

Si p_n^* es el mejor aproximante a x^{n+1} fuera de P_n y si $E_n(x^{n+1}; [-1, 1]) = \rho$, entonces

$$e(x) = x^{n+1} - p_n^* \quad (41)$$

satisface

$$|e(x_j)| = \|e\| = \rho, \quad j = 0, \dots, n+1 \quad (42)$$

donde $-1 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq 1$ debido al teorema 3.2 y

⁸Si $c > 0$ y $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \pm c$ y además se cumple que $|a| \leq c$ y $|b| \leq c$ entonces $a = b$

$$e(x) \in P_{n+1}$$

Nos salimos un poco de la construcción que vamos haciendo y para esto veamos que:

Si un polinomio $p(x)$; $x \in (a, b)$ de grado n tiene una raíz en x_0 donde además $\frac{d}{dx}p(x_0) = 0$ entonces x_0 es al menos de multiplicidad 2.

Demostración

por hipótesis $p(x) = (x - x_0)q(x)$ donde q es un polinomio de grado $n - 1$

$$\frac{d}{dx}p(x) = (x - x_0)q'(x) + q(x)$$

y sustituyendo $x = x_0$ obtenemos:

$$\frac{d}{dx}p(x_0) = q(x_0) = 0. \text{ Es decir } q \text{ tiene un cero en } x_0$$

entonces $q(x) = (x - x_0)h(x)$ donde h es un polinomio de grado $n - 2$

y entonces $p(x) = (x - x_0)(x - x_0)h(x)$. Es decir x_0 es de multiplicidad al menos 2 para p . En seguida regresamos a la construcción que estabamos haciendo

Ahora probemos que $x_0 = -1$ y $x_{n+1} = 1$ son simples ceros de $\rho^2 - e^2(x)$ y que $x_1, x_2, \dots, x_n$ son ceros de multiplicidad dos también de $\rho^2 - e^2(x)$

$$\rho^2 - e^2(x) \in P_{2n+2} \quad \text{y} \quad \rho^2 - e^2(x_j) = 0, \quad j = 0, \dots, n+1$$

Por otra parte, si $-1 < x_j < 1$, y como $e^2(x) \leq \rho$ en $[-1, 1]$, entonces $e^2(x)$ tiene un máximo relativo en $x = x_j$ y así

$$\frac{d}{dx}e^2(x) = 0$$

para $x = x_j$. Así en $x = x_j$

$$\frac{d}{dx}(\rho^2 - e^2(x)) = 0$$

y cada $x_j \in \text{int}([-1, 1])$ es un cero de multiplicidad dos, al menos, de $\rho^2 - e^2(x)$. Ya que $\rho^2 - e^2(x)$ no es el polinomio cero, tiene precisamente $2n+2$ ceros (contando tantos ceros como veces sea su multiplicidad); y considerando que ni $x_0, x_{n+1} \notin \text{int}([-1, 1])$. Esto es, hemos probado que $x_0 = -1$ y $x_{n+1} = 1$ son simples ceros mientras que $x_1, \dots, x_n$ son ceros de multiplicidad dos de $\rho^2 - e^2(x)$.

Y similarmente: para $-1 < x_j < 1$, $e(x) < \rho$ así que e tiene un máximo o un mínimo relativo en x_j y por lo tanto

$$\frac{d}{dx}e(x) = 0 \big|_{x=x_j}$$

Es decir $e'(x)$ tiene ceros simples en $x = x_j$, $x_j \in (-1, 1)$

Y por lo tanto el polinomio:

$$(1-x^2)[e'(x)]^2 \in P_{2n+2}$$

tiene ceros simples en ± 1 y tiene ceros de multiplicidad dos en $x_1, \dots, x_n$. Así $(1-x^2)[e'(x)]^2$ y $\rho^2 - e^2(x)$ tienen idéntico conjunto de ceros y por lo tanto hay una constante múltiplo uno de otro. La constante la obtenemos comparando los coeficientes principales:

$$\begin{aligned} e(x) &= x^{n+1} + a_n x^n + \dots + a_0 \\ e^2(x) &= x^{2n+2} + b_{2n+1} x^{2n+1} + \dots + b_0 \\ e'(x) &= (n+1)x^n + \dots + c_1 x \text{ y } [e'(x)]^2 = (n+1)^2 x^{2n} + \dots + d_2 x^2 \\ (1-x^2)[e'(x)]^2 &= k(\rho^2 - e^2(x)) \text{ y entonces } k = (n+1)^2. \end{aligned}$$

por lo tanto

$$(1-x^2)[e'(x)]^2 = (n+1)^2(\rho^2 - e^2(x)) \quad (43)$$

La ecuación diferencial (43) para la función error, $e(x)$, se resuelve fácilmente. Ya que $e'(x) \in P_n$, y $e'(x_j) = 0$, $j = 1, \dots, n$, sabemos que $e'(x)$ no cambia de signo en $[-1, x_1]$. Supongamos que $e'(x) \geq 0$ en $[-1, x_1]$, entonces (46) implica, para $x \in [-1, x_1]$,

$$\frac{e'(x)}{[\rho^2 - e^2(x)]^{1/2}} = \frac{n+1}{(1-x^2)^{1/2}} \quad (44)$$

Ahora integremos ambos lados de (44)

$$\int \frac{e'(x) dx}{[\rho^2 - e^2(x)]^{1/2}}. \text{ Utilicemos la fórmula } d \cos^{-1}(u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} du^9$$

ponemos $u(x) = \frac{e(x)}{\rho}$ y obtenemos $\arccos(\frac{e(x)}{\rho})$

y así mismo

$$\int \frac{n+1}{(1-x^2)^{1/2}} dx = (n+1) \arccos(x)$$

y si $x = \cos \theta$, $x \in [-1, x_1]$, $0 \leq \theta \leq \pi$

e igualando

$$\arccos\left(\frac{e(x)}{\rho}\right) = (n+1)\theta + c,$$

y entonces

$$e(x) = \rho \cos[(n+1)\theta + c]$$

En seguida calcularemos c

Primero $e(-1) = \rho$ y $e(x_1) = -\rho$ o $e(-1) = -\rho$ y $e(x_1) = \rho$ pero como hemos supuesto que $e'(-1) \geq 0$; entonces $e(-1) = -\rho$

así, $\cos[(n+1)\pi + c] = -1$ y por lo tanto $c = m\pi$, donde $m + n + 1$ es impar. Y por lo tanto,

⁹Manual de fórmulas matemáticas Murray R Spiegel.

$$e(x) = \pm \rho \cos(n+1)\theta \quad (45)$$

como vimos más arriba, $\cos(n+1)\theta$ es un polinomio de grado $n+1$ en $x = \cos\theta$; esto es, $\cos(n+1)\theta \in P_{n+1}$, y su coeficiente principal es 2^n . Si comparamos los coeficientes de (44) y (48) en x^{n+1} tenemos: $1 = \rho 2^n$ lo cual implica que $\rho = 2^{-n}$; es decir:

$$e(x) = 2^{-n} \cos(n+1)\theta \quad (46)$$

¿qué sucede si $e'(x) \leq 0$ en $[-1, x_1]$? Tendremos algo así como una ecuación:

$$2y^2 = 8; \text{ donde } y \leq 0 \text{ entonces } y = -2$$

y de la ecuación $(1-x^2)[e'(x)]^2 = (n+1)^2(\rho^2 - e^2(x))$ la ecuación (44)

se convertiría en:

$$\frac{e'(x)}{[\rho^2 - e^2(x)]^{1/2}} = \frac{n+1}{-(1-x^2)^{1/2}}$$

y llegaríamos de nuevo a (46)

Ahora afirmamos que como se cumple:

$$e(x) = 2^{-n} T_{n+1}(x); \quad -1 \leq x \leq x_1$$

la igualdad sigue siendo válida para $-1 \leq x \leq 1$. Con esto hemos probado el siguiente teorema

Teorema 3.4. Si p_n^* es una mejor aproximación a x^{n+1} en $[-1, 1]$ de P_n , entonces

$$x^{n+1} - p_n^* = 2^{-n} T_{n+1}(x)$$

y así

$$E_n(x^{n+1}; [-1, 1]) = 2^{-n}$$

Ahora particularizaremos el teorema

Ejemplo 3.3. Sea $f(x) = x^{10}$

$$T_{10}(x) = -1 + 50x^2 - 400x^4 + 1120x^6 - 1280x^8 + 512x^{10}$$

Ahora normalicemos el polinomio para hallar

$$e(x) = 2^{-9}(-1 + 50x^2 - 400x^4 + 1120x^6 - 1280x^8 + 512x^{10})$$

$$= \frac{25}{256}x^2 - \frac{25}{32}x^4 + \frac{35}{16}x^6 - \frac{5}{2}x^8 + x^{10} - \frac{1}{512}$$

Nuestro mejor aproximante será:

$$p_n^* = x^{10} - e(x) = -\frac{25}{256}x^2 + \frac{25}{32}x^4 - \frac{35}{16}x^6 + \frac{5}{2}x^8 + \frac{1}{512}$$

Ahora visualicemos el conjunto alternante de $x^{10} - p_n^*$ mediante una gráfica (el gráfico 3 de la siguiente página)

$$x^{10} + \frac{25}{256}x^2 - \frac{25}{32}x^4 + \frac{35}{16}x^6 - \frac{5}{2}x^8 - \frac{1}{512}$$

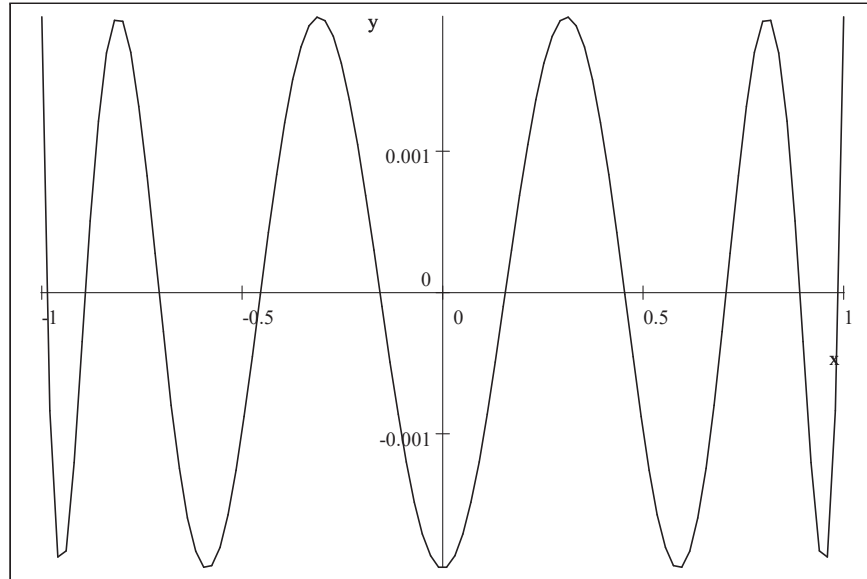


Gráfico 3

Encontrar el conjunto alternante implica hallar la derivada del polinomio $\frac{d}{dx}(x^{10} + \frac{25}{256}x^2 - \frac{25}{32}x^4 + \frac{35}{16}x^6 - \frac{5}{2}x^8 - \frac{1}{512}) = \frac{25}{128}x - \frac{25}{8}x^3 + \frac{105}{8}x^5 - 20x^7 + 10x^9$ y hallar las raíces de este último polinomio

$$\begin{aligned} &0.951\,06 \\ &0.809\,02 \\ &0.587\,79 \\ &0.309\,02 \\ \frac{25}{128}x - \frac{25}{8}x^3 + \frac{105}{8}x^5 - 20x^7 + 10x^9, \text{ roots: } &0.0 \\ &-0.309\,02 \\ &-0.587\,79 \\ &-0.809\,02 \\ &-0.951\,06 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1; \quad x_2 = 0.951\,06; \quad x_3 = 0.809\,02; \quad x_4 = 0.587\,79; \quad x_5 = 0.309\,02 \\ x_6 &= 0.0; \quad x_7 = -0.309\,02; \quad x_8 = -0.587\,79; \quad x_9 = -0.809\,02 \\ x_{10} &= -0.951\,06, \quad x_{11} = -1 \end{aligned}$$

Veamos ahora que en efecto es un conjunto alternante

x	1	0.951 06	0.809 02	0.587 79	0.309 02
$e(x)$	$\frac{1}{512}$	$-\frac{1}{512}$	$1.9531X10^{-3}$	$-1.9531X10^{-3}$	$1.9531X10^{-3}$

x	0.0	-0.309 02	-0.587 79	-0.809 02
$e(x)$	$-\frac{1}{512}$	$1.9531X10^{-3}$	$-1.9531X10^{-3}$	$1.9531X10^{-3}$

$$\begin{array}{ccc} x & -0.951\,06 & -1 \\ e(x) & -\frac{1}{512} & \frac{1}{512} \end{array}$$

Y es evidente que el conjunto $\{x_j\}_{j=1,\dots,11}$ cumple las condiciones para ser un conjunto alternante de $f - p_n^*$.

Comentarios finales

El problema resuelto por el teorema 3.4 es equivalente a encontrar, para x^{n+1} , un polinomio de grado k con coeficiente principal 1 que se desvíe lo mínimo posible en $[-1, 1]$. El teorema enseña que este polinomio es

$$\tilde{T}_k(x) = 2^{-k+1}T_k(x)$$

Capítulo 4 Aproximación en un conjunto finito de puntos

Ya que usualmente no es posible encontrar el polinomio mejor aproximante a una función dada, ahora consideraremos aproximarlos a la mejor aproximación.

El proceso a considerar es reemplazar el intervalo I por un conjunto de puntos finito en I y resolver el problema de aproximación en el conjunto finito de puntos.

Esta estrategia depende de dos factores:

1) La posibilidad de encontrar una mejor aproximación a una función en un conjunto finito de puntos.

2) Nos aproximamos al mejor aproximante en la medida que crece el número de puntos del conjunto finito en el intervalo.

En seguida estudiaremos estos dos problemas.

Sea $X_m = \{x_1, \dots, x_m\}$ con $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, $x_i \in [a, b] \forall i$. Si $m \leq n+1$, hay un único $p \in P_n$ que satisface:

$$p(x_j) = f(x_j); \quad j = 1, \dots, m$$

Para fin empatar con las ideas que hasta ahorita llevamos: de la unicidad de la mejor aproximación, y del conjunto alternante de la función error entonces conviene considerar $m \geq n+2$ pues recordemos que $n+2$ es el número de puntos del conjunto alternante.

La mejor aproximación uniforme perteneciente a P_n a f en X_m está caracterizada exactamente como en el teorema 3.2. Ya que la prueba de este hecho es la misma del teorema 3.2 con X_m en lugar de $[a, b]$ casi donde quiera, omitimos los detalles del siguiente resultado.

Teorema 4.1. $p_n^*(X_m)$ es una mejor aproximación uniforme en X_m a f fuera de P_n si y sólo si hay un conjunto alternante de puntos de X_m , para $f - p_n^*(X_m)$ que tiene $n+2$ puntos.

Continuamos con un resultado análogo al teorema 3.3:

Teorema 4.2. Una mejor a proximación en X_m es única.

Estamos ahora en posibilidad de probar que el problema de aproximación debido a P_n en $[a, b]$ o en X_m puede ser siempre reducido en algún X_{n+2} .

Teorema 4.3 Si $p_n^* \in P_n$ es la mejor aproximación a $f \in C[a, b]$, existe $X_{n+2}^* \in [a, b]$ tal que

$$E_n(f; [a, b]) = E_n(f; X_{n+2}^*) = \max_{x \in X_{n+2}^*} |f(x) - p_n^*(x)| < \max_{x \in X_{n+2}^*} |f(x) - p(x)|$$

para cualquier $p \in P_n$, $p \neq p_n^*$. Además para cualquier $X_{n+2} \subset [a, b]$,

$$\begin{aligned} E_n(f; X_{n+2}) &= \min_{p \in P_n} \max_{x \in X_{n+2}} |f(x) - p(x)| = \\ \max_{x \in X_{n+2}} |f(x) - p_n^*(X_{n+2}; x)| &\leq E_n(f; [a, b]) = E_n(f; X_{n+2}^*) \end{aligned} \quad (47)$$

con la igualdad sólo si $p_n^*(X_{n+2}) = p_n^*$.

Prueba. Sea X_{n+2}^* un conjunto alternante para $f - p_n^*$, entonces debido al los dos últimos teoremas (con $X_m = X_{n+2}^*$), p_n^* es la mejor aproximación a f en X_{n+2}^* , y la primera parte del teorema está probada.

Supongamos $p_n^*(X_{n+2}) \neq p_n^*$; entonces por unicidad (teorema 4.2) $E_n(f; X_{n+2}) < \max_{x \in X_{n+2}} |f(x) - p_n^*(x)| \leq E_n(f; [a, b])$.

La igualdad se cumple en (47) si $p_n^*(X_{n+2}) = p_n^*$, y X_{n+2} es un conjunto alternante para $f - p_n^*$.

Si reemplazamos X_m por $[a, b]$ en el teorema anterior obtenemos:

Teorema 4.4. Si $p_n^*(X_m) \in P_n$ es la mejor aproximación a f en X_m , existe $X_{n+2}^* \subseteq X_m$ tal que

$$\begin{aligned} E_n(f; X_m) &= E_n(f; X_{n+2}^*) = \max_{x \in X_{n+2}^*} |f(x) - p_n^*(x)| \\ &< \max_{x \in X_{n+2}^*} |f(x) - p(x)| \end{aligned} \quad (48)$$

Para cualquier $p \in P_n$, $p \neq p_n^*(X_m)$. Además, para cualquier $X_{n+2} \subseteq X_m$,

$$E_n(f; X_{n+2}) \leq E_n(f; X_{n+2}^*) \quad (49)$$

y la igualdad es posible sólo si $p_n^*(X_{n+2}) = p_n^*(X_m)$

Los teoremas 4.3 y 4.4 nos facilitan la búsqueda para una mejor aproximación en P_n a un conjunto de $n + 2$ puntos. En el caso del teorema 4.3, no es tan provechoso por si mismo ya que hay muchos conjuntos de $n + 2$ puntos en $[a, b]$. Pero en el caso del teorema 4.4 vemos que si denotamos por $X_{m,i}$, $i = 1, \dots, \binom{m}{n+2}$ el número finito de subconjuntos de $n + 2$ puntos de X_m , y encontramos

$$\max_{i=1, \dots, \binom{m}{n+2}} E_n(f; X_{m,i}) = E_m(f; X_{m,i^*})$$

entonces

$$p_n^*(X_m) = p_n^*(X_{m,i^*})$$

Este procedimiento requiere de habilidad para encontrar $E_n(f; X_{n+2})$ y $p_n^*(X_{n+2})$ para cualquier conjunto de $n+2$ puntos, X_{n+2} .

La siguiente tarea es ver cómo hacer esto.

Ilustraré las diferentes fórmulas con un ejemplo:

Hallemos pues, el $p \in P_n$ único el cual interpola $f(x)$ en x_i , esto es, tal que

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n+2. \quad (50)$$

Este polinomio está dado por la fórmula para la interpolación de Lagrange que viene dada por:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \left\{ \prod_{j=1, j \neq i}^{n+2} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right\} f(x_i) \quad (51)$$

Ejemplo 4.1. Sea $f(x) = \frac{2x}{x+2}$, $x \in [-0.5, 0.5]$

Sea $X_{2+1=3} = \{-0.5, 0, 0.5\}$

sea $L_{3,k} = \prod_{j=1, j \neq i}^3 \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$. entonces:

$$\begin{aligned} L_{3,1}(x) &= \frac{(x-0)(x-0.5)}{(-0.5-0)(-0.5-0.5)} = 2x^2 - x \\ L_{3,2}(x) &= \frac{(x+0.5)(x-0.5)}{(0+0.5)(0-0.5)} = -4x^2 + 1 \\ L_{3,3}(x) &= \frac{(x+0.5)(x)}{(0.5+0.5)(0.5)} = 2x^2 + x \end{aligned}$$

$$\text{y } f(-0.5) = -\frac{2}{3}; \quad f(0) = 0; \quad f(0.5) = \frac{2}{5}$$

$$p(x) = (2x^2 - x)(-\frac{2}{3}) + (-4x^2 + 1)(0) + (2x^2 + x)(\frac{2}{5}) = \frac{16}{15}x - \frac{8}{15}x^2$$

Si ponemos

$$\omega(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_{n+2})$$

Podemos reescribir

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\omega(x)}{(x - x_i)} \cdot \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)} \quad (52)$$

si

$$\sum_{i=1}^{n+2} \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)} = 0 \quad (53)$$

se sigue que $p \in P_n$, ya que el lado derecho de (53) es el coeficiente principal de p , y $p_n^*(X_{n+2}) = p$ siempre y cuando $E_n(f; X_{n+2}) = 0$, en vista de (50). Suponemos, por lo tanto, que $p \notin P_n$, esto es, el coeficiente principal de p es no cero; que es nuestro caso en el ejemplo 4.1 pues si $\omega(x_k) = \prod_{i \neq k}^{n+2} (x_k - x_i)$, entonces

$$\sum_{i=1}^3 \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)} = (-0.5 - 0)(-0.5 - 0.5)(-\frac{2}{3}) + 0 + (0.5 + 0.5)(0.5)(\frac{2}{3}) = -0.13333 \neq 0$$

Sea l_{n+1} el polinomio único en P_{n+1} el cual satisface

$$l_{n+1}(x) = (-1)^j, \quad j = 1, \dots, n+2$$

esto es,

$$l_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\omega(x)}{(x - x_i)} \cdot \frac{(-1)^i}{\omega'(x_i)} \quad (54)$$

Para nuestro ejemplo 4.1

$$l_2(x) = \sum_{i=1}^3 \frac{\omega(x)}{(x - x_i)} \cdot \frac{(-1)^i}{\omega'(x_i)} = (x + 0.5)(x)(x - 0.5) \left(\frac{-1}{(x+0.5)((0.5))} + \frac{1}{(x)(-0.25)} + \frac{-1}{(x-0.5)(0.5)} \right) = -2(x^2 - 0.5x) - 4(x^2 - 0.25) - 2(x^2 + 0.5x) = 1.0 - 8x^2$$

Exigimos que $l_{n+1} \notin P_n$, esto es, el coeficiente principal de l_{n+1} sea no cero. Este coeficiente principal es

$$\sum_{i=1}^{n+2} \frac{(-1)^i}{\omega'(x_i)} \quad (55)$$

Ahora

$$\omega'(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+2} (x_i - x_j) = \left(\prod_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j) \right) \left(\prod_{j=i+1}^{n+2} (x_i - x_j) \right) (-1)^{n+2-i}$$

así que $\text{sgn } \omega'(x_i) = (-1)^{n-i+1}$ ¹⁰
y entonces

$$\text{sgn } \frac{(-1)^j}{\omega'(x_i)} = (-1)^n$$

todos los términos (ninguno de los cuales es cero) en la suma de (55) tienen el mismo signo. Así la suma (55) no puede ser cero, y nuestra exigencia queda cumplida.

En efecto: $\sum_{i=1}^{n+2} \frac{(-1)^i}{\omega'(x_i)} = \frac{-1}{0.5} + \frac{1}{-0.25} + \frac{-1}{0.5} = -8$. Y obsérvese que ningún sumando es cero y el coeficiente principal es -8 como ya lo habíamos encontrado para nuestro polinomio $l_{n+1}(x)$ del ejemplo 4.1.

¹⁰ Si $x \in R$ (o C), el $\text{sgn } x$ está definido por:
 $\text{sgn } x = \frac{x}{|x|}$, $x \neq 0$ y $\text{sgn } 0 = 0$

Teorema 4.5. Sea

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n+2} [f(x_i)/\omega'(x_i)]}{\sum_{i=1}^{n+2} [(-1)^i/\omega'(x_i)]} \quad (56)$$

Entonces

$$p_n^*(X_{n+2}) = p - \lambda l_{n+1}$$

donde p está dado por (52), l_{n+1} por (54) y además

$$E_n(f; X_{n+2}) = |\lambda| \quad (57)$$

Demostración. Elegimos λ de modo que $p - \lambda l_{n+1} \in P_n$. (Note que l_{n+1} siempre tiene un coeficiente principal no cero mientras que si $p = 0$, entonces $\lambda = 0$).

Ahora

$$e(x_i) = f(x_i) - (p - \lambda l_{n+1}) = \lambda(-1)^j; \quad j = 1, \dots, n+1$$

entonces $x_1, \dots, x_{n+2}$ forman un conjunto alternante para

$$f - (p - \lambda l_{n+1}) \text{ en } X_{n+2}, \text{ y por teorema 4.1 } p_n^*(X_{n+2}) = p - \lambda l_{n+1}.$$

Entonces también se cumple (57). El teorema está probado.

Respecto al ejemplo 4.1 nos resta calcular λ :

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^3 [f(x_i)/\omega'(x_i)]}{\sum_{i=1}^3 [(-1)^i/\omega'(x_i)]} = \frac{-0.13333}{-8} = 1.6666 \times 10^{-2}$$

ahora calcularemos, para ese mismo ejemplo nuestro

$$\begin{aligned} p_n^*(X_3) &= p - \lambda l_{n+1} = \frac{16}{15}x - \frac{8}{15}x^2 - (1.6666 \times 10^{-2})(1.0 - 8x^2) \\ &= \frac{16}{15}x - 0.40001x^2 - 1.6666 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

y nuestra función error

$$e(x) = \frac{2x}{x+2} - \left(\frac{16}{15}x - 0.40001x^2 - 1.6666 \times 10^{-2} \right)$$

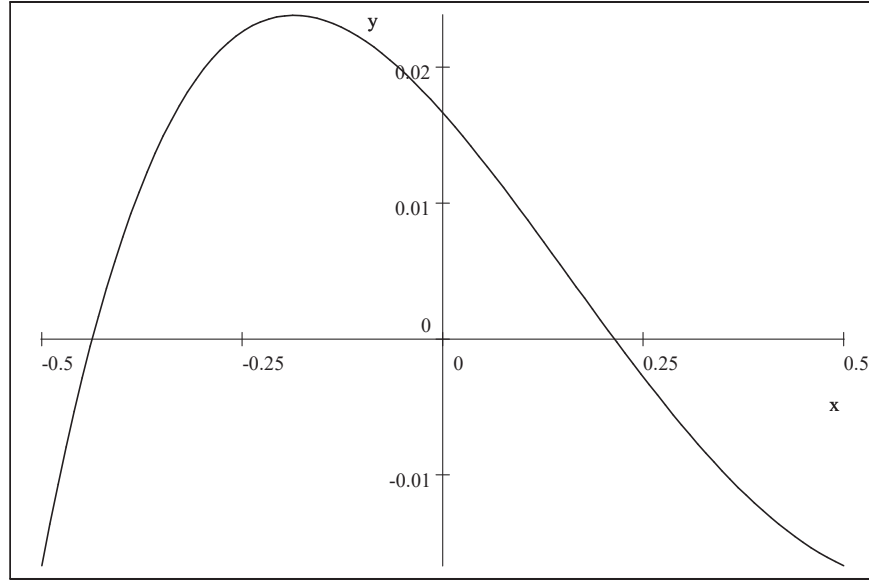


Gráfico 4

y nuestra función error:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2(-0.5)}{-0.5+2} - \left(\frac{16}{15}(-0.5) - 0.40001(-0.5)^2 - 1.6666 \times 10^{-2} \right) \\
 &= -1.6665 \times 10^{-2} \\
 & \frac{2(0)}{0+2} - \left(\frac{16}{15}(0) - 0.40001(0)^2 - 1.6666 \times 10^{-2} \right) = 1.6666 \times 10^{-2} \\
 & \frac{2(0.5)}{0.5+2} - \left(\frac{16}{15}(0.5) - 0.40001(0.5)^2 - 1.6666 \times 10^{-2} \right) = -1.6665 \times 10^{-2}
 \end{aligned}$$

En efecto el conjunto es un conjunto alternante pero $p_n^*(X_2)$ no es el mejor aproximante de f , es una aproximación al mejor aproximante pues en la gráfica puede verse que de ningún modo los valores de la función error, en los nodos, representan el máximo en el intervalo. En seguida hacemos una mejor aproximación aumentando nuestros puntos y ahora en el intervalo $[-1, 1]$. Con este ejemplo termino esta tesis de licenciatura.

Ejemplo 4.2. Considérese la misma función del ejemplo 4.1, pero ahora considérese el conjunto:

$$X_9 = \{-1, -0.75, -0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$$

Calculemos primero el valor de la función en $x \in X_9$

Sea

$$f = \frac{2x}{x+2}$$

X_9	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x)$	-2	-1.2	-0.666 67	-0.285 71	0	0.222 22	0.4	0.545 45	$\frac{2}{3}$

Hallemos pues, el $p \in P_n$ único el cual interpola $f(x)$ en x_i , esto es, tal que

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, 9$$

Este polinomio está dado por la fórmula para la interpolación de Lagrange que viene dada por:

$$p(x) = \sum_{i=1}^9 \left\{ \prod_{j=1, j \neq i}^9 \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right\} f(x_i)$$

Hallemos cada uno de los sumando a los que llamaremos L_i , $i = 1, \dots, 9$

$$L_1 = \frac{(x+0.75)(x+0.5)(x+0.25)(x)(x-0.25)(x-0.5)(x-0.75)(x-1)}{(-1+0.75)(-1+0.5)(-1+0.25)(-1)(-1-0.25)(-1-0.5)(-1-0.75)(-1-1)} (-2)$$

$$L_2 = \frac{(x+1)(x+0.5)(x+0.25)(x)(x-0.25)(x-0.5)(x-0.75)(x-1)}{(-0.75+1)(-0.75+0.5)(-0.75+0.25)(-0.75)(-0.75-0.25)(-0.75-0.5)(-0.75-0.75)(-0.75-1)} (-1.2)$$

$$L_3 = \frac{(x+1)(x+0.75)(x+0.25)(x)(x-0.25)(x-0.5)(x-0.75)(x-1)}{(-0.5+1)(-0.5+0.75)(-0.5+0.25)(-0.5)(-0.5-0.25)(-0.5-0.5)(-0.5-0.75)(-0.5-1)} (-0.666\ 67)$$

$$L_4 = \frac{(x+1)(x+0.75)(x+0.5)(x)(x-0.25)(x-0.5)(x-0.75)(x-1)}{(-0.25+1)(-0.25+0.75)(-0.25+0.5)(-0.25)(-0.25-0.25)(-0.25-0.5)(-0.25-0.75)(-0.25-1)} (-0.285\ 71)$$

$$L_5 = \frac{(x+1)(x+0.75)(x+0.5)(x+0.25)(x-0.25)(x-0.5)(x-0.75)(x-1)}{(0+1)(0+0.75)(0+0.5)(0+0.25)(0-0.25)(0-0.5)(0-0.75)(0-1)} (0)$$

$$L_6 = \frac{(x+1)(x+0.75)(x+0.5)(x+0.25)(x)(x-0.5)(x-0.75)(x-1)}{(0.25+1)(0.25+0.75)(0.25+0.5)(0.25+0.25)(0.25-0)(0.25-0.5)(0.25-0.75)(0.25-1)} (0.222\ 22)$$

$$L_7 = \frac{(x+1)(x+0.75)(x+0.5)(x+0.25)(x)(x-0.25)(x-0.75)(x-1)}{(0.5+1)(0.5+0.75)(0.5+0.5)(0.5+0.25)(0.5-0)(0.5-0.25)(0.5-0.75)(0.5-1)} (0.4)$$

$$L_8 = \frac{(x+1)(x+0.75)(x+0.5)(x+0.25)(x)(x-0.25)(x-0.5)(x-1)}{(0.75+1)(0.75+0.75)(0.75+0.5)(0.75+0.25)(0.75-0)(0.75-0.25)(0.75-0.5)(0.75-1)} (0.545\ 45)$$

$$L_9 = \frac{(x+1)(x+0.75)(x+0.5)(x+0.25)(x)(x-0.25)(x-0.5)(x-0.75)}{(1+1)(1+0.75)(1+0.5)(1+0.25)(1)(1-0.25)(1-0.5)(1-0.75)} \left(\frac{2}{3}\right)$$

$$p = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8 + L_9$$

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8 + L_9 =$$

$$0.999\ 92x - 0.499\ 94x^2 + 0.251\ 51x^3 - 0.125\ 91x^4 + 5.537\ 2 \times 10^{-2}x^5 - 2.740\ 1 \times 10^{-2}x^6 + 2.653\ 7 \times 10^{-2}x^7 - 1.341\ 5 \times 10^{-2}x^8$$

aunque esta última expresión nos va a producir un error (es decir la expansión de p).

En seguida calcularemos el polinomio $l(x) = \sum_{i=1}^9 \frac{\omega(x)}{(x-x_i)} \cdot \frac{(-1)^i}{\omega'(x_i)}$

$$\begin{aligned}\omega(x) &= (x+1)(x+0.75)(x+0.5)(x+0.25) \\ &(x)(x-1)(x-0.75)(x-0.5)(x-0.25) \\ \omega &= 8.7891 \times 10^{-3}x - 0.20020x^3 + 1.0664x^5 - 1.875x^7 + x^9 \\ \frac{d}{dx}(8.7891 \times 10^{-3}x - 0.20020x^3 + 1.0664x^5 - 1.875x^7 + x^9) \\ &= 5.332x^4 - 0.6006x^2 - 13.125x^6 + 9x^8 + 8.7891 \times 10^{-3}\end{aligned}$$

Para efecto de hacer las cuentas, en este software, llamaremos a $\omega'(x)$ como ω_d

$$\begin{array}{cccccc}\omega_d = & 5.332x^4 & -0.6006x^2 & -13.125x^6 & +9x^8 & +8.7891 \times 10^{-3} \\ X_8 & -1 & -0.75 & -0.5 & -0.25 & \\ \omega_d & 0.61519 & -7.6922 \times 10^{-2} & 2.1967 \times 10^{-2} & -1.0987 \times 10^{-2} & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ 8.7891 \times 10^{-3} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} X_9 & 0.25 & 0.5 & 0.75 & 1 & \\ \omega_d & -1.0987 \times 10^{-2} & 2.1967 \times 10^{-2} & -7.6922 \times 10^{-2} & 0.61519 & \end{array}$$

Calculemos los sumandos correspondientes

$$\begin{aligned}l_1 &= (x+0.75)(x+0.5)(x+0.25)(x)(x-0.25)(x-0.5) \\ &(x-0.75)(x-1)\left(\frac{-1}{0.61519}\right) \\ l_2 &= \left(\frac{1}{-7.6922 \times 10^{-2}}\right)(x+1)(x+0.5)(x+0.25)(x)(x-0.25)(x-0.5) \\ &(x-0.75)(x-1) \\ l_3 &= \left(\frac{-1}{2.1967 \times 10^{-2}}\right)(x+1)(x+0.75)(x+0.25)(x)(x-0.25)(x-0.5) \\ &(x-0.75)(x-1) \\ l_4 &= \left(\frac{1}{-1.0987 \times 10^{-2}}\right)(x+1)(x+0.75)(x+0.5)(x)(x-0.25)(x-0.5) \\ &(x-0.75)(x-1) \\ l_5 &= \left(\frac{-1}{8.7891 \times 10^{-3}}\right)(x+1)(x+0.75)(x+0.5)(x+0.25)(x-0.25)(x-0.5) \\ &(x-0.75)(x-1) \\ l_6 &= \left(\frac{1}{-1.0987 \times 10^{-2}}\right)(x+1)(x+0.75)(x+0.5)(x+0.25)(x)(x-0.5) \\ &(x-0.75)(x-1) \\ l_7 &= \left(\frac{-1}{2.1967 \times 10^{-2}}\right)(x+1)(x+0.75)(x+0.5)(x+0.25)(x)(x-0.25) \\ &(x-0.75)(x-1) \\ l_8 &= \left(\frac{1}{-7.6922 \times 10^{-2}}\right)(x+1)(x+0.75)(x+0.5)(x+0.25)(x)(x-0.25) \\ &(x-0.5)(x-1) \\ l_9 &= \left(\frac{-1}{0.61519}\right)(x+1)(x+0.75)(x+0.5)(x+0.25)(x)(x-0.25) \\ &(x-0.5)(x-0.75)\end{aligned}$$

$$l = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + l_7 + l_8 + l_9$$

es decir

$$l = 2.5244 \times 10^{-29}x + 52.012x^2 - 364.09x^4 + 728.19x^6 - 4.0390 \times 10^{-28}x^7 - 416.11x^8 - 1.00000$$

Nos resta calcular $\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n+2} [f(x_i)/\omega'(x_i)]}{\sum_{i=1}^{n+2} [(-1)^i/\omega'(x_i)]}$. Pero sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n+2} [(-1)^i/\omega'(x_i)] = -416.11$$

que es el coeficiente principal de $l(x)$. Y sólo por aquello de las dudas:

$$\frac{-1}{0.61519} + \frac{1}{-7.6922 \times 10^{-2}} + \frac{-1}{2.1967 \times 10^{-2}} + \frac{1}{-1.0987 \times 10^{-2}} + \frac{-1}{8.7891 \times 10^{-3}} + \frac{1}{-1.0987 \times 10^{-2}} + \frac{-1}{2.1967 \times 10^{-2}} + \frac{1}{-7.6922 \times 10^{-2}} + \frac{-1}{0.61519} = -416.11$$

que afortunadamente checa con el coeficiente principal de l que ya había calculado.

Calcularé enseguida el numerador de λ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+2} [f(x_i)/\omega'(x_i)] = & \frac{-2}{0.61519} + \frac{-1.2}{-7.6922 \times 10^{-2}} + \frac{-0.66667}{2.1967 \times 10^{-2}} + \frac{-0.28571}{-1.0987 \times 10^{-2}} + \frac{0}{8.7891 \times 10^{-3}} \\ & + \frac{0.22222}{-1.0987 \times 10^{-2}} + \frac{0.4}{2.1967 \times 10^{-2}} + \frac{0.54545}{-7.6922 \times 10^{-2}} \\ & + \frac{\frac{2}{3}}{0.61519} = -1.9008 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

entonces

$$\lambda = \frac{-1.9008 \times 10^{-2}}{-416.11} = 4.568 \times 10^{-5}$$

Así que:

$$\begin{aligned} p - \lambda l = & 0.99992x - 0.50232x^2 + 0.25151x^3 - 0.10928x^4 + \\ & 5.5372 \times 10^{-2}x^5 - 6.0665 \times 10^{-2}x^6 + 2.6537 \times 10^{-2}x^7 + \\ & 5.5929 \times 10^{-3}x^8 + 4.568 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

o sea que

$$\begin{aligned} p_8^*(X_9) = & 0.99992x - 0.50232x^2 + 0.25151x^3 - 0.10928x^4 + \\ & 5.5372 \times 10^{-2}x^5 - 6.0665 \times 10^{-2}x^6 + 2.6537 \times 10^{-2}x^7 + \\ & 5.5929 \times 10^{-3}x^8 + 4.568 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

Por último hacemos el gráfico de la función error en la siguiente página.

$$e_r = f - (p(x) - \lambda l(x)) = 0.50232x^2 - 0.99992x - 0.25151x^3 + 0.10928x^4 - 5.5372 \times 10^{-2}x^5 + 6.0665 \times 10^{-2}x^6 - 2.6537 \times 10^{-2}x^7 - 5.593 \times 10^{-3}x^8 + 2\frac{x}{x+2} - 4.568 \times 10^{-5}$$

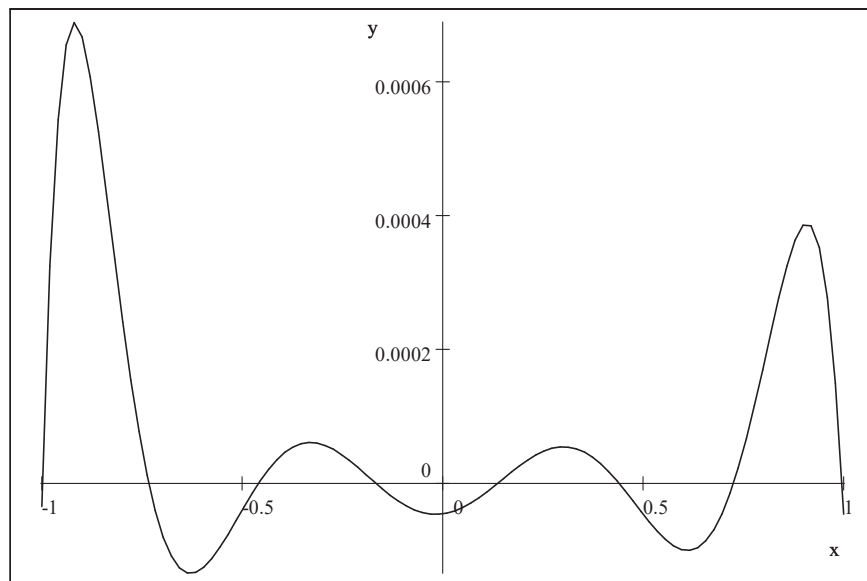


Gráfico 5

$e_r = f - p + \lambda l$				
X_9	-1	-0.75	-0.5	-0.25
e_r	-4.5683×10^{-5}	4.5670×10^{-5}	-4.2358×10^{-5}	4.1392×10^{-5}
	0	0.25	0.5	0.75
	-4.5680×10^{-5}	4.7899×10^{-5}	-4.5692×10^{-5}	5.0215×10^{-5}
	1			
	-4.5683×10^{-5}			

Conclusiones. Al expandir los polinomios p y l hay un error en el momento de expandir y evaluar los polinomios, por lo que el conjunto alternante no sale exacto, además que de ningún modo estamos hablando del mejor aproximante para f ; estamos hablando de una aproximación del mejor aproximante. En contraste con el ejemplo 3.3, dónde si calculamos el mejor aproximante y donde si calculamos, como consecuencia, el conjunto alternante. Sin embargo podemos ver que el error es del orden de 10^{-5} .

Como dije más arriba si escogemos un conjunto, por ejemplo de 20 puntos; es decir X_{20} entonces tendremos $\binom{20}{8} = 125970$ conjuntos posibles. Entre esta cantidad de conjuntos, podemos escoger el que más se acerque al mejor aproximante; es decir aquel k_0 que cumplirá:

$$E_{k_0}(f; [-1, 1]) \leq E_i(f; [-1, 1]) \quad i = 1, \dots, 125970$$

este tipo de cálculo esta fuera de las pretensiones de esta tesis.

Bibliografía

Introducción al Análisis matemático. Robert G. Bartle. Editorial Limusa 1980

Cálculo infinitesimal. Michel Spivak Vol 2.

Análisis Numérico. Richard L. Burden y J. Douglas Faires. Grupo Editorial Iberoamérica.

Manual de fórmulas y tablas matemáticas. Murray R Spiegel, McGraw-Hill.

Weierstrass and Approximation Theory. Artículo publicado por Allan Pinkus del Departamento de Matemáticas Technion, I.I.T Israel.

Approximation by polynomials. Artículo de Christer O. Kiselman Uppsala University, Department of Mathematics.

An Introduction to the Approximation of functions. Libro de Theodore J. Rivlin Dover Publications, Inc. 1969.

Approximation theory and methods. M.J.D. Powell Cambridge University 1981.

Fundamentos de Análisis Moderno. Dieudonné, Editorial Reverté, S.A. 1960

Principios de Análisis Matemático. Walter Rudin, Segunda edición

Algebra lineal. Serge Lang.