Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

“Aplicaciones del Axioma de Martin”

TESIS
que presenta:

Patricio Salvador Jara Ettinger

para obtener el grado de
Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas.

Director de Tesis: Fernando Hernández Hernández

Morelia, Michoacán
Febrero 2008

Director de Tesis

Dr. Fernando Hernández Hernández

Sinodales

Dr. David Meza Alcántara

Dr. Francisco Domínguez Mota

Dr. Rigoberto Vera Mendoza

Dra. María Luisa Pérez Seguí

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres, que me alentaron con su apoyo incondicional y a Lupyta, por su paciencia y comprensión. También quiero agradecer a Fernando, verdadero mentor, por haber mostrado tanta confianza en mí. Finalmente agradezco el apoyo que el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo me brindaron durante mis estudios de licenciatura.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

"Nadie podrá expulsarnos del
paraíso que Cantor ha creado."
-David Hilbert

Hay muchos sistemas axiomáticos para la teoría de conjuntos, pero escoger axiomas no es cosa fácil. Según Wikipedia, un axioma es una proposición que no requiere demostración, pues se considera una "verdad evidente"; sobre la cual descansa el resto del conocimiento o sobre la cual se construyen otros conocimientos. En este trabajo presento aplicaciones de un axioma no tan axioma, ya que al menos a mí no me parece tan "evidente", y creo que de intuitivo tiene poco. Sin embargo, cumple perfectamente la segunda parte de la definición; el propósito de este trabajo es hablar sobre algunos conocimientos que se construyen sobre el **Axioma de Martin**.

En el segundo capítulo presento algunas definiciones y teoremas que serán usados a lo largo de este trabajo. La mayor parte de ellas tienen que ver con teoría de conjuntos, resultados que generalmente forman parte de un curso de licenciatura.

El tercer capítulo enuncia el Axioma de Martin y algunas de sus equivalencias. Entre ellas se encuentra una versión más fuerte del teorema de categoría de Baire, que como se verá a lo largo del trabajo, es uno de los muchos teoremas que pueden ser extendidos al agregar al Axioma de Martin a ZFC.

En el cuarto capítulo ya se encuentran algunas de las consecuencias, tales como el hecho de que $\mathfrak{c}$ es un cardinal regular, y que para todo $\kappa < \mathfrak{c}$, el Axioma de Martin implica que $2^\kappa = 2^{\aleph_0}$. Éste y otros resultados muestran como el Axioma de Martin "extiende" a muchos teoremas usuales de teoría de conjuntos, medida y categoría.

El último capítulo trata de afirmaciones independientes de los axiomas de Zermelo-Fraenkel más el Axioma de Elección (ZFC), es decir, afirmaciones que no se pueden demostrar ni refutar usando los axiomas usuales de teoría de conjuntos. Entre estas afirmaciones está la existencia de conjuntos de Sierpiński, subconjuntos muy interesantes de números reales que entre otras cosas, son no medibles. En este capítulo también se encuentran propiedades interesantes de órdenes que cumplen la condición de la cadena contable y los principios de combinatoria $\diamondsuit$ y $\clubsuit$.

Capítulo 2

Preliminares

"Dios creó los números naturales,
el resto es trabajo de la humanidad."
-Leopold Kronecker

Este trabajo trata principalmente con teoría de conjuntos, aunque también presento implicaciones en topología, teoría de la medida, análisis, y combinatoria. En esta sección hay algunas definiciones y resultados, la mayoría sin demostración, que son necesarios para comprender los resultados que presento después.

Un conjunto x se llama **ordinal** o **número ordinal** si es transitivo y bien ordenado bajo $\in_x$, es decir, que es bien ordenado y que $y \in x$ implica que $y \subseteq x$ y si $y, z \in x$ entonces $y < z$ si y sólo si $y \in z$. Para cada ordinal α decimos que el sucesor de α, denotado $S(\alpha)$ o $\alpha + 1$ es: $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Un número ordinal α se dice que es un **ordinal sucesor** si existe un ordinal β tal que $\alpha = \beta + 1$. Si no existe tal β, entonces se dice que α es un **ordinal límite**.

Dos números ordinales son equipotentes si existe una biyección entre ellos. Se dice que un ordinal α es **ordinal inicial** si no es equipotente a cualquier $\beta < \alpha$. En este caso también decimos que α es un **cardinal** o **número cardinal**. Note que todos los cardinales infinitos también son ordinales límite.

Si α es un ordinal límite, entonces la **cofinalidad** de α, denotada por $cf(\alpha)$, es el mínimo número ordinal β tal que α es el límite de una sucesión creciente de ordinales de longitud β.

Se dice que un cardinal infinito κ es un **cardinal singular** si $cf(\kappa) < \kappa$. Un cardinal infinito que no es singular se llama **cardinal regular**.

Notación: Sean A y B conjuntos, el conjunto A^B se define como la familia de todas las funciones de B en A. El conjunto $[A]^\kappa$ se refiere a la familia de todos los subconjuntos de A de cardinalidad κ, es decir, $[A]^\kappa = \{S \subseteq A : |S| = \kappa\}$. El conjunto $[A]^{<\kappa}$ es la familia de todos los subconjuntos de A de cardinalidad menor que κ, es decir, $[A]^{<}\kappa = \{S \subseteq A : |S| < \kappa\}$. Finalmente, el conjunto $X^{<\kappa}$ denota $\bigcup_{n\in\kappa} X^n$.

Hablar de $\omega, \mathfrak{c}$

Definición 2.0.1 Un **filtro** $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X es un subconjunto propio no vacío de $\mathcal{P}(X)$ tal que:

- $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$ implica que $B \in \mathcal{F}$.
- $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$ implica que $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Definición 2.0.2 Un **ideal** $\mathcal{I}$ sobre un conjunto X es un subconjunto propio no vacío de $\mathcal{P}(X)$ tal que:

- $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$ implica que $B \in \mathcal{I}$.
- $A \in \mathcal{I}$ y $B \in \mathcal{I}$ implica que $A \cup B \in \mathcal{I}$.

Note que ideal es la noción dual de filtro.

Teorema 2.0.3 (König) *Si I es un conjunto y para cada $i \in I$ tenemos cardinales κ_i, λ_i tales que $\kappa_i < \lambda_i$, entonces $\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$.* ■

Lema 2.0.4 *La cofinalidad de $\mathfrak{c}$ es mayor que ω.*

La prueba del lema anterior es fácil. Sólo hay que poner para todo $i < \omega$, $\kappa_i = 1$ y $\lambda_i = 2$. Por el Teorema de König, $\sum_1^\omega 1 < \prod_1^\omega 2$, y así $\omega < 2^{\aleph_0}$.

Definición 2.0.5 Hipótesis del Continuo (CH): $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Definición 2.0.6 Se dice que una teoría T es **consistente** si no contiene contradicciones; es decir, que para toda proposición P$\in$T, no se pueden probar P y $\neg$P simultaneamente.

Definición 2.0.7 Se dice que una proposición P es **consistente** con una teoría T si T$\cup\{$P$\}$ es consistente.

Definición 2.0.8 Se dice que una proposición P es **independiente** de una teoría T si T no prueba ni refuta a P; es decir, es imposible demostrar P a partir de T, y también es imposible demostrar $\neg$P a partir de T.

Teorema 2.0.9 (Gödel) *La Hipótesis del Continuo es consistente con los axiomas de Zermelo-Fraenkel más el Axioma de Elección.* ■

Teorema 2.0.10 (Cohen) *La Hipótesis del Continuo es independiente de los axiomas de Zermelo-Fraenkel más el Axioma de Elección.* ■

Definición 2.0.11 Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Decimos que $\mathcal{F}$ forma un **Δ-sistema** si existe un conjunto R tal que para todos F,$F' \in \mathcal{F}$ tenemos que $F \cap F' = R$.

Lema 2.0.12 (Sanin) Δ*-Lema: Sea $\mathcal{A}$ una familia no numerable de conjuntos finitos. Entonces existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ no numerable que forma un Δ-sistema.*

Demostración: Sea $\mathcal{F}'$ una familia no numerable de conjuntos finitos. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{F} \subseteq [\omega_1]^N$. Como $|\mathcal{F}'| > \aleph_0$, existe $n \in \omega$ tal que $|\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{F}' : |F| = n\}| = |\mathcal{F}'|$. Prosigamos por inducción sobre n. Para $n = 0$ es trivial ver que el lema se cumple. Supongamos que para conjuntos de cardinalidad $n < N$ se cumple el lema. Sea $\mathcal{F} \in [\omega_1]^N$ no numerable, veamos que existe $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ no numerable que forma un Δ-sistema. Haremos la demostración en dos casos:

Caso 1: Existe $\alpha \in \omega_1$ tal que existe $\mathcal{F}' \in [\mathcal{F}]^{\omega_1}$, tal que $\alpha \in \bigcap \mathcal{F}'$.

Por hipótesis, existe $\mathcal{D}' \subseteq \{F \backslash \{\alpha\} : F \in \mathcal{F}'\}$ que forma un Δ-sistema, entonces $\mathcal{D} = \{F \cup \{\alpha\} : F \in \mathcal{D}'\}$ forma un Δ-sistema en $\mathcal{F}$.

Caso 2: Para todo $\alpha \in \omega_1$ y para todo $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, si $\alpha \in \bigcap \mathcal{F}'$ entonces $|\mathcal{F}'| \leq \aleph_0$.

Veamos que existe $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ familia no numerable ajena por pares. Prosigamos por inducción sobre α. Supongamos que $\alpha < \omega_1$ y que para todo $\beta < \alpha$ hemos escogido $F_\beta \in \mathcal{F}$ de tal forma que $F_\gamma \cap F_\beta = \emptyset$ para todo $\gamma < \beta$.

Como hasta el paso α sólo tenemos una cantidad numerable de subconjuntos finitos de ω_1, existe $\zeta \in \omega_1$ tal que $\bigcup_{\beta \in \omega_1} F_\beta \subseteq \zeta$. Por hipótesis existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \cap \zeta = \emptyset$, ya que de lo contrario, existiría $\eta < \gamma$ tal que $\eta \in F_\beta$ para una cantidad no numerable de F_β's. Sea $F_\alpha = F$. Así hemos definido una subfamilia no numerable de $\mathcal{F}$ ajena por pares. ■

Teorema 2.0.13 (Baire) *Si X es un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto, entonces toda intersección numerable de densos abiertos es denso.*

Definición 2.0.14 Un conjunto abierto X es **regular** si $X = int(cl(X))$. En $\mathbb{R}$, el intervalo $(0, 1)$ es un abierto regular, pero el conjunto $(0, 1) \cup (1, 2)$ no lo es.

Definición 2.0.15 Un par $(\mathbb{P}, \leq)$ es un **preorden** si $\leq$ es una relación reflexiva y transitiva. A un preorden también le vamos a llamar **orden parcial**, abusando del término, ya que usualmente se requiere que un orden parcial sea antisimétrico.

Definición 2.0.16 Un **álgebra booleana** es un conjunto B con dos operaciones binaras $+$ y $\cdot$(suma y multiplicación), una operación unitaria $-$ (complemento) y dos constates 1,0 que cumplen las siguientes condiciones:

- $u + u = u = u \cdot u$.
- $u + v = v + u$ y $u \cdot v = v \cdot u$.
- $u + (v + w) = (u + v) + w$ y $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$.
- $(u + v) \cdot w = (u \cdot w) + (v \cdot w)$ y $(u \cdot v) + w = (u + w) \cdot (v + w)$.
- $u + (u \cdot v) = u = u \cdot (u + v)$.
- $u + (-u) = 1$ y $u \cdot (-u) = 0$.
- $-(u + v) = -u \cdot -v$ y $-(u \cdot v) = -u + -v$.
- $-(-u) = u$.
- $u \cdot 1 = u$ y $u + 0 = u$.

Se puede introducir un orden parcial $\leq$ en un álgebra booleana B haciendo: $u \leq v$ si y sólo si $u + v = v$ o de forma equivalente, $u \leq v$ si y sólo si $u \cdot v = u$. Con este orden, 1 y 0 son el máximo y el mínimo de B respectivamente.

Si B es un álgebra booleana, por el Teorema de Representación de Stone existe un homomorfismo $\Phi : B \to \mathcal{P}(\mathcal{S}(B))$, donde $\mathcal{S}(B) = \{U \subseteq B : U$ es un ultrafiltro en $B\}$ y $\Phi(u) = \{U \in \mathcal{S}(B) : u \in U\}$.

Definición 2.0.17 El espacio de Stone asociado a B es $\mathcal{S}(B)$ tomando como base para una topología en $\mathcal{S}(B)$ a todos los conjuntos $\Phi(u)$.

Lema 2.0.18 *$\mathcal{S}(B)$ es un espacio Hausdorff compacto.* ■

Definición 2.0.19 Una **línea de Souslin** es un orden total $\langle X, \leq \rangle$ tal que X tiene la ccc en la topología del orden, pero no es separable.

La **Hipótesis de Souslin** (SH) dice que no existen línas de Souslin. Se ha probado que SH es independiente de ZFC, e incluso de CH.

Capítulo 3

El Axioma de Martin

“Este no es el final. Ni siquiera es el principio del final. Pero sí es, tal vez, el final del principio.”

-Winston Churchill

En 1940 Gödel demostró que los axiomas de Zermelo-Fraenkel más el Axioma de Elección (ZFC) no pueden refutar la Hipótesis del Continuo (CH). En 1963, Cohen demostró que usando ZFC tampoco se puede probar CH. Estos dos resultados implican que CH es independiente de ZFC. Lo que hace que estos resultados sean tan importantes, es que en ese tiempo existían muchos problemas cuya solución dependía de la afirmación o negación de CH. Al demostrar que CH es independiente de ZFC, parecía que era necesario agregar un nuevo axioma. Los candidatos naturales para agregarse a ZFC eran CH y la negación de CH, pero ninguno de los dos satisfacía a los matemáticos de la época. La mayor parte de los matemáticos que trabajaban con teoría de conjuntos “sospechaban” que CH era falsa, incluso Gödel dijo alguna vez que su prueba de que CH era consistente sólo mostraba que los axiomas de Zermelo-Fraenkel eran deficientes. Uno de los principales problemas de CH es que es demasiado fuerte, pero su negación es demasiado débil.

En 1969 D.A. Martin y R.M. Solovay propusieron un nuevo axioma, al que llamaron el Axioma A. Este nuevo axioma tiene muchas propiedades que vale la pena mencionar, entre ellas que CH implica el Axioma A, pero el Axioma A+$\neg$CH es una proposición suficientemente fuerte para obtener con ella resultados interesantes. Ahora se conoce al Axioma A como el ***Axioma de Martin***.

3.1. El Axioma de Martin

Hay muchas versiones equivalentes del Axioma de Martin. La versión que presento a continuación no es la más accesible, pero sí es la más útil. Para llegar a ella debo introducir algunos conceptos necesarios:

En un orden parcial $\mathbb{P}$, se dice que dos elementos $x, y \in \mathbb{P}$ son **compatibles** si existe $z \in \mathbb{P}$ tal que $z \leq x$ y $z \leq y$. Se dice que z es **extensión** de x y de y. Si dos elementos no son compatibles, se dice que son **incompatibles**.

Un subconjunto D de un orden parcial $\mathbb{P}$ se llama **denso** si para todo $x \in \mathbb{P}$ existe $y \in D$ tal que $y \leq x$. Si $\mathcal{D}$ es una familia de densos, un filtro $\mathcal{F}$ se llama $\mathcal{D}$-genérico si para cada $D \in \mathcal{D}$ se tiene que $D \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Definición 3.1.1 Se dice que un orden parcial $\mathbb{P}$ tiene la **condición de la cadena contable** (ccc), si para todo $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}$ no numerable existen $X, Y \in \mathcal{F}$, tales que X y Y son compatibles.

Definición 3.1.2 Sea MA_κ la siguiente proposición: Si κ es un cardinal infinito y $(\mathbb{P}, \leq)$ es un conjunto preordenado con la ccc, y $\mathcal{D}$ es un conjunto de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ con $|\mathcal{D}| \leq \kappa$, entonces existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico en $\mathbb{P}$.

MA_κ se define para todo cardinal κ, pero los siguientes dos teoremas nos dicen que los cardinales para los cuales el Axioma de Martin es interesante son todos los κ tales que $\aleph_0 < \kappa < \mathfrak{c}$.

Teorema 3.1.3 (Rasiowa-Sikorski) *La proposición $MA_{\aleph_0}$ es verdadera.*

Demostración: Sea $\mathbb{P}$ un preorden y sea $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$ una familia numerable de densos en $\mathbb{P}$. Construyamos un filtro $\mathcal{D}$-genérico $\mathcal{F}$. Sea $x \in \mathbb{P}$, como D_0 es denso en $\mathbb{P}$, existe $x_0 \in D_0$ tal que $x_0 \leq x$. De igual manera, existe $x_1 \in D_1$ tal que $x_1 \leq x_0$ y así sucesivamente. Sea $X_n = \{y \in \mathbb{P} : x_n \leq y\}$. Entonces $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ es un filtro en $\mathbb{P}$. ■

Teorema 3.1.4 *La proposición $MA_{\mathfrak{c}}$ es falsa.*

Demostración: Sea $\mathbb{P} = \bigcup_{n\in\omega} 2^n$. Para cada $p, q \in \mathbb{P}$ definimos $p \leq q$ si y sólo si $dom(q) \subseteq dom(p)$ y para todo $n \in dom(q)$, $p(n) = q(n)$. Como $\mathbb{P}$ es numerable, entonces $\mathbb{P}$ tiene la ccc. Para cada $f \in 2^\omega$ sea $D_f = \{p \in \mathbb{P} : p \neq f|dom(p)\}$. Sea $f \in 2^\omega$, veamos que D_f es denso. Sea $p \in \mathbb{P}$ y sea $m = dom(p)$ si $p \neq f|m$ entonces $p \in D_f$. Supongamos que $p = f|dom(p)$, entonces sea $q \in 2^{m+1}$ tal que para todo $n \in m$, $q(n) = p(n)$ y $q(m) \neq f(m)$. Entonces $q \in D_f$ y $q \leq p$.

Para cada $n \in \omega$ sea $E_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in dom(p)\}$, es claro que E_n es denso para todo $n \in \omega$, ya que toda función que no tiene a n en su dominio se puede extender a otra que sí tiene a n en su dominio. Sea $\mathcal{D} = \{D_f : f \in$

$2^\omega\} \cup \{E_n : n \in \omega\}$. Es claro que $\mathcal{D}$ es una familia de subconjuntos densos de tamaño $\mathfrak{c}$.

Supongamos que vale $MA_{2^{\aleph_0}}$, entonces existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico $\mathcal{F}$ en $\mathbb{P}$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro, entonces es un sistema compatible de funciones y $f = \bigcup \mathcal{F} : \omega \to 2$ es una función. Note que para toda $h : \omega \to 2$, existe $p \in D_h \cap \mathcal{F}$ y por lo tanto existe $n \in \omega$ tal que $p(n) \neq q(n)$. Como $\mathcal{F}$ es un sistema compatible de funciones y $f = \bigcup \mathcal{F}$ entonces $f(n) \neq h(n)$. Entonces para toda $h : \omega \to 2$ tenemos que $f \neq h$. Lo cual contradice que $f : \omega \to 2$. ■

Un corolario inmediato del teorema anterior es el siguiente:

Corolario 3.1.5 *$MA_{\aleph_1}$ implica que la Hipótesis del Continuo es falsa.*

Definición 3.1.6 El **Axioma de Martin** (MA) es la siguiente proposición: Para todo cardinal infinito $\kappa < \mathfrak{c}$, se cumple MA_κ.

El teorema 3.1.3 trivialmente implica el siguiente teorema:

Teorema 3.1.7 *La Hipótesis del Continuo implica el Axioma de Martin.*

3.2. Equivalencias del Axioma de Martin

Al igual que el Axioma de Elección, el Axioma de Martin tiene muchas versiones equivalentes, la forma más usual de este axioma es la que se dió en la sección pasada, pero otras versiones pueden ser muy útiles para demostrar que alguna proposición implica o es equivalente al Axioma de Martin.

La siguiente proposición es muy útil para probar la consistencia de MA. Esto se hace por una iteración de forcing, un método desarrollado por Paul Cohen en 1962 que está fuera del alcance de este trabajo.

Definición 3.2.1 Sea MA^*_κ la siguiente proposición: Si $\mathbb{P}$ es un preorden de cardinalidad menor o igual a κ que cumple la ccc y $\mathcal{D}$ es una familia de a lo más κ densos en $\mathbb{P}$, entonces existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico en $\mathbb{P}$.

Se dice que un conjunto B es cerrado con respecto a una familia de funciones $\mathcal{F}$ si para todo $f \in \mathcal{F}$ se tiene que $f(B) \subseteq B$.

Lema 3.2.2 *Sea A un conjunto. Si $\{f_\alpha \in A^A : \alpha < \kappa\}$ es una familia de funciones y $g : A \times A \to A$, entonces existe $B \subseteq A$ con $|B| \leq \kappa$ tal que B es cerrado con respecto a la familia $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\} \cup \{g\}$.*

Demostración: Sean $a \in A$, $C_0 = \{a\}$ y $C_{n+1} = C_n \cup g(C_n \times C_n) \cup \bigcup_{\alpha<\kappa} f(C_n)$. Por inducción sobre n, usando que la cardinalidad de la imagen de un conjunto bajo una función siempre es menor o igual a la cardinalidad de dicho conjunto, podemos ver que $|C_n| \leq \kappa$ para todo $n \in \omega$. Sea $B =$

$\bigcup_{n\in\omega} C_n$, entonces para todo $\alpha < \kappa$ $|B| \leq \kappa$, $g(B \times B) \subseteq B$ y $f_\alpha(B) \subseteq B$. ■

Teorema 3.2.3 *Se cumple el Axioma de Martin si y sólo si se cumple MA^*_κ para todo $\kappa < \mathfrak{c}$.*

Demostración: Es claro que MA_κ implica MA^*_κ. Ahora supongamos MA^*_κ y veamos que se cumple MA_κ. Sean $(\mathbb{Q}, \leq)$ un conjunto preordenado con la ccc y $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de densos en $\mathbb{Q}$.

Como para todo $\alpha < \kappa$ tenemos que D_α es denso, podemos definir para cada $\alpha < \kappa$ una función $f_\alpha : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tal que $f_\alpha(p) \in D_\alpha$ y $f_\alpha(p) \leq p$ para todo $p \in \mathbb{Q}$. Ahora definamos $g : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tal que para cualesquiera $p, q \in \mathbb{Q}$, si p y q son compatibles, entonces $g(p, q)$ extiende a p y a q.

Al aplicar el lema 3.2.2 tenemos que existe $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$ de cardinalidad menor o igual a κ y que es cerrado con respecto a la familia $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\} \cup \{g\}$. Entonces podemos afirmar que $\mathbb{P}$ tiene la ccc y que para cada $\alpha < \kappa$, $D_\alpha \cap \mathbb{P} \neq 0$ y D_α es denso en $\mathbb{P}$.

Al aplicar MA^*_κ encontramos un filtro $\mathcal{D}$-genérico G en $\mathbb{P}$. G no necesariamente es filtro en $\mathbb{Q}$, pero $H = \{q \in \mathbb{Q} : \exists p \in G, p \leq q\}$ sí lo es. ■

Definición 3.2.4 Un álgebra booleana $\mathbb{B}$ es **completa** si para cualquier $A \subseteq \mathbb{B}$ no vacío, A tiene supremo.

Definición 3.2.5 Sea MA^b_κ la siguiente proposición: Si $\mathbb{B}$ es un álgebra booleana completa que satisface la ccc y $\mathcal{D}$ es una familia de a lo más κ densos, entonces existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico en $\mathbb{B}$.

Teorema 3.2.6 *Para todo $\kappa < \mathfrak{c}$, MA_κ es equivalente a MA^b_κ.*

Demostración: Cualquier álgebra booleana es un preorden, así que es trivial que MA_κ implica MA^b_κ. Ahora supongamos MA^b_κ y sea $\mathbb{P}$ un conjunto preordenado con $|\mathbb{P}| \leq \kappa$. Definamos para cada $p \in \mathbb{P}$ $N_p = \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$. Como para cada $q \in \mathbb{P}$, $q \in N_p$ implica que $N_q \subseteq N_p$, $\{N_p : p \in \mathbb{P}\}$ es base para una topología en $\mathbb{P}$. Sea $\mathbb{B}$ el álgebra booleana de conjuntos abiertos regulares en $\mathbb{P}$. Ahora definamos $i : \mathbb{P} \to \mathbb{B}$ de la siguiente manera: $i(p) = int(cl(N_p))$ para cada $p \in \mathbb{P}$. De esta forma, tenemos que para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$, $p \leq q$ implica que $i(p) \leq i(q)$ (es decir, $i(p) \cdot i(q) = i(p)$) y si p y q son incompatibles, entonces $i(p) \cdot i(q) = 0$. Esto es cierto porque $i(p) \cdot i(q) = 0$ si y sólo si $int(cl(N_p) \cap int(cl(N_q)) = \emptyset$, pero esto es equivalente a decir que $N_p \cap N_q = \emptyset$, que es equivalente a que p y q sean incompatibles.

Si $U \in \mathbb{B} \backslash \{0\}$ y $p \in U$, entonces $int(cl(N_p)) \subseteq U$. Entonces $i(p) \subseteq U$, es decir $i(p) \leq U$. Por lo tanto $i(\mathbb{P})$ es denso en $\mathbb{B} \backslash \{0\}$.

Sea $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de conjuntos densos en $\mathbb{P}$. Entonces, $\mathcal{D}' = \{i(D_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ es una familia de densos en $\mathbb{B} \backslash \{0\}$.

Como $\mathbb{P}$ satisface la ccc y $i(\mathbb{P})$ es denso en $\mathbb{B}\backslash\{0\}$, entonces $\mathbb{B}\backslash\{0\}$ tiene la ccc. Para cada $(p, q) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$, sea $H_{p,q}$ el conjunto de todos los $r \in \mathbb{P}$ tales que $r \leq p$ y $r \leq q$ o que r es incompatible con p o con q. Veamos que para cada $(p, q) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$, $H_{p,q}$ es denso en $\mathbb{P}$. Si $r \in \mathbb{P}$ y existe $r' \leq r$ tal que r' es incompatible con p o con q, entonces $r' \in H_{p,q}$. Ahora, si no existe tal $r' \in \mathbb{P}$, entonces r es compatible con p, y por lo tanto, existe $r_1 \in \mathbb{P}$ tal que $r_1 \leq r$ y $r_1 \leq p$. Pero r_1 también debe ser compatible con q, y entonces existe $r_2 \in \mathbb{P}$ tal que $r_2 \leq r_1$ y $r_1 \leq q$. Como $r_2 \leq p$ tenemos que $r_2 \in H_{p,q}$ y $r_2 \leq r$. Sabemos así que $i(H_{p,q})$ es denso en $\mathbb{B}\backslash\{0\}$. Sea $\mathcal{H} = \mathcal{D}' \cup \{i(H_{p,q}) : (p, q) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}\}$. Entonces, $|\mathcal{H}| \leq \kappa$, y usando MA_κ^b tenemos un filtro $\mathcal{H}$-genérico $\mathcal{F}$ en $\mathbb{B}\backslash\{0\}$.

Sea $\mathcal{G} = i^{-1}(\mathcal{F})$. Entonces para cada $\alpha < \kappa$, $\mathcal{G} \cap D_\alpha \neq \emptyset$ y para cada $(p, q) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$, $\mathcal{G} \cap H_{p,q} \neq \emptyset$. Si $p \in \mathcal{G}$ y $q \in \mathbb{P}$ tales que $q \geq p$, entonces $q \in \mathcal{G}$. Por lo tanto, $\mathcal{G}$ es un filtro en $\mathbb{P}$. Ahora, si $p, q \in \mathcal{G}$, como $\mathcal{G} \cap H_{p,q} \neq \emptyset$, existe $r \in \mathcal{G} \cap H_{p,q}$, y como $i(p), i(q), i(r) \in \mathcal{F}$ entonces p, q y r son compatibles y así $r \leq p$ y $r \leq q$. Por lo tanto, existe una extensión común de p y q en $\mathcal{G}$. Entonces, $\mathcal{G}$ es un filtro $\mathcal{D}$-genérico en $\mathbb{P}$. ■

Definición 3.2.7 Versión topológica del Axioma de Martin (MA_{Top}): Para todo espacio topológico (localmente) compacto Hausdorff que satisface la ccc, siempre que $\mathcal{U}$ sea una familia de subconjuntos abiertos densos no vacíos tal que $|\mathcal{U}| < \mathfrak{c}$, se cumple que $\bigcap \mathcal{U}$ es denso.

Note que la version topológica del Axioma de Martin "extiende" al Teorema de Baire (Teorema 2.0.13) en el sentido que estamos agrandando la cantidad de subconjuntos densos que se permite intersectar, pero restringiendo el espacio al considerar sólo espacios con la ccc.

Lema 3.2.8 *MA_κ implica la versión topológica del Axioma de Martin.*

Demostración: Supongamos MA_κ y sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de subconjuntos abiertos densos no vacíos para algún $\kappa < \mathfrak{c}$. Sea $\mathbb{P} = \{p \subseteq X : p$ es abierto y $p \neq \emptyset\}$ con $p \leq q$ si y sólo si $p \subseteq q$. Entonces, como X satisface la ccc, entonces $\mathbb{P}$ satisface la ccc. Para cada $\alpha < \kappa$, sean $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : cl(p) \subseteq U_\alpha\}$ y $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Veamos que cada D_α es denso en $\mathbb{P}$. Sea $q \in \mathbb{P}$. Como U_α es denso en el espacio X, $U_\alpha \cap q \neq \emptyset$. Sea $x \in U_\alpha \cap q$. Como X es Hausdorff compacto, $K = X\backslash(U_\alpha \cap q)$ es compacto, también tenemos que $x \notin K$. Entonces existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $x \in p$ y $cl(p) \cap K = \emptyset$. Por lo tanto, $p \leq q$ y $p \in D_\alpha$. Entonces D_α es denso en $\mathbb{P}$. Si $\mathcal{G}$ es un filtro $\mathcal{D}$-genérico en $\mathbb{P}$, entonces $\mathcal{G}$ tiene la propiedad de la intersección finita y como es compacto, tenemos que $\bigcap\{cl(p) : p \in G\} \neq \emptyset$. Pero $\bigcap\{cl(p) : p \in \mathcal{G}\} \subseteq \bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$. ■

Lema 3.2.9 *La versión topológica del Axioma de Martin implica MA_κ^b.*

Demostración: Sea $\mathbb{B}$ un álgebra booleana completa que satisface la ccc y sea $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de densos en $\mathbb{B}\setminus\{0\}$. Sea $\mathcal{S}(\mathbb{B})$ es espacio de Stone asociado a $\mathbb{B}$. $\mathcal{S}(\mathbb{B})$ es un espacio Hausdorff compacto. Como $\Phi(u) \cap \Phi(v) = \Phi(u \cdot v)$, tenemos que $\Phi(u) \cap \Phi(v) = \emptyset$ si y sólo si $u \cdot v = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{S}(\mathbb{B})$ tiene la ccc porque $\mathbb{B}$ tiene la ccc.

Para cada $\alpha < \kappa$, sea $W_\alpha = \bigcup\{\Phi(u) : u \in D_\alpha\}$. Entonces W_α es un abierto no vacío. Además, W_α es denso en $\mathcal{S}(\mathbb{B})$, ya que si $\Phi(v)$ es un abierto básico de $\mathcal{S}(\mathbb{B})$, entonces existe $u \in D_\alpha$ tal que $u \leq v$, y entonces $\Phi(u) \subset \Phi(v)$ y así $W_\alpha \cap \Phi(v) \neq \emptyset$. Por hipótesis, tenemos que $\bigcap\{W_\alpha : \alpha < \kappa\} \neq \emptyset$.

Sea $\mathcal{G} \in \bigcap\{W_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Entonces $\mathcal{G}$ es un filtro $\mathcal{D}$-genérico en $\mathbb{B}$ porque si $\alpha < \kappa$, $\mathcal{G} \in W_\alpha$ implica que existe $u \in D_\alpha$ tal que $\mathcal{G} \in \Phi(u)$, y por definicion de $\Phi(u)$ tenemos que $u \in \mathcal{G}$. Por lo tanto, $u \in \mathcal{G} \cap D_\alpha$. ■

El siguiente teorema se sigue directamente de los dos teoremas y lemas anteriores.

Teorema 3.2.10 *El Axioma de Martin es equivalente a la versión topológica del Axioma de Martin.* ■

En esta sección hemos mostrado tres equivalencias del Axioma de Martin, las cuales se pueden resumir en el siguiente teorema:

Teorema 3.2.11 *Para todo $\kappa < \mathfrak{c}$, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- MA_κ.
- MA_κ^*.
- MA_κ^b.
- MA_{Top}.

■

Capítulo 4

Consecuencias del Axioma de Martin

"*Es con lógica que demostramos,*
pero con intuición descubrimos."
-Henri Poincaré

Para poder ver la fortaleza del Axioma de Martin, hay que fijarnos en sus concecuencias. Aunque el enunciado del Axioma de Martin es muy conjuntista, veremos que tiene muchas consecuencias en diversas ramas de las matemáticas. Ya mencioné que cuando MA fue propuesto, el objetivo de su definición era sustituir a CH como axioma para agregarse a ZFC. Esto provocó que muchos matemáticos de la época buscaran implicaciones, ya que sólo se puede juzgar a un axioma por sus consecuencias. En este capítulo muestro algunas de las consecuencias que me parecen más interesantes.

4.1. La Proposición S_κ

Una de las primeras consecuencias de MA que se publicaron fue la proposición S_κ. R.M. Solovay propuso S_κ para demostrar que todo subconjunto de ω_1 se puede construir a partir de un subconjunto de ω y $2^{\aleph_0} > \aleph_1$. Este resultado no será abordado aquí, pero a continuación veremos que S_κ nos lleva a más consecuencias interesantes.

Definición 4.1.1 Sea S_κ la siguiente proposición: Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ familias de subconjuntos de ω de cardinalidad menor que κ tales que si $X \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ es un subconjunto finito de $\mathcal{A}$, entonces $X \setminus \bigcup \mathcal{C}$ es infinito. Entonces existe $X_0 \subseteq \omega$ tal que $X \cap X_0$ es infinito si $X \in \mathcal{B}$ y finito si $X \in \mathcal{A}$.

Teorema 4.1.2 *El Axioma de Martin para $\kappa < \mathfrak{c}$ (MA_κ), implica S_κ.*

Demostración: Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ conjuntos que satisfagan la hipótesis de la definición de S_κ. Sea $\mathbb{P}_\mathcal{A}$ la colección de pares $\langle P, \mathcal{Q}\rangle$ donde $P \subseteq \omega$ y $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{A}$ son finitos. Decimos que $\langle P_1, \mathcal{Q}_1\rangle \leq \langle P_2, \mathcal{Q}_2\rangle$ si y sólo si $P_2 \subseteq P_1$, $\mathcal{Q}_2 \subseteq \mathcal{Q}_1$ y $P_1 \cap (\bigcup \mathcal{Q}_2) \subseteq P_2$.

Veamos que $\mathbb{P}_\mathcal{A}$ cumple la ccc. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}_\mathcal{A}$ no numerable. Sólo hay $\aleph_0$ subconjuntos finitos de ω; por lo tanto, existen $\langle P_1, \mathcal{Q}_1\rangle, \langle P_2, \mathcal{Q}_2\rangle \in \mathcal{C}$ tales que $P_1 = P_2$. Entonces, $\langle P_1, \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2\rangle$ es una extensión común.

Para cada $X \in \mathcal{A}$, sea $\mathcal{Y}_X = \{\langle P, \mathcal{Q}\rangle : X \in \mathcal{Q}\}$. Sea $X \in \mathcal{A}$, veamos que $\mathcal{Y}_X$ es denso en $\mathbb{P}_\mathcal{A}$. Sea $\langle P, \mathcal{Q}\rangle \in \mathbb{P}_\mathcal{A}$, entonces $\langle P, \mathcal{Q} \cup \{X\}\rangle \leq \langle P, \mathcal{Q}\rangle$ y $\langle P, \mathcal{Q} \cup \{X\}\rangle \in \mathcal{Y}_X$.

Para cada $X \in \mathcal{B}$ y $n \in \omega$, sea $\mathcal{X}_{X,n} = \{\langle P, \mathcal{Q}\rangle : |P \cap X| \geq n\}$. Sean $X \in \mathcal{B}$ y $n \in \omega$, veamos que $\mathcal{X}_{X,n}$ es denso en $\mathbb{P}_\mathcal{A}$. Sea $\langle P, \mathcal{Q}\rangle \in \mathbb{P}_\mathcal{A}$, como $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{A}$, entonces $X \setminus \bigcup \mathcal{Q}$ es infinito. Entonces existe $P_1 \subseteq X$ de cardinalidad n tal que $P_1 \cap \bigcup \mathcal{Q} = \emptyset$. Entonces $\langle P \cup P_1, \mathcal{Q}\rangle \leq \langle P, \mathcal{Q}\rangle$ y $\langle P \cup P_1, \mathcal{Q}\rangle \in \mathcal{X}_{X,n}$.

Sea $\mathcal{D} = \{\mathcal{Y}_X : X \in \mathcal{A}\} \cup \{\mathcal{X}_{X,n} : X \in \mathcal{B}, n \in \omega\}$. $\mathcal{D}$ es una familia de densos en $\mathbb{P}_\mathcal{A}$ de cardinalidad menor que κ. Por MA_κ, existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico $\mathcal{G}$ en $\mathbb{P}_\mathcal{A}$.

Sea

$$X_0 = \bigcup \{P : (\exists Q)(\langle P, Q\rangle \in \mathcal{G})\}.$$

Veamos que X_0 es el conjunto buscado. Sean $X \in \mathcal{A}$, $\langle P, \mathcal{Q}\rangle \in \mathcal{G} \cap \mathcal{Y}_X$ y $\langle P', \mathcal{Q}'\rangle \in \mathcal{G}$. Como $\langle P, \mathcal{Q}\rangle$,$\langle P', \mathcal{Q}'\rangle \in \mathcal{G}$, entonces son compatibles, sea $\langle P_1, \mathcal{Q}_1\rangle$ una extensión común. Como $\langle P_1, \mathcal{Q}_1\rangle \leq \langle P, \mathcal{Q}\rangle$ entonces $P_1 \cap (\bigcup \mathcal{Q}) \subseteq P$, y por lo tanto, $P_1 \cap X \subseteq P$. También tenemos que $P' \cap X \subseteq P_1 \cap X \subseteq P$. Como P' era un conjunto arbitrario, $X_0 \cap X \subseteq P$, y por lo tanto $X_0 \cap X$ es finito.

Sean $X \in \mathcal{B}$ y $n \in \omega$. Veamos que $|X_0 \cap X| \geq n$. Sea $\langle P, \mathcal{Q}\rangle \in \mathcal{G} \cap \mathcal{X}_{X,n}$. Por construcción, $P \subseteq X_0$, y por la definición de $\mathcal{X}_{X,n}$ sabemos que $|P \cap X| \geq n$, por lo tanto $|X_0 \cap X| \geq n$. ■

Una de las aplicaciones más sencillas pero muy importante es que S_κ implica que $\mathfrak{c}$ es un cardinal regular. Usando el método de Cohen, es posible demostrar que es consistente que $\mathfrak{c}$ es un cardinal singular.

Teorema 4.1.3 *S_κ implica que $2^\kappa = 2^{\aleph_0}$.*

Demostración: Es claro que $2^{\aleph_0} \leq 2^\kappa$, veamos que $2^\kappa \leq 2^{\aleph_0}$. Sea $\{S_\alpha : \alpha \leq \kappa\}$ una colección infinita de subconjuntos de ω. Sea $f : \mathcal{P}(\aleph_0) \to \mathcal{P}(\kappa)$ dada por $f(X) = \{\alpha < \kappa : X \cap S_\alpha \text{ es infinito}\}$. Veamos que f es sobreyectiva. Sean $X \in \mathcal{P}(\kappa)$, $\mathcal{B} = \{S_\alpha : \alpha \in X\}$ y $\mathcal{A} = \{S_\alpha : \alpha \in \kappa \setminus X\}$. Por S_κ, existe $X_0 \subseteq \omega$ tal que $f(X_0) = X$. Por lo tanto, $2^\kappa \leq 2^{\aleph_0}$, y así, $2^\kappa = 2^{\aleph_0}$. ■

El teorema de König (Teorema 2.0.3) implica que la cofinalidad de $\mathfrak{c}$ siempre es no numerable. Para llegar a esto necesitamos el siguiente corolario:

Corolario 4.1.4 *El Axioma de Martin implica que si $\kappa < \mathfrak{c}$, entonces $2^\kappa = 2^{\aleph_0}$.*

Corolario 4.1.5 *S_κ para todo $\kappa < \mathfrak{c}$ implica que $\mathfrak{c}$ es regular.*

Demostración: Supongamos que $\mathfrak{c}$ es singular, entonces existe $\kappa < \mathfrak{c}$ cofinal en $\mathfrak{c}$. Pero por el teorema de König, κ no es cofinal en 2^κ. Como $2^\kappa = \mathfrak{c}$, entonces κ no es cofinal en $\mathfrak{c}$, y tenemos una contradicción. ■

4.2. Medida y Categoría

Como el Axioma de Martin es una extensión del teorema de Baire, es natural pensar que tiene muchas implicaciones en medida y categoría. Veremos que no sólo extiende al teorema de Baire, sino que implica extensiones de muchos teoremas fundamentales de teoría de la medida. El lector interesado en la relación entre medida y categoría puede consultar el libro de Oxtoby[O_2].

Teorema 4.2.1 *El Axioma de Martin implica que si $\kappa < \mathfrak{c}$, entonces la unión de κ conjuntos de medida 0 tiene medida 0.*

Demostración: Sean A_α con $\alpha < \kappa$ conjuntos de medida 0 y sea $\epsilon > 0$. Veamos que $\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ tiene medida exterior 0. Sea $\mathbb{P} = \{X \subseteq \mathbb{R} : \mu(X) < \epsilon\}$ y para todos $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ vamos a decir que $X \leq Y$ si y sólo si $Y \subseteq X$. Veamos que $\mathbb{P}$ tiene la ccc. Supongamos que $\mathcal{D}$ es una anticadena no numerable, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{E} = \{P \in \mathcal{D} : \mu(P) < \epsilon - \delta\}$ es no numerable. Como $\mathbb{R}$ es segundo numerable, sea $\{B_n : n \in \omega\}$ una base de abiertos de $\mathbb{R}$. Para cada $P \in \mathcal{E}$, sea Q_P una unión finita de básicos tal que $\mu(P \backslash Q_P) \leq \delta/2$. Como sólo hay una cantidad numerable de uniones finitas de básicos, $\{Q_P : P \in \mathcal{E}\}$ es numerable. Si $P_1, P_2 \in \mathcal{E}$ y $P_1 \neq P_2$, entonces P_1 y P_2 son incompatibles, y entonces $\mu(P_1 \cup P_2) > \epsilon$. Pero

$$\mu(Q_{P_1} \cup Q_{P_2}) \geq \mu(P_1 \cup P_2) - \delta/2 - \delta/2 \geq \epsilon - \delta$$

y $\mu(Q_{P_1}) \leq \mu(P_1) < \epsilon - \delta$, entonces $Q_{P_1} \neq Q_{P_2}$. Por lo tanto, como $\{Q_P : P \in \mathcal{E}\}$ es numerable, entonces $\mathcal{E}$ también lo es.

Para cada $\alpha < \kappa$, sea $X_\alpha = \{P \in \mathbb{P} : A_\alpha \subseteq P\}$. Veamos que X_α es denso. Sea $P \in \mathbb{P}$, como $\mu(A_\alpha) = 0$, entonces existe un abierto Q con $\mu(Q) < \epsilon - \mu(P)$, entonces $P \cup Q \in X_\alpha$.

Sea $\mathcal{D} = \{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Como $\mathcal{D}$ es familia de densos, por MA sea $\mathcal{G}$ un filtro $\mathcal{D}$-genérico. Claramente $\bigcup \mathcal{G}$ es abierto y $\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha \subseteq \bigcup \mathcal{G}$. Supongamos que $\mu(\bigcup \mathcal{G}) > \epsilon$, como $\mathbb{R}$ y todos sus subespacios son espacios de Lindelöf existen abiertos $B_n \in \mathcal{G}$ con $n \in \omega$ tales que $\mu(\bigcup_{n\in\omega} B_n) > \epsilon$, y por lo tanto existen $B_1, ..., B_N \in \mathcal{G}$ tales que $\mu(\bigcup_{i=0}^N B_i) > \epsilon$. Como $\mathcal{G}$ es filtro,

$\bigcup_{i=0}^{N} B_i \in \mathcal{G}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mu(G) \leq \epsilon$ y entonces $\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ tiene medida exterior 0. ∎

Este teorema tiene dos implicaciones inmediatas que vale la pena enunciar:

Corolario 4.2.2 *El Axioma de Martin implica que el ideal de conjuntos de medida 0 es $2^{\aleph_0}$-aditivo.*

Corolario 4.2.3 *El Axioma de Martin implica que si A es un conjunto con $|A| < \mathfrak{c}$, entonces $\mu(A) = 0$.*

El teorema anterior dice que la unión de menos que $\mathfrak{c}$ conjuntos nulos es nulo, pero el Axioma de Martin nos puede decir aún más:

Teorema 4.2.4 *El Axioma de Martin implica que la σ-álgebra de conjuntos Lebesgue medibles es κ-completa para todo $\kappa < \mathfrak{c}$.*

Demostración: Sean $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ conjuntos Lebesgue-medibles, veamos que $\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ es Lebesgue-medible. Sea $C \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ un conjunto de Borel tal que $\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha \backslash C$ tiene medida interior 0, entonces, para cada $\alpha < \kappa$, $\mu(A_\alpha \backslash C) = 0$. Como la medida de Lebesgue es $2^{\aleph_0}$-aditiva, $\mu(\bigcup_{\alpha<\kappa}(A_\alpha \backslash C)) = 0$. Pero $\bigcup_{\alpha<\kappa}(A_\alpha \backslash C) = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha \backslash C$, entonces

$$\mu(\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha \backslash C) = 0$$

y por lo tanto, $\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ es Lebesgue-medible. ∎

Este teorema tiene un corolario sorprendente: Que la medida de Lebesgue no sólo es aditiva hasta $\kappa < \mathfrak{c}$, sino que es $\mathfrak{c}$-aditiva.

Corolario 4.2.5 *El Axioma de Martin implica que la medida de Lebesgue es $2^{\aleph_0}$-aditiva.*

Demostración: Sean A_α con $\alpha < \kappa < \mathfrak{c}$, conjuntos medibles ajenos por pares. Entonces sólo una cantidad numerable de ellos tiene medida positiva. Sean A_{α_i}, con $i \in \omega$ todos los conjuntos con medida positiva. Entonces

$$\mu(\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha) = \mu(\bigcup_{i\in\omega} A_{\alpha_i}) + \mu(\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha \backslash \bigcup_{i\in\omega} A_{\alpha_i}) = \sum_{i\in\omega} \mu(A_{\alpha_i}) = \sum_{\alpha<\kappa} \mu(A_\alpha).$$

y por lo tanto, la medida de Lebesgue es $2^{\aleph_0}$-aditiva. ∎

El siguiente teorema nos dice que el Axioma de Martin implica una proposición que se conoce como el Teorema Fuerte de Categoría de Baire. No requeriremos demostrar este teorema porque es claro que el Teorema Fuerte de Categoría de Baire es equivalente a la versión topológica del Axioma de Martin (3.2.7).

Teorema 4.2.6 *El Axioma de Martin implica que si X es un espacio topológico Hausdorff compacto y que satisface la ccc, entonces la intersección de $\kappa < 2^{\aleph_0}$ densos abiertos es denso.*

El siguiente resultado ilustra la dualidad entre medida y categoría.

Definir magro

Teorema 4.2.7 *El Axioma de Martin implica que la union de $\kappa < \mathfrak{c}$ conjuntos magros es magro.*

Demostración: Un conjunto es magro si y sólo si su complemento es comagro, entonces es equivalente probar que la intersección de $\kappa < \mathfrak{c}$ conjuntos comagros es comagro. Un conjunto comagro contiene una intersección de una cantidad numerable de densos abiertos, así que basta con ver que la intersección de κ densos abiertos es comagro.

Sean D_α con $\alpha < \kappa$ conjuntos densos abiertos, y sean B_i, con $i \in \omega$, una base de abiertos de $\mathbb{R}$. Para cada denso D sea $s(D) = \{i \in \omega : B_i \nsubseteq D\}$. Para cada $j \in \omega$ sea $t(j) = \{i \in \omega : B_i \subseteq B_j\}$. Sea $A = \{s(D_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ y sea $B = \{t(j) : j \in \omega\}$. Veamos que los conjuntos A y B cumplen las hipótesis de la proposición S_κ. Sean $n, j < \omega$ y $s(D_{\alpha_1}), \ldots, s(D_{\alpha_n}) \in A$. Como la intersección finita de densos abiertos es denso abierto, existe $B_i \subseteq B_j \cap D_{\alpha_1} \cap \ldots \cap D_{\alpha_n}$, entonces $\{m : B_m \subseteq B_i\}$ es un subconjunto infinito de $t(j) \backslash (s(D_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup s(D_{\alpha_n}))$. Por la proposición S_κ, sea $X \subseteq \omega$ tal que $X \cap t(j)$ es infinito para todo $j \in \omega$ y $X \cap X$ es finito para todo $S \in A$. Para cada $n \in \omega$ sea $W_n = \bigcup_{n<i\in X} B_i$. Como para todo $j \in \omega$ $X \cap t(j)$ es infinito, para todo $j \in \omega$ existe $B_i \subseteq W_n \cap B_j$. Entonces W_n es denso abierto. Para cada $\alpha < \kappa$, $X \cap s(D_\alpha)$ es finito, entonces existe $n \in \omega$ tal que $W_n \subseteq D_\alpha$. Por lo tanto, $\bigcap_{n\in\omega} W_n \subseteq \bigcap_{\alpha<\kappa} D_\alpha$. Como $\bigcap_{n\in\omega} W_n$ es comagro, entonces $\bigcap_{\alpha<\kappa} D_\alpha$ también lo es. ■

4.3. Espacios Numerablemente Compactos

Esta sección muestra cómo MA sirve para encontrar un peculiar resultado de topología. Este resultado es peculiar porque casi todas las implicaciones del Axioma de Martin tienen restricciones de cardinalidad, pero veremos que este no. Antes de enunciar el teorema, necesito enunciar algunas definiciones:

Definición 4.3.1 Decimos que un espacio topológico X es **separado derecho** si existe un buen orden $X = \{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ tal que para todo $\beta < \kappa$ el conjunto $\{x_\alpha : \alpha \leq \beta\}$ es abierto en X.

Definición 4.3.2 Sea X un espacio topológico, entonces definimos la **amplitud** $s(X)$ como $\sup\{|E| : E \subseteq X \text{ es discreto}\}$.

Definición 4.3.3 Sea S la siguiente proposición: Si $\mathcal{F}$ es una familia de menos que $2^{\aleph_0}$ subconjuntos de ω tales que la intersección de cada subfamilia finita de $\mathcal{F}$ es infinita, entonces existe $B \subseteq \omega$ infinito tal que para cada $A \in \mathcal{F}$ tenemos que $B \backslash A$ es finito.

Teorema 4.3.4 *El Axioma de Martin implica la proposición S.*

Demostración: Sea $\kappa < \mathfrak{c}$ y sea $\mathcal{F} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ como en el enunciado del teorema. Sea $\mathbb{P} = \{\langle b, F\rangle : b \in [\omega]^{<\aleph_0}, F \in [\kappa]^{<\aleph_0}\}$. Vamos a decir que $\langle b, F\rangle \leq \langle b_2, F_2\rangle$ si y sólo si $b_2 \leq b_1$, $F_2 \subseteq F_1$ y para todo $\alpha \in F_2$ se cumple que $b_1 \backslash b_2 \subseteq A_\alpha$.

Veamos que $\mathbb{P}$ tiene la ccc. Sea $\mathcal{A}$ una anticadena no numerable. Como sólo hay una cantidad numerable de subconjutos finitos de ω, entonces existen $\langle b, F_1\rangle, \langle b, F_2\rangle \in \mathcal{C}$. Entonces $\langle b, F_1 \cup F_2\rangle$ es una extensión común.

Para cada $\alpha < \kappa$ sea $D_\alpha = \{\langle b, F\rangle \in \mathbb{P} : \alpha \in F\}$. Es trivial ver que D_α es denso para cada $\alpha < \kappa$. Para cada $n \in \omega$ sea $E_n = \{\langle b, F\rangle \in \mathbb{P} : (\exists m \in b)(m \geq n)\}$. Veamos que E_n es denso para cada $n \in \omega$. Sea $\langle b, F\rangle$ tal que para todo $m \in b$, tenemos que $n \geq m$. Por hipótesis, $\bigcap F \neq \emptyset$. Sea $m \in \bigcap F$, entonces $\langle b \cup \{m\}, F\rangle$ extiende a $\langle b, F\rangle$ y $\langle b \cup \{m\}, F\rangle \in E_n$. Sea $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\} \cup \{E_n : n \in \omega\}$.

Sea $\mathcal{G}$ el filtro $\mathcal{D}$-genérico que obtenemos al aplicar MA a $\mathbb{P}$ y sea $B = \bigcup\{b : \langle b, F\rangle \in \mathcal{G}$ para algún $F\}$. Veamos que B es el conjunto buscado. Sea $A \in \mathcal{F}$, entonces $A = A_\alpha$ para algún $\alpha < \kappa$. Sea b tal que existe F tal que $\langle b, F\rangle \in \mathcal{G} \cap D_\alpha$. Veamos que $B \backslash A_\alpha \subseteq b$. Supongamos que existe $n \in (B \backslash A_\alpha) \backslash b$, entonces $n \in b'$ para algún b' tal que existe F' tal que $\langle b', F'\rangle \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ es filtro, $\langle b, F\rangle$ y $\langle b', F'\rangle$ son compatibles. Sea $\langle b'', F''\rangle$ extensión común, entonces $n \in b''$, pero como $\langle b'', F''\rangle \leq \langle b, F\rangle$, $n \in A_\alpha$ contradiciendo que $n \in (B \backslash A_\alpha) \backslash b$. ■

Lema 4.3.5 *Sea X un espacio topológico. Existe un subespacio $A \subseteq X$ separado derecho de cardinalidad $\aleph_1$ si y sólo si X no es Lindelöf.*

Demostración: $\Rightarrow$]. Sea $A \subseteq X$ un espacio separado derecho de cardinalidad $\aleph_1$. Sea $A = \{a_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ y para cada $\alpha < \omega_1$, sea $U_\alpha = \{a_\beta : \beta \leq \alpha\}$. Es claro que $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una cubierta abierta no numerable de X. Supongamos que existe una subcubierta $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ numerable. Como ω no es cofinal en ω_1, existe $\alpha < \omega_1$ tal que para todo $U_\beta \in \mathcal{U}'$, $\beta < \alpha$. Entonces $a_\alpha \notin \bigcup \mathcal{U}'$, contradiciendo que $\mathcal{U}'$ es cubierta.

$\Leftarrow$]. Como X no es Lindelöf, existe $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ cubierta abierta no numerable, tal que cualquier subfamilia numerable no es cubierta de X. Sea $V_0 = U_0$, $y_0 \in V_0$. Supongamos que hemos escogido $y_\beta \in V_\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Como sólo tenemos una cantidad numerable de abiertos, no cubren a X, y podemos escoger $y_\alpha \in X \backslash \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$. Como $\mathcal{U}$ es cubierta, $y_\alpha \in U_\gamma$ para algún γ, sea $V_\alpha = U_\gamma$. Sea $Y = \{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ y sea $\alpha < \omega_1$. Es claro que

$\bigcup\{V_\beta : \beta \leq \alpha\}$ es abierto, y por construcción, $\{y_\beta : \beta \leq \alpha\} \cap \bigcup Y = \{V_\beta : \beta \leq \alpha\}$, entonces $\{V_\beta : \beta \leq \alpha\}$ y, por lo tanto, Y es un subespacio separado derecho de cardinalidad $\aleph_1$. ■

Lema 4.3.6 *Si X es un espacio numerablemente compacto y perfecto, entonces $s(X) = \aleph_0$.*

Demostración: Si $D = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es discreto con $x_\alpha \neq x_\beta$ si $\alpha \neq \beta$ y para cada $\alpha \in \omega_1$, sea U_α abierto tal que $U_\alpha \cap D = \{x_\alpha\}$. El conjunto $G = \bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha$ es abierto y como X es perfecto G es F_σ. Entonces $G = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ y por lo tanto existe $F \subseteq G$ con $F \cap D$ no numerable.

Sea $\langle\alpha(n) : n \in \omega\rangle$ una sucesión creciente de ordinales tales que $x_{\alpha(n)} \in F$ para todo $n \in \omega$ y sea α^* =sup$\{\alpha(n) : n \in \omega\}$. Como X es numerablemente compacto, el conjunto $S = \bigcap_{n\in\omega} cl\{x_{\alpha(m)} : n \leq m < \omega\}$ es no vacío, sea $x \in S$. Como $S \subseteq F \subseteq G$, $x \in U_\alpha$ para algún $\alpha < \omega_1$.

Si $\alpha \geq \alpha^*$, entonces

$$U_\alpha \cap \{x_{\alpha(m)} : m \in \omega\} \subseteq U_\alpha \cap \{x_\gamma : \gamma < \alpha\} = \emptyset$$

y entonces $x \notin cl\{x_\alpha(m) : m \in \omega\}$, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, si $\alpha < \alpha^*$ entonces $\alpha < \alpha_N$ para algún $N \in \omega$, y

$$U_\alpha \cap \{x_{\alpha(m)} : N \leq m < \omega\} \subseteq U_\alpha \cap \{x_\gamma : \gamma > \alpha\} = \emptyset$$

y así $x \notin cl\{x_{\alpha(m)} : N \leq m < \omega\}$, lo cual también es una contradicción. ■

Lema 4.3.7 *Si X es un espacio separado derecho con $s(X) = \aleph_0$, entonces X es separable.*

Demostración: Supongamos que X no es separable. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $X = \kappa$ con algúna topología, para algún cardinal κ. Como κ es separado derecho, para todo $\alpha \in \kappa$, $\{\beta \in \kappa : \beta \leq \alpha\}$ es abierto. Sea $x_0 \in X$ y sea $U_0 \subseteq \kappa$ abierto tal que $x_0 \in U_0$. Supongamos que ya tenemos $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ y $\{U_\beta : \beta < \alpha\}$ tales que $x_\gamma \notin U_\beta$ para $\gamma < \beta < \alpha$ y $x_\beta \in U_\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Como X no es separable, existe U tal que $x_\gamma \notin U$ para todo $\gamma < \alpha$. Sea $U_\alpha = U$ y sea $x_\alpha \in U_\alpha$.

Veamos que $E = \{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es discreto. Es claro que $x_\beta \in U_\beta \cap [\leftarrow, x_\beta]$ y que $U_\beta \cap [\leftarrow, x_\beta]$ es abierto en X. Pero $U_\beta \cap [\leftarrow, x_\beta] \cap E = \{x_\beta\}$, por lo tanto, E es un discreto no numerable, contradiciendo que $s(X) = \aleph_0$. ■

Note que es fácil cambiar la demostracion anterior para obtener $hd(X) = \aleph_0$.

Lema 4.3.8 *El Axioma de Martin implica que si X es un espacio separable y numerablemente compacto y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X con $|\mathcal{U}| < 2^{\aleph_0}$, entonces existe $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ finita tal que $\{cl(U) : U \in \mathcal{U}'\}$ cubre a X.*

Demostración: Sean X y $\mathcal{U}$ como en la hipóteis del lema. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que X no es compacto. Sea $D = \{x_n : n \in \omega\}$ un conjunto denso. Sin pérdida de generalidad, para todo $U \in \mathcal{U}$, $D \nsubseteq U$. Para cada $U \in \mathcal{U}$, sea $A_U = \{n \in \omega : x_n \notin cl(U)\}$. Como X no es compacto, para todo $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ finita, $|\bigcap_{U \in \mathcal{U}'} A_U| = \aleph_0$. Sea $\mathcal{A} = \{A_U : U \in \mathcal{U}\}$, $\mathcal{A}$ es centrada. Sea E la pseudointersección de $\mathcal{A}$ que obtenemos al aplicar S a $\mathcal{A}$. Entonces si $U \in \mathcal{U} \Rightarrow E \subseteq^* A_U$. Note que $E' = \{x_n : n \in E\} \subseteq \bigcup \mathcal{U}$.

Veamos que E' es cerrado y discreto. Sea $x \in X$, entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$, pero como $E \subseteq^* A_U$, $|E' \cap U| < \aleph_0$. Por lo tanto, si $x \notin E'$ existe un conjunto abierto U' tal que $U' \cap E' = \emptyset$. Si $x \in E'$, entonces existe un conjunto abierto U' tal que $U' \cap E' = \{x\}$. Esto implica que E es cerrado y discreto, y por lo tanto E es un conjunto infinito que no tiene puntos de acumulación, lo cual contradice que X sea numerablemente compacto. ■

Teorema 4.3.9 *El Axioma de Martin más la negación de la Hipótesis del Continuo implican que todo espacio numerablemente compacto, perfecto y regular es compacto.*

Demostración: Supongamos que X es un espacio numerablemente compacto, perfecto, regular y que no es de Lindelöf. Por el lema 4.3.5, X contiene a un subespacio separado derecho Y de cardinalidad $\aleph_1$. Sea $Y = \{y_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$. Para cada $\beta < \omega_1$, existe U_β abierto en X, tal que $\{y_\alpha : \alpha \leq \beta\} \subseteq U_\beta$ y $U_\beta \cap \{y_\alpha : \alpha > \beta\} = \emptyset$.

Como X es regular, para cada $\beta < \omega_1$ podemos escojer una vecindad abierta V_β de y_β tal que $cl(V_\beta) \subseteq U_\beta$. Como los U_β son numerables, no existe una subcolección numerable de $\{cl(V_\beta) : \beta < \omega_1\}$ que cubra a un subconjunto no numerable de Y.

Como X es perfecto y $\bigcup\{V_\beta : \beta < \omega_1\}$ es abierto, existe una colección numerable de cerrados $\{F_n : n \in \omega\}$ tal que $\bigcup\{V_\beta : \beta < \omega_1\} = \bigcup\{F_n : n \in \omega\}$. Por lo tanto, existe $m \in \omega$ tal que $Y \cap F_m$ es no numerable.

Sea $E = cl(Y \cap F_m)$. Como E es un subconjunto cerrado de F_m, E es numerablemente compacto y regular. Por los lemas 4.3.6 y 4.3.7, Y es hereditariamente separable, y por lo tanto E es separable, contradiciendo al lema 4.3.8. ■

4.4. Otras Consecuencias del Axioma de Martin

El Axioma de Martin tiene consecuencias en casi todas las ramas de las matemáticas, muchas de las cuales estan fuera del alcance de este trabajo. A continuación presento una consecuencia en teoría de conjuntos que nos dice que $\mathcal{P}(\omega)/\text{fin}$ es tan complejo que contiene una copia de cualquier conjunto ordenado.

Teorema 4.4.1 *Sea $\langle X, \leq\rangle$ un orden total con $|X| \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$. MA_κ implica que para cada $x \in X$ existe $a_x \in [\omega]^{\aleph_0}$ tal que si $x \leq y$, entonces $a_x \subseteq^* a_y$.*

Demostración: Primero necesitaremos un orden parcial que cumpla la ccc.

Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de pares $\langle p, n\rangle$ tales que $n \in \omega$, $dom(p) \in [X]^{<\aleph_0}$ y $p(x) \subseteq n$ para cada $x \in dom(p)$. Vamos a decir que $\langle p, n\rangle \leq \langle q, m\rangle$ si y sólo si:

- $m \leq n$
- $dom(q) \subseteq dom(p)$
- $(\forall x \in dom(q))(p(x) \cap m = q(x))$
- $(\forall x, y \in dom(q))(x < y \Rightarrow (p(x) \backslash p(y)) \subseteq n)$.

Veamos que $\mathbb{P}$ tiene la ccc. Sea $\mathcal{C}$ no numerable. Entonces existe $n \in \omega$ tal que $|\{p : \langle p, n\rangle \in \mathcal{C}\}| > \aleph_0$. Sea $\mathcal{F} = \{dom(p) : \langle p, n\rangle \in \mathcal{C}\}$. La familia $\mathcal{F}$ es no numerable de conjuntos finitos. Al aplicar Δ-Lema sabemos que existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ tal que para todos p, q tales que $\langle p, n\rangle, \langle q, n\rangle \in \mathcal{C}'$ se tiene que $dom(p) \cap dom(q) = R$. Como $|\mathcal{C}'| > \aleph_0$ y $p \restriction R$ es una función de R a n, existen p, q tales que $p \restriction R = q \restriction R$. Ahora, sea $r(x) = p(x)$ si $x \in dom(p)$ y $r(x) = q(x)$ si $x \in dom(q) \backslash dom(p)$. Veamos que $\langle r, n\rangle$ es extensión común. Claramente $n \leq n$. Por construcción, $dom(r) = dom(p) \cup dom(q)$, por lo tanto, es claro que $dom(p) \subseteq dom(r)$ y $dom(q) \subseteq dom(r)$. Para todo $x \in dom(p)$ $r(x) = p(x)$, por lo tanto, $r(x) \cap n = p(x)$. Como para todo $x \in dom(r)$ $r(x) \subseteq n$, para todo $x, y \in dom(r)$ tenemos que $r(x) \backslash r(y) \subseteq n$. Por lo tanto, $\mathcal{C}$ no puede ser una anticadena, y as $\mathbb{P}$ tiene la ccc.

Para cada $x \in X$ y $m \in \omega$, sea $E^x_m = \{\langle p, n\rangle : x \in dom(p), p(x) \backslash m \neq \emptyset\}$. Sea $x \in X$ y $m \in \omega$, veamos que E^x_m es denso en $\mathbb{P}$.

Sea $\langle q, n\rangle \in \mathbb{P}$, entonces definamos $p(y) = q(y)$ para todo $y \neq x$, y $p(x) = q(x) \cup \{\max\{m, n\}\}$, así, $\langle p, max(m, n) + 1\rangle \in E^x_m$ y

$$\langle p, max(m, n) + 1\rangle \leq \langle q, n\rangle$$

. Sea $\mathcal{D} = \{E^x_m : m \in \omega, x \in X\}$, entonces $\mathcal{D}$ es una familia de densos y $|\mathcal{D}| < \kappa$.

Sea $\mathcal{G}$ un filtro $\mathcal{D}$-genérico. Para cada $x \in \omega$ sea

$$a_x = \bigcup\{p(x) : (\exists n)(\langle p, n\rangle \in \mathcal{G})\}.$$

Sea $x < y$, veamos que $a_x \subset^* a_y$. Sean $\langle p, m\rangle \in \mathcal{G} \cap E^x_0$ y $\langle q, n\rangle \in \mathcal{G} \cap E^y_0$. Entonces, existe $\langle r, k\rangle \in \mathcal{G}$ que es extensión común. Veamos que $a_x \backslash a_y \subseteq k$. Sea $i \in a_x \backslash a_y$, entonces existe $\langle r', k'\rangle \in \mathcal{G}$ tal que $i \in r'(x)$ y $i \notin r'(y)$. Ahora sea $\langle r'', k''\rangle \in \mathcal{G}$ extensión común de $\langle r', k'\rangle$ y $\langle r, k\rangle$. Como $\langle r'', k''\rangle \leq \langle r', k'\rangle$,

$r''(x) \cap k' = r'(x)$ y $r''(x) \backslash r''(y) \subseteq k$. Como $i \in r'(x)$ entonces $i \in r''(x)$, y entonces $i \in k$.

Ahora veamos que para todo $n \in \omega$, $a_y \backslash a_x \nsubseteq n$. Sea $n \in \omega$ y sea $\langle p, q \rangle \in E_n^y \cap \mathcal{G}$, entonces $p(y) \cap n \neq \emptyset$. Supongamos que existe $\langle p', q' \rangle \in \mathcal{G}$ tal que $p'(x) = p(y)$. Entonces sea $\langle r, k \rangle$ extensión común. ■

Definición 4.4.2 Sea

$$\mathfrak{d} = min\{\kappa : (\exists \mathcal{F} \in [\omega^\omega]^\kappa)(\forall g \in \omega^\omega)(\exists f \in \mathcal{F})(g \leq^* f)\}.$$

Teorema 4.4.3 *El Axioma de Martin implica que* $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$.

Demostración: Es claro que si tenemos una familia de tamaño ω, entonces podemos encontrar una función que no es dominada por ninguna de las funciones de la familia. También tenemos que $|\omega^\omega| = \mathfrak{c}$, por lo tanto, $\omega_1 \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$. Supongamos que $\mathfrak{d} = \kappa < \mathfrak{c}$, y sea $\mathcal{F} \in [\omega^\omega]^\kappa$. Veamos que MA implica que existe una función que no es dominada por ninguna de las funciones de la familia.

Sea $\mathbb{P} = \{\langle s, F \rangle : s \in \omega^{<\omega}, F \in [\mathcal{F}]^{<\omega}\}$. Sean $\langle s, F \rangle, \langle s', F' \rangle \in \mathbb{P}$, vamos a decir que $\langle s, F \rangle \leq \langle s', F' \rangle$ si:

1. $s' \subseteq s$
2. $F' \subseteq F$
3. $(\forall n \in dom(s) \backslash dom(s'))(\forall f \in \mathcal{F})(s(n) > f(n))$

Primero veamos que $\mathbb{P}$ tiene la ccc. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}$ no numerable. Como $|\omega^{<\omega}| = \aleph_0$, existen $\langle s, F \rangle, \langle s, F' \rangle \in \mathcal{C}$, entonces $\langle s, F \cup F' \rangle$ es extensión común. Ahora definamos $D_n = \{\langle s, F \rangle \in \mathbb{P} : n \in dom(s)\}$ para cada $n \in \omega$. Veamos que para cada $n \in \omega$, D_n es denso en $\mathbb{P}$. Sea $\langle s, F \rangle \in \mathcal{F} \backslash D_n$. Entonces podemos extender a s con s' de la siguiente manera: Para cada $m \in n+1 \backslash dom(s)$, sea $s'(m) = max\{f(m) : f \in \mathcal{F}\} + 1$. Entonces $\langle s', F \rangle \leq \langle s, F \rangle$ y $\langle s', F \rangle \in D_n$.

Para cada $f \in \mathcal{F}$, sea $E_f = \{\langle s, F \rangle \in \mathbb{P} : f \in F\}$. Veamos que para cada $f \in \mathcal{F}$, E_f es denso. Sea $\langle s, F \rangle \in \mathbb{P} \backslash E_f$, entonces es claro que $\langle s, F \cup \{f\} \rangle \leq \langle s, F \rangle$ y que $\langle s, F \cup \{f\} \rangle \in E_F$.

Sea $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{E_f : f \in \mathcal{F}\}$. Es claro que $|\mathcal{D}| < \kappa$. Entonces $\mathcal{D}$ es una familia de κ densos y el Axioma de Martin implica que existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ que es un filtro $\mathcal{D}$-genérico.

Sea $h = \bigcup\{s : (\exists F \in [\mathcal{F}]^{<\omega})(\langle s, F \rangle \in \mathbb{P})\}$. Sea $n \in \omega$, entonces existe $\langle s, F \rangle \in \mathcal{G} \cap D_n$, entonces $n \in dom(s)$ y, por lo tanto, $n \in dom(h)$. Esto implica que $h \in \omega^\omega$. Ahora veamos que la familia $\mathcal{F}$ no domina a h.

Supongamos que existe $f \in \mathcal{F}$ tal que para todo $n > N$ $h(n) \leq f(n)$. Sea $\langle s_1, F_1 \rangle \in \mathcal{G} \cap E_f$, sea $m = max\{dom(s_1) + 1, N\}$ y sea $\langle s_2, F_2 \rangle \in \mathcal{G} \cap D_m$. Como $\mathcal{G}$ es un filtro, existe $\langle s, F \rangle \in \mathcal{G}$ que extiende a $\langle s_1, F_1 \rangle$ y a $\langle s_2, F_2 \rangle$. Es claro que $m \in dom(s)$ y como $\langle s, F \rangle$ es extensión de $\langle s_1, F_1 \rangle$, $s(m) > f(m)$, por lo tanto, $h(m) > f(m)$, lo cual es una contradicción. ■

Capítulo 5

Afirmaciones independientes de ZFC

"No hay verdades enteras: Todas las verdades son medias verdades"
- Alfred North Whitehead

Como ya he mencionado, el Axioma de Martin se formuló para sustituir a la Hipótesis del Continuo como axioma para agregarse a ZFC. Hasta ahora no se han agregado axiomas a ZFC, pero se siguen usando la Hipótesis del Continuo y el Axioma de Martin. La aplicación es la siguiente:

Como CH y MA+¬CH son consistentes con ZFC, si demostramos que para una cierta proposición P tenemos que CH implica P y MA+¬CH implica ¬P, entonces habremos demostrado que la proposición P es independiente de ZFC. En este capítulo presento pruebas de independencia de varias proposiciones usando CH y MA+¬CH.

5.1. Conjuntos de Sierpiński

Definición 5.1.1 Un conjunto no numerable $X \subseteq \mathbb{R}$ se llama **conjunto de Sierpiński** si $X \cap N$ es a lo más numerable para todo conjunto $N \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mu(N) = 0$.

Teorema 5.1.2 *Si X es un conjunto de Sierpiński, entonces X no es medible.*

Para demostrar este teorema, necesitaremos primero el siguiente lema.

Lema 5.1.3 *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es G_δ y $\mu(A) > 0$, entonces existe $F \subseteq A$ tal que $\mu(F) = 0$ y F es no numerable.*

Demostración: Sea $E = \bigcap G_n$ un conjunto no numerable con G_n abierto para todo $n \in \omega$, y sea C el conjunto de todos los $x \in E$, tales que si V es vecindad de x, entonces $|V \cap E| > \aleph_0$. C es no vacío, ya que si C es vacío, entonces existe una familia de intervalos con extremos racionales que cubre a E, y tales que cada intervalo sólo tiene una cantidad numerable de puntos de E y por lo tanto, E sería numerable.

Sean $I(0)$ y $I(1)$ dos intervalos disjuntos, cerrados y de longitud a lo más $1/3$ cuyos interiores intersectan a C y cuya unión está contenida en G_1. Prosiguiendo por inducción, supongamos que han sido escogidos 2^n intervalos $I(i_1, ..., i_n)$ (donde $i_k \in 2$) disjuntos y cerrados cuyos interiores intersectan a C y cuya unión está contenida en G_n. Sean $I(i_1, ..., i_{n+1})$ $(i \in 2)$ intervalos disjuntos, cerrados y de longitud a lo más $1/3^{n+1}$, que estén contenidos en $G_{n+1} \cap I(i_1, ..., i_n)$ y cuyos interiores intersecten a C.

Como C no tiene puntos aislados y $E \subseteq G_{n+1}$, dichos intervalos existen. Así hemos definido una familia de intervalos $I(i_1, ..., i_n)$ con dichas propiedades. Ahora sea $F = \bigcap_n \bigcup_{i_1 \dots i_n} I(i_1, ..., i_n)$. Veamos que F es el conjunto buscado.

Primero veamos que $|F| = \mathfrak{c}$. Para todo $x \in F$ existe una sucesión única $\langle i_k : k \in \omega \rangle$, tal que $x \in I(i_1, ..., i_n)$ para todo n, a cada sucesión $\langle i_k : k \in \omega \rangle$ le corresponde un punto en F. Sea $f : F \to [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ dada por $f(c) = (x)$ con x el número real cuya expansión binaria es $0.i_1 i_2 i_3 \cdots$. La función f es sobreyectiva, por lo tanto $|F| = \mathfrak{c}$.

Ahora veamos que $\mu(F) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe N tal que para todo $n > N$, se cumple que $2^n/3^n < \varepsilon$. Entonces sea $n > N$, así tenemos que $F \subseteq \bigcup int(I(i_1, ..., i_n))$, y $\mu(\bigcup I(i_1, ..., i_n) < \varepsilon$ porque $\mu(I(i_1, ..., i_n)) < 1/3^n$. ■

Ahora sí demostraremos el teorema.

Demostración: Supongamos que X es un conjunto de Sierpiński y que X es medible. Veamos que $\mu(X) \neq 0$ y que $\mu(X) \not> 0$. Supongamos que $\mu(X) = 0$, como X es no numerable, y $X \cap X = X$, entonces existe un conjunto de medida cero que tiene intersección no numerable con X, lo cual contradice que X sea un conjunto de Sierpiński. Ahora supongamos que $\mu(X) > 0$, entonces existen $\{E_n : n \in \omega\}$, subconjuntos compactos de X tales que $\mu(\bigcup_{n \in \omega} E_n) > 0$. Pero como $\bigcup_{n \in \omega} E_n$ es G_δ, al aplicar el lema anterior sabemos que existe un subconjunto no numerable de X que tiene medida 0, lo cual contradice que X sea un conjunto de Sierpiński. ■

Ahora veremos qué obtenemos al aplicar el Axioma de Martin o la Hipótesis del Continuo.

Lema 5.1.4 *Sea $\mathcal{G} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A$ es G_δ y $\mu(A) = 0\}$, entonces $|\mathcal{G}| = \mathfrak{c}$.*

Demostración: Puesto que $\mathbb{R}$ es segundo numerable, la cardinalidad de la familia de conjuntos abiertos es $\mathfrak{c}$. Por lo tanto, la cardinalidad de la familia de todos los conjuntos de tipo G_δ es $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Todo punto tiene medida 0, y todo punto es G_δ, por lo tanto, $|\{A : A \text{ es } G_\delta \text{ y } \mu(A) = 0\}| = \mathfrak{c}$. ■

Lema 5.1.5 *Si $E \subseteq \mathbb{R}$ y $\mu(E) = 0$, entonces existe $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que A es G_δ, $E \subseteq A$ y $\mu(A) = 0$.*

Demostración: Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto tal que $\mu(E) = 0$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{A}$ familia de abiertos tales que $E \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ y $\mu(\bigcup \mathcal{A}) \leq \varepsilon$. Para cada $\varepsilon = \frac{1}{n}$, sea $\mathcal{A}_n$ una familia de abiertos tal que $E \subseteq \bigcup \mathcal{A}_n$ y que $\mu(\bigcup \mathcal{A}_n) < \frac{1}{n}$. Sean $B_n = \bigcup \mathcal{A}_n$, como todo B_n es unión de abiertos, para todo $n \in \omega$, B_n es abierto. Sea $G = \bigcap_n B_n$. Como G es intersección de conjuntos abiertos, G es G_δ. Para todo $n \in \omega$, se tiene que $\mu(G) \leq \mu(\bigcup \mathcal{A}_n) \leq \frac{1}{n}$, por lo tanto, $\mu(G) = 0$. Como para todo $n \in \omega$, $E \subseteq B_n$, entonces $E \subseteq G$. ■

Teorema 5.1.6 *CH implica que existe un conjunto de Sierpiński en $\mathbb{R}$.*

Demostración: Supongamos CH. Construyamos una familia $\{N_\xi \subseteq \mathbb{R} : \xi < \omega_1\}$ tal que:

- $N_\eta \subseteq N_\xi$ para $\eta \leq \xi < \omega_1$.
- Para cualquier conjunto N tal que $\mu(N) = 0$ existe $\xi \leq \omega_1$ tal que $N \subseteq N_\xi$.

Sea $\mathcal{G} = \{A : A \text{ es } G_\delta \text{ y } \mu(A) = 0\}$. Por uno de los lemas anteriores, sabemos que $|\mathcal{G}| = \mathfrak{c}$, entonces sea $\mathcal{G} = \{A_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ una enumeración. Definamos a los N_ξ como sigue:

$N_0 = A_0$.

Supongamos que ya está definido N_ζ para $\zeta < \xi$, entonces sea $N_\xi = \bigcup_{\zeta<\xi} N_\zeta$.

Es claro que por construcción, $N_\eta \subseteq N_\xi$ para $\eta \leq \xi < \omega_1$. Veamos que para todo $N \subseteq \mathbb{R}$ nulo, existe $\xi \leq \omega_1$ tal que $N \subseteq N_\xi$. Sea $N \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mu(N) = 0$. Por el lema anterior sabemos que existe $A_\alpha \subseteq \mathcal{G}$ tal que $N \subseteq A_\alpha$. Pero $A_\alpha \subseteq N_\alpha$, por lo tanto, $N \subseteq N_\alpha$.

Sea $X = \{x_\xi : \xi < \omega_1\}$ escogiendo a cada $x_\xi \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{\eta<\xi} N_\eta$. Veamos que X es un conjunto de Sierpiński.

Sea $N \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mu(N) = 0$. Sabemos que existe $\xi < \omega_1$ tal que $N \subseteq N_\xi$. Entonces para todo $\zeta > \xi$, $N \cap \mathbb{R} \setminus \bigcup_{\eta<\zeta} N_\eta = \phi$. Por lo tanto, $|N \cap X| \leq |\xi| = \aleph_0$. Con esto queda demostrado que X es un conjunto de Sierpiński. ■

Teorema 5.1.7 *El Axioma de Martin más la negación de la Hipótesis del Continuo implica que no existen conjuntos de Sierpiński.*

Demostración: Supongamos que X es un conjunto de Sierpiński. Por definición, $|X| > \aleph_0$. Si $|X| < \mathfrak{c}$, entonces por el Corolario 4.2.3, MA implica que $\mu(X) = 0$, así que si X es de Sierpiński, entonces $|X| \geq \mathfrak{c}$. Pero entonces existe $A \subseteq X$ tal que $\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$, por lo tanto $\mu(A) = 0$, entonces $X \cap A$ es no numerable, contradiciendo que X es un conjunto de Sierpiński. ■

5.2. Producto de Órdenes con la ccc

Definición 5.2.1 Sean $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ dos órdenes parciales. El orden parcial del producto $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ se define como $\langle p_1, q_1 \rangle \leq \langle p_2, q_2 \rangle$ si y sólo si $p_1 \leq p_2$ y $q_1 \leq q_2$.

Teorema 5.2.2 *La Hipótesis del Continuo implica que existen* $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1$ *con la ccc tales que* $\mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$ *no tiene la ccc.*

Demostración: Sean K_0 y K_1 dos subconjuntos ajenos no numerables de $[\omega_1]^2$. Para $i \in 2$ sean $P_i = \{s \in [\omega_1]^{<\aleph_0} : [s]^2 \subseteq K_i\}$ y sean $\mathbb{P}_i = \langle P_i, \leq \rangle$ donde $s \leq t$ si y sólo si $t \subseteq s$. Por vacuidad, $\{\alpha\} \in \mathbb{P}_i$ para todo $\alpha \in \omega_1$. Esto muestra que $\mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$ no tiene la ccc ya que $\{\langle \{\alpha\}, \{\alpha\} \rangle : \alpha \in \omega_1\}$ es una anticadena.

Ahora veamos cómo deben ser los K_i para garantizar que $\mathbb{P}_i$ tenga la ccc. Supongamos que $\{t_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es un subconjunto no numerable de $\mathbb{P}_i$. Usando el Δ-Lema, podemos encontrar $\Gamma \subseteq \omega_1$ tal que $\{t_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ forma un Δ-sistema con raíz r. Para cada $\alpha \in \Gamma$, sea $s_\alpha = t_\alpha \setminus r$. Entonces, $[t_\alpha \cup t_\beta]^2 = [t_\alpha]^2 \cup [t_\beta]^2 \cup \{\{x, y\} : x \in s_\alpha \text{ y } y \in s_\beta\}$. Sabemos que t_α y t_β son compatibles si y sólo si $[t_\alpha \cup t_\beta]^2 \subseteq K_i$, y ya sabemos que $[t_\alpha]^2 \subseteq K_i$ y que $[t_\beta]^2 \subseteq K_i$. Sólo falta ver que $\{\{x, y\} : x \in X \text{ y } y \in Y\} \subseteq K_i$. Usemos la notación $X \otimes Y = \{\{x, y\} : x \in X \text{ y } y \in Y\}$. El siguiente lema concluye la demostración. ■

Lema 5.2.3 *La Hipótesis del Continuo implica que existen* $K_i \subseteq [\omega_1]^2$, $i \in 2$, *no numerables y ajenos tales que si* $S \subseteq [\omega_1]^{<\aleph_0}$ *es una familia no numerable de conjuntos ajenos por pares tales que para cada* $s \in S$ *se cumple que* $[s]^2 \subseteq K_i$, *entonces existen* $s, t \in S$ *tales que* $s \otimes t \subseteq K_i$.

Demostración: Usando CH, enumeraremos a todas las secuencias numerables de subconjuntos finitos de ω_1 por $\{S\mu : \mu \in \omega_1\}$. Es decir, $S_\mu = \langle S_\mu^n : n \in \omega \rangle$. Por recursión sobre $\alpha \in \omega_1$, vamos a definir conjuntos disjuntos $K_i(\alpha) \subseteq \alpha$ con la siguiente propiedad:

Si $\{n \in \omega : S_\mu^n \otimes X \subseteq \bigcup\{K_i(\beta) \otimes \{\beta\} : \beta < \alpha\}$ es infinito, entonces $\{n \in \omega : S_\mu^n \otimes (X \cup \{\alpha\}) \subseteq \bigcup\{K_i(\beta) \otimes \{\beta\} : \beta \leq \alpha\}$ es infinito.

Supongamos que hemos escogido $K_i(\beta)$ para todo $\beta < \alpha$, construyamos ahora a $K_i(\alpha)$: Sea $\{\langle i_m, \mu_m, X_m \rangle : m \in \omega\}$ una enumeración de todas las ternas $\langle i, \mu, X \rangle$ que cumplen

- $i \in 2$
- $\mu < \alpha$ y $\bigcup\{S_\mu^n : n \in \omega\} \subseteq \alpha$
- $X \in [\alpha]^{<\aleph_0}$
- $\{n \in \omega : S_\mu^n \otimes X \subseteq \bigcup\{K_i(\beta) \otimes \{\beta\} : \beta < \alpha\}\}$ es infinito.

Para cada $m \in \omega$ sea

$$I_m = \{n \in \omega : S_{\mu_m}^n \otimes X_m \subseteq \bigcup\{K_{i_m}(\beta) \otimes \{\beta\} : \beta < \alpha\}\}.$$

Sea $A = \{S_{\mu_m}^n : n \in I_m \text{ y } m \in \omega\}$. Ahora construyamos $B_i \subseteq A$ disjuntos tales que para cada $i \in 2$ y cada $m \in \omega$ el conjunto $\{n \in I_m : S_{\mu_m}^n \in B_i\}$ es infinito.

Sea $B_0^0 = S_{\mu_0}^0$ y sea $B_1^0 = S_{\mu_0}^n$ para algún n tal que $S_{\mu_0}^n \cap B_1^0 = \emptyset$. Supongamos que hemos escogido a B_0^p y B_1^p para todo $p < n < \omega$. Como $\bigcup_{p<n} B_0^p$ y $\bigcup_{p<n} B_1^p$ son finitos, entonces para todo $m < \omega$ existen $B_1^n \in S_{\mu_m}$ disjunto de $\bigcup_{p<n} B_0^p$ y $B_0^n \in S_{\mu_m}$ disjunto de $\bigcup_{p<n} B_1^p$. Ahora es claro que siempre podemos escoger al siguiente B_0^i en la fila μ_m que sea, entonces vamos a escogerlos de la siguiente manera: Primero vamos a escogerlos en la fila 1, después en la fila 2, luego en la fila 1 otra vez, luego la 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, y así sucesivamente. Sea $B_i = \bigcup n < \omega B_i^n$.

Sean $K_i(\alpha) = B_i$, es claro que $K_i(\alpha) \subseteq \alpha$ y que para todos α,$\beta \in \omega_1$, $K_i(\alpha) \cap K_i(\beta) = \emptyset$.

Ahora supongamos que $\{n \in \omega : S_\mu^n \otimes X \subseteq \bigcup\{K_i(\beta) \otimes \{\beta\} : \beta < \alpha\}$ es infinito, sean $K_i = \bigcup\{K_i(\alpha) \otimes \{\alpha\} : \alpha \in \omega_1\}$.

Veamos que K_i son los conjuntos que buscamos. Sea S cualquier colección no numerable de subconjuntos finitos de ω_1 y sea $i \in 2$ tal que para cada $s \in S$, $[s]^2 \subseteq K_i$. Ahora escojamos $\mu \in \omega_1$ tal que $S_\mu \subseteq S$, esto siempre se puede porque para $N \subseteq S$ numerable existe μ tal que $S_\mu \subseteq N$. Escojamos también $\beta \in \omega_1$ tal que $\bigcup S_\mu \subseteq \beta$ y $t \in S$ tal que $t \cap \beta = \emptyset$. Enumeremos a los elementos de t de tal forma que $t = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ donde $\alpha_1 < ... < \alpha_n$. Con $X = \emptyset$ y $\alpha = \alpha_1$, se satisface que $\{n \in \omega : S_\mu^n \otimes X \subseteq K_i\}$ es infinito, por lo tanto, $\{n \in \omega : S_\mu^n \otimes \{\alpha_1\} \subseteq K_i\}$ es infinito. Podemos repetir este paso con cada α_n hasta obtener que $\{n \in \omega : S_\mu^n \otimes t \subseteq K_i\}$ es infinito. Entonces sea $s = S_\mu^n$ con $n \in \{n \in \omega : S_\mu^n \otimes t \subseteq K_i\}$ y así ya tenemos $s, t \in S$ tales que $s \otimes t \subseteq K_i$. ■

A continuación veremos que la situación cambia completamente si asumimos $MA + \neg CH$.

Definición 5.2.4 Se dice que un subconjunto S de un orden parcial $\mathbb{P}$ es **conexo** si cualesquiera dos elementos de S son compatibles.

Definición 5.2.5 Se dice que un orden parcial $\mathbb{P}$ tiene la **propiedad K** si todo subconjunto no numerable de $\mathbb{P}$ tiene un subconjunto conexo no numerable.

Como veremos a continuación, la propiedad K es mucho más fuerte que la propiedad de satisfacer la ccc.

Teorema 5.2.6 *Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial con la propiedad K, entonces $\mathbb{P}$ tiene la ccc.*

Demostración: Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial con la propiedad K, y sea $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}$ no numerable. Como $\mathbb{P}$ tiene la propiedad K y $\mathcal{F}$ es no numerable, existen $P, P' \in \mathcal{F}$ tales que P y P' son compatibles, por lo tanto, $\mathcal{F}$ no es una anticadena, y así vemos que $\mathbb{P}$ tiene la ccc. ∎

Teorema 5.2.7 *Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial con la propiedad K y sea $\mathbb{Q}$ un orden parcial con la ccc. Entonces, $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ tiene la ccc.*

Demostración: Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ como en el enunciado del teorema. Sea $\mathcal{C} = \{\langle p_\alpha, q_\alpha\rangle : \alpha \in \omega_1\}$ un subconjunto no numerable del producto. Como $\mathbb{P}$ tiene la propiedad K, existe $\Gamma \subseteq \omega_1$ no numerable tal que para todos $\alpha, \beta \in \Gamma$, p_α y p_β son compatibles. Como $\mathbb{Q}$ tiene la ccc, entonces existen $\alpha, \beta \in \Gamma$ tales que q_α y q_β son compatibles. Entonces $\langle p_\alpha, q_\alpha\rangle$ y $\langle p_\beta, q_\beta\rangle$ son compatibles. ∎

Ya tenemos que la propiedad K es más fuerte que la propiedad de satisfacer la ccc. Ahora veremos que es estríctamente más fuerte. A continuación se da un orden parcial con la ccc que no tiene la propiedad K.

Ejemplo: La topología de la línea de Souslin, ordenada parcialmente por contención tiene la ccc. Por el lema que se demostrará a continuación, el producto de dos líneas de Souslin no tiene la ccc, entonces por el teorema anterior, la línea de Souslin no tiene la propiedad K.

Lema 5.2.8 *Sea X una línea de Souslin. Entonces $X \times X$ no tiene la ccc.*

Demostración: Por inducción sobre $\alpha \in \omega_1$, encontremos $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \in X$ tales que:

1. $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$.

2. Los intervalos (a_α, b_α) y (b_α, c_α) no son vacíos.

3. $(a_\alpha, c_\alpha) \cap \{b_\xi : \xi < \alpha\} = \emptyset$.

Sea W el conjunto de todos los puntos aislados de X. Como los puntos aislados son abiertos y X tiene la ccc, entonces $|W| \leq \aleph_0$. Supongamos que hemos escogido $a_\beta, b_\beta, c_\beta$ con $\beta < \alpha$. Como X no es separable,

$$X \backslash cl(W \cup \{b_\beta : \beta < \alpha\})$$

es un conjunto abierto no vacío, y por lo tanto contiene un intervalo abierto (a_α, c_α). Como (a_α, c_α) no tiene puntos aislados, es infinito, y entonces podemos escoger $b_\alpha \in (a_\alpha, c_\alpha)$ tal que $(a_\alpha, b_\alpha) \neq \emptyset$ y $(b_\alpha, c_\alpha) \neq \emptyset$.

Sea $U_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha) \times (b_\alpha, c_\alpha)$. Por (2) $U_\alpha \neq \emptyset$. Si $\xi < \alpha$, entonces $U_\xi \cap U_\alpha = \emptyset$, porque por (3), si $b_\xi \leq a_\alpha$ entonces $(a_\xi, b_\xi) \cap (a_\alpha, b_\alpha) = \emptyset$ y si $b_\xi \geq a_\alpha$ entonces $(b_\xi, c_\xi) \cap (b_\alpha, c_\alpha) = \emptyset$. Así, $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una anticadena no numerable de X^2. ∎

Definición 5.2.9 Se dice que un subconjunto F de un preorden $\mathbb{P}$ es **centrado** si para todo subconjunto finito $H \subseteq F$ existe $p \in \mathbb{P}$ tal que para todo $q \in H$ tenemos que $p \leq q$. En este caso también decimos que $inf(H) = \{p \in \mathbb{P} : (\forall q \in H)(p \leq q)\}$.

Teorema 5.2.10 *El Axioma de Martin implica que todo orden parcial con la ccc también tiene la propiedad K.*

Para demostrar este teorema, necesitamos enunciar y demostrar un lema:

Lema 5.2.11 *Si $\mathbb{P}$ es un orden parcial con la ccc y $S \in [\mathbb{P}]^{\aleph_1}$ entonces existe $S' \in [S]^{\aleph_1}$ tal que para cualquier subconjunto centrado finito $F \subseteq S'$, hay una cantidad no numerable de $p \in S'$ tales que $F \cup \{p\}$ es centrado.*

Demostración: Sean $\mathbb{P}$ y S como en el enunciado del lema. Sea $S'' = \{p \in inf(F) : F \text{ es centrado}, F \in [S]^{<\aleph_0}\}$. Sea $S''' = \{p \in S'' : p \text{ es compatible con a lo más } \aleph_0 \text{ elementos de } S''\}$. S'' debe ser numerable, ya que de lo contrario podemos elegir una cantidad no numerable de elementos incompatibles, contradiciendo que $\mathbb{P}$ tiene la ccc. Sea $S' = S \backslash S'''$. ∎

Ahora sí demostraremos el teorema.

Demostración: Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial con la ccc. Sea $S \in [\mathbb{P}]^{\aleph_1}$ y sea $S' = \{p_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ el subconjunto de $\mathbb{P}$ que obtenemos al aplicar el lema anterior a $\mathbb{P}$ y S. Sea $\mathbb{Q} = \{F \in [S']^{<\aleph_0} : F \text{ es centrado}\}$ preordenado por contención. Veamos que $\mathbb{Q}$ tiene la ccc. Sea A una anticadena no numerable. Sea $A' = \{p_F : (p_F \in inf(F)), (F \in A)\}$, como A es una anticadena en $\mathbb{Q}$, los p_F no pueden ser compatibles. Entonces A' es una anticadena no numerable en $\mathbb{P}$, contradiciendo que $\mathbb{P}$ tiene la ccc.

Para cada $\alpha \in \omega_1$ sea $D_\alpha = \{F \in \mathbb{Q} : F \cap \{p_\beta : \beta \geq \alpha\} \neq \emptyset\}$. Veamos que D_α es denso en $\mathbb{Q}$ para cada $\alpha < \omega_1$. Sea $F \in \mathbb{Q} \backslash D_\alpha$. Por el lema anterior sabemos que hay una cantidad no numerable de $p \in S'$ tales que $F \cup \{p\}$ es centrado. Entonces existe $p_\beta \in S'$ con $\beta > \alpha$ tal que $F \cup \{p_\beta\}$ es centrado, y así $F \cup p_\beta$ es extensión de F. Sea $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$

Apliquemos MA a $\mathbb{Q}$. Sea $\mathcal{F}$ un filtro $\mathcal{D}$-genérico. Sea $\mathcal{G} = \bigcup \mathcal{F}$. Veamos que $\mathcal{G}$ es no numerable. Supongamos que $\mathcal{G}$ es numerable, entonces existe $\alpha < \omega_1$ tal que $\mathcal{G} \cap \{p_\beta : \beta \geq \alpha\} = \emptyset$, lo cual contradice que $\mathcal{G}$ sea $\mathcal{D}$-genérico. Ahora veamos que $\mathcal{G}$ es un subconjunto centrado de $\mathbb{P}$. Sea $H \subseteq \mathcal{G}$ finito. Entonces $H \subseteq \bigcup_{i<N} F_i$ para algún N finito. Como $\mathcal{F}$ es filtro, existe $F \in \mathcal{F}$ que extiende a todos los F_i, es decir, que $\bigcup_{i<N} F_i \subseteq F$. Como $F \in \mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}$, F es centrado, y entonces existe $p \in \mathbb{P}$ tal que para todo $h \in H$ tenemos que $p \leq h$. Así concluimos que $\mathcal{G}$ es una familia centrada no numerable de $\mathbb{P}$. Como $\mathcal{G}$ es centrado, entonces cualesquiera dos elementos de $\mathcal{G}$ son compatibles, y entonces tenemos que $\mathbb{P}$ tiene la propiedad K. ■

El siguiente teorema y corolario se siguen directamente de los teoremas 5.2.7 y 5.2.10.

Teorema 5.2.12 *Sean $\mathbb{P}_0$ y $\mathbb{P}_1$ dos órdenes parciales con la ccc. El Axioma de Martin implica que $\mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$ tiene la propiedad K.*

Corolario 5.2.13 *El Axioma de Martin implica que el producto de dos órdenes parciales con la ccc tiene la ccc.*

5.3. Las Proposiciones $\diamondsuit$ y $\clubsuit$

Definición 5.3.1 Sea $\diamondsuit$ la siguiente proposición: Existe una sucesión

$$\langle D_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$$

con $D_\alpha \subseteq \alpha$ para $\alpha < \omega_1$ tal que para todo subconjunto $X \subseteq \omega_1$, el conjunto $\{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha = D_\alpha\}$ es estacionario.

Esta proposición $\diamondsuit$ es uno de los primeros principios combinatorios usados principalmente para hacer construcciones recursivas donde la anticipación de algunos subconjuntos "típicamente" de ω_1 es importante. El principio fue formulado por Jensen.

Teorema 5.3.2 *La proposición $\diamondsuit$ implica la Hipótesis del Continuo.*

Demostración: Supongamos $\diamondsuit$. Sea $\langle D_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ con $D_\alpha \subseteq \alpha$ para $\alpha < \omega_1$ tal que para todo subconjunto $X \subseteq \omega_1$, el conjunto $\{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha = D_\alpha\}$ es estacionario. Definamos una función $f : \omega_1 \to \mathcal{P}$ como sigue: $f(\alpha) = D_\alpha \cap \omega$. Veamos que f es sobreyectiva. Sea $X \subseteq \omega$, entonces $\{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha = D_\alpha\}$ es estacionario, y por lo tanto no acotado. Sea $\beta \in \omega_1$ tal que $\beta > \omega$ y $X \cap \beta = D_\beta$. Entonces $f(\beta) = X$. ■

El siguiente es otro de los principios combinatirios favoritos entre los topólogos conjuntistas. Fue formulado por A. Ostaszewski.

Definición 5.3.3 Sea $\clubsuit$ la siguiente proposición: Existe una sucesión creciente de ordinales límite numerables $\langle \lambda_\alpha : \omega \leq \alpha < \omega_1 \rangle$ y una sucesión $\langle s(\lambda_\alpha) : \omega \leq \alpha < \omega_1 \rangle$ tales que:

- $s(\lambda_\alpha)$ es una ω-sucesión cofinal en λ_α,
- todo $X \subseteq \omega_1$ no numerable contiene a algún $s(\lambda_\alpha)$.

Teorema 5.3.4 *La proposición $\diamondsuit$ implica la proposición $\clubsuit$.*

Demostración: Sea $\langle D_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ una $\diamondsuit$-sucesión. Sea $\Lambda = \{\alpha < \omega_1 : \alpha$ es límite y D_α es cofinal en $\alpha\}$, ordenemos a $\Lambda = \{\alpha_\beta : \beta < \omega_1\}$ tal que $\beta < \beta' \Rightarrow \alpha_\beta < \alpha_{\beta'}$. Sea $\langle S_\beta : \beta < \omega_1 \rangle$ tal que $S_\beta = D_{\alpha_\beta}$ para $\beta < \omega_1$. Veamos que $\langle S_\beta : \beta < \omega_1 \rangle$ es una $\clubsuit$-sucesión.

Es claro que $otp(S_\beta) = \omega$, y que $sup(S_\beta) = \beta$, veamos que para todo $X \subseteq \omega_1$ no numerable, existe $\beta < \omega_1$ tal que $S_\beta \subseteq X$. Sea $X \in \omega_1$ no numerable, entonces $\overline{X}$ es cerrado y no acotado. Entonces $C = lim(\omega_1) \cap \overline{X}$ es cerrado y no acotado. Como $\langle D_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ es una $\diamondsuit$-sucesión,

$$S = \{\alpha < \omega_1 : D_\alpha = X \cap \alpha\}$$

es estacionario. Tomemos $\beta < \omega_1$ tal que $\alpha_\beta \in C \cap S$. Entonces $D_{\alpha_\beta} = S_\beta \subseteq X$. ■

Teorema 5.3.5 *El Axioma de Martin más la Hipótesis del Continuo implican la negación de la proposición $\clubsuit$.*

Demostración: Sea $\langle \lambda_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ una $\clubsuit$-sucesión, con S_α ω-sucesiónes cofinales con λ_α. Usando MA + $\neg$CH construyamos un conjunto $X \subseteq \omega_1$ no numerable que no contiene a ningún S_α.

Sea $\mathbb{P} = \{\langle p, F \rangle : p \in [\omega_1]^{<\aleph_0},\ F \in [lim(\omega_1)]^{<\aleph_0}\}$. Vamos a decir que $\langle p, F \rangle \leq \langle q, F' \rangle$ si

- $q \subseteq p$,
- $F' \subseteq F$ y
- $(p \backslash q) \cap \bigcup_{\alpha \in F'} S_\alpha = \emptyset$.

Veamos que $\mathbb{P}$ tiene la ccc. Sea $\mathcal{F}' \subseteq \mathbb{P}$ no numerable. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ la familia no numerable que resulta de aplicar el Δ-lema a la primera y segunda coordenada de los elementos de $\mathcal{F}'$. Sea $\langle p_0, F_0 \rangle \in \mathcal{F}$, supongamos que hemos escogido $\langle p_\beta, F_\beta \rangle$ con $\beta < \alpha < \omega_1$, como tenemos una cantidad numerable de F_β, $\bigcup_{\beta < \alpha} \bigcup_{\gamma \in F_\beta} S_\gamma$ es acotado, y entonces existe $\langle p, F \rangle \in \mathcal{F}$ tal que $p \backslash p_\beta \cap \bigcup_{\alpha \in F_\beta} = \emptyset$. Sea $\langle p_\alpha, F_\alpha \rangle = \langle p, F \rangle$. Como $otp(\omega + \omega + 1) \neq otp(\omega)$, existe p_α tal que $p_\alpha \cap S_\alpha = \emptyset$ para todo $\alpha \in F_{\omega+\omega+1}$. Veamos que

$$\langle p_{\omega+\omega+1} \cup p_\alpha, F_{\omega+\omega+1} \cup F_\alpha \rangle$$

es extensión de $\langle p_\alpha, F_\alpha\rangle$ y de $\langle p_{\omega+\omega+1}, F_{\omega+\omega+1}\rangle$. Es claro que se cumplen las primeras dos condiciones. Por construcción $(p_{\omega+\omega+1}\backslash p_\alpha) \cap \bigcup_{\beta\in F_\alpha} S_\beta = \emptyset$, y escogimos p_α de tal modo que $(p_\alpha\backslash p_{\omega+\omega+1}) \cap \bigcup_{\beta\in F_{\omega+\omega+1}} S_\beta = \emptyset$. Por lo tanto, $\mathbb{P}$ tiene la ccc.

Para cada $\alpha \in \omega_1$, sea $D_\alpha = \{\langle p, F\rangle : p\backslash\alpha \neq \emptyset\}$. Para todo $\alpha \in \omega_1$, D_α es denso porque para todo $\langle p, F\rangle \in \mathbb{P}$. $\langle p \cup sup\{\xi \in F \cup \alpha\}+1, F\rangle \leq \langle p, F\rangle$. Para cada $\alpha \in lim(\omega_1)$, sea $E_\alpha = \{\langle p, F\rangle : \alpha \in F\}$. Los E_α son densos porque para todo $\langle p, F\rangle$, $\langle p, F \cup \{\alpha\}\rangle \leq \langle p, F\rangle$. Sea $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \cup \{E_\alpha : \alpha \in lim(\omega_1)\}$. $\mathcal{D}$ es una familia de $\aleph_1$ subconjuntos densos, por MA, sea $\mathcal{G}$ un filtro $\mathcal{D}$-genérico. Sea $X = \bigcup\{p : (\exists F)(\langle p, F\rangle \in \mathcal{G})\}$. Veamos que X es el conjunto buscado. Sea $\alpha \in \omega_1$ y sea $\langle p, F\rangle \in \mathcal{G} \cap D_\alpha$, entonces $p\backslash\alpha \subseteq X\backslash\alpha \neq \emptyset$, por lo tanto, X no es acotado en ω_1, y entonces es no numerable. Sea S_α una de las ω-sucesiones de la $\clubsuit$-sucesión, veamos que $S_\alpha \nsubseteq X$. Sea $\langle p, F\rangle \in \mathcal{G} \cap E_\alpha$. Como S_α es numerable y p es finito, $S_\alpha \nsubseteq p$. Sea $\langle p', F'\rangle \in \mathcal{G}$, como $\mathcal{G}$ es filtro, existe $\langle q, G\rangle \in \mathcal{G}$ que es extensión común, entonces $p'\backslash p \subseteq q\backslash p$ y como $\alpha \in F$, $q\backslash p \cap S_\alpha = \emptyset$. Entonces $S_\alpha \nsubseteq X$. ■

El Axioma de Martin y la proposición $\diamondsuit$ no son compatibles, es decir que tienen consecuencias contradictorias. Sin demostración presento el siguiente resultado que es la contraparte del Teorema 4.3.9. El espacio que satisface la conclusión del siguiente teorema se conoce como **línea de Ostaszewski** y tiene varias aplicaciones. En cierto modo una línea de Ostaszewski es un espacio muy parecido a un espacio métrico, en otro sentido es un espacio muy lejos de ser metrizable.

Teorema 5.3.6 *La proposición $\diamondsuit$ implica que existe un espacio topológico de cardinalidad $\aleph_1$ que es perfectamente normal, numerablemente compacto, localmente numerable, localmente compacto pero que no es compacto.* ■

Bibliografía

[B] J. Bagaria *Everything you wanted to know about forcing and didn't know where to find it.*

www.icrea.es/ficheros/PaginaPersonal/Secciones/fsec_7106.doc.

[B_2] R. G. Bartle *The Elements of Integration and Lebesgue Measure* Wiley Classics Library, 1966.

[D] K. J. Devlin *Variations on* $\diamondsuit$. The Journal of Symbolic Logic, Vol.44, No. 1, 1979 pp. 51-58.

[F] A. Flores, F. Herández, et. al *Conjuntos Especiales de los Números Reales*. Pre-publicación. www.fismat.umich.mx/~fhernandez/Papers/especiales.pdf.

[H] F. Hernández Hernández *Teoría de Conjuntos. Una introducción.* Aportaciones matemáticas, Sociadad matemática mexicana, 2003.

[K] K. Kunen *Set Theory* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Vol. 102. 1980.

[M] D.A. Martin y R.M. Solovay *Internal Cohen Extensions*. Annals of Mathematical Logic, Vol. 2, No. 2, 1970 pp. 143-178.

[M_2] A. W. Miller *Special Subsets of the Real Line*. Handbook of Set-Theoretic Topology, 1984 pp. 201-234.

[O] A. J. Ostaszewski *On Countably Compact, Perfectly Normal Spaces.*

[O_2] J. C. Oxtoby *Measure and Category.* Springer, 1980.

[R] J. Roitman *Basic J and L.* Handbook of Set-Theoretic Topology, 1984 pp. 295-326.

[V] J. Van Mill *An Introduction to* β_ω. Handbook of Set-Theoretic Topology, 1984 pp. 503-568.

[W] W. Weiss *Countably compact spaces and Martin's Axiom.* Can. J. Math., Vol. XXX, No.2, 1978, pp. 243-249.

[W_2] W. Weiss *Versions of Martin's Axiom*. Handbook of Set-Theoretic Topology, 1984 pp. 827-886.

Índice alfabético